

N° d'ordre : 23/ 2004-M/PH

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECCHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
USTHB/ ALGER
FACULTE DE PHYSIQUE**



Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

En : PHYSIQUE

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par : M^{elle} **AIT MOUSSA NABILA**

SUJET

Etude numérique des instabilités Taylor Couette dans un écoulement ascendant autour d'un cylindre en rotation.

Soutenu publiquement le 26/09/2004, Devant le jury composé de :

M ^f A. SALEM	Professeur (USTHB)	Président
M ^f A. GHEZAL	Chargé de cours (USTHB)	Directeur de thèse
M ^f E.K. SI- AHMED	Professeur (USTHB)	Examineur
M ^f S.BENMANSOUR	Professeur (USTHB)	Examineur
M ^f M. SAIGHI	Maître de conférence(USTHB)	Examineur
M ^{elle} S. BABA HAMED	Chargée de cours (USTO)	Examinatrice

REMERCIEMENTS

Dans tout voyage initiatique il y a des guides. Au long de ce chemin, et dans l'ordre de leur apparition, il y aura eu d'abord **ABDERRAHMANE GHEZAL**, le directeur de thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour son soutien constant et ses encouragements. Il m'aura appris à être passionnée tout en restant lucide et objective

Monsieur le professeur **A.SALEM**, professeur à la faculté de physique (USTHB), m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour ses grandes qualités professionnelles et humaines.

Je prie Monsieur le professeur **EK-SI-AHMED**, professeur à la faculté de physique, d'accepter mes sentiments respectueux et reconnaissants pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Je suis particulièrement reconnaissante à Monsieur le professeur **S.BENMANSOUR**, professeur à la faculté de génie mécanique (USTHB), qui a permis d'enrichir ma thèse dans sa partie bibliographique grâce aux nombreux documents qu'il m'a fournis. Je le remercie également de prendre part à la commission du jury.

Que Monsieur **M.SAIGHI**, maître de conférence à la faculté de physique (USTHB), qui a accepté très spontanément de faire partie du jury, soit remercié et qu'il trouve ici l'expression de mes sincères reconnaissances.

Je suis honorée également par la participation au jury de Melle **S.BABA HAMED**, chargée de cours au département d'hydraulique, université d'ORAN (USTO). J'ai été touchée par sa gentillesse, son dévouement, et surtout pour le temps qu'elle a consacré à examiner ce travail.

Il y'a également les compagnons de route, Melle **Z.OUCHIHA** & Mr **B.DADDA** pour la partie numérique. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma respectueuse amitié. Il y'a également ceux que l'on croise, Dr **M. LOUNIS**, de l'institut de mécanique des fluides & des solides de l'Université de Strasbourg (France). Il a su encourager et porter intérêt à ce travail. J'apprécie l'étendue de ses encouragements, ses conseils et remarques précieux et ses grandes qualités humaines. Qu' il en soit vivement remercié.

Ils ont tous tenté, parfois en vain, de me transmettre une part de leur expérience.

Je m'adresse tout particulièrement à mes collègues du laboratoire de Mécanique des fluides avec lesquels j'ai partagé durant ces quelques années des moments riches en émotions et en expérience humaine.

Toutes ces personnes sont devenues mes proches dans " ma famille scientifique ".

DEDICACES

Je dédie cette thèse

*À la personne que j'aurais tant aimé
voir assistée à ma soutenance,
mon regretté **cher père**. Il a été toujours là et il a été un magnifique
modèle de labeur et de persévérance.
Que Dieu le préserve au fond de son éden.*

*À ma très chère mère
à qui je dois tout simplement tout et qui n'a cessé de me conseiller et de
me soutenir
Avec tout mon amour.*

*À mes sœurs & À mes frères
Pour leur soutien moral et leurs sacrifices le long de ma formation.*

*À ma petite nièce **Celina***

*À mon petit neveu **Nadjib***

Ce qu'ils sont pour moi ne peut pas se résumer en quelques lignes

Je dédie cette thèse

*À tous les instituteurs, professeurs et enseignants qui ont contribué un jour à
mon éducation et à ma formation et qui m'ont permis, par leurs efforts,
d'atteindre ce niveau.*

Je dédie cette thèse

*À mes meilleures amies :
Zoubida, Razika, Souad, Leila, Ratiba, Saida, Nabila
Pour leurs soutiens dans les moments difficiles*

NOMENCLATURE

Lettres latines

d	Epaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres ; $d = R_2 - R_1$
d_h	Diamètre hydraulique $d_h = 2 (R_1 - R_2)$
f_1	Fréquence de rotation du cylindre intérieur
F_g	Facteur géométrique $F_g = d / R_1$
Fr	Nombre de Froude défini par $Fr = W_e^2 / g R_2$
g	Accélération de la pesanteur.
l	Longueur axiale adimensionnelle définie par $z / Re_a d$
L	Longueur de l'espace annulaire
L_{et}	Longueur d'établissement de la couche limite tangentielle
N	Rapport des rayons $N = R_1 / R_2$
P	Pression
P_a	Pression atmosphérique
r	Coordonnée radiale
r_m	Moyenne arithmétique de R_1 et R_2 définie par $r_m = (R_1 + R_2) / 2$
R_1	Rayon du cylindre intérieur
R_2	Rayon du cylindre extérieur et longueur de référence
Re_a	Nombre de Reynolds axial défini par $Re_a = W_e (R_2 - R_1) / \nu$
Re_{ac}	Nombre de Reynolds axial critique de l'écoulement de Poiseuille ($Ta=0$) pour laquelle l'instabilité de Tollmien- Schlichting se déclenche.

Re^*	Nombre de Reynolds axial défini par	$Re = 2 w_m (R_2 - R_1) / \nu$
Re'	Nombre de Reynolds axial défini par	$Re = w_m (R_2 - R_1) / 2 \nu$
Re^x	Nombre de Reynolds axial défini par	$Re^x = W_e d_h / \nu$
Re^+	Nombre de Reynolds axial défini par	$Re^+ = w_d d / \nu$
\hat{Re}	Nombre de Reynolds axial défini par	$\hat{Re} = 2 w_d / (R_1 - R_2) \nu$
Re_g	Nombre de Reynolds généralisé défini par (n' indice de structure)	$Re_g = w_d^{2-n'} d_h^{n'} / \nu$
t	temps	
Ta	Nombre de Taylor défini par	$Ta = R_1 \Omega_1 d / \nu$
Ta_c	Nombre de Taylor critique	
Ta'	Nombre de Taylor défini par	$Ta' = 4 \Omega_1^2 d^4 / \nu^2$
Ta^*	Nombre de Taylor défini par	$Ta^* = \Omega_1 d^2 / \nu$
\overline{Ta}	Nombre de Taylor défini par	$\overline{Ta} = 2 (R_1 \Omega_1)^2 d^3 / \nu^2 (R_1 + R_2)$
\tilde{Ta}	Nombre de Taylor défini par	$\tilde{Ta} = 2 (R_1 \Omega_1)^2 d^4 / (R_2^2 - R_1^2) \nu^2$
\hat{Ta}	Nombre de Taylor défini par	$\hat{Ta} = 4 d^4 \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right)^2 N^2 / (1 - N^2)$
\bar{Ta}	Nombre de Taylor défini par	$\bar{Ta} = \frac{R_1 \Omega_1}{\nu} d (d/R_1)^{1/2}$
Ta^+	Nombre de Taylor défini par	$Ta^+ = \Omega_1^2 r_m (1/F_g) d^3 / \nu^2$
Ta_g	Nombre de Taylor généralisé défini par	$Ta_g = \sqrt{\frac{d}{R_1}} \frac{d_h^{n'}}{2^{n'}} (\Omega_1 R_1)^{2-n'} / \nu$
Ta''	Nombre de Taylor défini par	$Ta'' = 4\pi f_1 R_1 d / \nu$
u	Composante radiale de la vitesse	
\vec{V}	Vecteur Vitesse \vec{V} (u, v, w)	
v	Composante tangentielle de la vitesse	

V_d	Rapport des vitesses défini par vitesse de translation des vortex (w_v) / w_m
V_0	Vitesse linéaire du cylindre intérieur $V_0 = R_1 \Omega_1$
w	Composante axiale de la vitesse
W_e	Vitesse d'entrée du fluide dans l'espace annulaire
w_m	Vitesse axiale moyenne
w_d	Vitesse débitante de l'écoulement axiale
w_v	Vitesse de translation des tourbillons
z	Coordonnée axiale

Symboles Grecs

δ_{ij}	Symbole de Kronecker
δ_θ	Epaisseur de déplacement
δ_θ^*	Epaisseur de déplacement adimensionnelle (δ_θ / d)
γ	Rapport des vitesses $R_1 \Omega_1 / w_m$
η	Rapport des vitesses angulaires $\eta = \Omega_1 / \Omega_2$
μ	Viscosité dynamique du fluide
ν	Viscosité cinématique du fluide
Γ	Rapport de forme (Rapport d'aspect) ; $\Gamma = L / d$
Π	Perturbation de pression
θ	Coordonnée azimutale
ρ	Masse volumique du fluide
Ω_1	Vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur
Ω_2	Vitesse angulaire de rotation du cylindre extérieur

ζ Coordonnée radiale réduite $\zeta = (r - R_1) / (R_2 - R_1)$

ξ Coordonnée axiale réduite $\xi = z/d$

Indices & Exposants

c Valeur critique

e Entrée de l'espace annulaire

i Relatif à z

j Relatif à r

+ Grandeur adimensionnelle

Sigles

C.M.C CarboxyMéthylCellulose



INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement entre cylindres concentriques est un modèle dynamique d'une grande importance. Ce problème remonte à la publication historique de G.I Taylor (1923), [1]. En raison de la richesse des structures qui apparaissent dans le cas où le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω_1 (écoulement Taylor-Couette), de nombreux auteurs se sont intéressés à la description de bifurcations par des analyses de la stabilité de l'écoulement.

Lorsque un débit axial est imposé dans ce système classique, l'écoulement résultant est appelé " Taylor-Couette-Poiseuille " (T.C.P), ou bien "écoulement spiral de Poiseuille ". L'hydrodynamique de ce nouveau système a mis en évidence des propriétés différentes de celles de l'écoulement de Taylor- Couette dans certains cas.

D'après les premières études effectuées par certains chercheurs (J. Kaye & E. C. Elgar, 1958 [2]), ce type d'écoulements engendre quatre régimes caractéristiques:

- ❑ Le régime laminaire,
- ❑ Le régime laminaire avec tourbillons de Taylor,
- ❑ Le régime turbulent,
- ❑ Le régime turbulent avec tourbillons.

L'étude de la transition entre les quatre régimes a inspiré de nombreux travaux, en particulier la transition entre le régime laminaire et le régime laminaire avec tourbillons. Ce dernier régime, à débit axial nul, correspond à l'écoulement de Taylor- Couette, qui à partir d'une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre intérieur, possède des tourbillons de forme toroïdale. Cette structure tourbillonnaire est influencée par la rotation du cylindre intérieur et par les facteurs géométriques. A faibles valeurs du débit axial, les tourbillons se

déplacent de manière ascendante dans l'espace annulaire sans se détruire. Un accroissement de ce débit entraîne, pour une vitesse de rotation donnée, une annihilation des tourbillons d'autant plus importante, que ce débit est plus grand.

L'étude de l'écoulement Taylor-Couette-Poiseuille trouve son importance dans multiples applications industrielles et technologiques. Du fait des propriétés intéressantes mises en jeu par la présence des tourbillons, ce type d'écoulement intervient dans de nombreuses machines tournantes, les développements des méthodes du génie électrochimique introduite à la récupération des métaux, la conception de type d'échangeur thermique et les séparateurs polyphasiques....

Dans le cadre du présent travail, nous nous intéressons aux instabilités hydrodynamiques d'un écoulement ascendant d'un fluide réel, incompressible, dans un espace annulaire séparant deux cylindres coaxiaux; le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω_i , et le cylindre extérieur est maintenu fixe. L'étude s'intéresse au comportement de l'écoulement du fluide lors de la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, et à l'influence de différents paramètres dynamiques et géométriques sur cette transition.

Elle comporte cinq chapitres qui sont structurés comme suit:

Le premier chapitre est consacré à la présentation du problème considéré et son intérêt dans la pratique, avec une revue bibliographique sur les instabilités centrifuges qui apparaissent dans les écoulements de Taylor- Couette avec ou sans débit axial. Nous y rappelons les principaux résultats relatifs aux conditions d'apparition de ce type d'instabilités. Nous discutons ensuite de la pertinence des résultats dans les cas particuliers qui peuvent nous intéresser et dans le domaine qui touche de près ou de loin notre sujet.

La description de l'écoulement et la formulation mathématique du problème avec les caractéristiques géométriques et physiques font l'objet du **deuxième chapitre**.

Dans **le troisième chapitre**, nous exposons les principes de la méthode de résolution, qui est une méthode de différences finies basée sur un schéma semi- implicite de type

Crank- Nicholson. La formulation adoptée pour traiter les équations de Navier- Stokes étant du type vitesse- pression. Le procédé itératif est réalisé avec l’algorithme de Gauss-Seidel.

Le quatrième chapitre est consacré à l’ analyse des résultats obtenus, et à la mise en évidence de l’influence de différents paramètres dynamiques et géométriques sur l’apparition des instabilités. Il comprend également la validation de notre code de calcul .

Enfin une conclusion est présentée avec les perspectives offertes à l’issue de ce travail.



CHAPITRE UN
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Stabilité hydrodynamique

I.1.1. Introduction

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique consiste en l'examen de la stabilité du régime établi du phénomène étudié ; en tant que branche de la physique, la mécanique des fluides n'échappe pas à ce genre de problème.

En mécanique générale, la recherche des solutions stables commence par la détermination des valeurs des paramètres du système qui rendent minimum la fonction potentiel; dans le même ordre d'idée le rôle joué par les potentiels thermodynamiques des systèmes thermodynamiques est en tout point analogue.

En mécanique des fluides, le problème peut être présenté de la même manière, sachant qu'il n'existe que peu d'écoulements qui dérivent d'une fonction de forces ou du moins, la recherche de cette fonction de forces constitue-t-elle un problème qui n'est pas trop complexe. La méthode la plus générale consiste à écarter le système de sa position d'équilibre en le perturbant et étudier ensuite les effets de cette perturbation .

I.1.2. Mécanisme physique de l'instabilité hydrodynamique

Les forces de viscosité au sein d'un écoulement ont un effet stabilisant par le fait qu'elles tendent à amortir les perturbations. Comme de plus, on constate que l'instabilité apparaît dans l'écoulement pour des valeurs du nombre de Reynolds assez grandes, on est conduit à admettre que les caractéristiques essentielles du mécanisme de l'instabilité s'obtiendront par l'étude des fluides parfaits.

Cette idée fut en particulier celle retenue par Lord Rayleigh [1917]. Il montra que l'écoulement des fluides en « rotation » était stable ou instable suivant que le carré de la circulation augmentait ou non de façon monotone avec la distance à l'axe de rotation r . Ce résultat fut traduit par un critère dit discriminant de Rayleigh comme suit : $\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0$.

De même, procédant à une analyse analogue pour l'étude des écoulements parallèles, il montra que pour qu'un tel écoulement puisse être instable, il était nécessaire que le profil de vitesse présentât un point d'inflexion. L'extension de ce résultat à d'autres types d'écoulements fut d'ailleurs assurée plus tard par Tollmien.

Plus tard, Von Karman [1934], a expliqué le seuil de l'instabilité par la création d'un modèle où il compense les forces centrifuges par celles de pression exercées sur une particule baignant au sein d'un écoulement donné.

Comme nous venons de le rappeler, les premières études ont donc été effectuées en négligeant les forces de viscosité que l'on considérait comme étant stabilisatrices. Mais il convient d'être prudent dans une telle interprétation, car l'application du critère de Rayleigh à l'écoulement plan de Poiseuille, permet d'assurer que ce type d'écoulement est toujours stable en l'absence de viscosité. Ceci est d'ailleurs confirmé par des calculs plus détaillés, il en résulterait que la prise en considération des forces de viscosité ne pourrait qu'accentuer la stabilité de cet écoulement.

La description du mécanisme physique de ce double effet est due à Prandtl [1922] lors des études de stabilité des couches limites. Il a montré que les forces de viscosité sont capables d'introduire une contrainte de Reynolds qu'on ne trouve pas dans l'étude du cas non visqueux ; si cette contrainte parvient à « transférer » de l'énergie de l'écoulement moyen vers la perturbation elle peut, en entretenant cette dernière, donner naissance à une instabilité.

Pour la compréhension des phénomènes d'instabilités et de transitions vers la turbulence, la mécanique des fluides s'intéresse plus particulièrement à des systèmes relativement simples, tel que, le système de Taylor-Couette, qui est l'objectif de notre étude, les sphères tournantes, les cônes tournants, disques tournants, etc.....

I.2. Écoulement Taylor-Couette

I.2.1. Principe de l'écoulement Taylor Couette

L'écoulement de Taylor-Couette est la version cylindrique de l'écoulement de Couette plan. C'est un écoulement cisailé, entre deux cylindres coaxiaux tournants, disposés verticalement, fig (I. 1). Les cylindres sont indépendants et peuvent tourner individuellement ou simultanément. D'ailleurs, les trois cas de rotation : contre-rotation ; cylindre interne fixe ; cylindre externe fixe correspondent à trois régimes d'écoulement différents, excepté à très grandes valeurs de vitesse de rotation. On présente dans cette étude théorique le dernier régime, dont l'étude remonte au début du siècle dernier, ce qui indique l'abondance de la littérature de ce régime d'écoulement, comme on le verra dans la section suivante.

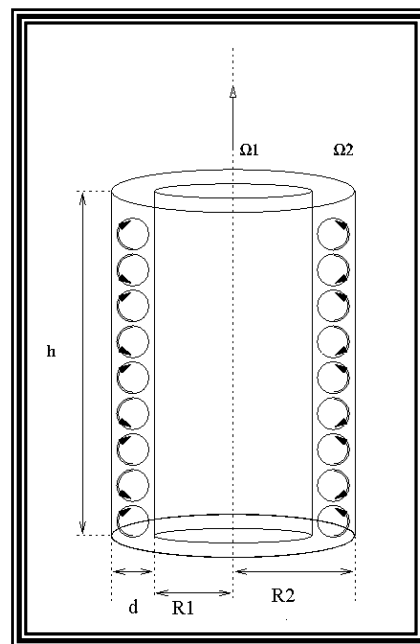


Fig. I.1 : Ecoulement de Taylor Couette

1.2.2. Historique de l'écoulement de Taylor - Couette

Le Taylor-Couette tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par une expérience de laboratoire (Taylor 1923 [1]).

La première référence enregistrée concernant cet écoulement, remonte au 17^{ème} siècle ; il s'agit de l'étude effectuée par NEWTON en 1786. Il fut le premier qui remarqua la symétrie de ce mouvement et supposa l'aspect concentrique des lignes de courant. Plus tard, en 1848 STOKES a prévu la formation des tourbillons au sein d'un tel écoulement, lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse plus grande que celle du cylindre extérieur. Il a aussi proposé l'utilisation des grains pour visualiser l'écoulement et confirmer ses hypothèses.

En 1881, MARGULSE a prouvé que ce type d'écoulement pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité des fluides, et autour de 1888 MALLOCK a construit un viscosimètre avec deux cylindres coaxiaux tournants. Il a remarqué que l'écoulement est toujours instable lorsque le cylindre intérieur tourne plus vite que le cylindre extérieur. Mais quand le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre extérieur, au-delà de laquelle la turbulence se déclenche. Dans la même période, COUETTE a fabriqué un viscosimètre à cylindre intérieur fixe (connu aujourd'hui sous le nom de viscosimètre de COUETTE). Loin des parois horizontales l'écoulement est circulaire et obéit à la loi suivante : $V_{\theta}(r) = A r + B / r$. Par la mesure du couple résistant appliqué sur l'un des deux cylindres, on peut ainsi remonter à la viscosité du fluide. COUETTE a remarqué que, contrairement au cas de la rotation du cylindre extérieur, le domaine de validité de sa solution est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesse croissante à partir du repos. Les travaux de MALLOCK et ceux de COUETTE ont été axés sur la mesure de viscosité valable seulement pour le cas laminaire. Néanmoins, ils furent les premiers à observer le début des instabilités dues à l'augmentation de la vitesse de rotation de l'un des cylindres.

La première attention donnée à la possibilité de l'instabilité hydrodynamique dans l'écoulement de COUETTE a été faite par Lord RAYLEIGH [1917]. Il a justifié ultérieurement les remarques de COUETTE et MALLOCK pour le cas non visqueux. A partir de son critère déjà mentionné, il est arrivé à la condition de stabilité suivante : $\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2$ où Ω_1 et Ω_2 sont les vitesses angulaires de rotation, R_1 et R_2 sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement.

G.I. TAYLOR 1923 [1] a repris cette étude pour un fluide visqueux ; il a représenté la première approche méthodologique, expérimentale et analytique de l'apparition et du développement des instabilités entre cylindres concentriques tournants. Expérimentalement il a mis en évidence l'existence d'un écoulement secondaire succédant à l'écoulement laminaire de base, pour une valeur particulière de la vitesse de rotation du cylindre tournant. Il a en outre résolu les équations de Navier- Stokes et de continuité pour l'écoulement de Couette ; la solution est donnée sous forme de série de Bessel-Fourier. Cette étude analytique est basée sur une théorie linéaire qui consiste à superposer à la solution du régime laminaire une perturbation infinitésimale et négliger les termes non linéaires. Basé sur les observations de COUETTE et MALLOCK, TAYLOR a supposé une symétrie axiale de l'écoulement, un espace annulaire étroit, les effets de la gravité sont négligés et il supposé également une perturbation axialement périodique.

La théorie linéaire développée par TAYLOR, a permis de prévoir l'apparition de l'instabilité et de déterminer le seuil de vitesse de rotation correspondant à cette transition. Pour des vitesses plus élevées, les termes quadratiques ne sont plus négligeables. J.T.STUART (1958 [3]) fut le premier à tenir compte des termes quadratiques pour étudier par une théorie non linéaire, l'évolution et l'amplification de la perturbation au voisinage de la première instabilité. il a déterminé l'amplitude de ces perturbations à partir d'une équation de bilan énergétique écrite sous forme intégrale.

Après ces travaux novateurs, le phénomène physique qui est désormais connu sous le nom d'« écoulement de Couette–Taylor », n'a cessé d'attirer l'attention de nombreux chercheurs, qui par leurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux, ont contribué à une meilleure compréhension de cette classe d'écoulements complexes. Il a été bien documenté dans la revue classique publiée par DIPRIMA & SWINNEY 1985 [4]. En outre, l'article de TAGG 1994 [5] est l'une des références les plus exhaustives concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet. Depuis l'époque des travaux fondateurs de Taylor, plus de 2000 publications scientifiques sont parues concernant le Taylor–Couette. On notera également l'existence d'un colloque bi-annuel entièrement consacré à cette expérience « COUETTE –TAYLOR WORKSHOP » - dont la 13^{ème} édition s'est tenue en Juillet 2003 à Barcelone (Espagne).

1.2.3 .Mécanismes de l'instabilités de l'écoulement Taylor-Couette: vortex de Taylor

Le fluide étudié remplit l'espace annulaire séparant les deux cylindres, dont l'un est fixe et l'autre en rotation. En raison de la viscosité, le fluide tourne avec une vitesse plus élevée, près du cylindre intérieur que près du cylindre extérieur où elle tend à s'annuler. MALLOCK et COUETTE remarquèrent que l'écoulement devient instable, lorsque l'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur. En effet, la force centrifuge qui agit sur le fluide augmente avec la vitesse azimutale, et elle est maximale près du cylindre intérieur. Lorsque cette force surpasse les effets de viscosité, les couches de fluide, adjacentes à la paroi du cylindre intérieur, sont éjectées vers l'extérieur, alors que le fluide initialement près du cylindre extérieur a un mouvement rentrant pour remplir l'espace ainsi créé. Cette instabilité provoque la formation de vortex toroïdaux.

La compréhension des mécanismes de cette instabilité est due à SIR G.I.TAYLOR [1]. Ces vortex sont contrarotatifs dont chaque paire est logée dans une longueur d'onde de l'ondulation géométrique. Chacune des paires, formée par deux vortex contrarotatifs de même taille, est stable jusqu'à une vitesse de rotation critique du cylindre intérieur.

Au delà de cette vitesse critique, le seuil des " vortex de Taylor " est déterminé par un paramètre sans dimension, le nombre de Taylor, qui dans le cas du cylindre extérieur au repos, et pour une faible distance annulaire d entre les cylindres, est défini par : $Ta' = 4\Omega_1^2 d^4 / \nu^2$, où Ω_1 est la vitesse angulaire du cylindre intérieur et ν la viscosité cinématique du fluide. Le Taylor critique pour la première instabilité est égal à 1708 pour un espace annulaire à rapport des rayons $N=0.975$. L'écoulement de COUETTE azimutal devient instable et il est remplacé par une structure cellulaire dans laquelle le fluide suit une trajectoire hélicoïdale autour du cylindre dans des couches de vortex (T.V.F: Taylor Vortex Flow), fig (I.2.a). Des observations expérimentales faites par de nombreux chercheurs tels que COLES 1965 [6], ont montré que ces structures prennent naissance dans la région centrale de l'espace annulaire dès que le nombre de Taylor atteint la valeur critique. Si la vitesse de rotation du cylindre intérieur est maintenue constante, les vortex occupent progressivement au cours du temps toute la longueur de l'espace annulaire, à l'exclusion des extrémités.

Ceci n'est en fait que le début d'un processus particulièrement complexe. En effet, en augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur, une nouvelle bifurcation se produit vers les vortex modulés (W.V.F: Wavy Vortex Flow), fig (I.2.b). Les bords des vortex de Taylor commencent à osciller et les oscillations se déplacent dans le sens azimutal. Il y'a

apparition d'ondes azimutales, dont le nombre d'onde azimutale est entier et la vitesse de propagation est périodique dans le temps.

Si la vitesse de rotation augmente encore, une nouvelle bifurcation apparaît vers un régime quasi-périodique : un second mode oscillant se superpose à la première modulation. M.A. GORMAN & H. L. SWINNEY 1979 [7] furent les premiers à identifier cette bifurcation qui correspond à une modulation d'amplitude .

Plus loin, pour des vitesses de rotation plus élevées, des structures plus complexes apparaissent et l'écoulement devient turbulent avec coexistence des tourbillons de Taylor " ring shape ", puis pleinement turbulent.

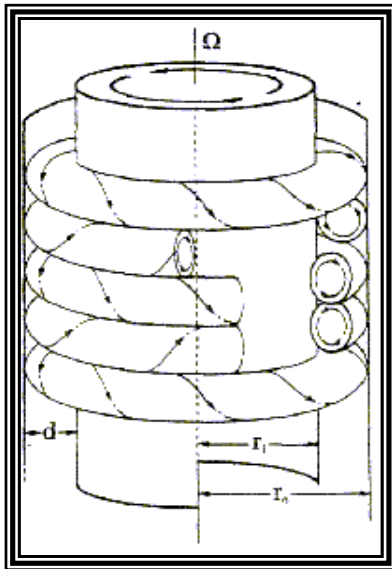


Fig. I.2. a : Régime (T.V. F)

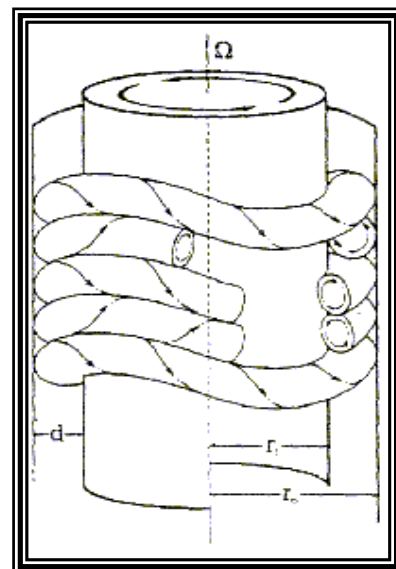


Fig. I.2. b : Régime (W.V. F)

I.3.Écoulement de Taylor Couette Poiseuille

I.3.1.Principe de l'écoulement

L'écoulement de Taylor Couette Poiseuille résulte de la circulation axiale forcée du fluide « Poiseuille flow » dans un espace annulaire, séparant deux cylindres coaxiaux dont le cylindre intérieur est en rotation « Couette flow ». Cet écoulement appelé aussi écoulement spirale de Poiseuille, possède deux états limites :

- ▣ l'écoulement de Poiseuille (vitesse de rotation nulle).
- ▣ l'écoulement de Couette (vitesse axiale nulle) rencontré à la section 2.

Dans les deux cas le fluide est soumis à des contraintes différentes ; dans le premier cas, il s'écoule sous l'action d'une différence de pression motrice appliquée entre les extrémités de jeu, alors qu'il subit dans le deuxième cas, un cisaillement entre les deux surfaces solides en mouvement.

L'association de ces deux écoulements de base engendre généralement l'existence de quatre régimes hydrodynamiques classiques (KAYE & ELGAR, 1958 [2]) :

- ❁ le régime laminaire pur
- ❁ le régime laminaire tourbillonnaire
- ❁ le régime turbulent
- ❁ le régime turbulent avec tourbillons de Taylor.

Les mécaniciens des fluides s'intéressent à préciser les transitions entre les divers régimes dénombrés ci-dessus. La complexité de l'écoulement et la multiplicité des facteurs hydrodynamiques et géométriques le régissant, expliquent la difficulté à localiser les frontières délimitant chaque régime.

I.3.2. Applications technologiques & industrielles des écoulements T.C.P

L'écoulement de Taylor- Couette-Poiseuille trouve son importance dans multiples applications industrielles et technologiques. Dans ce qui suit, on citera quelques exemples.

I.3.2.1. Séparation gaz- solide, gaz- liquide, liquide- liquide, solide – liquide

Les réalisations effectuées dans différentes branches industrielles (industrie de bois, du pétrole, minière, agroalimentaire, ...), pour séparer des matériaux de densités différentes initialement présentes dans un même courant, sont basées sur des dimensionnements empiriques et cela depuis plusieurs décennies.

Ces dernières années plusieurs recherches ont été envisagées pour ce type de séparateurs. Les cyclones existants sont dotés d'une entrée tangentielle du mélange à séparer ; sous l'effet de la force centrifuge les particules solides ou les gouttes de liquides

ayant une grande densité sont projetées avec force contre les parois et tombent sous l'effet de la gravité à la base du cyclone.

La technologie pour dépoussiérer de l'air très chaud a été inspirée par ce type de cyclone possédant une entrée principale munie d'ailettes de guidage et une seconde conduite tangentielle d'admission d'un courant d'air auxiliaire (AKLYAMA et al. , 1986 [8]).

Dans l'industrie pétrolière, des hydrocyclones sont aussi utilisés et leur but est la récupération de la totalité de l'huile présente dans les solutions aqueuses.

Le système de Taylor - Couette en fonctionnement vertical est également utilisé pour un procédé de séparation liquide-solide. Le principe de cette technique est d'utiliser les tourbillons de Taylor pour emprisonner la matière solide. Dans ces systèmes, le liquide parcourt l'espace annulaire de bas en haut ; la matière solide étant à peine plus dense que le liquide. Il faut que la structure de l'écoulement ait une vitesse moyenne d'avancement du liquide plus élevée que celle du solide. L'application serait la récolte de biomasse en vue de l'extraction d'un antigène intracellulaire.

1.3.2.3. Récupération des métaux

En génie électrochimique, il existe un type de réacteur électrochimique dit de Taylor-Couette-Poiseuille, JACK LEGRAND, 1983[9]. La présence des tourbillons de Taylor favorisent certaines réactions électrochimiques. Ces structures permettent aux éléments fluides d'être présents alternativement sur le cylindre intérieur tournant et sur le cylindre extérieur fixe.

Pour fabriquer des films et du papier photographiques, des millions de tonnes d'argent sont utilisées. Au développement, presque la totalité de cet argent est perdue dans les bains de fixation (WLSH & G. WILSON, 1986 [10]). Par conséquent, les techniques développées pour la récupération des métaux liés au génie électrochimique, ont connu un grand essor à nos jours, du fait de la limitation de la pollution liée aux rejets industriels d'une part et d'autre part par le gain financier compte tenu du prix de revient de l'argent pur. Il est à noter aussi que ces techniques sont utilisées pour la récupération de l'or en solution très diluée.

1.3.2.4. Echangeur de chaleur à surface raclée

Une autre application des écoulements tourbillonnaires de type T.C.P, concerne l'analyse de transfert thermique dans les échangeurs de chaleur à surface raclée (ESR), C. NOUAR 1986[11], E. DUMONT 1999[12]. Ces échangeurs sont très utilisés dans l'industrie

agroalimentaires (margarine, crème dessert, fromage frais, etc.). Ces produits ne peuvent subir un traitement thermique dans des échangeurs classiques, tels que les échangeurs tubulaires, où le transfert de chaleur se ferait essentiellement par conduction et, si on veut respecter un programme thermique donné, les produits doivent être porté à des températures élevées, ce qui conduit à une détérioration du produit et à un encrassement de l'échangeur. Le transfert thermique dans un tel échangeur est conditionné par la structure de l'écoulement; le coefficient de transfert thermique croit en présence des tourbillons de Taylor, et davantage en présence de la structure hélicoïdale.

1.3.2.5. Problème de cavitation

La présence des tourbillons dans certains cas a des effets désagréables. Le problème de cavitation dans certaines turbines hydrauliques est due essentiellement à l'existence de tourbillons entre le rotor et le stator provoquant des instabilités hydrodynamiques (A. BOUHADEF, 1982 [13]). Plus les tourbillons sont intenses, plus le champ de pression est perturbé, et éventuellement le déclenchement de la cavitation.

1.3.2.4. Applications diverses

D'autres applications sont utilisées dans des domaines spécifiques tels que :

- ❖ Injection du fuel dans les cylindres des engins à essence .
- ❖ Refroidissement des rotors de moteurs électriques par l'admission de l'air froid.
- ❖ L'amélioration du mélange dans le domaine de combustion.
- ❖ Purification des eaux usées industrielles par la méthode « Reverse Osmosis», SANGLO LEE & RICHARD LUEPTOW, 2001 [14].

1.3.3. Etablissement de l'écoulement tangentiel dans les écoulements T.C.P

En aval de la section d'entrée d'un espace annulaire à paroi intérieure tournante, contenant un fluide visqueux en écoulement laminaire, le profil de la vitesse tangentielle générée par la rotation du cylindre intérieur devient une fonction de la coordonnée axiale z , si un écoulement axial, établi ou non, lui est superposé. Près de l'entrée, seules les particules

fluides adjacentes au cylindre tournant sont entraînées et de ce fait acquièrent une vitesse tangentielle.

Au fur et à mesure qu'on se déplace vers l'aval, la couche limite tangentielle s'épaissit en raison de la diffusion de la quantité de mouvement et occupera tout le jeu à partir d'une certaine distance.

Selon que l'écoulement axial est établi ou non, on distingue deux types d'études. le premier cas est plus simple à traiter en raison de la simplification des équations de Navier-Stokes.

1.3.3.1. Profil axial établi

ASTILL, GANLEY & MARTIN , 1968 [15], ont obtenu la solution des équations de Navier Stokes, en utilisant une méthode de séparation des variables ; ils considèrent le cas où l'écoulement axial est uniforme (la vitesse axiale étant remplacée par sa valeur moyenne w_m). La vitesse tangentielle est donnée sous forme d'une série de fonctions de Bessel. Se basant sur l'hypothèse d'un écoulement laminaire permanent et axisymétrique ils ont calculé l'épaisseur de déplacement adimensionnel δ_θ^* telle que :

$$\delta_\theta^* = \frac{1}{(R_1 - R_2)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{v}{R_1 \Omega_1} dr \quad (I.3.4.1)$$

Suite à cette investigation théorique une étude expérimentale a été effectuée par les auteurs sur un dispositif constitué d'un espace annulaire, avec rotation du cylindre intérieur, pour deux rapports de rayons différents $N = 0.674$ et $N = 0.72$. Le fluide considéré étant l'air, les vitesses sont mesurées par une sonde à fil chaud. Les résultats théoriques et expérimentaux obtenus indiquent que l'analyse surestime l'épaisseur de déplacement à faible nombre de Reynolds axial, en revanche, l'accord semble satisfaisant pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds axial.

