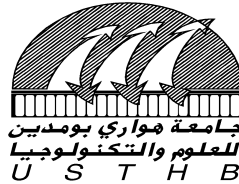


N° d'ordre : 46/2008 M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Sciences Mathématiques



MEMOIRE
Présenté Pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
En : MATHEMATIQUES
Spécialité : Probabilités et Statistiques

par :

Melle. BELHADI Nora

THEME

Statistique des Valeurs Extrêmes dans les Processus Markoviens

Soutenu le : Jeudi 11 Septembre 2008 devant le jury composé de :

Mr. A. AISSANI, Professeur, U.S.T.H.B

Président

Mr. K. BOUKHETALA, Professeur, U.S.T.H.B

Directeur de thèse

Mr. K. KHALDI, Professeur, U. BOUMERDES

Examineur

Mr. R. OUAFI, Maître de Conférence, U.S.T.H.B

Examineur

Mme. O. SADKI, Chargée de Cours, U.S.T.H.B

Invitée

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon promoteur Mr. K. Boukhetala, pour ses conseils, ses orientations et ses corrections.

Mes sincères remerciements vont aux Messieurs les membres de jury.

Je tiens à remercier ma famille et toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin surtout Hassina, Hannane, Khalida et Fadhela.

Ainsi je remercie chaleureusement le personnel de l'ITELV (Institut Technique des Elevages de Baba Ali) en particulier Mr. Benmiloud Abderrahmane, les collègues surtout Nedjma, Zoubir, Kenza et le chef de département Syfel pour leur soutien moral.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon père.

A ma très chère mère.

A mes sœurs : Malika, Aïcha, Bahia et Naima.

A mes frères : Mohamed et Rachid.

A mes belles sœurs et mes Beaux frères.

A mes nièces et mes neveux.

A toute ma famille.

A mes camarades de l'USTHB et mes collègues de l'ITELV.

A mes amies surtout Djamila et a tous qui ont connu Nora.

Table des Matières

Introduction	1
1 Processus Stochastiques	4
1.1- Principaux Aspects et Définitions des Processus Stochastiques	4
1.1.1- Processus Stochastique	4
1.1.2- Tribu	4
1.1.3- Filtration	5
1.1.4- Processus Adapté	5
1.1.5- Processus Stochastiques Particuliers	5
a- Processus Stationnaire	5
b- Processus à Accroissement Indépendants	6
c- Processus à Accroissement Stationnaires	6
1.2- Chaîne de Markov	6
1.2.1- Mesure de Probabilité et Loi Initiale	7
1.2.2- Classification des états	8
1.2.3- Etats Récurrents et Transitoires	9
1.2.4- Distribution Stationnaire	9
1.2.5- Distribution Limite	10
1.3- Processus Linéaires	11
1.3.1- Bruit blanc	11
1.3.2- Processus ARMA(p,q)	11
1.3.3- Processus AR(p)	11
1.3.4- Processus MA(q)	12
1.4- File d'attente	13
1.5- Equations aux différences stochastiques	14
1.6- Processus ponctuel	17
1.6.1- Processus ponctuel des excédants	19
1.6.2- Processus de comptage de renouvellement	21
1.6.3- Sommes aléatoires conduites par un processus de renouvellement	21
1.6.4- Distribution et fonctionnelle de Laplace	22
1.7- Processus de Poisson	24
1.8- Processus de poisson composé	25
1.9- Mouvement Brownien	25
1.9.1- Propriétés du mouvement brownien	27
1.10- Processus de Markov	27
2 Théorie des Valeurs Extrêmes	30
2.1- Statistiques d'ordre	30
2.1.1- Définitions	30
2.1.2- Densité et loi des statistiques d'ordre	31
2.1.3- Densité conjointe de deux statistiques d'ordre	32
2.1.4- Distribution des k grandes statistiques d'ordre	32
2.1.5- Distribution des extrema dans le cas fini	32
2.1.6- Fonction de distribution empirique	33
2.1.7- Fonction quantile	33
2.1.8- Transformation des quantiles	34
2.1.9- Estimation du p-quantile	34
2.2- Valeurs Extrêmes	35
2.2.1- Domaines d'attraction	36

2.2.2- Paramétrisation γ	39
2.2.3- Distribution GEV	39
2.2.4- Outils statistiques d'exploration	40
2.2.4.1- Graphe de la fonction de survie	40
2.2.4.2- Graphe de quantiles et de probabilités	40
2.2.4.3- Graphe de la fonction moyenne des dépassements	41
2.2.5- Distribution de Pareto Généralisée (GPD)	43
2.2.6- Distribution à queue lourde (Heavy-Tailed)	43
2.2.7- Exemples de distributions Heavy-Tailed	44
2.2.8- Estimateur de Hill	44
2.2.9- Estimateur de Pickands	46
2.3- Indice Extrême	49
2.4- Valeurs Extrêmes et Assurance	50
3 Comportement Extrémal des Chaînes de Markov Stationnaires	53
3.1- Introduction	53
3.2- Processus ponctuels des excès des suites stationnaires générales	54
3.2.1- Restriction de dépendance des suites stationnaires	55
et condition de mélange	
3.2.2- Conditions de mélange $D(u_n)$ et $\Delta(u_n)$	56
3.2.3- Indice extrême sous les conditions $D(u_n)$ et $\Delta(u_n)$	58
3.2.4- Convergence en distribution du processus ponctuel	61
et probabilités composées	
3.3- Processus ponctuel d'excès pour des chaînes de Markov stationnaires	65
3.3.1- Domaine d'attraction et chaîne de Markov	65
3.3.2- Queue de la chaîne	67
3.3.3- Résultat principal des caractéristiques extrémales	68
des chaînes de Markov	
4 Exemples d'application et simulation	76
4.1- Exemple 1(processus AR(1))	76
4.1.2- Simulation et Application	80
4.2- Exemple 2(Equations aux différence stochastiques)	87
4.2.1- Algorithme de simulation	90
4.3- Conclusion	90
Conclusion Générale	91
Annexe	92

Introduction Générale

Un des problèmes fondamentaux rencontré en finance concerne la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Le calcul des risques est aujourd'hui largement utilisé en finance internationale. Il s'agit par exemple d'éviter les faillites retentissantes et donc d'être capable de prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leur intensité. Il est nécessaire d'être en mesure d'évaluer les possibilités d'apparition des évènements rares. Il peut aussi s'agir pour l'investisseur d'estimer le profit le plus élevé possible dans un environnement risqué. Dans le cas des indices boursiers par exemple, l'investisseur peut se servir du caractère volatil de ces marchés pour intégrer dans son portefeuille les valeurs susceptibles de monter très haut tout en se prémunissant contre celles qui peuvent chuter fortement à un horizon donné.

Quoiqu'il en soit la maîtrise des risques est la base du travail du gestionnaire. Plus que jamais, elle est d'actualité. Dans ce contexte, il convient de préciser ce que l'on entend par risque. On peut assimiler la notion de risque à la probabilité de réalisation d'un évènement rare (ou imprévu). C'est l'objet de la théorie des valeurs extrêmes (Leadbetter, Lindgren et Rootzén, 1983), développée en probabilité et ayant d'innombrables applications dans divers domaines.

On peut citer comme exemple :

- La finance où l'hypothèse de gaussianité, incompatible avec les observations surtout en hautes fréquences, est de plus en plus fortement remise en cause;
- L'assurance dont l'une des préoccupations est la prise en compte des grands sinistres;
- L'hydrologie, domaine dans lequel la prévision des crues par exemple est particulièrement importante;
- La météorologie où l'étude de la vitesse du vent permet d'évaluer le degré de résistance des matériaux face à la pression exercée par le vent (au cours d'une tempête par exemple) sur les bâtiments ou les structures de génie civil;
- Enfin, la macro-économie réelle dans le but de prévoir les crises économiques.

Signalons que plusieurs approches sont possibles en théorie des valeurs extrêmes. Nous nous intéressons ici à l'étude des fonctions de distribution (en particulier la fonction de répartition). La théorie probabiliste traditionnelle des valeurs extrêmes d'une série concerne la distribution asymptotique des maxima ou des minima d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.). L'étude de ce problème remonte à l'antiquité (dès l'apparition des catastrophes) même si les résultats récents sont essentiellement fondés sur les avancées théoriques des cinquante dernières années.

Conscient des limites de l'approche traditionnelle, induite notamment par l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires, des extensions à la théorie initiale ont rapidement vu le jour. C'est ainsi que l'hypothèse d'indépendance a été remplacée par une forme particulière de dépendance puis par l'étude des processus stationnaires à temps discret. La remise en cause de l'hypothèse d'indépendance est une exigence incontournable dans l'optique des applications. En finance ou en météorologie par exemple, l'hypothèse d'indépendance est souvent mise en défaut.

Donc un des récents développements de la théorie des valeurs extrêmes a consisté à lever l'hypothèse d'indépendance des observations; on suppose que les observations sont identiquement distribuées mais dépendantes. Elles forment alors un processus stationnaire par exemple Markovien ou fortement mélangeant; Les modèles de Markov sont utilisés dans beaucoup de problèmes d'application. Par exemple les modèles autorégressifs de coefficient aléatoire qui sont utilisés dans l'analyse non linéaire de série temporelles et le processus ARCH dans l'économétrie, et le processus de Lindley dans la théorie des files d'attente. Dans plusieurs de ces situations les valeurs extrêmes sont très importantes; par exemple, dans les sciences économiques ils peuvent correspondre à une faillite ou à un réalignement obligatoire de taux de change, et dans la théorie des files d'attente une longueur excessive de la file peut causer une panne du système entier. Bien que les propriétés extrémales des modèles spécifiques mentionnés puissent être examinées par une approche directe.

Après avoir rappelé certains résultats, établis dans le cas indépendant, et qui nous seront utiles par la suite, nous allons surtout nous intéresser au cas dépendant et stationnaire.

Nous commençons donc par rappeler dans le premier chapitre les principaux aspects et définitions des processus stochastiques, plus particulièrement le processus ponctuel et les chaînes de Markov. Dans le deuxième chapitre nous décrivons la théorie des valeurs extrêmes d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées en caractérisant la loi des extrêmes et les observations qui excèdent un seuil fixé et nous étudions le comportement au niveau des " queues " de certaines distributions dites Heavy-tailed. Tandis que le troisième chapitre sera consacré aux valeurs extrêmes d'une suite de variables aléatoires dépendantes, donc nous considérons des critères pour la convergence faible du processus ponctuel et faisons des prolongements des résultats d'un niveau à multi niveaux; ainsi, des extrêmes des chaînes de Markov stationnaires sont étudiés, ensuite nous aborderons dans un quatrième chapitre deux exemples d'application, le premier concerne un processus AR(1) avec des marginaux uniformes, le deuxième concerne le comportement extrême des solutions des équations aux différences stochastiques du premier ordre à coefficients aléatoires.

Chapitre 1

Processus stochastiques

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter des notions élémentaires des processus stochastiques afin de les introduire aux valeurs extrêmes.

1.1- Principaux aspects et définitions des Processus stochastiques

1.1.1- Processus stochastique :

Un processus aléatoire ou stochastique est un phénomène dépendant du hasard et du temps, on le note $X(t, \omega)$ ou X_t définit comme suit :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^+ \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\rightarrow X(t, \omega) \end{aligned}$$

Cette application est mesurable lorsque l'on munit $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{A}$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ est la tribu des Boréliens.

Pour t fixé, $X(t) = X(t, \cdot)$ est une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour ω fixé, $X(\cdot, \omega)$ est une réalisation ou une trajectoire du processus stochastique.

Par ailleurs, on peut définir les processus aléatoires en faisant appel à la notion dite "Filtration".

1.1.2- Tribu :

Définition 1. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (ou σ -algèbre) si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.
3. si $(A_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace mesurable. Un ensemble $A \subset \Omega$ est dit mesurable si $A \in \mathcal{A}$.

