

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIÈNE

THÈSE

Présentée

Pour l'obtention du diplôme de : **MAGISTER**

En : **MATHEMATIQUES**

Option : **PROBABILITES-STATISTIQUES**

Par :

Mlle BRARA NADIA

THEME

**ANALYSE MULTI-ÉCHELLE POUR LA DÉTECTION DES
SINGULARITÉS D'UN PROCESSUS TEMPOREL.
APPLICATION AUX DONNÉES DE NOMBRE DE TÂCHES
SOLAIRES.**

Soutenue publiquement le 16 Juin 2004, devant le jury composé de :

Mr- A. AISSANI, Professeur à l' U.S.T.H.B, **Président.**

Mr- M. EL BAHI, Chargé de cours à l'U.S.T.H.B, **Directeur de thèse.**

Mr- K. BOUKHATELA, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B, **Examineur.**

Mr- M. HAMOUDI, Professeur à l'USTHB, **Examineur.**

Mr- O. ANES, Maître de conférences à l'INPS, **Examineur.**

Mr- A. HOUACINE, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B, **Examineur.**

Mr- A. KESSAB, Chargé de cours à l'U.S.T.H.B, **Examineur.**

*« Je dédie cette thèse à mes
parents, à la mémoire de Na Fathma et
tous ceux qui me sont chers.
En particulier, SAADI.»*

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur El-Bahi, mon directeur de thèse chargé de cours à l' USTHB, pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse, tout en lui exprimant ma totale reconnaissance pour tous les efforts qu'il a fournis afin d'assurer l'aboutissement de ce travail.

L' application de la transformée en ondelettes aux données réelles n'aurait pas vu le jour sans une intense collaboration avec Monsieur Hamoudi, professeur à l' USTHB. Ses conseils et renseignements m'ont été très précieux. Je tiens à le remercier, pour m'avoir permis d'accéder à son laboratoire et d'utiliser les moyens y existants. Je tiens aussi à lui exprimer combien j'ai apprécié de travailler avec lui et je le remercie sincèrement pour l'honneur qu'il m'a fait de juger ce travail.

Mes remerciements vont également au président du jury, Monsieur Aissani, professeur à l' USTHB, à Monsieur Boukhatela, professeur à l' USTHB, à Monsieur Houacine, Maître de conférences à l' USTHB, à Monsieur Anes, Maître de conférences à l'INPS et enfin à monsieur Kessab, chargé de cours à l' USTHB, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.

Enfin, mes vifs remerciements à toute l'équipe de laboratoire 55, du département de Géophysique, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Table des Matières:

Introduction générale	4
1 Analyse temps-fréquence et ondelettes.	6
1.1 Introduction.	6
1.2 L'analyse d'une fonction.	6
1.2.1 Définitions.	6
1.2.2 Propriétés :	8
1.2.3 Localisation temps - fréquence (Principe d'incertitude)	9
1.2.4 Ondelettes et moments.	10
1.2.5 Méthode de calcul d'un coefficient en ondelettes.	11
1.3 Formule de reconstruction.	11
1.4 Représentation temps-fréquence.	17
1.4.1 L'analyse du signal par ondelettes.	17
1.4.2 La synthèse du signal par ondelettes.	17
1.5 Décomposition d'une fonction en ondelettes.	18
1.5.1 Espaces d'approximation et détail.	19
1.5.2 Base d'ondelettes orthonormée :	20
1.6 Algorithme pyramidal.	21
2 Estimation non linéaire par ondelettes orthogonales et réduction de bruit.	25
2.1 Introduction :	25
2.2 Méthodes adaptives sur les espaces fonctionnels.	25
2.3 Transformée en ondelettes d'un signal bruité.	26
2.4 Filtrage par seuillage des coefficients d'ondelettes.	27
2.5 La procédure du seuillage.	29
2.6 Sélection d'une méthode non linéaire :	30
2.7 Choix de seuil.	32

2.7.1	Variance et biais.	33
2.7.2	Comportement asymptotique du seuil au risque minimum.	33
2.7.3	Réduction du risque.	36
2.8	Extention au bruit coloré.	39
2.8.1	Stationnarité et la transformée en ondelettes d'un bruit corrélé.	39
2.8.2	Estimation d'une fonction par ondelettes :	40
2.8.3	Seuillage d'un bruit coloré :	41
2.9	Qualité de reconstruction.	42
3	Analyse multi-échelle par la transformée en ondelettes.	43
3.1	Introduction	43
3.2	Ondelettes et régularité globale et locale des fonctions.	43
3.2.1	Convergence ponctuelle de la formule de reconstruction.	43
3.2.2	Régularité Hölderienne.	44
3.3	Approche multi-échelle par la transformée en ondelettes.	53
3.3.1	Extréma de la transformée en ondelettes et les zéros crossing :	53
3.3.2	Quantification locale de la régularité.	55
3.4	Méthode de traitement :	57
4	Analyse des données de nombre de tâches solaires.	58
4.1	Introduction.	58
4.2	Généralité sur le Soleil.	58
4.2.1	Le Soleil.	58
4.2.2	Tâches solaires :	59
4.2.3	Effet de tâches solaires :	59
4.3	Signal synthétique :	61
4.4	Performance du débruitage	63
4.4.1	Un bruit blanc gaussien	63
4.5	Application de la transformée en ondelettes à la détection et à la spécification des singularités.	84
4.5.1	Détection et spécification des singularités.	84
4.5.2	Analyse en ondelettes du cycle N ⁰ 24.	86
4.6	Analyse de la série de nombre de tâches solaires.	98
4.6.1	Réduction du bruit.	99

4.6.2	Détection et spécification des singularités.	100
4.7	Conclusion	103
	Conclusion générale	104
	Références bibliographiques :	105

Introduction générale :

Conçues à l'origine pour des phénomènes de diffusion et des états d'équilibre, les séries de Fourier décomposent une fonction en harmoniques. L'analyse de la fonction se faisait à travers les coefficients de Fourier et la synthèse par la série de Fourier associée.

L'analyse temps-fréquence est un enjeu principal en traitement du signal. Pour étudier les signaux transitoires, l'analyse fréquentielle utilisant la transformée de Fourier se devait d'être aussi localisée dans le temps. D.Gabor introduit, en 1946, une analyse temps-fréquence utilisant une fenêtre temporelle (fonction fenêtre) pour localiser l'analyse de Fourier. L'étude complète de la fonction nécessitait le glissement de cette fenêtre le long de l'axe temporel.

J.Morlet, en 1982, modifia les "ondelettes" de Gabor et fut à l'origine de l'apparition de ce nouvel outil mathématique. La plus grande partie de la théorie des ondelettes, tant au niveau des idées théoriques que des applications pratiques, était connue bien avant leur apparition comme nouvel outil mathématique [KL95].

L'analyse multi-échelle développée par S.Mallat (1982), se retrouve déjà dans les travaux de Littlewood-Paley et Stein (1930). Elle vise la caractérisation des structures locales auxquelles la transformée de Fourier ne pourrait pas accéder directement. La formule de A.P. Calderon est une décomposition de l'identité et s'écrit pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w f(a, b) \Psi_{a,b} \frac{da}{a^2} db$$

avec

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \left| \hat{\psi}(\xi) \right|^2 \frac{d\xi}{\xi} (\prec +\infty)$$

A l'exemple de la synthèse de Fourier, la fonction f se reconstruit par la superposition des $\psi_{a,b}$. En discrétisant cette formule, J. Morlet (1982) mettait au point un nouvel outil mathématique pour les traitements numériques. Il permet l'analyse et la synthèse des signaux transitoires. Cette situation est fréquente en géomagnétisme et concentre une part importante de l'information.

Les données expérimentales sont systématiquement entachées de bruit. Leur exploitation directe est très difficile dans certaines études (localisation et spécification des singularités géomagnétiques). Le débruitage consistera alors à réduire au maximum ce bruit d'une part et à altérer le moins possible

le signal utile.

L'élimination du bruit est conçue comme une opération d'estimation d'une fonction inconnue à partir des données bruitées. Différentes méthodes ont été développées suivant le type et l'intensité du bruit pour trouver un estimateur de cette fonction. Les premières sont les méthodes linéaires. Les limitations de ces techniques, particulièrement leur manque d'adaptivité spatiale, ont conduit au développement de méthodes non linéaires basées sur la décomposition en ondelettes orthogonales. Ces méthodes sont spatialement adaptables et sont presque minimax sur de nombreux espaces fonctionnels tel que l'espace de Besov, auquel appartient probablement le signal utile.

Le présent travail traite, dans la première partie, la procédure de seuillage introduite par Donoho et Johnstone. Elle consiste à l'élimination du bruit par seuillage des coefficients d'ondelettes empiriques. Ces méthodes de débruitage s'appliquent aux processus temporels contenant un bruit blanc gaussien. Pour d'autres bruits tels que le bruit MA(1), AR(1) et ARMA(1,1), l'étude sera faite en utilisant un seuillage à chaque niveau de décomposition des coefficients d'ondelettes.

Nous nous intéresserons, dans la partie suivante du travail, à la détection des singularités (localisation) et à l'estimation de leurs régularités par la transformée en ondelettes continue.

Nous testerons les performances de ces méthodes de débruitage pour un bruit blanc (White Noise), un processus Auto Régressif (AR), Moyenne Mobile (MA) et un Auto Régressif - Moyenne Mobile (ARMA). Nous appliquerons ces méthodes à la distribution des tâches solaires sur 22 cycles entre les époques 1754-1996 afin de mettre en évidence les singularités en rapport avec l'activité solaire maximale.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré à la théorie des ondelettes ainsi qu'à ces principales propriétés.

Le deuxième chapitre abordera le problème de l'estimation non paramétrique d'une fonction.

Dans le troisième chapitre, nous montrerons que les maxima du module de la transformée en ondelettes continue sont liés aux singularités d'une fonction et que la décroissance du module de la transformée aux fines échelles indique l'ordre des singularités.

Le dernier chapitre comporte l'application des méthodes, développées dans le deuxième et troisième chapitre, à des données synthétiques et réelles et l'interprétation des résultats obtenus.

La conclusion générale souligne l'intérêt de ce travail et propose des ouvertures pour un prolongement de cette étude.

Chapitre 1

Analyse temps-fréquence et ondelettes.

1.1 Introduction.

Les ondelettes sont nées d'une convergence entre les travaux mathématiques déjà anciens et des idées récentes mises en oeuvre par des spécialistes du traitement du signal. Elles conduisent à une analyse temps-fréquence.

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie des ondelettes ainsi que ses principales propriétés. Nous verrons aussi qu'il existe des bases de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ dans lesquelles une fonction peut être décomposée en la somme de deux parties : une approximation à l'échelle voulue et des détails aux échelles plus fines.

1.2 L'analyse d'une fonction.

1.2.1 Définitions.

Pour caractériser à la fois la localisation temporelle et fréquentielle d'un signal f , il faut le décomposer sur des fonctions de base concentrées à la fois en temps et en fréquence. Pour définir ces fonctions, il faut partir d'une fonction ψ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ appelée ondelette mère. Elle doit vérifier les propriétés suivantes:

- Elle doit être oscillante : condition d'orthogonalité entre les ondelettes et les monômes de degrés d'ordre $m-1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad \text{pour } k = 0, \dots, m-1.$$

- Elle doit être localisée c'est-à-dire ψ et ses dérivées jusqu'à l'ordre m sont à décroissance rapide
La famille d'ondelettes s'obtient en appliquant à l'ondelette mère ψ :

1/ L'opérateur de dilatation D_a , défini par :

$$D_a\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t}{a}\right) = \psi_a(t)$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$ représente le facteur d'échelle (ou de dilatation). Plus sa valeur est grande, plus l'ondelette ψ est dilatée et étirée suivant l'axe du temps (voir figure 1.1)

2/ L'opérateur de translation T_b , défini par :

$$T_b\psi(t) = \psi(t - b) \quad \text{où } b \in \mathbb{R}.$$

L'ondelette ψ est ainsi translatée d'une quantité réelle b suivant l'axe du temps t (voir figure 1.1).

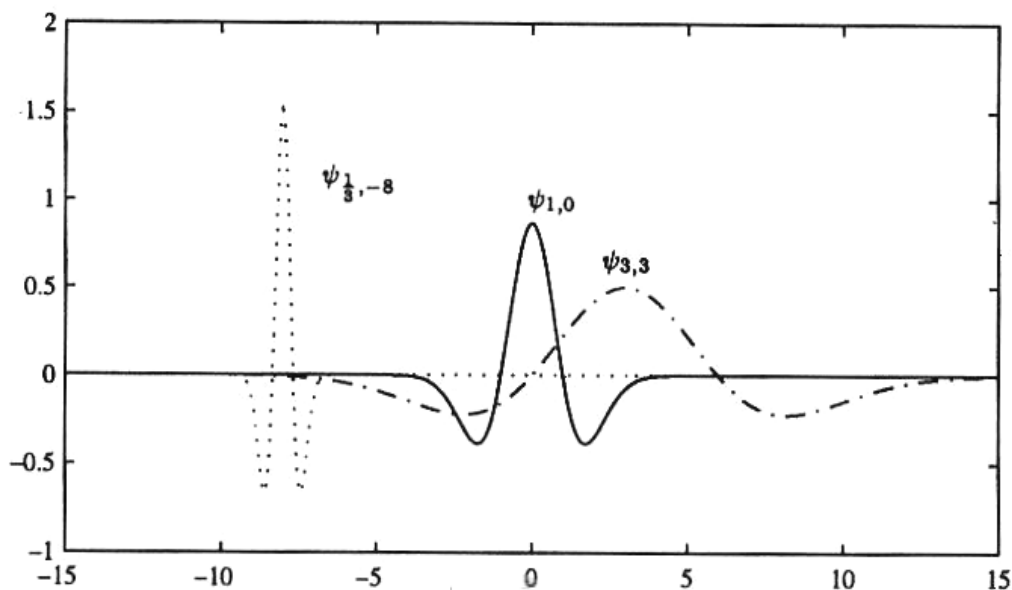


Figure 1.1 . Ondelettes avec différents facteurs d'échelle et de translations

L'ondelette effectue ainsi un "Zoom" sur n'importe quel phénomène intéressant d'une fonction à une échelle a au voisinage du point b .

La recherche tant théorique qu'appliquée sur les ondelettes, a permis la définition et la construction de plusieurs ondelettes. Chacune d'elles étant adaptée à des applications bien précises. Parmi

ces ondelettes, citons l'ondelette de Morlet, Meyer, Coifman, Daubechies, et celle dite "Château Mexicain".

La sélection de l'ondelette à utiliser dépend du type d'analyse à réaliser et du signal à étudier. Toutefois, nous pouvons citer trois propriétés essentielles que doit posséder l'ondelette; la régularité, l'ordre des moments nuls et la compacité du support.

À partir d'une famille d'ondelettes, on peut obtenir une décomposition multi-échelle de la fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$ par la transformation en ondelettes continue. Nous la définissons par le produit de convolution :

$$wf(a, b) = f * \psi_a(b).$$

Cette transformation permet une représentation bidimensionnelle temps -fréquence d'une fonction unidimensionnel. Lorsque le facteur d'échelle a tend vers zéro, la décroissance de ces coefficients caractérise la régularité de f au voisinage de b . Ceci est très utile pour détecter des phénomènes transitoires.

Le schéma ci-dessous montre que la corrélation entre le signal à analyser et la famille d'ondelettes est maximal, lorsque la dilatation de l'ondelette coïncide avec une constante de temps présente dans la signal.

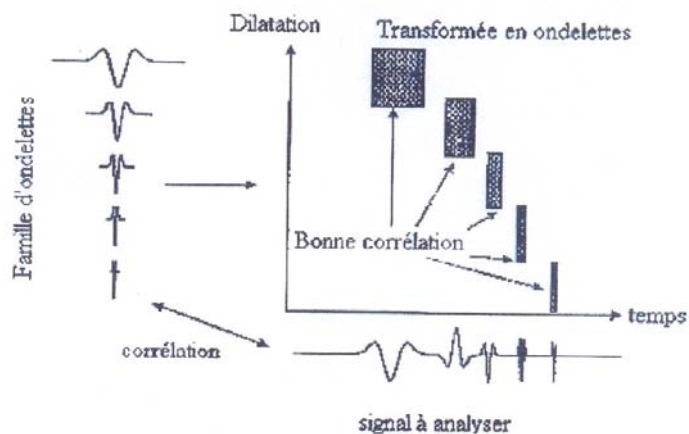


Figure 1.2 : La transformée en ondelettes est une carte de coefficients, de corrélation entre la famille et le signal à analyser

1.2.2 Propriétés :

La transformée en ondelettes présente les propriétés suivantes :

- **Linéarité :**

$$w \{ \alpha f + \beta g \} (a, b) = \alpha w f (a, b) + \beta w g (a, b) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- **Commute avec translation :**

$$w \{ T_{b_0} f \} = w f (a, b - b_0)$$

- **Commute avec dilatation :**

$$w \{ D_{a_0} f \} = w f \left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0} \right) \quad , \quad a_0 > 0$$

1.2.3 Localisation temps - fréquence (Principe d'incertitude)

La propriété de localisation temps-fréquence est limitée par le principe d'incertitude de Heisenberg.

Soit t_ψ et ξ_ψ les valeurs moyennes de t et ξ pour les mesures de probabilités:

$$\frac{1}{\|\psi\|_2^2} |\psi(t)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_2^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2$$

$$t_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 \frac{dt}{\|\psi\|_2^2} \quad ; \quad \xi_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\|\hat{\psi}\|_2^2}$$

On appelle les écarts types (ou durées utiles) de l'ondelette ψ en temps Δt_ψ et en fréquence $\Delta \xi_\psi$ les quantités définies par :

$$\Delta t_\psi = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |t - t_\psi|^2 |\psi(t)|^2 \frac{dt}{\|\psi\|_2^2} \right]^{1/2}$$

et

$$\Delta\xi_\psi = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi - \xi_\Psi|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\|\hat{\psi}\|_2^2} \right]^{1/2}$$

Si ψ est à support compact alors $\hat{\psi}$ est analytique et ne peut pas s'annuler idendiquement sur un intervalle, sans être nulle idendiquement. Plus precisement nous avons:

Théoreme.(K.L)

Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$, alors $\Delta t_\psi \cdot \Delta\xi_\psi \geq \frac{1}{2}$

et la valeur minimale est atteinte pour les gaussiennes.

Remarque.

Cette inégalité n'a de sens que si ψ appartienne à l'espace de Hilbert H défini par :

$$H = \left(f \in \mathbb{L}^2 / x.f \in \mathbb{L}^2 \text{ et } \xi.\hat{f} \in \mathbb{L}^2 \right) \text{ muni de la norme } \left(\|f\|_2^2 + \|x.f\|_2^2 + \|\xi.\hat{f}\|_2^2 \right)^{1/2}$$

L'information sur le comportement de f analysée par ψ sera connue à la résolution $a.\Delta t_\psi$ dans le domaine temporel et à la résolution $\frac{1}{a}.\Delta\xi_\psi$ dans le domaine fréquentiel.

Le principe d'incertitude de Heisenberg, exprimé par le produit de ces résolutions, s'écrit :

$$a.\Delta t_\psi \cdot \frac{1}{a}.\Delta\xi_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (1.1)$$

Nous remarquons que ce produit est indépendant de l'échelle. La résolution temporelle n'est pas constante dans le demi-plan temps-échelle. Conformément au principe d'incertitude (1.1), la résolution fréquentielle varie également en fonction d'échelle. Par ailleurs, si on réalise une comparaison entre le pavage du plan temps-fréquence réalisé par la transformée de Fourier à fenêtre glissante où on a $\Delta t.\Delta\xi \geq \frac{1}{2}$ et le pavage du plan échelle-fréquence introduit par la transformée en ondelette, le deuxième n'est pas régulier [GY94]. La précision en temps et en fréquence est variable en fonction de l'échelle a . Cette propriété de la transformée en ondelettes continue permet l'analyse des processus temporels non-stationnaires.

1.2.4 Ondelettes et moments.

L'une des principales caractéristiques de la transformation en ondelette est de révéler l'aspect irrégulier des signaux [MH92]. Elle présente aux fines échelles des coefficients de grande amplitude là où le signal est irrégulier, et des coefficients très petits là où il est régulier. La sensibilité de la transformée en ondelettes aux comportements irréguliers est obtenue en imposant une condition d'orthogonalité entre les ondelettes et les polynômes. C'est la condition de nullité de moments. L'utilisation d'un

nombre de moments nuls élevé se répercute sur l'augmentation du support de l'ondelette. Pour cela, on se limite dans le choix du nombre de moments nuls pour préserver la propriété de localisation.

1.2.5 Méthode de calcul d'un coefficient en ondelettes.

Soit f un signal à analyser. Nous prenons l'ondelette de Morlet comme ondelette mère ψ , caractérisée par une fréquence $\frac{1}{a}$. Nous centrons sur une valeur du temps b et nous multiplions le signal f par les valeurs de ψ . L'aire P est égale au coefficient d'ondelettes $wf(a, b)$ correspondant à chaque valeur de la fréquence $1/a$ et du temps b [MJR87] (voir figure 1.3).

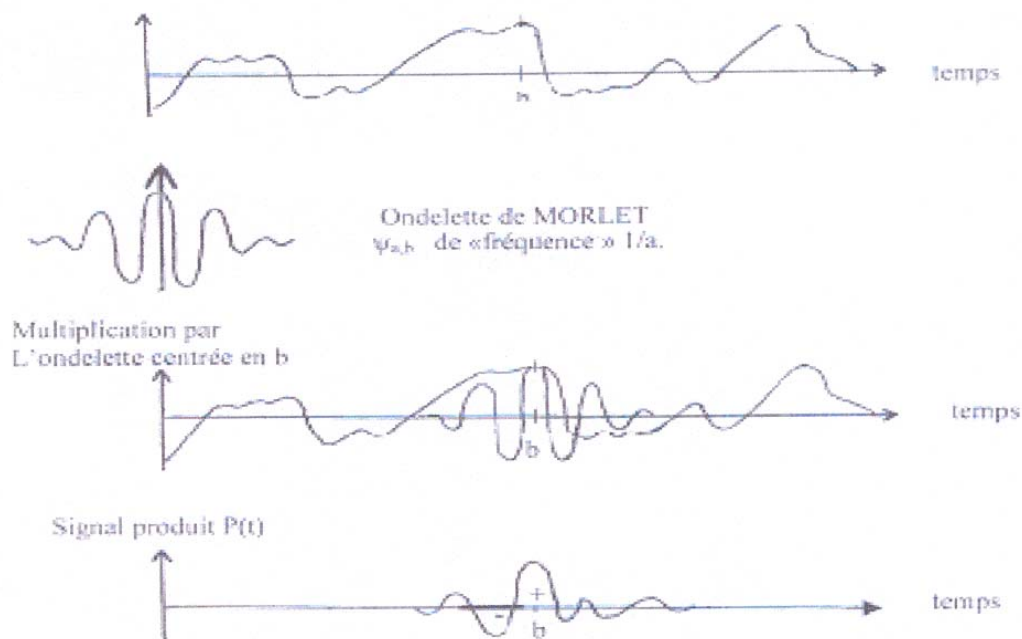


Figure 1.3 : Mesure du coefficient $wf(a, b)$.

1.3 Formule de reconstruction.

Il est possible de reconstruire le signal initial à partir de sa transformée en ondelettes.

Théorème :(GW90)

Soit ψ une fonction, appelée ondelette mère, vérifiant les conditions suivantes :

$$\text{i/} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda = C_\psi < +\infty. \text{ (Condition d'admissibilité)}$$

$$\text{ii/} \|\psi\|_2 = 1.$$

On définit alors les ondelettes de base par :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Pour tout signal $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, on considère ses coefficients d'ondelettes :

$$wf(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt.$$

Alors, on a :

a- Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

b- La formule de reconstruction :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} wf(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

au sens faible suivant : si $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a \geq \varepsilon} wf(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}$, alors $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbb{L}^2} f$.

Démonstration :

Pour démontrer ce théorème, donnons d'abord une autre expression de $wf(a,b)$:

$$wf(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt.$$

D'après l'égalité de Plancherel-Parseval, il vient que :

$$wf(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \hat{\psi}_{a,b}(\xi) d\xi,$$

puisque

$$\hat{\psi}_{a,b}(\xi) = \sqrt{a} e^{-2i\pi b\xi} \hat{\psi}(a\xi).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} wf(a, b) &= \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi) e^{-2i\pi b\xi} d\xi \\ &= \sqrt{a} \bar{F}_\xi \left[\hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi) \right] (b), \end{aligned}$$

où \bar{F} est la transformée de Fourier inverse.

a/ Montrons la conservation de l'énergie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \bar{F}_\xi \left[\hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi) \right] (b) \right|^2 db \frac{da}{a}.$$

En utilisant l'égalité de Plancherel-Parseval, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot |\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi \frac{da}{a}.$$

D'où, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{|a|} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da d\xi. \end{aligned}$$

Par un changement de variable ($\lambda = a\xi$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda/\xi|} \frac{d\lambda}{\xi} d\xi.$$

Compte tenu de l'hypothèse **i/** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Ceci achève une partie de la démonstration du théorème.

b/ Montrons à présent l'autre partie du théorème :

Soit $J(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} wf(a,b)\psi_{a,b}(t)db$, on a alors :

$$\begin{aligned} J(a) &= \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_\xi \left[\hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi) \right] (b) \psi_{a,b}(t) db \\ &= \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi) \bar{F}_b(\psi_{a,b}(t))(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$J(a) = a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 e^{2i\pi\xi t} d\xi.$$

Posons :

$$g_\varepsilon(t) = \int_{a \geq \varepsilon} J(a) \frac{da}{a} = \int_{a \geq \varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}'(\xi) \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 e^{2i\pi b\xi} d\xi \frac{da}{a}.$$

Puis montrons que :

$$h(\xi, a) = \hat{f}(\xi) \cdot \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 e^{2i\pi\xi t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \frac{\mu}{a^2}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a \geq \varepsilon} |h(\xi, a)| \frac{da}{a} d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a \geq \varepsilon} \left| \hat{f}(\xi) \right| \cdot \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 e^{2i\pi\xi t} \frac{da}{a} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(\xi) \right| \int_{a \geq \varepsilon} \frac{\left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2}{a} da d\xi. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\lambda = a\xi$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a \geq \varepsilon} |h(\varepsilon, a)| \frac{da}{a} d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi \\ &= \int_{-1}^1 |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi. \end{aligned}$$

La première intégrale s'estime :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi &\leq C_\psi \int_{-1}^1 |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)| 1_{[-1,1]}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, il vient par conséquent :

$$\int_{-1}^1 |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda > \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi \leq \sqrt{2} \cdot C_\psi \cdot \|\hat{f}\|_{\mathbb{L}^2}.$$

On en déduit donc :

$$\int_{-1}^1 |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda > \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi < +\infty.$$

Et la seconde

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi &\leq \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{f}(\xi)| \cdot \frac{1}{\varepsilon|\xi|} \cdot \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} |\hat{\psi}(\lambda)|^2 d\lambda d\xi \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{|\xi| \geq 1} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|} \cdot \|\hat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2}^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|\hat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|} \cdot 1_{|\xi| \geq 1}(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|\hat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi|^2} \cdot 1_{|\xi| \geq 1}(\xi) d\xi \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|\hat{f}\|_{\mathbb{L}^2}, \end{aligned}$$

car, par hypothèse, on a : $\|\hat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2} = 1$.

Donc $\int_{|\xi| \geq 1} |\hat{f}(\xi)| \int_{\lambda \geq \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda d\xi < +\infty$, et par conséquent, il en est de même pour

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a \geq \varepsilon} |h(a, \xi)| \frac{da}{a} d\xi.$$

Ainsi d'après le théorème de Fubini, il en résulte que :

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a \geq \varepsilon} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\psi}(a\xi) e^{2i\pi\xi t} \frac{da}{a} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi t} \cdot \int_{a \geq \varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|}{a} da d\xi \\ &= \tilde{F}(\hat{f} \cdot \theta_\varepsilon)(t). \end{aligned}$$

où $\theta_\varepsilon(\xi) = \int_{a \geq \varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{a} da = \int_{\lambda > \xi\varepsilon} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|C_\psi f - g_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \|C_\psi f - \tilde{F}(\hat{f} \cdot \theta_\varepsilon)\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \|\tilde{F}(C_\psi \hat{f} - \hat{f} \cdot \theta_\varepsilon)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|\hat{f}(C_\psi - \theta_\varepsilon)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\psi - \theta_\varepsilon(\xi)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq \varepsilon^{-1/2}} |C_\psi - \theta_\varepsilon(\xi)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \\ &\quad \int_{|\xi| > \varepsilon^{-1/2}} |C_\psi - \theta_\varepsilon(\xi)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Si $|\xi| \leq \varepsilon^{-1/2}$, on peut donc écrire :

$$\theta_\varepsilon(\xi) \geq \int_{|\lambda| > \varepsilon^{-1/2}} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda = C_\psi(\varepsilon).$$

D'où

$$0 \leq C_\psi - \theta_\varepsilon(\xi) \leq C_\psi - C_\psi(\varepsilon). \text{ et } C_\psi(\varepsilon) \rightarrow C_\psi \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

D'autre part si $|\xi| \geq \varepsilon - 1/2$, il s'ensuit que $\theta_\varepsilon(\xi) > 0$. Par conséquent $0 \leq C_\psi - \theta_\varepsilon(\xi) \leq C_\psi$.

On en déduit donc que :

$$\|C_\psi f - g_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq [C_\psi - C_\psi(\varepsilon)]^2 \cdot \int_{|\xi| \leq \varepsilon^{-1/2}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + C_\psi^2 \int_{|\xi| > \varepsilon^{-1/2}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|C_\psi f - g_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [C_\psi - C_\psi(\varepsilon)]^2 \cdot \int_{|\xi| \leq \varepsilon^{-1/2}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\psi^2 \int_{|\xi| > \varepsilon^{-1/2}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Finalement $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|C_\psi f - g_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2}^2 = 0$. Ce qui conclut la preuve du théorème.

La formule de reconstruction présente l'intérêt de converger dans un grand nombre d'espaces fonctionnels où la transformée de Fourier est mise en échec.

1.4 Représentation temps-fréquence.

La représentation temps-échelle met en jeu deux opérations réciproques : l'analyse et la synthèse.

1.4.1 L'analyse du signal par ondelettes.

Pour effectuer l'analyse du signal, on décompose en somme de constituants simples appelés fonctions élémentaires.

Les fonctions élémentaires de l'analyse de Fourier sont les fonctions sinusoïdales. Elles dépendent d'un seul paramètre (la fréquence). La représentation temps-fréquences en ondelettes fait intervenir deux paramètres a et b où a est lié à la fréquence et b au temps. Les coefficients $wf(a, b)$ que l'on affecte à chaque fonction élémentaire $\psi_{a,b}$ pour décomposer un signal quelconque donnent une information directe sur les propriétés temporelles et fréquentielles du signal.