MARTIN & PAYNE, 1972 [16], ont calculé numériquement l'épaisseur de déplacement adimensionnel δ_θ^* dans les deux cas du profil axial établi et du profil axial uniforme. Ils ont résolu les équations de Navier Stokes par la méthode des différences finies, pour une large gamme du rapport des rayons et du nombre de Reynolds axial : $0.05 < N < 0.98$, $50 < Re' < 850$ et $0.0002 < l = z / (Re' d) < 1$. Les auteurs ont indiqué aussi que dans le cas où l'écoulement axial est établi, l'épaisseur de déplacement adimensionnel δ_θ^* croît avec le

rapport des rayons N et la longueur d'entrée de l'écoulement tangentiel L_{et} peut être estimée par la relation :

$$L_{et} / d = 0.15 \text{ Re}' \quad (\text{I.3.4.2})$$

pour $0.002 < N < 0.15$, les auteurs ont constaté que l'épaisseur de déplacement δ_0^* peut être estimée en fonction du paramètre $(l = z / \text{Re}' d)$, par l'expression empirique suivante :

$$\delta_0^* = c.l^m \quad (\text{I.3.4.3})$$

Ces auteurs ont indiqué également que l'analyse théorique développée ci-dessus surestime l'épaisseur de déplacement pour les petits nombres de Reynolds axial et la sous-estime pour la valeur de $\text{Re}' = 850$.

M.A.I. EL-SHAARAOUI & SARHAN , 1982 [17], ont étudié les effets de la rotation du cylindre intérieur sur la longueur de développement hydrodynamique. Les résultats sont obtenus par la méthode aux différences finies, pour un rapport de rayons $N = 0.9$ et pour le domaine $0.2 \leq \text{Re}^{\times 2} / \overline{\text{Ta}} \leq 10$. Ils ont constaté que la longueur d'entrée augmente avec la vitesse de rotation du cylindre intérieur et ils ont affirmé la dépendance de cette longueur du paramètre $\text{Re}^{\times 2} / \overline{\text{Ta}}$.

A. BOUHADF, 1982 [13], a calculé l'épaisseur de déplacement δ_0^* par intégration numérique et il a comparé ces résultats avec ceux obtenus par MARTIN & PAYNE[16] en traçant en échelle logarithmique la loi $\delta_0^*(l)$. Il a constaté un très bon accord pour $\text{Re}' = 100$, et il a confirmé que pour cette valeur de Re' , la longueur $\Gamma = 50$ qui correspond à $l = 0.46$ est insuffisante pour que le régime asymptotique soit atteint. Pour un nombre de Reynolds plus faible, $\text{Re}' = 10$, la longueur d'entrée est encore assez bien estimée par la valeur $l = 0.5$. BOUHADF en outre a confirmé le résultat signalé par MARTIN & PAYNE : pour une faible valeur du nombre de Taylor, l'écoulement axial est pratiquement indépendant de l'écoulement tangentiel.

I.3.3.2. Profil axial non établi

MARTIN & PAYNE, 1972 [16], ont traité aussi numériquement et en absence de tourbillons, le cas où l'écoulement axial n'est pas établi. Ils ont résolu les équations de

Navier- Stokes à l'aide d'une méthode de différence finies, ceci pour des valeurs de N variant de 0.05 à 0.98 et des nombres de Reynolds axial compris entre 50 et 850. Ils ont examiné le cas du développement simultané des écoulements axial et tangentiel, et ils ont montré que les situations d'un profil axial établi ou en développement, aboutissent à des valeurs de δ_θ^* très voisines, mais nettement différentes de celles où l'écoulement axial est uniforme. Ils ont trouvé que l'épaisseur de déplacement adimensionnelle dépend fortement du paramètre axial adimensionnel $z / Re'd$, et surtout pour les faibles valeurs de ce dernier. Leur conclusion est que la rotation n'influe pratiquement pas sur l'écoulement axial et qu'une variation du profil de ce dernier affecte peu le développement du profil de la vitesse tangentielle.

Ce problème a été repris par CHUNG & ASTILL, 1976 [18]. Ils ont utilisé les intégrales des quantités de mouvement axial et tangentiel, et ils ont abouti à un système d'équations différentielles résolvable par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Les auteurs ont indiqué l'existence d'un couplage entre l'écoulement axial et l'écoulement tangentiel en développement simultané. Ils ont étudié l'influence de la rotation sur l'établissement du profil axial. Pour un rapport de rayons $N = 0.8$, ils ont trouvé que la longueur d'entrée axiale adimensionnelle vaut 0.0105 et 0.0104 pour des valeurs respectives de 1 et 5 du rapport des vitesses $\gamma = R_1\Omega_1 / w_m$. Ils ont alors suggéré que l'évolution de l'épaisseur de déplacement δ_θ^* est fonction des paramètres, $z / Re'd$, N et γ .

SIMMERS & CONEY, 1979 [19] ont déterminé expérimentalement la longueur d'entrée nécessaire à l'établissement de l'écoulement dans le cas du régime tourbillonnaire, pour un rapport de rayons de 0.8 et un nombre de Reynolds de 1200. Ils ont montré que cette longueur décroît avec le paramètre $Re^{*2} / \tilde{T}a$ et qu'elle est maximum quand le nombre de Taylor avoisine sa valeur critique. Cette diminution est due à l'accroissement de l'énergie des tourbillons lorsque $\tilde{T}a$ croît. Cela favorise le mélangeage et la diffusion de la quantité de mouvement tangentielle. Or selon EL-SHAARAWI & CONEY (1975 [20]), L_{et} , augmente lorsque $Re^{*2} / \tilde{T}a$ diminue en régime laminaire ; les auteurs ont conclu alors que la valeur maximale de la longueur d'établissement est atteinte pour la valeur critique du nombre de Taylor.

I.3.4. Stabilité de l'écoulement de Taylor Couette Poiseuille

La présence d'un écoulement de Poiseuille, superposé à celui de Couette, provoque la réunion de deux mécanismes différents : l'instabilité du type centrifuge liée à la rotation du cylindre intérieur et l'instabilité du type Tollmien- Schlichting due à la composante axiale. De ce fait, l'étude de stabilité se trouve compliquée. Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse seulement au premier type d'instabilité ($Re_a \ll Re_a$ critique). La plupart des études théoriques ou expérimentales sont effectuées dans le but de déterminer :

- ▶ la localisation de la frontière délimitant chaque régime.
- ▶ le lieu de naissance des tourbillons.
- ▶ l'allure et la taille des structures tourbillonnaires développées.

I.3.4.1. Résultats théoriques

La plupart des résultats théoriques sont basés sur l'hypothèse d'un espace annulaire étroit et infiniment long et les profils de vitesse axiale et tangentielle sont remplacés par des profils plus simples.

CHANDRASEKHAR 1960 [21] a considéré le cas d'un espace annulaire étroit, chacune des vitesses tangentielle et axiale étant remplacée par sa valeur moyenne. Il a déterminé, en modifiant la méthode de Galerkin, les variations du nombre de Taylor, de la fréquence et de la longueur d'onde critique en fonction du nombre de Reynolds axial dans un domaine variant de 0 à 100. La courbe $\tilde{T}a_c(Re')$ indique que le nombre de Taylor critique est une fonction croissante du nombre de Reynolds, ce qui explique l'effet stabilisateur de l'écoulement axial. L'auteur en outre a montré que le critère de Rayleigh est vérifié pour ce type d'écoulement dans le cas d'un fluide parfait.

DIPRIMA 1960 [22] a résolu le problème précédent, en considérant un profil de vitesse tangentielle uniforme associé à un profil de vitesse axiale uniforme ou parabolique. Dans les deux cas, l'auteur a montré que le nombre de Taylor critique croît avec le nombre de Reynolds axial, seulement à partir de Re' voisin de 60 les résultats relatifs aux deux cas divergent :

- o le nombre de Taylor critique croît plus vite dans le deuxième cas plutôt que dans le premier.

- o Le nombre d'onde critique est pratiquement constant avec un profil parabolique alors qu'il augmente avec le nombre de Reynolds axial pour un profil uniforme.
- o pour $Re' > 20$, les valeurs de longueur d'onde sont plus fortes dans le cas du profil moyen que dans le cas d'un profil axial parabolique.
- o La vitesse de glissement des tourbillons rapportée à la vitesse débitante vaut 0.8 pour un profil uniforme et 1.2 pour un profil parabolique, ce qui fait conclure à l'auteur que le remplacement de $w(r)$ par w_m n'est pas justifié.

DATTA 1965 [23] a établi, pour des nombres de Reynolds axial très faibles au voisinage de zéro, et pour un profil axial parabolique, l'expression suivante :

$$\tilde{T}a_c = 1708 + Re'^2 \quad (I.3.4.4)$$

qui concorde avec les résultats de DIPRIMA[22].

L'ensemble des études qui précèdent est basé sur l'hypothèse d'un jeu faible, caractérisé par l'inégalité : $R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)$.

HASOON & MARTIN 1977 [24] ont obtenu, pour une valeur quelconque du rapport de rayons N , une solution numérique des équations de perturbation, et une solution par la méthode de Galerkin du système linéaire. Cette solution est déduite en remplaçant la vitesse axiale $w(r)$ par sa valeur moyenne. Pour $N=0.9$, les nombres de Taylor critique $\tilde{T}a_c$ et les nombres d'ondes calculés par les deux méthodes sont proches. Ces études sont basées sur des perturbations axisymétriques.

CHUNG & ASTILL 1977 [25] ont établi pour une distance annulaire quelconque, des résultats à partir d'une perturbation non axisymétrique. Le système d'équations différentielles qu'ils obtiennent est résolu par une méthode numérique simple dans sa formulation, mais très complexe lors de sa résolution. Les calculs ont été effectués pour différentes valeurs du rapport de rayons N . Les auteurs ont fourni des valeurs du nombre de Taylor critique, des nombres d'ondes tangentiel et axial et du rapport entre la vitesse de glissement des tourbillons et la vitesse moyenne axiale. En outre, ils ont trouvé que les tourbillons de Taylor ne sont plus toriques et perdent leur symétrie pour des nombres de

Reynolds suffisamment grands ($Re' \geq 20$), . Ils ont remarqué également que plus l'espace annulaire est large plus il est difficile d'obtenir la structure spirale. A titre d'exemples :

- $N = 0.95$; on a apparition de la structure spirale à $Re' = 20$
- $N = 0.25$; apparition de la structure spirale est à $Re' = 150$.

Les auteurs ont montré que les tourbillons s'inclinent dans la direction opposée à l'écoulement moyen.

TAKEUCHI & JANKOWSKI 1981 [26], ont repris le problème de la stabilité d'un écoulement spiral pour un large espace annulaire $N = 0.5$, et pour un nombre de Reynolds axial Re' variant de 0 à 100. Le problème a été résolu par voie numérique en introduisant une perturbation non axisymétrique. Ces auteurs ont trouvé que le Taylor critique Ta_c^* ne croit pas de façon monotone avec le nombre de Reynolds axial et, de ce fait, jugent l'analyse de CHUNG & ASTILL[25] incomplète.

S. L.RANI, D.L.COTRELL & A.J.PEARSLSTEIN, 2001 [27], au moyen d'une méthode numérique basée sur " Chebyshev Collocation" pour les équations de perturbation, ont étalé le domaine de l'étude précédente. Ils ont considéré trois cas différents pour le système Taylor-Couette-Poiseuille ; contre-rotation, co-rotation, cylindre extérieur fixe, correspondant à trois valeurs de $\eta = \Omega_1/\Omega_2$: -0.5, 0.2, 0 respectivement. Cela pour trois espace annulaire annulaires : $N = 0.5, 0.77, 0.95$.

Dans le cas du cylindre extérieur fixe ($\eta = 0$), les auteurs ont confirmé le résultat constaté par TAKEUCHI & JANKOWSKI [26] concernant la variation non- monotone de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial. Le tableau ci-dessous résume les résultats trouvés par ces auteurs.

N	Re_a	Ta_c^* critique	Re' critique ($Ta^* = 0$)
0.5	< 10	68.19	10359
	400- 10000	88.89	
0.77	< 10	26.59	8883.3
	200 - 8000	59	
0.95	< 10	9	7739.5
	1000- 7000	59	

Pour les grandes valeurs de Re_a supérieurs à la valeur critique (Re'_c), ils ont remarqué une chute brute de nombre de Taylor critique, cela correspond à la transition de l'instabilité centrifuge à l'instabilité de type Tollmien Schlichting.

A.MESGEGUER & F.MARQUES 2002 [28], considérant la stabilité linéaire, ont étudié la stabilité de l'écoulement spiral de Poiseuille dans le cas où les deux cylindres sont en rotation ($\eta \geq 0$) et pour un espace annulaire large ($N=0.5$). Les équations de Navier-Stokes sont transformées à un système aux valeurs propres. Pour la résolution numérique, les auteurs ont utilisé la méthode spectrale basée sur le schéma solénoïdal de Petrov– Galerkin. Dans le cas du cylindre extérieur fixe ($\eta=0$), les auteurs ont comparé leurs résultats avec ceux obtenus par TAKEUCHI & JANKOWSKI [26]. Cette comparaison a confirmé les constatations de ces derniers auteurs. L'écoulement axial stabilise l'écoulement tourbillonnaire de Taylor-Couette et pour des Reynolds élevés, l'effet stabilisateur diminue. L'écoulement est caractérisé par des tourbillons axisymétriques (le nombre d'onde azimutal est nul) en mouvement de translation suivant l'écoulement axial, pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds axial. L'augmentation de ce dernier paramètre fait apparaître des tourbillons sous formes spirales.

Récemment, JONG-YEONG HWANG & KYUNG-SOO YANG, 2004 [29] ont étudié numériquement, l'écoulement entre cylindres concentriques avec cylindre intérieur tournant et un débit axial imposé. Leurs objectifs étaient de vérifier les résultats expérimentaux obtenus par WERELEY & LUEPTTOW (1999[35]) en considérant les mêmes paramètres géométriques ($N= 0.83$, $\Gamma = 27 - 32$). Les équations gouvernantes sont traitées par la méthode de volume fini en géométrie tridimensionnelle ; la discrétisation temporelle est basée sur un schéma hybride et la discrétisation spatiale est faite par le schéma implicite de type Crank-Nicholson. Ils ont montré l'effet stabilisateur de l'écoulement axial sur l'écoulement tourbillonnaire de Taylor- Couette. Leurs résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par WERELEY & LUEPTTOW. Ils ont conclu que la méthode numérique utilisée, pour ce type de problème, est fiable et économique.

1.3.4.2.Observations expérimentales

Certains des auteurs précédemment cités ont procédé à des expériences dans le but de compléter leurs études théoriques ; d'autres ont fait des études purement expérimentales. Ils

en mis en évidence l'influence du nombre de Reynolds axial sur la stabilité de l'écoulement. Les résultats montrent que lorsque ce dernier est faible, il stabilise l'écoulement alors que s'il augmente, l'effet stabilisateur ne peut persister au delà d'une certaine valeur critique de ce nombre.

1.3.4.2.1. Régimes de l'écoulement T.C.P

Suivant les valeurs respectives de Re_a et Ta , il existe quatre types d'écoulement, laminaire, turbulent, laminaire tourbillonnaire et turbulent avec tourbillons.

CORNISH 1933 [30] a, le premier, tenté de délimiter les frontières entre les différents régimes. Il s'est basé, pour cela, sur le changement de pente de la courbe de variation de la chute de pression le long de l'entrefer en fonction de la vitesse de rotation.

KEYE & ELGAR 1958 [2] ont été les premiers à identifier avec précision ces frontières pour un espace annulaire ($N=0.672$, $\Gamma = 93$). En considérant une large gamme de chacun des deux nombres Re^* et Ta^+ , ils ont montré, en utilisant la technique du fil chaud, l'existence de quatre modes d'écoulement. Pour une large gamme de couple (Re^* , Ta^+), les auteurs ont trouvé que l'écoulement est turbulent avec l'existence de tourbillons de Taylor pour des valeurs du nombre de Taylor élevées. Pour des Reynolds axial élevés, l'écoulement est turbulent pur (sans tourbillons). Ces résultats montrent que la transition du régime laminaire au régime tourbillonnaire est stabilisée par l'écoulement axial. Par contre la transition du régime laminaire au régime turbulent est déstabilisée par l'écoulement circulaire de Couette.

SNYDER 1962 [31] a fait une étude expérimentale très complète qui lui a permis de vérifier les prévisions théoriques de CHANDRASEKHAR[18] et DIPRIMA[19]. Il s'est particulièrement intéressé aux faibles nombre de Reynolds axial.

ASTILL 1964 [32] a mené d'une étude expérimentale dans le but d'étudier l'influence d'un champ de vitesse en cours d'établissement, sur l'apparition des tourbillons de Taylor et de la turbulence. Il a utilisé la technique de visualisations avec des filets de fumée et des mesures anémométriques, dans un écoulement d'air à travers un espace annulaire de rapport de rayons $N = 0.727$. Pour caractériser la transition du régime sans tourbillons vers le régime

tourbillonnaire, cette auteur préconise l'emploi du nombre de Taylor, basé sur l'épaisseur de déplacement adimensionnelle tangentielle δ_θ^* , qui a pour expression :

$$Ta_\delta = \frac{\Omega_1 R_1 \delta_\theta^*}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_\theta^*}{R_1}}$$

D'après ces mesure, les instabilités apparaissent dès que Ta_δ est supérieur à 24. Les expériences font apparaître que le nombre de Taylor critique est une fonction de la coordonnée axiale et du nombre de Reynolds. Le nombre de Taylor modifié Ta^+ est défini par :

$$Ta^+ = \frac{\Omega_1^2 r_m d^3}{\nu^2} \left(\frac{1}{F_g} \right)$$

où r_m est la moyenne arithmétique de R_1 et R_2 et F_g un facteur géométrique dépendant de r_m , R_1 et de l'épaisseur de l'espace annulaire d . la coordonnée axiale intervient par le biais du nombre de Reynolds local Re'_z porté en abscisse et défini par :

$$Re'_z = \frac{w_m z}{\nu}$$

Les résultats obtenus montrent que pour un nombre de Reynolds donné, le nombre de Taylor critique est une fonction décroissante de la distance à la section d'entrée, et que pour une valeur fixée de z , ce nombre de Taylor augmente avec Re'_z .

HASOON & MARTIN 1976 [24] ont vérifié ces résultats théoriques pour le cas $N = 0.9$; pour différentes valeurs de Re^* ils ont présenté la variation du nombre de Taylor critique en fonction de la coordonnée axiale $l = \frac{z}{Re^* d}$.

SAFINIA 1978 [33] , en s'inspirant des travaux de CORNISH[30] , a étudié la variation du gradient axial de pression , en fonction du nombre de Taylor pour différentes valeurs de Re_a . L'auteur constate que, pour un débit axial donné, le gradient axial de pression reste d'abord constant puis se met à augmenter. Pour les petites valeurs de Re_a , ce changement d'allure est attribué à l'apparition du régime tourbillonnaire. Cependant ses résultats présentent des écarts importants vis à vis de ceux d'autres auteurs. Ceci est du ,

d'une part à la géométrie du système qui fait que les phénomènes d'entrée sont prépondérants et d'autre part à la technique utilisée qui n'est pas très performante.

A. BOUHADEF 1982 [13] a étudié expérimentalement l'effet stabilisateur de l'écoulement axial. Il a montré que pour un nombre de Reynolds Axial donné, le nombre de Taylor critique diminue au fur et à mesure que le point d'observation s'éloigne de l'entrée jusqu'à atteindre une valeur limite Ta_{cl} .

C. NOUAR 1986 [11] a représenté dans le plan (Ta_{gc} , Re_g) les frontières délimitant les différentes structures de l'écoulement, observées à 50 mm en aval de la section d'entrée pour un fluide non-newtonien (solution du CMC à 3 %). Il a montré que la valeur de Ta_{gc} augmente rapidement avec l'accroissement de Re_g . Comparativement à la corrélation proposée par DATTA [23] dans le cas de faibles espaces annulaires, NOUAR a trouvé une évolution plus progressive de Ta_{gc} avec Re_g pour la géométrie considérée ($N = 0.61$, $\Gamma = 12.8$). L'auteur a indiqué également que la stabilité de l'écoulement tourbillonnaire n'est pas affectée par les propriétés rhéologiques du fluide, pour des Reynolds élevés ($Re_g > 20$).

Ces dernières années et par des méthodes variées, plusieurs sous-régimes ont été observés dans l'écoulement spiral de Poiseuille. L'apparition de ces régimes est liée aux paramètres dynamiques qui sont le nombre de Taylor et le nombre de Reynolds axial, et elle est également liée aux dimensions de l'espace annulaire.

R.M. LUEPTOW, A. DOCTER & K.MIN 1992[34], ont observé douze régimes (Fig. I.3.1) dans un espace annulaire étroit ($N=0.85$, $\Gamma = 41$), pour les domaines $0 \leq Re^+ \leq 40$, $100 \leq Ta \leq 3000$. A débit axial nul, les tourbillons de Taylor sont toroïdaux et, si un débit axial est imposé, les vortex de Taylor laminaire (L.V) gardent leur forme et se déplacent en aval avec l'écoulement axial tant que ce débit est faible ($Re^+ \leq 9$). Pour des Reynolds élevés, les tourbillons hélicoïdaux (H.V) apparaissent pour remplacer les structures toroïdales. Ces auteurs ont remarqué également que la structure hélicoïdale est modifiée en augmentant le Reynolds axial (L.H.V, S.H.V, W.H.V) et cela pour un nombre de Taylor relativement faible.

S.T. WERELEY & R. M. LUEPTOW 1999 [35] ont examiné les différents régimes cités précédemment, par la technique P.I.V (Particle Image Velocimetry) dans les gammes de

$Re^+ = 1.6 \cdot 10^{23}$ et $Ta = 100 - 215$. En analysant les champs de vitesse dans les régimes L.V et H.V, les auteurs ont remarqué l'existence d'un transport de fluide entre les vortex, ce transport est plus consistant dans le cas des vortex ondulés (W.V).

ERIC DUMONT 1999 [12] a procédé à des mesures des gradients pariétaux de vitesse sur la paroi du stator par la méthode électrochimique, pour détecter la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, dans l'espace annulaire d'un échangeur de chaleur dépourvu de lames ($N = 0.615$, $\Gamma = 30.4$). L'auteur montre que le régime laminaire pur est caractérisé par une évolution linéaire du gradient pariétal de vitesse avec la vitesse de rotation du cylindre intérieur. L'apparition du régime laminaire tourbillonnaire se traduit par l'accroissement des conditions de cisaillement dans l'espace annulaire.

C.G. RANGUIN & J.G. GEORGIADIS 2001[36], de leur côté, ont remarqué la coexistence de structures de différentes formes pour un même couple (Re^* , $\hat{T}a$), grâce à la méthode « imagerie par résonance magnétique » (MRI : Magnetic Resonance Imaging), pour un espace annulaire caractérisé par $N = 0.5$ et $\Gamma = 16$.

1.3.4.2.2. Lieu d'apparition des tourbillons

ASTILL 1964 [32] a remarqué que les tourbillons de Taylor naissent près de la paroi du cylindre intérieur tournant et croissent radialement tout en étant transportés par l'écoulement axial vers l'aval. Cet auteur précise que pour un nombre de Reynolds axial fixé, le point de naissance du tourbillon se déplace vers l'amont lorsque le nombre de Taylor croit; et que pour un nombre de Taylor fixé, le point de naissance du tourbillon se déplace vers l'aval lorsque le nombre de Reynolds axial croit.

GRAVAS & MARTIN 1978 [37] en utilisant l'anémométrie à fil chaud dans un dispositif où $N = 0.9$ et $L = 0.7$ m, ont indiqué que les tourbillons prennent naissance au niveau du cylindre intérieur tournant et que le nombre de Taylor critique varie linéairement avec la position radiale.

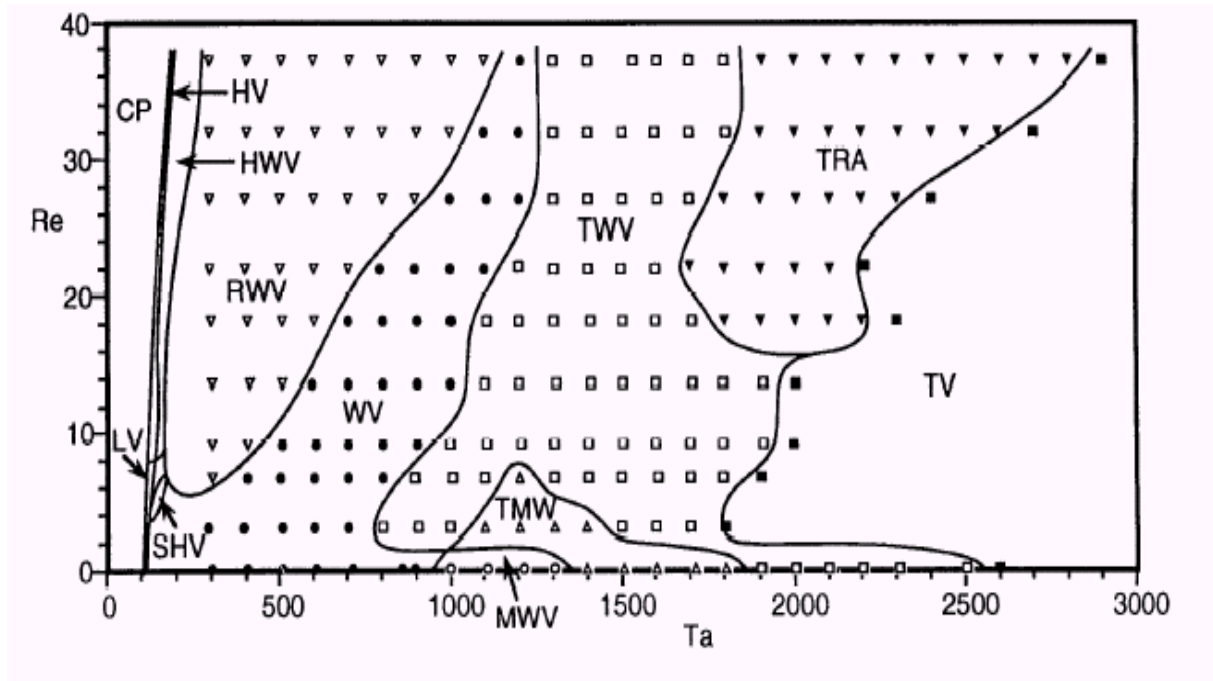


Fig.I.3.1 : Régimes observés dans l'écoulement T.C.P par LUEPTOW & aL. [34]

CP	Couette-Poiseuille flow
HV	Laminar helical vortices
HWV	Laminar helical wavy vortices
LV	Laminar vortices
MWV	Laminar modulated wavy vortices
RWV	Random laminar wavy vortices
SHV	Stationary helical vortices
TMW	Turbulent modulated wavy vortices
TRA	Transitional flow
TV	Turbulent vortices
TWV	Turbulent wavy vortices
WV	Laminar wavy vortices

A. BOUHADEF 1982 [13] en éclairant l'espace annulaire par plan méridien obtenu à l'aide d'un faisceau laser et d'une lentille cylindrique, montre qu'effectivement les structures tourbillonnaires naissent au voisinage du cylindre intérieur. Pour une valeur suffisamment grande du débit axial, l'auteur a remarqué que le point d'apparition des tourbillons est repoussé assez loin de la section d'entrée du jeu pour que l'écoulement à l'intérieur ne présente plus de tourbillons. L'auteur en outre, a analysé l'effet du débit axial sur la longueur nécessaire à l'apparition des tourbillons, et il a déterminé le nombre de Reynolds axial critique Re'_c correspondant au débit axial qui, au point d'abscisse z , détruit l'effet déstabilisateur de la rotation. Le Re'_c est une fonction croissante de z et augmente quand Ta croît pour le dispositif qu'il a utilisé $N=0.945$ et pour $5 < Re' < 100$.

C. NOUAR 1986 [11] a précisé que les structures tourbillonnaires commencent par apparaître à l'aval du dispositif pour, ensuite, remplir progressivement l'espace annulaire vers l'amont lors de l'augmentation de la vitesse de rotation.

Par des observations visuelles de l'écoulement T.C.P, E. DUMONT 1999 [12] a montré que les perturbations hydrodynamiques prennent naissance aux extrémités du dispositif. Ces perturbations peuvent s'étendre à l'ensemble de l'espace annulaire pour une valeur critique du nombre de Taylor (Ta_g).

1.3.4.2.3. Forme & taille des structures tourbillonnaires

A partir d'un nombre de Reynolds axial avoisinant la valeur 20, SCHWARTZ & al 1964 [38] ont montré par l'analyse de photos que les structures tourbillonnaires deviennent spirales et font un angle de l'ordre de 2° avec l'horizontale. Ce phénomène a été aussi observé par SNYDER [31] et TAKEUCHI & JANKOWSKI [26] qui ont observé un angle d'inclinaison de 37° pour $Re' = 92$ dans un espace annulaire à un rapport de rayons $N = 0.5$.

D'autres auteurs ont remarqué l'inclinaison des structures tourbillonnaires sous l'effet du débit axial. LUEPTOW & aL. [35] ont obtenu des structures hélicoïdales d'un angle d'hélice égal à 2.7° par rapport à la direction de l'écoulement axial, pour des nombres de Reynolds axial supérieurs à 9. Dans des conditions géométriques voisines de cette dernière étude, WERELEY & LUEPTOW [36] ont indiqué que dans le cas du régime H.V, les

tourbillons perdent leur symétrie et font un angle d'inclinaison de 5° par rapport à l'écoulement axial.

L.G. RANGUIN, M.SHANNON & J.G.GEORGIADIS 2001[39], en utilisant la méthode de visualisation et en injectant un indicateur coloré, ont observé la forme toroïdale des tourbillons, et que la circulation axiale ainsi que les effets de bords probables qui font que ces structures soient inclinées. Pour la géométrie utilisée ($N=0.5$, $\Gamma=16$), l'auteur a remarqué que l'angle d'inclinaison est constant (5.9°), et aucun mode de tourbillons oscillants n' a été mis en évidence pour le couple $\hat{R}e = 6.19$ et $Ta'' = 285$.

J.Y. HWANG & aL [29] ont étudié en détail la structure hélicoïdale, ils trouvent que cette dernière fait un angle négative par rapport à l'axe de rotation.

Z.H.GU & FAHIDY 1985 [40] ont étudié l'évolution des structures tourbillonnaires sous l'effet d'un débit axial par visualisation en utilisant des indicateurs colorés. Les auteurs ont constaté que la présence d'un débit axial détruit l'indépendance entre les structures tourbillonnaires, c'est à dire qu'il va créer un mélangeage entre deux structures adjacentes. Le mélangeage s'accroît lorsque le débit axial croît, et a pour conséquence, selon les auteurs, un accroissement du nombre d'onde, confirmant ainsi les résultats de SNYDER[31].

Ce phénomène d'interaction entre deux structures adjacentes pourrait à notre sens expliquer en partie les résultats obtenus par LEGRAND [9]. En effet, ce dernier avait entrepris une étude fine de la structure tourbillonnaire par la méthode électrochimique, en disposant des micro électrodes sur la surface interne du cylindre extérieur (dans leurs cas $N=0.775$, $\Gamma=63.2$). Il a montré que pour $140 < Re' < 280$, Δ/d (taille d'une paire de tourbillons / taille de l'entrefer) est de l'ordre de 4 aux faibles valeurs de $\tilde{T}a$ ($\tilde{T}a < \tilde{T}a_c$); il diminue lorsque $\tilde{T}a$ augmente pour atteindre des valeurs comprises entre 2.5 et 3. De même, cet auteur a indiqué que pour Re_a faible ($Re' = 23$) Δ/d augmente avec un nombre de Taylor croissant, ce qui correspondrait à des structures tourbillonnaires droites. L'auteur a remarqué également que l'écoulement est tourbillonnaire pur (mono mode) pour $Re' < 50$, pour des Reynolds plus élevés, l'écoulement est caractérisé par l'existence des tourbillons de différentes tailles " écoulement multi-tourbillonnaire ". Par contre, pour des valeurs de Re'

comprises entre 50 et 300, le régime d'écoulement est dépendant de la valeur de $\bar{T}a$; c'est – à- dire qu' on peut obtenir l'un ou l'autre régime suivant la valeur de Taylor.

C. NOUAR 1986 [11] rapporte qu'une fois l'espace annulaire est rempli par les cellules de Taylor, l'augmentation de la vitesse de rotation peut conduire à incliner les tourbillons par rapport à l'horizontale. Ils acquièrent une forme spirale. Toutefois, cette structure n'est observée que pour les valeurs de Re_g supérieures à 1.6 . Cet auteur mentionne également qu'à faible débit, Re_g faible, les structures tourbillonnaires gardent leur identité sans interaction entre deux structures adjacentes. L'augmentation du débit conduit à détruire l'indépendance existant entre les structures tourbillonnaires, c'est à dire la création d'un mélange entre deux structures adjacentes.

E.DUMONT [12], par l'analyse de l'évolution de la taille des tourbillons pour des faibles valeurs de Reynolds ($Re_g < 1$), constate que les tourbillons se contractent puis s'allongent sous l'effet de l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre intérieur.

La plupart des auteurs cités dans cette partie, se sont intéressés au mouvement de structures tourbillonnaires dans l'espace annulaire sous l'effet de l'écoulement axial. Pour cela, ils ont étudié l'évolution du rapport de la vitesse des centre des vortex par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement axial ($V_d = w_v / w_m$) avec le nombre de Reynolds axial.

R.C.GIORDANO & aL.1998 [41], ont présenté une étude complète sur l'écoulement tourbillonnaire de Taylor-Couette-Poiseuille, pour une configuration géométrique caractérisée par $N = 0.677$ et $\Gamma = 18.3$ et dans le cas de faible débit axial ($Re' = 0.172 - 1.067$) et des vitesses de rotation correspondantes à $Ta = 130-615$. Les auteurs ont trouvé que le rapport V_d est inférieur à 1 et l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre intérieur immobilise les tourbillons; leur vitesse diminue et tend à s'annuler. Par contre RANGUIN & al [39] ont obtenu un rapport des vitesses V_d supérieur à l'unité pour des valeurs de Reynolds axial comprises entre 0 et 10. En étudiant la variation du rapport V_d en fonction de Ta/Re' ($0 < Ta/Re' < 90$), WERELEY & LUEPTOW[35] ont indiqué que la vitesse de translation des vortex est dans un rapport avoisinant 1.17 de la vitesse moyenne de l'écoulement axial, et cela pour des faibles valeur du débit ($1.6 \leq Re' \leq 20$) correspondant au régime de vortex toroïdaux. Ces derniers ont constaté également que le rapport $V_d \approx 0$ dans le cas de vortex

ondulés (WF) ($43 \leq Ta/Re' \leq 53$). Même résultat a été obtenu par HWANG & aL. [29] qui ont trouvé $V_d \approx 1.2$ dans la gamme $5 < Ta/Re' < 30$.

1.3.5. Conclusion

Dans ce tour d'horizon de la littérature, nous avons essayé de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition des instabilités au sein de l'écoulement Taylor Couette Poiseuille. Ces conditions dépendent de la vitesse de rotation du cylindre intérieur, du débit axial imposé, ainsi que du rapport des rayons des deux cylindres.

L'intérêt accordé à ce type d'écoulement dans l'industrie explique la richesse des études expérimentales et la diversité des approches théoriques et numériques.