Par exemple l'ensemble des parties de Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu. L'ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ est également une tribu. C'est la tribu triviale sur Ω .

Si Ω est au plus dénombrable, la tribu la plus souvent considérée est $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour des raisons techniques difficiles mais fondamentales, ce n'est quasiment plus le cas si Ω n'est plus fini ou dénombrable.

Exemple : On considère l'ensemble $\mathbb{R}^d$ (espace euclidien réel de dimension d). La tribu borélienne est la plus petite tribu qui contienne tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Cette tribu est différente de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Tout ensemble appartenant à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est appelé borélien. Si K est un borélien, on note $\mathcal{B}(K) = \{A \subset K; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ la tribu borélienne sur K .

1.1.3- Filtration :

Définition 2. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle filtration une famille $(F_t)_{t \in T}$ croissante de sous tribu de $\mathcal{A}$, où F_t représente l'information dont on dispose à l'instant t .

1.1.4- Processus adapté :

Un processus $X(t)$ est dit adapté à la filtration $(F_t, t \geq 0)$ si la variable aléatoire $X(t, \omega)$, t fixé, est mesurable pour la σ -algèbre F_t .

1.1.5- Processus stochastiques particuliers :

Soit $X(t)$ un processus stochastique et soit $k \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_k$ une succession de valeurs du temps.

a- Processus stationnaire :

On considère les instants $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_k + \tau, \forall \tau > 0$.

Le processus $X(t)$ est dit stationnaire lorsque les variables aléatoires $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)]$ et $[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_k + \tau)]$ ont la même distribution de probabilité. Cela signifie qu'à priori, quel que soit l'horizon considéré on met la même distribution de probabilité sur l'état du système (même moyenne et même variabilité).

b- Processus à accroissement indépendants :

Un processus $X(t)$ est à accroissements indépendants si $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \quad k \in \mathbb{N}$,

les variables $X(t_k) - X(t_{k-1}), \dots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1) - X(0)$ sont indépendantes.

Cela s'interprète par le fait que les états décrits par ce type de processus évoluent dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

c- Processus à accroissement stationnaires :

Considérons à présent deux instants θ_1 et θ_2 , supposons $\theta_1 \leq \theta_2$. Le processus $X(t)$ est à accroissement stationnaire si la distribution associée à l'accroissement de la variable sur l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ ne dépend que de la durée écoulée $(\theta_2 - \theta_1)$.

En terme d'équation on écrit :

$$P\{X(\theta_2) - X(\theta_1) < \varepsilon\} = F^*(\varepsilon, \theta_2 - \theta_1)$$

Les chaînes de Markov constituent l'exemple le plus simple des processus stochastiques, lorsque dans l'étude d'une suite de variables aléatoires, on abandonne l'hypothèse d'indépendance. Il s'agit d'un processus à temps discret d'où le nom de « Chaîne ». Il y a les chaînes de Markov dont l'ensemble des états est continu, leur étude n'est pas abordée ici, et les chaînes dont l'ensemble des états est discret. Celles-ci font l'objet de la section suivante. L'ensemble E des états est donc soit $\mathbb{N}$, soit une partie finie de celui-ci.

1.2- Chaîne de Markov :

Définition 1. Le processus stochastique à temps discret $\{X_n\}_{n \geq 0}$ définit sur un espace d'état dénombrable E est une chaîne de Markov si

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $j, i, i_{n-1}, \dots, i_1 \in E$.

Le « futur » et le « passé » de la chaîne sont conditionnellement indépendants par rapport au « présent ». Lorsque $P(X_{n+1} = j / X_n = i) = p_{ij}$ ne dépend pas de n , on dit que la chaîne est homogène et la matrice $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ est appelée matrice de transition ; et on a $p_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j \in E$, $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ pour tout $i \in E$, i.e. P est une matrice stochastique.

Exemple (La marche aléatoire). Considérons une particule se déplaçant le long de la droite réelle. Si au temps n , elle occupe une position X_n , sa position au temps $n+1$ est $X_{n+1} = X_n + \zeta_n$, ou ζ_n est le $n^{ième}$ pas de cette marche; donc c'est une chaîne de Markov homogène dans le temps, caractérisée par l'ensemble des états $E = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ et la matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in Z}$, avec, pour tout $(i, j) \in Z^2$,

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1; \\ q, & \text{si } j = i - 1; \\ r, & \text{si } j = i; \end{cases} \quad p + q + r = 1.$$

Où p est un nombre fixé tel que $0 < p < 1$. Un tel processus est appelé promenade (marche) aléatoire sur Z .

1.2.1- Mesure de probabilité et loi initiale :

Supposant que $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$; soit $\mu = (\mu_i)_{i \in E}$ la distribution de la variable aléatoire initiale X_0 , i.e. $\mu_i = P(X_0 = i)$. Ainsi la description probabiliste du processus entier $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est

déterminée par μ et P . on peut dire que μ est l'état initial du processus, en particulier on a, pour une suite des états $i_0, \dots, i_n$,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}, \quad (1.1)$$

Pour $n \geq 0$, on définit la $n^{\text{ème}}$ étape de probabilités de transition par

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j / X_m = i) = (P^n)_{ij} \quad i, j \in E$$

On a aussi

$$P(X_n = j) = (\mu P^n)_j, \quad j \in E$$

i.e. la distribution de X_n est donnée par la mesure de probabilité μP^n .

Finalement on a les équations de *Chapman-Kolmogorov* : pour $m > 0, n > 0$, et $i, j \in E$,

$$p_{ij}^{(m+n)} = P(X_{m+n} = j / X_0 = i) = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

Ainsi l'inégalité de *Chapman-Kolmogorov* : $p_{ij}^{(m+n)} \geq p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$.

1.2.2- Classification des états :

On note pour un évènement e , $P_i(e) = P(e / X_0 = i)$

Définition 2. On dit que l'état j est accessible à partir de l'état i pour $i, j \in E$, et on écrit $i \longrightarrow j$ s'il existe $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. On écrit aussi $i \longleftrightarrow j$ si $i \longrightarrow j$ et $j \longrightarrow i$. Si $i \longleftrightarrow j$ on dit que les états i et j communiquent et forment une classe de communication.

Remarques : en raison du fait que, pour tout i , on a $p_{i,i}^0 = 1$, tout état communique avec lui-même. Un état est appelé état de retour, s'il existe $n \geq 1$ tel que $p_{i,i}^{(n)} > 0$.

Certaines classes peuvent ne comporter qu'un seul élément ; ce sont les singletons. Comme exemples, mentionnons :

Un état de non retour i : $p_{i,i}^{(0)} = 1, \quad p_{i,i}^{(n)} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$;

Un état absorbant i : $p_{i,i}^{(0)} = 1, \quad p_{i,i}^{(n)} = 1 \quad \text{pour } n \geq 1$.

1.2.3- Etats récurrents et transitoires :

Pour tout état j , désignons par T_j l'instant d'atteinte de l'état j à partir de l'instant 1, autrement dit,

$$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

Cet instant d'atteinte est un temps d'arrêt de la chaîne. Rappelons que cela signifie que pour tout $n \geq 0$, l'évènement $\{T_j = n\}$, qui est égal à $\{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}$ ne dépend que de $X_1, \dots, X_n$, ce qui est vrai.

Pour chaque $i, j \in E$ on définit

$$F_{ij} = P_i(X_n = j \text{ pour } n > 0)$$

Pour tout i, j , on a $0 \leq F_{ij} \leq 1$ et $F_{ij} > 0$ si et seulement si $i \longrightarrow j$.

Définition 3. L'état $i \in E$ est récurrente si $F_{ii} = 1$. Il est transitoire si $F_{ii} < 1$.

Si i est récurrent $\Leftrightarrow F_{ii} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Si i est transitoire $\Leftrightarrow F_{ii} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

On définit $\mu_i = E_i(\text{le temps du premiers retour à l'état } i)$.

Définition 4. L'état récurrent $i \in E$ est récurrent positif si $\mu_i < \infty$ et récurrent nul si $\mu_i = \infty$.

Théorème 1. Dans une classe de communication, soit tous les états sont récurrents, ou bien tous les états sont transitoires.

Définition 5. Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle est formée d'une seule classe d'états communicants.

1.2.4- Distribution stationnaire :

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov à espace d'état E , rappelons que le vecteur

$\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ sur E est une distribution si et seulement si $\pi_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$.

Définition 6. La distribution π sur E est stationnaire si et seulement si

$$\pi P = \pi \quad \text{ou bien} \quad \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} = \pi_j, j \in E.$$

On a aussi, pour tout $n \geq 1$,

$$\pi P^n = \pi \quad \text{ou bien} \quad \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j, j \in E.$$

i.e. si la distribution de X_0 est π , alors, pour tout $n \geq 1$, la distribution de X_n est aussi π .

Définition 7. On appelle période d'un point x_i de E le PGCD des entiers n tels que $p_{ii}^n > 0$. La chaîne de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est apériodique si sa période est égale à 1.

Résultats

- 1- Une chaîne de Markov irréductible apériodique et récurrente positive admet une et une seule distribution stationnaire.
- 2- Lorsque E est infinie et la distribution stationnaire n'existe pas, E est récurrente nulle ou transitoire.
- 3- Une chaîne de Markov irréductible apériodique est régulière, si elle est récurrente positive donc elle est ergodique.

1.2.5- Distribution limite :

Théorème 2. On appelle distribution limite d'une chaîne de Markov $(X_n)_n$ la limite de $p^{(n)}$ (si elle existe) lorsque n tend vers l'infini où $p^{(n)}$ est la distribution de X_n . On note $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}$ c'est-à-dire $\forall i \quad \pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i)$.

1.3- Processus linéaires :

1.3.1- Bruit Blanc :

Un processus $\{Z_t\}$ est dit bruit blanc d'espérance nulle et de variance σ^2 et dans ce cas on note $Z_t \rightarrow WN(0, \sigma^2)$; si et seulement si :

- $E(Z_t) = 0 ; \forall t$
- $\gamma_{Z_t}(h) = cov(Z_t, Z_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$

1.3.2- Processus ARMA(p,q) :

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit un processus autoregressif moyenne mobile d'ordre p et q noté ARMA(p,q) si :

- $\{X_t\}$ est stationnaire.
- $\forall t \in \mathbb{Z}; \{X_t\}$ vérifié l'équation :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

où : ϕ_i, θ_j sont des réels ($i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, q$) et $Z_t \rightarrow WN(0, \sigma^2)$.

1.3.3- Processus AR(p) :

$\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus autorégressif d'ordre p noté AR(p) est défini par l'équation :

$$\phi(B)X_t = Z_t; \text{ avec :}$$

- $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p, \phi_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, p)$.
- Z_t est un bruit blanc.

$$\text{Soit } \phi(Z) = 1 - \phi_1 Z - \phi_2 Z^2 - \dots - \phi_p Z^p.$$

Le processus $\{X_t\}$ est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme $\phi(Z)$ sont de module supérieur à 1 ; si $\phi(Z) \neq 0$ pour $|Z| \leq 1$ alors $\phi(B)$ admet un inverse et

$$X_t = \phi^{-1}(B)Z_t = \psi(B)Z_t.$$

On dira que X_t est causal s'il s'obtient à partir de Z_t par un filtre linéaire causal :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}.$$

Soit $a_1, a_2, \dots, a_r$ les racines de l'équation $\phi(Z) = 0$; on a $|a_i| > 1 \quad \forall i = 1, \dots, r$:

$$\phi(Z) = (1 - a_1^{-1}Z)^{d_1} (1 - a_2^{-1}Z)^{d_2} \dots (1 - a_r^{-1}Z)^{d_r}$$

a_i est une racine de multiplicité d_i ; $d_i \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i=1}^r d_i = p$, $\phi(Z)$ s'écrit :

$$\phi(Z) = \prod_{i=1}^r (1 - a_i^{-1}Z)^{d_i}$$

En développant $\phi(Z)$ en fractions rationnelles on peut écrire

$$X_t = \phi^{-1}(B)Z_t = \left[(1 - a_1^{-1}B)^{d_1} (1 - a_2^{-1}B)^{d_2} \dots (1 - a_r^{-1}B)^{d_r} \right]^{-1} Z_t = \sum_{i=1}^r \left[K_i (1 - a_i^{-1}B)^{-d_i} \right] Z_t,$$

où K_i sont des constantes.