1.4.2 La synthèse du signal par ondelettes.

On reconstruit le signal à partir des coefficients d'ondelettes $wf(a, b)$ en effectuant la somme en continu des termes $wf(a, b)\psi_{a,b}(t)$, pour toutes les valeurs des paramètres a et b de fréquence et de temps. On doit donc disposer de la collection complète des ondelettes $\psi_{a,b}$. Les ondelettes fines et pointues permettent de reconstituer les détails fins et compliqués du signal, tandis que les ondelettes larges et plates contribuent à ses traits grossiers. Mais cette procédure utilise beaucoup trop de coefficients d'ondelettes. On peut pallier à cet inconvénient et reconstituer entièrement le signal en se restreignant aux coefficients correspondant à un réseau de points convenablement choisis

dans le plan temps-fréquence.

1.5 Décomposition d'une fonction en ondelettes.

Les informations contenues dans la formule de reconstruction sont largement redondantes. On peut construire des ondelettes qui génèrent des bases orthonormées de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. La construction de ces bases est liée à l'approximation multirésolution des fonctions.

Définition:

Une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous -espaces fermés emboîtés de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est une analyse multirésolution si elle vérifie:

i. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

ii. $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}$, on a:

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$$

iii. $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$$

iv. Il existe dans V_0 une fonction ϕ , appelée fonction d'échelle telle que la collection des $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base de Riesz de V_0 .

Rappelons qu'une famille $\{e_i\}$ est une base Riesz d'un espace de Hilbert H si et seulement si les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- Les combinaisons linéaires finies $\sum_i \alpha_i e_i$ sont dense dans H .
- Il existe deux constantes positives finies $c_1 \leq c_2$ telles que pour toute suite (α_i) on ait:

$$c_1 \left(\sum_i |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_i \alpha_i e_i \right\|_2^2 \leq c_2 \left(\sum_i |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}$$

Les propriétés de l'analyse multirésolution traduisent de façon intuitive qu'on a considéré une suite de grilles discrettes de pas régulier et variant d'un facteur 2 selon que la résolution est plus grande ou plus petite.

1.5.1 Espaces d'approximation et détail.

Dans les propriétés d'analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, il existe dans V_0 une fonction ϕ dite fonction d'échelle ou ondelette père tel que la collection $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base de V_0 . Il s'ensuit que la famille $(2^{j/2}\phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z})$ engendrée par translation (de paramètre $k2^{-j}$) et par dilatation (par le paramètre 2^j) de l'ondelette père ϕ constitue une base pour l'espace V_j à échelle j .

La projection de f sur l'espace de V_j fournit sa décomposition sur la base de ces fonctions d'échelles. Cette décomposition constitue l'approximation de f à l'échelle j . En notant $A_j(f)$ la projection de f sur l'espace d'approximation V_j , on aura

$$A_j(f) = \sum_k \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$$

Comme $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$, il y a donc des fonctions dans V_{j+1} qui n'appartiennent pas à V_j . Pour avoir tous les éléments de V_{j+1} , on a besoin de V_j et d'un espace complémentaire. Soit W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} .

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Ainsi $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ se construit comme somme directe des sous-espaces W_j complémentaires

$$\begin{aligned} & \text{orthogonaux des } V_j \\ \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) &= \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j \geq 0} W_j \right). \end{aligned}$$

Les sous-espaces W_j (appelés espaces des détails) ne forment pas une famille emboîtée, mais les propriétés d'invariance par dilatation d'échelle et de translation sont conservées. Sous ces conditions, on peut montrer qu'il existe une fonction ψ , appelée ondelette, qui par dilatation et translation engendre une base orthonormée des W_j , et par voie de conséquence de \mathbb{L}^2 .

Plus l'échelle j est fine plus l'approximation est précise. En passant d'une échelle $j - 1$ à une échelle j , on rajoute des détails à l'approximation du signal. Plus précisément, l'approximation à l'échelle j pourra donc être reconstruite à partir de l'approximation à l'échelle $j - 1$ et des détails du signal fournis par la projection orthogonale de f sur l'espace de détail W_{j-1} (notée $D_j(f)$) selon la relation :

$$A_j(f) = A_{j-1}(f) + D_{j-1}(f),$$

avec $D_{j-1}(f) = \sum_k \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k}$.

Nous verrons par la suite que ces approximations et ces détails sont déterminés par des filtres discrets particuliers. On peut ainsi décomposer de façon unique toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ en série orthogonale

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} D_j(f).$$

1.5.2 Base d'ondelettes orthonormée :

Mallat et Meyer [LC95] ont construit différentes bases hilbertiennes de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ à partir de l'analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. La procédure de construction de base orthonormée d'ondelettes s'effectue de la façon suivante :

- Choisir une fonction d'échelle ϕ dans V_0 engendrant par translation une base de V_0 .
- $(\phi_\perp(t-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est la base orthonormée de V_0 obtenue par la formule :

$$\hat{\phi}_\perp(\xi) = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{\sqrt{\sum_k |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2}};$$

- Définir W_0 comme le supplémentaire orthogonal de V_0 dans V_1 .
- Obtenir une base orthonormée $(\psi(t-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de W_0 en choisissant ψ (appelé ondelette) telle que :

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^{n-1} h(-n-1) \phi_\perp(2t-n),$$

$$\text{où } h(-n-1) = \langle \phi_\perp(t+n+1), \phi_\perp(t/2) \rangle.$$

- Obtenir finalement une base orthonormée de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ par :

$$\psi_{j,k}(t) = (2^{j/2} \psi(2^j t - k))_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \text{ (où } (\phi_\perp(t-k))_{k \in \mathbb{Z}} \cup (\psi_{j,k}(t))_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}}).$$

Y. Meyer (1985) a prouvé que la famille d'ondelettes donnaient des bases conditionnelles pour les espaces de Lebesgue \mathbb{L}^p ($1 < p < +\infty$), de Holder et de Besov $B_{p,q}^\alpha$ (les espaces de Besov $B_{p,q}^\alpha$ sont des généralisations des espaces de Sobolev $W^\alpha = B_{2,1}^\alpha$ et des espaces de Holder $H^\alpha = B_{\infty,\infty}^\alpha$). Ainsi,

on peut caractériser ces espaces fonctionnels par des modules des coefficients d'ondelettes. De telles caractérisations se sont révélées très utiles pour l'analyse des régularités des fonctions [MEY90].

1.6 Algorithme pyramidal.

Nous avons donné le procédé permettant de construire la famille $(\phi_{\perp}(t-k))_{k \in \mathbb{Z}} \cup (\psi_{j,k}(t))_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}}$ qui constitue une base orthonormée de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. On peut alors écrire :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi_{j,k}(t) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}(t).$$

L'algorithme pyramidal développé par Mallat permet de calculer les coefficients d'approximation a_k^j et les coefficients de détail (appelés coefficients en ondelettes) d_k^j en se basant sur l'analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ [MEY90].

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, alors

$$A_0(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi_{0,k}(t)$$

D'autre part

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} A_0(f) &= A_{-1}(f) + D_{-1}(f) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^1 \phi_{-1,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^1 \psi_{-1,k}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \langle f, \phi_{-1,k} \rangle = \langle f(t), 2^{-1/2} \phi(2^{-1}t - k) \rangle \\ d_k^1 &= \langle f, \psi_{-1,k} \rangle = \langle f(t), 2^{-1/2} \psi(2^{-1}t - k) \rangle. \end{aligned}$$

Vu l'emboîtement des deux sous-espaces d'approximation V_{-1} et V_0 , toute fonction de V_{-1} peut être exprimée en fonction de la base V_0 . On peut écrire :

$$\phi(2^{-1}t - k) = \sum_n \langle \phi(2^{-1}t - k), \phi(t - n) \rangle \phi(t - n)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \langle f, \phi_{-1,k} \rangle = \sum_n \langle f, \phi_{0,n} \rangle \langle \phi_{-1,k}, \phi_{0,n} \rangle \\ &= \sum_n a_n^0 \langle \phi_{-1,k}, \phi_{0,n} \rangle . \end{aligned}$$

Par un changement de variable adéquat, on en déduit que :

$$a_k^1 = \sum_n a_n^0 \langle \phi_{0,n-2k}, \phi_{-1,0} \rangle .$$

Par analogie, il en résulte :

$$d_k^1 = \sum_n a_n^0 \langle \phi_{0,n-2k}, \psi_{-1,0} \rangle .$$

Si on pose

$$\begin{aligned} h(k) &= \langle \phi_{0,k}, \phi_{-1,0} \rangle \\ g(k) &= \langle \phi_{0,k}, \psi_{-1,0} \rangle . \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \sum_n h(n-2k) a_n^0 \\ d_k^1 &= \sum_n g(n-2k) a_n^0 . \end{aligned}$$

Les coefficients d'approximation et d'ondelettes a^1 et d^1 sont donc obtenus en convoluant a^0 respectivement par \tilde{h} et \tilde{g} (\tilde{h} et \tilde{g} sont les filtres symétriques de h et g).

Cette décomposition peut se généraliser facilement : $A_{-j}(f)$ se décompose en $A_{-j-1}(f)$ et $D_{-j-1}(f)$ ($V_{-j} = V_{-j-1} \oplus W_{-j-1}$) le passage de la résolution $-j$ à la résolution $-j-1$ s'effectue par l'intermédiaire des filtres \tilde{h} et \tilde{g} .

$$\begin{aligned} a_k^{j+1} &= \sum_n \tilde{h}(n-2k) a_n^j \\ d_k^{j+1} &= \sum_n \tilde{g}(n-2k) a_n^j \end{aligned}$$

L'algorithme pyramidal de décomposition en ondelettes se présente schématiquement par :

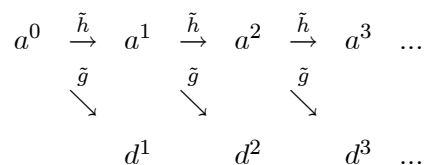


Figure 1.4 : Principe de l'algorithme pyramidal de décomposition de Mallat

Pour reconstruire la fonction f à partir de la décomposition, il suffit d'inverser le schéma précédent.

En effet, comme :

$$V_{-j} = V_{-j-1} \oplus W_{-j-1}.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
 \phi(2^{-j}t - n) &= 2^{-j-1} \sum_n \prec \phi(2^{-j}t - k), \phi(2^{-j-1}t - k) \succ \phi(2^{-j-1}t - k) \\
 &+ 2^{-j-1} \sum_n \prec \phi(2^{-j}t - k), \psi(2^{-j-1}t - k) \succ \psi(2^{-j-1}t - k).
 \end{aligned}$$

En introduisant les filtres h et g définis précédemment, nous aurons :

$$\phi_{-j,n} = \sum_k h(n - 2k) \phi_{-j-1,k}(t) + \sum_k g(n - 2k) \psi_{-j-1,k}(t).$$

D'où :

$$a_n^j = \sum_k h(n - 2k) a_k^{j+1} + \sum_k g(n - 2k) d_k^{j+1}.$$

L'algorithme de reconstruction se schématise donc de la façon suivante :

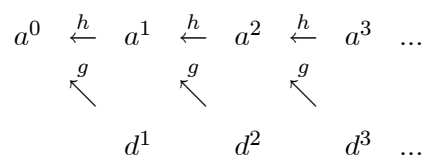


Figure 1.5 : Principe de reconstruction de Mallat

Les filtres h et g sont respectivement un filtre passe bas et un filtre passe haut, donc la reconstruction d'une fonction sera gouvernée par l'équation suivante :

$$A_{-j} = \sum_k h(n - 2k) A_{-j-1}(f) + \sum_k g(n - 2k) D_{-j-1}(f).$$

Chapitre 2

Estimation non linéaire par ondelettes orthogonales et réduction de bruit.

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on présentera l'estimation fonctionnelle pour des problèmes de regression non paramétrique et ce, par l'utilisation des techniques adaptives et non linéaires, fondées sur les décompositions en ondelettes orthogonales. Plus précisément, on fera appel à la méthode de seuillage des coefficients d'ondelettes empiriques. Il sera démontré que les estimateurs qui en découlent sont presque minimax pour de nombreux espaces fonctionnels.

2.2 Méthodes adaptives sur les espaces fonctionnels.

Soit X un signal bruité qui s'écrit comme la somme d'un signal déterministe S et d'un signal parasite e (bruit). Ces signaux sont de longueur n , sont représentés par des vecteurs.

Supposons que la fonction inconnue S appartient à une certaine classe fonctionnelle $\mathcal{F}(C)$.

Le problème est de trouver un estimateur \hat{S}^* de S dépendant de X_1, \dots, X_n qui satisfait aux deux critères suivants :

(a) \hat{S}^* atteint (ou approche au mieux) le risque minimax :

$$R(n, \mathcal{F}) = \inf_{\hat{S}} \sup_{S \in \mathcal{F}(e)} R(\hat{S}, S)$$

(b) \hat{S}^* est aussi régulière que S avec une grande probabilité.

Différentes méthodes ont été développées pour tenter d'apporter une réponse au problème. Les premières sont les méthodes linéaires. Malheureusement elles ne sont pas presque minimax sur une large classe d'espaces fonctionnels. En effet, si on suppose que f appartient à l'espace de Sobolev $W_m^2(c)$ (m désigne le degré de différentiabilité et c la limite quantitative de la $m^{\text{ième}}$ dérivée), Efroimovich et Al (1984) ont montré comment construire des estimateurs linéaires qui sont minimax sur une variété de classe $W_m^2(c)$ quand m et c varient [DON95]. Ces méthodes sont asymptotiquement aussi performantes lorsque m et c sont inconnus que connus. Par contre, si on suppose que f appartient à l'espace Sobolev $W_m^p(c)$ avec $p < 2$, alors les méthodes linéaires ne peuvent pas être ni minimax ni asymptotiquement minimax. De plus, si le type de régularité est inconnu, alors on ne sait pas comment estimer adaptivement les fonctions régulières [DJKP 95]. Ces limitations ont donc conduit, il y a quelques années, au développement des méthodes non linéaires basées sur la décomposition en ondelettes orthogonales pour trouver un estimateur qui vérifie les deux critères ci-dessus. Contrairement aux méthodes linéaires, ces méthodes sont spatialement adaptables. De plus, elles sont presque minimax sur de nombreux espaces fonctionnels, tels que l'espace de Besov, auxquelles probablement les fonctions non bruitées appartiennent.

2.3 Transformée en ondelettes d'un signal bruité.

La transformée en ondelettes maintient le modèle de regression non paramétrique inchangé :

$$w = \mu + N. \tag{2.1}$$

où μ est un vecteur de coefficients d'ondelettes du signal utile S , N est la transformée en ondelettes du bruit e et w sont les coefficients d'ondelettes des observations

$$w = \mathcal{W}X$$

$$\mu = \mathcal{W}S$$

$$N = \mathcal{W}e.$$

avec \mathcal{W} est la transformée en ondelettes.

Il est facile de montrer que la matrice de variance covariance du bruit dans le domaine des ondelettes $V_n = E(N.N^t)$ égale à :

$$V_n = \mathcal{W} Q_n \mathcal{W}^t$$

avec Q_n est la matrice de variance covariance de e .

Si \mathcal{W} est orthogonale et $Q_n = \sigma^2 I_n$, alors on a :

$$V_n = \sigma^2 I_n.$$

Ceci signifie que :

La transformée en ondelettes orthogonales transforme le bruit blanc (gaussien) en un bruit blanc (gaussien).

2.4 Filtrage par seuillage des coefficients d'ondelettes.

L'analyse des coefficients en ondelettes d'un processus temporel bruité nous amène à déduire que les petits coefficients sont dominés par le bruit et que les grands coefficients détiennent plus d'information sur le processus que sur le bruit. En remplaçant les petits coefficients par zéro, on obtient un processus débruité. Différents types de seuillage existent, qui permettent d'effectuer ce tri des coefficients, notamment le seuillage dur et le seuillage doux.

a- Seuillage dur ou "hard thresholding".

Le seuillage dur est le plus "intuitif". On se fixe un seuil $\lambda > 0$, on ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à λ et on met à zéro les autres :

Nous aurons donc le seuillage suivant :

$$\eta_H(w, \lambda) = 1_{\{|w| \geq \lambda\}}(w)$$

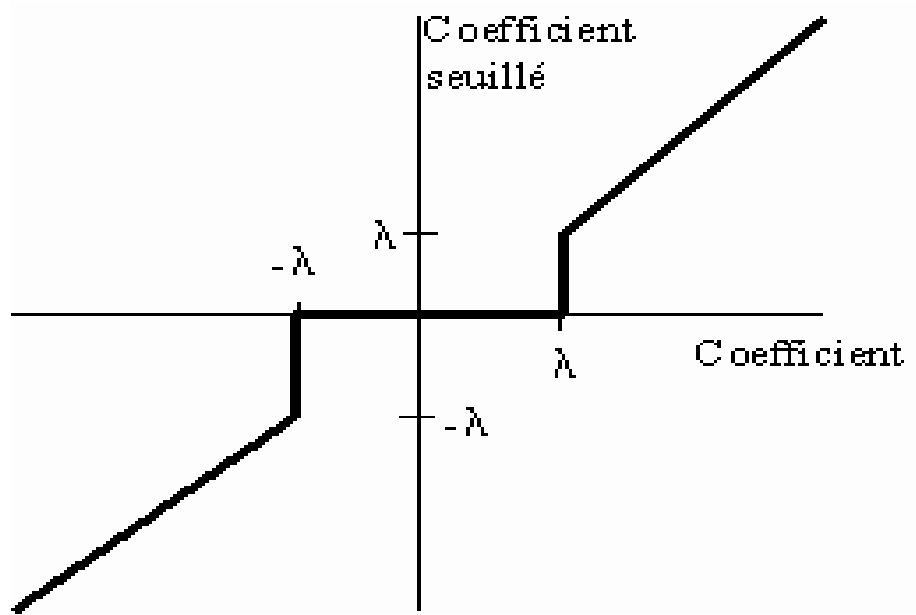


Figure 2.1 : Seuillage dur

Ce seuillage est discontinue.

b- Seuillage doux ou "soft thresholding".

Dans le cas du seuillage doux, on met toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil λ . Par contre, pour ceux supérieurs à λ , on atténue l'amplitude des coefficients par la valeur du seuil afin de s'assurer d'avoir enlevé l'effet du bruit même pour les forts coefficients :

$$\eta_s(w, \lambda) = \text{sign}w (|w| - \lambda)_+.$$

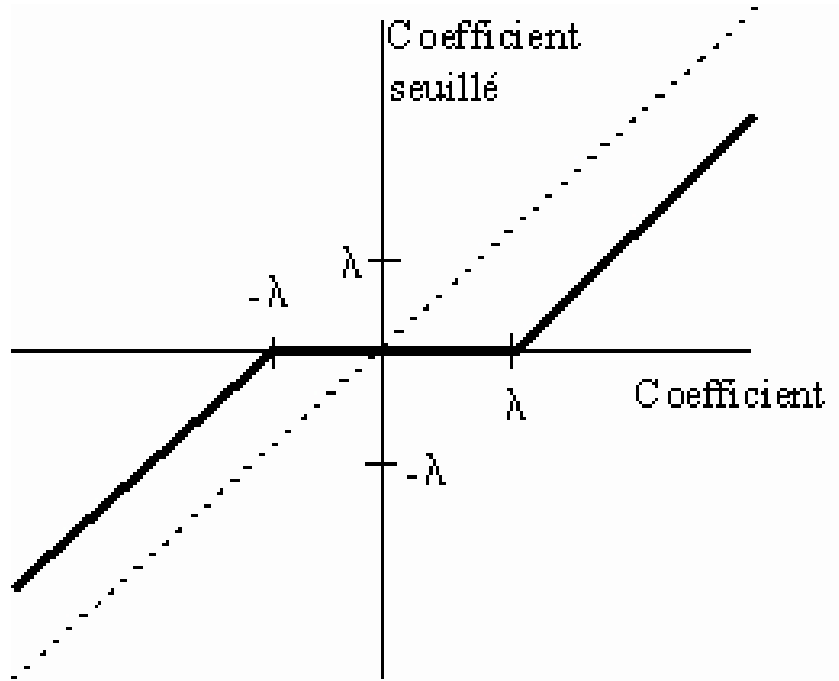


Figure 2.2 : Seuillage doux

Dans ce cas, la fonction de seuillage $\eta_s(w, \lambda)$ est continue et lipshitzienne.

Ce type de seuillage garantit la continuité de la transition.

2.5 La procédure du seuillage.

La méthode non linéaire (seuillage par ondelettes) a été introduite récemment pour trouver un estimateur de S qui vérifie les propriétés a- et b- ci-dessus, cette méthode consiste à :

1. Appliquer aux n données la transformée en ondelettes discrète pour obtenir les coefficients d'ondelettes $(w_i)_{i=1}^n$.
2. Appliquer le seuillage doux à chaque coefficient d'ondelettes empirique.
3. Calculer l'estimateur \hat{S}_n à partir de la transformée en ondelettes inverse.

Contrairement aux méthodes linéaires, les estimateurs qui en découlent à partir de cette procédure sont optimaux dans le sens suivant :

$\hat{S}(t)$ est aussi régulier que $S(t)$, ce qui est traduit par :

Il existe une suite $(\pi_n)_n$ telle que $\pi_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$, et une constante C telle que :

$$\text{Prob} \left\{ \left\| \hat{S} \right\|_{B_{p,q}^\sigma} \leq C \|S\|_{B_{p,q}^\sigma} \right\} \geq \pi_n.$$

En d'autres termes, si S est une fonction nulle ($S(t) \equiv 0, \forall t$), alors \hat{S} est aussi une fonction nulle. avec une probabilité au moins aussi grande que π_n .

2.6 Sélection d'une méthode non linéaire :

Donoho [DJ92] a démontré que si on suppose dans le modèle (2.1), et que les μ_i sont des variables aléatoires vérifiant :

$$\|\tau\|_{b_{p,q}^\alpha} \leq c \quad (2.2)$$

où τ est une suite de moment définie par :

$$\tau_i = \left(E |\mu_i|^{p\Delta q} \right)^{1/p\Delta q} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

L'estimateur $\hat{\mu}^* = (\hat{\mu}_i^*)_{i=1}^n$ de la forme $\mu^* = \delta^*(w_i), \forall i = 1, \dots, n$, où δ^* est une fonction non linéaire de w_i , réalise le risque minimax bayésien défini par :

$$R_B^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha(c)) = \inf_{\hat{\mu}} \sup_{\tau \in \Theta_{p,q}^\alpha} \left\{ E_\pi E_\mu \|\hat{\mu} - \mu\|_{l_n^2}^2 \right\}$$

et que l'utilisation de la fonction non linéaire "seuillage doux" ou "seuillage dur" fournit un estimateur Bayésien presque minimax. Ce qui est traduit par le théorème suivant .

Théorème 1 : ([DJ92])

Soit le modèle: $w_i = \mu_i + u_i, \forall i = 1, \dots, n$, et supposons que les μ_i sont des variables aléatoires de loi à priori $\pi_i \in \mathcal{M}_{p,q}^\alpha$ ou $\mathcal{M}_{p,q}^\alpha = \left\{ \pi_i : \|\tau\|_{b_{p,q}^\alpha} \leq c \right\}$.

Alors, il existe deux constantes finies $K(p \wedge q)$ et $K'(p \wedge q)$ telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} R_{B,S}^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha(c)) &\leq K(p \wedge q) R_B^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha(c)) \\ R_{B,h}^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha(c)) &\leq K'(p \wedge q) R_B^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha(c)). \end{aligned}$$

avec $R_{B,S}^*$ (resp $R_{B,h}^*$) est le risque minimax Bayésien associé au seuillage doux (resp seuillage dur) et $\Theta_{p,q}^\alpha(c)$ est un corps de Besov.

Preuve :

Notons :

$$r(\lambda_i, \pi_i) = E_{\pi_i} E_{\mu_i} \left| \delta_{\lambda_i}^{(S)}(w_i) - \mu_i \right|^2$$

le risque de Bayes de l'estimateur $\delta_{\lambda_i}^{(S)}$ obtenu par seuillage doux avec un seuil λ_i .

On peut alors écrire le risque minimax Bayésien associé au seuillage doux avec un seuil $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n$ comme :

$$\begin{aligned} R_{B,S}^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha(c)) &= \inf_{\lambda} \sup_{\Lambda \in \mathcal{M}_{p,q}^\alpha} \sum_{i=1}^n r(\lambda_i, \pi_i) \\ &= \sup_{\Lambda \in \mathcal{M}_{p,q}^\alpha} \inf_{\lambda} \sum_{i=1}^n r(\lambda_i, \pi_i) \quad (\text{d'après le théorème minimax}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En posant :

$$\rho_*(\pi) = \inf_{\lambda_i} r(\lambda_i, \pi_i)$$

l'équation (2.3) peut donc s'écrire :

$$R_{B,\lambda}^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha) = \sup_{\pi \in \mathcal{M}_{p,q}^\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \rho_*(\pi_i) \right) \quad (2.4)$$

Grâce à la semi-continuité ρ_* et à la compacité faible de $\mathcal{M}_{p,q}^\alpha$, la borne supérieure est atteinte par une certaine mesure π^* qui est la mesure à priori la plus défavorable pour les estimateurs obtenus par seuillage [DJ94] :

$$R_{B,S}^*(n, \Theta_{p,q}^\alpha) = \sum_{i=1}^n \rho_*(\pi_i^*)$$

Par ailleurs, on définit le pire risque Bayésien du seuillage doux quand le moment d'ordre p est inférieur à τ^p par :

$$\rho_{\lambda_i, p \wedge q}(\tau_i, s_i) = \inf_{\lambda \in [0, +\infty]} \sup \left\{ E_{\pi_i} E_{\mu_i} \left| \delta_{\lambda_i}^{(S)}(w_i) - \mu_i \right|^2 : E_{\pi_i} |\mu_i|^{p \wedge q} \leq \tau_i^{p \wedge q} \right\}$$

avec $s_i = \text{var} N_i$.

Pour comparer cette performance avec l'estimateur Bayésien minimax, on définit :

$$K(p \wedge q) = \sup_{\tau_i, s_i} \frac{\rho_{\lambda_i, p \wedge q}(\tau_i, s_i)}{\rho_{p \wedge q}(\tau_i, s_i)}, \quad (2.5)$$

avec $\rho_{p \wedge q}(\tau_i, s_i) = \inf_{\delta} \sup \left\{ E_{\pi_i} E_{\mu_i} |\delta(w_i) - \mu_i|^2 : E_{\pi_i} |\mu_i|^{p \wedge q} \leq \tau_i^{p \wedge q} \right\}$.

Notons :

$$r_{\lambda_i, p \wedge q}(\tau_i, s_i) = \sup \left\{ E_{\pi_i} E_{\mu_i} \left| \delta_{\lambda_i}^{(s)}(w_i) - \mu_i \right|^2 : E |\mu_i|^{p \wedge q} \leq \tau_i^{p \wedge q} \right\}.$$

Soit $\tau^* = (\tau_i^*)_{i=1, n}$ une suite de moments associés à π^* , comme $\pi^* \in \mathcal{M}_{p, q}^\alpha$ et $\tau^* \in \Theta_{p, q}^\alpha$ par définition de $r_{\lambda_i, p \wedge q}$, on a :

$$\rho_*(\pi_i^*) \leq r_{\lambda_i, p \wedge q}(\tau_i^*, s_i)$$

A partir des résultats établis ci-dessus, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} R_{B, S}^*(n, \Theta_{p, q}^\alpha) &= \sum_{i=1}^n \rho_*(\pi_i^*) \quad \text{d'après (2.4)} \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_{\lambda_i, p \wedge q}(\tau_i^*, s_i) \\ &\leq K(p \wedge q) \sum_{i=1}^n \rho_{p \wedge q}(\tau_i^*, s_i) \quad \text{d'après (2.5)} \\ &\leq K(p \wedge q) R_B^*(n, \Theta_{p, q}^\alpha) \end{aligned}$$

Ceci achève une partie de la démonstration du théorème 1. Pour l'autre partie, c'est-à-dire, pour le cas du seuillage dur, on démontre de manière similaire.

Remarque :

D'après les évaluations numériques, il a été constaté que $K(p)$ et $K'(p)$ sont inférieurs à 2,22, $\forall p \in]0, +\infty]$, la constante $K(p)$ tend à être petite que $K'(p)$ [DJKP95]. Le seuillage doux semble avoir de meilleures propriétés statistiques que le seuillage dur.

Par conséquent, on appliquera le seuillage doux aux coefficients d'ondelettes avec un choix particulier du seuil. La question qui se pose maintenant est de savoir comment choisir le seuil qui préserve autant que possible l'information utile contenue dans le signal d'une part et d'autre part atténue le plus possible le bruit. La réponse nous est fournie par la section suivante.

2.7 Choix de seuil.

Le seuillage est une technique d'estimation d'une fonction inconnue. En général, il n'est pas possible de calculer l'estimateur qui minimise l'erreur quadratique moyenne, car on ne connaît pas la fonction sans bruit. Donoho et Johnstone [AA95] ont montré que des estimateurs obtenus par seuillage

avaient un risque proche de la borne inférieure.

Dans cette section, nous supposons que le signal est contaminé par un bruit blanc gaussien de variance σ^2 .

2.7.1 Variance et biais.

L'étude faite par [JAS00] a montré que le choix du seuil est lié à la variance et le biais. En effet, le risque de l'estimateur $\hat{\mu}_\lambda$ obtenu par seuillage avec un seuil λ s'écrit comme la somme du biais et de la variance :

$$E \|\hat{\mu}_\lambda - \mu\|_{\ell_n^2}^2 = \|E(\hat{\mu}_\lambda) - \mu\|_{\ell_n^2}^2 + E \|\hat{\mu}_\lambda - E(\hat{\mu}_\lambda)\|_{\ell_n^2}^2$$

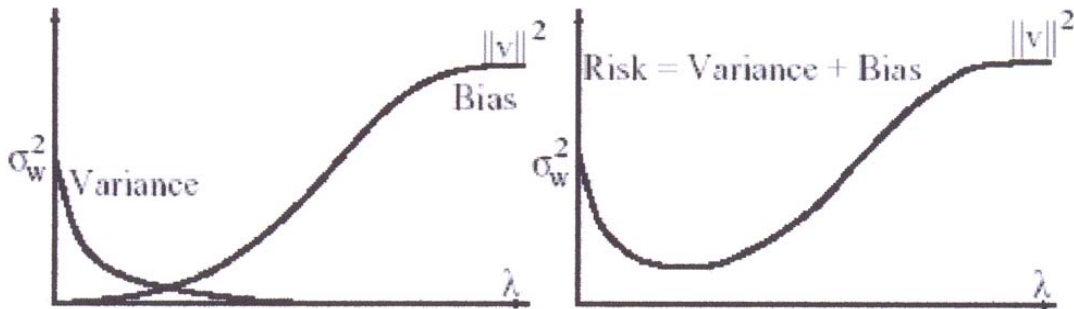


Figure 2.3 : Variance, biais et risque en fonction des valeurs du seuil

On constate à travers cette formule (voir figure 2.3) que si le seuil est très grand alors tout le bruit est supprimé ainsi qu'une partie du signal utile. La variance de $\hat{\mu}_\lambda$ tend à être très petite mais le biais est très important. Les méthodes qui visent à enlever tout le bruit risquent d'éliminer une partie importante du signal. Par contre, un petit seuil préserve le signal (la variance reste importante) mais il est inefficace pour l'élimination du bruit (le biais n'est pas important). D'où le meilleur compromis entre la variance et le biais est la valeur du seuil pour laquelle on a minimum de risque.