Les études théoriques a vu les méthodes numériques prendre le pas sur les méthodes analytiques classiques. En fait, l'option pour une approche numérique implique, pour la méthode utilisée, qu'elle soit instationnaire, puisque les perturbations sont entraînées par l'écoulement.

Les travaux théoriques cités précédemment dans l'étude bibliographique ne tiennent pas compte, d'une manière explicite, de l'effet des forces de gravité. Dans le présent travail, on s'est intéressé à l'étude de l'influence de telles forces sur l'apparition de la première instabilité, c'est-à-dire sur la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire.



CHAPITRE DEUX

POSITION DU PROBLEME

POSITION DU PROBLEME

II.1. Présentation du problème physique

On s'intéresse à l'étude d'un écoulement instationnaire ascendant d'un fluide réel, dans un espace annulaire, séparant deux cylindres coaxiaux ; le cylindre intérieur de rayon R_1 tourne avec une vitesse uniforme, $V_0 = R_1 \Omega_1$, et le cylindre extérieur de rayon R_2 est maintenu fixe. Le fluide de propriétés physiques constantes se trouve initialement au repos dans l'espace annulaire. A l'instant initial, un fluide de même nature est injecté suivant l'axe du cylindre au cours du temps avec une vitesse d'injection W_e , fig. (II-1). L'écoulement est supposé incompressible et isotherme.

Ce problème d'écoulement est caractérisé par deux paramètres géométriques : le rapport des rayons $N = R_1/R_2$ et le rapport d'aspect $\Gamma = L/d$ ($d = R_2 - R_1$ et $L =$ longueur de l'espace annulaire), et deux paramètres hydrodynamiques qui sont le nombre de Taylor (Ta) et le nombre de Reynolds (Re_a).

Comme on a vu dans le chapitre précédent (§ I.3.4), ces deux paramètres adimensionnels ont plusieurs formes, dans cette étude, nous avons opté pour les expressions les plus simples qui sont les suivantes :

$$Re_a = \frac{dW_e}{\nu}$$

$$Ta = \frac{(\Omega R_1) \cdot d}{\nu}$$

Le nombre de Taylor caractérise le rapport existant entre les forces d'inertie dues à l'écoulement rotationnel du fluide (provoqué par la rotation du cylindre intérieur) et celles de viscosité. Le nombre de Reynolds axial caractérise, quant à lui, le rapport existant entre les forces d'inertie dues à l'écoulement axial et celles de viscosité du fluide.

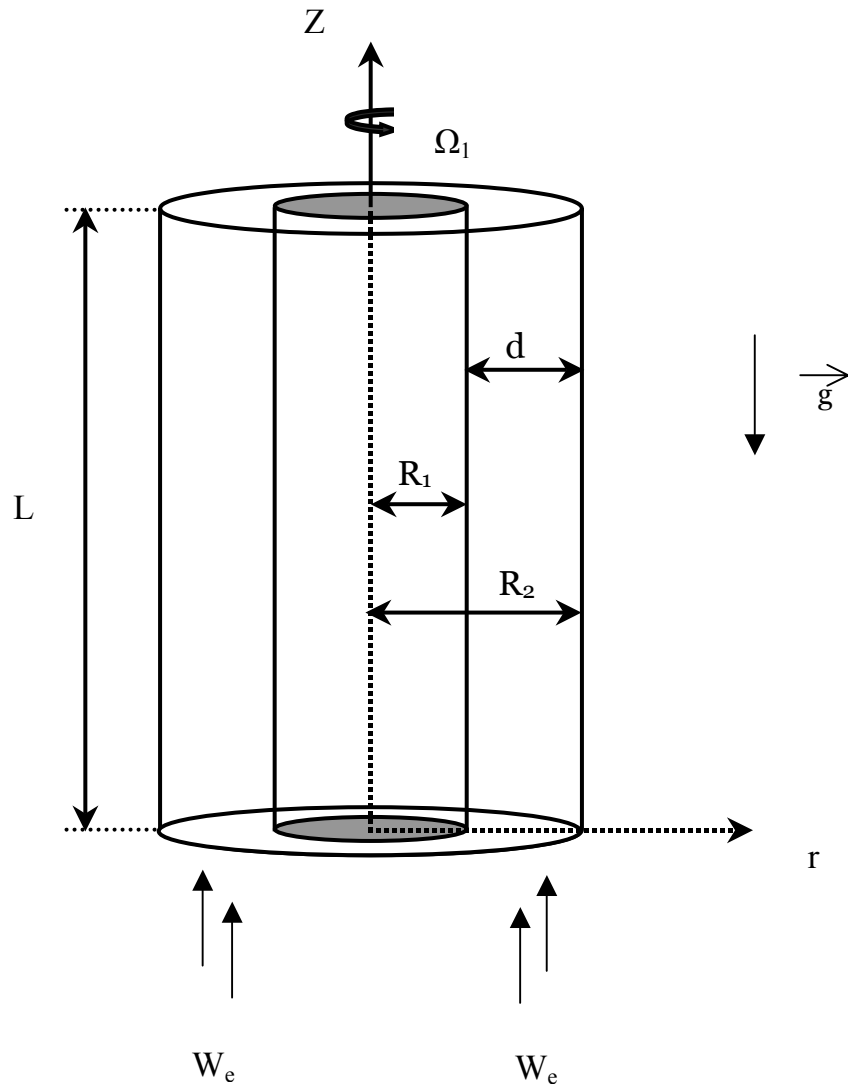


Fig II.1 : Aperçu global du domaine d'étude

II.2. Formulation mathématique du problème

Dans cette section, nous présentons la formulation mathématique de l'hydrodynamique de l'écoulement de Taylor Couette Poiseuille.

Pour décrire cet écoulement, il suffit de déterminer les variables d'Euler qui sont : le vecteur vitesse \vec{V} et la pression P .

Pour cela, nous résolvons les équations fondamentales de la dynamique des fluides auxquelles nous ajoutons les conditions aux limites et les conditions initiales.

II.2.1. Les équations de l'hydrodynamique

Les équations de Navier- Stokes expriment les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un milieu continu. Elles s'écrivent de façon générale pour une particule fluide :

$$\frac{D(\rho \vec{V})}{Dt} = \nabla \cdot \tau + \vec{f} \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

où $\vec{V}(u, v, w)$ est le champ de vitesse de l'écoulement, ρ la masse volumique du fluide,

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ est la dérivée particulaire, \vec{f} représente les forces extérieures ($\vec{f} = \rho \vec{g}$)

et τ est le tenseur des contraintes, qui modélise les interactions entre les particules fluides :

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left[(\partial_j V_i + \partial_i V_j) + \frac{2}{3} \nabla \cdot V \delta_{ij} \right] \quad (\text{II.3})$$

Où P est la pression, μ la viscosité dynamique du fluide, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Pour un écoulement incompressible pour lequel la densité est constante, et pour une viscosité qui ne dépend que de la température, ces équations deviennent :

$$\partial_t \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f} \quad (\text{II.4})$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.5})$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique du fluide.

II.2.2. Equations simplifiées :

Dans le cas d'un écoulement cylindrique visqueux axisymétrique ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$) , les équations du mouvement précédentes se réduisent à :

▣ Selon la coordonnée radiale

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.6})$$

▣ Selon la coordonnée azimutale

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

▣ Selon la coordonnée axiale

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \nabla^2 w \quad (\text{II.8})$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.9})$$

A chaque instant et en tout point du domaine étudié, nous convenons de noter la pression du fluide :

$P(r,z,t) = P_a + \Pi(r,z,t)$ où P_a est la pression atmosphérique et $\Pi(r,z,t)$, la perturbation de pression.

Comme la pression atmosphérique P_a du milieu extérieur, est supposée constante, la dérivation sur $P(r,z,t)$ est équivalente à celle sur $\Pi(r,z,t)$.

II.2.3. Formulation adimensionnelle

Afin de rendre les équations précédentes universelles, nous introduisons des grandeurs de référence qui conduisent à une présentation adimensionnelle des équations du problème. Nous adoptons les grandeurs caractéristiques suivantes :

- ❑ Longueur : R_2 rayon du cylindre extérieur
- ❑ Vitesse : W_e vitesse d'entrée de fluide dans l'espace annulaire.

Toutes les quantités adimensionnelles, que nous caractérisons par un indice " + ", sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} u^+ = u / W_e; \quad v^+ = v / W_e; \quad r^+ = r / R_2; \quad z^+ = z / R_2; \\ \Pi^+ = \Pi / \rho W_e^2; \quad t^+ = t W_e / R_2 \end{aligned}$$

En substituant ces nouvelles variables dans les équations (II.6) à (II.9), où l'on supprimera, l'indice « + » par souci de simplification, nous obtenons les équations adimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{(1-N)}{\text{Re}_a} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.10.a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{(1-N)}{\text{Re}_a} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{II.10.b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{Fr} + \frac{(1-N)}{\text{Re}_a} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.10.c})$$

Avec :

Re_a , le nombre de Reynolds axial déjà défini,

Fr , le nombre de Froude qui mesure l'influence de la pesanteur, ou encore il exprime le rapport de l'énergie cinétique du fluide (ρW_e^2) par rapport au travail susceptible d'être effectué par la pesanteur ($\rho g R_2$). Ce nombre est donné par :

$$Fr = \frac{W_e^2}{g R_2}$$

Il représente aussi le rapport de la force d'inertie ($\rho W_e^2 / R_2$) sur la force de la pesanteur (ρg).

N est le rapport des rayons $N = \frac{R_1}{R_2}$ et $1 - N = \frac{d}{R_2}$.

II.2.4. Conditions initiales et conditions aux limites

II.2.4.1. Conditions initiales

Nous considérons qu'à l'instant $t=0$, le fluide contenu dans l'espace annulaire est au repos et à la pression atmosphérique. Ceci se traduit par la condition suivante :

$$t = 0 \quad \begin{cases} \pi(r, z, 0) = 0 \\ u(r, z, 0) = v(r, z, 0) = w(r, z, 0) = 0 \end{cases} \quad (II.11)$$

II.2.4.2. Conditions aux limites

Le domaine d'étude est défini par :

$$R_1 < r < R_2$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$0 < z < L$$

Les conditions aux limites sont en général les conditions d'adhérence aux parois et la condition à la sortie de l'espace annulaire.

Conditions à l'entrée : $z = 0$

La plupart des auteurs supposent une vitesse axiale uniforme à l'entrée de l'espace annulaire et la nullité des deux autres composantes radiale et tangentielle .

$$R_1 < r < R_2 : \begin{cases} u = v = 0 \\ w = 1 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Conditions à la sortie : $z = L$

Certains auteurs ont considéré à la sortie de l'espace annulaire une vitesse axiale calculée à partir de la conservation du débit (le débit entrant = le débit sortant). Et d'autres (EL-SHAARAWI & SARHAN 1982 [17]) ont considéré un champ de vitesse nulle à la sortie de l'entrefer. Par contre, BOUHADEF [13] a imposé la nullité des dérivées secondes par rapport à z des trois composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Une autre possibilité proposée par A. GHEZAL & AL 1992 [42] consiste à imposer :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dans une étude récente , J.Y. HWANG & K. S.YANG 2004 [29] ont considéré une condition de sortie périodique au cours du temps.

Dans notre cas, nous avons opté pour la condition proposée par A. GHEZAL & AL[43], en considérant la nullité du gradient axial des trois composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Afin de faire apparaître les tourbillons nous avons imposé à la sortie la condition suivante :

$$R_1 < r < R_2 \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Conditions d'adhérence aux parois : $0 \leq z \leq L$

➤ Cylindre intérieur : $r = R_1 : \begin{cases} u = w = 0 \\ v = V_p = R_1 \omega / We \end{cases} \quad (\text{II.15})$

➤ Cylindre extérieur : $r = R_2 : u = w = v = 0 \quad (\text{II.16})$

II.3. Conclusion

Vue la complexité des équations différentielles obtenues, nous sommes tenus d'élaborer dans le chapitre qui suit une méthode de discrétisation qui consiste à transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques facile à résoudre (équations discrétisées).



CHAPITRE TROIS

METHODE DE RESOLUTION

METHODE DE RESOLUTION

III. 1. Introduction

La résolution des problèmes relatifs aux écoulements bidimensionnels comme le notre, peut se faire soit en utilisant la formulation fonction de courant – vorticité, soit les variables vitesse–pression. Nous avons opté pour la dernière formulation en raison de sa plus grande facilité.

Pour traiter les équations de Navier-Stokes introduites dans le chapitre précédant, nous avons adopté la méthode des différences finies, qui est la plus utilisée pour la résolution des équations partiellement paraboliques. Les dérivées partielles sont remplacées par des opérateurs élémentaires de différences (voir Annexe -A-). Cette discrétisation permet de résoudre le problème sur un nombre fini de points du milieu fluide qui forme le domaine d'étude. Notre étude fait suite aux travaux antérieurs de [A. GHEZAL & al 1992 \[42\]](#) sur le traitement par ces méthodes des écoulements autour d'un obstacle cylindro-conique en mouvement hélicoïdal, et ceux de [Z. OUCHIHA 1998\[43\]](#) et [B. DADDA 2004\[44\]](#).

III. 2. Maillage utilisé

Du fait de la symétrie du problème physique, le domaine de calcul est réduit à un demi plan divisé en mailles de dimensions $\Delta r = h_r$ et $\Delta z = h_z$, fig (III.1). La discrétisation spatiale utilisant la maille " [Marker And Cell \(MAC\)](#) " introduite par [HARLOW & WELCH 1965 \[45\]](#) est indiquée sur la fig (III.2). Chaque point (nœud) du domaine est repéré par deux indices (i, j) indiquant respectivement sa position sur l'axe vertical (oz) et l'axe horizontal (or) .

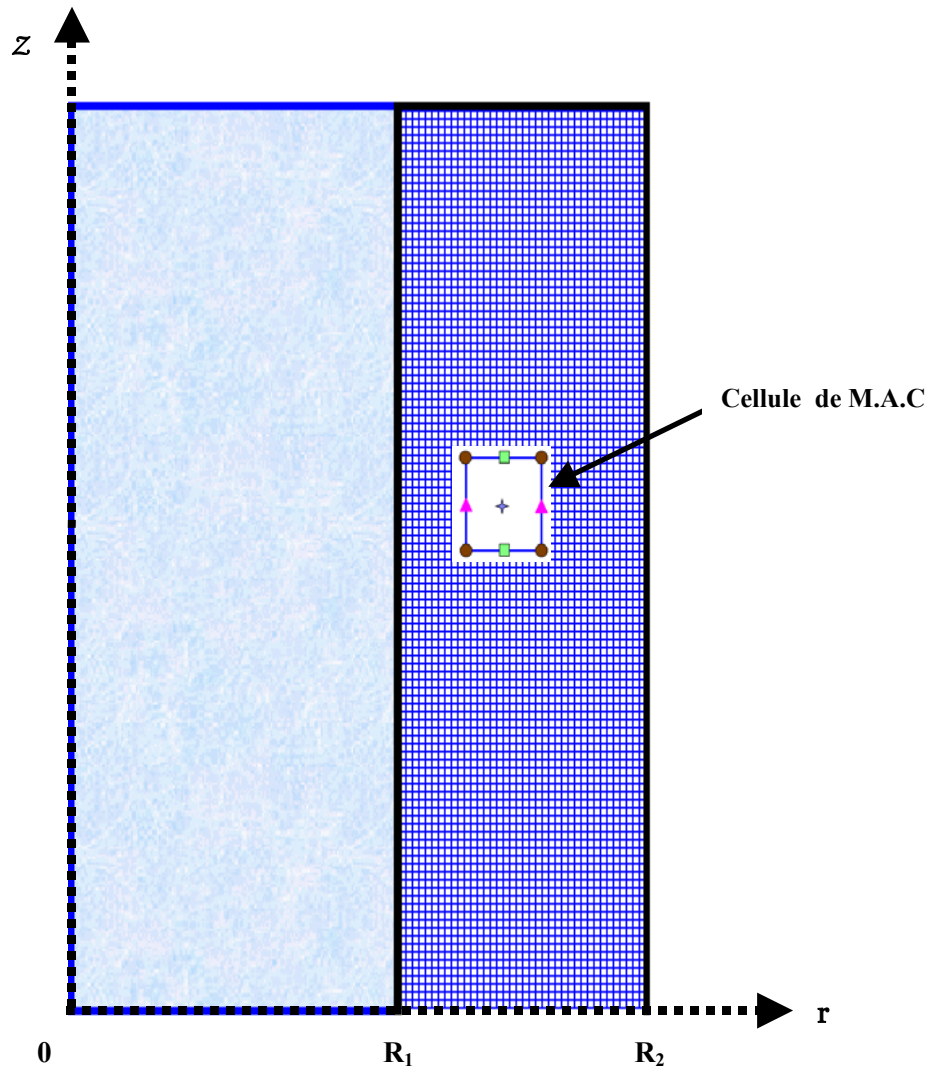


Figure III.1 : Représentation géométrique du domaine d'étude

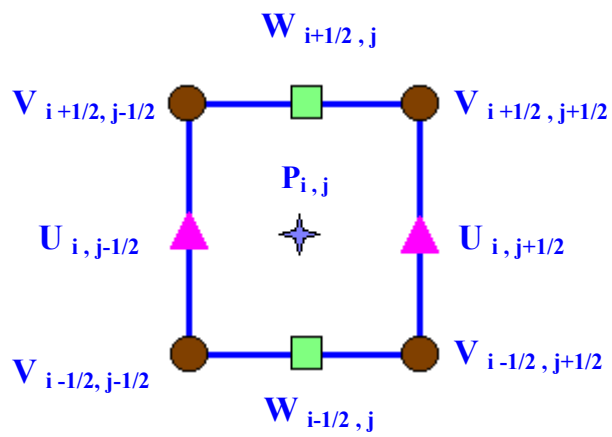


Figure III.2 : Cellule de M. A . C

Les composantes radiale et axiale de la vitesse (u, w) sont localisées respectivement aux milieux des arêtes verticales et horizontales de chaque cellule et, la composante azimutale v de la vitesse occupe les sommets. La pression est située au centre de la maille.

Si h est le pas spatial, k le pas de temps et n l'indice de temps (t= nk), les différentes variables sont définies comme suit :

$u_{i,j+1/2}^n$: la vitesse radiale au point $z_i = ih$, $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à l'instant $t = nk$.

$w_{i+1/2,j}^n$: la vitesse radiale au point $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$, $r_j = jh$ à l'instant $t = nk$.

$v_{i+1/2,j+1/2}^n$: la vitesse radiale au point $z_{i+1/2} = (i+1/2)h$, $r_{j+1/2} = (j+1/2)h$ à $t = nk$.

$\Pi_{i,j}^n$: la vitesse radiale au point $z_i = ih$, $r_j = jh$ à l'instant $t = nk$.

III. 3 . Différentiation :

Les équations de Navier- Stokes sont de nature parabolique suivant le temps; de ce fait le système d'équations est approximé en utilisant les opérateurs de différence définis en Annexe - B - par le système équivalent suivant :

➤ Suivant la direction radiale

$$\begin{aligned}
 & (\delta_t u)_{i,j+1/2}^n + \left[\alpha \left(u \delta_r^0 u - \frac{\tilde{v}^2}{r} \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(u \delta_r^0 u - \frac{\tilde{v}^2}{r} \right)^n \right]_{i,j+1/2} + \\
 & \left[\alpha (\tilde{w} \delta_z^0 u)^{n+1} + (1-\alpha) (\tilde{w} \delta_z^0 u)^n \right]_{i,j+1/2} = \quad \quad \quad \text{(III.1.a)} \\
 & - (\delta_r^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{(1-N)}{\text{Re}_a} \left[\alpha \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^n \right]_{i,j+1/2}
 \end{aligned}$$

➤ Suivant la direction tangentielle

$$\begin{aligned}
 & (\delta_t v)_{i+1/2, j+1/2}^n + \left[\alpha (\bar{u} \delta_r^0 v)^{n+1} + (1-\alpha) (\bar{u} \delta_r^0 v)^n \right]_{i+1/2, j+1/2} + \\
 & \left[\alpha (\bar{w} \delta_z^0 v + \frac{\bar{u} v}{r})^{n+1} + (1-\alpha) (\bar{w} \delta_z^0 v + \frac{\bar{u} v}{r})^n \right]_{i+1/2, j+1/2} = \quad (III.1.b) \\
 & \frac{(1-N)}{\text{Re}_a} \left[\alpha (\delta_r^2 v - \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v)^{n+1} + (1-\alpha) (\delta_r^2 v - \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v)^n \right]_{i+1/2, j+1/2}
 \end{aligned}$$

➤ Suivant la direction axiale

$$\begin{aligned}
 & (\delta_t w)_{i+1/2, j}^n + \left[\alpha (\hat{u} \delta_r^0 w)^{n+1} + (1-\alpha) (\hat{u} \delta_r^0 w)^n \right]_{i+1/2, j} + \\
 & \left[\alpha (w \delta_z^0 w)^{n+1} + (1-\alpha) (w \delta_z^0 w)^n \right]_{i+1/2, j} = \quad (III.1.c) \\
 & - (\delta_z^+ \Pi)_{i, j}^{n+\alpha} + \frac{(1-N)}{\text{Re}_a} \left[\alpha (\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w)^{n+1} + (1-\alpha) (\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w)^n \right]_{i+1/2, j} - \frac{1}{Fr}
 \end{aligned}$$

$\bar{u}_{i+1/2, j+1/2}$, $\tilde{u}_{i+1/2, j}$, $\tilde{v}_{i, j+1/2}$, $\tilde{w}_{i, j+1/2}$ et $\bar{w}_{i+1/2, j+1/2}$ sont des valeurs moyennes définies comme suit :

$$\bar{u}_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{2} (u_{i, j+1/2} + u_{i+1, j+1/2})$$

$$\tilde{u}_{i+1/2, j} = \frac{1}{4} (u_{i, j+1/2} + u_{i+1, j+1/2} + u_{i, j-1/2} + u_{i+1, j-1/2})$$

$$\tilde{v}_{i, j+1/2} = \frac{1}{2} (v_{i+1/2, j+1/2} + v_{i-1/2, j+1/2})$$

$$\tilde{w}_{i, j+1/2} = \frac{1}{4} (w_{i+1/2, j} + w_{i+1/2, j+1} + w_{i-1/2, j} + w_{i-1/2, j+1})$$

$$\bar{w}_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{2} (w_{i+1/2, j} + w_{i+1/2, j+1})$$

➤ Traitement de l'équation de continuité

L'équation de continuité entraîne des instabilités dans la résolution des équations du mouvement. Pour des conditions initiales incompatibles ou à cause d'une solution itérative incomplète avec un schéma aux méthodes implicites, l'opérateur $D_{i,j}$ est non nul. Le terme de pression est dans ce cas là instable. Le processus itératif peut en effet causer une amplification de l'erreur de troncature si on considère $D_{i,j} = 0$. Pour éviter ces instabilités on impose une compressibilité artificielle avec un opérateur $D_{i,j}^{n+1} = 0$.

$$(\delta_r^- u)_{i,j+1/2}^{n+1} + \left(\frac{u}{r}\right)_{i,j}^{n+1} + (\delta_z^- w)_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad \text{(III.1.d)}$$

III. 4 . Schéma de Discrétisation

Pour la résolution dans le temps des équations du problème, le schéma utilisé est plus proche de celui proposé par R. PEYRET 1976 [46]. Nous avons utilisé, une méthode aux différences finies semi- implicite du type Crank- Nicolson, (Annexe - A -). Cette technique correspondant à $\alpha = 1/2$, consiste à satisfaire les équations aux différences au milieu de l'intervalle séparant le plan en temps (n+1) où la solution est cherchée, du plan (n) où elle est connue. Les équations se réécrivent dans ce cas là comme suit :

❑ Equation de continuité

$$(\delta_r^- u)_{i,j+1/2}^{n+1} + \left(\frac{u}{r}\right)_{i,j}^{n+1} + (\delta_z^- w)_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad \text{(III.2.a)}$$

□ Equations de Mouvement

Suivant r

$$\begin{aligned}
 & (\delta_t u)_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(u \delta_r^0 u - \frac{\tilde{v}^2}{r} \right)^{n+1} + \left(u \delta_r^0 u - \frac{\tilde{v}^2}{r} \right)^n \right]_{i,j+1/2} + \\
 & \frac{1}{2} \left[(\tilde{w} \delta_z^0 u)^{n+1} + (\tilde{w} \delta_z^0 u)^n \right]_{i,j+1/2} = \quad \quad \quad \text{(III.2.b)} \\
 & - (\delta_r^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{(1-N)}{2 \text{Re}_a} \left[\left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 u + \frac{\delta_r^0 u}{r} - \frac{u}{r^2} + \delta_z^2 u \right)^n \right]_{i,j+1/2}
 \end{aligned}$$

Suivant θ

$$\begin{aligned}
 & (\delta_t v)_{i+1/2,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[(\bar{u} \delta_r^0 v)^{n+1} + (\bar{u} \delta_r^0 v)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \\
 & \frac{1}{2} \left[\left(\bar{w} \delta_z^0 v + \frac{\bar{u} v}{r} \right)^{n+1} + \left(\bar{w} \delta_z^0 v + \frac{\bar{u} v}{r} \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} = \quad \quad \quad \text{(III.2.c)} \\
 & \frac{(1-N)}{2 \text{Re}_a} \left[\left(\delta_r^2 v - \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 v - \frac{\delta_r^0 v}{r} - \frac{v}{r^2} + \delta_z^2 v \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2}
 \end{aligned}$$

Suivant z

$$\begin{aligned}
 & (\delta_t w)_{i+1/2,j}^n + \frac{1}{2} \left[(\hat{u} \delta_r^0 w)^{n+1} + (\hat{u} \delta_r^0 w)^n \right]_{i+1/2,j} + \\
 & \frac{1}{2} \left[(w \delta_z^0 w)^{n+1} + (w \delta_z^0 w)^n \right]_{i+1/2,j} = \quad \quad \quad \text{(III.2.d)} \\
 & - (\delta_z^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{(1-N)}{2 \text{Re}_a} \left[\left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 w + \frac{\delta_r^0 w}{r} + \delta_z^2 w \right)^n \right]_{i+1/2,j} - \frac{1}{Fr}
 \end{aligned}$$

Dans un souci de commodité de notation, nous avons introduit les symboles u_h , v_h , w_h et Π_h représentant les valeurs des inconnues, c'est à dire :

$$u_h = u_{i,j+1/2}^{n+1} \quad , \quad v_h = v_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \quad , \quad w_h = w_{i+1/2,j}^{n+1} \quad \text{et} \quad \Pi_h = \Pi_{i,j}^{n+1/2}$$

De ce fait, les équations aux différences finies s'écrivent sous la forme symbolique suivante :

$$\begin{aligned} L_u(u_h, v_h, w_h, \Pi_h) &= 0 \\ L_v(u_h, v_h, w_h, \Pi_h) &= 0 \\ L_w(u_h, v_h, \Pi_h) &= 0 \\ D(u_h, w_h) &= 0 \end{aligned} \tag{III.3}$$

III. 5 . Traitement des opérateurs de différence au voisinage des frontières

Les conditions aux limites sont traitées en utilisant les définitions données par HARLOW & WELCH [45], qui considèrent que les parois solides sont confondues avec les bordures des cellules qui sont proches et appartenant au maillage. Une paroi verticale passe, alors, à travers les nœuds de la maille portant les vitesses normales qui s'annulent quelques soit le temps. la paroi verticale ne doit pas passer en même temps par les nœuds de la maille portant les vitesses qui lui sont tangentielles.

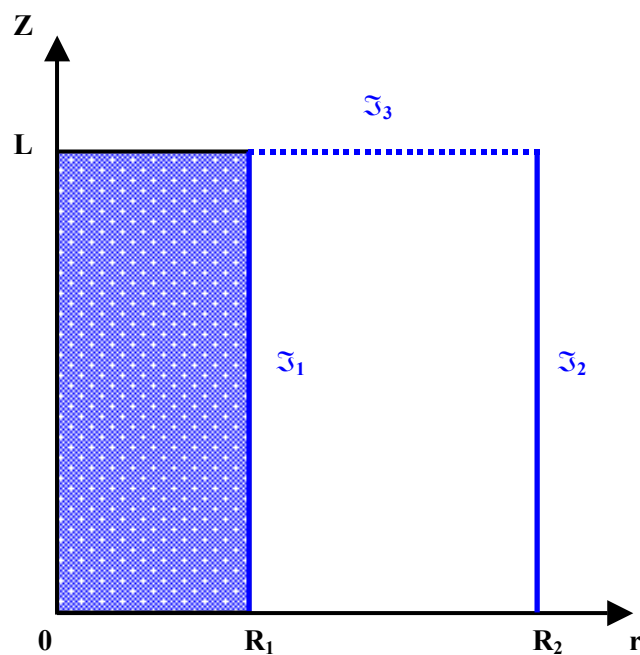


Figure III.3 : Frontières délimitants le domaine d'étude

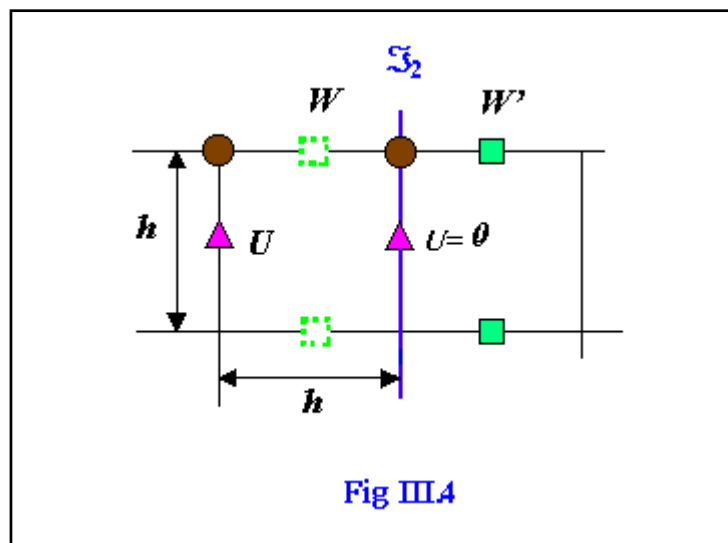
Il est donc utile de tenir compte de l'existence d'une maille fictive disposée, à l'extérieur, de l'autre coté de la paroi solide pour définir une vitesse tangentielle symétrique permettant de lever l'indétermination et de vérifier la condition d'adhérence.

❑ **Sur la paroi (Σ_2), $r = R_2$**

Le long de cette frontière, nous avons la condition d'adhérence

$$u = w = v = 0$$

Au voisinage de (Σ_2), le maillage se présente sous la forme suivante :



Les composantes radiale et tangentielle u et v de la vitesse se trouve sur la paroi, tandis que w se trouve à une distance de $h/2$ de cette même paroi, ce qui nous a conduit à l'approximation suivante pour le calcul de w aux points (i, j_{\max}) :

$$w_{i+1/2, j_{\max}} = \frac{w_{i+1/2, j_{\max}+1/2} + w_{i+1/2, j_{\max}-1}}{3}$$

Or $w_{i+1/2, j_{\max}+1/2} = 0$

Ce qui donne $w_{i+1/2, j_{\max}} = \frac{1}{3} w_{i+1/2, j_{\max}-1}$

Les opérateurs L_u et L_v appliqués au point $(R-h, z, t)$ et ses dérivées par rapport à r ne débordent pas sur la frontière (\mathfrak{S}_2) .

La condition de réflexion pour la vitesse axiale tel que $W' = -W$ (le « ' » symbolise une cellule fictive située à l'extérieur de la paroi solide).

De plus, on suppose pour ce cas d'indétermination qu'il existe une variation linéaire sur l'intervalle $R_2 - \frac{h}{2} \leq r \leq R_2 + \frac{h}{2}$ de manière à aboutir à l'expression suivante :

$$w(r, z, t) = \frac{2(R_2 - r)}{h} w(R_2 - \frac{h}{2}, z, t)$$

Dans l'approximation des dérivées de W par rapport à r , la valeur de W' qui est ainsi définie permet de résoudre L_w au point $(R_2 - h/2, z, t)$.

La nullité de cette dérivée est approximée par la valeur donnée ci-dessous :

$$W_{i, j_{\max}} = W_{i, j_{\max-1}}$$

☐ Sur la paroi (\mathfrak{S}_3) , $z = L$

A la section de sortie, le traitement des conditions aux limites ne diffère pas de celui utilisé pour les parois solides. Cependant l'absence de variations des différentes grandeurs dans la direction axiale oz , est prise en considération, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

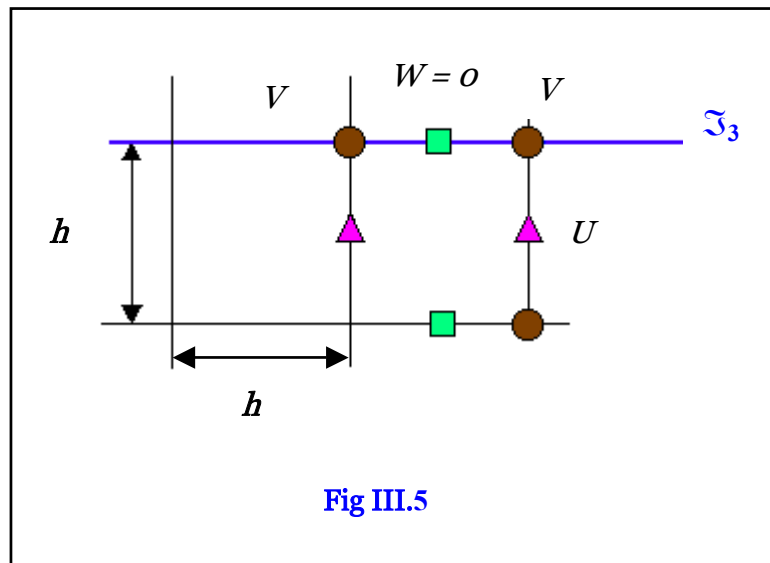
Pour les vitesses normales à la section (\mathfrak{S}_3) , on utilise une approximation précise à l'ordre 2, grâce à l'opérateur (δ^2) . Les opérateurs L_u , L_w , L_v et D appliqués aux nœuds respectifs, où sont définis chacun des paramètres, ne débordent pas sur cette frontière.

D'où, les conditions sur u, v, w en $z = L$ sont réécrites en fonction des nœuds du maillage (i, j) comme suit :

$$u_{i_{\max}, j} = \frac{4}{3} [u_{i_{\max-1}, j} - u_{i_{\max-2}, j}]$$

$$v_{i_{\max}, j} = \frac{4}{3} [v_{i_{\max-1}, j} - v_{i_{\max-2}, j}]$$

$$W_{i_{\max}, j} = W_{i_{\max-1}, j}$$



❑ Au voisinage des parois du cylindre intérieur, $r = R_1$

Le cylindre intérieur est disposé sur l'axe de symétrie de sorte que le traitement des variables sur ces parois nécessite des considérations particulières.

La paroi passe dans ce cas entre deux lignes du maillage définissant ainsi une demi-maille, fig. III-6. Cette dernière permet d'éviter le problème de réflexion de la vitesse tangentielle car elle ne peut pas se faire à l'intérieur du cylindre tournant.

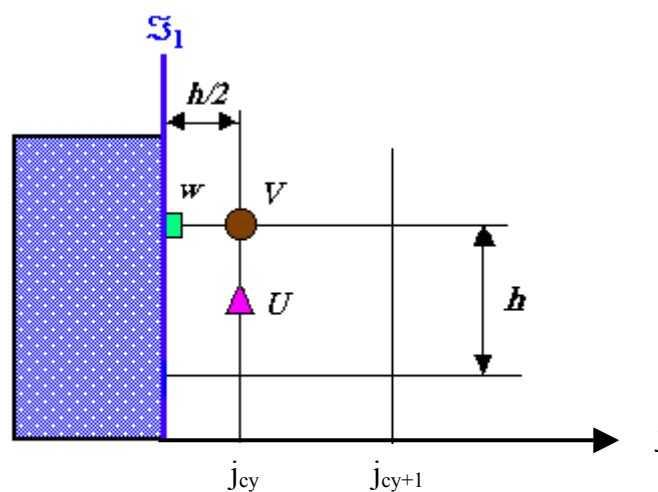


Fig III.6

La valeur de v au point (i, j_{cy}) est donnée par l'approximation suivante :

$$v_{i,jcy} = \frac{1}{3}(v_{i,jcy+1} + 2 V_o)$$

v_{rot} est la vitesse de rotation du cylindre intérieur.