Pour que $\psi(Z)$ converge dans le disque unité on doit avoir $|a_i^{-1}| < 1$, donc les racines de $\phi(Z)$ doivent être situées à l'extérieurs du disque unité pour avoir un processus stationnaire.

La fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=0}^{p-|h|} \psi_k \psi_{k+|h|} & \text{si } h \leq p \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1.3.4- Processus MA(q) :

$\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus moyenne mobile d'ordre q noté MA(q) est définit par l'équation : $X_t = \theta(B)Z_t$.

Avec : $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q, \theta_j \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \dots, q)$.

Le processus $\{X_t\}$ est inversible si et seulement si les racines du polynômes $\theta(B)$, sont de module supérieur à 1.

La fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-|h|} \theta_k \theta_{k+|h|} & \text{si } h \leq q \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1.4- File d'attente :

La théorie des files d'attente est un grand domaine d'application des processus aléatoires qui fait l'objet d'une abondante littérature théorique et appliquée. Sauf dans les cas les plus simples, auxquels nous nous limiterons, l'étude des files d'attente est difficile : on dispose le plus souvent d'une excellente modélisation mathématique, mais l'obtention à partir de ces modèles des quantités significatives (délais d'attente, longueur de la queue, etc.) est souvent délicate. Les cas mathématiquement les plus simples ne coïncident pas avec les cas les plus usuels dans le domaine des transports ou des communications, on est alors amené à utiliser des techniques de simulation.

Les files d'attente sont en général décrites au moyen d'une notation dite de Kendall qui est la suivante :

$$A/B/C/K/m/Z$$

Six facteurs sont ainsi précisés :

A : qui représente le processus d'entrée

B : qui représente le processus de service

C : qui représente le nombre de serveurs

K : qui représente la capacité maximale

m : qui représente la population des usagers

Z : qui représente la discipline de service

Pour décrire les processus d'entrée (lettre A), on utilise les notations suivantes :

GI : loi générale indépendante

G : loi générale

H_k : loi hyperexponentielle d'ordre k

E_k : loi d'Erlang k

M : loi exponentielle

D : loi constante

1.5- Equations aux différences stochastiques :

Considérons l'équation aux différences stochastiques

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Où le couple (A_n, B_n) sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribués (i.i.d) dans $\mathbb{R}^2$. Cette équation surgit dans diverses disciplines, par exemple sciences économique, physique, technologie nucléaire, biologie et sociologie. Dans toutes les applications Y_n représente des stocks de certains objets au temps n , B_n la quantité ajoutée juste avant le temps n (ou emporté au cas où $B_n < 0$), et le facteur A_n indique l'affaiblissement intrinsèque ou l'augmentation du stock Y_{n-1} entre le temps $n-1$ et n .

On note par (A, B) le couple aléatoire générique avec la même distribution que (A_n, B_n) . On commence par la variable aléatoire à valeur réelle Y_0 , supposé toujours indépendante de la suite i.i.d. $((A_n, B_n))$.

On veut étudier dans quels cas Y_n converge en distribution, et étudier sa distribution limite ; cette convergence est reliée à l'existence des solutions de $Y \stackrel{d}{=} AY + B$.

On note par $\xrightarrow{d}$ la convergence en distribution, et par $\stackrel{d}{=}$ l'égalité en distribution.

On commence par une simple observation concernant la distribution limite.

Lemme1. Si $Y_n \xrightarrow{d} Y$ pour une variable aléatoire Y à valeur dans $\mathbb{R}$, alors Y satisfait l'équation stochastique

$$Y \stackrel{d}{=} AY + B, \quad (1.3)$$

Y et (A, B) sont indépendants.

Preuve. Dans $\mathbb{R}^3$ on a

$$(A_n, B_n, Y_{n-1}) \xrightarrow{d} (A, B, Y)$$

Avec (A, B) et Y indépendant. En conséquence, le côté droit de (1.2) converge en distribution à celui de (1.3). $\square$

Avant de formuler les théorèmes principales nous faisons quelques observations qui jouent un rôle important dans leurs démonstrations.

Par itération de (1.2) on obtient pour $n = 1, 2, \dots$

$$Y_n = B_n + A_n B_{n-1} + A_n A_{n-1} B_{n-2} + \dots + A_n A_{n-1} \dots A_2 B_1 + A_n A_{n-1} \dots A_1 Y_0. \quad (1.4)$$

On écrit $Y_n = Y_n(Y_0)$ toutes les fois où la dépendance en Y_0 est appropriée.

Par itération de (1.2) commençant par différent Y'_0, Y''_0 mais la même suite $((A_n, B_n))$ on obtient pour $n = 1, 2, \dots$

$$Y_n(Y'_0) - Y_n(Y''_0) = A_1 A_2 \dots A_n (Y'_0 - Y''_0). \quad (1.5)$$

On met $Y_0^* = 0$ et pour $n = 1, 2, \dots$

$$Y_n^* = B_1 + A_1 B_2 + A_1 A_2 B_3 + \dots + A_1 A_2 \dots A_{n-1} B_n. \quad (1.6)$$

Ainsi

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y_n^* + A_1 A_2 \dots A_n Y_0, \quad (1.7)$$

qui se suit immédiatement de (1.4), (1.6) et

$$(Y_0, ((A_k, B_k))_{k=1}^n) \stackrel{d}{=} (Y_0, ((A_{n-k+1}, B_{n-k+1}))_{k=1}^n) \quad \text{dans } \mathbb{R}^{2n+1}.$$

On note que Y_n^* sont les sommes partielles de la série infinie

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \dots A_{k-1} B_k. \quad (1.8)$$

Donc une condition suffisante de la convergence en distribution de Y_n^* est la convergence avec probabilité 1 de la série (1.8). Après nous formulons un analogue du lemme 1 pour Y_n^* , généralisé aux temps d'arrêt.

Lemme 2. Soit N un temps d'arrêt concernant $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, où $\mathcal{F}_n$ est la σ -algèbre engendrée par Y_0 et $((A_k, B_k))_{k=1}^n$. Si $N < \infty$ avec probabilité 1 et $Y_n^* \xrightarrow{d} Y$, alors

$$Y \stackrel{d}{=} A_1 A_2 \dots A_N Y + Y_N^* \quad (1.9)$$

Y et $(A_1 A_2 \dots A_N, Y_N^*)$ sont indépendants.

Le comportement limite de la marche aléatoire $(\sum_{k=1}^n \log A_k)_{n=0}^{\infty}$ est crucial à celui de Y_n .

Le lemme suivant cite les cas appropriés.

Lemme 3. *Un et seulement un des cas suivants se produit.*

Cas I. $\sum_{k=1}^n \log |A_k| \xrightarrow{d} -\infty$.

Cas II. $\log |A| = 0$ avec probabilité 1.

Cas III. $\limsup P[\sum_{k=1}^n \log |A_k| > 0] > 0$.

On écrit

$$\mu = E \log |A|$$

dans le cas où l'espérance existe, fini ou infini (i.e., au moins un de $E(\log |A|)^+$ et $E(\log |A|)^-$ est fini). Toutes les fois où μ apparaît, son existence est implicitement supposée.

On note cela par la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log |A_k| \xrightarrow{d} \mu \text{ avec la probabilité 1.} \quad (1.10)$$

Lemme 4. (a) *si $-\infty \leq \mu < 0$, alors le Cas I se produit.*

(b) *si $0 < \mu \leq \infty$, alors le Cas III se produit.*

(c) *si $\mu = 0$ alors les trois Cas se produisent.*

(d) *si $E \log |A|$ n'existe pas, alors les Cas I et III se produisent.*

Théorème 1. *Supposant que (1.3) a une solution. Alors on a les résultats suivants*

- (i) *Cas I du lemme 3. La solution de (1.3) est unique en distribution et $Y_n(Y_0)$ converge en distribution pour tout Y_0 .*
- (ii) *Cas II du lemme 3. Il existe un réel c tel que $B = c(1-A)$ avec la probabilité 1. Si $A \neq 1$ avec probabilité positive, alors toutes les solutions de (1.3) sont ces Y avec $Y - c \stackrel{d}{=} (Y - c)$. Si $A = 1$ avec la probabilité 1, donc $(A, B) = (1, 0)$ avec la probabilité 1, alors tout Y satisfait (1.3). Si $A = -1$ avec probabilité positive, alors $Y_n(Y_0)$ converge en distribution pour tout Y_0 seulement si Y_0 est une solution de (1.3).*

- (iii) *Cas III du lemme 3. Il existe un réel c tel que $B = c(1-A)$ avec probabilité 1, et $Y = c$ avec probabilité 1 est l'unique solution de (1.3). Par ailleurs, $Y_n(Y_0)$ converge en distribution seulement si $Y_0 = c$ avec probabilité 1.*

Théorème 2. (a) *Si $0 \leq \mu \leq \infty$, alors (1.3) a une solution si et seulement si $B = c(1-A)$ avec probabilité 1 pour un réel c .*

(b) *Si $-\infty < \mu < 0$, alors (1.3) a une solution si et seulement si $E \log^+ |B| < \infty$.*

(c) *Si $\mu = -\infty$, alors (1.3) a une solution si $E \log^+ |B| < \infty$ ou $A = 0$ avec probabilité positive.*

Dans les cas (b) et (c) la série (1.8) converge et est une solution de (1.3).

D'où soient les lemmes suivants

Lemme 7. *Si $-\infty < \mu < 0$, alors Y_n^* converge avec probabilité 1 si et seulement si $E \log^+ |B| < \infty$. Si $\mu = -\infty$, alors Y_n^* converge avec probabilité 1 si $E \log^+ |B| < \infty$ ou $A = 0$ avec probabilité positive.*

Lemme 8. *Si $-\infty < \mu < 0$ et Y_n^* converge en distribution, alors $E \log^+ |B| < \infty$.*

Corollaire 1. *Si $-\infty < \mu < 0$, alors la série (1.8) converge en distribution si et seulement si elle converge avec probabilité 1.*

1.6- Processus Ponctuel :

Définition 1. *Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires définie sur l'espace d'état E , on définit aussi pour $A \subset E$*

$$N(A) = \text{card}\{i : X_i \in A\},$$

i.e. $N(A)$ compte le nombre des X_i qui tombent dans A .

$N(A) = N(A, \omega)$ est aléatoire pour un ensemble A donné et, sous les conditions générales, $N(., \omega)$ définit la mesure de comptage aléatoire avec les réalisations de X_n engendré par la σ -algèbre $\mathcal{B}$ de sous ensemble de E . C'est la signification intuitive du processus ponctuel N .

Dans notre cas, l'espace d'état E , où les points se trouvent, est un sous ensemble de l'espace euclidien de dimension fini qui peut contenir les points de coordonnées infinies, et E est engendré par la σ -algèbre $\mathcal{B}$ des ensembles boréliens générée par les ensembles ouverts. On peut exprimer le processus ponctuel en utilisant la mesure de Dirac δ_x pour $x \in E$:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases} \quad A \in \mathcal{B}$$

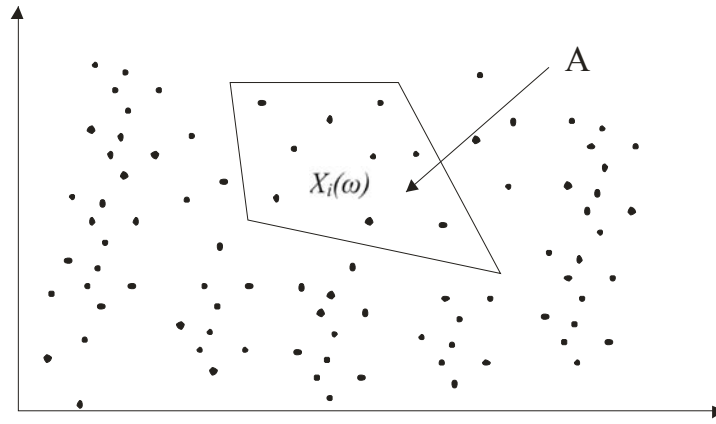


Fig.1.1-1- Configuration des points aléatoires X_i dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Le nombre de points qui appartient à l'ensemble A constituent la variable de comptage $N(A)$; dans ce cas $N(A, \omega) = 9$.