2.7.2 Comportement asymptotique du seuil au risque minimum.

Le comportement du seuil optimal quand le nombre de données tend vers l'infini est donné par le résultat suivant :

Théorème 2: ([JAN00])

Si $\tilde{\lambda}^*$ minimise le risque $R(\lambda, \mu)$, alors $\tilde{\lambda}^*$ est asymptotiquement équivalent à $\sigma\sqrt{2\log n}$.

Donoho et Johnstone ont utilisé cette valeur asymptotique comme seuil, elle est connue sous le nom du seuil universel.

On construit donc l'estimateur $\hat{\mu}$ par seuillage doux des coefficients en ondelettes $(w_i)_{i=1}^n$ avec le seuil asymptotique $\lambda_n^u = \sigma\sqrt{2\log n}$, c'est-à-dire :

$$\hat{\mu}^u = \eta_s \left(w, \sigma\sqrt{2\log n} \right)$$

Lemme 2 :

Soit $(X_k)_k$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de fonction distribution F . Et soit $M_n = \max \{X_k/k = 1, \dots, n\}$. On a alors pour toute suite réelle $(\lambda_n)_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (P(M_n \leq \lambda_n)) = e^{-a} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - F_X(\lambda_n)) = a \quad (2.6)$$

Dans le cas particulier, $\lambda_n = \sigma\sqrt{2\log n}$ et $F_X(x) = \Phi(x)$ est la distribution de la loi normale $N(0, \sigma^2)$, on sait que :

$$1 - \Phi(x) \sim \sigma^2 \frac{\varphi(x)}{x} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

avec $\varphi(x)$ est la densité de la loi normale $N(0, \sigma^2)$.

On obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2\log n} \cdot \sigma \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{n\sqrt{2\log n} \cdot \sigma} \right) = 0.$$

Il résulte de (2.6) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(M_n \leq \sqrt{2\log n} \cdot \sigma \right) = 1.$$

Ce qui signifie qu'avec une probabilité proche de un, la bande définie par $\pm\sigma\sqrt{2\log n}$ englobe toutes les réalisations du bruit (i.i.d)

Johnstone et al [DJ93] ont montré des propriétés optimales pour ce choix, parmi ces propriétés, on a :

a- Imitation d'un estimateur d'oracle :

L'estimateur d'oracle est un estimateur construit connaissant la fonction recherchée. On le définit

par :

$$\hat{\mu}_i = \delta_i w_i, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

avec $\delta_i = 1_{\{|\mu_i| > \sigma\}}$.

Notons $R(OS, \mu) = E \|\hat{\mu} - \mu\|_{\ell_n^2}^2$ le risque idéal obtenu avec cet estimateur d'oracle. L'estimateur réalise un résultat meilleur que les estimateurs obtenus par la méthode polynômiale par partie dotée d'un oracle

$$R(SO, S) \leq (C_1 + C_2 \text{Log} n) R(PP, S),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

D'un autre côté, l'emploi du seuil universel donne des résultats aussi bon que la reconstruction sélective optimale.

$$R(S_n^u, S) \leq (2 \log n + 1) \cdot \left(R(SO, S) + \frac{\sigma^2}{n} \right).$$

Il en résulte que :

$$R(S_n^u, S) \leq (C_1 + C_2 \log n) (2 \log n + 1) R(PP, S).$$

Ceci signifie que la procédure de seuillage par le seuil universel, en s'appuyant seulement sur les données, atteint à un facteur $(\log n)^2$ près les performances des méthodes polynômiales équipées d'un oracle.

b- La propriété minimax :

Les résultats précédents relient les performances du seuil universel à la sélection idéale des coefficients. Alors on se pose la question de savoir quand la reconstruction sélective est une bonne méthode pour la réduction du bruit. Nous devons nous attendre à de bons résultats quand la représentation en ondelettes est éparse. C'est justement le cas des fonctions qui appartiennent à l'espace de Besov $B_{p,q}^\alpha$.

Si une fonction S appartient à un tel espace, le risque de l'estimateur construit à partir de seuillage doux avec le seuil universel, atteint à un facteur logarithmique près le risque minimax :

$$\sup_{S \in B_{p,q}^\alpha} E \left\| \hat{S}_n^u - S \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq K \log n \inf_{\hat{S}_n} \sup_{S \in B_{p,q}^\alpha} E \left\| \hat{S}_n - S \right\|_{\mathbb{L}^2}^2. \quad (2.7)$$

On constate que lorsque n est grand, l'estimateur \hat{S}_n^u est loin d'être un estimateur minimax. Afin d'améliorer ce résultat un autre seuil a été proposé.

2.7.3 Réduction du risque.

Pour réduire le risque, il faut essayer de trouver un seuil qui minimise l'erreur en moyenne quadratique. Comme l'EQM dépend de la fonction inconnue f . On a donc besoin d'abord d'estimer cette quantité.

a- Estimation de l'erreur en moyenne quadratique :

On considère la fonction :

$$F(\lambda) = \frac{1}{n} \|\hat{\mu}_\lambda - w\|_{\ell_n^2}^2.$$

L'espérance de cette fonction est :

$$\begin{aligned} E(F(\lambda)) &= E \left[\frac{1}{n} \|w - \mu\|_{\ell_n^2}^2 + \|\mu - \hat{\mu}_\lambda\|_{\ell_n^2}^2 + 2 \langle w - \mu, \mu - \hat{\mu}_\lambda \rangle \right] \\ &= \sigma^2 + R(\hat{\mu}_\lambda, \mu) - \frac{2}{n} E \langle w, \hat{\mu}_\lambda \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le lemme suivant nous permet de réécrire le troisième terme d'une autre façon.

Lemme : ([DJ95])

Si la densité $\phi(w_i)$ est gaussienne, alors pour un seuillage doux on a :

$$E[w_i, \hat{\mu}_{\lambda_i}] = \sigma^2 P(|w_i| > \lambda).$$

Preuve :

La densité gaussien satisfait l'équation différentielle d'ordre un :

$$w_i \phi(w_i) = -\sigma^2 \phi'(w_i)$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(w_i, \hat{\mu}_{\lambda_i}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}_{\lambda_i} \cdot w_i \phi(w_i) dw_i \\ &= -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}_{\lambda_i} \phi'(w_i) dw_i. \end{aligned}$$

La propriété de continuité de seuillage doux permet d'appliquer l'intégration par partie. On peut donc écrire :

$$E(w_i, \hat{\mu}_{\lambda_i}) = -\sigma^2 \hat{\mu}_{\lambda_i} \phi(w_i) + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{\mu}_{\lambda_i}}{\partial w_i} \phi(w_i) dw_i.$$

Il est facile de voir que :

$$\frac{\partial \hat{\mu}_{\lambda_i}}{\partial \mu_i} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |w_i| < \lambda \\ 1 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ce qui établit le résultat.

Par ailleurs, on définit la fonction suivante :

$$G(\lambda) = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^n E(w_i, \hat{\mu}_{\lambda_i}) \quad (2.9)$$

d'après le lemme, il vient que

$$G(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(|w_i| > \lambda) \quad (2.10)$$

On introduit également la matrice suivante

$$D_{ij} = \frac{\partial \hat{\mu}_{\lambda_i}}{\partial w_{ij}}.$$

Notons que si $i \neq j$, on a alors $D_{ij} = 0$. Par contre pour $i = j$, on obtient :

$$D_{ii} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |w_i| < \lambda \\ 1 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, il en résulte que :

$$tr(D) = \#\{i : \hat{\mu}_{\lambda_i} \neq 0\} = n - n_0.$$

avec $tr(D)$ est la trace de D , et $n_0 = \#\{i : \hat{\mu}_{\lambda_i} = 0\}$.

En outre, on considère la matrice Jacobienne A :

$$A_{ij} = \frac{\partial X_{\lambda_i}}{\partial X_i}.$$

On a alors :

$$A = \tilde{w}^{-1} D \tilde{w}$$

où \tilde{w} est la matrice de la transformation en ondelettes.

Si la transformation est orthogonale, alors on peut écrire :

$$A = \tilde{w}^{-1} D (\tilde{w}^{-1})^{-1}.$$

On a

$$tr(A) = tr(D).$$

avec ces notations, de plus pour la variable de Bernoulli, on a

$$ED_{ii} = P(D_{ii} = 1)$$

on peut écrire G comme suit :

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(D_{ii} = 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(D_{ii}) \\ &= \frac{1}{n} tr(E(A)). \end{aligned}$$

Ainsi à partir de (2.7), (2.8) et (2.9), on peut écrire comme approximation de l'EQM :

$$SURE(\lambda, w) = F(\lambda) - \sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{n} tr(A).$$

Cet estimateur est sans biais par construction.

Ayant un estimateur de l'erreur en moyenne quadratique, le seuil SURE est alors obtenu par la minimisation de cette quantité. A l'inverse de seuil universel, le seuil SURE dépend du signal à traiter et semble donc plus adaptif.

Par ailleurs, il a été démontré que pour n grand, SURE est proche du vrai risque et λ^s presque du seuil optimal [DJ95].

b- Propriété minimax.

Des propriétés d'adaptivité spatiale [DJ95] s'avèrent intéressantes pour le choix du seuil λ^s . En effet, parmi ces propriétés on a :

$$\sup_{S \in B_{p,q}^\alpha(C)} R(\hat{S}_n^s, S) \leq \gamma \inf_{\hat{S}} \sup_{S \in B_{p,q}^\alpha(C)} R(\hat{S}, S) \quad (2.11)$$

où γ est une constante qui dépend des paramètres α , p et q .

Ce résultat montre que pour toute fonction S appartenant à $B_{p,q}^\alpha(C)$, l'estimateur \hat{S}_n^s est presque minimax.

La comparaison du résultat (2.7) avec le résultat (2.11) permet de constater que la performance presque minimax, en utilisant le seuil λ^S (SURE), est meilleure que celle du seuil λ^u (universel) d'un facteur logarithmique.

2.8 Extention au bruit coloré.

Si le bruit est coloré, sa répartition est différente selon les niveaux. Un seuil global ne peut pas éliminer efficacement tout le bruit. Un seuillage dépendant du niveau semble une solution adaptée à cette situation.

2.8.1 Stationnarité et la transformée en ondelettes d'un bruit corrélé.

Sous l'hypothèse que le bruit est de type AR(1), MA(1) ou ARMA(1,1) (généralisation du bruit blanc), la matrice de covariance de la transformée en ondelettes du bruit e est :

$$V_n = \mathcal{W}Q_n\mathcal{W},$$

où $Q_n = (\gamma(r-s))_{r,s=1}^n$, avec $\gamma(r-s) = cov(e_r, e_s)$.

Les erreurs $(N_{jk})_{j,k}$ aux niveaux différents sont corrélées, mais elles sont décorréllées sur le même niveau.

Lemme :([JAN00])

Soit e un bruit corrélé stationnaire, alors la variance des coefficients d'ondelettes de ce bruit à la position k et à la résolution j , $E(N_{jk})^2$, ne dépend que de cette résolution j .

Preuve :

La covariance des coefficients en ondelettes bruitées au $(j-1)^{i\grave{e}me}$ niveau s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} EN_{j-1,k}N_{j-1,l} &= \sum_u \sum_v \tilde{g}(u-2k) \cdot \tilde{g}(v-2l) Ee_u e_v \\ &= \sum_u \sum_v \tilde{g}(u-2k) \cdot \tilde{g}(v-2l) \gamma(u-v). \end{aligned}$$

En posant $m = u - 2k$ et $n = v - 2l$, il vient que :

$$EN_{j-1,k}N_{j-1,l} = \sum_m \sum_n \tilde{g}(m) \cdot \tilde{g}(n) \gamma(2(k-l) + m - n).$$

A partir de cette formule, il en résulte que, pour tout entier r , on a :

$$EN_{j-1,k+r}N_{j-1,l+r} = EN_{j-1,k}N_{j-1,l}.$$

En particulier, on obtient :

$$EN_{j-1,k+r}^2 = EN_{j-1,k}^2 = \sigma_{j-1}^2.$$

Remarque:

1/Ce lemme explique pour quelle raison on note l'écart type du bruit au niveau j par σ_j .

2/Le bruit N est stationnaire decorréolé pour chaque niveau.

2.8.2 Estimation d'une fonction par ondelettes :

A partir de l'étude de la matrice de covariance des coefficients en ondelettes bruités. On constate que si le bruit est un processus stationnaire corrélé, sa transformée en ondelettes va être stationnaire décorrélée pour chaque niveau. L'extension naturelle de la méthode de seuillage par ondelettes consiste à appliquer un seuillage dépendant d'échelle sur les données transformées w [JS94].

Plus précisément, soit (λ_j) une suite de seuils. On applique le seuillage doux avec le seuil $\lambda_j = \sigma_j \sqrt{2 \log n}$ sur les coefficients de niveau j (σ_j est l'écart type du bruit au niveau j).

on définit dans ce cas l'estimateur $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_{jk})_{j,k}$ par :

$$\hat{\mu}_{jk} = \eta_s \left(w_{jk}, \sigma_j \sqrt{2 \log n} \right)$$

L'estimateur \hat{S}_n est alors obtenu par l'application de la transformée en ondelettes inverse sur les coefficients en ondelettes conservés $\hat{\mu}_{jk}$.

Il a été démontré que le risque de ce seuillage est à un facteur $(2 \log n + 1)$ du risque atteint par un seuillage optimal :

$$R \left(\hat{S}_n, S \right) \leq (2 \log n + 1) \left(\overline{\sigma^2} + R(SO, S) \right),$$

où $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_j \sigma_j^2$.

2.8.3 Seuillage d'un bruit coloré :

a- Filtrage par un seuil non unique :

Les signaux bruités par un processus stationnaire de type MA(1), AR(1) ou ARMA(1,1) ont des caractéristiques différentes d'une échelle à une autre. Pour éliminer ce type de bruit, on peut utiliser le seuil SURE dépendant d'échelle. Ce seuil est déterminé par la minimisation de la quantité:

$$SURE(\lambda_j, w_j) = \frac{1}{n_j} \left\| \hat{\mu}_j^{\lambda_j} - w_j \right\|_{\ell_n^2}^2 + \frac{\sigma_j^2}{n_j} (n_j - 2n'_j)$$

avec n_j est le nombre de coefficients au niveau j .

soit

$$\lambda_j^s = \min_{\lambda_j} SURE(\lambda_j, w_j).$$

La détermination de ce seuil ainsi que le seuil universel dépendant d'échelle nécessite l'estimation de l'écart type du bruit à chaque niveau. Donoho a proposé comme estimation du niveau de bruit la quantité suivante :

$$\hat{\sigma}_j = \frac{\text{médiane}(w_j)}{0,6745}.$$

Adaptivité et optimalité :

La méthode de seuillage SURE dépendant d'échelle atteint asymptotiquement le comportement minimax, c'est-à-dire, si la fonction signal utile appartient à l'espace de Besov $B_{p,q}^\alpha$, l'estimateur \hat{S}_n^s obtenu par seuillage SURE dépendant d'échelle est presque minimax.

$$\sup_{S \in B_{p,q}^\alpha} R(\hat{S}^s, S) \approx \inf_{\hat{S}} \sup_{S \in B_{p,q}^\alpha} R(\hat{S}, S) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

pour tout $p, q \in [1, +\infty]$.

On déduit que l'estimateur \hat{S}^s est presque minimax que l'on connaisse ou non les paramètres p , q et α . Ceci résout le problème d'adaptivité dans l'espace de Besov. Ainsi, la procédure de seuillage SURE ne nécessite pas la connaissance exacte de la régularité de la fonction pour trouver un seuil qui s'approche du seuil optimal

2.9 Qualité de reconstruction.

La procédure du seuillage avec le seuil universel λ^u fournit une reconstruction plus lisse du signal [DJ93], car les détails les plus fins du processus temporel sont éliminés par ce seuillage. Cependant, la performance presque minimax du seuil λ^u n'est pas optimale. Pour améliorer cette performance, le recours au seuil SURE devient nécessaire. Ce seuil permet de réduire le risque des estimateurs par seuillage. Néanmoins, la reconstruction du processus temporel utilisant le seuil SURE laisse apparaître un bruit visible [DJ95]. Ceci s'explique par la minimisation de la fonction perte quadratique qui entraîne un meilleur compromis entre la variance et le biais.

Chapitre 3

Analyse multi-échelle par la transformée en ondelettes.

3.1 Introduction .

Très souvent l'essentiel de l'information d'un signal se situe au niveau des singularités et ses structures irrégulières. L'analyse classique de Fourier ne permet pas à l'étude des composantes transitoires (de durées différentes) d'un processus temporel.

La transformée en ondelettes permet une analyse des structures locales d'un signal avec un zoom dépendant de l'échelle considérée.

Dans ce chapitre, nous exposerons l'analyse multi-échelle par transformation en ondelettes continue et sa capacité à détecter les singularités d'une fonction et à caractériser les régularités de ces singularités.

3.2 Ondelettes et régularité globale et locale des fonctions.

L'analyse multi-échelle permet de caractériser certaines propriétés de régularité des fonctions locales ou globales.

3.2.1 Convergence ponctuelle de la formule de reconstruction.

Avant d'étudier les propriétés de régularité des fonctions, il faut d'abord revenir sur la formule de reconstruction. Elle est prise au sens de la convergence dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Il est naturel de se demander dans quel cas on peut avoir convergence en tout point ou en un point donné.

On sait que dans les cas où une fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ ainsi que sa transformée de Fourier $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$,

alors la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

converge en tout point de continuité de f .

Ce résultat peut être utilisé pour montrer une propriété similaire dans le cas de la transformation en ondelettes.

Supposons que $f, \hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

et soit $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ une ondelette mère vérifiant la condition d'admissibilité, alors la formule de reconstruction :

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} w f(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a} db.$$

est valide point par point.

3.2.2 Régularité Hölderienne.

La régularité Hölderienne a été étudiée depuis le début du siècle (Haar, 1909). L'outil classique est l'analyse de Fourier. Néanmoins, il s'agit d'une méthode "globale" et elle ne peut pas donner d'information locale sur les degrés de régularité. Nous allons voir que les ondelettes, avec un choix adapté au problème, permettent de donner des renseignements précis.

a- Régularité globale.

Soit $0 < \alpha < 1$, on introduit l'espace de Hölder :

$$\Lambda^\alpha = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \exists K < \infty, \text{ tel que } |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \}$$

La méthode classique [HER94] pour caractériser de telles fonctions repose sur la transformée de Fourier :

si f est une fonction bornée telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha) d\xi < \infty$$

alors $f \in \Lambda^\alpha$.

En revanche, on n'a pas la réciproque de ce résultat. Pour l'analyse en ondelettes, nous verrons

que l'on obtient des conditions nécessaires d'un côté et suffisantes de l'autre.

Théorème 1 :([JAF89])

Soit $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ une ondelette continûment différentiable, et soit $0 < \alpha < 1$

(i) Si l'ondelette ψ vérifie :

- $\hat{\psi}(0) = 0 \iff \int_0^{\infty} |\psi(x)| dx = 0$

- $\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx < \infty$

et si la fonction f est globalement α -holderienne, alors

$$|wf(a, b)| \leq Ka^\alpha. \tag{3.1}$$

pour une constante positive finie K .

(ii) réciproquement, si l'ondelette ψ vérifie :

$$\int \sup_{|\delta| < 1} |\psi'(u + \delta)| du < \infty$$

et si $|wf(a, b)| \leq Ka^\alpha$ pour une certaine constante positive finie K , alors f est globalement α -holderienne.

Avant de donner la preuve de ce résultat, on remarque la caractérisation de l'exposant α se fait par l'analyse du comportement de la transformée en ondelettes à travers les échelles.

Preuve :

(i) Puisque $\hat{\psi}(0) = 0$, on a alors :

$$wf(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(b)) \psi_{a,b}(x) dx.$$

par conséquent

$$|wf(a, b)| \leq \frac{K}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - b|^\alpha |\psi_{a,b}(x)| dx.$$

car f est globalement α -holderienne.

En effectuant le changement de variable $y = \frac{x-b}{a}$, on trouve

$$|wf(a, b)| \leq K'a^\alpha.$$

(ii) Supposons qu'il existe une constante K telle que l'on ait :

$$|wf(a, b)| \leq Ka^\alpha.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [\prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) - \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(y)] \frac{da}{a^2} db \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [\prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) - \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(y)] \frac{da}{a^2} db \\ &\quad + \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|x-y|}^{+\infty} [\prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) - \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(y)] \frac{da}{a^2} db. \end{aligned}$$

La première intégrale s'estime

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [\prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) - \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(y)] \frac{da}{a^2} db \right| &\leq 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db \right| \\ &\leq 2K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a^\alpha |\psi_{a,b}(x)| \frac{da}{a^2} db \\ &\leq 2K \|\psi\|_{\mathbb{L}^1} \int_0^{+\infty} a^{\alpha-1} da \\ &\leq K' |x-y|^\alpha \end{aligned}$$

et la seconde

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|x-y|}^{+\infty} [\langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(x) - \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(y)] \frac{da}{a^2} db \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|x-y|}^{+\infty} |\psi_a(x-b) - \psi_a(y-b)| |\langle f, \psi_{a,b} \rangle| \frac{da}{a^2} db \\
&\leq K \int_{|x-y|}^{+\infty} a^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi\left(u - \frac{x-y}{a}\right) - \psi(u) \right| du \frac{da}{a} \\
&\leq K \int_{|x-y|}^{+\infty} a^\alpha \frac{|x-y|}{a^2} da \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{|\delta| < 1} |\psi'(u + \delta)| du \\
&\leq K |x-y|^\alpha.
\end{aligned}$$

En réunissant les deux estimations, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq K''' |x - y|^\alpha.$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

Pour analyser l'exposant de holder α , tel que $\alpha < n$, il est nécessaire d'utiliser un nombre plus élevé de moments nuls. En effet, soit ψ^1 une ondelette qui possède un moment nul, défini par :

$$\psi^1(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

où θ est une fonction régulière.

Supposons que ψ^n est une ondelette ayant n moments nuls. L'ondelette ψ^n peut s'écrire :

$$\psi^n(x) = \frac{d^{n-1}\psi^1(x)}{dx^{n-1}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
wf(a, x) &= (-a)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (f * \psi_a^1)(x) \\
&= (-a)^{n-1} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f * \psi_a^1 \right)(x).
\end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, $\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x)$ est globalement $\alpha - (n - 1)$ holderienne s'il existe une

constante positive finie K telle qu'on ait

$$\left| \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f * \psi_a^1(x) \right| \leq K a^{\alpha-(n-1)}.$$

Par conséquent

$$\left| (-a)^{n-1} f * \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \psi_a^1(x) \right| \leq K a^\alpha.$$

D'où

$$|wf(a, b)| \leq K a^\alpha.$$

C'est-à-dire que f est globalement α holderienne pour $\alpha < n$.

On déduit que si les ondelettes possèdent un nombre de moments nuls plus élevé, elles permettent une analyse plus fine des singularités d'un ordre plus élevé.

Remarque :

Le résultat donné par le théorème (extrêmement révélateur et caractéristique) met en évidence l'usage différent de deux propriétés essentielles des ondelettes : les moments nuls et la régularité. Les moments nuls sont utilisés dans la phase de l'analyse permettant de compacter l'information sur la partie intéressante de la fonction analysée, sa régularité. En revanche, la régularité de ψ n'intervient qu'au moment de la synthèse de f .

b- Régularité locale.

La transformée en ondelettes étant une méthode locale, elle permet d'étudier les propriétés de régularité locale des fonctions. Nous allons voir comment "presque caractériser" les exposants de Hölder locaux de fonctions à l'aide de la transformée en ondelettes.

Definitions.

1/ Une fonction f est α -holderienne en x_0 , s'il existe une constante h_0 et un polynôme P_n de degré $n = [\alpha]$ tel que pour $h < h_0$

$$|f(x_0 + h) - P_n(h)| = O(|h|^\alpha)$$

2/ Pour déterminer la régularité de f en x_0 on prend la borne supérieure des α pour lesquels f est α -holderienne, i.e :

$$\alpha_0 = \sup_{\alpha} (\alpha / f(x) \text{ est } \alpha\text{-holderienne en } x_0).$$

La régularité holderienne α_0 donne une indication sur la différentiabilité de f d'une manière précise.

Si la régularité holderienne α_0 de f satisfait $n \leq \alpha_0 < n + 1$, alors f est n fois différentiable mais sa $(n + 1)$ -ième dérivée possède une singularité en x_0 et α_0 caractérise cette singularité [MEY92] :

Le résultat suivant est une version locale du théorème 1.

Si une fonction f possède une certaine régularité en un point x_0 , sa transformée en ondelettes va avoir le même comportement que précédemment par rapport à la variable d'échelle.

Théorème 2 : ([JAF89])

Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ tel que :

- $\hat{\psi}(0) = 0$.
- $\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx < +\infty$.

Si f est α -holderienne en x_0 , alors il existe une constante C telle que pour tout point x appartenant au voisinage de x_0 et $a > 0$

$$|wf(a, b)| \leq C(a^\alpha + |b - x_0|^\alpha) \quad (3.2)$$

Ainsi, on retrouve l'exposant en étudiant le comportement de la transformée en ondelettes à travers les échelles. La comparaison du résultat (3.1) avec le résultat (3.2) fait ressortir que le module de la transformée en ondelettes, caractérisant la régularité globale, a le même comportement que le module de la transformée en ondelettes caractérisant la régularité locale. De même, cette comparaison permet de voir que le côté local du comportement holderien se trouve dans le terme $O(|b - x_0|^\alpha)$.

Preuve :

Nous avons

$$\begin{aligned} |wf(a, b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x_0)] \psi_{a,b}(x) dx \right| \\ &\leq \frac{K}{a} \int_{\mathbb{R}} [|x - b|^\alpha + |b - x_0|^\alpha] \psi\left(\frac{x - b}{a}\right) dx. \end{aligned}$$

D'où

$$|wf(a, b)| \leq K_1 a^\alpha + K_2 |b - x_0|^\alpha$$

avec

$$\begin{cases} K_1 &= K \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx \\ K_2 &= K \|\psi\|_{\mathbb{L}^1}. \end{cases}$$

Ce qui conclut la preuve.

En revanche, la réciproque de ce théorème est en général fausse, mais néanmoins vraie "à un logarithme près", comme le montre le théorème suivant, dû à S.Jaffard [HER94] : Si la transformée en ondelette de f satisfait aux estimations locales précédents (à un logarithme près), ainsi qu'une condition de régularité globale supplémentaire, alors la fonction elle-même est régulière.

Théorème 3 : ([HER94])

Supposons que l'ondelette ψ a un moment nul, est à support compact et est continument différentiable. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ bornée et continue, et soit $0 < \alpha < 1$. Si, en outre,

i/ il existe deux constantes K et γ , avec $0 < \gamma < \alpha$, telles que pour tout $a > 0$:

$$|wf(a, b)| \leq Ka^\gamma.$$

ii/ la transformée en ondelettes satisfait à

$$|wf(a, b)| \leq K' \left(a^\alpha + \frac{|b - x_0|^\alpha}{|Ln| |b - x_0|} \right) \quad (3.3)$$

pour une certaine constante positive K' , alors la fonction f est α -holderienne en x_0 .

Preuve :

La démonstration de ce théorème sera faite pour le cas $x_0 = 0$. Le cas $x_0 \neq 0$ est déduit par translation.

On a

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2}.$$

La décomposition de cette intégrale en deux termes nous donne :

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{a \leq 1} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2} + \frac{1}{c_\psi} \int_{a > 1} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2}.$$

Posons :

$$f_{SS}(x) = \int_{a \leq 1} \int_{\mathbb{R}} \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2} \quad \text{et} \quad f_{LS}(x) = \int_{a > 1} \int_{\mathbb{R}} \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2}.$$

On va traiter indépendamment ces deux termes.