III.6 . Hypothèse sur la vitesse de rotation du cylindre intérieur

La variation de la vitesse de rotation depuis sa valeur initiale, nulle, à la valeur imposée se fait d'une manière évolutive. Dans cette étude on a opté pour une variation de type linéaire au cours des premiers instants, déjà utilisée par A.GHEZAL & al [42].

Des tests numériques effectués, ont conduit ces auteurs au choix de l'expression suivante qui exprime l'évolution de la vitesse de rotation $V_{rot}(t)$ du cylindre intérieur en fonction du temps :

$$V_{rot}(t) = \begin{cases} \frac{t}{20} V_0 & \text{si } t < \frac{20}{64} \\ V_0 & \text{si } t \geq \frac{20}{64} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

où V_o est la vitesse de rotation imposée.

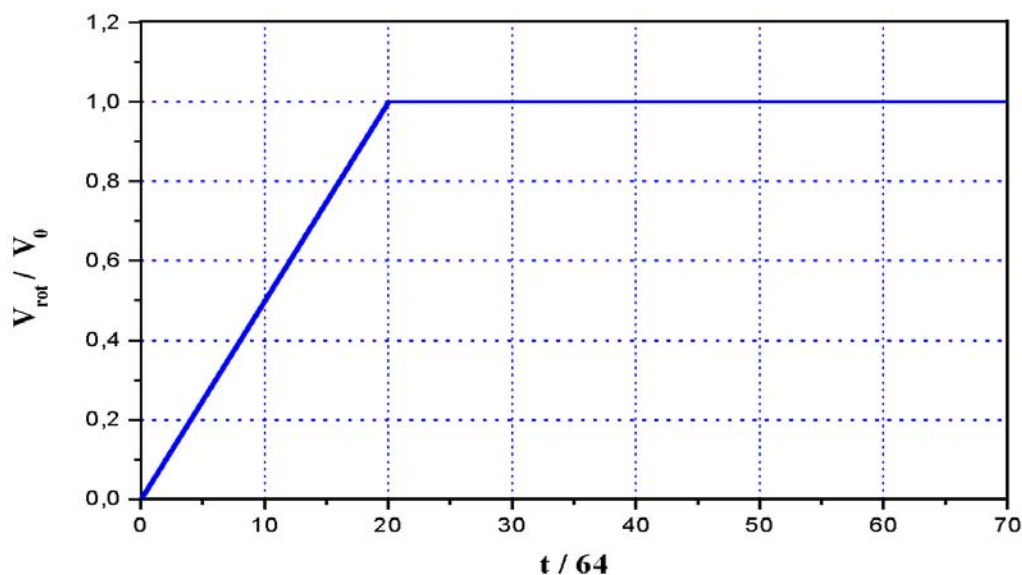


Figure III.7 : Evolution de la vitesse de rotation au cours du temps

III.7. Procédé itératif

Le système algébrique non linéaire (III.3) résultant des équations aux différences finies, accompagnées des conditions aux limites est résolu par un processus itératif déjà utilisé par BEGIS 1972 [47], et également repris par PEYRET & CHILDRESS 1976 [48] pour traiter les matrices tridiagonales par blocs trop lourdes pour les méthodes directes.

Ce système algébrique est résolu par un procédé itératif, caractérisé par l'indice \bullet et défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 u_h^{v+1} - u_h^v + \chi \cdot L_u(u_h^v, v_h^v, w_h^v, \Pi_h^v) &= 0 \\
 v_h^{v+1} - v_h^v + \chi \cdot L_v(u_h^{v+1}, v_h^v, w_h^v, \Pi_h^v) &= 0 \\
 (III.4) \\
 w_h^{v+1} - w_h^v + \chi \cdot L_w(u_h^{v+1}, v_h^{v+1}, \Pi_h^v) &= 0 \\
 \Pi_h^{v+1} - \Pi_h^v + \omega D(u_h^{v+1}, w_h^{v+1}) &= 0
 \end{aligned}$$

Les coefficients χ, ω sont des paramètres qui doivent être choisis de façon à assurer la convergence. On peut fixer différemment en faisant des tests numériques sur le cas traité pour assurer la stabilité du système évolutif (III.4). L'indice d'itération est identifié à l'indice de variation en pas de temps n .

III.8. Etude de stabilité et de convergence de la méthode numérique

Le système est simplifié en négligeant les termes de convection et la matrice d'amplification relative à ce système doit avoir un rayon spectral inférieur ou égal à 1 ce qui conduit aux conditions de convergence suivante :

$$\begin{cases} \chi, \omega > 0 \\ \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1}{\text{Re}_a} + \frac{h^2}{4\chi} + \omega \right) \leq 1 \end{cases} \quad (III.5)$$

les valeurs de χ et ω sont déterminées par des tests numériques. Pour une valeur quelconque de χ la meilleure convergence existe pour une valeur optimale de ω qui représente le maximum admis par les conditions (III.5).

Il est conseillé de ne pas choisir une valeur de χ trop faible. Cependant, on ne peut pas dépasser un seuil maximum (de l'ordre de h^2) qui maintient un coefficient $\omega > 0$. Des détails de calcul sont donnés par A. BOUHANNA 1982 [49]

Pour accélérer la convergence on a recours à la méthode itérative de Gauss-Sidel qui est basé sur une technique d'utilisation des valeurs des inconnues obtenues à l'itération $(v+1)$ dès qu'elles sont calculées.

La convergence du système précédent est supposée atteinte lorsque :

$$\text{Max}(|L_u|, |L_v|, |L_w|, |D|) < \varepsilon \quad (\text{III.6})$$

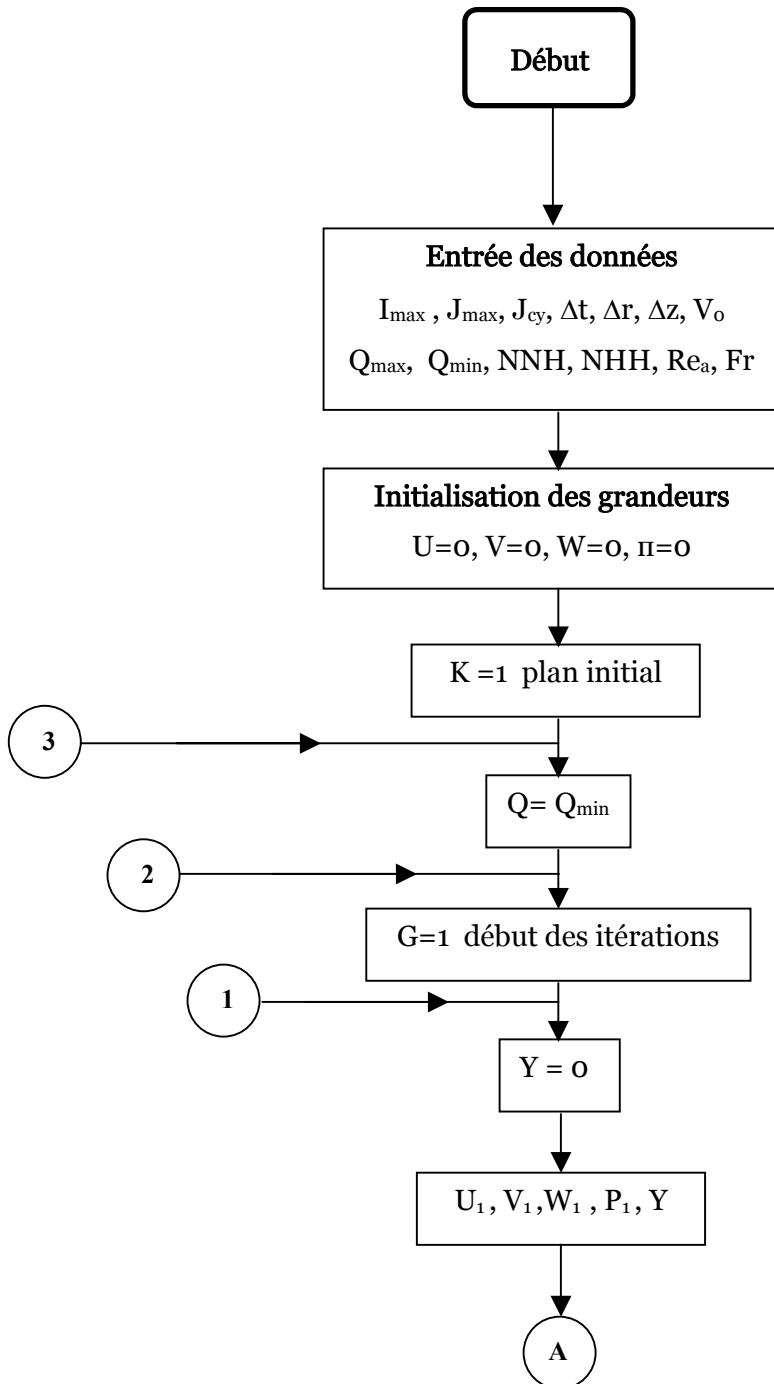
Dans notre cas, les erreurs de troncature sont estimées à $0(h^2, k^2)$ pour un pas de temps $k = 1/64$, les valeurs de ε sont de l'ordre de h^2 ($\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$).

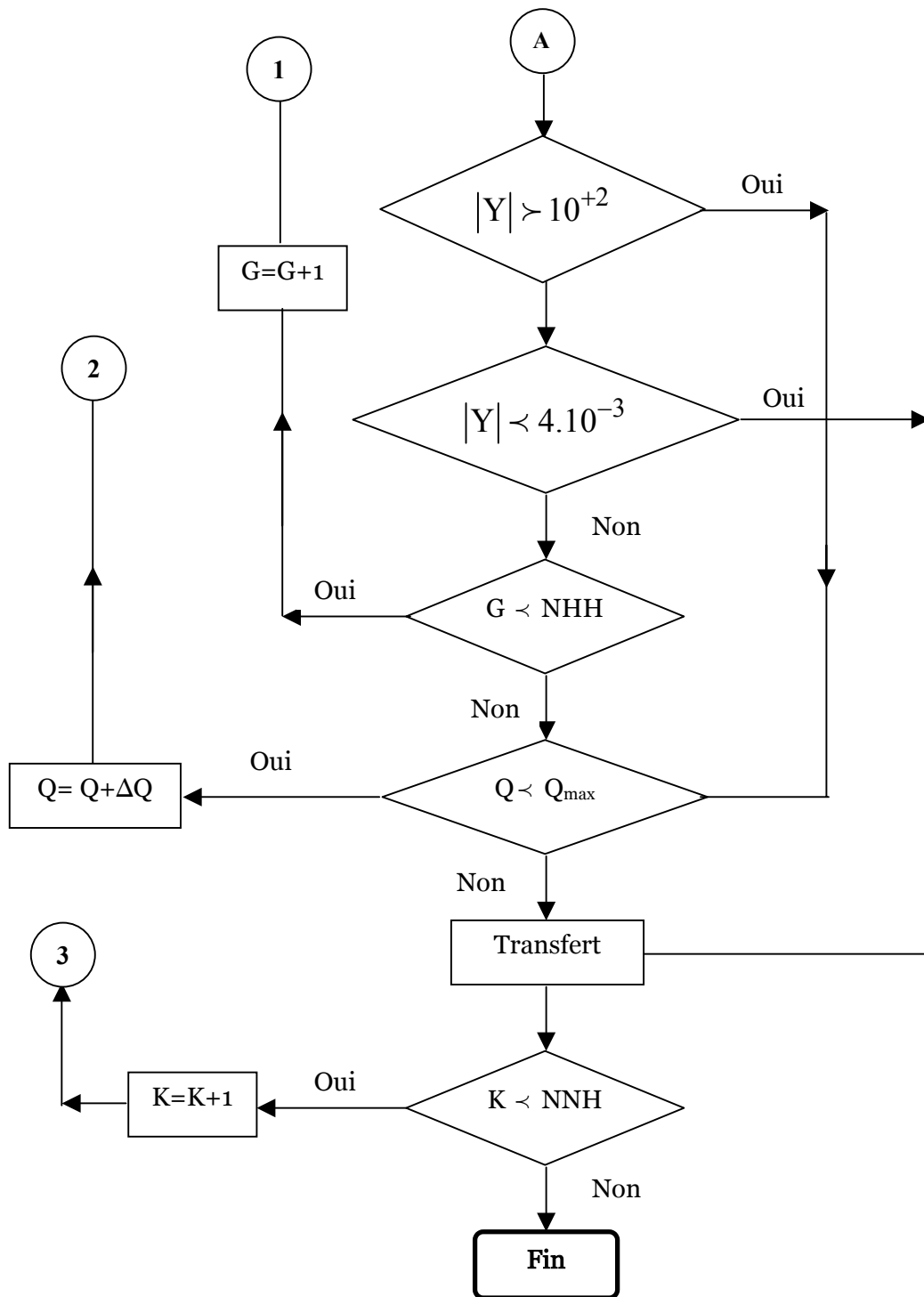
Le nombre d'itérations nécessaires pour achever la convergence dépend des valeurs des paramètres de l'écoulement (le nombre de Reynolds, le nombre de Taylor, nombre de Froude...).

III.9. Conclusion

Le calcul décrit précédemment est effectué pour différents paramètres permettant d'étudier ainsi différentes situations physiques, afin de mieux comprendre l'hydrodynamique du mouvement. Le choix des paramètres ainsi que des résultats correspondants sont discutés dans le chapitre suivant.

ORGANIGRAMME







CHAPITRE QUATRE
RÉSULTATS & DISCUSSION

Résultats & Discussion

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus avec la méthode numérique exposée dans le chapitre précédant. La configuration géométrique à symétrie axiale, laisse supposer un développement symétrique de l'écoulement. Les variables utilisées sont adimensionnelles et en raison de cette symétrie, les profils sont obtenus sur la moitié du domaine .

Dans une première étape, nous avons étudié la densité du maillage et analysé son effet sur les résultats numériques. Dans une seconde étape, nous avons testé notre code de calcul et comparé nos résultats avec ceux obtenus par d'autres études expérimentales et théoriques. Après avoir adapté le programme de calcul à notre étude, nous présentons les différents résultats obtenus et enfin, le traitement et l'interprétation de ces résultats.

IV.2. Etude de la densité du maillage

Les figures (IV.1.a, b, c) représentent les profils de vitesse axiale, radiale, et tangentielle en fonction de la coordonnée radiale réduite $\zeta = (r - R_1)/(R_2 - R_1)$, dans un espace annulaire de rapport de rayons $N = 0.5$, pour différents pas radiaux $h_r = \Delta r = 1/16, 1/48, 1/80, 1/112$ et un pas axial $h_z = \Delta z = 1/16$. On a considéré un nombre de Reynolds axial $Re_a = 100$ et un nombre de Taylor $Ta = 10$ correspondant au régime laminaire. Nous remarquons qu' à partir de $h_r = 1/48$ les profils des composantes de la vitesse ne présentent pas d'écart et se confondent davantage. Le même test a été fait pour la détermination de

Taylor critique pour chaque cas étudié. Les résultats montrent que la résolution numérique devient indépendante du maillage à partir de la grille (49 x 17) correspondant à un pas radial $h_r = 1/48$ et $h_z = 1/16$.

Il faut noter que le maillage dépend, en général, de différents paramètres dynamiques et géométriques de l'écoulement (Re_a , Ta , Fr , N).

Afin d'éviter la multiplicité des tests pour le choix du pas pour chaque configuration, nous avons opté pour le choix de pas $1/48$ suivant r et $1/16$ suivant z , pour toute l'étude.

En outre, le choix du pas de temps est basé sur des tests numériques sur la stabilité et la convergence de la méthode, faits par des travaux antérieurs (A. GHEZAL & al [42], OUCHIHA [43] et DADDA [44]) et confirmé par notre étude. Il est de $h_t = k = 1/64$.

IV.3. Validation du code de calcul

Pour valider notre code de calcul, nous avons effectué deux tests, le premier sur le profil axial de la vitesse tangentielle dans le cas de l'écoulement laminaire de Taylor Couette avec débit axial, et le deuxième test concerne la variation du nombre de Taylor critique correspondant à la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, en fonction du nombre de Reynolds axial .

IV.3.1. Développement du profil de vitesse tangentielle dans une situation stable

AMOKRANE BOUHADEF [13] a résolu les équations de Navier Stokes avec une méthode numérique basée sur un schéma explicite aux différences finies. Pour notre part, nous avons repris les mêmes conditions hydrodynamiques (Re_a , Ta) et géométriques (N , Γ) avec des équations instationnaires et comparé nos résultats en régime permanent avec ceux trouvés par cet auteur.

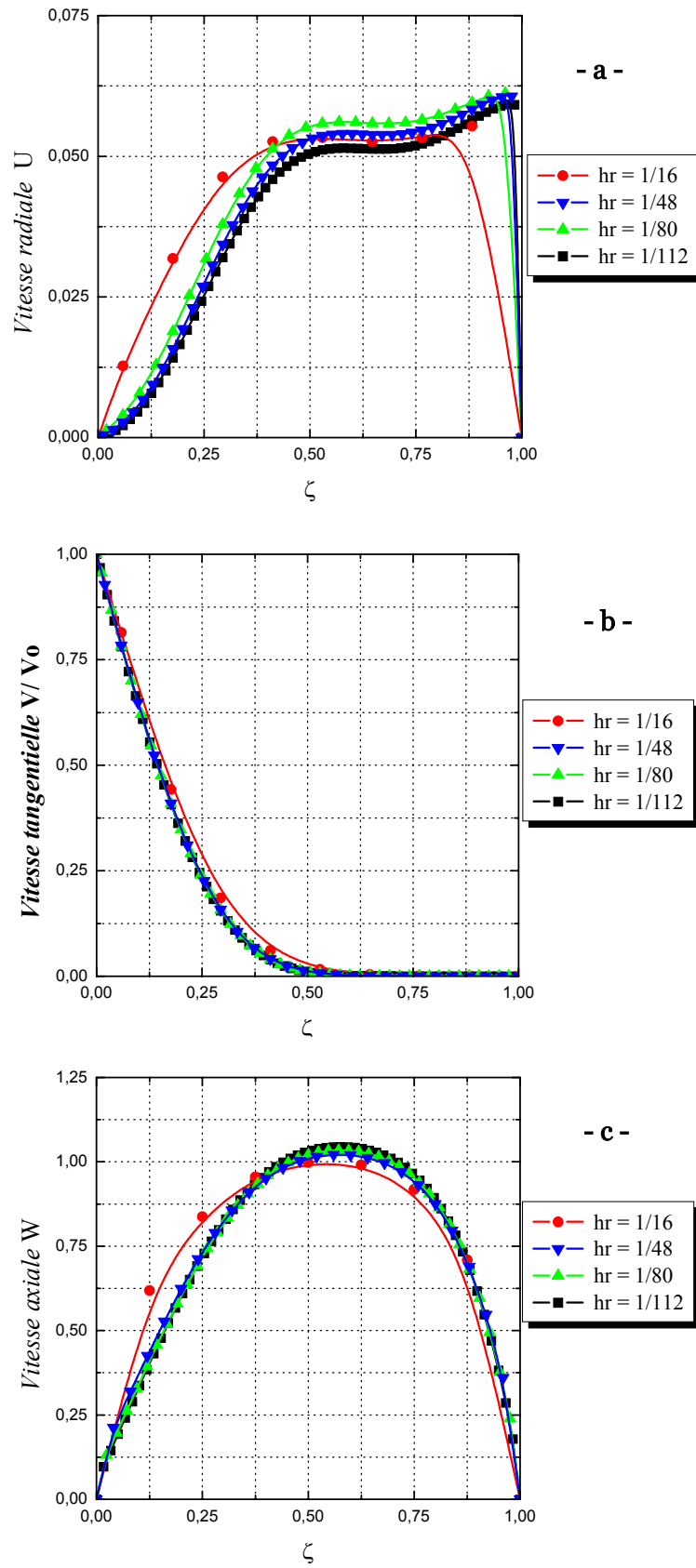


Figure VI.1 : Effet de densité du maillage sur les profils radiaux de la vitesse

Nous avons comparé le développement du profil de vitesse tangentielle pour un nombre de Taylor, $Ta = 10$ et un rapport de rayons $N = 0.91$ dans deux cas :

$$Re_a = 10 \quad \Gamma = 20$$

$$Re_a = 100 \quad \Gamma = 50$$

Cette valeur du nombre de Taylor correspond à une situation stable pour les deux cas. Le calcul a été effectué jusqu'à l'obtention du régime permanent et, les forces de gravité sont négligées.

L'analyse des différentes courbes montre que, pour le cas a), la vitesse tangentielle atteint assez rapidement en aval un état asymptotique indépendant de z , fig (IV.3.1.a). Par contre, pour le cas b), la longueur L de l'espace annulaire n'est pas suffisante pour avoir ce régime, fig (IV.3.1.b). Ces résultats sont en bon accord avec ceux trouvés par BOUHADEF.

Le tableau (IV.1) compare nos résultats portant sur la vitesse tangentielle maximale suivant z pour trois positions radiales, dans les deux cas a) et b).

Cas a)				Cas b)	
r	$R_1+1/5$	$(R_1+R_2)/2$	$R_2-1/5$	$R_1+1/5$	$R_2-1/5$
V_{\max} (1)	0.786	0.5	0.21977	0.82	0.14915
V_{\max} (2)	0.79412	0.49038	0.19231	0.815	0.156
%	1.03	1.96	14.27	0.613	4.4

(1) : Présente étude.

(2) : BOUHADEF [13]

Tableau (IV.3.1) : Comparaison de vitesse tangentielle maximale.

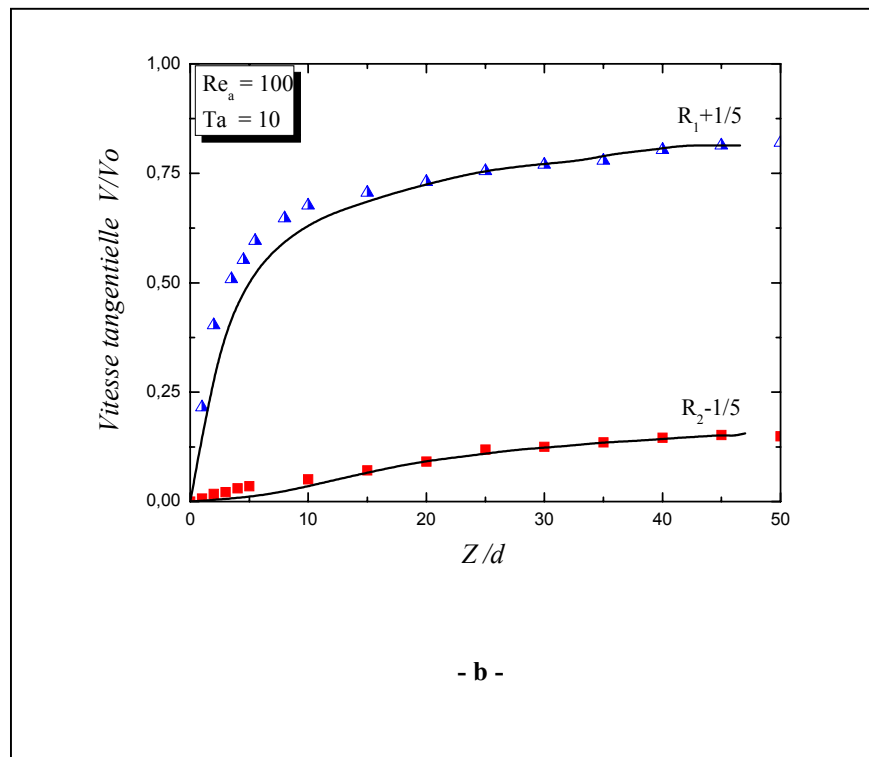
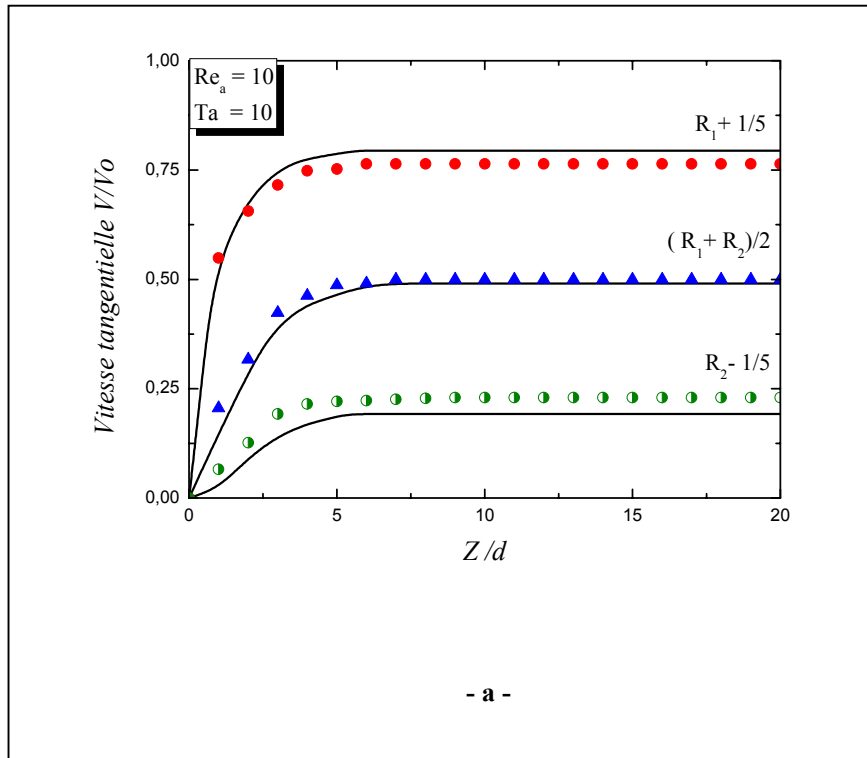


Figure . IV. 3. 1 : Profils de vitesse tangentielle : les symboles indiquent les présents résultats, les lignes indiquent les résultats de BOUHAFEF[13] .

IV.3.2. Transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire

Afin d'assurer que le code de calcul peut être utilisé pour étudier la stabilité de ce type d'écoulement, nous avons comparé nos résultats qui sont donnés sous forme du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial, avec ceux obtenus par d'autres auteurs par des méthodes différentes.

TAKEUCHI & JANKOWSKI [26] à l'aide de deux méthodes différentes, la première théorique basée sur l'hypothèse de perturbations non axisymétriques et l'autre est expérimentale basée sur la technique de visualisation.

Leur dispositif expérimental est composé par deux cylindres coaxiaux ; le cylindre extérieur est maintenu fixe et le cylindre intérieur tourne avec une vitesse uniforme . La veine d'essai est constituée par l'espace annulaire séparant les deux cylindres. Elle est caractérisée par un rapport des rayons N égale 0.5 et un rapport d'aspect Γ égale à 51 ($d = 2$ inch , $L = 102.5$ inch). Le fluide utilisé lors des expérience est l'huile de silicone contenant de fines particules d'aluminium. Ces dernières sont ajoutées pour faciliter la technique de visualisation. Dans ce cas le nombre de Taylor est donné par :

$$Ta^* = \frac{\Omega_1 d^2}{\nu}$$

La valeur de Taylor critique est définie comme la valeur pour laquelle les structures tourbillonnaires occupent toute la longueur de l'espace annulaire.

Le tableau (IV.3.2) regroupe les résultats expérimentaux obtenus par TAKEUCHI & JANKOWSKI [26] . Ils ont déterminé la valeur de Taylor critique pour Re_a compris entre 0 et 100 par la méthode numérique et entre 0 et 150 par la méthode expérimentale . Sur la figure (IV.3.2) on a porté nos valeurs avec celles obtenues par les auteurs cités ci-dessus. En analysant ces courbes, on peut bien remarquer l'effet stabilisateur de l'écoulement axial sur l'écoulement tourbillonnaire de Taylor Couette. Nous remarquons également que nos résultats sont proches de ceux donnés par ces auteurs. Le tableau (IV.3.2) regroupe les différents résultats obtenus par d'autres études pour un espace annulaire de rapport de rayons $N = 0.5$.

Re_a	Ta^*_c
0	68.6
4.2	69.4
10.2	70.4
14.0	73.4
19.7	77.7
25.9	84.7
30.6	88.2
35.3	90.1
40.0	95.7
43.9	100.4
46.8	104.5
53.1	107.5
59.5	108.2
66.2	110.8
73.2	109.6
78.0	110.5
85.4	111.3
92.4	109.6
98.7	110.5
106.2	109.6
120.5	107.8
132.5	106.5
145.4	105.2

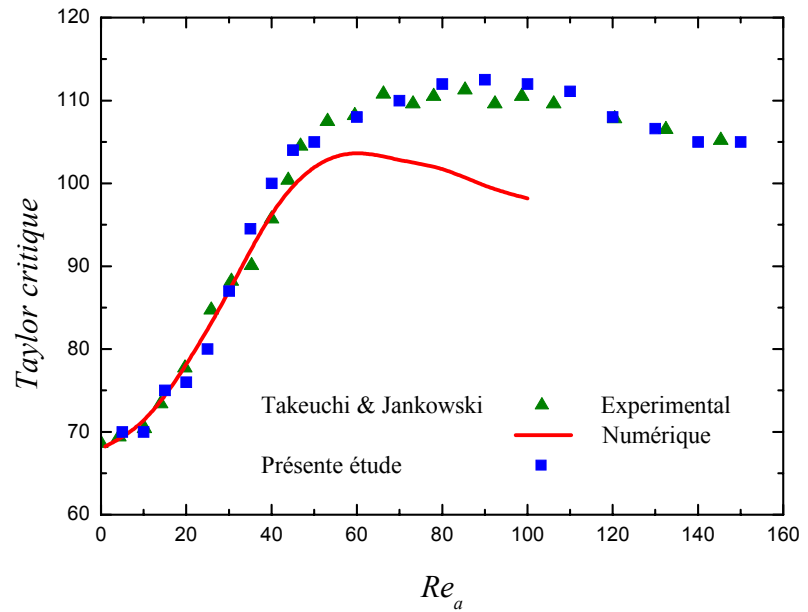


Figure IV.3. 2 : Comparaison entre le Taylor critique calculé par la présente étude et les résultats obtenus par TAKEUCHI & JANKOWSKI [26].

Tableau (IV.3. 2)

Re _a	Chung & Astill[19] Analytique (1976)	Hasoon & Martin [25] Analytique (1976)	Takeuchi & Jankowski[27] Numérique (1981)	Takeuchi & Jankowski[27] Expérimental (1981)	Rani & Pearlstein[28] Numérique (2001)	Présente étude
10	70.67	70	70.67	70.4	68.19	70
20	77.9	75	77.84	77.7	-	76
50	120.8	113	120.6	107.5	-	105

Tableau (IV.3.3) : Comparaison des présents résultats avec d'autres études pour un rapport de rayons $N = 0.5$

Les résultats obtenus par l'utilisation de notre code de calcul montrent sa fiabilité, aussi bien pour traiter le problème des écoulement de Taylor Couette Poiseuille en régime laminaire que pour le cas de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, l'erreur maximale pour la détermination du seuil de cette transition est estimée à 13% . On signale que pour ce dernier cas, la méthode utilisée n'est valable que pour les géométries présentant de large espace annulaire ($N \leq 0.5$).

IV.4. Régime laminaire pur

Dans cette partie, nous avons représenté le champ hydrodynamique (vitesse, pression) dans un espace annulaire caractérisé par un rapport de rayons $N = 0.5$ et un rapport de forme $\Gamma = 14.3$, en fonction de la coordonnée radiale réduite $\zeta = (r - R_1) / (R_2 - R_1)$ et pour plusieurs côtes, $\xi = z/d$. Le nombre de Reynolds axial est compris entre 1 et 100 et le nombre de Taylor considéré prend des faibles valeurs correspondant au régime laminaire pur. L'influence de différents paramètres dynamiques régissant l'écoulement de fluide sur les profils de vitesse et de la pression est étudié.

IV.4.1. Evolution des profils de vitesse au cours du temps

Nous avons tracé sur les figures (VI.4.1.1) et (VI.4.1.1) l'évolution des profils radiaux de vitesse axiale, radiale et tangentielle pour une vitesse de rotation du cylindre interne $Vo=0.2$, et pour deux valeurs du nombre de Reynolds, $Re_a=10, 100$.

Le maximum de la vitesse axiale augmente au cours du temps jusqu'à atteindre une valeur maximale qui demeure constante à partir de l'instant $t = 4$ aux différentes côtes considérées. Loin de l'entrée, même remarque peut être faite pour la vitesse radiale. En ce qui concerne la vitesse tangentielle, sa courbure diminue en aval, et garde le même profil à partir de l'instant $t = 2$. On constate que les effets de l'entrée affectent les profils de vitesse axiale et de vitesse radiale. En aval de l'espace annulaire, la solution semble cependant tendre ultérieurement vers un régime stationnaire à partir de l'instant $t = 4$.

IV.4.2. Evolution axiale des Profils de vitesse

Nous avons représenté les profils de vitesse axiale, tangentielle et radiale pour un nombre de Taylor $Ta = 2$, à l'instant $t = 10$. nous avons considéré trois valeurs du nombre de Reynolds $Re_a = 1, 10, 100$.

➤ Profil radial de la vitesse axiale

Pour les trois valeurs de nombres de Reynolds, on remarque que le maximum de la vitesse axiale est atteint à l'entrée de l'espace annulaire et est supérieur à l'unité. En se déplaçant vers l'aval, la vitesse axiale diminue progressivement et tend vers zéro à la sortie.