Pour une suite donnée $(x_i)_{i \geq 1}$ dans E .

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A) = \sum_{i: x_i \in A} 1 = \text{card}\{i : x_i \in A\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

définit la mesure de comptage sur $\mathcal{B}$ appelée mesure ponctuelle si $m(K) < \infty$ pour tout ensemble compact $K \in E$.

Soit $M_P(E)$ l'espace de toutes les mesures ponctuelles sur E engendré par une σ -algèbre appropriée $\mathcal{M}_P(E)$.

Définition 2. (Définition du processus ponctuel)

Un processus ponctuel sur E est une application mesurable.

$$N : [\Omega, \mathcal{F}, P] \rightarrow [M_P(E), \mathcal{M}_P(E)].$$

Remarques:

1) La σ -algèbre $\mathcal{M}_p(E)$ contient tous les ensembles de la forme $\{m \in M_p(E) : m(A) \in B\}$ pour $A \in \mathcal{B}$ et pour un ensemble borélien $B \subset [0, \infty]$, i.e. c'est la plus petite σ -algèbre qui génère les applications $m \rightarrow m(A)$ mesurable pour tout $A \in \mathcal{B}$.

2) Le processus ponctuel est un élément aléatoire ou fonction aléatoire qui suppose que les mesures ponctuelles sont des valeurs.

3) Le processus ponctuel peut être écrit sous la forme $N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$ pour la suite (X_n) de vecteurs aléatoires de dimension d . Ainsi, pour $\omega \in \Omega$.

$N(A, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i(\omega)}(A)$, $A \in \mathcal{B}$ définit la mesure ponctuelle sur $\mathcal{B}$.

4) Supposant que $m = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}$ est la mesure ponctuel sur E . Soit (y_i) la sous suite de (x_i) contenant toutes les valeurs mutuellement distinctes de (x_i) sans répétitions.

On définit la multiplicité de y_i par :

$$n_i = \text{card} \{j : j \geq 1, y_i = x_j\}.$$

Ainsi on peut écrire : $m = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \delta_{y_i}$. Si $n_i = 1$ pour tout i , alors m est appelée mesure ponctuelle simple, et multiple si non. Par analogie, si les réalisations du processus ponctuel N sont des mesures ponctuelles simples, alors N est un processus ponctuel simple, et multiple si non. Alternativement, le processus ponctuel N est simple si

$$P(N(\{x\}) \leq 1, x \in E) = 1.$$

1.6.1- Exemple 1 (Processus ponctuel des excédants) :

L'un des processus ponctuels reliés aux valeurs extrêmes est le processus ponctuel des excédants.

Soit u un nombre réel et (X_n) une suite de variables aléatoires donc le processus ponctuel des excédants

$$N_n(.) = \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}(.), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

définit sur l'espace d'état $E = (0,1]$ compte le nombre des excès du seuil u par la suite $X_1, \dots, X_n$. Par exemple, si on prend l'intervalle $(0,1]$; alors :

$$\begin{aligned} N_n(0,1] &= \text{card} \{ i : 0 < n^{-1} i \leq 1 \text{ et } X_i > u \} \\ &= \text{card} \{ i \leq n : X_i > u \}. \end{aligned}$$

On écrit par la suite pour une mesure μ :

$$\mu(a, b] = \mu((a, b]) , \mu[a, b] = \mu([a, b]) \quad \text{etc.}$$

Soit $X_{(k)}$ la $k^{\text{ème}}$ grande statistique d'ordre de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$. Alors :

$$\begin{aligned} \{N_n(0, 1] = 0\} &= \{ \text{card} \{ i \leq n : X_i > u \} = 0 \} \\ &= \{ \text{aucun des } X_i, i \leq n, \text{ excède } u \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{N_n(0, 1] < k\} &= \{ \text{card} \{ i \leq n : X_i > u \} < k \} \\ &= \{ \text{au moins } k \text{ des } X_i, i \leq n, \text{ excède } u \} \\ &= \{ \text{la statistique d'ordre } X_{(k)} \text{ n'excède pas } u \} \\ &= \{ X_{(k)} \leq u \}. \end{aligned}$$

Le processus ponctuel des excédants peut être écrit sous la forme :

$$N_n(.) = \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-1}i, X_i}(.), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

de dimension 2 d'espace d'état $E = (0, 1] \cap (\mu, \infty)$.

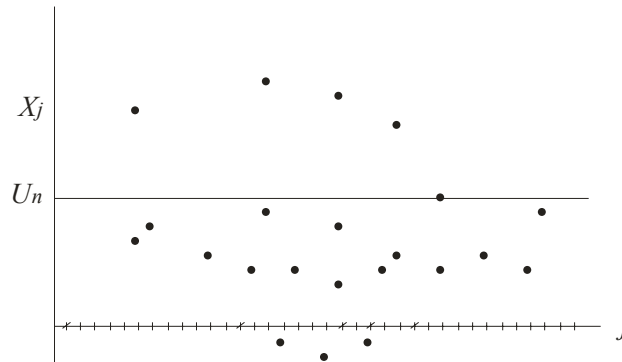


Fig.1.2- Processus ponctuel des excédants

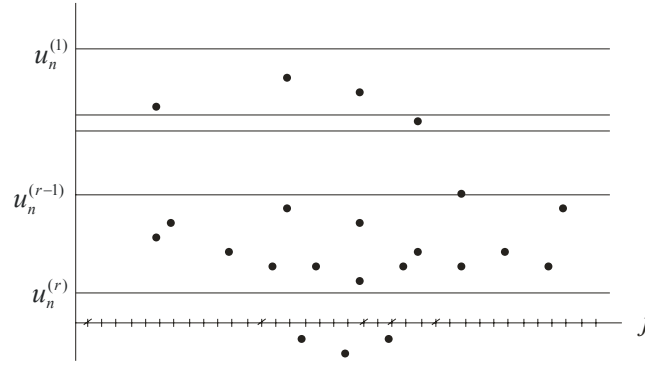


Fig.1.3- Processus ponctuel des excédants à multi niveaux

1.6.2- Exemple 2 (Processus de comptage de renouvellement) :

Soit (Y_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. positive, $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n \geq 1$.

On note le processus de comptage de renouvellement généré par (Y_i) par :

$$N(t) = \text{card}\{i : T_i \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

A ce processus on peut relier le processus ponctuel :

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{T_i}(A), \quad A \in \mathcal{B}$$

D'espace d'état $E = [0, \infty)$. Notons que pour $A = [0, t]$ on obtient :

$$N(t) = N[0, t], \quad t \geq 0$$

Dans ce sens, chaque processus de renouvellement correspond à un processus ponctuel. Ce processus ponctuel est simple car $0 < T_1 < T_2 < \dots$ avec probabilité 1. Et le processus de poisson est un processus de renouvellement particulier de variables aléatoires exponentielle Y_i .

1.6.3- Exemple 3 (Sommes aléatoires conduites par un processus de comptage de renouvellement)

On considère les sommes aléatoires conduites par un processus de renouvellement :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0.$$

Ici $(N(t))$ est un processus de comptage de renouvellement défini en exemple 2 et (X_i) est une suite i.i.d. indépendante de $(N(t))$.

Les sommes aléatoires sont reliées au modèle de risque de renouvellement dont on peut interpréter les v.a. X_i comme la taille des sinistres arrivant à l'instant T_i .

Le processus ponctuel relié à $(S(t))$ est donné par :

$$\tilde{N}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(T_i, X_i)}(A), \quad A \in \mathcal{B},$$

D'espace d'état $E = [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Par exemple, dans le contexte d'assurance

$$\tilde{N}((a, b] \times (u, \infty)) = \text{card}\{i : a < T_i \leq b, X_i > u\}$$

Compte le nombre de sinistres arrivant dans l'intervalle de temps $(a, b]$ et excédant la valeur du seuil u . On note que $\tilde{N}$ est très proche au processus ponctuel des excédants.

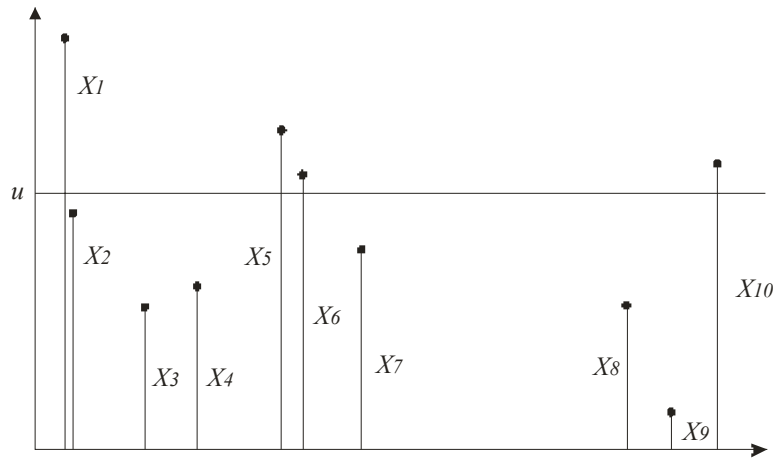


Fig.1.4- Visualisation du processus ponctuel des excédants correspondant aux sommes aléatoires de l'exemple 3.

1.6.4- Distribution et fonctionnelle de Laplace :

Les réalisations du processus ponctuel N sont des mesures ponctuelles. Donc la loi de distribution ou de probabilité de N est définie sur les sous ensembles des mesures ponctuelles :

$$P_N(A) = P(N \in A), \quad A \in \mathcal{M}_p(E).$$

Cette distribution n'est pas facile à imaginer. Heureusement, la distribution de N est déterminée uniquement par la famille des distributions des vecteurs aléatoires fini dimensionnels

$$(N(A_1), \dots, N(A_m)) \tag{1.4}$$

Pour tout choix de $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}$ et $m \geq 1$. La collection de toutes ces distributions est appelée distributions finies dimensionnelles du processus ponctuel. On peut imaginer les distributions finies dimensionnelles plus facilement que la distribution P_N . En effet, (1.4) est un vecteur aléatoire de variables aléatoires à valeurs entières qui est complètement donné par les probabilités

$$P(N(A_1) = k_1, \dots, N(A_m) = k_m), \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

On sait que c'est souvent facile à décrire la distribution des variables aléatoires ou vecteurs aléatoires par des moyens analytiques. Par exemple, on utilise une classe entière de transformées : transformée de Laplace, fonction génératrices etc. Le même outil existe pour les processus ponctuels :

Définition 3. (Fonctionnelle de Laplace)

La fonctionnelle de Laplace du processus ponctuel N est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_N(g) &= E \exp \left\{ - \int_E g dN \right\} \\ &= \int_{M_p(E)} \exp \left\{ - \int_E g(x) d\eta(x) \right\} dP_N(\eta). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Elle est définie pour des fonctions g mesurables non négatives sur l'espace d'état E .

Remarques.

- 1) La fonctionnelle de Laplace ψ_N détermine complètement la distribution d'un processus ponctuel.
- 2) Les fonctionnelles de Laplace sont des outils importants pour la découverte des propriétés des processus ponctuels; sont particulièrement utiles pour étudier la convergence faible des processus ponctuels.
- 3) L'intégrale $\int_E g dN$ dans (1.5) est bien définie comme un intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

On écrit $N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$ pour des vecteurs aléatoires à valeurs dans E ; alors

$$\int_E g dN = \sum_{i=1}^{\infty} g(X_i).$$

En particulier, $\int_A dN = \int_E I_A dN = N(A)$.