1/ Puisque ψ est d'intégrale nulle, de même que tous les $\psi_{a,b}$, on peut donc écrire, pour tout $|h| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |f_{LS}(h) - f_{LS}(0)| &= \left| \int_{a > 1} \int_{\mathbb{R}} \left[\prec f, \psi_{a,b} \succ \psi \left(\frac{h-b}{a} \right) - \prec f, \psi_{a,b} \succ \psi \left(\frac{-b}{a} \right) \right] db \frac{da}{a^3} \right| \\ &\leq \int_{a > 1} \int_{\mathbb{R}} \left| \psi \left(\frac{h-b}{a} \right) - \psi \left(\frac{-b}{a} \right) \right| \left| \prec f, \psi_{a,b} \succ \right| db \frac{da}{a^3} \\ &\leq \int_{a > 1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left| \psi \left(\frac{y-b}{a} \right) \right| \left| \psi \left(\frac{h-b}{a} \right) - \psi \left(\frac{-b}{a} \right) \right| dy db \frac{da}{a^4}. \end{aligned}$$

Comme $|\psi(z+t) - \psi z| \leq c|t|$ et ψ est à support dans $[-R, R]$, $R < \infty$, il en résulte

$$\begin{aligned} |f_{LS}(h) - f_{LS}(0)| &\leq c' |h| \int_{a > 1} \int_{|b| \leq aR+1} \int_{|y-b| \leq aR} a^{-5} |f(y)| dy db da \\ &\leq c'' |h| \int_{a > 1} \int_{|y| \leq 2aR+1} a^{-4} |f(y)| dy da. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, on trouve :

$$|f_{LS}(h) - f_{LS}(0)| \leq c'' \cdot |h| \cdot \|f(y)\|_{\mathbb{L}^2} \cdot \int_{a > 1} a^{-4} (4aR+1)^{1/2} da$$

qui entraîne,

$$|f_{LS}(h) - f_{LS}(0)| \leq c''' \cdot |h|.$$

2/ Dans le cas $a \leq 1$, $|f_{SS}(h) - f_{SS}(0)|$, pour h assez petit, peut être majoré par,

$$|f_{SS}(h) - f_{SS}(0)| \leq T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \int_{a \leq |h|^{\alpha/\gamma}} \int_{\mathbb{R}} |a|^\gamma \left| \psi \left(\frac{h-b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2}, \quad 0 < \gamma < \alpha, \\ T_2 = \int_{|h|^{\alpha/\gamma} \leq a \leq |h|} \int_{\mathbb{R}} \left(a^\alpha + \frac{|b|^\alpha}{|\text{Log } |b||} \right) \psi \left(\frac{h-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}, \\ T_3 = \int_{a \leq |h|} \int_{\mathbb{R}} \left(a^\alpha + \frac{|b|^\alpha}{|\text{Log } |b||} \right) \psi \left(-\frac{b}{a} \right) db \frac{da}{a^2}, \\ T_4 = \int_{|h| \leq a \leq 1} \int_{\mathbb{R}} \left(a^\alpha + \frac{|b|^\alpha}{|\text{Log } |b||} \right) \left| \psi \left(\frac{h-b}{a} \right) - \psi \left(-\frac{b}{a} \right) \right| db \frac{da}{a^2}. \end{array} \right.$$

- T_1 se majore par

$$T_1 \leq \int_{a \leq |h|^{\alpha/\gamma}} a^{\gamma-1} \|\psi\|_{\mathbb{L}^1} da.$$

D'où

$$T_1 \leq c \cdot |h|^\alpha. \quad (3.4)$$

- Supposons que ψ est à support dans $[-R, R]$, on a alors l'intégrale T_2 peut être majorée par :

$$\begin{aligned} T_2 &\leq \int_{a \geq |h|} a^{\alpha-1} \|\psi\|_{\mathbb{L}^1} da + \int_{|h|^{\alpha/\gamma} \leq a \leq |h|} a^{-1} \|\psi\|_{\mathbb{L}^1} \frac{|aR + |h||^\alpha}{|\text{Log } (aR + |h||)} da \\ &\leq c \cdot |h|^\alpha \left[1 + \frac{1}{|\text{Log } |h||} \int_{|h|^{\alpha/\gamma} \leq a \leq |h|} a^{-1} da \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$T_2 \leq c' \cdot |h|^\alpha. \quad (3.5)$$

- De même pour T_3 , on a

$$\begin{aligned} T_3 &\leq \int_{a \geq |h|} a^{\alpha-1} \|\psi\|_{\mathbb{L}^1} da + \int_{a \leq |h|} a^{-1} \|\psi\|_{\mathbb{L}^1} \frac{(aR)^\alpha}{|\text{Log } (aR)|} da \\ &\leq c \cdot |h|^\alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

• et finalement,

$$\begin{aligned}
T_4 &\leq c \cdot |h| \int_{|h| \leq a \leq 1} a^{-3} \left[a^\alpha + \frac{|aR + |h||^\alpha}{|\text{Log}(aR + |h|)|} \right] (aR + |h|) da \\
&\leq c' \cdot |h|^\alpha [1 + |h|^{\alpha-1} + |h| (1 + |h|^{\alpha-2})]. \\
&\leq c'' \cdot |h|^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En réunissant (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7), il vient alors, pour h assez petit,

$$|f_{SS}(h) - f_{SS}(0)| \leq c''' \cdot |h|^\alpha.$$

On a ainsi démontré que la fonction f est α -holderienne en $x_0 = 0$. Ce qui achève la preuve du théorème 3.

Remarque :

Si une fonction f a un comportement holderien d'exposant α en un point x_0 , sa primitive a alors un comportement holderien d'exposant $\alpha + 1$ en x_0 . La réciproque est en général fausse, à cause de possibles oscillations rapides au voisinage de la singularité (l'exemple de la fonction $\sin(1/x)$).

Mallat et Hwang [MH92] montrent comment exploiter ces résultats pour la caractérisation numérique des singularités. Ils s'intéresseront à la recherche des maxima locaux du module de la transformée en ondelettes continue en considérant des valeurs différentes de la variable d'échelle. C'est ce que nous allons développer dans la section suivante.

3.3 Approche multi-échelle par la transformée en ondelettes.

3.3.1 Extréma de la transformée en ondelettes et les zéros crossing :

Supposons que θ est une fonction régulière, et soient ψ^1 et ψ^2 deux ondelettes définies par :

$$\psi^1(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \psi^2(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

les transformées en ondelettes continues pour chacune de ces ondelettes sont définies respectivement par :

$$w^1 f(a, t) = f * \psi_a^1(t) \quad \text{et} \quad w^2 f(a, t) = f * \psi_a^2(t)$$

$$w^1 f(a, t) = f * \left(a \frac{d\theta_a}{dt} \right) (t) = a \frac{d}{dt} (f * \theta_a) (t)$$

et

$$w^2 f(a, t) = f * \left(a^2 \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} \right) (t) = a^2 \frac{d^2}{dt^2} (f * \theta_a) (t).$$

Pour une échelle a fixée, les extréma locaux de $w^1 f(a, t)$ correspondent aux zéros crossings de $w^2 f(a, t)$ et des points d'inflexions pour $f * \theta_a(t)$ (voir figure 3.1).

Les mêmes procédures permettent de déterminer les zéros crossings de $w^2 f(a, t)$ ainsi que les extréma locaux de $w^1 f(a, t)$. Toutefois, l'approche pour déterminer les extréma locaux permet d'obtenir des résultats plus précis. En effet, un point d'inflexion de $f * \theta_a(t)$ peut être un maximum ou bien un minimum de $w^1 f(a, t)$. Les maxima locaux du module de la première dérivée de $f * \theta_a(t)$ indiquent les points de variations aiguës de f . Par contre les minima correspondent à des variations lentes (voir figure 3.1). Ces deux types de points d'inflexions peuvent être distingués en examinant si l'extrémum de $w^1 f(a, t)$ est un maximum ou un minimum. Mais, ils ne peuvent pas être différenciés à partir des zéro-crossing de $w^2 f(a, t)$.

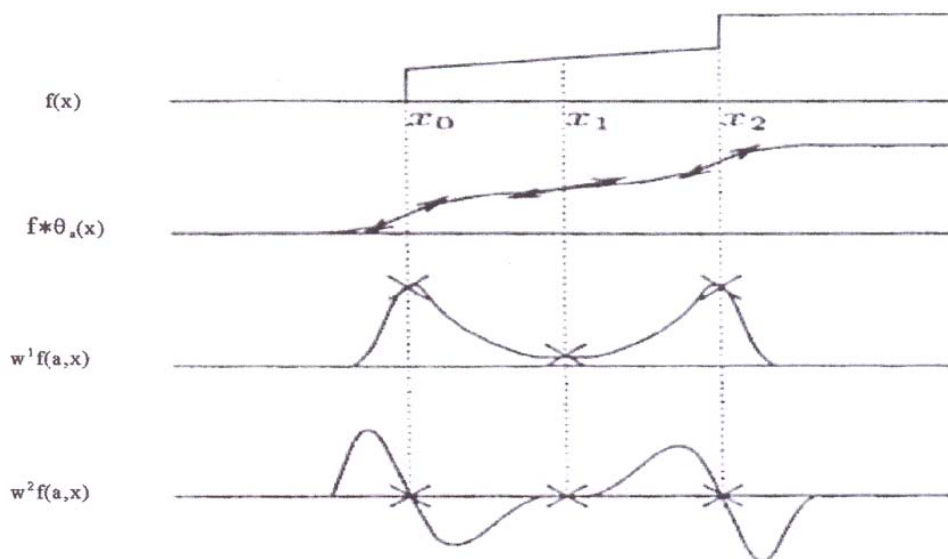


Figure 3.1 : Signal et sa transformée en ondelettes continue

Pour la détection des singularités, Mallat prend en considération seulement les maxima locaux de la transformée en ondelettes. Ceci est traduit par le résultat suivant.

Théorème 4 :([MH92])

Soit n un entier strictement positif, et soit ψ une ondelette à n moments, à support compact et n fois continûment différentiable. Soit $f \in L^1([\alpha, \beta])$.

- S'il existe une échelle $a_0 > 0$ telle que pour toute échelle $a < a_0$ et $x \in [\alpha, \beta]$, $|wf(a, x)|$ n'admet pas des maxima locaux, alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\alpha > n$, f est globalement α holderienne sur $] \alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon [$.
- Si ψ est la n -ième dérivée d'une fonction régulière, alors f est globalement n -holdrienne sur $] \alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon [$.

Pour la preuve de ce théorème, voir [MH92].

Ce résultat montre qu'il ne peut y avoir de singularité sans maximum local de la transformée en ondelettes dans les fines échelles. Comme conséquence de ce résultat nous avons:

La fermeture de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$, où f n'est pas n -holderienne, est incluse dans la fermeture des maxima de la transformée en ondelettes de f . Ainsi, toutes les singularités peuvent être localisées par une suite des lignes maxima quand l'échelle tend vers zéro (une ligne maxima du module de la transformée en ondelettes continue est une courbe dans le domaine temps-échelle, le long de laquelle tous les points sont des maxima du module). Dans le cas où l'ondelette est la dérivée n -ième d'une gaussienne, les lignes maxima sont connexes et continues jusqu'aux échelles les plus fines [MH92].

3.3.2 Quantification locale de la régularité.

Avant d'énoncer le résultat qui permet de déterminer le degré de la régularité ponctuelle, définissons d'abord un "cône".

Définition.

Soit f une fonction et fixons un point x_0 . On appelle cône d'un point x_0 , dans le plan temps-échelle, l'ensemble des points (x, a) satisfaisant :

$$|x - x_0| \leq K.a \tag{3.8}$$

où K est une constante positive finie.

Il est facile de voir que le comportement de f en $x = x_0$, va se répercuter sur la transformée en ondelettes dans le cône du point x_0 . Dans le cas où le point (a, x) est à l'intérieur du cône défini

ci-dessus, (3.1) et (3.4) (voir théorème 2 et 3) imposent, quand a tend vers 0,

$$|wf(a, x)| = O(a^\alpha).$$

Par contre s'il est à l'extérieur de ce cône, la valeur $|wf(a, x)|$ est contrôlée par la distance de x avec x_0 . Plus précisément, on a le résultat suivant :

Supposons que l'ondelette ψ est la dérivée n -ième d'une fonction régulière à support compact et n fois continûment différentiable et soit α un non entier inférieur à n . La fonction f est α -holderienne en x_0 si et seulement si, il existe une constante c telle qu'en chaque maximum du module (a, x) à l'intérieur du cône défini en (3.8) :

$$|wf(a, x)| \leq c.a^\alpha.$$

En passant aux logarithmes, il vient

$$\log |wf(a, x)| \leq \alpha \log a + \log c.$$

et asymptotiquement, on obtient :

$$\limsup_{a \searrow 0} \frac{\log |wf(a, x)|}{\log a} = \alpha.$$

Cette propriété permet d'estimer la régularité holderienne α au point x_0 , en prenant la pente maximale des lignes droites dans un diagramme $\log - \log$.

Le résultat ci-dessous est traduit par le théorème suivant :

Théorème 4:

Soit f une distribution tempérée dont la transformée en ondelettes continue est définie sur $] \alpha, \beta [$ et $x_0 \in] \alpha, \beta [$. et soit l'ondelette ψ est la dérivée n -ième d'une fonction régulière à support compact et n fois continûment différentiable.

- *S'il existe une échelle $a_0 > 0$ et une constante K telles que, pour tout $x \in] \alpha, \beta [$ et $a > a_0$, tous les maxima du module de $wf(s, x)$ appartiennent à un cône défini par :*

$$|x - x_0| \leq K.a \tag{3.9}$$

alors, pour tout point $x_1 \in] \alpha, \beta [$ tel que $x_1 \neq x_0$, f est uniformément n holderienne au voisinage de x_1 .

- Soit $\alpha < n$, la fonction f est α holderienne en x_0 si et seulement s'il existe une constante A telle qu'en chaque maxima du module (a, x) à l'intérieur d'un cône défini en (3.9) on ait :

$$|wf(a, x)| \leq A a^\alpha$$

3.4 Méthode de traitement :

La méthode de traitement des signaux qui permet la localisation et la spécification des singularités, se présente comme suit :

- 1- Choisir une famille d'ondelettes analysantes qui satisfait les conditions des deux résultats de Mallat.
- 2- Calculer la transformée en ondelettes par convolution du signal avec l'ondelette considérée.
- 3- Rechercher les maxima du module de la transformée en ondelettes.
- 4- Tracer les dilatations en fonction des maxima du module de la transformée en ondelettes pour localiser les singularités.
- 5- Tracer les modules de la transformée en ondelettes le long d'une ligne maxima (appelée fonction ridge) en fonction de dilatation dans un diagramme log – log, puis calculer la pente afin de déterminer l'ordre de la singularité.

Chapitre 4

Analyse des données de nombre de tâches solaires.

4.1 Introduction.

Dans ce chapitre, un signal synthétique est créé sur la base d'un modèle paramétrique. Le signal est bruité par un WN, MA(1), AR(1) et ARMA(1,1). Pour éliminer ces bruits, nous utiliserons le seuillage des coefficients d'ondelettes orthogonales empiriques. Cette étude est destinée à tester les performances du seuillage. Dans le but de détecter les singularités et d'estimer leurs régularités, nous appliquerons au signal généré ainsi qu'aux signaux débruités la transformée en ondelettes continue. Cette étude numérique nous permettra d'évaluer les performances de la démarche utilisée.

Ces mêmes méthodes seront appliquées aux données de nombre de tâches solaires.

Ce chapitre débutera donc par une description, de manière générale, du Soleil, une discussion sera ensuite donnée sur les résultats obtenus.

4.2 Généralité sur le Soleil.

4.2.1 Le Soleil.

Le Soleil est l'étoile la plus proche de la Terre. Il émet de la chaleur, de la lumière et un flux de particules chargées, essentiellement des protons et des électrons, avec une intensité variant suivant

l'activité solaire (voir figure 4.1).

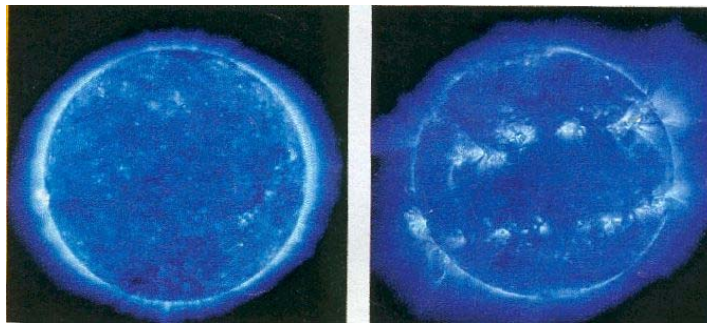


Figure 4.1: images du soleil prises par le satellite "SOHO" à deux années d'intervalles. à gauche l'activité solaire est presque nulle. à droite en revanche elle est extrêmement intense. on observe des violentes éruptions solaire qui projette dans l'espace un vent solaire [GRE00].

4.2.2 Tâches solaires :

Les tâches solaires ayant pour siège la chromosphère, sont quelques peu plus froides et donc plus sombres que leur entourage. Elles sont visibles à partir de la terre et grandissent pendant quelques jours. Leurs durées varient de plusieurs jours à quelques mois et indiquent une activité solaire renforcée. De plus, les tâches solaire apparaissent souvent en groupe.

H.Schwabe fut le premier à observer régulièrement les tâches et à en relever soigneusement le nombre. Il a annoncé, en 1843, l'existence d'un cycle de 10 ans dans l'apparition des tâches. Par la suite, R.Wolf a confirmé l'hypothèse de Schwabe en étudiant toutes les données disponibles sur les tâches. Il a adapté comme indice d'activité solaire, la quantité :

$$R = k(10g + f)$$

R étant le nombre relatif de tâches et k une constante propre à l'observation. g et f sont respectivement des nombres de tâches.

Il a attribué le numéro 1 au cycle commençant en 1754, soit 22 cycles jusqu'à 1996. Dans chaque cycle, l'activité solaire passe par un minimum et par un maximum (lorsque l'activité est à son maximum, la variation du nombre de tâches est très importante); la périodicité des cycles varie entre 9 et 14 ans.

4.2.3 Effet de tâches solaires :

Lorsque l'activité solaire est à son maximum, les tâches solaires sont plus nombreuses sur la surface du soleil. Notre astre émet des éruptions solaires violentes (rafales de vent solaire constitué de

protons et d'électrons) ainsi que de grande quantité de rayon X et d'ultraviolet (voir figure 4.2); elles ont des conséquences diverses [BUR01] :

- – perturbation des propagations des ondes utilisées dans la télécommunication.
- perturbation des dispositifs électroniques qui se trouvent sur Terre ou embarqués sur les avions et à fortiori à bord des satellites et des navettes spatiales.
- risque d'irradiation grave pour les astronautes qui se trouvent dans l'espace.
- génération de courants induits dans les réseaux de distributions de l'électricité ou des câbles téléphoniques.

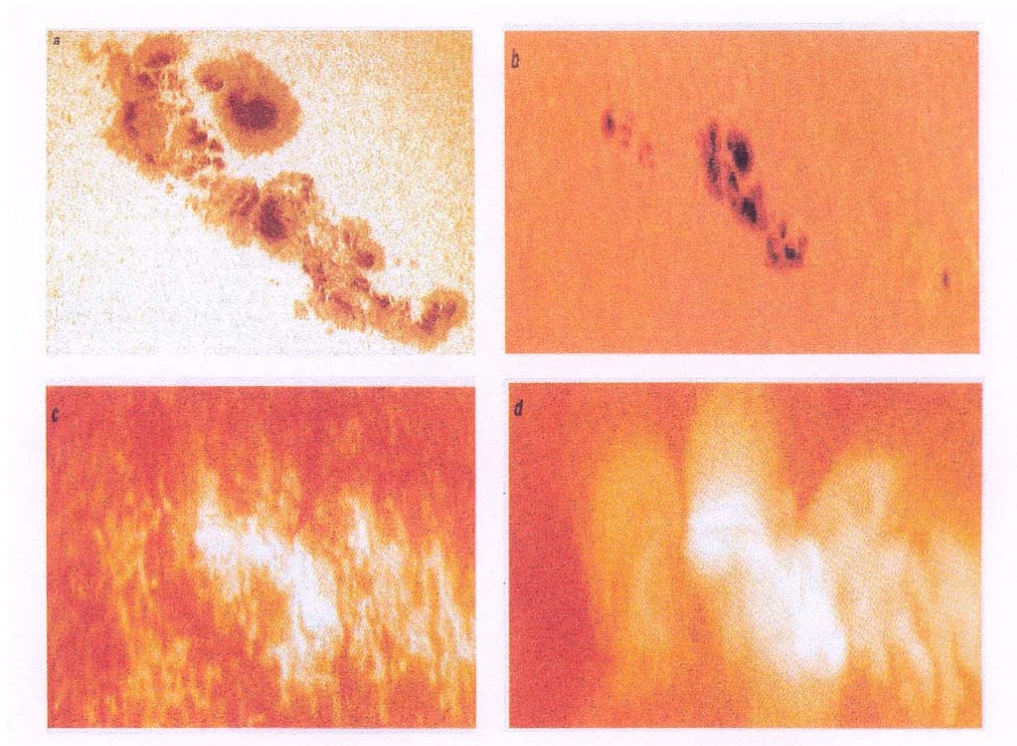


Figure 4.2 : tâche et éruption solaires

a- certains groupes de tâches solaires

b- les tâches apparaissent noire

c- éruption solaire au dessous du groupe de tâches

d- boucles de champ magnétique solaire chargées de protons et d'électron émis lors de l'éruption

(a, b, c et d ont été prises sur la même région) [BUR01].

4.3 Signal synthétique :

Le signal synthétique permettant de tester les performances des méthodes décrites précédemment a la structure suivante :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{12} S(t - t_i) + \sum_{i=1}^{16} S(t - t_{i+12}) + \sum_{i=1}^{20} S(t - t_{i+28})$$

avec

$$S(t - t_{i+j}) = a_i (t - t_{i+j})_+^{b_i} e^{-c_i(t - t_{i+j})} \quad (\forall i = \overline{1, 12}, j = 0), (\forall i = \overline{1, 16}, j = 12) \text{ et} \\ (\forall i = \overline{1, 20}, j = 28).$$

où $a_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $b_i = n_i + \alpha_i : 0 < \alpha_i < 1, n_i \in \mathbb{N}$ pour $i = \overline{1, 20}$.

Les temps t_{i+j} correspondent aux singularités du signal synthétique qui apparaissent respectivement aux minima, temps de commencement du chaque cycle, et aux maxima, point à partir duquel le cycle change de signe, et de régularité bi en ces points. Les valeurs de ces singularités sont présentées dans le tableau 1.

n	instants	n	instants
1	0	25	1764
2	48	26	1805
3	157	27	1913
4	198	28	1960
5	307	29	2042
6	348	30	2082
7	459	31	2146
8	506	32	2187
9	619	33	2250
10	672	34	2292
11	798	35	2359
12	846	36	2407
13	940	37	2471
14	980	38	2522
15	1069	39	2589
16	1110	40	2637
17	1198	41	2722
18	1240	42	2762
19	1327	43	2855
20	1375	44	2902
21	1462	45	3005
22	1515	46	3042
23	1611	47	3088
24	1660	48	3197

Tableau1: les instants des singularités du signal synthétique.

Plus précisément, la construction du signal synthétique se fait comme suit :

On construit les six premiers cycles dans lesquels les pas entre deux maxima successifs sont respectivement : 150, 150, 158, 166 et 174. Les huit cycles suivant ont des pas qui correspondent respectivement à : 134, 130, 130, 135, 140, 145, 145 et 155. Les pas des dix derniers cycles sont respectivement : 122, 105, 105, 115, 115, 125, 140, 140 et 155. Nous obtenons un signal synthétique constitué de 24 cycles.

Cette structure du signal synthétique est suggérée par les géophysiciens. Il modélise au mieux les structures des cycles de tâches solaires. Les paramètres a, b, et c sont choisis afin de reproduire la Forme de la fonction $S(t)$ (à savoir la valeur et la position du maximum et la largeur du " lobe principal").

Ce signal synthétique est donc appliqué pour décrire en moyennes mensuelles les cycles solaires, à partir de nombre de tâches solaires (voir figure 4.3).

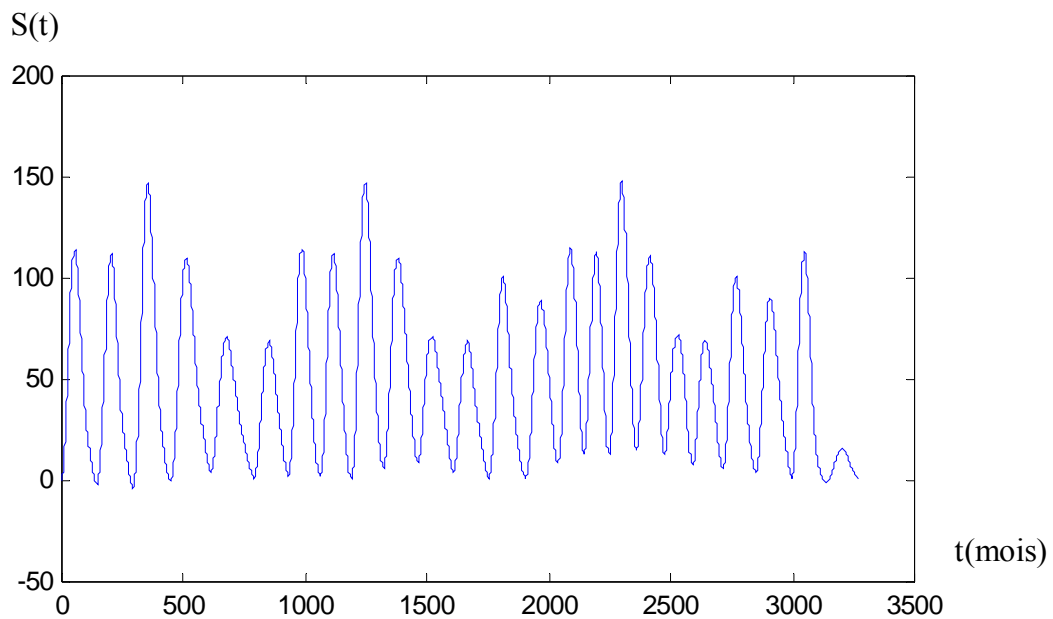


Figure 4.3. Signal synthétique avec différentes singularités

4.4 Performance du débruitage

Nous allons examiner et commenter les performances de la procédure de seuillage présentée dans le chapitre 2 pour un bruit blanc gaussien ainsi que des bruit MA(1), AR(1) et ARMA(1,1) avec différents paramètres.

Tout au long de ce travail, l'ondelette utilisée est celle de Daubéchies de coefficient 6 (Daub6) et la décomposition en ondelettes orthogonales sur le signal synthétique obtenu ci-dessous a été réalisé jusqu'à cinquième niveau.

4.4.1 Un bruit blanc gaussien

Dans cette section, nous proposons de tester les performances de la méthode non linéaire, seuillage par ondelettes orthogonales, sur les données simulées synthétique bruité artificiellement avec un bruit blanc gaussien additif. Comme la transformée en ondelettes transforme un bruit blanc gaussien en un bruit blanc gaussien, alors pour éliminer ce bruit nous utiliserons un seuil unique.

Le signal synthétique obtenu ci-dessus est contaminé par un bruit blanc gaussien additif d'espérance nulle et d'écart type 7. Le graphe de cette simulation est montré sur la figure 4.4, où le bruit ajouté induit des perturbations sur le signal synthétique qui peuvent être gênante pour l'étude de détection et

spécification des singularités. La détection et la spécification des singularités d'un processus temporel étant l'objectif visé par la présente étude.

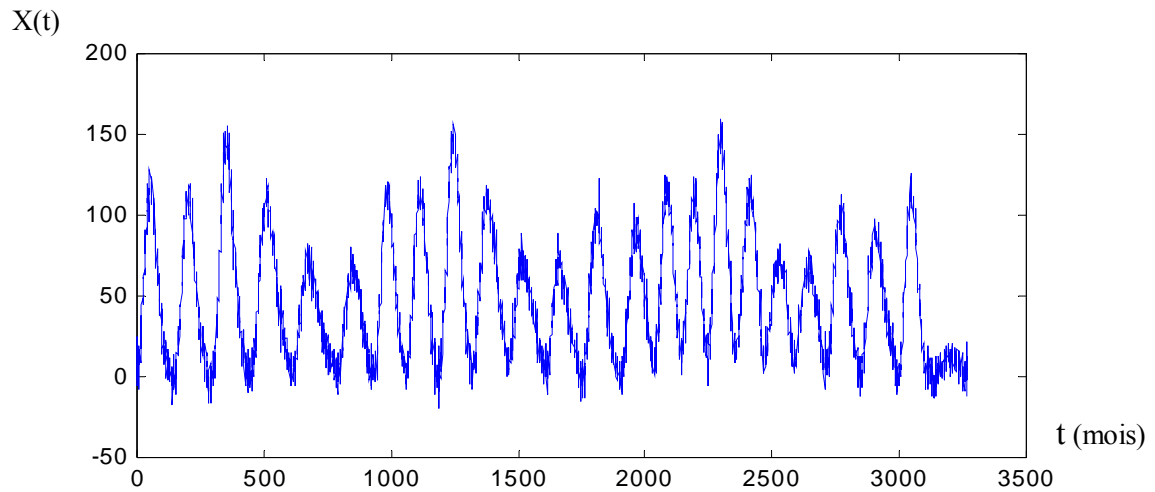


Figure 4.4. Signal synthétique bruité avec un bruit blanc ($\sigma = 7$)

Le débruitage avec un seuil global est montré sur les figures suivantes. On a le résultat du seuillage avec le seuil universel est montré sur la figure 4.5. On peut voir sur cette figure que visuellement le bruit est éliminé. Mais il y'a une légère perte d'information. Cependant, en utilisant le seuil se basant sur la minimisation de l'erreur en moyenne quadratique, le seuil SURE, on constate une amélioration dans la préservation de l'information (voir figure 4.6).

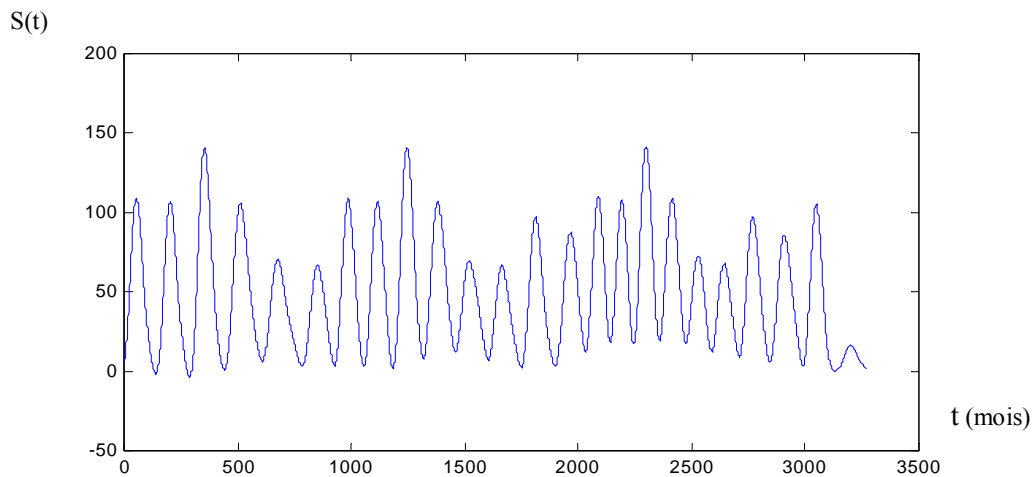


Figure 4.5. Signal obtenu après seuillage de fig 4.4 avec un seuil universel

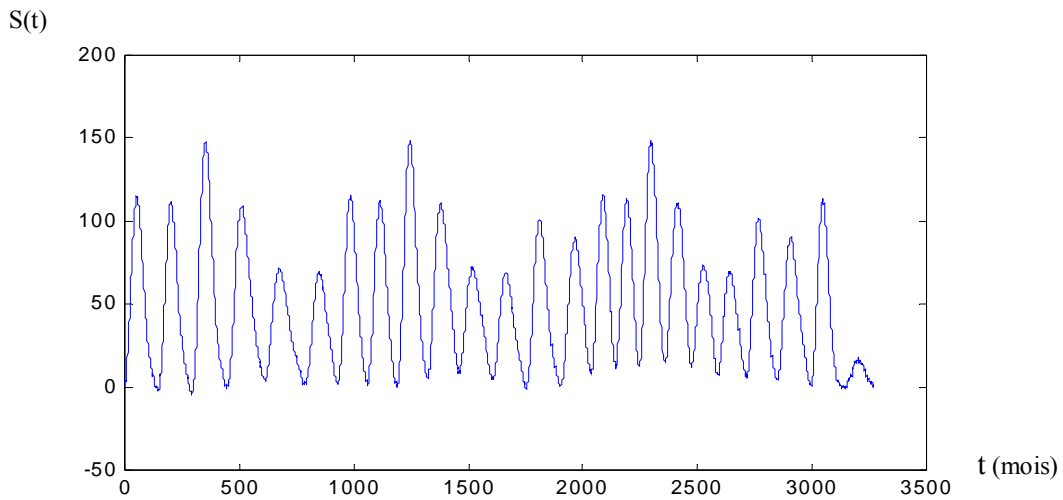


Figure 4.6. Signal obtenu après seuillage de fig4.4 avec un seuil SURE

Un bruit de type processus stationnaire corrélé

De même nous contaminons le signal synthétique par un bruit additif de type:

a) MA(1)

Pour $\theta = 0.3$, on peut remarquer sur la figure 4.7 que l'intensité de ce bruit est élevée par rapport à celle du bruit gaussien d'écart type 7. la gêne devient importante pour l'étude de détection des singularités . Malheureusement le débruitage avec un seuil global universel et SURE sont loin d'être à la hauteur; car ils ne permettent pas d'éliminer efficacement le bruit (voir figure 4.8).