Pour des nombres de Reynolds relativement faibles ($Re_a = 1, 10$), la vitesse axiale atteint sa valeur maximale dans les sections d'entrée, à la position axiale $\xi = 0.25$ pour $Re_a = 1$ et $\xi = 0.51$ pour $Re_a = 10$ et à des positions radiales inférieures à la position du milieu de l'espace annulaire ($\zeta < 1/2$), figures (IV.4.2.a),(IV.4.2.b). Ce qui indique que le gradient pariétal de vitesse axiale est plus important sur le cylindre interne que sur la paroi extérieure. Pour des cotes croissantes, ce maximum se dirige vers le cylindre externe ($\zeta > 1/2$). Cela montre la dissymétrie du profil de la composante axiale par rapport au milieu de l'espace annulaire. Cette vitesse est proche du zéro à la cote $\xi = 5.10$ pour les deux valeurs de nombre de Reynolds. On constate que les forces visqueuses sont dominantes dans cette gamme de Reynolds axial. On pense que la dissymétrie proviendrait de la configuration

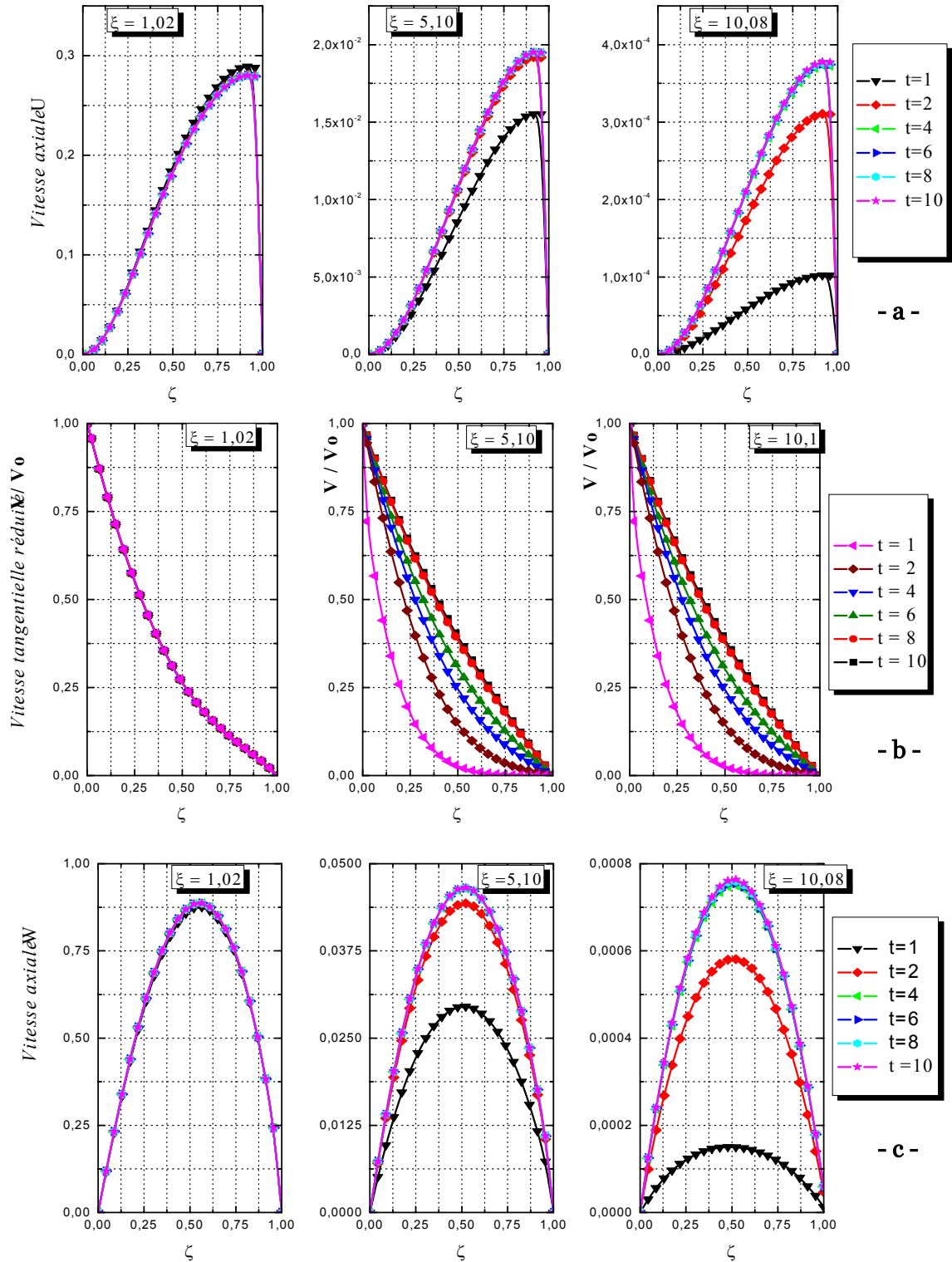


Figure (VI. 4.1.1) : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour $Re_a = 10$

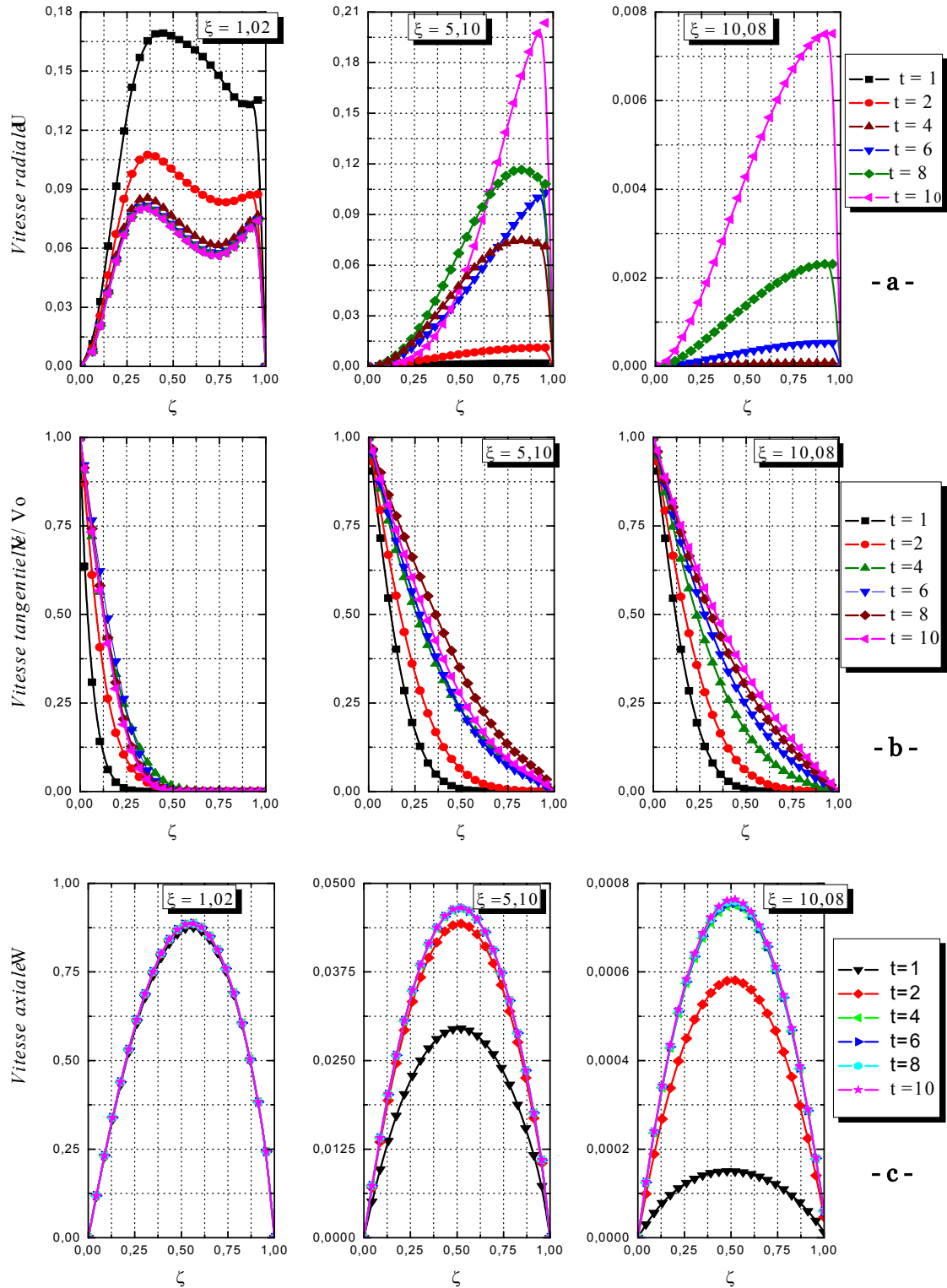


Figure (VI. 4.1.2) :Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour $Re_a = 100$

géométrique de l'écoulement et plus particulièrement du système d'arrivée du fluide dans l'espace annulaire et aussi à la rotation du cylindre intérieur .

Injecté avec un débit axial plus fort , $Re_a = 100$, le fluide s'accélère dans l'espace annulaire et le maximum de la composante axiale de la vitesse dépasse l'unité jusqu'à la position axiale $\xi = 2.04$ où le profil tend asymptotiquement au profil du Poiseuille ; dans cette zone, les forces d'inertie sont dominantes. En aval de l'espace annulaire, on remarque une diminution progressive de la vitesse axiale à partir de la côte $\xi = 5.10$, le maximum se déplace vers la paroi externe et tend vers zéro pour $\xi = 10.08$. La dissymétrie est plus marquée pour ce nombre de Reynolds que dans le cas précédent. Voir figure (A.1. c).

➤ Profil radial de la vitesse tangentielle

Les figures (IV.4.2) représentent les profils radiaux de la vitesse tangentielle pour plusieurs positions axiales et pour différentes valeurs de nombre de Reynolds.

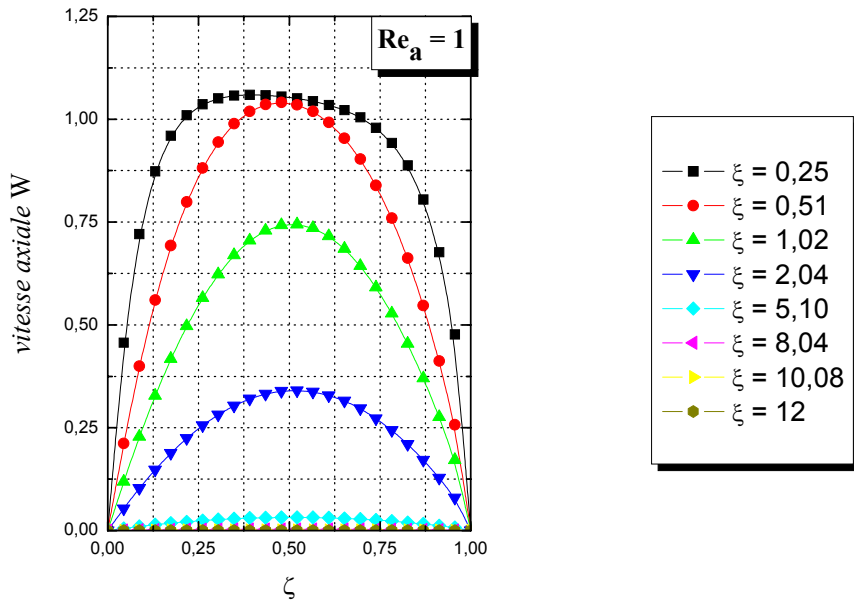
Le profil de vitesse tangentielle se déforme continuellement suivant ξ d'une position à l'autre et varie de sa valeur maximale (paroi tournante) jusqu'à la valeur zéro sur la paroi fixe. Pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds axial ($Re_a = 1, 10$), ce profil tend asymptotiquement à partir de $\xi = 2.04$ vers le profil linéaire de Couette correspondant au régime laminaire établi. On peut constater que la longueur d'établissement de l'écoulement tangentiel pour $Re_a = 10$ est $L_{et} \approx 2.04 d$. Ce dernier résultat est comparatif à celui de C.NOUAR[11], qui a obtenu pour un nombre de Reynolds légèrement supérieur ($Re_a = 10.6$), une longueur $L_{et} = 1.6 d$ ($L_{et} = 2$ cm), dans un espace annulaire caractérisé par ($N=0.61, \Gamma = 12.8$). Par contre pour une valeur de Reynolds plus élevée ($Re_a = 100$), la longueur de l'espace annulaire n'est pas suffisante pour l'établissement d'un tel profil.

➤ Profil radial de la vitesse radiale

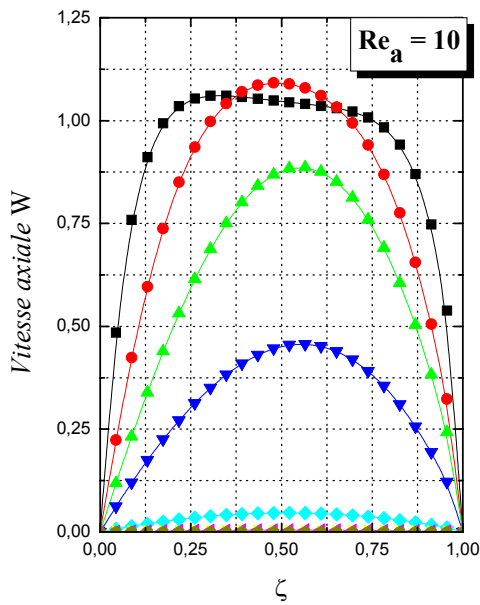
Les profils de vitesse radiale en fonction de la coordonnée radiale réduite pour différentes valeurs de nombre de Reynolds ($Re_a = 1, 10, 100$) sont illustrés sur les figures (IV.4. 2. a, b, c) . les résultats obtenus nous ont permis de faire les constatations suivantes :

- A l'entrée de l'espace annulaire, le profil de la vitesse radiale qui nul ($u = 0, \forall \zeta$ à $\xi = 0$) atteint une certaine valeur au voisinage du cylindre intérieur ($\zeta < 0.5$), puis décroît et augmente pour la deuxième moitié de la largeur de l'espace annulaire ($\zeta > 1/2$) pour atteindre sa valeur maximale.

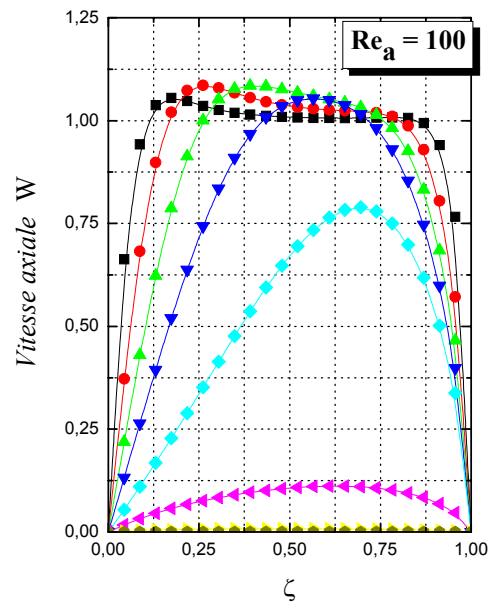
- Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée, le profil garde sa forme (le maximum s'approche du cylindre externe) et s'atténue donc jusqu'à s'annuler.



- a -

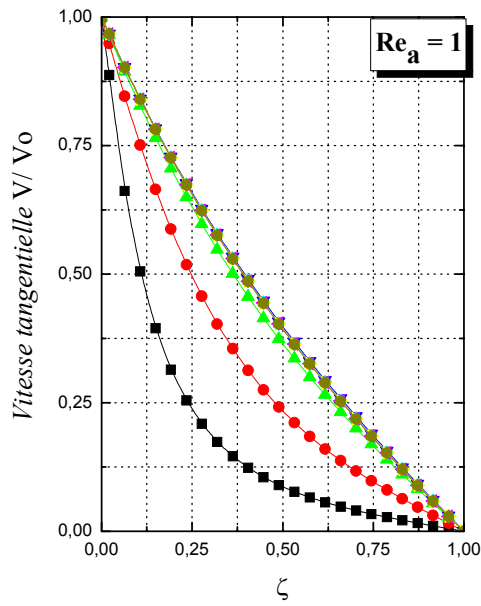


- b -

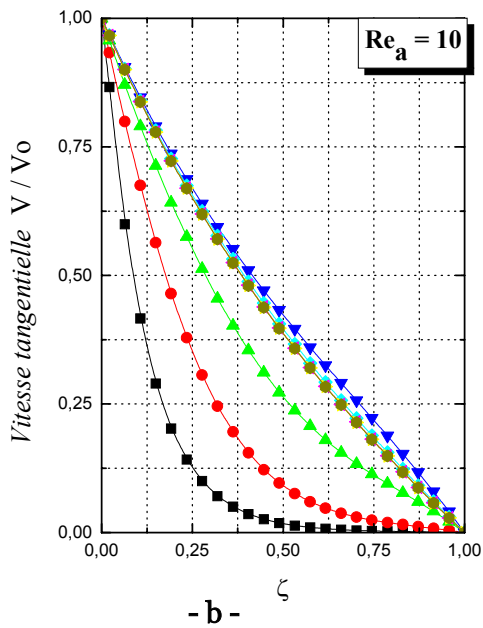


- c -

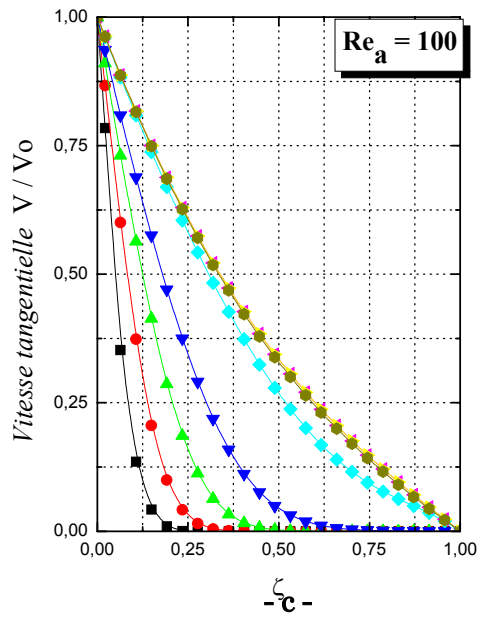
Figure IV.4.2.1 : Evolution axiale du profil radial de la vitesse axiale en régime laminaire



- a -



- b -



- c -

Figure IV.4.2.2: Evolution axiale du profil radial de la vitesse tangentielle en régime laminaire

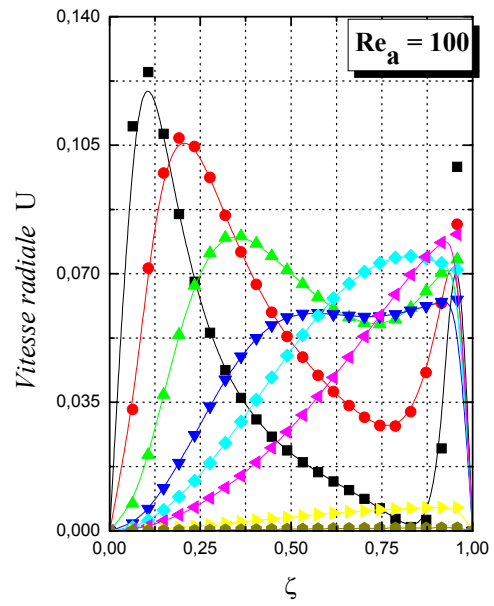
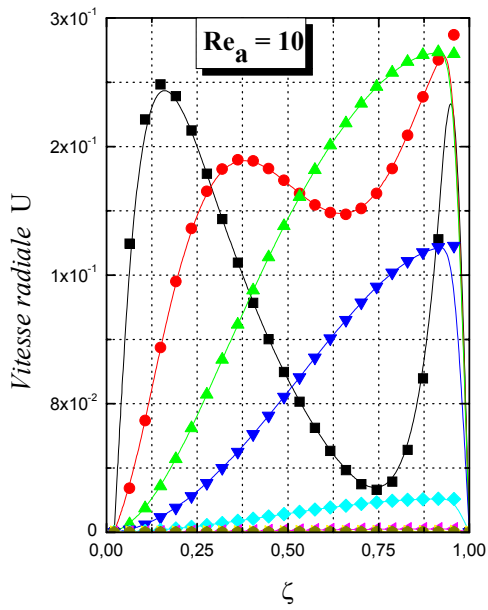
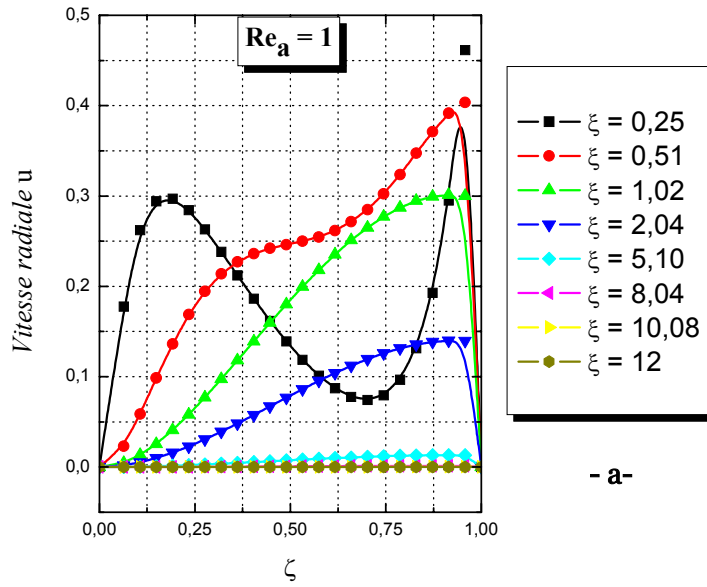


Figure IV.4.2.3 : Evolution axiale du profil radial de la radiale en régime laminaire

IV.4.3. Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse

Comme on a vu dans la section précédente, le profil des vitesses dans l'espace annulaire est une fonction de la position axiale ξ , nous avons représenté l'effet du nombre de Reynolds pour plusieurs côtes.

▪ Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse axiale

A l'entrée de l'espace annulaire ($\xi = 0.25$), le profil de la vitesse axiale est pratiquement identique et garde la forme pour toutes les valeurs de Reynolds étudié ($Re_a = 1, 10, 20, 50, 100$). A partir de la position $\xi = 1.02$, l'effet du nombre de Reynolds commence à se manifester. Voir figure (VI.4.3.1).

En augmentant le nombre de Reynolds, ce profil se resserre, le maximum de la vitesse augmente, plus particulièrement en aval de l'espace annulaire. Ce maximum s'approche du milieu de l'espace annulaire pour les Reynolds croissant.

Cependant, lorsque le nombre de Reynolds augmente, plus les forces d'inertie sont dominantes, plus l'écoulement est accéléré.

A la sortie de l'espace annulaire ($\xi = 12$), on remarque bien les effets de bords sur les profils de vitesse axiale.

▪ Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse tangentielle

En ce qui concerne l'effet de l'écoulement axial sur le profil de la vitesse tangentielle, nous constatons d'après la figure (IV.4.3.2) qu'à l'entrée de l'espace annulaire ($\xi = 0.25, 1.02$), plus le débit axial est faible, plus la courbure du profil de cette composante augmente. Par contre en aval, l'influence de l'écoulement axial sur le profil de la vitesse tangentielle disparaît pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds ($Re_a < 50$).

▪ Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse radiale

Au voisinage de l'entrée de l'espace annulaire, le maximum de la vitesse radiale diminue sous l'effet de l'écoulement axial. En se déplaçant vers l'aval, ce maximum augmente avec le nombre de Reynolds, (Fig.IV.4.3.3). On constate que l'écoulement axial défavorise la composante radiale de la vitesse à l'entrée, les particules fluides se déplacent davantage suivant l'axe (oz) et puisque comme on a déjà vu, le débit axial est maximal et son effet diminue à fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'entrée.

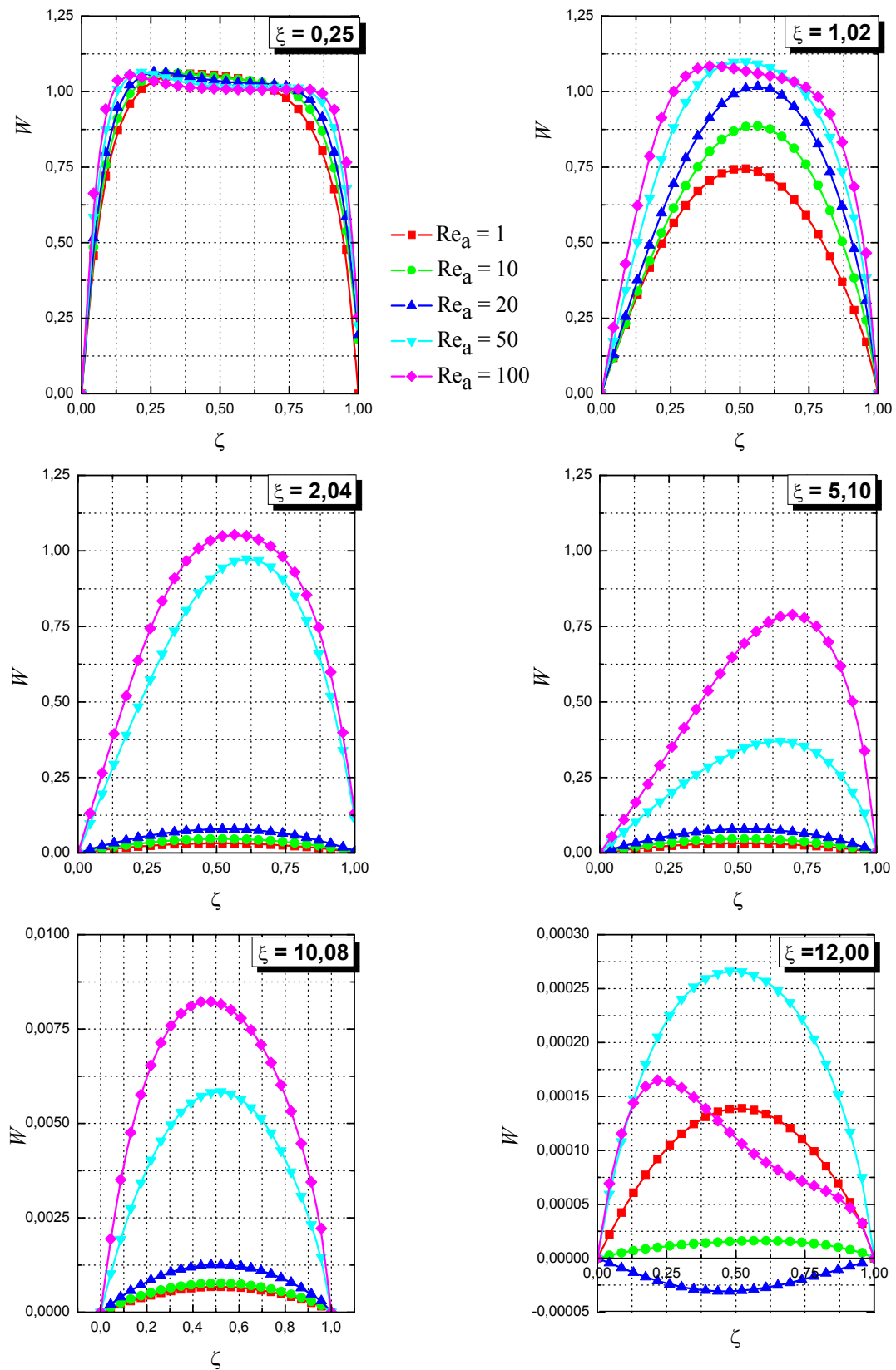


Figure IV.4.3.1: Effet du nombre de Reynolds axial sur le profil de la vitesse axiale en régime laminaire

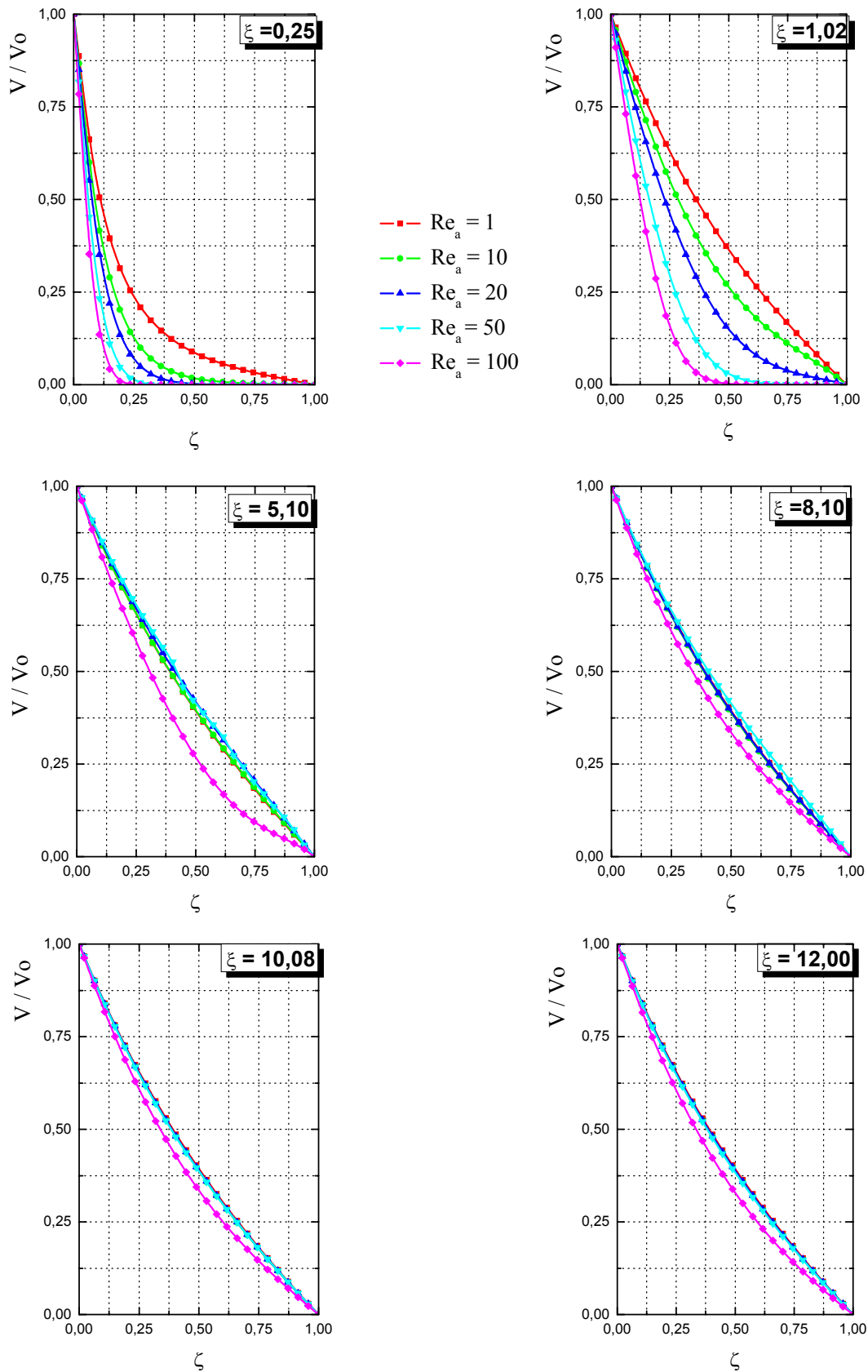


Figure IV.4.3.2 : Influence du nombre de Reynolds axial sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire

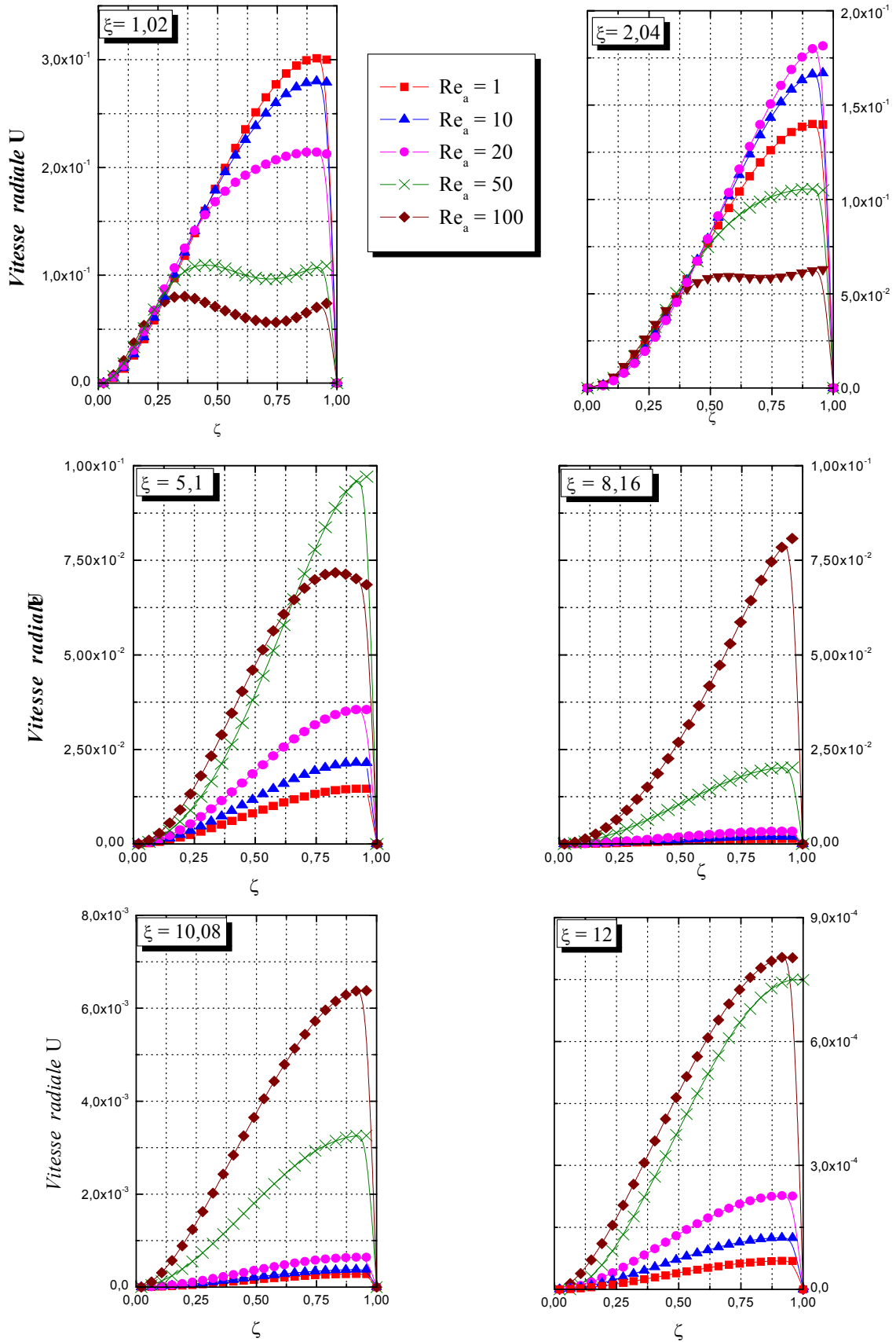


Figure IV.4.3.3 : Influence du nombre de Reynolds axial sur le profil de la vitesse radiale en régime laminaire

IV.4.4. Influence de la rotation du cylindre intérieur sur les profils de vitesse

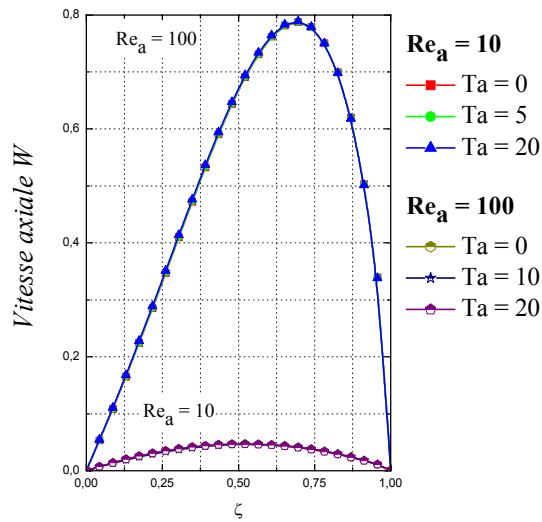
L'effet de la rotation du cylindre intérieur sur les profils des composantes de la vitesse est illustré sur les figures (IV.4.4), pour deux valeurs du nombre de Reynolds axial ($Re_a = 10, 100$). Nous avons considéré trois vitesses de rotation correspondant à trois nombres de Taylor, $Ta = 0, 5, 20$. Ces courbes obtenues pour la position axiale $\xi = 5.10$, montrent que la rotation du cylindre intérieur affecte légèrement le profil de la vitesse axiale et le profil de la vitesse radiale, mais elle n'a aucun effet sur le profil de la vitesse tangentielle dans le cas considéré.

IV.4.5. Influence du nombre de Froude sur les profils de vitesse

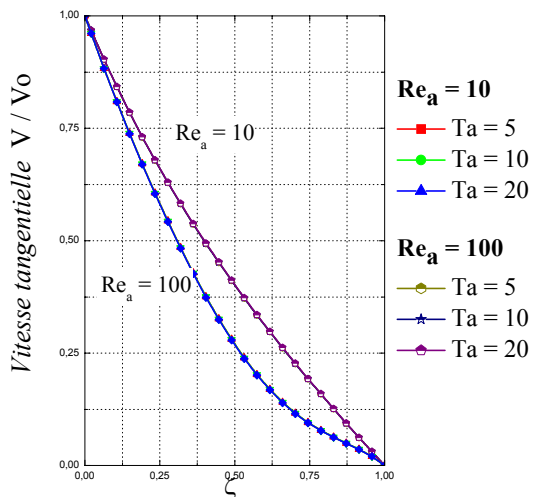
Sur les figures (IV.4.5), nous avons représenté les profils de composantes de la vitesse dans l'espace annulaire à la cote $\xi = 5.10$, en fonction du nombre de Froude pour un nombre de Reynolds $Re_a = 10$ et un nombre de Taylor $Ta = 2$.