Exemple. (Fonctionnelle de Laplace et transformée de Laplace)

Pour avoir une idée sur l'utilisation des fonctionnels de Laplace on considère les fonctions spéciales

$$g(z) = z I_A, \quad z \geq 0, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Alors

$$\psi_N(g) = E \exp \left\{ - \int_E g dN \right\} = E \exp \{ - z N(A) \},$$

De sorte que la notion de la transformée de Laplace ordinaire du variable aléatoire $N(A)$ est intégrée dans le fonctionnel de Laplace. Supposant maintenant que $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}$. Si on choisi les fonctions

$$g = z_1 I_{A_1} + \dots + z_m I_{A_m}, \quad z_1 \geq 0, \dots, z_m \geq 0,$$

Alors on obtient la transformée de Laplace conjointe des distributions finies dimensionnelles, i.e. des vecteurs aléatoires (1.4). A partir des remarques ci-dessus on a constaté que les distributions finies dimensionnelles déterminent la distribution de N . d'autre part, les distributions finies dimensionnelles sont déterminées uniquement par leurs transformées de Laplace, et par conséquent le fonctionnel de Laplace détermine uniquement la distribution de N .

1.7- Processus de Poisson :

Définition 1. On dit que le processus aléatoire $X(t)$, $t \in [0, +\infty[$ est un processus de Poisson de paramètre d'intensité λ , $\lambda > 0$ si

1. $X(0) = 0$.
2. Quelle que soit la suite $t_0, t_1, \dots, t_n$, avec $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les accroissements $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendants.
3. Quels que soient s et t , $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $X(t) - X(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$:

$$P\{X(t)-X(s) = k\} = (\lambda(t-s))^k \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

Remarque. $m(t) = E(X(t)) = \lambda t$ et $\text{Var}(X(t)) = \lambda t$, $t \in T$.

Définition 2. Le processus ponctuel N est appelé processus de poisson ou mesure aléatoire de poisson de moyenne μ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

a) pour $A \in \mathcal{B}$,

$$P(N(A) = k) = \begin{cases} e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!} & \text{si } \mu(A) < \infty \\ 0 & \text{si } \mu(A) = \infty \end{cases} \quad k \geq 0.$$

b) pour $m \geq 1$, si $A_1, \dots, A_m$ sont des ensembles mutuellement disjoints dans $\mathcal{B}$ alors

$N(A_1), \dots, N(A_m)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

1.8- Processus de Poisson composé :

Soit (Γ_i) les points du processus de poisson N sur $[0, \infty)$ d'intensité $\lambda > 0$ et (ξ_i) une suite des variables aléatoires des entiers non négative, indépendante de N . Considérant le processus ponctuel multiple :

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \delta_{\Gamma_i}, \text{ on note}$$

$$\tilde{N}(0, t] = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \delta_{\Gamma_i}(0, t] = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i, \quad t \geq 0.$$

On appelle le processus ponctuel $\tilde{N}$ processus de poisson composé d'intensité λ et de taille des groupes ξ_i . Les probabilités $\pi_k = P(\xi_1 = k), k \geq 0$ sont les probabilités des groupes de $\tilde{N}$.

Nous prenons aussi comme exemple de processus stochastique à accroissement indépendant et stationnaire le processus Brownien.

1.9- Mouvement Brownien :

Le mouvement Brownien est le plus célèbre et le plus important des processus stochastiques, ceci pour plusieurs raisons.

Pour des raisons historiques d'abord : la découverte du processus qui s'est faite durant la période 1900-1930 et à laquelle sont attachés les noms de Bacheliers, Smoluchowski, Einstein, Wiener, Kolmogorov et Brown fut le premier cas où le calcul des probabilités s'appliquait à la description d'un phénomène physique indépendamment de tout jeu de hasard, à savoir la description du mouvement d'une petite particule dans un liquide ou un gaz soumise à des chocs moléculaires dus à l'agitation thermique.

Des raisons mathématiques ensuite : ce processus est un objet mathématique remarquable sur lequel s'accumulent un nombre considérable de propriétés, seul processus à accroissements indépendants stationnaires à trajectoires continues, il est relié à la fois à la théorie des processus stationnaires et du bruit blanc et à la théorie des fonctions harmoniques (fonctions réelles sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\Delta f = 0$) encore appelée théorie du potentiel. Enfin presque tous les processus de Markov à trajectoires continues peuvent se représenter à partir du mouvement brownien, c'est la théorie des équations différentielles stochastiques.

Considérons à présent une petite particule dans un liquide effectuant un mouvement désordonné dû aux chocs incessants qu'elle reçoit. Notons X_t la position de la particule à l'instant t . Les hypothèses raisonnables suivantes ont été prises par Einstein.

- 1.1. $X_{t+h} - X_t$ est indépendant de $\sigma \{X_s, s \leq t\}$;
- 1.2. La loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t ;
- 1.3. Les trajectoires sont continues.

La première hypothèse revient à dire que les chocs qui vont intervenir dans $]t, t+h]$ vont déterminer le mouvement durant cet intervalle de temps, c'est-à-dire qu'on néglige l'effet de l'inertie de la particule à l'instant t .

La seconde que la situation reste identique à elle-même dans le temps, (la température ne change pas).

La troisième, que la particule ne saute pas.

Définition 3. Soit le processus stochastique $\{W(t), t \geq 0\}$, défini sur la base

$(\Omega, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ $W(t)$ est appelé mouvement brownien ou processus de Wiener s'il vérifie les conditions suivantes:

- a) $W(0) = 0$, et $W(t)$ est continu pour $t = 0$.

- b) $W(t)$ est un processus à accroissements indépendants; on suppose que $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, alors les accroissements $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$, sont mutuellement indépendants et stationnaires.*
- c) Tous les accroissements $W(t+s) - W(s)$ sont normalement distribués, de moyenne 0, et de variance $\sigma^2 t$, avec σ paramètre fixé.*
- d) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions $W_t = W_t(\omega)$, sont continues, ce qui signifie aussi que W_t est un processus presque sûrement à trajectoire continues. Cette définition permet de caractériser la loi de la variable W_t .*

1.9.1- Propriétés du mouvement brownien :

- i) Le mouvement brownien est un processus markovien ceci implique que l'état du système n'est pas défini en fonction de l'état du système à des instants antérieurs, mais est aléatoire, et obéit à une certaine loi de probabilité.*
- ii) Les trajectoires du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$ ne sont pas à variations bornée. Intuitivement, ce dernier résultat signifie que chacune des trajectoires du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$ est de longueur infinie.*
- iii) Le mouvement brownien est récurrent. Cela signifie que le mouvement brownien visite une infinité de fois chacun de ses états.*

Remarque: Si le processus $W(t)$ est de variance égale au temps alors le processus $W(t)$ est appelé processus de Wiener ou mouvement brownien standard qui satisfait :

$$E(W(t)) = 0 \text{ et } E(W^2(t)) = t.$$

1. 10- Processus de Markov :

Un processus de Markov est un processus aléatoire où son évolution future ne dépend pas de son passé, mais uniquement de l'état présent. Lorsque le processus est discret, on parle des chaînes de Markov. Autrement dit, soit une séquence quelconque d'instant $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t_{n+1}$ auxquels un processus prend les valeurs arbitraires $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Ce processus est Markovien si la probabilité conditionnelle au temps t_{n+1} vérifie :

$$P[X(t_{n+1}) \in B / X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n] = P[X(t_{n+1}) \in B / X(t_n) = x_n] \quad (1.23)$$

Où B est un sous ensemble de $\mathcal{B}_R$ ($\mathcal{B}_R$ est une σ -algèbre).

Par extension, on parle de processus de Markov du $n^{\text{ème}}$ ordre lorsque l'état futur du processus dépend des n états précédents. On déduit rapidement les propriétés suivantes:

- $E[X_{n+1} / X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = E[X_{n+1} / X_n = x_n]$
- $P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}] = P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n) \cdots P(X_2 = x_2 / X_1 = x_1) P(X_1 = x_1)$

Cette dernière relation montre que la statistique du processus est déterminée par les probabilités de transition et la densité de probabilité initiale.

Généralement, les probabilités de transition sont données par :

$$P(s, x; t, B) = P(X(t) \in B / X(s) = x) \quad \text{où } s < t \quad B \in \mathcal{B}_R \quad (1.24)$$

Pour des valeurs fixes (s, x) et une valeur non fixe t , $P(s, x; t, \cdot)$ est une fonction de probabilité (mesure) dans la σ -algèbre. Sous ces conditions $P(s, x; t, \cdot)$ est dit densité de transition avec :

$$P(s, x; t, B) = \int_B P(s, x; t, y) dy$$

On dit que le processus de Markov à temps continu est homogène si la densité de transition $P(s, x; t, y)$ dépend seulement de la différence $(t-s)$ et non pas des instants s et t . Par simplification, on peut écrire : $P(s, x; t, y) = P(0, x; t-s, y) = P(x; t-s, y)$

$$P(s, x; t, B) = P(0, x; t-s, B) = P(x; t-s, B), \quad B \in \mathcal{B}_R$$

Cependant, les densités de transition ne sont toutefois pas arbitraires. Elles doivent satisfaire l'équation de Chapman Kolmogorov, défini comme suit :

$$P(s, x; t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(s, x; \tau, z) P(\tau, z; t, y) dz \quad \text{pour tout } s \leq \tau \leq t \text{ et } x, y \in \mathbb{R} \quad (1.25)$$

Pour les probabilités de transition, ces équations prennent la forme :

$$P(s, x; t, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau, z; t, B) P(s, x; \tau, dz), \quad B \in \mathcal{B}_R \quad (1.26)$$

L'intégrale ci-dessus est une intégrale de Riemann Stieltjes.

▪ Cas particulier (processus de Wiener) :

Le processus de Wiener standard est un cas particulier des processus de Markov homogène où la densité de transition est donné par :

$$P(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

Nous rappelons que le processus de Wiener est un processus gaussien à accroissements indépendants vérifiant :

- $W(0) = 0$ avec probabilité 1.
- $E(W(t)) = 0$
- $Var(W(t)-W(s)) = t - s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Après avoir présenté dans ce chapitre l'essentiel des processus stochastiques, on va passer maintenant à la théorie des valeurs extrêmes.

Chapitre 2

Théorie des valeurs extrêmes

2.1- Introduction :

Dans ce chapitre on va présenter l'essentiel de la théorie des valeurs extrêmes, qui a pour but de caractériser la loi des événements extrêmes, le maximum et le minimum ainsi que les observations qui excèdent un certain seuil indépendamment de la loi initiale des observations, pour cela on va commencer par un outil de base dans la théorie des valeurs extrêmes c'est la statistique d'ordre qu'est nécessaire dans le cas où on s'intéresse, non pas aux observations à l'état brute, mais au comportement des réalisations ordonnées.

2.2- Statistiques d'ordre :

2.2.1- Définitions :

Définition 1. Soit une suite de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On appelle statistiques d'ordre $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ ces variables aléatoires ordonnées (dans l'ordre croissant) :

$$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

$X_{(i)}$ est donc la i -ème statistique d'ordre dans un échantillon de taille n .

Deux statistiques d'ordre sont particulièrement intéressantes pour l'étude des événements extrêmes, ce sont les statistiques d'ordre extrêmes qui correspondent à la plus petite statistique d'ordre (statistique du minimum) $X_{(1)}$

$$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

et à la plus grande statistique d'ordre (statistique du maximum) $X_{(n)}$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

On peut aussi noter la i -ème statistique d'ordre par : $X_{i:n}$ ou $X_{[i]}$.