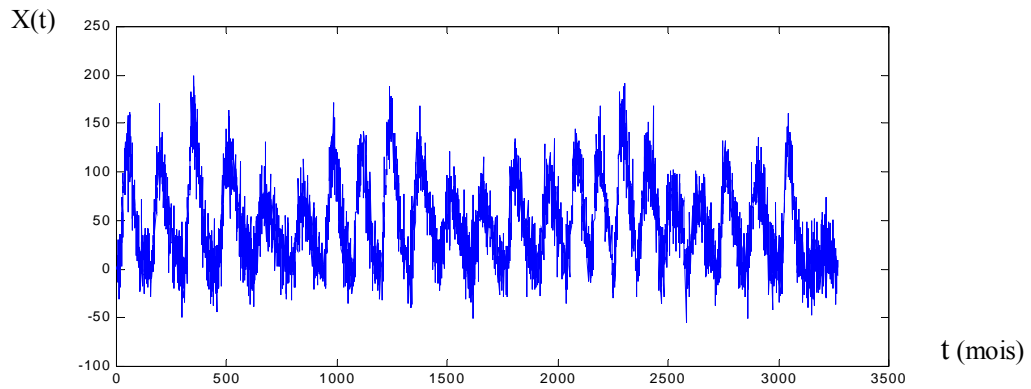


Figure 4.7. Signal synthétique bruité avec un bruit MA(1) [$\theta = 0.3$]

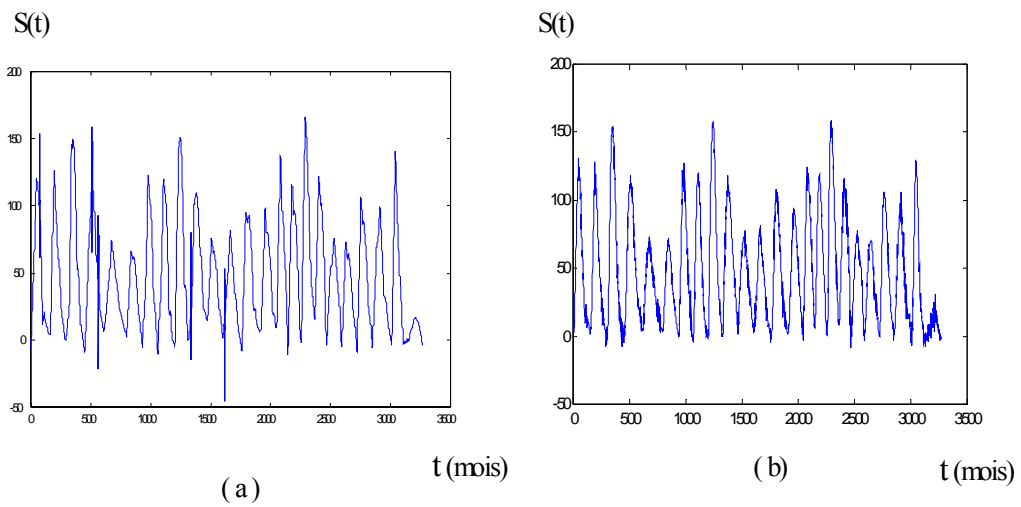


Figure 4.8. Signal obtenu après seuillage de fig 4.7. avec un seuil : (a)-universel (b)-SURE

L'application d'un seuillage dépendant d'échelle a des conséquences différents selon le seuil choisi. Dans le cas du seuil universel dépendant d'échelle, le bruit est totalement éliminé.

Certaines caractéristiques du signal synthétique sont éliminées avec le bruit (voir figure 4.9). Par contre avec le seuil SURE dépendant d'échelle, il apparaît sur la figure 4.10 que les caractéristiques du signal synthétique sont conservées, malgré une persistance d'un faible niveau de bruit après seuillage.

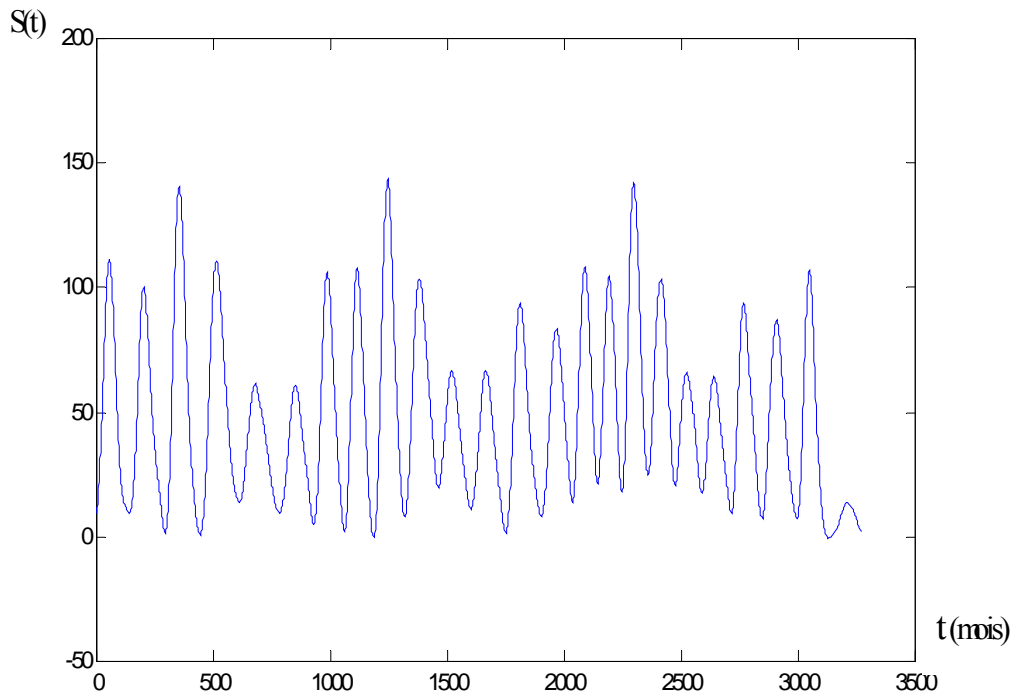


Figure 4.9. Signal après seuillage de fig 4.7 avec un seuil universel dépendant d'échelle

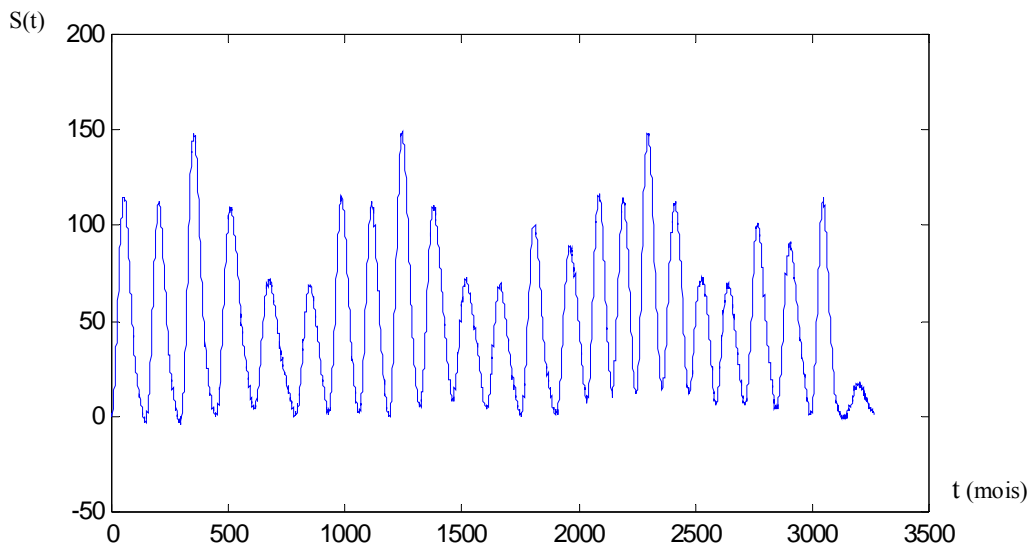


Figure 4.10. Signal après seuillage de fig 4.7 avec un seuil SURE dépendant d'échelle

Pour $\theta=10$, on constate que l'intensité du bruit augmente (voir figure 4.11). nous commençons par présenter les résultats des méthodes se basant sur seuillage des coefficients en ondelettes avec un seuil global : le seuil universel n'arrive pas à éliminer le bruit correctement (voir figure 4.12 - (a)) et avec le seuil SURE le bruit n'a pas été totalement supprimé (voir figure 4.12 - (b))

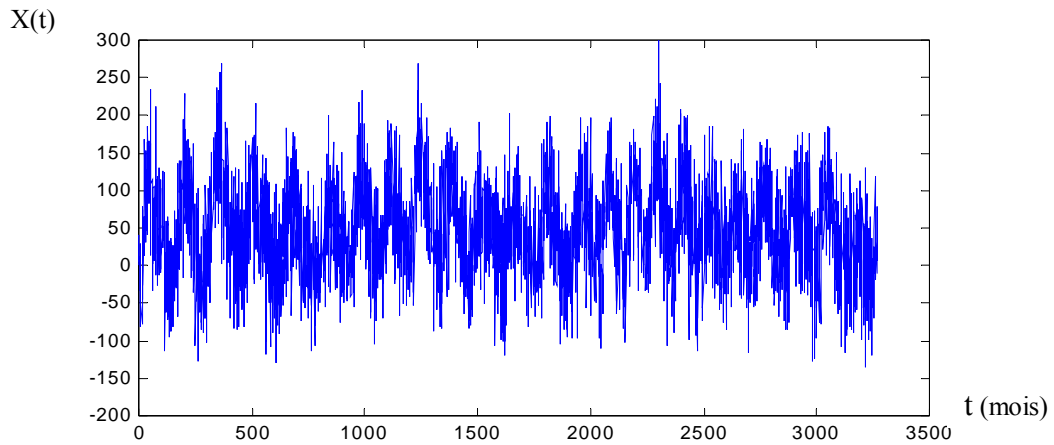


Figure 4.11. Signal synthétique bruité avec un bruit MA(1) [$\theta=10$]

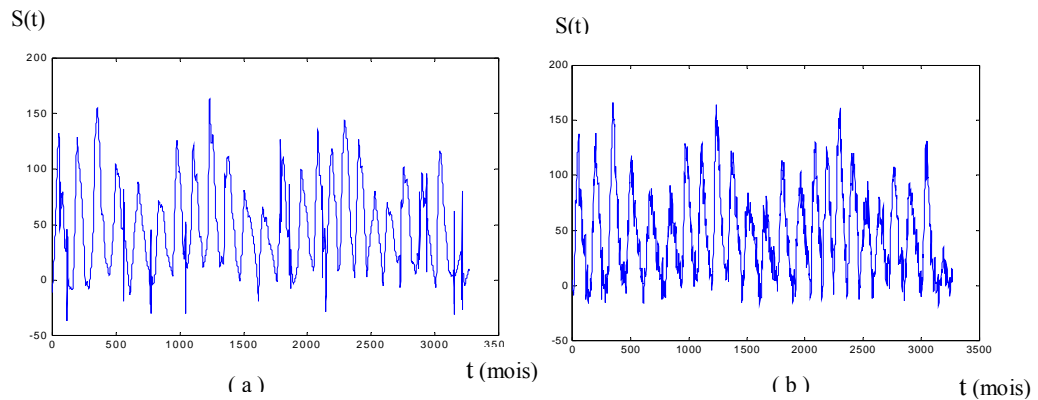


Figure 4.12. Signal obtenu après seuillage de fig 4.11 avec un seuil : (a) - universel (b) - SURE

L'apport d'un seuillage dépendant des niveaux ne se fait ressentir que pour la méthode où le seuil minimise l'erreur en moyenne quadratique, pour le seuil SURE dépendant d'échelle une amélioration considérable est constaté dans la figure 4.14. Mais, malheureusement, le signal obtenu est légèrement déformé, cela provient du fait que le bruit utilisé est de forte intensité (voir figure 4.13 et 4.14).

A partir de ce dernier cas, on peut déduire que lorsque le paramètre devient très grand, le signal synthétique a tendance à se déformer.

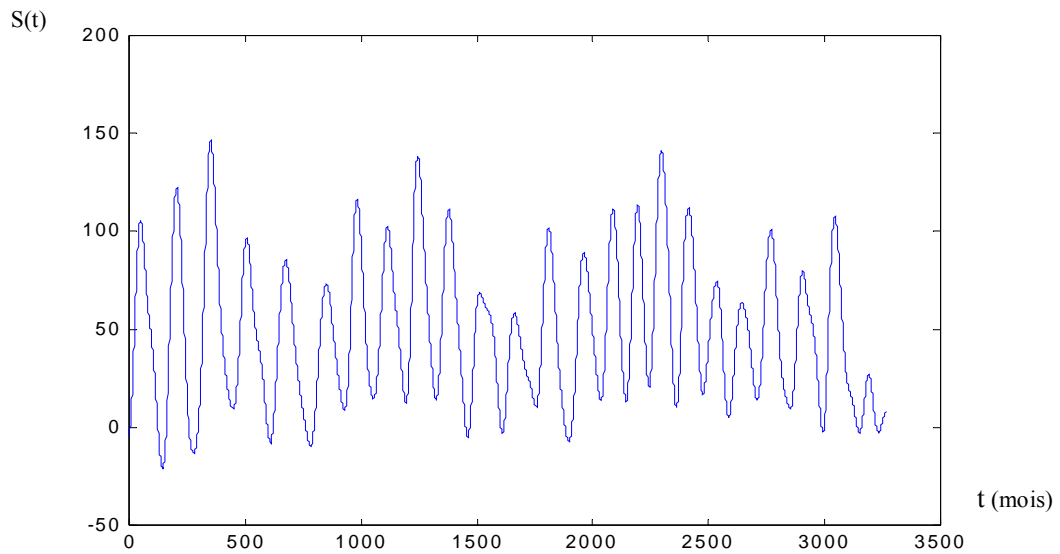


Figure 4.13. Signal obtenu après seuillage de fig 4.11 avec un seuil universel dépendant d'échelle

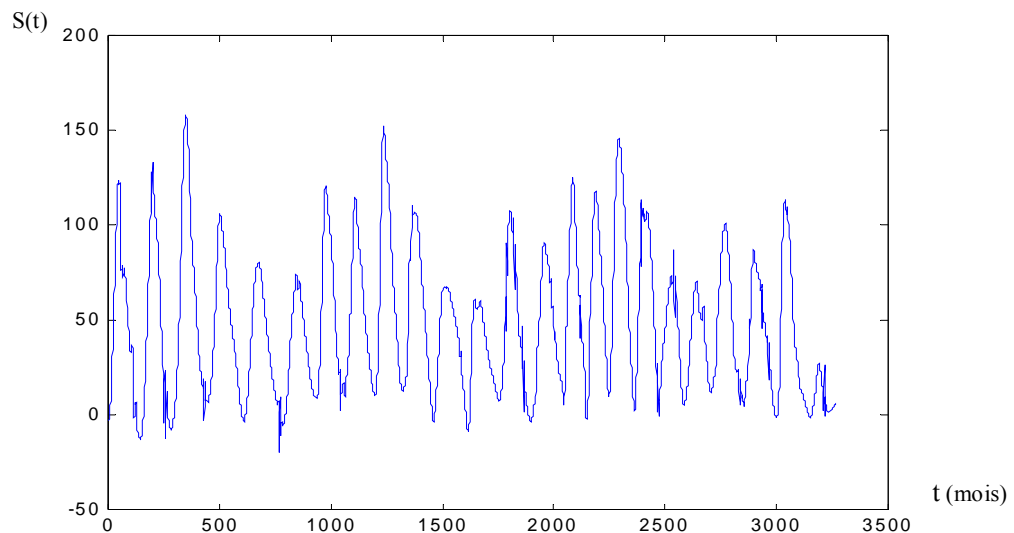


Figure 4.14. Signal obtenu après seuillage de fig 4.11 avec un seuil SURE dépendant d'échelle

b) AR (1)

Nous suivrons le même cheminement pour l'évaluation des résultats de notre approche sur le même signal bruitée, cette fois-ci avec un bruit coloré de type Auto Régressif d'ordre 1. La figure 4.15 montre le signal synthétique bruité par AR(1) avec $\varphi = 0.3$. On aperçoit sur cette figure l'apparition des grandes perturbations. Comme précédemment, nous commençons par présenter les résultats des méthodes de débruitage avec un seuil unique. La figure 4.16 présente les résultats du seuillage avec

le seuil global universel et SURE qui laissent apparaître beaucoup de bruit. Donc un seuil unique n'arrive pas à éliminer tout le bruit de type Auto Régressive d'ordre 1.

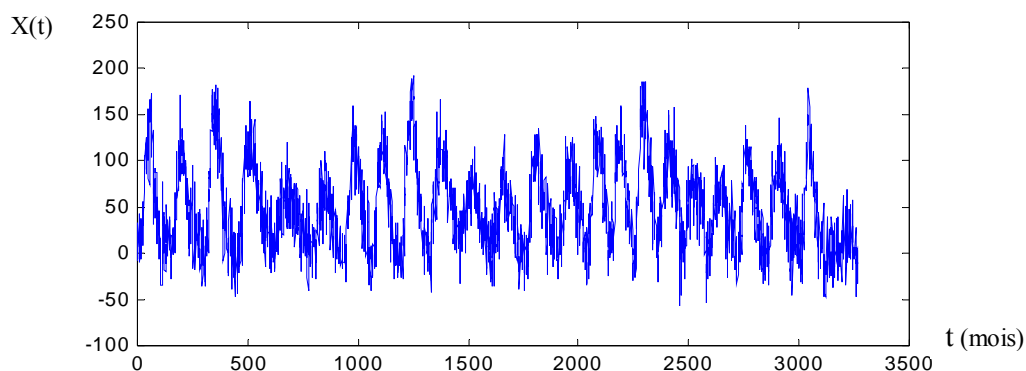


Figure 4.15. signal synthétique bruité avec un bruit AR(1) [$\varphi=0.3$]

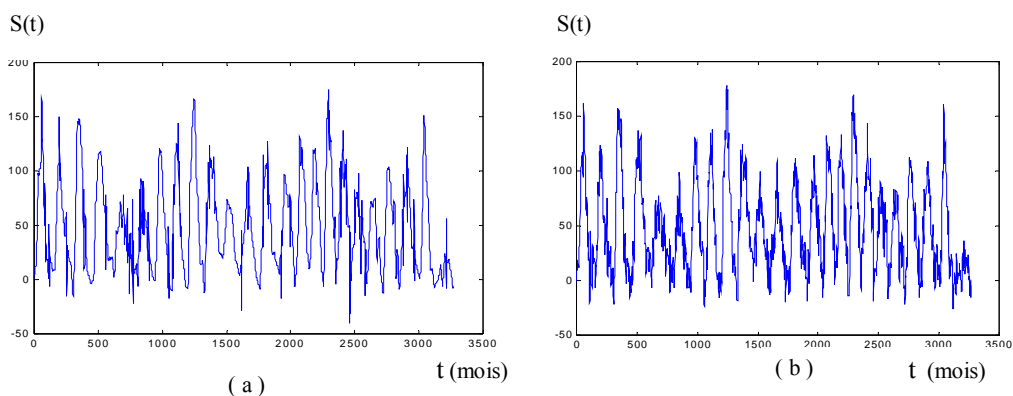


Figure 4.16. signal obtenu après seuillage de fig 4.15 avec un seuil: (a)-universel (b)-SURE

Par contre avec le seuil universel dépendant d'échelle la figure 4.17 montre qu'une partie de l'information a été éliminée en même temps que le bruit. Sur la figure 4.18, on constate que le seuillage avec le seuil SURE dépendant d'échelle apporte une amélioration considérable. Néanmoins la reconstruction du signal après seuillage fait apparaître un bruit résiduel.

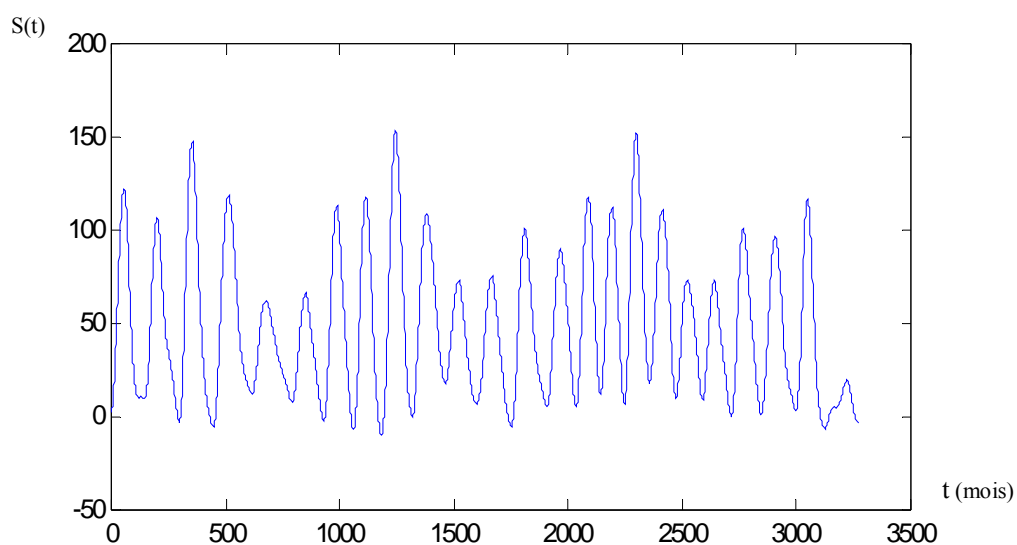


Figure 4.17. Signal obtenu après seuillage de fig 4.15 avec un seuil universel dépendant d'échelle

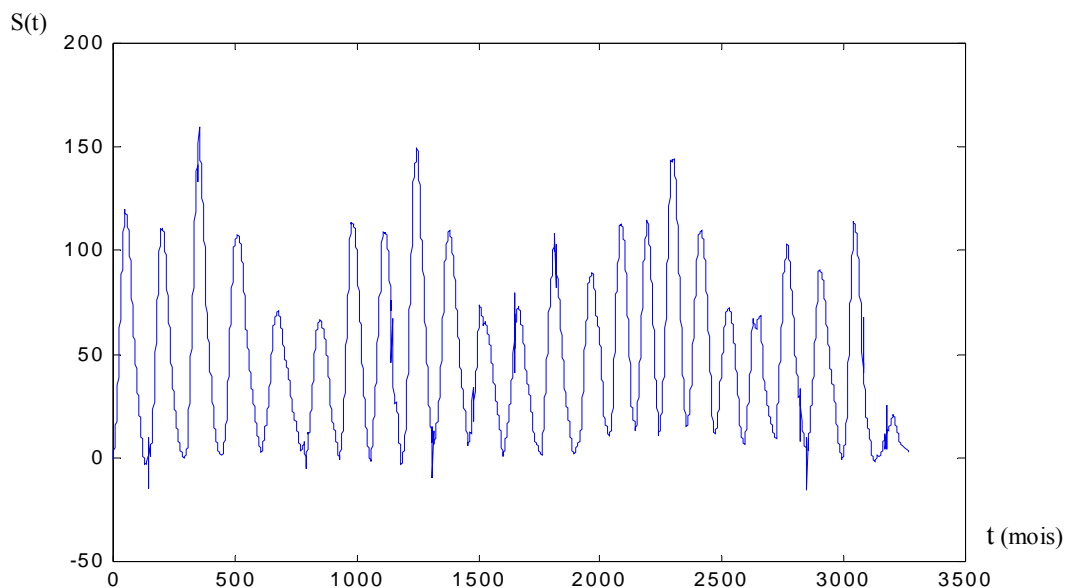


Figure 4.18. Signal obtenu après seuillage de fig 4.15 avec un seuil SURE dépendant d'échelle

En augmentant la valeur du paramètre φ , on aperçoit sur la figure 4.19 que ce bruit déforme le signal synthétique, il est intéressant de remarquer que le rajout du bruit AR(1), avec φ tend vers 1, fait exploser le signal synthétique (déformation totale du signal synthétique). De ce fait, il n'est pas avantageux d'utiliser la méthode de débruitage quand s'approche de la non stationnarité (voir figure 4.20).

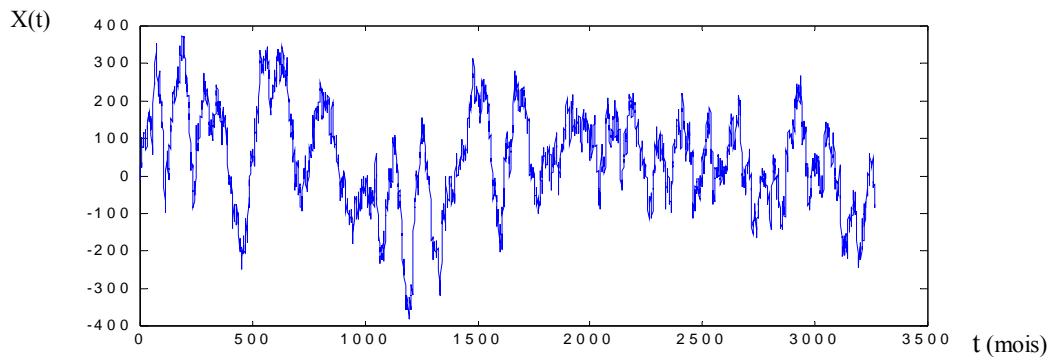


Figure 4.19. Signal synthétique bruité avec un bruit AR(1) [$\varphi=0.99$]

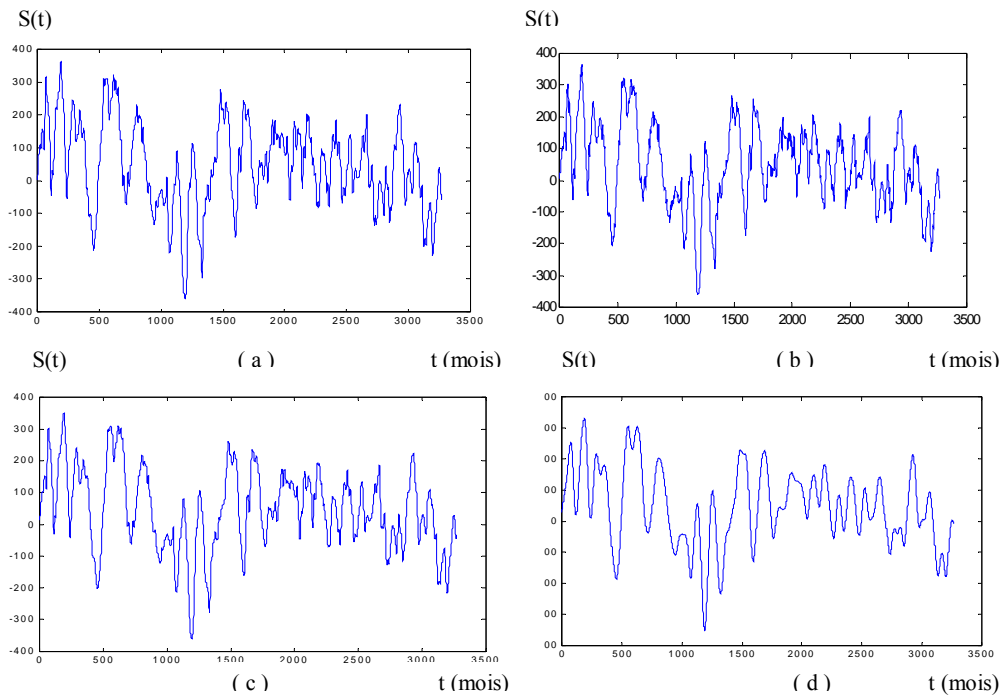


Figure 4.20. Signal obtenu après seuillage de fig 4.19 avec un seuil :

(a)- universel, (b)- SURE,(c)- universel dépendant d'échelle,

(d)- SURE dépendant d'échelle

c) ARMA(1,1)

Pour $\theta = 0.3$ et $\varphi = 0.3$ le graphe de simulation est donné sur la figure 4.21. l'utilisation de la procédure du seuillage avec le seuil global pour réduire le bruit est loin la plus efficace (voir figure 4.22).