Pour les grandes valeurs du nombre de Froude, $Fr > 100$, la gravité n'a pas d'influence sur les profils de la vitesse, et les résultats obtenus sont superposés avec les résultats du cas " sans Froude, $Fr = \infty$ ", l'inertie est dominante dans cette gamme de Froude et on peut négliger les forces de la gravité.

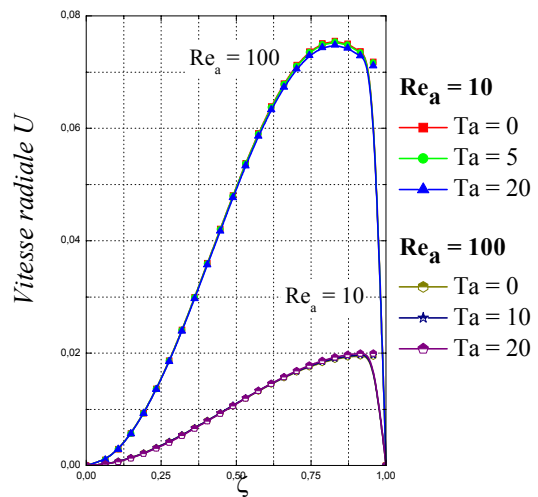
Ces figures indiquent que le profil de la vitesse tangentielle est indépendant des forces de la gravité. Les profils de la vitesse radiale est affecté par les nombres de Froude plus faibles ($Fr = 1$) ; le maximum de cette composante diminue pour cette valeur de Froude. Par contre, l'effet de ce nombre adimensionnel sur la composante axiale est bien marqué. Plus l'inertie diminue par rapport à la gravité, plus le maximum de la vitesse axiale diminue. Pour les valeurs de Froude plus faibles ($Fr < 10$), la vitesse axiale change de direction prend des valeurs négatives.



- a -



- b -



- c -

Fig (IV.4.4): Effet de la rotation du cylindre intérieur sur les profils de la vitesse en régime laminaire ($\xi = 5.10$).

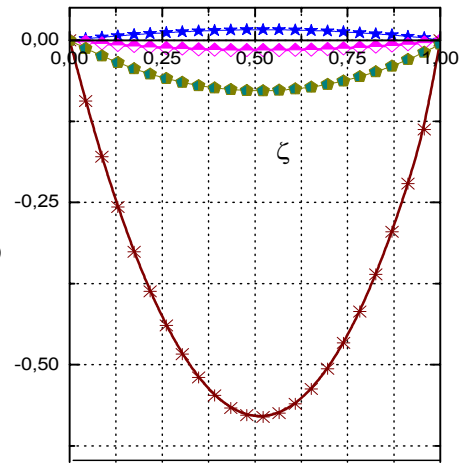
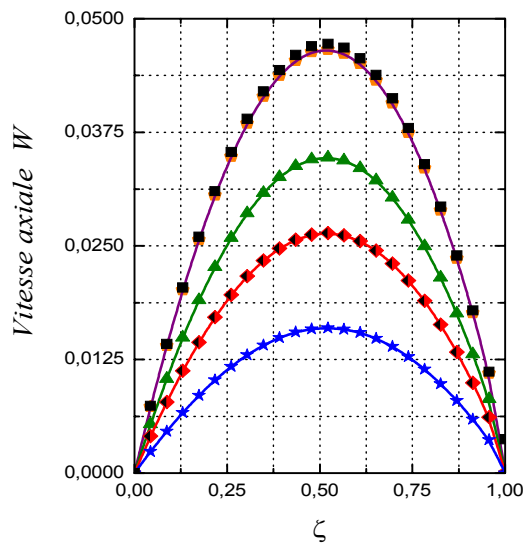
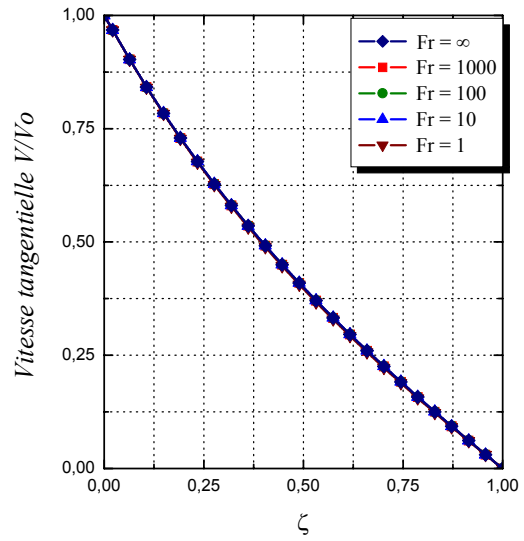
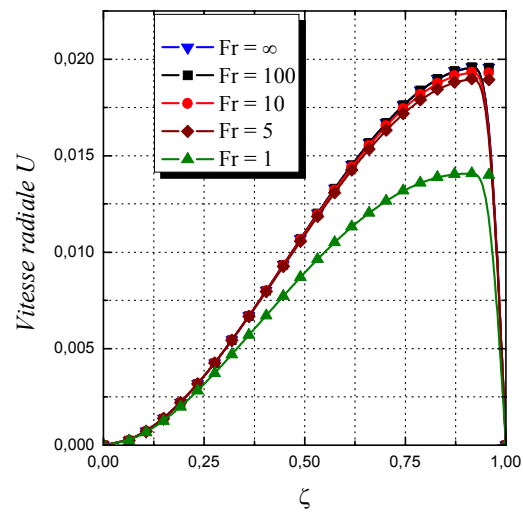


Figure IV.4.5 : Effet du nombre de Froude sur les profils de vitesse en régime laminaire ($Re_a = 10$, $Ta = 2$, $\xi = 5.1$)

IV.4.6. Champ de pression

IV.4.6.1. Distribution radiale de la pression

La figure (IV.4.6.1) représente la distribution radiale de la pression relative à l'instant $t = 10$ pour une vitesse de rotation faible ($Ta = 2$) et pour différentes côtes axiales. Nous avons considéré trois valeurs du nombre de Reynolds ($Re_a = 1, 10, 100$). Les résultats obtenus nous ont permis de constater que sur une section droite de l'espace annulaire ($\xi = cte$), la pression est constante. Elle diminue d'une section à une autre tout en s'éloignant de l'entrée. Cette propriété est identique pour les trois valeurs du nombre de Reynolds.

IV.4.6.2. Distribution axiale de la pression

La distribution axiale est rapportée sur la figure (IV.4.6.2 a). Nous remarquons l'aspect linéaire de la courbe $P(z)$ pour toutes les valeurs du nombre de Reynolds considéré. La pente qui représente le gradient axial de la pression ($\partial p / \partial z$), diminue en valeur absolue lorsque le débit axial augmente. Cette constatation peut être déduite de la figure (IV.4.6.2b).

IV.4.6.3. Influence de la rotation du cylindre tournant sur le profil axial de la pression

L'effet de la rotation est illustré sur la figure (IV.4.6.3) pour deux valeurs du nombre de Reynolds 1 et 100. Pour la valeur la plus faible de Reynolds, le profil axial de la pression varie légèrement, par contre, pour $Re_a = 100$, les profils correspondant aux trois valeurs du nombre de Taylor (0, 10, 20) sont parfaitement superposés. En régime laminaire pur la rotation n'a pas d'effet sur le champ de la pression.

IV.4.6.4. Influence du nombre de Froude sur le profil axial de la pression :

Pour deux valeurs du nombre de Reynolds, $Re_a = 1, 100$, nous avons obtenu à l'instant $t = 10$ les profils axiaux de la pression en fonction du nombre de Froude, figure (IV.4.6.4).

La linéarité de la courbe $\Pi(z)$ persiste dans le cas où les forces de gravité existent (faible valeur de Froude). Pour les faibles valeurs de Reynolds (fig. IV.4.6.4 a) le gradient de pression est quasiment constant en fonction du nombre de Froude ($Fr \geq 1$), tableau (IV.4.6.4a). Pour l'autre valeur de Reynolds ($Re_a = 100$), figure (IV.4.6.4b), l'effet du Froude apparaît nettement, et le gradient de la pression diminue en valeur absolue en augmentant le nombre de Froude. (Voir tableau IV.4.6.4b).

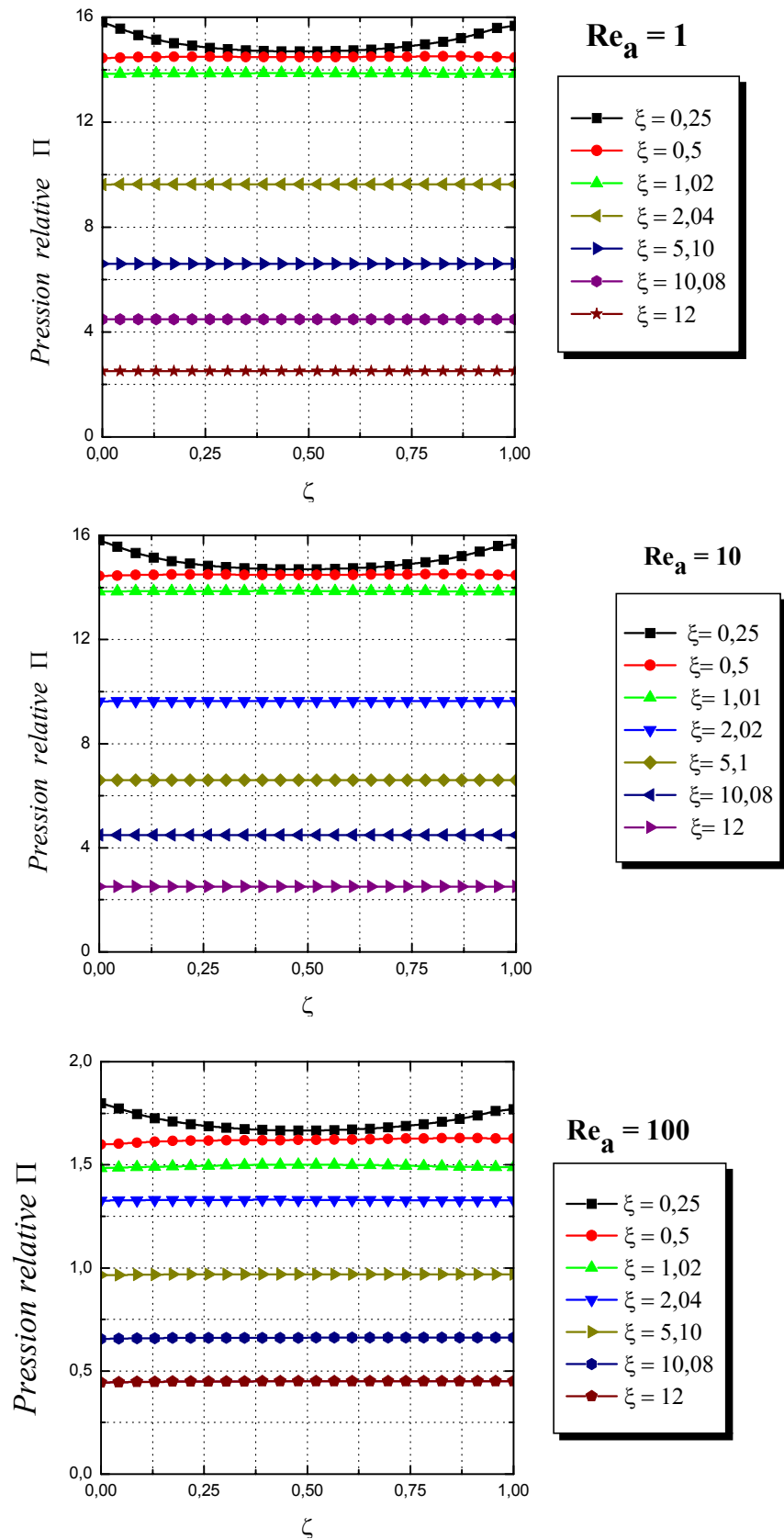


Figure (IV.4.6.1): Distribution radiale de la pression en régime laminaire.

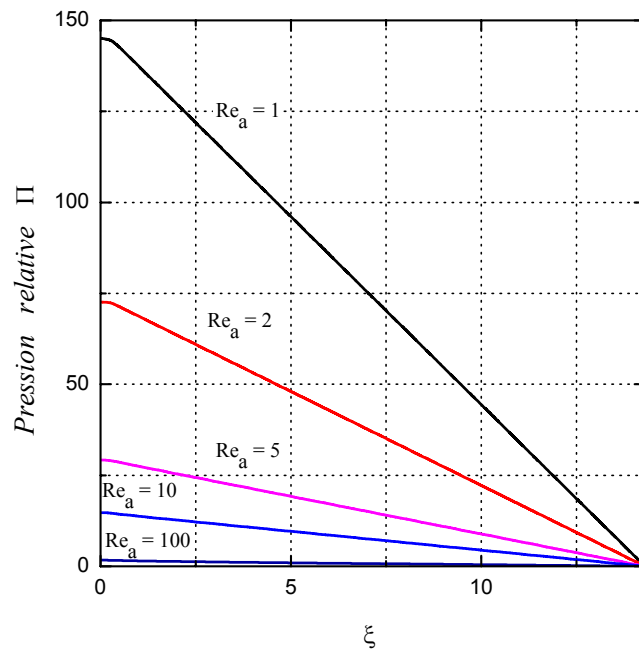


Figure (IV.4.6.2 a) : Distribution axiale de la pression relative en régime laminaire.

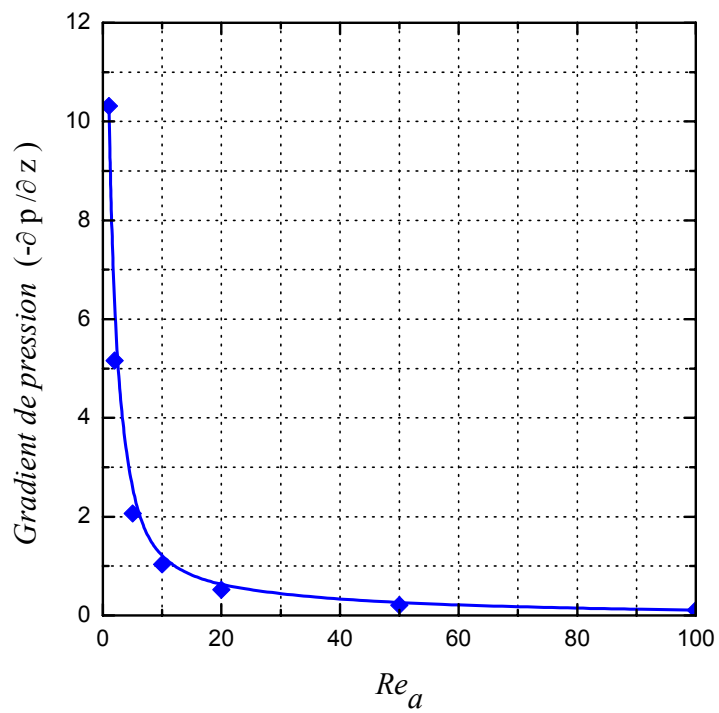
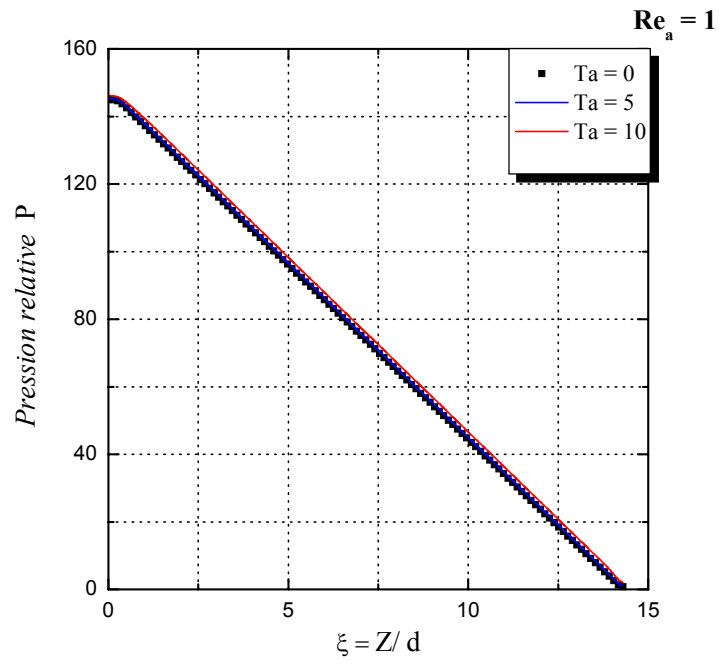
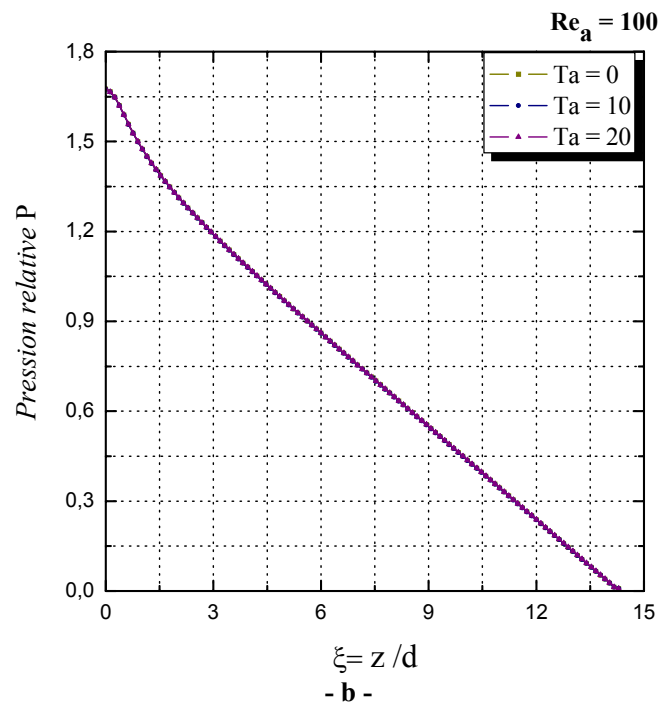


Figure (IV.4.6.2b) : variation du gradient de pression en fonction du nombre de Reynolds en régime laminaire

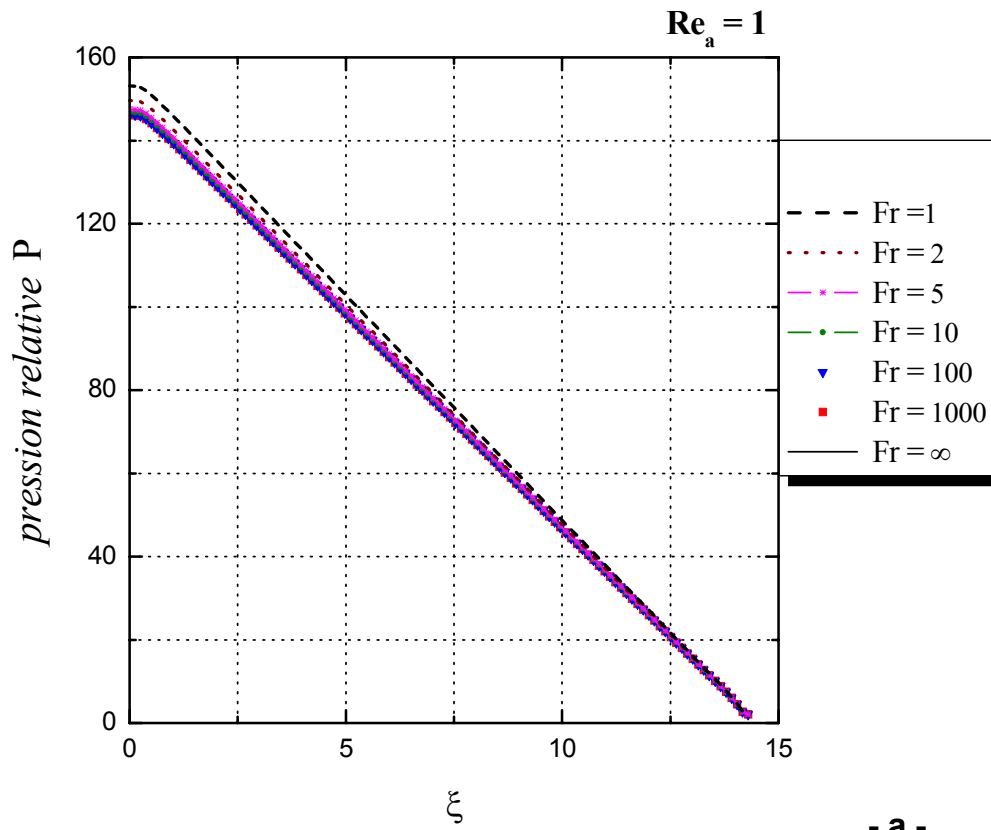


- a -



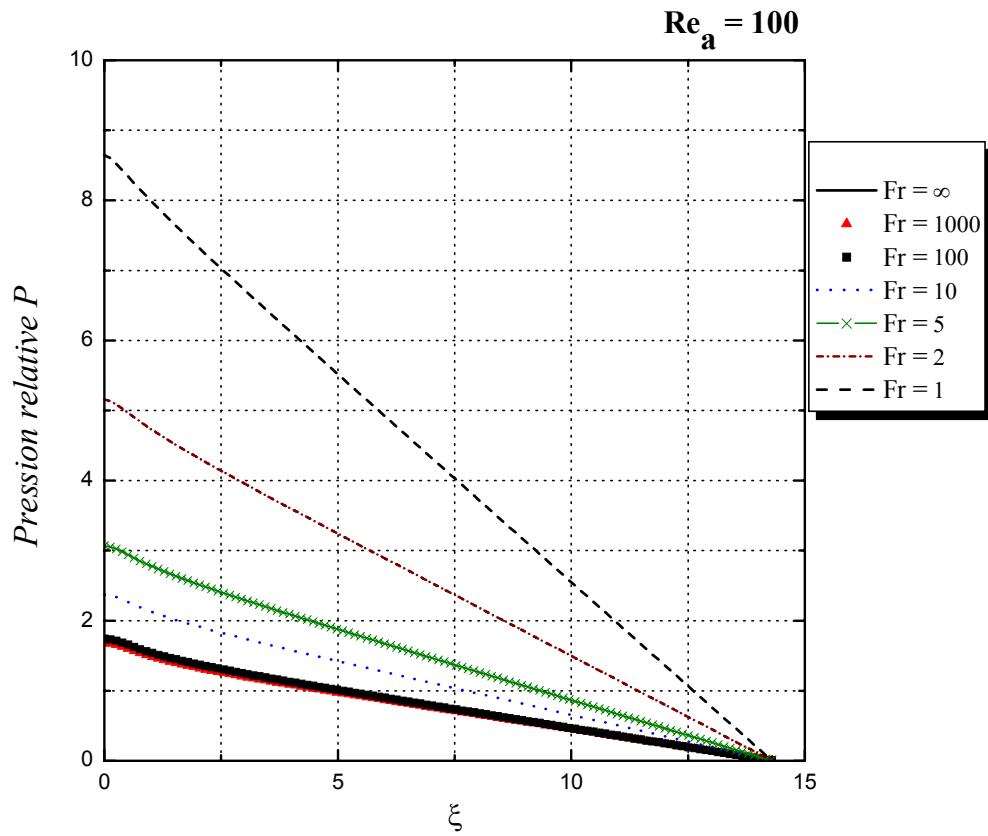
- b -

Figure (IV.4.6.3) : Influence de la rotation du cylindre intérieur sur le profil axial de la pression en régime laminaire



Fr	∞	1000	100	10	5	2	1
$-\partial p / \partial z$	10.3021	10.3026	10.307	10.351	10.3999	10.5477	10.79144

Figure (IV.4.6.4 a) : Influence du nombre de Froude sur le profil axial de la pression en régime laminaire



Fr	∞	1000	100	10	5	2	1
$-\partial p / \partial z$	0.11544	0.1104	0.11544	0.15948	0.208	0.355	0.59988

Figure (IV.4.6.4b) : Influence de la rotation du cylindre tournant sur le profil axial de la pression laminaire

IV.5. Régime laminaire instable (régime de transition)

Cette partie concerne l'étude de l'écoulement de fluide lors de la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, pour des vitesses de rotation correspondant à des nombre de Taylor $Ta \leq Ta_c$. Les résultats sont donnés à l'instant $t = 10$ pas.

IV.5.1. Profils de vitesse tangentielle

Comparativement au cas laminaire, la courbe des variations de la vitesse tangentielle en fonction de la coordonnée radiale, est caractérisée essentiellement par l'existence d'un point d'inflexion, traduisant le mélangeage du fluide par les tourbillons (fig.IV.5.1). Cette inflexion est d'autant plus marquée que le débit est faible (fig.IV.5.2 a) et la vitesse de rotation est élevée.

En effet, pour un débit axial fixé, une augmentation du nombre de Taylor accroît l'énergie des tourbillons, ce qui induit un meilleur mélangeage. Ces profils sont en accord avec ceux présentés par [C.NOUAR\[12\]](#).

Au contraire, pour une vitesse de rotation donnée, un accroissement du débit conduit à une diminution de l'énergie des tourbillons et donc du mélangeage. [M.NAIMI & aL 1990\[50\]](#) ont abouti à la même constatation expérimentalement pour un fluide non newtonien(fig IV.5.1.2b).

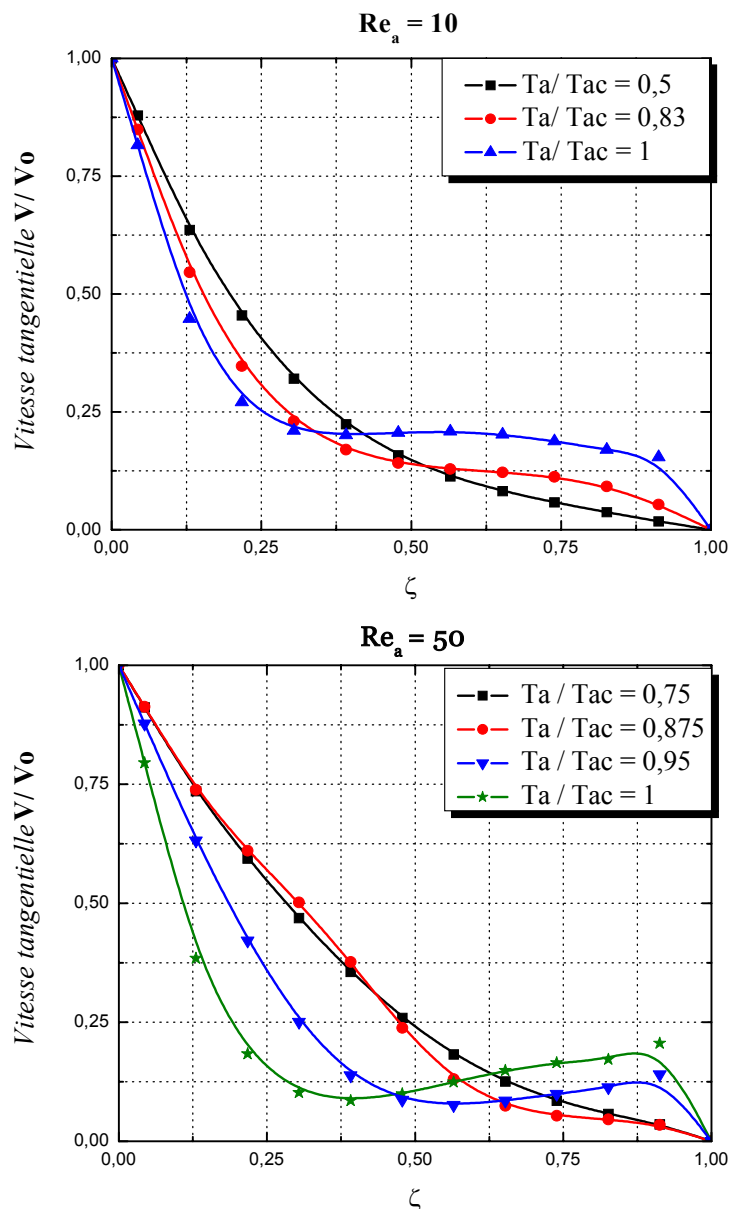
IV.5.2. Profil de vitesse axiale

Au voisinage de l'entrée de l'espace annulaire ($\xi = 2.04$), le maximum de la vitesse axiale augmente avec le nombre de Taylor et se déplace vers le cylindre tournant, provoquant ainsi une diminution du gradient de vitesse axiale au niveau du cylindre intérieur. [C.Nouar\[12\]](#) a obtenu le même résultat pour un écoulement axial établi.

En se dirigeant vers l'aval de l'espace annulaire, le profil de la vitesse axiale est fortement déformé sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur. La composante axiale de la vitesse possède deux extremums (fig.IV.5.2), un positif et l'autre négatif, leurs valeur et sens dépendent de la position axiale et du nombre de Taylor. Cela traduit l'existence d'un écoulement entrant et un écoulement sortant par rapport à l'entrée. Cette propriété a été identiquement remarquée par [J.Y.HWANG & aL. \[29\]](#) dans le cas d'un espace annulaire étroit. En outre, on remarque que, à la sortie du l'espace annulaire, la composante axiale prend des valeurs non négligeables par rapport à l'unité comparativement au cas laminaire (pour $\xi=10.08$ et $Ta = 2 \text{ Max} (w) \approx 10^{-3}$).

IV.5.3. Profil de vitesse radiale

En ce qui concerne l'effet de la rotation du cylindre tournant sur le profil de la vitesse radiale, en régime instable, la déformation est remarquable, fig.(IV.5.3). A l'entrée de l'espace annulaire, le maximum de la vitesse radiale diminue en augmentant le nombre de Taylor. En raison du mélangeage crée par les cellules de Taylor, la vitesse radiale a des valeurs du même ordre que la composante axiale, contrairement au cas laminaire où la composante radiale peut être négligeables (de l'ordre $\approx 10^{-4}$).



Figure(IV.5.1.1) : Influence de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire instable ($N=0.5$, $\Gamma = 14.3$, $\xi=5.10$)

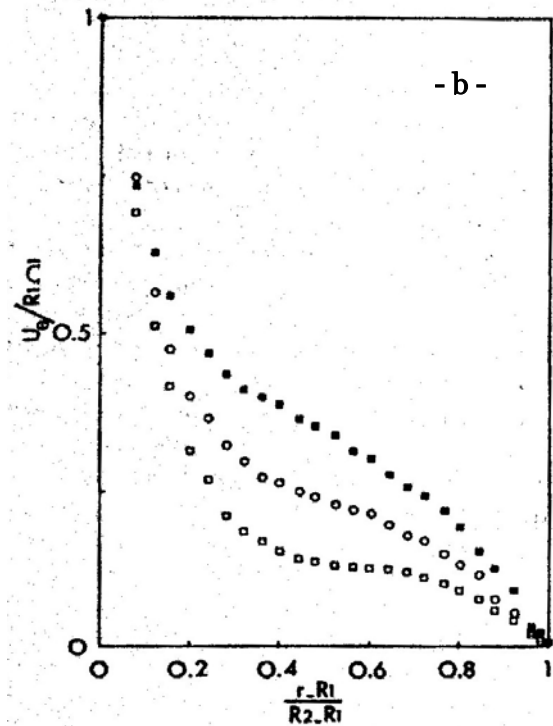
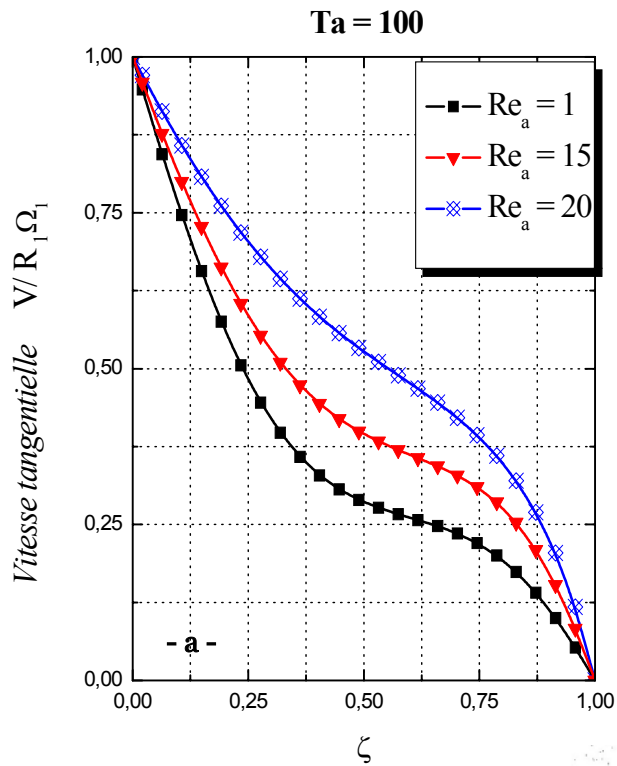


Fig. 8. Influence du nombre de Reynolds généralisé sur le profil de vitesse tangentielle en régime tourbillonnaire. \square , $Re_\theta = 0$, $Ta_\theta = 111,3$; \circ , $Re_\theta = 0,68$; $Ta_\theta = 111,3$, \blacksquare , $Re_\theta = 1,67$, $Ta_\theta = 111,3$.