Définition 2.

i) L'écart $E = X_{(n)} - X_{(1)}$ est appelée **étendue**.

ii) La Statistique

$$M = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

est appelée **médiane**, ce dernier est utilisé pour caractériser l'emplacement de l'échantillon et l'étendue pour décrire sa dispersion.

iii) La statistique $T_{n,r} = \frac{1}{n-2r} \sum_{i=r+1}^{n-r} X_{(i)}$ est appelée **moyenne tronquée d'ordre r** .

2.2.2- Densité et loi des statistiques d'ordre :

Soit F la fonction de répartition des n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et f sa densité,

Proposition 1. La fonction de répartition de la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre peut être exprimé sous la forme suivante :

$$F_{X_{(i)}}(y) = P[\text{au moins } i \text{ des } X_i \text{ sont plus petits ou égaux à } y]$$

Ce qui donne

$$F_{X_{(i)}}(y) = P[X_{(i)} \leq y] = \sum_{l=i}^n \binom{n}{l} [F(y)]^l [1 - F(y)]^{n-l}$$

si F est continue, alors

$$F_{X_{(i)}}(y) = \int_{-\infty}^y f_{X_{(i)}}(z) dz,$$

où

$$f_{X_{(i)}}(y) = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} [F(y)]^{i-1} [1 - F(y)]^{n-i} f(y).$$

2.2.3- Densité conjointe de deux statistiques d'ordre :

Proposition 2. La densité conjointe des deux statistiques d'ordre $X_{(i)}$ et $X_{(j)}$ avec $i < j$ est donnée par :

$$f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(y, z) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(y)]^{i-1} [F(z) - F(y)]^{j-i-1} [1 - F(z)]^{n-j} f(y)f(z).$$

2.2.4- Distribution des k grandes statistiques d'ordre :

Proposition 3. Pour $k = 1, \dots, n$ on note $F_{k,n}$ la distribution de $X_{(k)}$. Alors

$$- F_{k,n}(x) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{r}{n} \bar{F}^r(x) F^{n-r}(x) \quad \text{où } \bar{F}(x) = 1 - F(x).$$

- Si F est continue alors

$$F_{k,n}(x) = \int_{-\infty}^x f_{k,n}(z) dz,$$

Où $f_{k,n}$ est la densité de $F_{k,n}$ par rapport à F

$$f_{k,n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{n-k}(x) \bar{F}^{k-1}(x).$$

2.2.5- Distribution des extrema dans le cas fini :

Pour les statistiques d'ordre extrêmes, nous obtenons des expressions très simples ; on définit les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition 4. Les fonctions de répartition du maximum et du minimum sont donnés par :

$$F_{M_n}(x) = \{F(x)\}^n$$

$$F_{m_n}(x) = 1 - \{\bar{F}(x)\}^n$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \\ &= [F(x)]^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{m_n}(x) &= P(m_n \leq x) = 1 - P(m_n \geq x) \\
&= 1 - P(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\
&= 1 - P(X_1 \geq x) \dots P(X_n \geq x) \\
&= 1 - [1 - F(x)]^n
\end{aligned}$$

Remarque 1. Dans le cas où les X_i ne sont pas identiquement distribuées, on a de la même manière :

$$F_{M_n}(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x)$$

Remarque 2. Notons que, pour des variables aléatoires suivant une loi F , la loi du maximum vérifie la relation suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x)]^n = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < 1. \\ 1 & \text{si } F(x) = 1. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, la distribution du maximum est une fonction qui dégénère et présentera un saut à la valeur minimale x telle que $F(x) = 1$; valeur que l'on appelle souvent upper-end point ou right-end point, elle est notée par $x_F = \sup\{x \in R : F(x) < 1\}$ est appelée aussi extrémité supérieure.

2.2.6- Fonction de distribution empirique :

Définition 3. Pour $x \in R$ on introduit la fonction de distribution empirique :

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n} \text{card}\{i : 1 \leq i \leq n, X_i \leq x\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \in R
\end{aligned}$$

Où I_A représente l'indicatrice de l'ensemble A .

2.2.7- Fonction quantile :

Définition 4. La fonction quantile $F^{\leftarrow}$ de la distribution F est définie par

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in R : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1.$$

Pour un échantillon $X_1, \dots, X_n$ on note la fonction quantile empirique par $F^{\leftarrow}$

$$F_n^{\leftarrow}(t) = X_{(k)} \quad \text{pour } 1 - \frac{k}{n} < t \leq 1 - \frac{k-1}{n}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Dans le paragraphe suivant on va présenter un résultat sur la transformation des quantiles, qui est nécessaire dans la simulation d'échantillon et par suite dans l'estimation des p-quantiles.

2.2.8- Transformation des quantiles :

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de distribution F , et $U_1, \dots, U_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. uniformément distribuées sur $[0,1]$ et notant par $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ la statistique d'ordre correspondante, alors

- $F^{\leftarrow}(U_1) \stackrel{d}{=} X_1$ (égalité en distribution).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_{(1)} \dots X_{(n)}) \stackrel{d}{=} (F^{\leftarrow}(U_{(1)}), \dots, F^{\leftarrow}(U_{(n)}))$.
- La variable aléatoire $F(X_1)$ a une distribution uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si F est une fonction continue.

2.2.9- Estimation du p-quantile :

On note x_p le quantile de la loi de X_i , une estimation du quantile est donnée par :

$$\hat{x}_p = \begin{cases} X_{(k+1)} & \text{si } \frac{k}{n} < p < \frac{k+1}{n} \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2} & \text{si } p = \frac{k}{n} \end{cases}$$

2.2 - Valeurs extrêmes :

Nous avons vu dans la 1^{ère} partie que, pour une taille d'échantillon fixée, le maximum des observations $M_n = \max (X_1, \dots, X_n)$ suit F^n , lorsque X_i suit la loi F . Mais pour des échantillons devenant de plus en plus grand, ce résultat n'aura plus beaucoup de sens car la loi F^n dégénère. On veut donc chercher une loi non dégénérée pour le maximum de l'échantillon, convenablement standardisé.

Le théorème suivant est un résultat fondamental concernant la distribution limite du maximum, il donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi limite non dégénérée.

Théorème 1. (Fisher – Tippet)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi F . S'il existent deux suites de constantes $a_n > 0$, $\forall n$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une distribution non dégénérée H telles que : pour $n \rightarrow +\infty$,

$$P\{(M_n - b_n)/a_n\} \rightarrow H(x)$$

Alors H appartient à l'un des trois types suivants de distribution :

$$\begin{aligned} \text{Gumbel :} \quad & H(x) = \exp(-e^{-x}) & x \in \mathbb{R} \\ \text{Frechet :} \quad & H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases} & (2.1) \\ \text{Weibull :} \quad & H(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A travers ce résultat, on remarque que chacune de ces trois distributions est la distribution limite unique du maximum standardisé $(M_n - b_n) / a_n$.

Remarque. Pour distinguer les trois distributions, on utilise généralement les notations suivantes: Λ pour Gumbel, Φ_α pour Frechet et ψ_α pour Weibull.

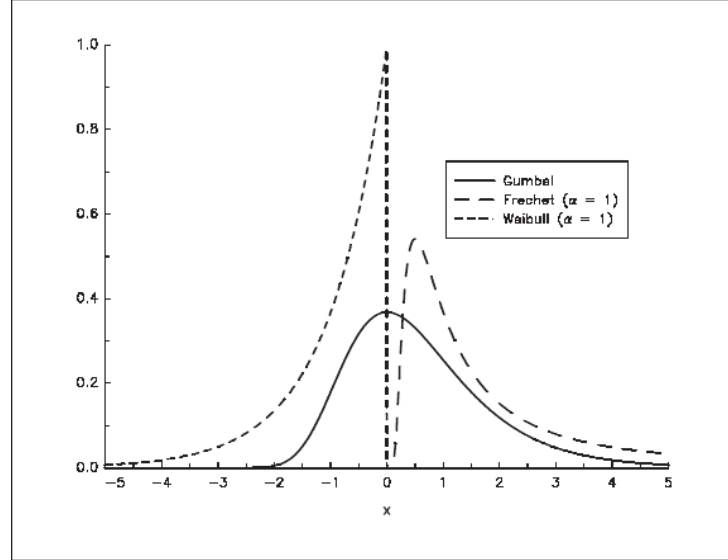


Fig.2.1 - Densités des valeurs extrêmes

2.2.1- Domaines d'attraction :

Définition 1. On dit que la variable aléatoire X (ou la distribution F) appartient au domaine d'attraction (ou domaine d'attraction maximal) de la distribution des valeurs extrêmes H s'il existe des constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :

$$P \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \right\} \rightarrow H$$

On écrit $X \in MDA(H)$ (ou $F \in MDA(H)$)

Donc l'ensemble des lois F pour les quelles le maximum normalisé suit la loi H est appelé *domaine d'attraction* de H .

Pour les trois distributions des valeurs extrêmes, les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ qui normalisent le maximum sont les suivantes :

Gumbel : $a_n = 1$ ou $a_n = \text{constante}$, $b_n = \log n$.

Weibull : $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$.

Fréchet : $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$.

Domaine d'attraction (H)	Gumbel	Fréchet	Weibull
F	Normale Exponentielle Lognormale Gamma Weibull	Cauchy Pareto	Uniforme Weibull

Tab.2.1- Domaine d'attraction

C'est par exemple le cas de la distribution exponentielle, nous avons :

$$F(x) = 1 - \exp(-x)$$

Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] &= P(M_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \\ &= [1 - \exp(-a_n x - b_n)]^n \end{aligned}$$

Si nous posons $a_n = 1$ et $b_n = \log n$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{n} \exp(-x)\right]^n \\ &= \exp(-\exp(-x)) \end{aligned}$$

Car :
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Donc l'exponentielle appartient au domaine d'attraction de Gumbel.

Nous indiquons maintenant les critères les plus utilisés pour déterminer les domaines d'attraction et les constantes de normalisation.

Définition 2. Une fonction f est dite à variation régulière d'indice α et on note $f \in RV_\alpha$ si pour tout $x > 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha$$

Théorème 2. $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ si et seulement si $1 - F \in RV_{-\alpha}$, dans ce cas,

$$a_n = F^{-1}(1 - n^{-1}) \text{ et } b_n = 0.$$

Ce théorème permet de caractériser très simplement les distributions $F \in MDA(\Phi_\alpha)$.

En effet, elles doivent vérifier

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} \text{ pour } x > 0.$$

Théorème 3. $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ pour $\alpha > 0$ si et seulement si $1 - F(x_F - x^{-1}) \in RV_{-\alpha}$

et $x_F < \infty$, dans ce cas, $a_n = x_F - F^{-1}(1 - n^{-1})$ et $b_n = x_F$. Donc on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - F(x_F - xh)}{1 - F(x_F - h)} = x^\alpha$$

Théorème 4. $F \in MDA(\Lambda)$ si et seulement s'il existe une fonction strictement positive

$$g(t) \text{ telle que } \lim_{t \uparrow x_F} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} = e^{-x} \quad (2.2)$$

Pour tout x réel, en plus si (2.2) est vérifiée pour toute fonction g strictement positive, alors elle est aussi vérifiée pour le choix suivant de g :

$$g(t) = \frac{\int_t^{x_F} (1 - F(u)) du}{1 - F(t)} \quad \text{pour } t < x_F.$$

Définition 3. Une distribution est dite max-stable pour des suites $\{a_n\}$, $a_n > 0$ et $\{b_n\}$, si

$$F^n(b_n + a_n x) = F(x), \quad \forall n.$$

Définition 4. Une distribution est du même type qu'une distribution des valeurs extrêmes donnée par (1.1) si et seulement si elle est max-stable.

2.2.2- Paramétrisation γ :

La paramétrisation γ des distributions des valeurs extrêmes permet de grouper les lois Fréchet et Weibull.