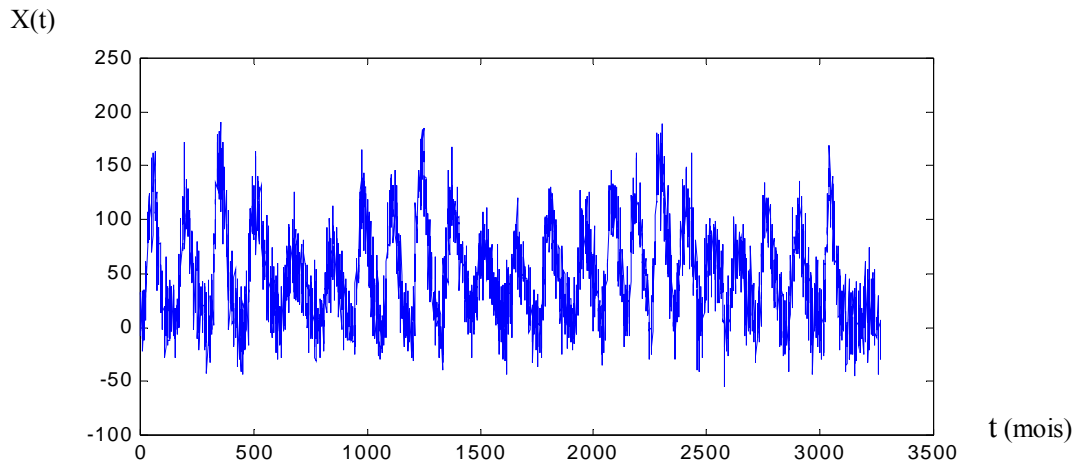


Figure 4.21. Signal synthétique bruité avec un bruit ARMA(1,1) [$\varphi=0.3$, $\theta=0.3$]

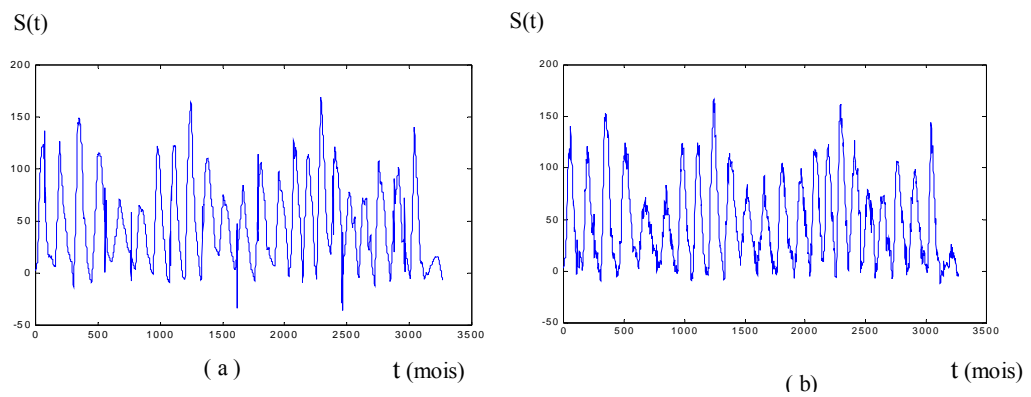


Figure 4.22. Signal obtenu après seuillage de fig 4.21 avec un seuil : (a)- universel (b)- SURE

Cependant l'usage de la méthode de seuillage SURE dépendant d'échelle est nettement meilleure par rapport aux autres seuils (voir figure 4.22 à 4.24).

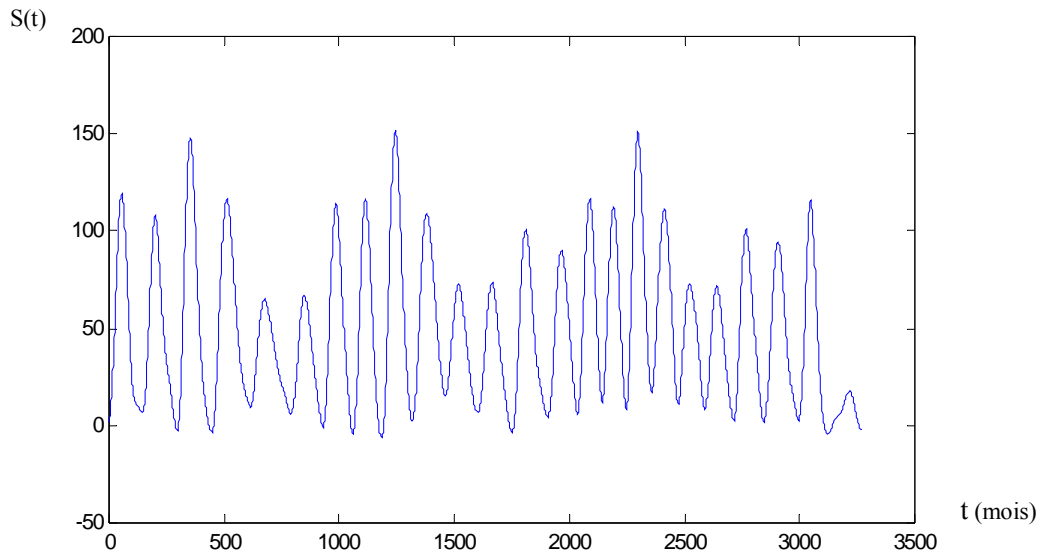


Figure 4.23. Signal obtenu après seuillage de fig 4.21 avec un seuil universel dépendant d'échelle

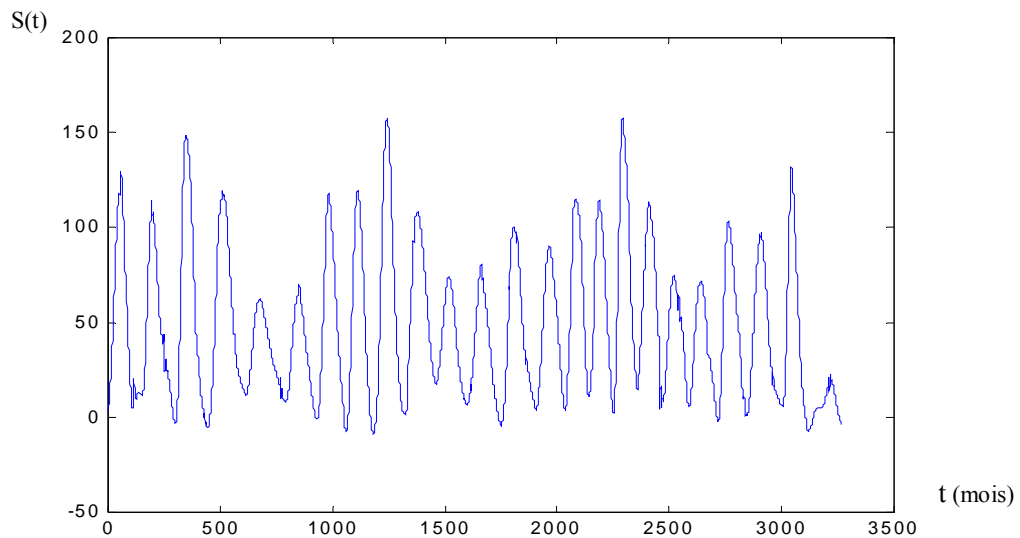


Figure 4.24. Signal obtenu après seuillage de fig 4.21 avec un seuil SURE dépendant d'échelle

En fixant la valeur du paramètre φ à 0.3 et en augmentant la valeur du paramètre θ jusqu'à 10, on constate sur la figure 4.25 que le rajout de ce bruit induit des perturbations très importantes sur le signal synthétique. Pour réduire le bruit, l'apport de seuillage dépendant d'échelle donne de meilleurs résultats par rapport au seuil universel et SURE (voir figure 4.25 à 4.28), mais malheureusement , le signal obtenu n'est pas conforme au signal synthétique (déformation du 11, 12 , 19, 20 et 24 cycles). Ceci s'explique par l'intensité du bruit.

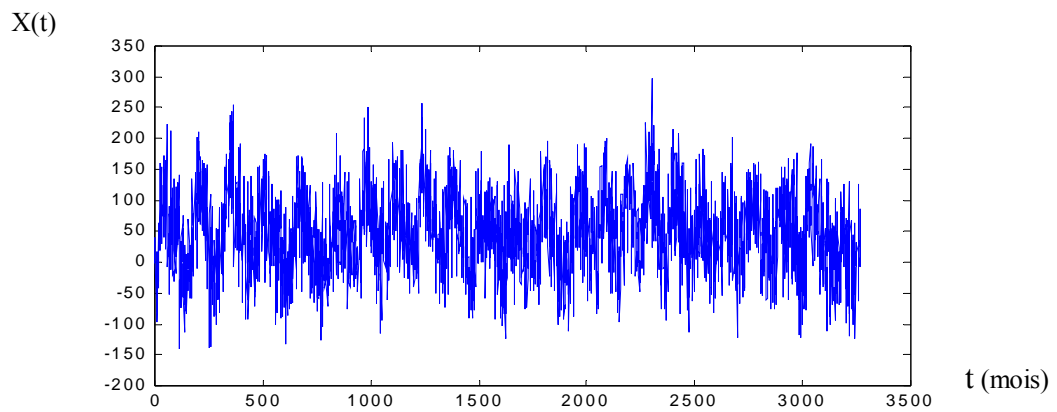


Figure 4.25. Signal synthétique bruité avec un bruit ARMA(1,1) [$\varphi=0.3$, $\theta=10$]

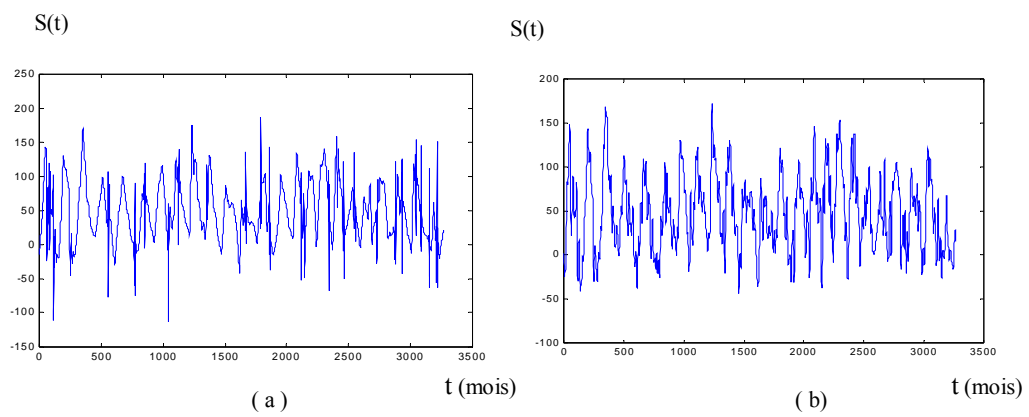


Figure 4.26. Signal obtenu après seuillage de fig 4.25 avec seuil : (a)-universel (b)-SURE

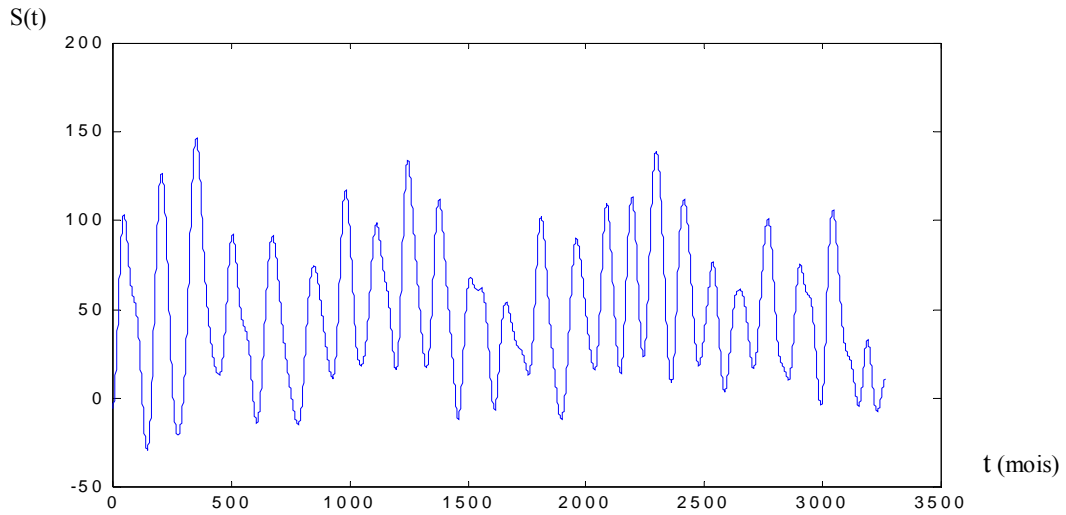


Figure 4.27. Signal obtenu après seuillage de fig 4.25 avec un seuil universel dépendant d'échelle

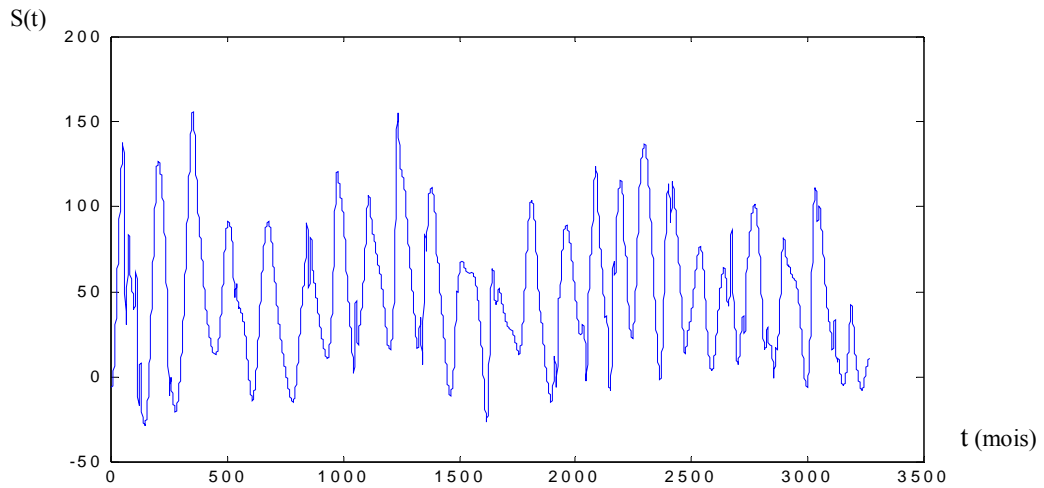


Figure 4.28. Signal obtenu après seuillage de fig 4.25 avec un seuil SURE dépendant d'échelle

La figure 4.29 montrent que l'effet du bruit ARMA(1,1) est d'autant plus important lorsque les valeurs du paramètre augmentent (φ prend la valeur 0.99 et $\theta = 0.3$). Cependant, on constate que la déformation du signal synthétique est moins forte que celle apportée par le bruit AR (1) pour les même valeurs du paramètre mais plus forte que celle apportée par le bruit ARMA (1,1) avec $\varphi = 0.3$ et $\theta = 10$. Dans ce cas l'application des méthodes se basant sur le seuillage des coefficients d'ondelettes ne donnent pas des résultats intéressant (voir figure 4.30).

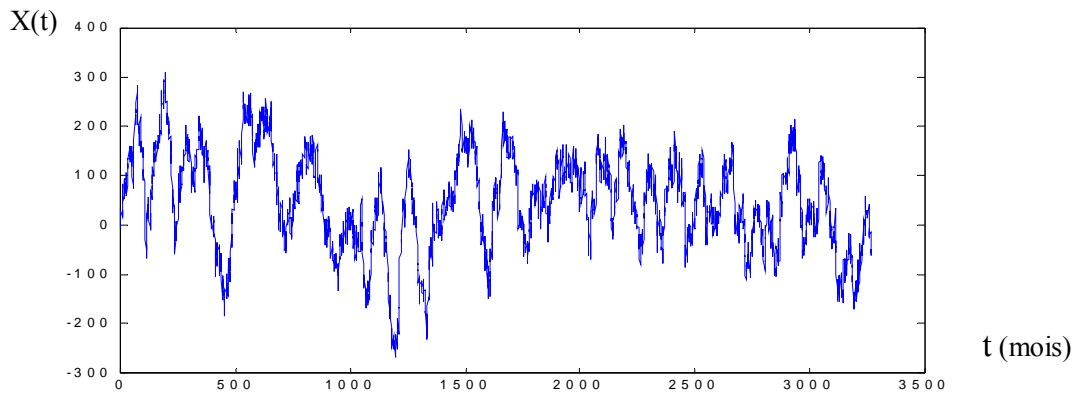


Figure 4.29. Signal synthétique bruité avec un bruit ARMA(1,1) [$\varphi = 0.99, \theta = 0.3$]

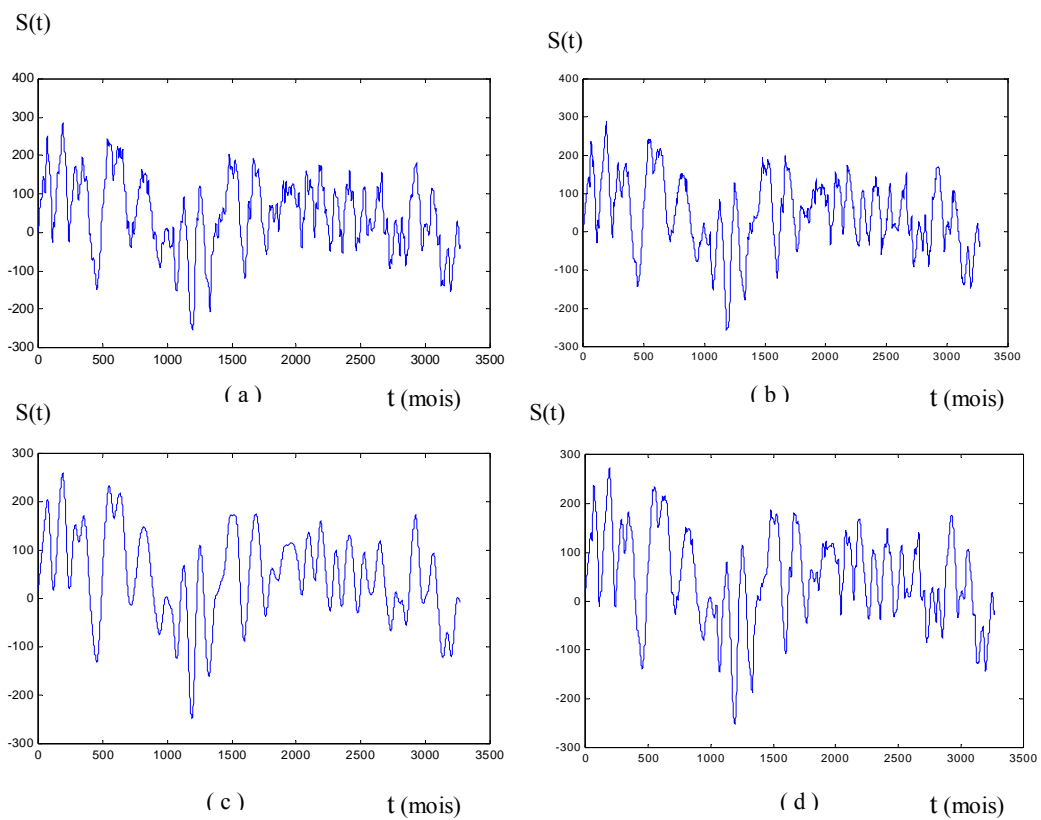


Figure 4.30. Signal obtenu après seuillage de fig 4.29 avec un seuil :

- (a)- universel, (b)-SURE, (c)-universel dépendant d'échelle,
- (d)- SURE dépendant d'échelle

Etude de l' erreur en moyenne quadratique.

L' analyse des résultats issus du débruitage est basée sur l'étude de l'erreur en moyenne quadratique entre le signal synthétique sans bruit $S(t)$ et le signal estimé $\hat{S}(t)$ obtenu par la méthode de seuillage

doux.

On propose de présenter l'effet du seuillage avec différents types de seuil sur le signal synthétique contaminé premièrement par un bruit blanc gaussien avec plusieurs valeurs d'écart type, ensuite par MA(1), AR(1) et ARMA(1,1) pour différentes valeurs des paramètres et .

- Dans le cas où le bruit est gaussien, le tableau 2 contient les mesures des erreurs en moyenne quadratique après seuillage. Ces mesures permettent de conclure que la performance de la méthode se basant sur la minimisation de l'EQM (le seuil SURE) est supérieure à celle obtenue avec la méthode se basant sur le seuil universel.

Bruit gaussien ($\sigma = 1$)		
Type seuillage	Seuil universel	Seuil SURE
Seuillage global	0.110	0.079
Bruit gaussien ($\sigma = 3$)		
Seuillage global	0.145	0.103
Bruit gaussien ($\sigma = 5$)		
Seuillage global	0.237	0.116
Bruit gaussien ($\sigma = 7$)		
Seuillage global	1.585	1.092
Bruit gaussien ($\sigma = 9$)		
Seuillage global	2.398	1.977

Tableau 2: les erreurs en moyenne quadratique après seuillage (cas d'un bruit gaussien)

- Dans le cas où le bruit est un MA(1), les mesures d'erreurs en moyenne quadratique les plus mauvaises ont été obtenues en utilisant le seuil universel global (voir tableau 3). Une légère amélioration de ces mesures sont enregistrées si on applique le seuillage avec le seuil SURE global. L'application de seuillage dépendant d'échelle donne de meilleurs résultats en comparaison avec ceux obtenus précédemment. En particulier, si on utilise le seuil SURE dépendant d'échelle, il est important de souligner que même si $\theta = 1$ ce seuil donne de bon résultat. Nous verrons, par la suite, que ceci n'est pas valable lorsque le bruit est un AR(1) ou ARMA(1,1) quand θ tend vers 1. Pour $\theta = 10$, on constate une nette augmentation des valeurs de l'EQM.

Bruit MA(1) ($\theta = 0.1$)		
Type seuillage	Seuil universel	Seuil SURE
Seuillage global	3.141	2.395
Seuillage dépendant d'échelle	1.302	0.950
Bruit MA(1) ($\theta = 0.3$)		
Seuillage global	4.611	4.047
Seuillage dépendant d'échelle	1.978	1.242
Bruit MA(1) ($\theta = 0.6$)		
Seuillage global	5.049	4.383
Seuillage dépendant d'échelle	2.427	1.995
Bruit MA(1) ($\theta = 0.9$)		
Seuillage global	5.739	5.068
Seuillage dépendant d'échelle	2.966	2.277
Bruit MA(1) ($\theta = 1$)		
Seuillage global	7.092	6.573
Seuillage dépendant d'échelle	3.882	3.171
Bruit MA(1) ($\theta = 10$)		
Seuillage global	11.206	10.463
Seuillage dépendant d'échelle	7.767	7.144

Tableau 3: les erreurs en moyenne quadratique après seuillage (cas d'un bruit MA(1))

- Dans le cas où le bruit est un AR(1), d'après le tableau 4, pour φ égal à 0.1 et 0.3 les résultats basés sur l'erreur en moyenne quadratique confirme l'efficacité de seuil SURE dépendant d'échelle. Par ailleurs, on constate que l'augmentation du paramètre φ n'est pas bénéfique, ceci est prouvé par les grandes valeurs de l'EQM.

Bruit AR(1) ($\varphi = 0.1$)		
Type seuillage	Seuil universel	Seuil SURE
Seuillage global	6.791	6.195
Seuillage dépendant d'échelle	3.738	2.955
Bruit AR(1) ($\varphi = 0.3$)		
Seuillage global	9.914	9.167
Seuillage dépendant d'échelle	5.953	4.908
Bruit AR(1) ($\varphi = 0.6$)		
Seuillage global	17.921	17.100
Seuillage dépendant d'échelle	13.105	12.466
Bruit AR(1) ($\varphi = 0.9$)		
Seuillage global	45.802	44.485
Seuillage dépendant d'échelle	43.331	42.937
Bruit AR(1) ($\varphi = 0.96$)		
Seuillage global	71.789	71.062
Seuillage dépendant d'échelle	69.431	69.155
Bruit AR(1) ($\varphi = 0.99$)		
Seuillage global	124.666	124.328
Seuillage dépendant d'échelle	122.843	121.700

Tableau 4: les erreurs en moyenne quadratique après seuillage (cas d'un bruit AR(1))

- Dans le cas où le bruit est un ARMA(1,1), les évaluations des résultats de l'EQM sont présentées dans les tableaux 5 et 6. On remarque qu'à partir de $\varphi = 0.3$ et croissante les méthodes se basant sur le seuillage dépendant d'échelle présentent des mesures d'EQM meilleures en comparaison avec celles se basant sur le seuillage global. Plus précisément l'amélioration de ces valeurs est constatée dans le cas de seuil SURE dépendant d'échelle. On remarque aussi un écart entre les valeurs de l'EQM, spécialement dans le cas $\varphi = 0.3$, $\theta = 1$ et $\varphi = 0.3$, $\theta = 10$. Par ailleurs, on constate qu'à partir de inférieur à $\varphi = 0.9$ et $\theta = 0.3$ l'application de seuil SURE dépendant d'échelle conduit aux résultats ayant des performances meilleurs de ceux obtenus par les autres seuils. Par contre, l'application du seuillage global ou dépendant d'échelle, pour $\varphi \geq 0.9$, donne de très mauvais résultats en termes d'erreur moyenne quadratique, mais moins mauvais si on compare avec ceux de AR(1).

Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.3$, $\theta = 0.1$)		
Type seuillage	Seuil universel	Seuil SURE
Seuillage global	9.178	8.562
Seuillage dépendant d'échelle	5.645	4.771
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.3$, $\theta = 0.3$)		
Seuillage global	8.796	8.013
Seuillage dépendant d'échelle	5.182	4.452
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.3$, $\theta = 0.6$)		
Seuillage global	8.053	7.608
Seuillage dépendant d'échelle	4.826	4.211
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.3$, $\theta = 0.9$)		
Seuillage global	7.857	7.139
Seuillage dépendant d'échelle	4.354	3.992
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.3$, $\theta = 1$)		
Seuillage global	7.281	6.833
Seuillage dépendant d'échelle	4.065	3.640
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.3$, $\theta = 10$)		
Seuillage global	18.539	18.117
Seuillage dépendant d'échelle	14.446	13.523

Tableau 5 : les erreurs en moyenne quadratique après seuillage (cas d'un bruit ARMA(1,1) avec $\varphi = 0.3$ et θ varie)

Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.1, \theta = 0.3$)		
Type seuillage	Seuil universel	Seuil SURE
Seuillage global	5.812	5.234
Seuillage dépendant d'échelle	3.206	2.581
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.6, \theta = 0.3$)		
Seuillage global	10.832	10.150
Seuillage dépendant d'échelle	6.795	6.020
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.9, \theta = 0.3$)		
Seuillage global	32.721	32.114
Seuillage dépendant d'échelle	29.658	28.835
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.96, \theta = 0.3$)		
Seuillage global	50.667	49.306
Seuillage dépendant d'échelle	47.149	46.182
Bruit ARMA(1, 1) ($\varphi = 0.99, \theta = 0.3$)		
Seuillage global	85.083	84.127
Seuillage dépendant d'échelle	82.919	82.430

Tableau 6: les erreurs en moyenne quadratique après seuillage (cas d'un bruit ARMA(1,1) avec φ varie et $\theta = 0.3$)

Les figures 4.31.1 et 4.31.2 montrent les erreurs quadratiques moyennes des signaux débruités par seuillage SURE dépendant d'échelle en fonction de différents paramètres. Ces erreurs sont d'autant plus grandes que le bruit est important. La plus grande valeur de l'EQM est obtenue lorsque le bruit est un processus Auto Régressif d'ordre 1, qui se rapproche de la non stationnarité. Cependant, il faut souligner que pour le cas du bruit ARMA(1,1) avec constante ($\varphi = 0.3$) et croissante ($0.1 \leq \theta \leq 1$), les valeurs de l'EQM décroissent. Cela est dû à la régression du niveau du bruit. Ensuite, les mesures d'erreurs en moyenne quadratique remontent dès que le bruit reprenne de l'intensité ($\varphi = 0.3, 1 < \theta \leq 10$). On remarque aussi sur la figure 4.31.2, lorsque le paramètre tend vers l'infini les valeurs de l'EQM tendent aussi vers l'infini (voir figure (a), (c)). Et quand le paramètre s'approche de 1, les mesures des erreurs en moyennes quadratiques après seuillage tendent vers l'infini (voir (b),

(d)), ce qui explique l'explosion du signal synthétique.

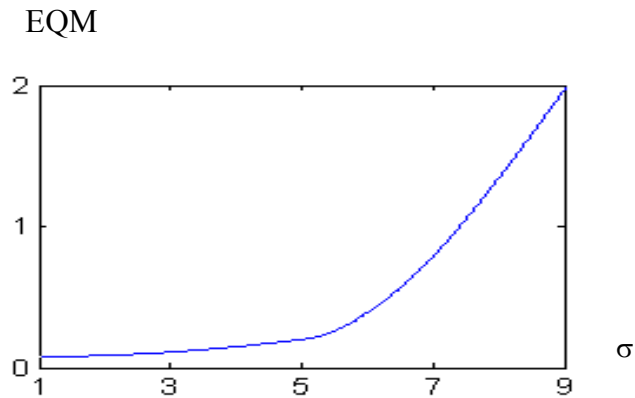


Figure 4.31.1: l'erreur en moyenne quadratique du signal obtenu par seuillage SURE en fonction de l'écart type σ

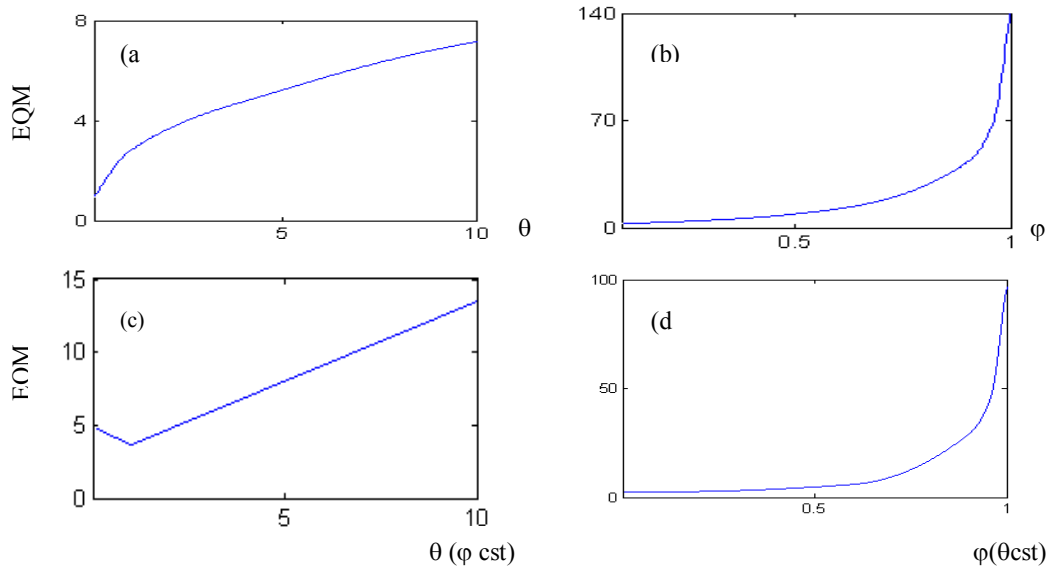


Figure 4.31.2 : l'erreur en moyenne quadratique du signal obtenu par seuillage SURE dépendant d'échelle en fonction :

- (a) du paramètre, (b) du paramètre, (c) du paramètre θ (φ constante) et (d) du paramètre φ (θ constante)

Conclusion

D'après les évaluations visuels et l'analyse des erreurs en moyenne quadratique, effectuées sur les résultats des opérations de seuillage doux non linéaire par ondelettes orthogonales dans le cas d'un bruit blanc gaussien (WN) ou d'un bruit de type processus stationnaire corrélé (AR(1), MA(1), ARMA(1,1)) que le seuil universel n'est pas adapté à l'élimination du bruit présent dans les données simulées. L'application d'un seuillage universel dépendant des niveaux ,bien qu'il améliore légèrement

les résultats, il reste dans ce cas insuffisant. Les seuils se basant sur la minimisation de l'EQM ont permis d'obtenir de meilleurs résultats. En augmentant la valeur du paramètre λ , on constate que ce bruit déforme le signal synthétique et les valeurs de l'EQM obtenues tendent vers l'infini quand λ se rapproche de la valeur 1. De ce fait, il n'est pas avantageux d'utiliser la méthode de débruitage.