Figure (IV.5.1.2): influence du nombre de Reynolds sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire instable ($N=0.5$, $\Gamma=14.3$, $\xi=5.10$)

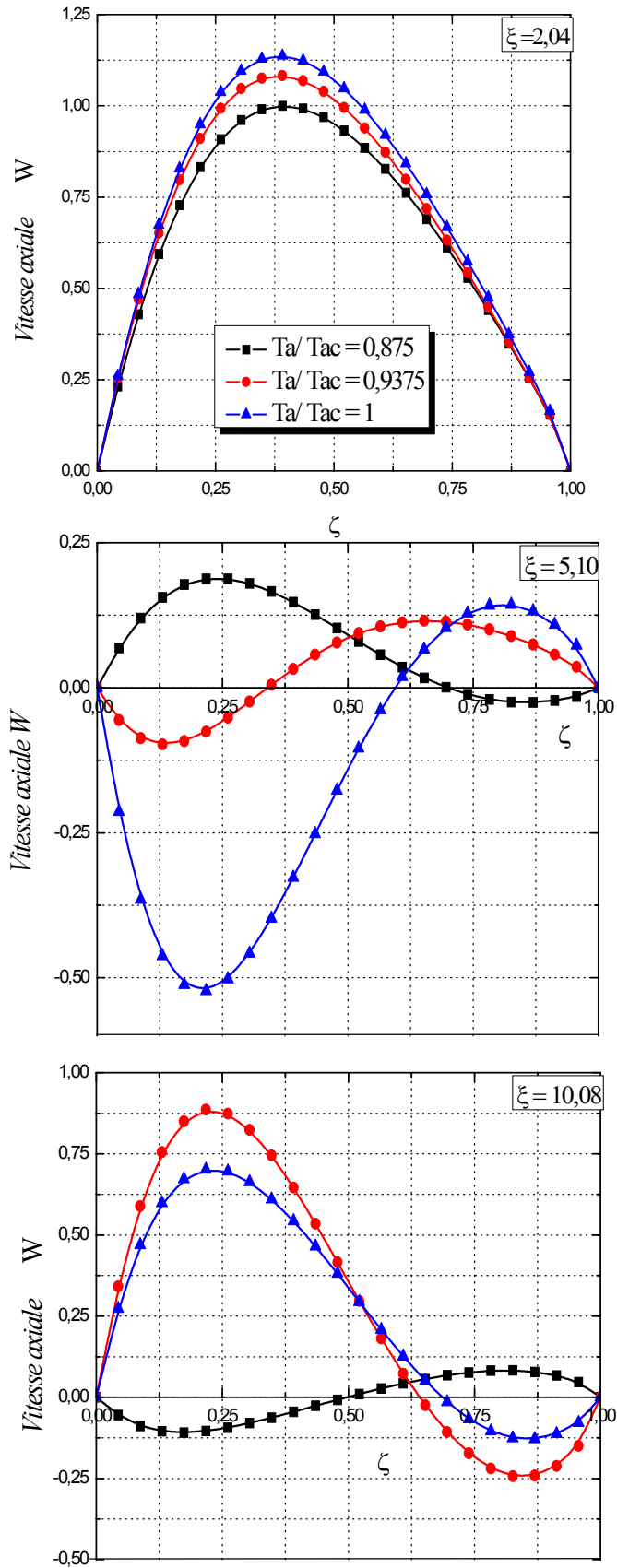


Figure (IV.5.2) : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse axiale en régime laminaire instable, $Re_a = 10$, $N=0.5$, $\Gamma = 14.3$

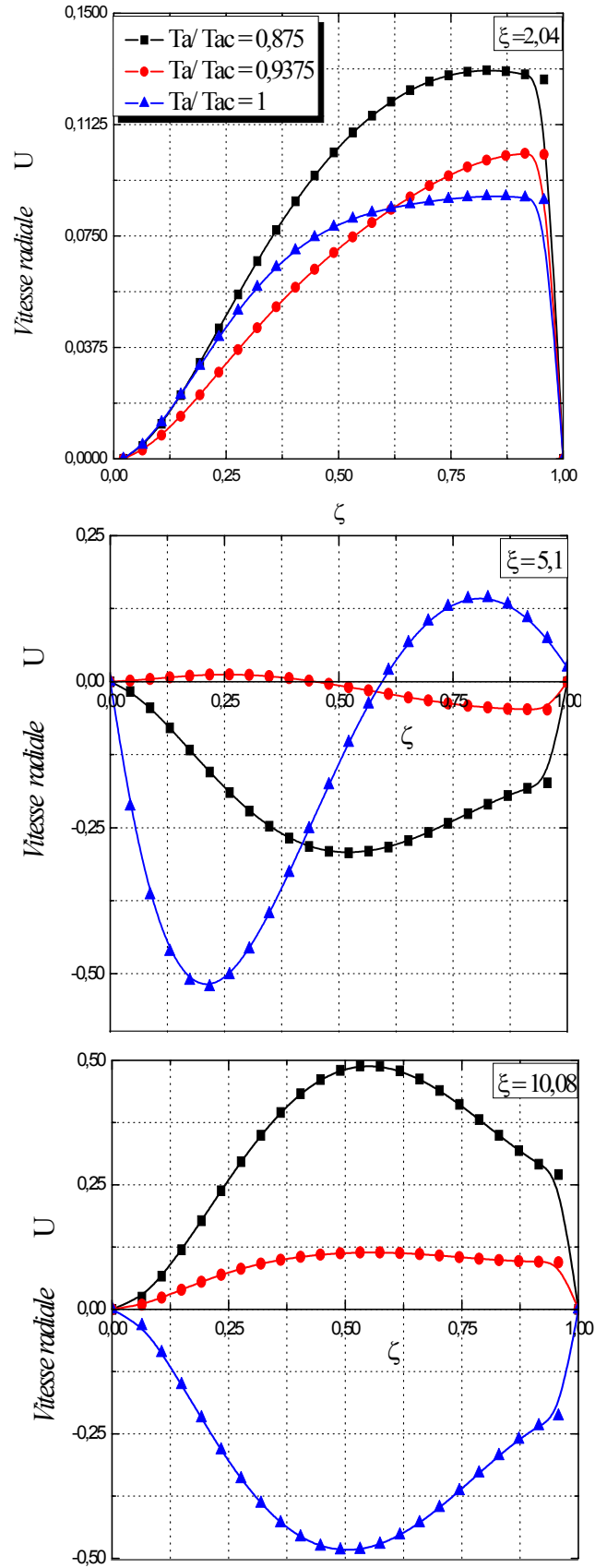


Figure (IV.5.3): Effet de la rotation sur le profil de la vitesse radiale en régime laminaire instable, $Re_a = 10$.

IV.6. Développement des tourbillons dans l'espace annulaire

IV.6.1. Effet de la rotation du cylindre intérieur sur le développement des tourbillons

Sur la figure (IV.6.1), nous avons représenté les lignes de courant pour un nombre de Reynolds axial $Re_a = 20$, à l'instant $t = 10$. L'analyse des lignes de courant indique pour les faibles valeurs du nombre de Taylor, les lignes de courant se présentent sous formes des lignes parallèles à l'axe des cylindres (axe de symétrie). En augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur, les tourbillons commencent à apparaître en aval, à l'extrémité de l'espace annulaire, et au voisinage du cylindre intérieur. Si on augmente encore la vitesse de rotation, le taille de tourbillon croît radialement jusqu'à atteindre le cylindre extérieur. Le premier tourbillon qui apparaît dans la zone d'entrée correspond à un nombre de Taylor $Ta = 0.43 Ta_c$. Au-delà de cette valeur, les tourbillons envahissent l'espace annulaire d'une manière progressive jusqu'à l'occuper complètement à la valeur critique ($Ta_c = 140$). Ce développement de tourbillons dans l'espace annulaire a été observé expérimentalement par A. BOUHADEF[13] et C. NOUAR[12].

Lorsque le nombre de Taylor atteint sa valeur critique, on remarque la formation de six paires de deux cellules contrarotatives. Ces cellules sont symétriques pour les paires se trouvant dans la partie avale de l'espace annulaire. Cette symétrie est moins apparente dans la zone amont.

On remarque également que les tourbillons ainsi développés, ont de tailles différentes, ce qui confirme les résultats obtenus par J. LEGRAND[9]. La taille de tourbillons dépend de la vitesse de rotation du cylindre tournant et du débit axial. Sous l'effet de la rotation, les tourbillons se contractent, par contre, ils s'allongent sous l'effet du débit pour des nombres de Reynolds relativement faibles. En outre, les effets de bords provoquent la déformation des tourbillons.

IV.6.2. Effet du débit axial sur le développement des tourbillons

Si on fixe la vitesse de rotation du cylindre intérieur, et on fait varier le nombre de Reynolds axial, le développement des structures tourbillonnaires se trouve annihilé par le débit axial. La longueur du jeu dépourvue de tourbillons s'étend de plus en plus en plus vers l'aval au fur et à mesure que le nombre de Reynolds axial augmente.

Cette influence stabilisatrice progressive du l'écoulement axial a été bien remarquée pour deux valeurs du nombre de Taylor, $Ta = 140$ et $Ta = 40$, lorsque le nombre de Reynolds prend différentes valeurs, $Re_a = 20, 50, 80, 100$, fig.IV.6.2a-b. il est à noter que le comportement de l'écoulement est à rapprocher de celui sans débit pour les faibles valeurs de Reynolds ($Re_a < 20$), abstraction faite de l'effet de bords à l'amont et à l'aval de l'espace annulaire et celui du facteur de forme.

On constate que le point d'apparition des tourbillons se déplace en aval avec l'écoulement axial. Cette propriété a été étudié par A.BOUHADEF[13] et C.NOUAR[12]. Ils ont donné la courbe de variation du nombre de Taylor critique en fonction de la coordonnée axial z , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds axial.

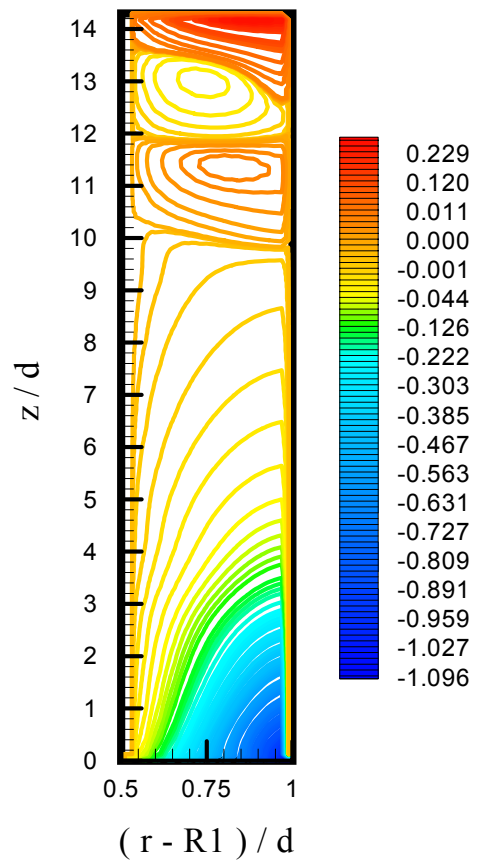
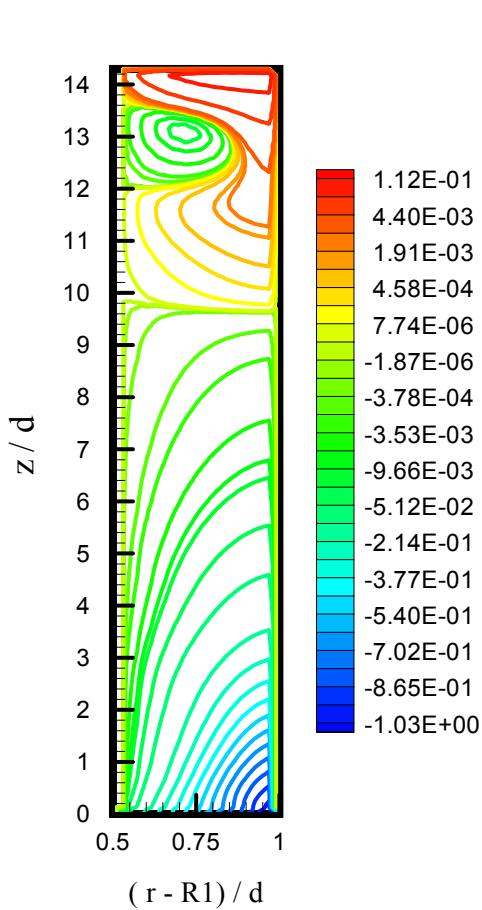
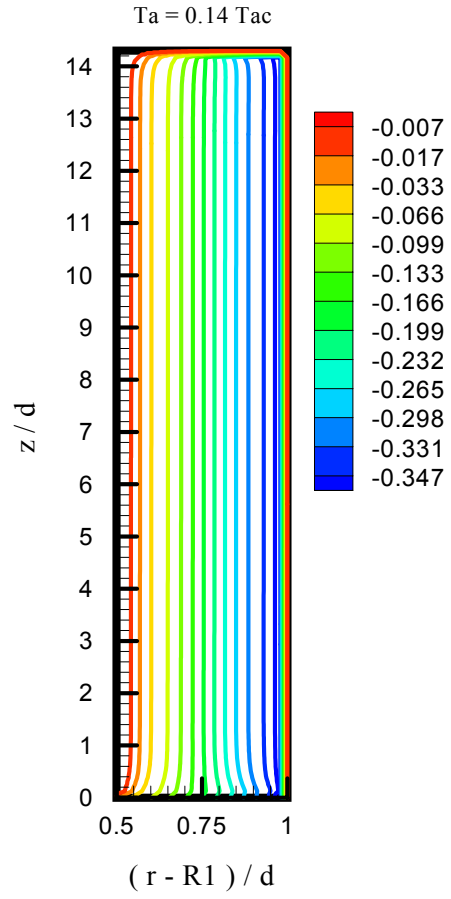
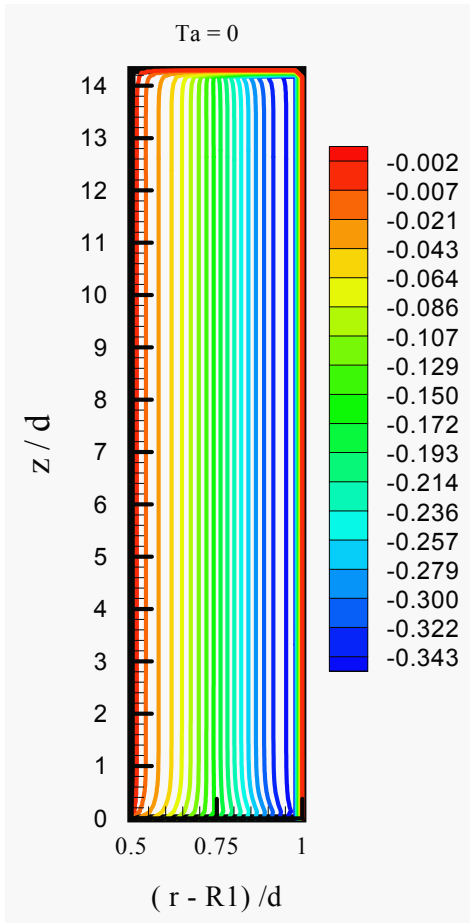
IV.6.3. Evolution des tourbillons dans l'espace annulaire au cours du temps

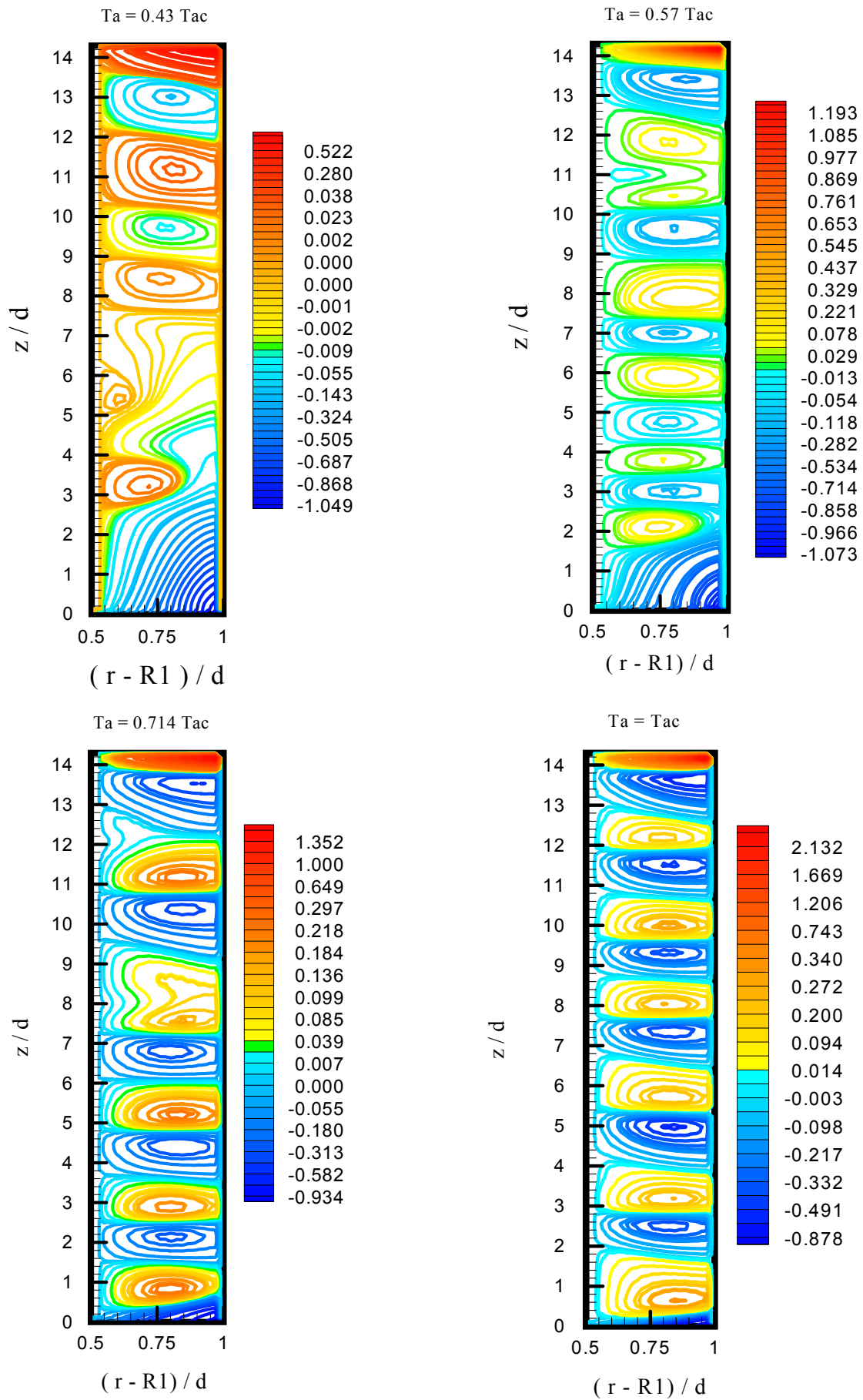
Les figures (IV.6.3) montrent l'évolution des tourbillons dans un espace annulaire caractérisé par un rapport de rayons $N=0.3$ et un rapport de forme $\Gamma = 10$, pour différents instants allant de 10 à 100. Le nombre de Reynolds considéré est 50 et le nombre de Taylor est égal à 100.

La première remarque constatée est que les tourbillons naissent au voisinage du cylindre tournant, et se développent radialement au cours du temps, jusqu'à atteindre le cylindre fixe.

A l'entrée de l'espace annulaire, l'écoulement a tendance de conserver un aspect laminaire (sans tourbillons) sur la moitié de la longueur du jeu, et qui ne change pas au cours du temps.

On remarque également qu'à partir de $t=70$, l'évolution des tourbillons semble s'arrêter et la forme globale des tourbillons est identique pour les deux instants suivants, $t=90, 100$. On peut constater que le régime permanent est atteint.





FigureIV.6.1: Effet de la rotation du cylindre tournant sur le développement des tourbillons pour $Re_a=20$.

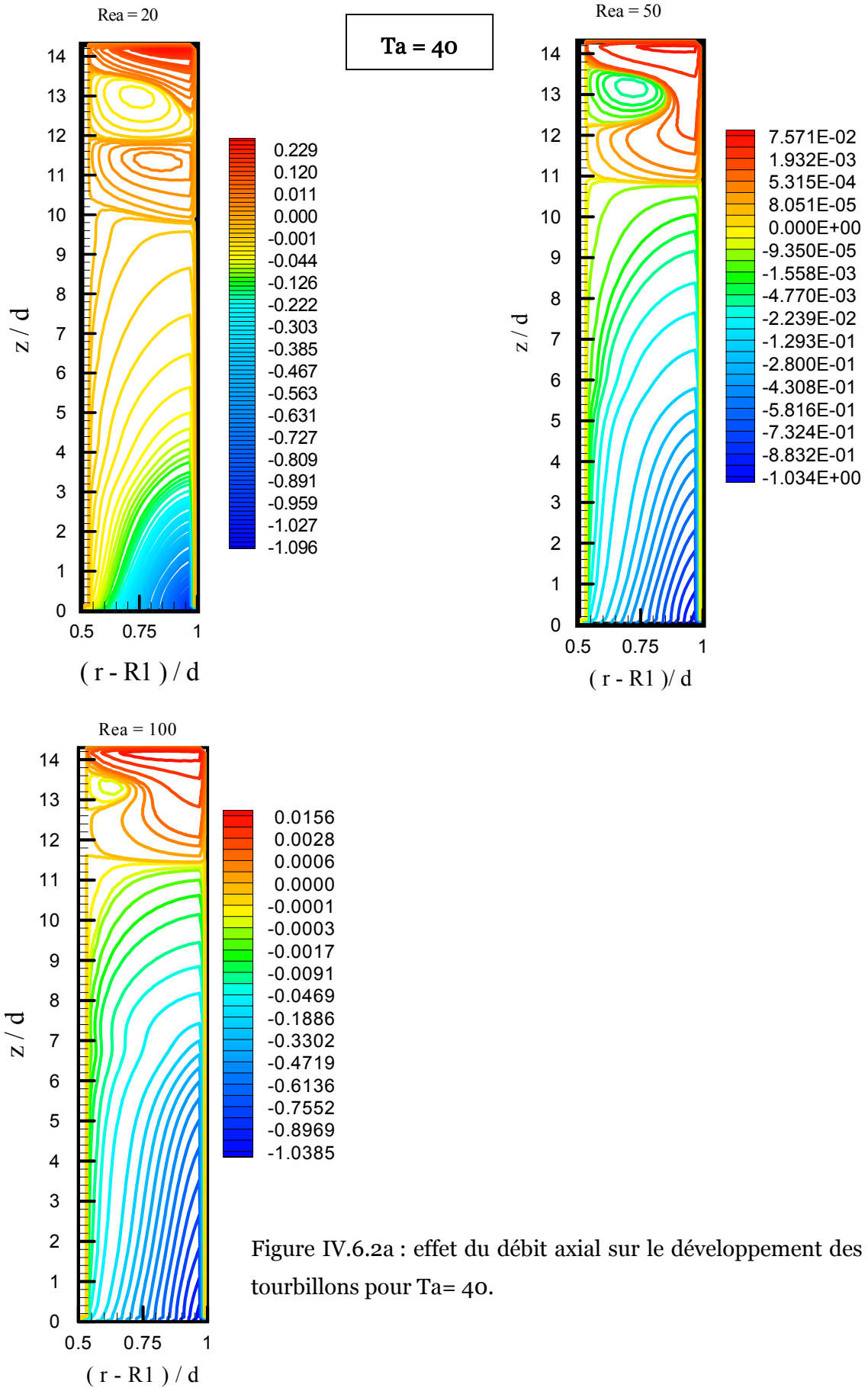
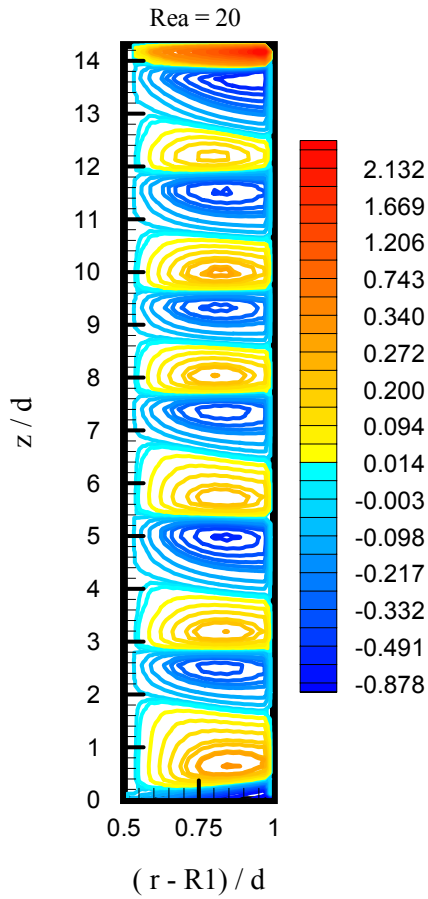
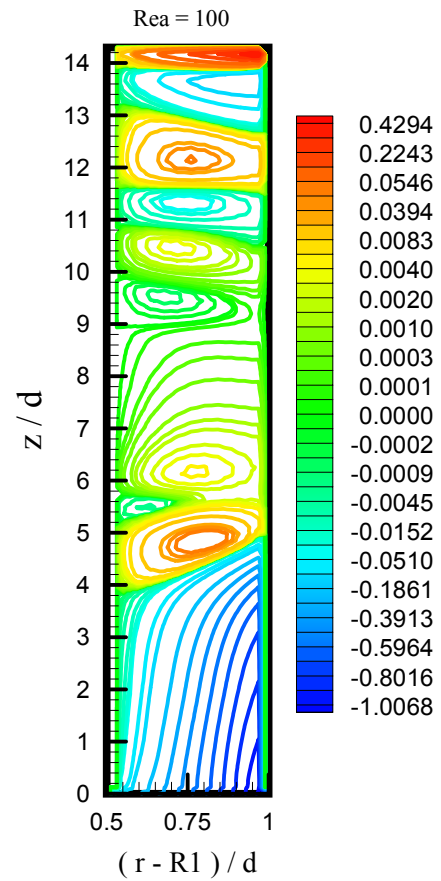
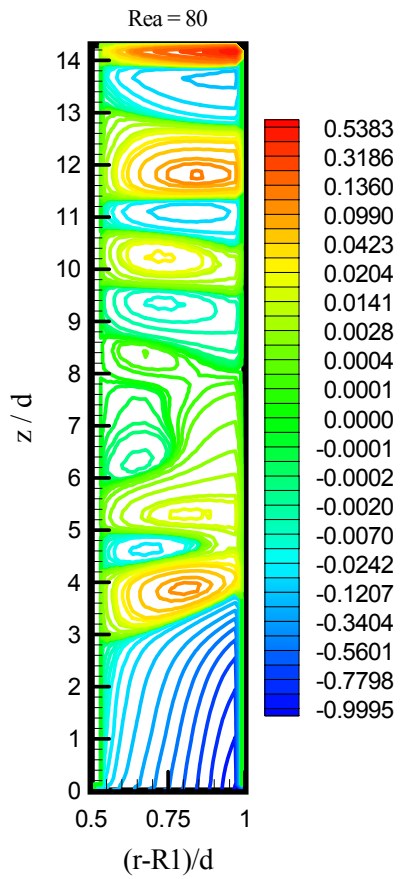
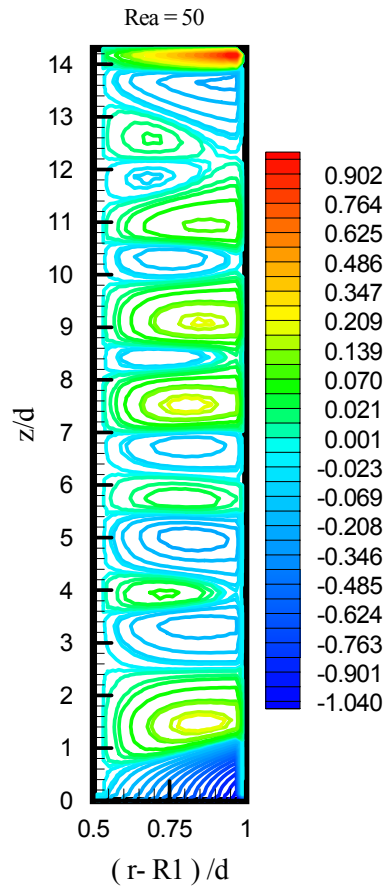
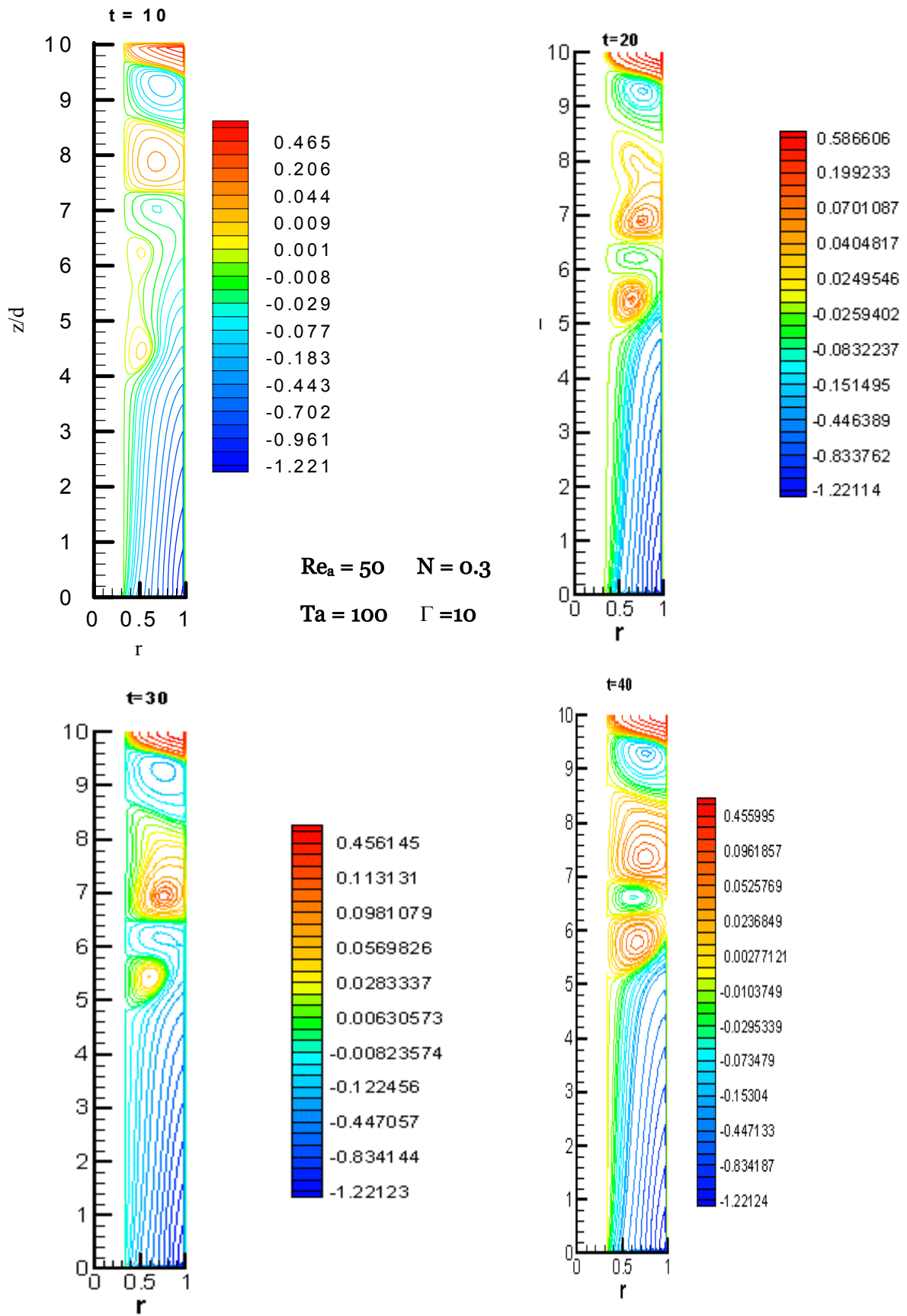


Figure IV.6.2a : effet du débit axial sur le développement des tourbillons pour Ta= 40.

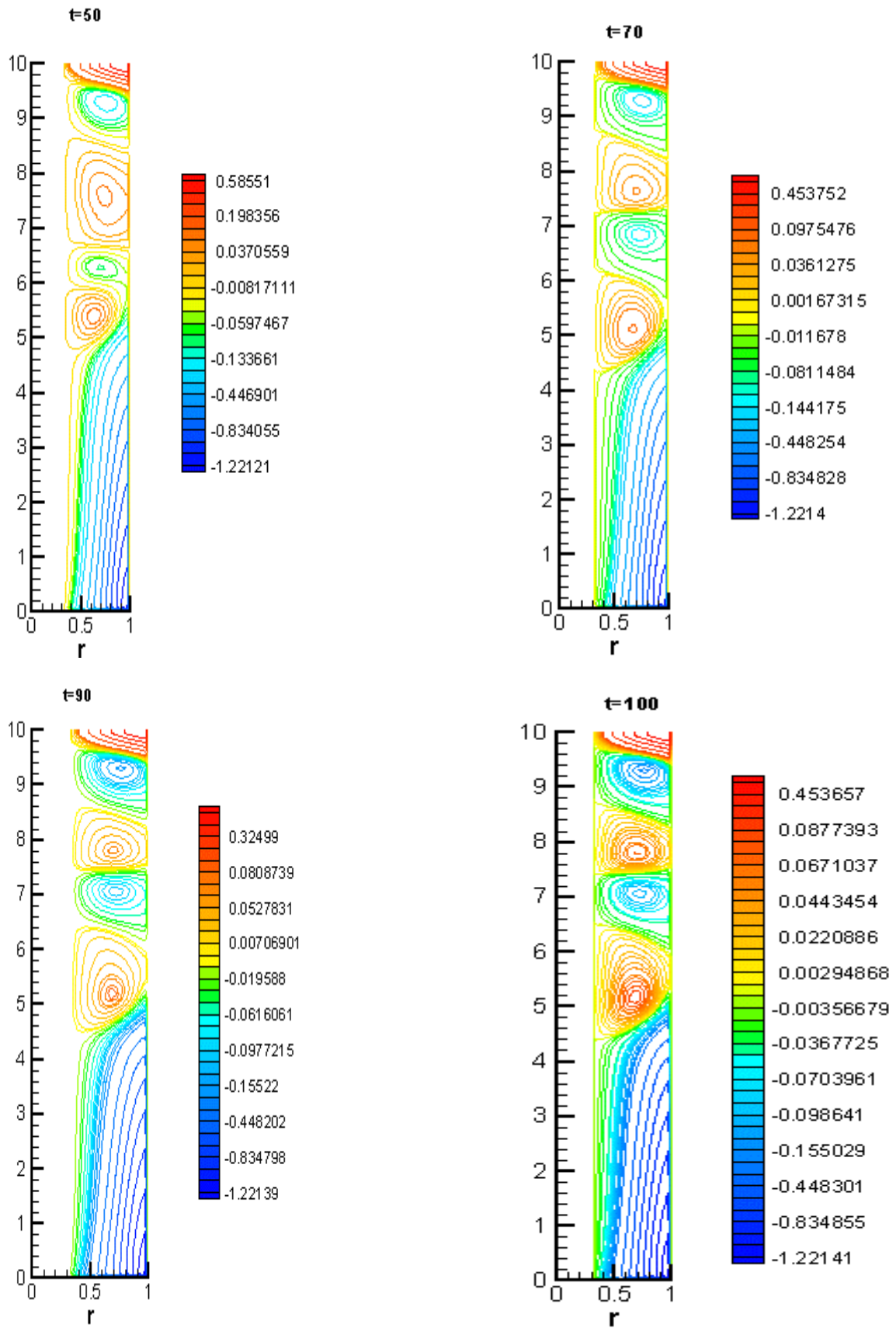


$Ta = 140$





Figures IV.6.2a: Formation progressive des tourbillons
pour $t = 10, 20, 30, 40$



Figures IV.6.2b: Formation progressive des tourbillons

pour $t= 50, 70, 90, 100$

IV.7. Courbes de stabilité

La courbe de stabilité est la frontière délimitant, dans le plan (Re_a, Ta_c) la région correspondant à un écoulement laminaire avec tourbillons et celle où ces structures ne sont pas observables.

Le Taylor critique correspond au remplissage total de l'espace annulaire par les tourbillons.

IV.7.1. Influence du rapport de rayons sur le nombre de Taylor critique

Sur la figure (IV.7.1), on a présenté l'évolution du seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire avec tourbillons, caractérisé par le nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial paramétrée par le rapport des rayons, $N = 0.1, 0.3, 0.5$. Pour une géométrie donnée, on a déterminé la vitesse de rotation critique pour différentes valeurs du nombre de Reynolds axial comprises entre 1 et 100. Afin de négliger les effets des forces de gravité, on a choisi un nombre de Froude suffisamment grand ($Fr = 1000$).

Pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds axial ($Re_a < 10$), il apparaît que le Taylor critique garde presque la même valeur pour un rapport de rayons donné. Ce qui indique que l'écoulement axial influe légèrement sur la stabilité de l'écoulement dans cette gamme du débit axial, comme cela a été constaté par S.RANI & A.PEARSLSTEIN [26] qui ont utilisé comme paramètres ($N = 0.5, 0 \leq Re_a \leq 10000$). Par contre, pour des valeurs du nombre Reynolds relativement élevées, le Taylor critique est une fonction croissante du débit axial. Ce qui conduit à prouver l'effet stabilisateur de l'écoulement tourbillonnaire par l'apport d'un débit axial.

En outre, ces courbes indiquent que pour une valeur donnée du débit axial, l'écoulement est d'autant plus instable que l'espace annulaire est étroit.