Proposition 1. En considérant la transformation $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ on peut réécrire les fonctions

(2.1) de la manière suivante

Loi Gumbel : $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \forall x$

Loi Fréchet et Weibull : $H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}) & \text{si } 1+\gamma x > 0, \gamma \neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

Propriétés :

- i) $H_\gamma = H_0 = \Lambda$ quand $\gamma \rightarrow 0$ (par valeurs positives ou négatives).
- ii) H_γ pour $\gamma > 0$ est la loi Fréchet
- iii) H_γ pour $\gamma < 0$ est la loi Weibull
- iv) Les densités correspondantes sont données par :

Densité de H_0 $h_0(x) = \exp(-e^{-x})e^{-x}$

Densité de H_γ $h_\gamma(x) = \begin{cases} H_\gamma(x)(1+\gamma x)^{-(1+1/\gamma)} & \text{si } (1+\gamma x) > 0, \gamma \neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

- v) $h_\gamma = h_0$ quand $\gamma \rightarrow 0$.

2.2.3- Distribution GEV :

Nous pouvons caractériser les trois types de distribution par une distribution unique en introduisant un paramètre de forme (shape parameter) ξ

$$H_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}$$

Défini sur le support $\{x : 1 + \xi \sigma^{-1}(x - \mu) > 0\}$ et que nous notons $\text{GEV}(\mu, \sigma, \xi)$, cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité de Von Mises-Jenkinson, mais

elle est plus connue sous le nom de «*Generalized Extreme value distribution*» (GEV), nous avons alors les correspondances suivantes :

$$\text{Fréchet} \quad \xi = \alpha^{-1} > 0$$

$$\text{Weibull} \quad \xi = -\alpha^{-1} < 0$$

$$\text{Gumbel} \quad \xi \rightarrow 0$$

Remarquons que les paramètres μ et σ sont en fait les limites de b_n et a_n .

La fonction densité correspondante est :

$$h_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}$$

En fait la distribution GEV est H_γ en introduisant les paramètres de position μ et d'échelle σ .

2.2.4- Outils statistiques d'exploration :

Dans l'étude statistique, l'exploration des données est très importante, dans le cas extrême, on utilise des méthodes classiques comme la représentation graphique qui sert ainsi à visualiser l'existence ou non des valeurs extrêmes, et l'estimateur de Hill,... etc.

2.2.4.1- Graphe de la fonction de survie :

La méthode la plus simple pour visualiser la queue de distribution d'une situation réelle, est de reporter sur un graphe l'estimateur de sa fonction de survie, un estimateur sans biais de la fonction de survie $h(s)$ est donnée par la formule suivantes:

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{\{X_i > s\}}$$

Qui représente la fonction empirique des dépassements.

2.2.4.2- Graphes de quantiles et de probabilités :

On cherche une fonction de distribution F qui s'ajuste bien aux observations i.i.d $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, pour cela on défini la statistique d'ordre $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ comme on a vu dans la transformation des quantiles, pour F continue, les variables aléatoires

$U_i = F(X_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ sont i.i.d uniforme sur $[0,1]$ on a

$$F(X_{(k)})_{k=1,\dots,n} \stackrel{d}{=} (U_{(k)})_{k=1,\dots,n}$$

On peut montrer que $E[F(X_{(k)})] = \frac{n-k+1}{n+1}$ $k = 1, \dots, n$.

Le graphe $\left\{ \left(F(X_{(k)}), \frac{n-k+1}{n+1} \right) : k = 1, \dots, n \right\}$ est appelé graphe de probabilités

(PP-Plot)

et le graphe $\left\{ \left(X_{(k)}, F^{\leftarrow} \left(\frac{n-k+1}{n+1} \right) \right) : k = 1, \dots, n \right\}$ est appelé graphe de quantiles

(QQ-Plot).

Si la courbe a une forme linéaire, alors les observations sont i.i.d et de fonction de répartition F , et si le graphe devient concave (resp. convexe) vers la droite, la distribution F attribue trop (resp. pas assez) de poids aux grandes valeurs.

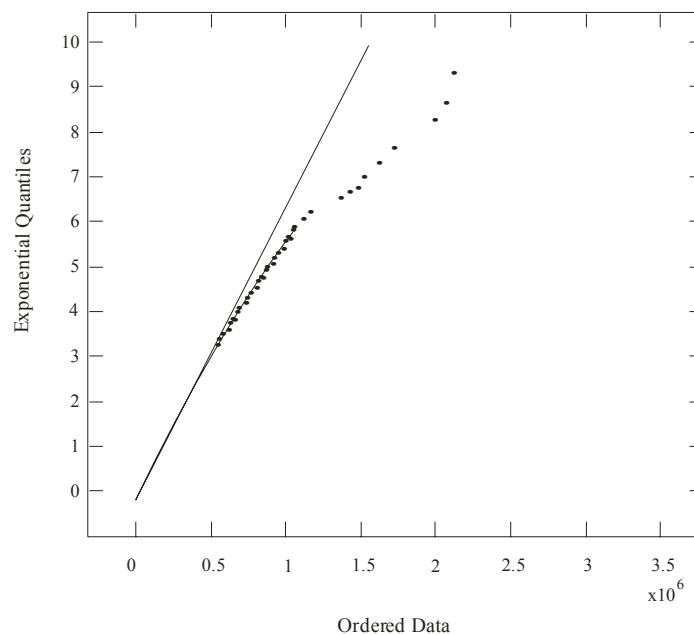


Fig.2.2-Graphique des quantiles (QQ-plot)

2.2.4.3- Graphe de la fonction moyenne des dépassements :

Définition 5. (Fonction moyenne de dépassement)

Soit X une variable aléatoire avec right end point x_F , alors $e(u) = E(X - u / X > u)$, $0 \leq u < x_F$,

est appelée fonction moyenne de dépassement (FMD), elle fournit un moyen efficace d'exploration des données.

Le principe de la méthode de la FMD consiste à comparer graphiquement la FMD estimée aux FMD théorique.

Disposant d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, la FMD en un seuil $s \geq 0$ est naturellement

$$\text{estimée par : } \hat{e}_n(s) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - s) \cdot I_{X_i > s}}{\sum_{i=1}^n I_{X_i > s}}$$

La figure (2.3) montre les fonctions moyennes de dépassements théoriques de quelques lois usuelles.

Souvent, la FMD est estimée aux valeurs $X_{(n-k)}$, $k = 1, \dots, n-1$, le numérateur

s'écrit : $\sum_{i=1}^k (X_{(n-i+1)} - X_{(n-k)})$ tan disque le dénominateur vaut k .

On représente alors les variations de :

$$E_{n,k} = \hat{e}_n(X_{(n-k)}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{(n-i+1)} - X_{(n-k)}$$

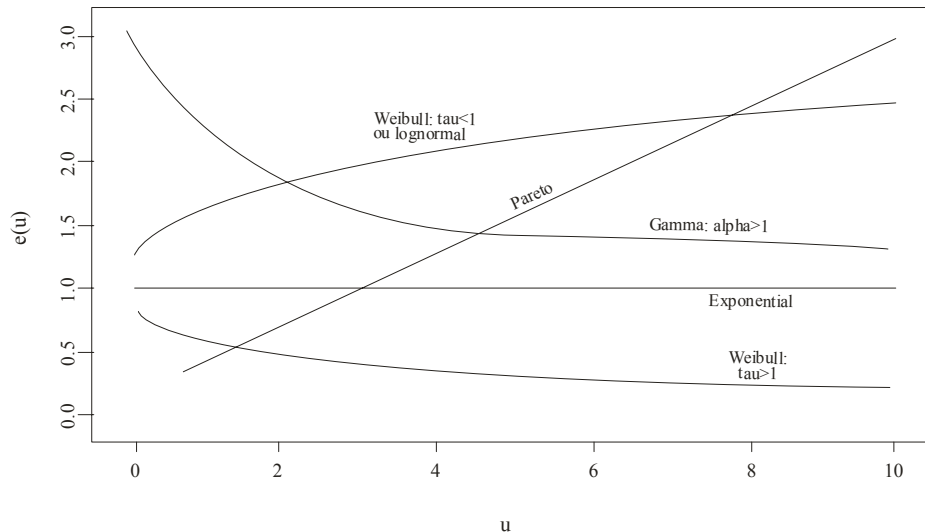


Fig.2.3 – Fonction moyenne de dépassement théorique

2.2.5- Distribution de Pareto Généralisée (GPD) :

Définition 6. La loi GPD $G_{\gamma,\sigma}$ avec les paramètres $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est définie de la manière suivante :

$$G_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-1/\gamma} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-x/\sigma} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases} \quad x \in D(\gamma, \sigma)$$

$$D(\gamma, \sigma) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \gamma \geq 0 \\ [0, -\sigma/\gamma] & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

Définition 7. Les lois Pareto généralisées sont les lois $W(x) = 1 + \log G(x)$

Où $G(x)$ est une des lois des valeurs extrêmes.

Résultat : les lois Pareto généralisées avec le paramètre α sont :

Exponentielle GP0

$$W_0(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{si } x \geq 0$$

Pareto GP1

$$W_{1,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha} \quad \text{si } x \geq 1, \alpha > 0$$

Béta GP2

$$W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^{-\alpha} \quad \text{si } -1 \leq x \leq 0, \alpha < 0$$

2.2.6- Distribution à queue lourde (Heavy-Tailed) :

On s'intéresse à la queue de distribution $1 - F(x) = P(X > x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On dit que F est à queue lourde (Heavy tailed) si et seulement si

$$\frac{1 - F(\lambda t)}{1 - F(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda^{-1/\gamma}, \quad \forall \lambda > 0. \quad \text{Où } \gamma > 0 \text{ est appelé l'indice de la queue de}$$

distribution.

2.2.7- Exemples de distributions Heavy-Tailed :

Il existe plusieurs distributions Heavy-Tailed, la table suivante (2.2) donne une liste non-exhaustive de ces distributions, toutes ces distributions ont un support $(0, +\infty)$ à l'exception de celui de la loggamma qui a un support $(1, +\infty)$.

Nom	Queue $\bar{F}$ ou densité	Paramètres
Lognormale	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x^\gamma} \right)^\alpha$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\gamma}$	$c > 0, 0 < \gamma < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\log x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$

Tab.2.2 – Exemples de distributions Heavy-Tailed

2.2.8- Estimateur de Hill (Hill, 1975) :

L'estimateur de Hill est construit de la manière suivante : on considère une suite de v.a. i.i.d. $(X_1, \dots, X_n)$ de loi commune F , à queue lourde (Heavy Tailed) telle que :

$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x)$, $x > 0$, $L(x)$ une fonction à variation lente telle que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \text{ pour tout } \lambda > 0$$

Alors si on note $\hat{\gamma}_{k_n}$ l'estimateur de Hill de $\frac{1}{\alpha}$, il a l'expression suivante :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{(n-i+1)} - \log X_{(n-k)},$$

Théorème (Hall, 1982). *On suppose qu'il existe deux constantes strictement positives C et D telles que*

$$1 - F(x) = C x^{-\alpha} (1 + D x^{-\beta} + o(x^{-\beta})).$$

Si k_n vérifie

$$k_n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{k_n}{n^{2\beta/(2\beta+\alpha)}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Alors l'estimateur de Hill est asymptotiquement normal et on a :

$$\sqrt{k_n} (\gamma_{k_n, n} - \frac{1}{\alpha}) \xrightarrow{L} N(0, \frac{1}{\alpha^2}).$$

Cet estimateur, le plus utilisé en théorie des valeurs extrêmes, a été largement étudié. Les résultats de consistance sont établis pour $\gamma > 0$. Sa faible consistance a été établie par Mason (1982), sa forte consistance a été établie en particulier par Hall et Welsh (1984) et Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) qui pour une suite bien choisie de k_n donnent la vitesse de convergence optimale. Resnick et Starica (1995) ont démontré la consistance de l'estimateur de Hill dans le cas de variables dépendantes. On a aussi défini les conditions sous lesquelles l'hypothèse de normalité asymptotique de cet estimateur est vérifiée (Hall (1982)), Csörgö, Mason (1985), Athreya, Lahiri, Wu (1998), Davis, Resnick (1988b)).