4.5 Application de la transformée en ondelettes à la détection et à la spécification des singularités.

Nous allons maintenant appliquer la transformée en ondelettes continue à la détection et à la caractérisation des singularités du signal synthétique.

Une analyse en ondelettes des signaux débruités par la méthode de seuillage SURE dépendant d'échelle a été également appliquée dans le but de distinguer les singularités engendrées par le bruit restant après le débruitage de celle du signal synthétique. Tout au long de cette section, l'ondelette utilisée est celle dite "chapeau mexicain" et l'intervalle de dilatation est $[2, 2^7]$.

4.5.1 Détection et spécification des singularités.

La figure 4.32 montre la position des lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du signal synthétique dans le plan temps-échelle. En vertu des résultats évoquée dans le chapitre 3, les lignes maxima convergent vers les points où le signal synthétique a des singularités quand le paramètre de dilatation décroît. Toutefois, il est à signaler qu'il n'existe pas des lignes maxima qui convergent vers le point où la fonction n'a pas de singularités. Les lignes maxima du modules de la transformée en ondelettes des signaux obtenus après l'élimination du bruit (voir figure 4.6, 4.10, 4.18 et 4.24) sont représentées sur les figures 4.33, 4.34, 4.35 et 4.36. On peut voir cependant des nouvelles lignes maxima qui apparaissent, l'ensemble de ces lignes n'atteignent pas la valeur de dilatation 24. On constate aussi sur ces figures, que 47 lignes dominantes gardent un caractère commun que celui observé dans le signal synthétique

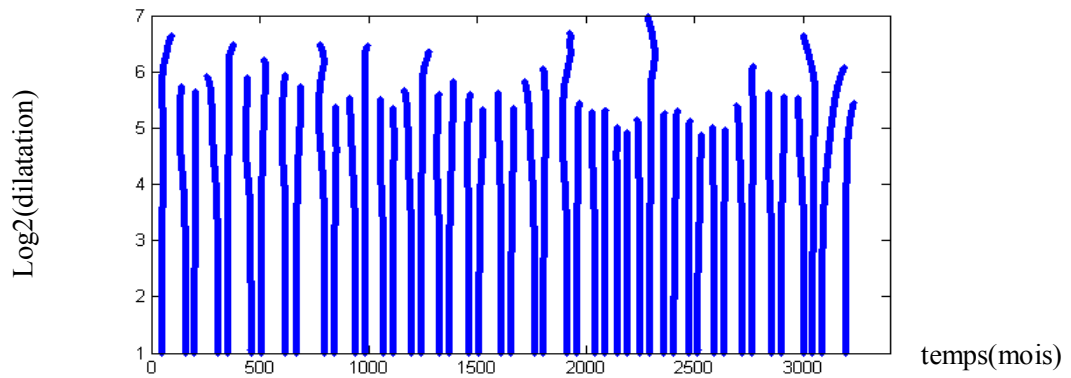


Figure 4.32 : Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes du signal synthétique

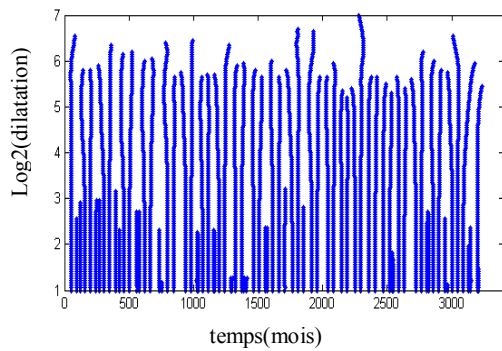


Figure4.33. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du signal présenté dans la figure4. 6.

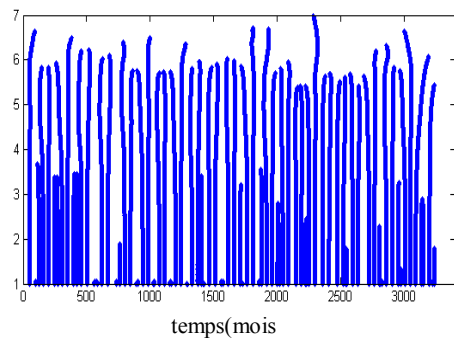


Figure4.34. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du signal présenté dans la figure4. 10.

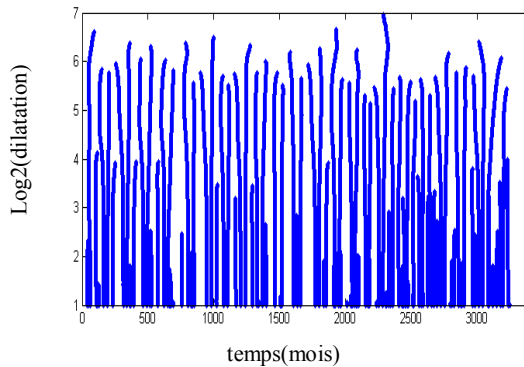


Figure4.35. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du signal présenté dans la figure4. 18.

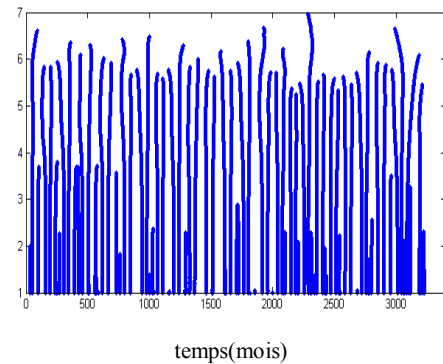


Figure4.36 . Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du signal présenté dans la figure 4.24.

Comme nous nous intéressons à détecter les instants où il y a eu un maximum de nombre de tâches solaires, ainsi que d'estimer leurs irrégularités. Il est préférable donc d'étudier la transformée en

ondelettes continue de chaque cycle. Nous proposons d'étudier la transformée en ondelettes continue du cycle N° 24.

4.5.2 Analyse en ondelettes du cycle N° 24.

Notons, tout d'abord, que la régularité de $S(t - t_{i+j})$ au point t_{i+j} est égal à b_i . Par conséquent, la régularité de $S(t - t_{48})$ en $t_{48} = 3197$ mois vaut $8/5$.

Nous présentons ici l'étude de la transformée en ondelettes continue du dernier cycle synthétique. D'après la figure 4.37, on remarque qu'il y a une seule ligne qui converge vers le point $t = 3197$ mois où la singularité se produit.

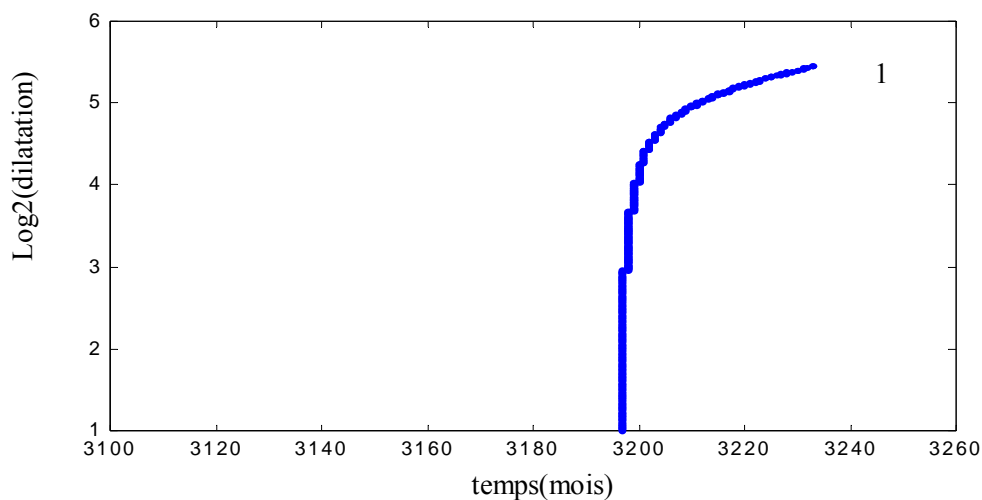


Figure4.37. Ligne maxima du module de la transformée en ondelettes continue du cycle synthétique N° 24

Pour estimer la régularité, nous avons tracé le module de la transformée en ondelettes le long de cette ligne maxima en fonction des dilatations dans un diagramme log-log (voir figure 4.38) et sa pente maximale vaut 1.600 qui coïncide avec la régularité théorique de la singularité t_{48}

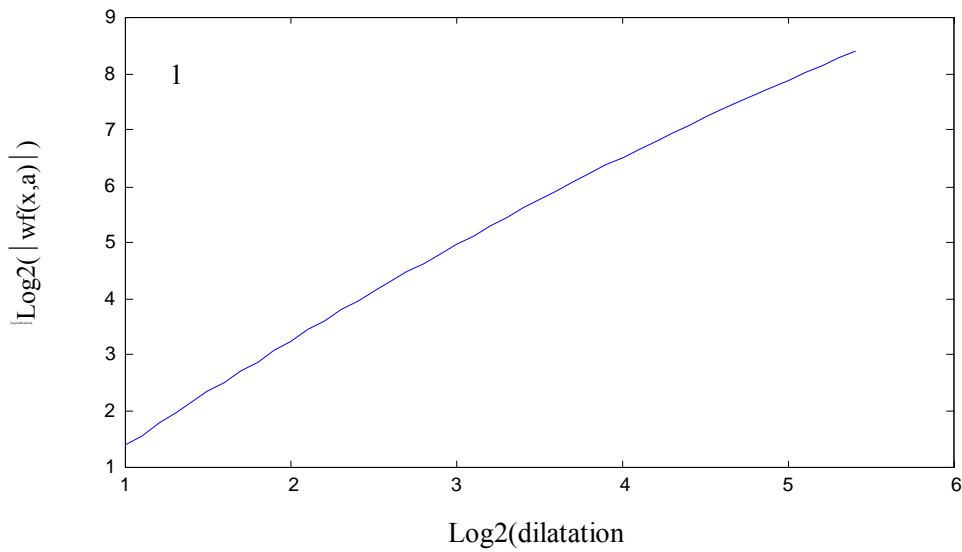


Figure4.38. Diagramme log-log de la fonction ridge associée au ligne maxima montrée sur la figure4.37, le calcul de la pente donne 1.600 ($a \geq 2$)

Les lignes maxima du module de la transformée en ondelettes du signal obtenues après l'élimination du bruit blanc gaussien d'écart type 7 (c'est-à-dire le cycle N0 24 montré sur la figure 4.6) sont illustrées sur la figure 4.39. On constate qu'il y a des lignes maxima en plus qui sont générées par le bruit restant après seuillage. Ces lignes n'atteignent pas la valeur de dilatation 24 . On remarque aussi sur cette figure une ligne maxima dominante par rapport aux autres lignes. Cette ligne dominante converge vers le point $t = 3197$ mois. Ce dernier coïncide avec celui du cycle synthétique N0 24.

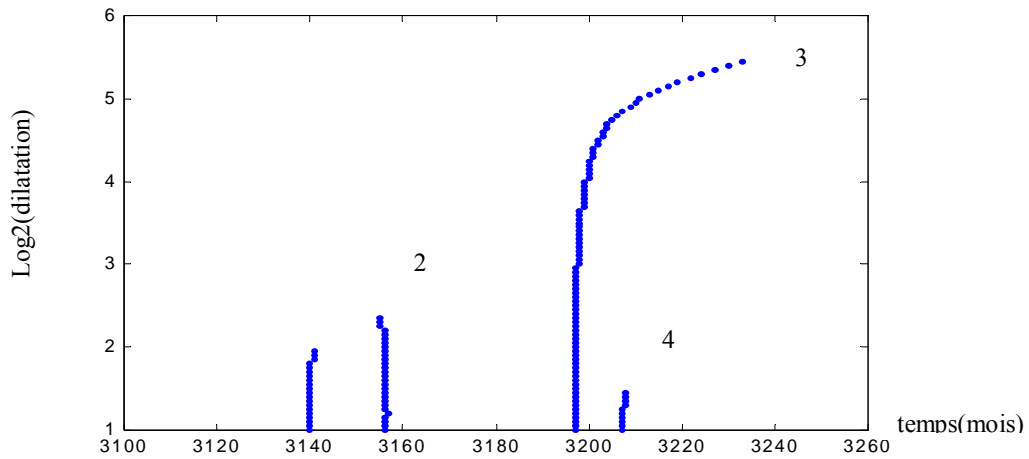


Figure 4.39. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du cycle N° 24 de la figure 4.6.

Pour caractériser les différentes singularités, nous étudions la régularité de chacune d'entre elles. Les fonctions ridges définies par la variation de $\text{Log}_2 wf(x, a)$ en fonction de $\log_2 a$ le long d'une ligne maxima, permet de calculer ces régularités.

D'après la figure 4.40, nous remarquons que les fonctions ridges varient différemment les unes des autres. Les fonctions ridges 3 et 4 ont une tendance linéaire positive à partir de $a \geq 2^{1.8}$ et $2 \leq a \leq 2^{1.40}$, avec des régularités de l'ordre $\alpha_3 = 1.587$ et $\alpha_4 = 0.706$ respectivement, alors que la fonction ridge 2 a une tendance linéaire négative à partir de $2^{1.3} \leq a \leq 2^{1.8}$ dont la régularité est de l'ordre $\alpha_2 = -0.301$. Il est à noter que la valeur de α_3 est proche avec celle du dernier cycle synthétique.

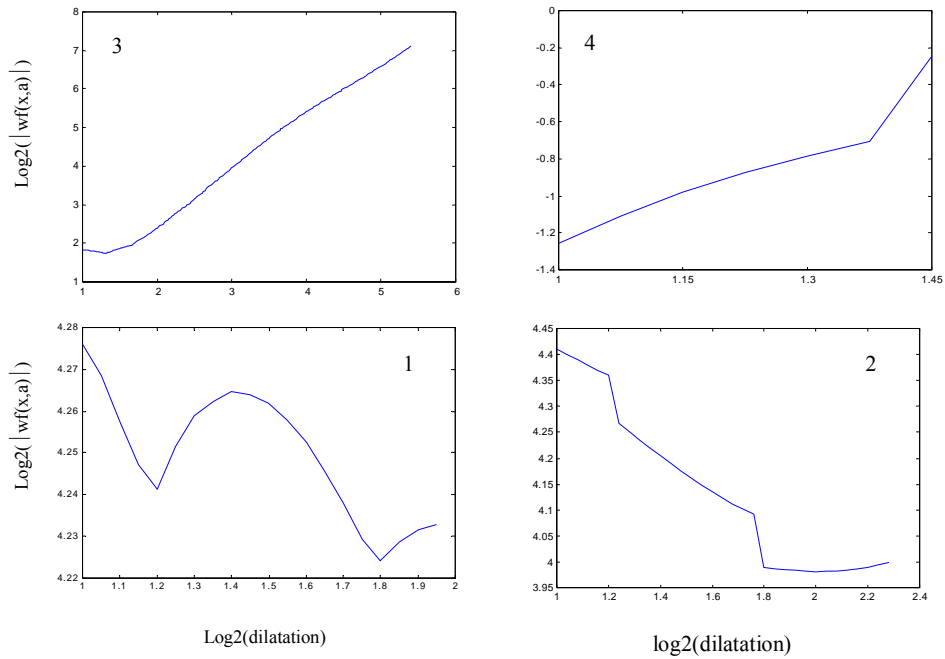


Figure 4.40. Diagramme log-log des fonctions ridge associées aux lignes maxima indexées sur la figure 4.39. le calcul des pentes pour les lignes 2,3,4 donnent respectivement :

$$\alpha = -0.301 (2^{1.3} \leq a \leq 2^{1.8}), \alpha = 1.587 (a \geq 2^{1.8}) \text{ et } \alpha = 0.706 (2 \leq a \leq 2^{1.40})$$

Nous appliquons la transformée en ondelettes continue aux cycles N^024 des signaux obtenus par seuillage avec un seuil qui minimise l'EQM dans le cas $\theta = 0.3$ et $\theta = 0.3$, $\varphi = 0.3$. En observant les lignes maxima du module de la transformée en ondelettes du cycle N^024 de la figure 4.41 et 4.42 respectivement. Nous remarquons par rapport au dernier cycle synthétique que le bruit restant après seuillage a généré de nouvelles lignes maxima. On voit qu'elles sont réparties sur toute la longueur du signal. Notons qu'elles sont d'amplitude variable. L'analyse en ondelettes révèle une ligne maxima plus dominante que d'autre. Cette ligne dominante est localisée en $t = 3197$ mois qui coïncide avec celle du dernier cycle synthétique.

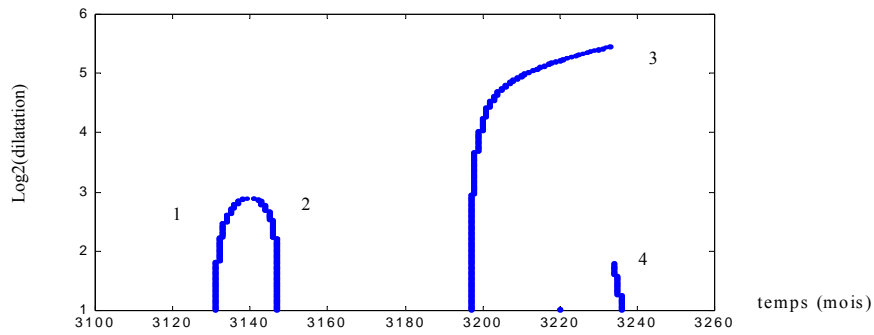


Figure 4.41. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du cycle N° 24 de la figure 4.10.

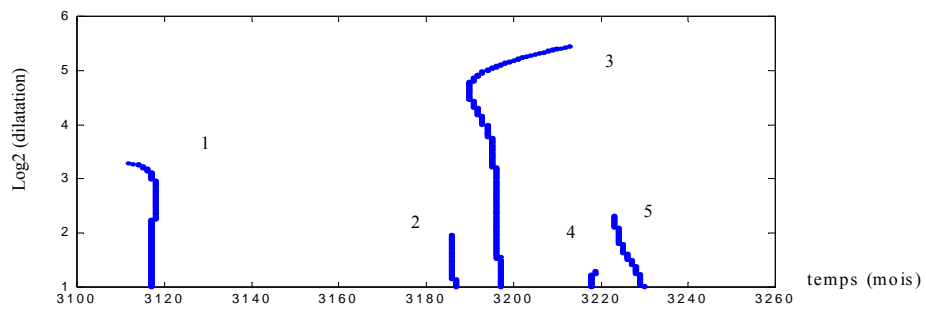


Figure 4.42. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du cycle N° 24 de la figure 4.24.

Les fonctions ridges, décrivant la variation du module de la transformée en ondelettes continue en fonction de dilatation le long d'une ligne maxima sont représentées dans la figure 4.43 et 4.44. En observant ces fonctions ridges, on voit qu'elles ont une tendance linéaire positive et négative. Les fonctions ridges 1 et 2 (voir figure 4.43) ainsi que les fonctions ridges 1, 4 et 5 (voir figure 4.44) avec des régularités à valeur négatives montrent une décroissance à partir de $2 \leq a \leq 2^2$, $2 \leq a \leq 2^{1.7}$, $2 \leq a \leq 2^{1.6}$, $2 \leq a \leq 2^{1.25}$ et $2 \leq a \leq 2^{1.4}$ respectivement. Les fonctions ridges associées à la ligne maxima dominante 3 de la figure 4.43 et 3 de la figure 4.44 deviennent quasi linéaire à partir de $a \geq 2^2$ et $a \geq 2^{2.1}$ avec des régularités de l'ordre $\alpha_3=1.631$ et $\alpha_3=1.620$ respectivement. Ces valeurs sont très proches de la régularité du dernier cycle synthétique. Sauf que leurs fonctions ridges sont influencées par le bruit restant après seuillage.

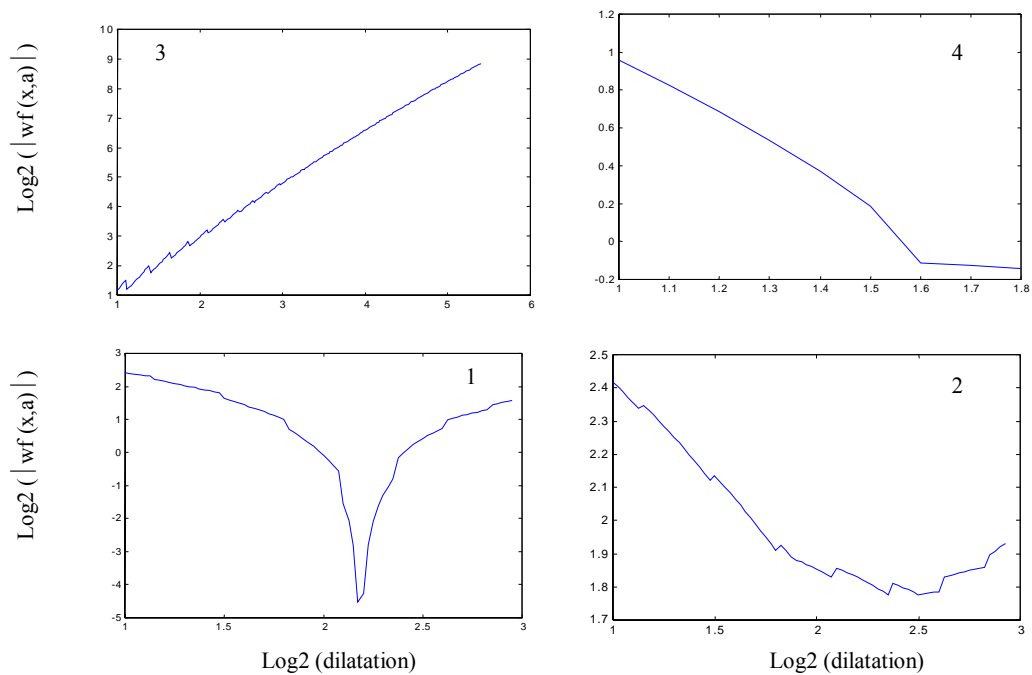


Figure 4.43. Diagramme log-log des fonctions ridge associées aux lignes maxima indexées

Sur la figure 4.41, le calcul des pentes pour les lignes 1,2,3,4 donnent respectivement :

$$\alpha = -1.988 (2 \leq a \leq 2^2), \alpha = -0.671 (2 \leq a \leq 2^{1.7}), \alpha = 1.631 (a \geq 2^2) \text{ et } \alpha = -1.440 (2 \leq a \leq 2^{1.6})$$

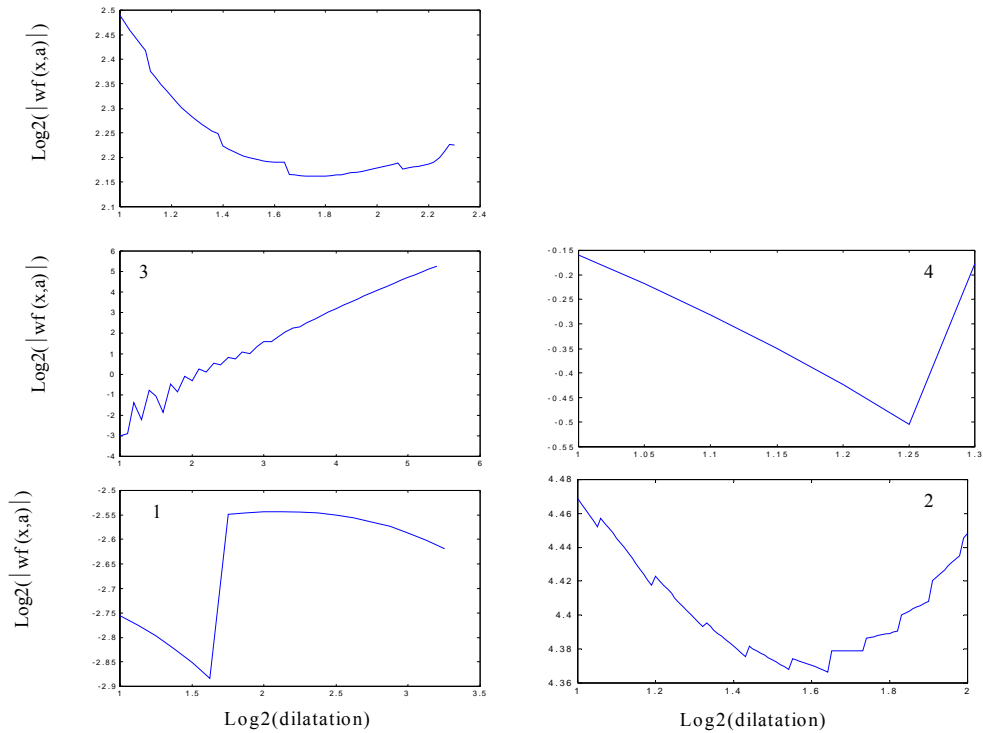


Figure 4.44. Diagramme log-log des fonctions ridge associées aux lignes maxima indexées sur la figure 4.42. le calcul des pentes pour les lignes 1,3,4, 5 donnent respectivement : $\alpha = -0.200$ ($2 \leq a \leq 2^{1.6}$), $\alpha = 1.620$ ($a \geq 2^{2.1}$), $\alpha = -1.362$ ($2 \leq a \leq 2^{1.25}$) et $\alpha = -0.600$ ($2 \leq a \leq 2^{1.4}$)

Analysons maintenant le cycle N^0 24 du signal obtenu par seuillage dans le cas AR (1) pour $\varphi = 0.3$ (cycle N^0 24 de la figure 4.18). La figure 4.45 illustre les lignes maxima qui lui sont associées. On remarque, à la première vue, une ligne dominante en amplitude ainsi que plusieurs lignes maxima qui sont générés par le bruit restant. Ces lignes sont plus ou moins important en amplitude par rapport à celle associée au dernier cycle synthétique. En les comparant, avec les figures 4.39, 4.41 et 4.42 des différences apparaissent par rapport au nombre de lignes qui diminue, leurs formes et amplitudes. La ligne la plus dominante converge vers le point 3197 mois quand la dilatation décroît. Cette valeur est égal à celle du cycle synthétique N^0 24 (ou la singularité du dernier cycle se produit).

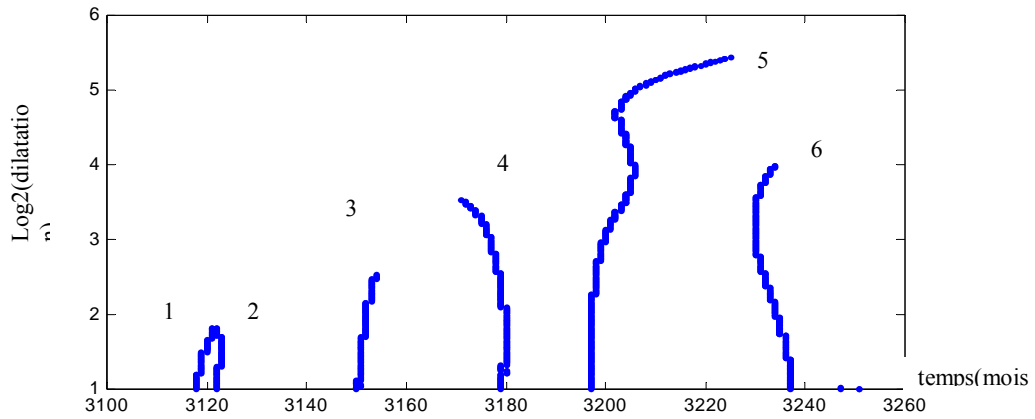


Figure4.45. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du cycle N° 24 de la figure 4.18.

Pour définir la nature des singularités contenues dans le cycle N⁰24, nous déterminons leurs régularités. Les fonctions ridges de ce cycle peuvent être classées en deux types:

Type1:

C'est le cas où la fonction ridge a une tendance linéaire positive ($\alpha > 0$). Cette tendance est perturbée par le bruit. Elle est observée au début de la fonction, cas 5 de la figure 4.46 qui décrit une variation quasi - linéaire à partir de $a \geq 2^2$. le calcul de la pente donne $\alpha_5 = 1.642$. Il est à noter que la valeur de cette régularité est proche avec celle du cycle synthétique N⁰24.

Type2:

Correspond au fonction ridge ayant une tendance linéaire négative ($\alpha < 0$), cas de la fonction ridge 1 et 3 (voir figure 4.46) qui prend une tendance linéaire décroissante à partir de $2 \leq a \leq 2^{1.5}$ et $a \geq 2^2$ respectivement. On trouve respectivement $\alpha_1 = -1.991$ et $\alpha_3 = -1.333$.

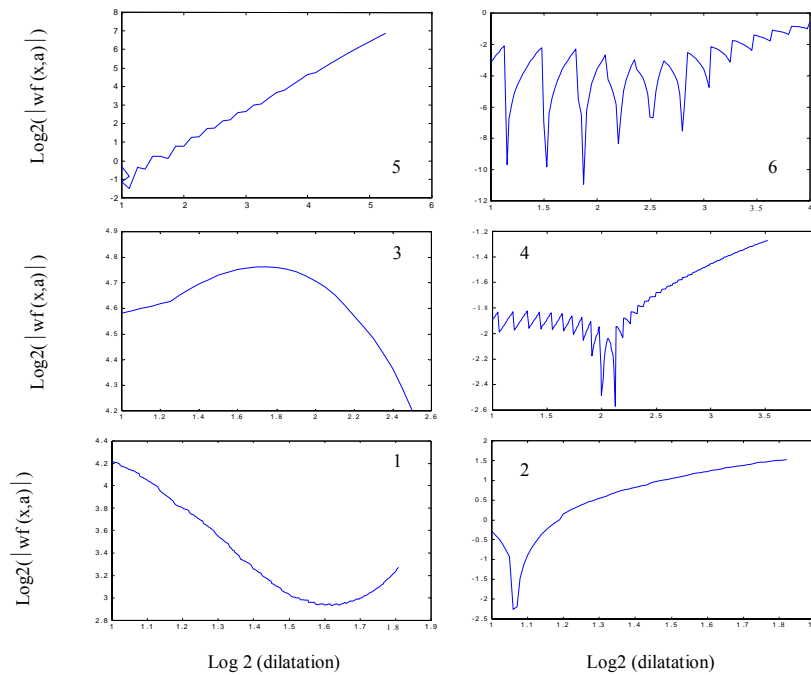


Figure 4.46. Diagramme log-log des fonctions ridge associées aux lignes maxima indexées sur la figure 4.45. le calcul des pentes pour les lignes 1,2,3,4 et 5 donnent respectivement : $\alpha = -1.991$ ($2 \leq a \leq 2^{1.5}$), $\alpha = 0.675$ ($a \geq 2^{1.2}$), $\alpha = -1.333$ ($a \geq 2^2$), $\alpha = 0.320$ ($a \geq 2^{2.5}$) et $\alpha = 1.642$ ($a \geq 2^2$)

Conclusion

A partir de ces résultats, on constate, qu'on prendra en considération que les lignes maxima les plus significatives ainsi que les fonctions ridges associées à ces lignes où on prendra les portions linéaire de ces fonctions ridges et les pentes correspondantes donnent les régularités des singularités estimées. La transformation en ondelettes continue permet par conséquent de localiser temporellement une singularité ainsi que de localiser sa géométrie sans information a priori sur sa position.