IV.7.2. Influence du facteur de forme sur le nombre de Taylor critique

Les courbes rapportées sur la figure (IV.7.2) représentent la variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial, pour différentes valeurs du rapport d'aspect Γ , dans le cas d'un espace annulaire de rapport de rayons $N = 0.3$ et un nombre de Froude, $Fr = 1000$. Pour les faibles valeurs du débit ($Re_a < 10$), on remarque que le Taylor critique varie légèrement avec le rapport de forme. Cette remarque peut rejoindre les résultats obtenus dans le cas sans débit axial, par S.BENMANSOUR 1984[51] et M.J.EL-

DUJAILY1983[52]. Par contre, pour des nombre de Reynolds élevées, l'effet de ce paramètre sur l'apparition de l'instabilité apparaît nettement. Dans cette gamme de Reynolds, le Taylor critique est une fonction décroissante du rapport du forme. Si on réduit la longueur de l'espace annulaire, la perturbation quitte l'espace annulaire, et la vitesse de rotation du cylindre intérieur doit être augmentée pour avoir le seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire. TAKEUCHI & JANKOWSKI [26] ont abouti à cette conclusion en comparant leurs résultats théoriques avec ceux obtenus expérimentalement.

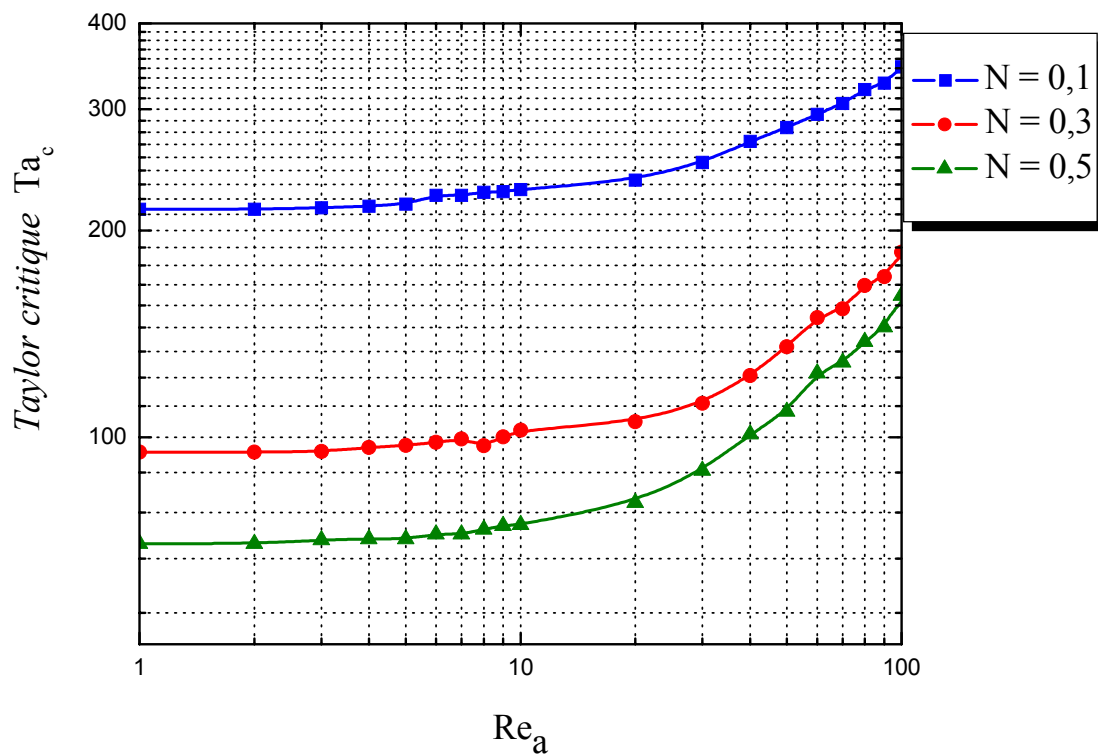


Figure (IV.7.1) : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial et le rapport de rayons N ($\Gamma = 51$).

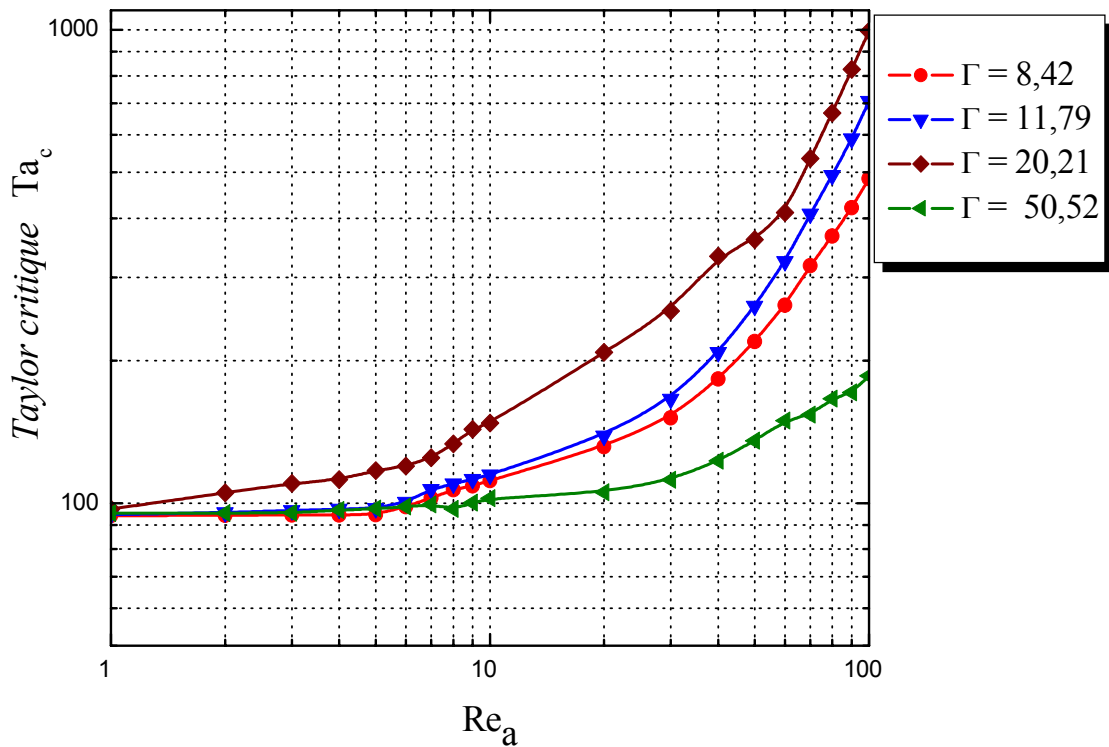


Figure (IV.7.2) : Influence du rapport de forme sur le seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire. (N = 0.3)

IV.7.3. Influence du nombre de Froude sur le nombre de Taylor critique

L'évolution du point d'apparition du régime instable en fonction du nombre de Froude a été étudié pour différentes valeurs du nombre de Reynolds comprises entre 1 et 100 et pour un rapport de rayons $N = 0.3$. Les courbes de la figure (IV.7.3.a) représentent la variation du nombre de Taylor critique Ta_c en fonction du nombre de Froude, Fr .

Pour un nombre de Reynolds axial donné, le nombre de Taylor critique augmente au fur et à mesure que Fr croît jusqu'à une valeur limite d'autant plus grande que Re_a est élevé.

Pour des nombres de Froude relativement faibles, $Fr \leq 20$, la valeur limite est atteinte plus rapidement pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds que les grandes valeurs. La gravité dans ces cas influe sur la stabilité de l'écoulement dans l'espace annulaire.

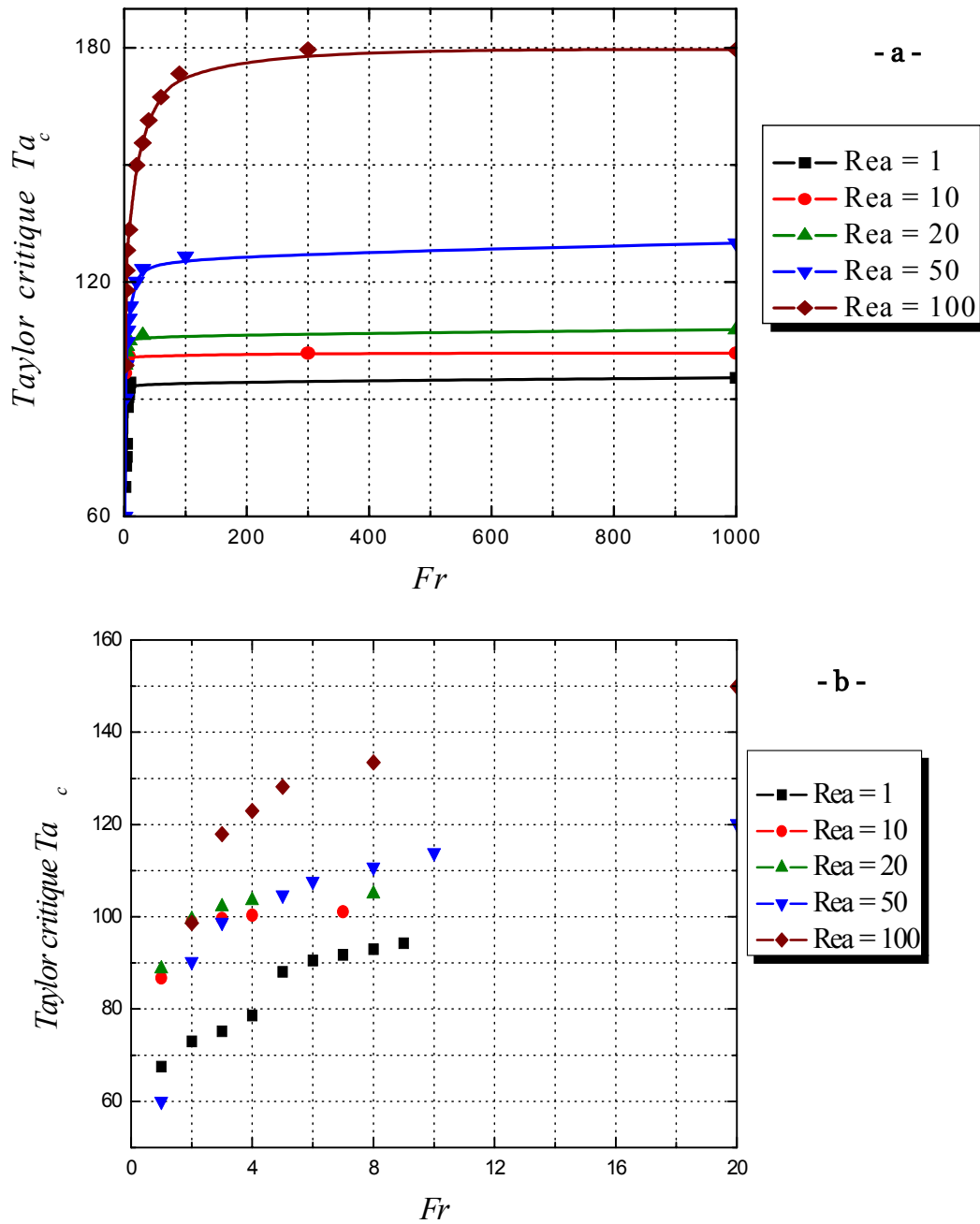


Figure (IV.7.3) : Influence du nombre de Froude sur le seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire ($N = 0.3$).



CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Ce travail concerne l'étude des instabilités hydrodynamiques dans le cas d'un écoulement de Taylor Couette à débit axial imposé.

Une étude bibliographique a permis de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition d'instabilités au sein de l'écoulement.

La résolution numérique a été faite par la méthode de différences finies. Elle est basée sur un schéma semi- implicite de type Crank- Nicholson. Les équations sont résolues en variables primitives avec un processus itératif basé sur la méthode de Gauss-Seidel. La validation du code de calcul montre la fiabilité de la méthode utilisée.

L'influence des différents paramètres de l'écoulement ainsi que ceux relatifs à la configuration géométrique sur le comportement du fluide a été étudiée.

Le comportement hydrodynamique est étudié à travers le champ de vitesse et le champ de pression, pour des faibles valeurs du nombre de Taylor , correspondant au régime laminaire pur. L'effet de forces de gravité a été étudié en utilisant le nombre de Froude . Pour les grandes valeurs de ce dernier ($Fr > 100$), l'écoulement est identique au cas d'un écoulement horizontal ($Fr \rightarrow \infty$). En deçà de cette valeur, l'influence du nombre de Froude est perceptible.

Le seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire caractérisé par le nombre de Taylor critique, est déterminé pour des nombres de Reynolds axial $Re_a \leq 100$, et pour trois distances annulaires correspondant à des rapports de rayons $N = 0.1, 0.3, 0.5$. Dans le cas des faibles valeurs du nombre de Reynolds axial, $Re_a < 10$, l'écoulement axial affecte légèrement la stabilité de l'écoulement tourbillonnaire de Couette. Au delà de cette valeur, le nombre de Taylor critique croit davantage. Nous avons étudié également l'influence du facteur de forme sur le seuil de cette transition pour un rapport de

rayons $N=0.3$. L'apparition de l'instabilité est favorisée pour les espaces annulaires plus longs.

Les résultats montrent que les tourbillons apparaissent à l'aval de l'espace annulaire et que leurs croissance se fait radialement. Sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur les structures tourbillonnaires occupent toute la longueur de l'espace annulaire.

On signale toutefois que le code de calcul n'a pas pu être utilisé pour des espaces annulaires étroits ($N>0.5$) dans le cas du régime laminaire avec tourbillons, et pour des valeurs du nombre de Reynolds élevées dans le cas du régime laminaire pur.

Bien que l'étude n'est pas portée sur le régime turbulent, la méthode de calcul a permis de déterminer les conditions d'apparition et de développement des vortex au sein de l'écoulement.

Nous envisageons d'essayer d'introduire des modifications dans la discrétisation sur les bords afin d'améliorer la stabilité de la méthode, pour éviter le problème de la singularité observée à l'entrée.

Il serait intéressant d'envisager par la suite l'étude du régime turbulent. Ainsi que l'analyse de transfert thermique qui intervient fréquemment dans les échangeurs de chaleur.

On peut également étendre cette étude aux fluides non newtoniens, qui font l'objet de multiples applications industrielles (industrie agroalimentaire, fluide de forage...)



REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES

- [1] G. I. TAYLOR, 1923
stability of viscous liquid contained between two rotating concentric cylinders.
phil. Trans. Soc . A223, 289-343 .
- [2] J. KAYE , E. C. ELGAR, 1958
Mode of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder.
Trans .ASME 80, 753-765 .
- [3] J.T.STUART, 1958
The non- linear mechanics of hydrodynamics stability
J. Fluid Mech. Vol.4
- [4] R.C.DIPRIMA & H.L.SWINNEY, 1985
Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders
Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence: pages 139-180. 2^{ème} ed. Topics
in applied physics, vol.45 Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [5] RANDALL TAGG , 1994
The Taylor Couette Problem
Nonlinear science today. Vol.4. November, 1994.
- [6] D. COLES, 1965
Transition in circular Couette flow.
J. Fluid Mech 21,385 .
- [7] J.M.A. GORMAN & H. L. SWINNEY 1979
Visual observation of the second characteristic mode in a quasi periodic flow
Phys.Rev.Lett.43, 1871-5.

- [8] T. AKLAYAMA, T. MARUI & M. KOND, 1986
Experimental investigation on dust collection efficiency of straight tragh cyclone with air suction by means of secondary rotational air charge
Ind. Eng. Chem. Process, 25, N° 04, pp.914 –918.
- [9] JACK LEGRAND , 1983
Mise en œuvre des écoulements de Taylor-Couette-Poiseuille et de ruissellement plan dans des réacteurs électrochimiques de conception nouvelle.
Thèse de doctorat d'état, Université de Rennes.
- [10] F.C.WILCH & G.WILSON,1986
The electrolytic removal of gold from spent electroplating liquors
Transactions of the IMF,64, 1986, pp.55-61
- [11] CHERIF NOUAR, 1986
Convection thermique pour un fluide rhéofluidifiant cas de l'écoulement de Couette-Poiseuille.
Thèse de 3^{ème} cycle .I.N.P.L, Nancy, France.
- [12] ERIC DUMONT, 1999
Caractérisation des écoulements et des frottements pariétaux dans un échangeur de chaleur à surface raclée.
Thèse de doctorat d'état, ENITIAA de Nantes.
- [13] AMOKRANE BOUHADEF, 1982
Contribution à l'étude de l'écoulement entre deux cylindres fixe et tournant en présence d'un débit axial.
Thèse de 3^{ème} cycle .C.E.A.T, Université de Poitiers, France .
- [14] SANGH LEE & RICHARD M. LUEPTOW, 2001
Rotating reverse osmosis system based on Taylor-Couette flow
12th International Couette- Taylor Workshop, 6-8 Septembre 2001, Evaston, IL USA

- [15] K.N. ASTILL, J.T. GANLEY & B.W.MARTIN, 1968
The developing tangential velocity profile for axial flow in an annulus with a rotating inner cylinder.
Proc. R. soc. Lond. A307, P.55-69.
- [16] B.W. MARTIN & A.PAYNE, 1972
Tangential flow development for laminar axial flow in an annulus with a rotating inner cylinder. Proc. R. soc. Lond. A328, P.123-141. (1972)
- [17]M.A.I. EL- SHAARAOU I & A. SARHAN, 1982
Combined forced free laminar convection in the entry region of a vertical annulus with a rotating inner cylinder.
Int. J. Heat Mass Transfer. Vol 25. N° 2. pp. 175 – 186.
- [18] K.C.CHUNG & K.N.ASTILL, 1976
Momentum integral solution of developing flow in an annulus with a rotating inner cylinder
Journal of fluids engineering transactions of the ASME, PP.558-560.
- [19] D. A. SIMMERS & J. E. R. CONEY, 1979
The effect of Taylor Vortex flow on the development length
Mech. Eng. Science, Vol. 21, N° 2, pp.59 – 64.
- [20]J. E. R. CONEY & M.A.I. EL- SHAARAOU I, 1975
Finite difference analysis of laminar flow heat transfer in concentric annulus with simultaneously developing hydrodynamic and thermal boundary layers.
Int. J. Num. Mec. Eng., Vol. 9, PP 17- 38.
- [21] CHANDRASEKHAR, 1960
The stability of more general flows between coaxial cylinders
Cf. Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Chap. VIII, pp. 343-381
Dover publications, INC. NewYork. 1981
- [22]DIPRIMA, 1960
The stability of viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow
J. Fluid. Mech, Vol. 9, pp. 621-631

[23] S.K.DATTA, 1965

Stability of spiral flow between concentric circular cylinders at low axial Reynolds number

J. Fluid. Mech, Vol. 21, part 4, pp. 635- 640

[24] M.A.HASOON & B.W.MARTIN 1977

The stability of viscous axial flow in a annulus with a rotating inner cylinder.

Prod. R. Soc. Lond.A.352, pp. 351-380.

[25] K.C.CHUNG & K.N.ASTILL 1977

hydrodynamic instability of viscous flow between rotating coaxial cylinders with fully developed axial flow

J. Fluid. Mech, Vol. 81, part 4, pp. 641-655

[26] D.I.TAKEUCHI & D.F. JANKOWSKI, 1981

A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow

J. Fluid. Mech, Vol. 102, pp. 101-126

[27] S. L.RANI, D.L.COTRELL & A.J.PEARSLSTEIN, 2001

The complete linear stability boundary for spiral Poiseuille flow

12th international Couette-Taylor Workshop, September 6-8,2001, Evanston, IL USA

[28] A.MESGEGUER & F.MARQUES ,2002

On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Poiseuille flow

J. Fluid Mech. Vol.455, pp. 129-148

[29] JONG-YEONG HWANG & KYUNG-SOO YANG, 2004

Numerical study of Taylor-Couette flow with an axial flow

Computers & Fluids 33, pp. 97-118

[30] R.J.CORNISH, 1933

flow of water through fine clearances with motion of boundaries

Roc. Roy. Soc. A. 140, pp. 227-240, 1933

[31]H.A.SNYDER, 1962

Experiments on the stability of spiral flow at low axial Reynolds numbers

Proc. R. Soc. Lond. A.265, pp.198-214 (1962)

[32]K.N. ASTILL, 1964

Studies of the developing flow between concentric cylinders with the inner cylinder rotating

J.H.T. ASME Series C, vol. 86, pp383-392

[33]S.SAFINIA, 1978

Contribution à l'étude de l'écoulement dans un espace annulaire a paroi intérieure tournante, en présence d'un débit axial.

Thèse de Docteur ingénieur, Université de Poitiers (1978).

[34]R.M. LUEPTOW, A. DOCTER & K.MIN, 1992

Stability of axial flow in an annulus with rotating inner cylinder

Phys. Fluid A4(11), November 1992.

[35]S.T. WERELEY & R. M. LUEPTOW , 1999

Velocity field for Taylor-Couette flow with an axial flow

Phys. Fluid , Vol. 11 N° 12, December 1999.

[36]C.G. RANGUIN & J.G. GEORGIADIS , 2001

Magnetic resonance imaging study of Taylor-Couette-Poiseuille flow

12 th International Couette - Taylor Workshop, September 6-8, 2001, Evanston, IL USA.

[37]N.GRAVAS & B. W. MARTIN , 1978

Instability of viscous axial flow in annulus having a rotating inner cylinder

J. Fluid Mech. , Vol.86,part 2, pp385-394 (1978)

[38]K. W. SCHWARTZ, B.E. SPRINGETT & R.J. DONNELLY, 1964

Mode of instability in a spiral flow rotating cylinders

J. Fluid Mech. ,Vol 20, part2, pp281-289 (1964)

- [39] L.G. RANGUIN, M. SHANNON & J.G. GEORGIADIS, 2001
Dispersion radiale et axiale dans es écoulements tourbillonnaires de Taylor-Couette et Poiseuille.
Int. Journal of heat and mass transfer, 44(2001), pp 3295-3306 .
- [40] Z.H. GU & T.Z. FAHIDY, 1985
Visualisation of flow patterns in axial flow between horizontal coaxial rotating cylinders
Can. J. Chem. Eng. , Vol. 63, pp14-21 (1985).
- [41] R.C. GIORDANO, D.M.F. PRAZERES & C.L. COONEY, 1998
Analysis of a Taylor-Poiseuille vortex flow reactor-I: Flow patterns and mass transfer characteristics.
Chemical Eng. Science, Vol53, N° 20, pp. 3635-3652 , 1998.
- [42] A. GHEZEL, J.C. LORAUD & B. PORTERIE, 1992
Modélisation du transfert de chaleur entre un obstacle en mouvement hélicoïdal et un fluide visqueux en écoulement confiné
Int. J. Heat Mass Transfert, vol 35 (2) , pp. 329-341, 1992.
- [43] Z. OUCHIHA, 1998
Écoulement d'un fluide réel dans une conduite verticale en présence d'un obstacle cylindrique chauffé .
Thèse de Magister, 1998.
- [44] B. DADDA, 2004
Etude d'un écoulement ascendant en régime dynamique et thermique non établi en présence d'un cylindre chauffé avec effet de conductivité .
Thèse de Magister, 2004
- [45] F.H. HARLOW & J. EDDIE WELCH, 1965
Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface.
The physic of fluids. Vol.8, N° 12. December, 1965.

[46] R. PEYRET,1976

Unsteady evolution of horizontal jet in a stratified fluid

J. Fluid mechanics, Vol.78, part 1,pp.49-63 (1976) .

[47]D.Begis, 1972

Analyse numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham

Thèse de 3ème cycle Univ. Paris IV-1972.

[48]PEYRET & CHILDRESS 1976 [48]

A numerical study of two –dimensional convection by motile particle

Journal de mécanique, Vol. 15, N°5,1976.

[49]A.BOUHANNA 1982

Contribution à l'étude d'un écoulement de fluide réel à symétrie axiale dans une cavité cylindrique,

Thèse de Magister, (1982)

[50] M. Naimi, R. Devienne & M. Lebouche, 1990

Etude dynamique et thermique de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille ; cas d'un fluide présentant un seuil d'écoulement .

Int.J.HeatMassTransfert.vol.33No.2.pp.381-391.

[51]S.BENMANSOUR, 1984

Study of transition in Taylor-Couette flow using hot wire anemometry and on- line computation.

PhD Thesis, University of Leeds.

[51] M.J.EL-DUJAILY, 1983

The end effects on the sub-critical and Taylor vortex flow between concentric and eccentric rotating cylinders.

PhD Thesis, University of Leeds.



ANNEXE

-A-

PRINCIPE DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

A.1. Introduction

La méthode de différences finies est la méthode de discrétisation la plus simple et la plus ancienne. Elle consiste à approximer les dérivées par des combinaisons linéaires de valeurs de la variable en plusieurs points de discrétisation. Ces relations sont généralement obtenus à partir d'une combinaison adéquate de développement de Taylor. Les schémas peuvent être centrés ou décentrés. La précision du schéma dépend du nombre de points retenus pour approximer la dérivée. L'économie des calculs requiert des schémas à haute précision.

Soit un domaine mono-dimensionnel : $x_i = i\Delta x$

La fonction $f(x)$ au point x_i notée f_i vaut :

$$f_i = f(x_i)$$

La dérivée d'ordre m de $f(x)$ est approximée par :

$$\frac{d^m f(x_i)}{dx^m} \cong \sum_{k=-k_1}^{+k_2} \alpha_k f_{i+k}$$

Les coefficients α_k sont obtenus par les développements de Taylor. Les entiers k_1 et k_2 sont fonctions de l'ordre de la dérivée m et du degré de précision voulue.

Développons la fonction $f \in$ au voisinage de $x = x_i$, on a :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} + \dots$$

D'où on tire

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} + \dots$$

Soit

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + 0(\Delta x)$$

L'expression ainsi obtenue pour la dérivée de f au point x_i est une approximation de la valeur exacte. Le terme $0(\Delta x)$ dont la puissance de Δx avec laquelle elle tend vers zéro lorsque Δx est réduit, est appelée l'ordre de l'approximation aux différences.

A.2. Approximation par différences finies

La manière la plus classique de représenter une dérivée première consiste à utiliser un schéma décentré du premier ordre ou bien un schéma centré du second ordre. Quant à la dérivée seconde, on peut l'approcher avec un schéma centré du second ordre par exemple.

□ Dérivée première

- Schéma centré $\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2.\Delta x} + 0(\Delta x^2)$
 - Schéma décentré amont $\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + 0(\Delta x)$
 - Schéma décentré aval $\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + 0(\Delta x)$
 - Schéma décentré amont 2nd ordre $\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2.\Delta x} + 0(\Delta x^2)$
 - Schéma décentré aval 2nd ordre $\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i-2}}{2.\Delta x} + 0(\Delta x^2)$
 - Schéma centré 4^{ème} ordre $\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12.\Delta x} + 0(\Delta x^4)$
-

□ Dérivée seconde

- Schéma centré $\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \cong \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta x^2} + 0(\Delta x)$
- Schéma décentré amont $\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \cong \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + 0(\Delta x^2)$
- Schéma décentré aval $\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} + 0(\Delta x)$

A.3. Représentation des EDP par des différences finies

Etant donnée une équation aux dérivées partielles, sa représentation en différences finies consiste à remplacer les dérivées par des approximation aux différences finies.

Soit par exemple l'équation d'onde :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Où $f(x,t)$ est la fonction inconnue et a la vitesse de convection, et supposons que l'espace soit discrétisé de tel sorte que :

$$f_i^n = f(x_i, t_n) = f(i\Delta x, n\Delta t)$$

on peut discrétiser l'équation (1) par le schéma suivant :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

□ Notions de base

a .Erreur de Troncature

Cette erreur peut être évalué en effectuant un développement de Taylor de chaque terme de l'équation précédente autour du point f_i^n :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_i^n + \dots$$

$$f_{i-1}^n = f_i^n - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i^n - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i^n + \dots$$

$$f_{i+1}^n = f_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i^n + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i^n + \dots$$

En substituant ces développements dans (1), on obtient :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{EDP}} = \underbrace{\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}}_{\text{Equation aux différences}} - \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) + \frac{\Delta x^2}{6} a \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)}_{\text{Erreur de Troncature}} + O(\Delta t^2, \Delta x^4)$$

On appelle erreur de troncature la différence entre l'EDP et son approximation en différences finies (Equations aux différences).

b. Précision du schéma

La précision du schéma est égal à l'ordre de l'erreur de troncature. Dans le cas précédent, le schéma est du premier ordre en temps et du second ordre en espace $O(\Delta t, \Delta x^2)$

c. Notion de consistance

Une approximation en différences finies est consistante si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et $\Delta x \rightarrow 0$ simultanément.

d. Erreur de discrétisation

La différence entre la solution exacte de l'équation aux différences et la solution exacte de l'EDP est appelée erreur de discrétisation. Elle est en générale difficile à évaluer car on ne connaît pas la solution exacte de l'EDP.

e. Notion de stabilité

Le concept de stabilité s'applique aux problèmes d'évolution (problème parabolique par rapport à une variable qui est en général la variable temps).

La stabilité est une condition reliant la solution numérique calculée et la solution exacte de l'équation aux différences. Elle ne concerne que le schéma numérique et non l'EDP. Un schéma numérique est dit stable si les erreurs d'origines diverses (arrondis, troncature, ...) n'augmentent pas à chaque étape du processus séquentiel.

Formellement, si on dénote ε_i^n l'erreur entre la solution calculée et la solution exacte du schéma aux différences pour le point $x = i \Delta x$ à l'instant $t = n \Delta t$, un schéma est dit stable s'il existe une constante k indépendante de n , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_i^n| \leq K$$

f. Notion de convergence

C'est la propriété la plus importante d'un schéma numérique. Un schéma aux différences finies est convergent si la solution du problème discrétisé tend, en un certain sens, vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque Δt et Δx tendent simultanément vers zéro.

Plus exactement si on appelle ε_i^n la différence entre la solution numérique calculée et la solution exacte de l'E.D.P au point et à l'instant, le schéma est convergent si

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \text{et } \Delta x \rightarrow 0}} |\varepsilon_i^n| = 0 \quad \text{pour des valeurs fixes de } x \text{ et } t.$$

Cela implique donc que i et n augmentent indéfiniment lorsque Δt et Δx diminuent.

g. Théorème de Lax

Pour un problème aux conditions initiales bien posé, un schéma de discrétisation est convergent s'il est à la fois consistant et stable.

A.4. Application aux équations de Navier Stokes incompressibles

Les de Navier Stokes incompressibles sont de nature parabolique suivant le temps pour des écoulements instationnaires.

Pour une fonction $f(r,z,t)$ solution d'une équation différentielle partielle, on note sa valeur au point $(r_1 = lh, z = mh)$ et à l'instant $t = nk$ par $f_{m,l}^n$; l et m sont des nombres entiers ou fractionnaires et tels que :

$$m = i, i \pm 1/2, i \pm 3/2, \dots$$

$$l = j, j \pm 1/2, j \pm 3/2, \dots$$

A.4.1. Opérateurs de différence

Les dérivées spatiales sont approchées par des différences centrées au second ordre près.

a. Approximation de la dérivée première suivant le temps

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ est remplacée par un opérateur aux différences de premier

ordre :

$$\delta_t (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^{n+1} - f_{m,l}^n}{k}$$

C'est une approximation au premier ordre de précision $o(k)$ obtenue par développement en série de Taylor de la fonction $f(r, z, t)$ suivant la direction positive de variation de la variable t .

b. Approximation de la dérivée première par rapport aux variables spatiales

un nombre infini de schémas peut être utilisé pour la discrétisation de la dérivée. A partir de développement de Taylor en r et en z , les dérivées premières sont approximées par des opérateurs avec un ordre de précision $o(h)$ (opérateur progressif, opérateur régressif) ou par des opérateurs de différence centrées avec un ordre de précision $o(h^2)$.

➤ Par rapport à la variable r

$$\delta_r^+(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - f_{m,l}^n}{h} \quad \text{opérateur progressif}$$

$$\delta_r^-(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^n - f_{m,l-1}^n}{h} \quad \text{opérateur régressif}$$

$$\delta_r^0(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - f_{m,l-1}^n}{2h} \quad \text{opérateur centré}$$

$$\delta_r^n(f_{m,l}^n) = \frac{3f_{m,l}^n - 4f_{m,l-1}^n + f_{m,l-2}^n}{2h} \quad \text{opérateur régressif 2nd ordre}$$

➤ Par rapport à la variable z

$$\delta_z^+(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - f_{m,l}^n}{h} \quad \text{opérateur progressif}$$

$$\delta_z^-(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^n - f_{m-1,l}^n}{h} \quad \text{opérateur régressif}$$

$$\delta_z^0(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - f_{m-1,l}^n}{2h} \quad \text{opérateur centré}$$

$$\delta_z^n(f_{m,l}^n) = \frac{3f_{m,l}^n - 4f_{m-1,l}^n + f_{m-2,l}^n}{2h} \quad \text{opérateur régressif 2nd ordre}$$

c. Approximation de la dérivée seconde par rapport aux variables spatiales

L'approximation des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ sont obtenues à partir de développement de Taylor d'ordre quatre :

$$\delta_r^2 = \delta_r^+ \delta_r^- (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m,l-1}^n}{h^2}$$

$$\delta_z^2 = \delta_z^+ \delta_z^- (f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m-1,l}^n}{h^2}$$

A.5. Introduction de la moyenne pondérée des opérateurs de différence

Généralement, la discrétisation d'une équation parabolique s'effectue, non pas en considérant les approximations des dérivées partielles par rapport aux variables spatiales décrites précédemment, mais en introduisant la moyenne pondérée de ces grandeurs pour deux valeurs différentes du temps : $t_0 = nk$ et $t_1 = (n+1)k$. En d'autres termes, cela revient à prendre ces valeurs à l'instant $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_0 = (n+\alpha)k$ où α est une constante telle que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Suivant la valeur de α , nous pouvons utiliser deux types de méthodes :

❖ Les méthodes explicites : $\alpha = 0$

Ces méthodes donnent explicitement les valeurs de $f(r, z, t+\Delta t)$, en fonction des grandeurs connues, c'est à dire celles correspondant à l'instant t . Elles ont l'avantage de la simplicité mais sont conditionnellement stable. Leur utilisation est en effet subordonnée au moins à une condition de stabilité du type C. F. L (Courant- Friedrichs - Lewy) : pour une discrétisation à pas spatiale uniforme h ,

$$(\Delta t)_{max} \leq S \quad \text{avec } S \text{ est de l'ordre } \frac{h}{w_m} \text{ (BOUHADEF[13])}.$$

❖ Les méthodes implicites : $\alpha \neq 0$

La grandeur inconnue est exprimée à l'instant $t+\Delta t$ en fonction des grandeurs connues à l'instant t aussi bien des grandeurs inconnues correspondant à l'instant $(t+\Delta t)$. Ces méthodes jouissent en général d'une bonne stabilité mais leur mise en œuvre conduit souvent à des calculs compliqués. Leur principal avantage est de permettre de choisir éventuellement un pas de temps Δt assez grand.

Lorsque $\alpha = 1/2$, c'est le cas du schéma de Crank- Nicolson. Cette technique consiste à satisfaire les équations aux différences au milieu de l'intervalle séparant le plan en temps $(n+1)$ où la solution est cherchée, du plan (n) où elle est connue.

➤ Avantages :

- Précision d'ordre $o(\Delta t^2)$.
 - Inconditionnellement stable.
-

- Les résultats sont plus exacts pour un pas Δt faible.

➤ Inconvénient :

- difficile à réaliser.

Si $\alpha = 1$, les méthodes sont complètement implicites ; ce schéma est implicite en $(n+1)$ et l'erreur de troncature est d'ordre inférieur à celui du schéma de Crank- Nicolson (semi-implicite) .

A.6. Méthodes itératives

les méthodes itératives sont utilisées pour résoudre des systèmes non linéaires .Elles sont basées sur une succession de solutions approchées menant à la solution exacte du système d'équations en un nombre infinis de pas.

La méthode de Gauss–Seidel est la méthode la plus adaptée à la résolution des systèmes d'équations obtenus en mécanique des fluides . elle permet un gain important de place mémoire dans le cas de matrices creuses ou de système dont les coefficients peuvent être exprimés sous une forme analytique. Elle est très simple, précise et conduit parfois à des calculs plus rapides que les méthodes directes lorsque le nombre d'itérations est inférieur au tiers du nombre d'inconnues.