La même procédure a été utilisée pour déterminer et caractériser les singularités éventuellement présentes dans les autres cycles. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

Le tableau 7, regroupe les résultats obtenus à partir de l'analyse en ondelettes continues des données simulées. On constate que les valeurs des singularités sont identique à celles contenues dans chaque cycle synthétique. Pour caractériser ces différentes singularités, on a calculé les régularités de chacune d'entre elles. Ces dernières sont résumées dans le même tableau. Notons que les valeurs trouver coïncide avec les régularités théoriques du chaque cycle synthétique. D'après le tableau 7 On remarque que l'amplitude des régularités est comprise entre 1.210 et 1.600

n	instants	régularités
1	48	1.400
2	198	1.350
3	348	1.260
4	506	1.480
5	672	1.555
6	846	1.500
7	980	1.400
8	1110	1.350
9	1240	1.260
10	1375	1.480
11	1515	1.555
12	1660	1.500
13	1805	1.444
14	1960	1.300
15	2082	1.400
16	2187	1.350
17	2292	1.260
18	2407	1.480
19	2522	1.555
20	2637	1.500
21	2762	1.444
22	2902	1.300
23	3042	1.210
24	3197	1.600

Tableau 7: Les instants des singularités correspondant aux maxima du signal synthétique et leurs régularités.

L'application de la transformée en ondelettes continue sur chaque cycle des signaux débruités par seuillage révèle des lignes maxima plus dominantes que d'autres. Ces lignes dominantes convergent vers les instants des singularités. Les tableaux ci-dessous renferment les résultats correspondants.

Selon les tableaux 8, 9, 10 et 11, les amplitudes des régularités aux points de ces singularités sont comprises entre:

- 1.200 et 1.587 dans le cas d'un bruit blanc gaussien,
- 1.222 et 1.631 dans le cas d'un bruit du type MA(1) avec $\theta = 0.3$,
- 1.233 et 1.620 dans le cas d'un bruit du type AR(1) avec $\varphi = 0.3$,
- 1.190 et 1.642 dans le cas d'un bruit du type ARMA(1.1) avec $\theta = 0.3$ et $\varphi = 0.3$.

A partir de ces résultats, on déduit donc que les variations des régularités contenues dans différents cycles analysés sont très proches de celles des cycles synthétique.

n	instant	régularité	n	instant	régularité
1	48	1.415	13	1805	1.440
2	198	1.361	14	1960	1.309
3	348	1.266	15	2082	1.403
4	506	1.487	16	2187	1.356
5	672	1.545	17	2292	1.261
6	846	1.502	18	2407	1.477
7	980	1.390	19	2522	1.551
8	1110	1.365	20	2637	1.505
9	1240	1.270	21	2762	1.432
10	1375	1.489	22	2902	1.303
11	1515	1.553	23	3042	1.200
12	1660	1.499	24	3197	1.587

Tableau 8: Les instants des singularités correspondant aux maxima du signal présenté dans la figure 4.6. et leurs régularités sauf les lignes dominantes prises en considération.

n	instant	régularité	n	instant	régularité
1	48	1.394	13	1805	1.438
2	198	1.357	14	1960	1.310
3	348	1.258	15	2082	1.399
4	506	1.488	16	2187	1.347
5	672	1.561	17	2292	1.263
6	846	1.511	18	2407	1.481
7	980	1.416	19	2522	1.562
8	1110	1.366	20	2637	1.511
9	1240	1.253	21	2762	1.451
10	1375	1.475	22	2902	1.290
11	1515	1.569	23	3042	1.222
12	1660	1.504	24	3197	1.631

Tableau 9: Les instants des singularités correspondant aux maxima du signal présenté dans la figure 4.10. et leurs régularités sauf les lignes dominantes prises en considération.

n	instant	régularité	n	instant	régularité
1	48	1.388	13	1805	1.429
2	198	1.348	14	1960	1.298
3	348	1.249	15	2082	1.419
4	506	1.471	16	2187	1.340
5	672	1.541	17	2292	1.250
6	846	1.506	18	2407	1.465
7	980	1.391	19	2522	1.535
8	1110	1.339	20	2637	1.513
9	1240	1.241	21	2762	1.447
10	1375	1.483	22	2902	1.295
11	1515	1.532	23	3042	1.233
12	1660	1.498	24	3197	1.620

Tableau 10 : les instants des singularités correspondant aux maxima du signal présenté dans la figure 4.24. et leurs régularités sauf les lignes dominantes prises en considération.

n	instant	régularité	n	instant	régularité
1	48	1.420	13	1805	1.455
2	198	1.337	14	1960	1.319
3	348	1.285	15	2082	1.379
4	506	1.469	16	2187	1.343
5	672	1.528	17	2292	1.280
6	846	1.499	18	2407	1.466
7	980	1.410	19	2522	1.540
8	1110	1.328	20	2637	1.512
9	1240	1.277	21	2762	1.450
10	1375	1.461	22	2902	1.306
11	1515	1.533	23	3042	1.190
12	1660	1.509	24	3197	1.642

Tableau 11 : les instants des singularités correspondant aux maxima du signal présenté dans la figure 4.18. et leurs régularités sauf les lignes dominantes prises en considération.

D'après ces tableaux, on constate que les résultats obtenus montrent un accord presque parfait avec ceux déduits de la simulation faite sur le signal synthétique. Néanmoins, il faut souligner que les

régularités des singularités estimées (par exemple t_1 , t_7 , t_{15}) sont très légèrement différentes, cette différence dans la régularité est due au bruit restant dans le signal après seuillage.

4.6 Analyse de la série de nombre de tâches solaires.

Les données réelles exploitées sont représentées par une série chronologique non stationnaire de valeurs mensuelles représentant la distribution de tâches solaires sur 22 cycles solaires entre les époques 1754 à 1996. On constate sur la figure 4.47 que les cycles ont des durées et d'amplitudes variables. Les cycles les plus intenses sont plus courts et les plus faibles sont les plus long. On remarque aussi que la série des données réelles de nombre de tâches solaires est entachée du bruit. La présence du bruit étant un inconvénient majeur pour la détection et la spécification des singularités; il est donc nécessaire, dans une première étape, de pouvoir réduire le bruit présent dans les données réelles. La méthode utilisée sera celle développée dans la section précédente.

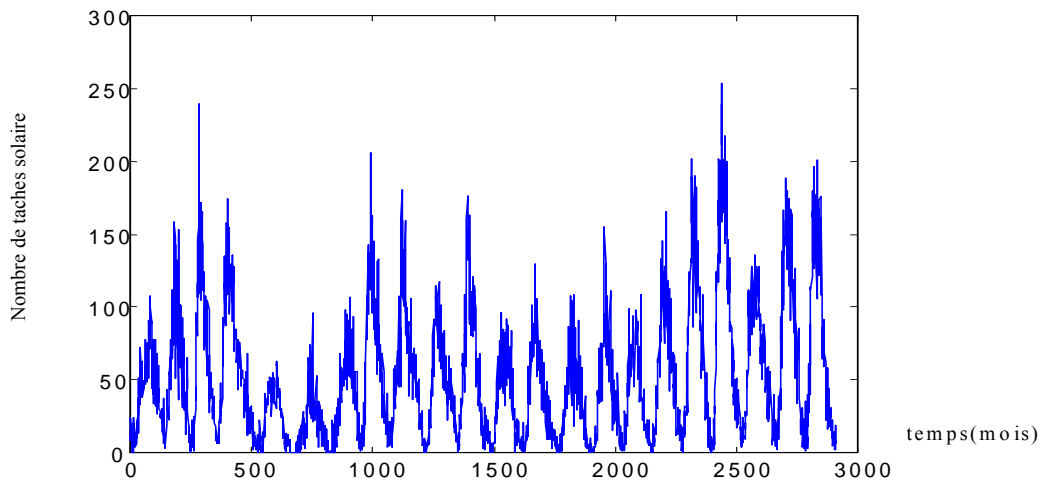


Figure 4.47. Nombre de tâches solaires en moyenne mensuelles (22cycles solaires)

4.6.1 Réduction du bruit.

Le bruit est atténué en effectuant un seuillage SURE dépendant d'échelle, procédure tester sur le signal synthétique bruité. On peut constater sur la figure 4.48 une amélioration nette de la série des données réelles de nombre de tâches solaires.

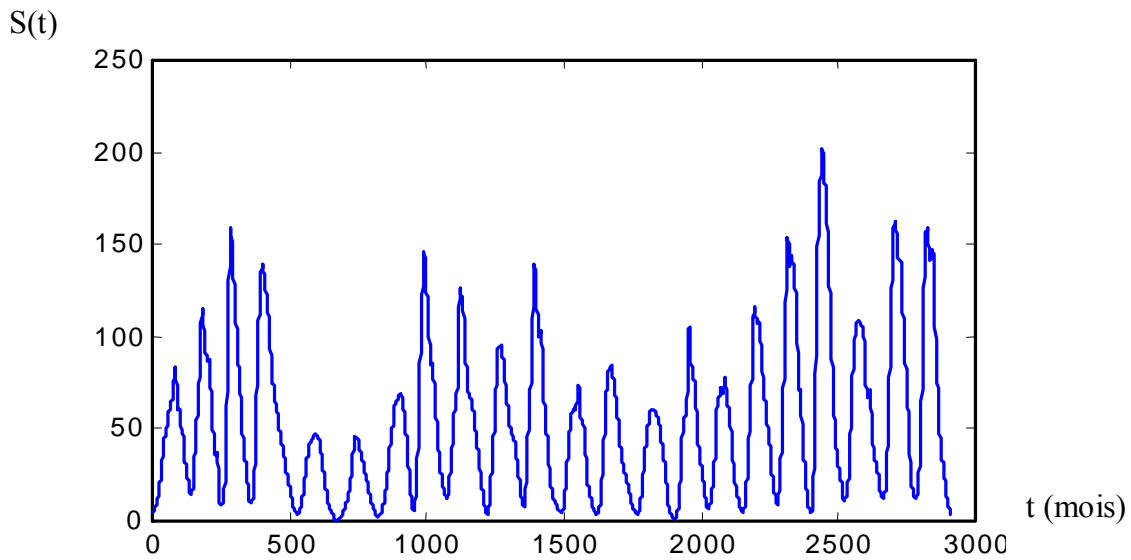


Figure 4.48. Signal obtenu après seuillage de fig4.47 avec un seuil SURE dépendant d'échelles

4.6.2 Détection et spécification des singularités.

La série à analyser est celle montrée sur la figure 4.48. Les lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue de cette série (voir figure 4.49) montrent qu'elles convergent vers les points de singularités quand la dilatation décroît

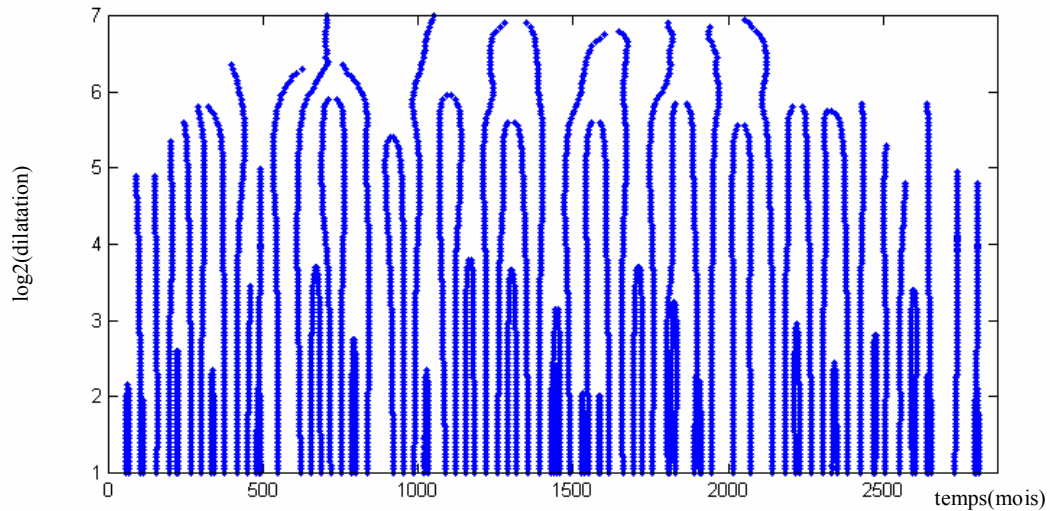


Figure4.49. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes continue du signal de la figure4.48

Comme pour le signal synthétique, on considère le dernier cycle (noté cycle N⁰22 réel), d'après les lignes maxima obtenues (voir figure 4.50), on constate que les lignes gardent un caractère commun que celui observé dans le cycle N⁰24 après seuillage. La ligne dominante converge vers le point de singularité qui apparaît en temps $t_3=2825$ mois.

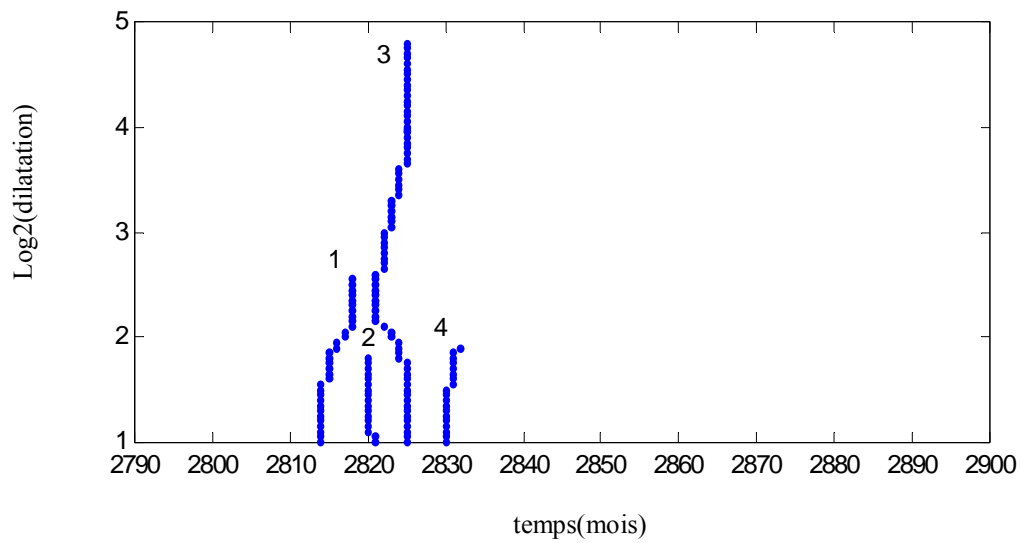


Figure4.50. Lignes maxima du module de la transformée en ondelettes du cycle réel N⁰²² de la figure 4.48.

La fonction ridge associée à cette ligne permet de calculer la régularité de cette singularité, on trouve alors $\alpha_3 = 1,25$ (voir fonction ridge 3 sur la figure 4.51). Cette singularité correspond à l'événement de l'activité solaire relevé dans l'année 1989, où il s'est produit une violente éruption solaire qui a engendré par la suite un orage géomagnétique. Cette orage a mis en panne le système de distribution d'électricité dans une grande partie de Canada et des Etats - Unis.

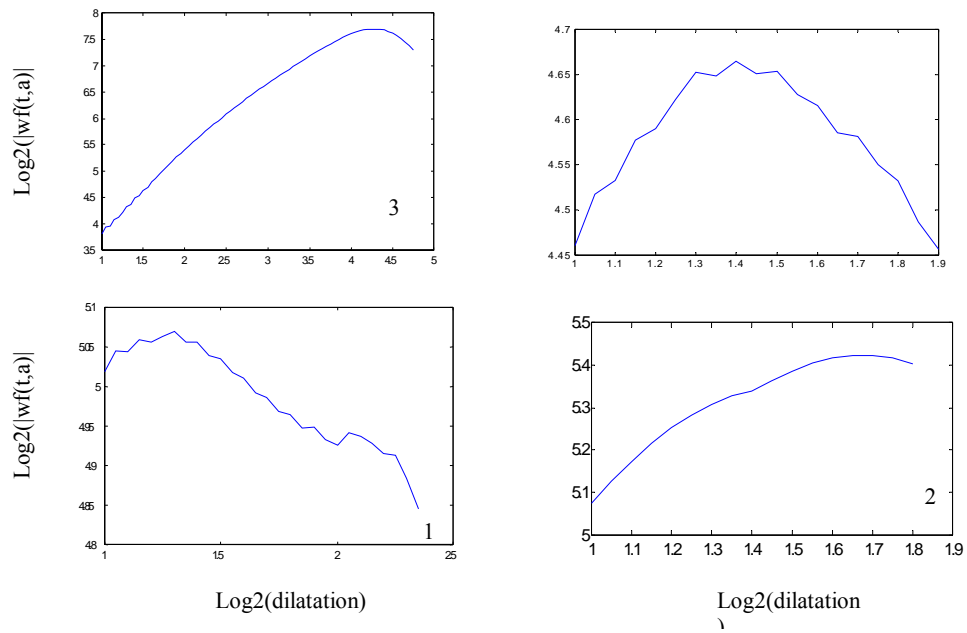


Figure4.51. Diagramme log-log des fonctions ridge associes aux lignes maxima indexées sur la figure 4.50. le calcul des pentes pour les lignes 1,2 et 3 donnent respectivement :
 $\alpha = -0.13$ ($2^{1.4} \leq a \leq 2^{1.8}$), $\alpha = 0.52$ ($2 \leq a \leq 2^{1.4}$) et $\alpha = 1.25$ ($2 \leq a \leq 2^{3.7}$).

Les instants des singularités ainsi que leurs régularités des autres cycles sont présentés dans le tableau 12.]

n	instants	régularités	n	instants	régularités
1	101	1.39	12	1496	1.41
2	198	1.37	13	1616	1.47
3	299	1.33	14	1754	1.60
4	415	1.42	15	1907	1.35
5	544	1.63	16	2017	1.43
6	717	1.58	17	2143	1.40
7	836	1.52	18	2268	1.31
8	951	1.36	19	2436	1.28
9	1086	1.38	20	2575	1.45
10	1219	1.44	21	2648	1.34
11	1354	1.32	22	2825	1.25

Tableau 12 : les instants des singularités correspondant aux maxima du signal présenté dans la figure 4.48. et leurs régularités sauf les lignes dominantes prises en considération.

4.7 Conclusion

Nous avons utilisé différentes méthodes de seuillage selon le type de bruit. Nos exemples confirment d'après les résultats obtenus, les performances du seuil SURE sont meilleurs que celles du seuil universel pour un bruit blanc. En effet, le seuil SURE minimise l'erreur écart quadratique moyen avec pénalité. Le seuil SURE dépendant d'échelle aboutit à de meilleurs résultats en comparaison avec les autres seuils quand le signal synthétique est contaminé par un bruit stationnaire coloré de faible intensité. Toutefois, il faut souligner que le rajout d'un bruit de forte intensité fait "exploser" le signal synthétique (déformation totale du signal) et les méthodes exposées ne sont d'aucune aide. Pour des processus, même stationnaires mais se rapprochant de la non stationnarité, les performances de ces méthodes sont mises en échec.

La localisation des singularités du signal synthétique, après seuillage, est reconstituée avec une bonne précision . Nous avons remarqué que le bruit restant a généré d'autres lignes maxima plus au moins importantes en amplitude. La localisation temporelle n'est pas une condition suffisante pour déterminer si les singularités détectées sont générées par un même phénomène physique. Pour cela nous avons calculer les régularités qui sont caractéristiques de chaque singularité. Ces dernières sont données par la variation, du module de la transformée en ondelettes continue en fonction de la dilatation le long d'une ligne maxima. Les fonctions ridges peuvent être classées en deux types:

type1: fonctions ridges à tendances linéaire positive ($\alpha > 0$). Cette tendance peut être influencée par le bruit restant après seuillage. Celles-ci sont caractérisées par une partie déformée située au début de la fonction ridge pour devenir ensuite quasi-linéaire. Notons que le bruit restant ne détruit pas le modèle des fonctions ridges.

type2 : fonctions ridges ayant une tendance linéaire négative ($\alpha < 0$). Ce type de fonctions sont attribuées au bruit [MAN96].

Nous nous sommes intéressés aux fonctions ridges de type1 où nous avons étudié uniquement la partie linéaire. Les résultats obtenus montrent que les performances des algorithmes développés persiste même dans les cas médiocre de débruitage. Cette relative "robustesse" mériterait à être analysée.

Après avoir, établi une étude sur des données simulées synthétique débruités décrivant l'activité solaire, les résultats obtenus nous ont encouragé à pousser cette étude en utilisant les données réelles. L'application d'un seuillage SURE dépendant d'échelle suivi des méthodes de localisation des singularités sur les données réelles de nombre de tâche solaire nous permet de mettre en évidence les événements relatif aux activités solaires observées. Nous retrouvons les cycles, les instants des singularités et nous avons estimé les régularités en ces points. Les régularités obtenu sont positives non entière qui varient de manière aléatoire. Leurs amplitude est comprise entre 1.25 et 1.63.

Conclusion générale :

L'idée essentielle, sur laquelle repose les méthodes d'analyse par ondelettes, consiste à représenter des processus temporels à différentes échelles. Cette possibilité est extrêmement intéressante en géomagnétique où l'information, portée par les signaux, est souvent véhiculée de manière variable dans le temps. C'est le cas, par exemple, des signaux solaires. A l'instar de l'analyse de Fourier, l'analyse en ondelettes a pu, elle aussi, donner lieu à des algorithmes très efficaces pour plusieurs applications surtout lorsqu'il s'agit de phénomènes présentant de brusques discontinuités ou des variations très localisés dans le temps ou l'espace. Les algorithmes développés sont basés sur l'analyse des informations contenues dans les coefficients d'ondelettes du signal.

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire, s'est basé sur l'utilisation à la fois des ondelettes orthogonales et la transformée en ondelettes continue. Les spécificités de ces deux classes nous ont été utile pour traiter deux problèmes très différents : les ondelettes orthogonales pour éliminer le bruit présent dans des séries temporelles non-stationnaires et la transformation en ondelettes continue pour localiser et spécifier les singularités géomagnétique. Les résultats de la transformée en ondelettes continue sont obtenus en corrélant chaque élément de la famille d'ondelettes avec le signal. Lorsqu'une fluctuation dans le signal s'accorde avec la période caractéristique d'une ondelette, la corrélation est

bonne, sinon, elle est quasi nulle, cette corrélation nous a permis de localiser des singularités qui se traduisent par une ligne maximale dominante qui converge vers la singularité quand le paramètre de dilatation décroît vers zéro. Les fonctions ridges décrivant l'évaluation du module de la transformée en ondelettes continue le long de ces lignes maximales, nous ont renseigné sur les degrés des régularités des singularités contenues dans le signal étudié.

Nous avons utilisé la méthode non linéaire, seuillage par ondelettes orthogonales pour réduire le bruit. Contrairement aux méthodes linéaires les estimateurs qui en découlent à partir de cette procédure sont optimaux : l'estimateur de la fonction inconnue est aussi régulier que la fonction inconnue. Les tests effectués sur des données synthétiques bruitées avec différents types de bruit (bruit blanc, MA(1), AR(1), ARMA(1,1)) montrent que la qualité de débruitage dépend du seuil utilisé. Nous avons opté pour le seuil qui minimise l'erreur en moyenne quadratique, qui présente de meilleures propriétés minimax sur de nombreux espaces fonctionnels tel que l'espace de Besov $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R})$, auquel appartient probablement le signal utile.

Nous avons constaté que la géométrie des lignes maximales du module de la transformée en ondelettes continue et les variations des coefficients en ondelettes le long de ces lignes permettent de distinguer les singularités engendrées par le bruit restant après seuillage de celle propre au signal synthétique.

Sur la base de simulation faite sur le signal synthétique, nous avons analysé les données réelles de nombre de tâches solaires. Les résultats obtenus à partir de l'analyse en ondelettes continue des données réelles ont révélé :

- 1- L'analyse par la transformée en ondelettes continue des données de nombre de tâches solaires, montre un comportement quasi-similaire que celui observé dans les données simulées.
- 2- Les fonctions ridges ont une tendance linéaire positive, elles sont influencées par le bruit restant après seuillage.
- 3- La variation des régularités des singularités contenue dans les différents signaux analysés est aléatoire.

Nous avons clairement mis en évidence, à partir de localisation temporelle, plusieurs événements de l'activité solaire à l'intérieur des cycles ainsi que leurs régularités.

Nous pensons qu'il faut pousser cette étude en analysant, à partir de cette nouvelle technique, l'analyse par ondelettes, des données d'observations du champ magnétique terrestre afin de voir les contributions de ces activités solaires dans la variation du champ magnétique, et si elles ont un caractère propre qui permet de les dissocier des variations connues et observées dans les enregistrements du champ.

Bibliographie:

- [AA95] U.Amato et A.Antoniadis, “Adaptive wavelet series estimation in separable non parametric”. Intituto per Applicazioni della Matmatica, Napoli, 1995.
- [Ant97] A.Antoniadis, “ Wavelets in statistics : AReview ”, University Joseph Fourier, Grenoble, February 1997.
- [BUR01] James Burch, “ Ejections coronales et tempête spatiales ”, pour la science No 284, Juin 2001.
- [COH92] A.Cohnen, “ Ondelettes et traitement numérique du signal ”, Masson, Paris, 1992.
- [DAU88] I.Daubéchies, “ Orthogonal bases of compactly supported wavelets ”, commun. Pure App Math, 41, 909-996, 1988.
- [DAU92] I.Daubéchies, “ Ten lecturs on wavelets ”, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [DJ92] D.L.Donoho and I.M.Johnstone, “ Minimax estimation via wavelet shrinkage ”. technical report No 402. Departement of statistics, Stanford university, 1992.
- [DJ93] D.L.Donoho and I.M.Johnstone, “ Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage ”, technical report. Departement of statistics, Stanford university, April 1993.
- [DJ94] D.L.Donoho and I.M.Johnstone, “ Minimax risk over ℓ_p -Balls for ℓ_q -error ”, Juju 20, 1994.
- [DJ95] D.L.Donoho and I.M.Johnstone, “ Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage ”. J.Amer, Statist Assoc, Vol 90, pp 1200-1224, 1995.
- [DJ97] D.L.Donoho and I.M.Johnstone, “ Asymptotic minimaxity of wavelet estimators with sampled data ”. technical Report, Departement of statistics, Stanford university, 1997.
- [DJKP93] D.L.Donoho, I.M.Johnstone, G.Kerkyacharian and D.Picard, “Density estimation by wavelet thresholding ”, April 1993.

- [DJKP95] D.L.Donoho, I.M.Johnstone, G.Kerkyacharian and D.Picard, “ Wavelet shrinkage : asymptotia? ”, Journal of Royal statistical society, series B, Vol 57, pp 301-369, 1995.
- [DL92] R.A.Devore et B.J.Lucier, “ Wavelets ”. appeared in Acta Numerica, A.Iserles, ed, Cambridge universty press, V.1, pp.1-56, 1992.
- [DLM90] D.L.Donoho, R.C.Liv et R.B.Mac Gibbon, “ Minimax risk over hyperrectangles and implications ”, Ann statist, Vol 18, pp 1416-1437, 1990.
- [DON95] D.L.Donoho, “ Denosing by soft-thresholding ”, IEEE transactions on information theory, Vol 41, pp 613-627, May 1995.
- [DY94] G.Dennis et S.Yu, “ Introduction to the theory and applications of wavelet transform ”, spar journal of technology, Vol.3, pp.20-33, 1994.
- [GIB96] D.Gibert, “Eléments de traitement du signal ”, université de Rennes 1, URF structures et propriétés de la matière. Géosciences Rennes (upr 4661-CNRS), 1996.
- [GRE00] V. Greffoz, “Soleil avis de tempete”, science et vie N⁰994, juillet 2000.
- [GW90] C.Grasauet, P.Wittonski, “Analyse de Fourier et application”. Masson, 1990.
- [HER94] F.J.Hermann, “ Ascaling medium representation, a discussion on well-logs, fractals and waves ”, these Doctorat, university of cambrige, 1994..
- [HWR99] D.H.Hathaway, R.M.Wilson et E.J.Reichmann, “ A synthesis of solar prediction technique”, J.G.R., Vol.140, No.A10, pp.22375-22388, october 1, 1999.
- [JAF89] S.Jaffard, “ Exposant de holder en des points donnés et coefficients d’ondelettes”, C-R.Acad.Sci.Paris 308,79-81,1989.
- [JAN00] M.Jansen, “ Wavelet thresholding and noise reduction ”, thèse de Doctorat, université catholique de Louvain, Avril 2000.
- [JS94] I.M.Johnstone and B.W.Silverman, “ Wavelet threshold estimator for data with correled noise ”, December 21, 1994.
- [KF97] P.Kumar et E.Foufoula-Georgiou, “ Wavelet analysis for geophysical applications ”, reviews of geophysics, 25, 385-412, November 1997.
- [KL95] J.P Kahane et P.G. Lemarie-Rieusset, “ Fourier series and wavelets ”. Studies in the Development of Modern Mathematics, ISSN 1040-6441, Vol 3, 1995.

- [MAL89] S.Mallat, “ A theory for multirésolution signal decomposition : the wavelet representation ”, IEEE trans. Pattern Anal. Machine Intellignce 14, 674-693, 1989.
- [MAN96] M.Mandea Alexandrescu, “ Le champ géomagnétique et ses observations ”, thèse de doctorat, institut de physique du Globe de Paris, Avril 1996.
- [MEY90] Y.Meyer, “ Ondelettes et opérateurs ” I, Hermann, Paris 1990.
- [MEY92] Y.Meyer, “ Ondelettes : algorithme et application ” Edition Armond Colin, 1992.
- [MH92] S.Mallat et H.L.Hwang, “ Singularity detection and processing with wavelets ” IEEE trans. Info theory, Vol.38, No1, pp 617-643, 1992.
- [MJR87] Y.Meyer, S.Jaffard et O.Rioul, “ L’analyse par ondelettes ”, pour la science, 117, 28-37, 1987.
- [MOR95] F.Moreau, “ Methode de traitement des données géophysiques par transformée en ondelettes ”. thèse de doctorat, université de Rennes1, 1995.
- [VIG96] A.Vigouroux, “ Etude de la variabilité solaire à long terme ” thèse doctorat, observatoire de Nice, 1996.