En raison des hypothèses imposées pour obtenir un bon comportement asymptotique, l'estimateur de Hill n'est en fait efficace que pour les lois extrêmes de Fréchet. C'est en cela que réside la grande différence entre les estimateurs de Pickands (qui sera défini dans la section suivante) et de Hill, même si du point de vue de leur construction, leur explication « intuitive » est sensiblement la même. Nous renvoyons aussi à Haeusler et Teugel (1985), Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) et à Bacro, et Brito (1998) qui ont proposé récemment un estimateur plus général que l'estimateur de Hill avec les mêmes

propriétés asymptotiques. Une approche fonctionnelle pour étudier les propriétés de l'estimateur de Hill est considérée par Dekkers et de Hann (1989).

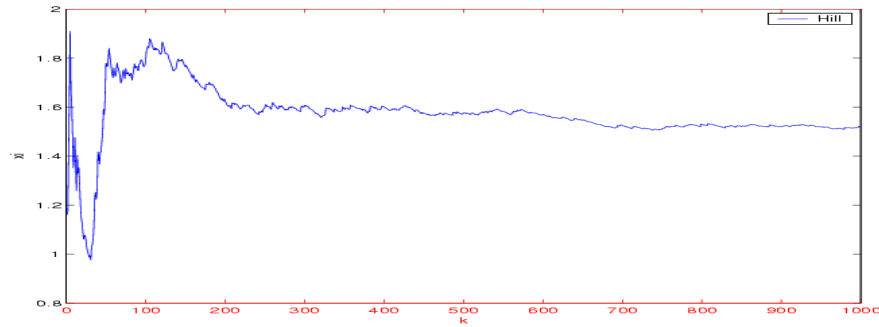


Fig.2.4- Estimateur de HILL

2.2.9- Estimateur de Pickands :

Il est fondé sur le calcul des quantiles. Cet estimateur a été introduit par Pickands (1975) et revisité par Drees (1995 ou 1998), Dekkers et al (1989) qui ont établi sa faible consistance.

Il est défini de la manière suivante. Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une v.a. de loi F , dont la loi limite du maximum est $H_\gamma(x)$, et désignons par $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$, la statistique d'ordre associée. Notons $\hat{\gamma}_n$ l'estimateur de Pickands de γ . Alors, étant donnée une suite $m = m(n)$, on a :

$$\hat{\gamma}_n = -\frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{x_{(n-m+1)} - x_{(n-2m+1)}}{x_{(n-2m+1)} - x_{(n-4m+1)}}\right)$$

Les propriétés asymptotiques de cet estimateur sont les suivantes :

Théorème. - Sous les hypothèses précédente, si $m(n) \rightarrow \infty$ et $\frac{m(n)}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors : $\hat{\gamma}_n \rightarrow \gamma$ en probabilité quand $n \rightarrow \infty$.

- Sous les mêmes hypothèses, si

$$\frac{m(n)}{n} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{m(n)}{\log \log n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ alors : } \hat{\gamma}_n \rightarrow \gamma, \text{ p.s quand } n \rightarrow \infty.$$

Sous des hypothèses affectant la fonction F , que nous précisons ci-dessous, l'estimateur de Pickands admet, asymptotiquement, une distribution normale. Posons :

H_0 : Supposons que $U(x) = \left(\frac{1}{1-F(x)}\right)^{-1}$ ait une dérivée positive et qu'il existe une fonction a positive telle que, pour $x > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tx)^{1-\gamma} U'(tx) - t^{1-\gamma} U'(t)}{a(t)} = \log x$$

Théorème. Pour des v.a. i.i.d. dont la fonction F vérifie l'hypothèse H_0 ,

si $m = m(n) \rightarrow \infty$, avec $m(n) = o\left(\frac{n}{g(n)}\right)$ où $g(t) = t^{3-2\alpha} (U'(t)/a(t))^2$,

$n \rightarrow \infty$, alors

$$\sqrt{m}[\hat{\gamma}_n - \gamma] \rightarrow N(0, \Gamma), \quad n \rightarrow \infty$$

où

$$\Gamma = \alpha^2 (2^{2\alpha+1} + 1) / 2(2^\alpha - 1) \log 2)^2.$$

Remarques :

- la normalité asymptotique de l'estimateur est obtenue aussi pour des suites $m(n) \rightarrow \infty$ avec $m(n) = o(\log^2 n)$.
- Pour les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Pickands nous renvoyons à Drees (1995 et 1998).

L'estimateur de Pickands, fondé sur l'utilisation des quantiles, est général dans sa conception et peut être utilisé dans l'estimation des paramètres des trois distributions extrêmes.

Une généralisation de l'estimateur de Pickands a été introduite par Dekkers, Einmahl et de Haan (1989 a et b). Un estimateur proche de celui-ci a été proposé par ces auteurs. Sous des conditions de régularité de la loi F , ils obtiennent la normalité asymptotique de cet estimateur.

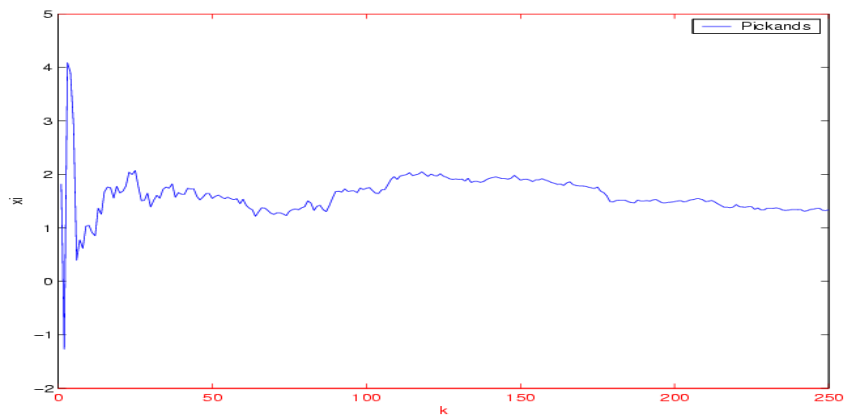


Fig. 2.5 – Estimateur de Pickands

2.3- Indice Extrême :

L'indice extrême est une quantité qui, d'une manière intuitive, permet de caractériser le rapport entre la structure de la dépendance des données et leur comportement extrême ; comme d'habitude on note par M_n le maximum de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$, $(\tilde{X}_n)$ est la suite associée au i.i.d. (i.e. de fonction de distribution commune F) et on note par $(\tilde{M}_n)$ la suite correspondante des maximums.

Définition. Soit (X_n) une suite strictement stationnaire et θ un nombre non négatif. Supposant que pour tout $\tau > 0$ il existe une suite (u_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau, \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\theta\tau} \quad (2.4)$$

Alors θ est appelé indice extrême de la suite (X_n) .

Remarques :

- 1- Dans le cas de v.a. i.i.d. ou de suites faiblement stationnaires, θ est égale à 1.
- 2- La définition de l'indice extrême peut être indépendante de la suite particulière (u_n) ; plus précisément, si (X_n) a l'indice extrême $\theta > 0$ alors, pour toute suite de nombres réels (u_n) et $\tau \in [0, \infty)$, les relations (2.3), (2.4) et $P(\tilde{M}_n \leq u_n) \rightarrow \exp\{-\tau\}$ sont équivalentes; la conséquence particulière est :
Si $F \in MDA(H)$ pour une certaine distribution des valeurs extrêmes H alors :

$$c_n^{-1}(\tilde{M}_n - d_n) \xrightarrow{d} H \Leftrightarrow c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H^\theta. \quad (2.5)$$

Pour des constantes de normalisation appropriées $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$.

- 3- Si on suppose que la distribution des valeurs extrêmes H est max-stable, H^θ est du même type que H , i.e. il existe des constantes $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ telles que :

$$H^\theta(x) = H(cx + d);$$

Ceci implique également que les limites dans (2.5) peuvent être choisies identiques après un simple changement des constantes de normalisation.

2.4- Valeurs Extrêmes et Assurance :

En ce qui concerne l'application de la théorie des valeurs extrêmes à l'assurance, on peut observer que les événements naturels ou les risques industriels n'ont pas le monopole des sinistres extrêmes. Ceux-ci sont aussi présents, relativement, dans les branches responsabilité civile (Automobile ou générale) qui sont touchées par des très graves sinistres corporels.

Selon le réassureur Zurichois Swiss [11] les catastrophes intervenues en 1999 ont été responsables de la mort de plus de 105.000 personnes et ont engendré 28.6 milliards de dollars de sinistres pour les assureurs, un montant qui n'avait jusqu'ici été dépassé qu'une seule fois. Ces pertes étaient principalement imputables à cinq tempêtes et à deux tremblements de terre, qui à eux seuls ont coûté 15.9 milliards de dollars aux compagnies d'assurances.

Les mathématiciens ont mis au point un outil pour mesurer la probabilité de réalisation d'événements dus au hasard. Il s'agit de la théorie des probabilités. Les données qui relient cette théorie aux événements de tous les jours sont issues des statistiques.

Ces deux branches des mathématiques, qui constituent la stochastique ont produit des outils puissants qui sont non seulement employés dans de nombreux domaines scientifiques, mais également dans l'assurance et la finance.

La théorie des valeurs extrêmes est un de ces outils issus de la stochastique.

Afin de concevoir un estimateur d'indice de prime tout à fait adéquat à la sinistralité, Wang [11] a introduit le principe de la prime ajustée, cet estimateur d'indice est proposé pour une tarification de réassurance.

La réassurance est une opération par la quelle l'assureur partage avec une autre personne (le réassureur), selon des modalités variables, les conséquences pécuniaires des engagements assumés envers ses propres assurés.

La réassurance est une technique permettant à l'assureur direct de céder à une autre société, le réassureur, une partie de risques qu'il a souscrits.

Donc le principe de la prime ajustée est utilisé pour déterminer un estimateur de prime de réassurance. Ce principe se présente comme suit :

1- Principe de la prime ajustée :

O Principe de Wang :

Définition. Une fonction de distorsion g est une fonction $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Comme tout principe de chargement de prime, l'idée des opérateurs de distorsion est d'imposer une marge de sécurité en augmentant la valeur attendue des sinistres.

L'originalité du processus réside dans le traitement mathématique : il s'agit d'effectuer une distorsion de la loi de probabilité sous-jacente des sinistres à l'aide d'une fonction g . En assurance dommage, un risque est une v.a. positive X modélisant un montant cumulé de sinistres sur une période donnée. Elle est définie par sa fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Alors, la prime pure du contrat associé à cette v.a. vaut l'espérance de cette dernière, c'est-à-dire la valeur attendue des sinistres, soit :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(t) dt.$$

En s'inspirant de cette formule, S.Wang(1996) propose un nouveau procédé de calcul de prime en appliquant une transformation à la fonction de survie. Il obtient alors la prime chargée (ou prime ajustée au risque) suivante :

$$\Pi_g(X) = \int_0^{\infty} g(\bar{F}(x)) dx.$$

Wang propose d'utiliser la fonction puissance, $g(u) = u^{1/p}$ ($p \geq 1$), il en résulte le principe de PH-transform (propositional Hazards) définit par :

$$\Pi_u(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Le paramètre $p \geq 1$ est appelé coefficient de distorsion ou le coefficient d'aversion au risque. La prime ajustée pour un seuil élevé $u > 0$ est donnée par :

$$\Pi_u(X) = \int_u^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Notons que le seuil u doit être grand et dépend de la taille de l'échantillon ($n \geq 1$). Pour cette raison on va supposer que $u = u_n$, $n \geq 1$. Ce qui conduit à écrire $\Pi_u(X)$ comme :

$$\Pi_{u_n}(X) = \int_{u_n}^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Analytiquement il est souvent difficile d'exprimer cet indice par une forme exacte, Necir et Boukhetala (2004) ont proposé un estimateur asymptotiquement convergeant en loi de probabilité, permettant ainsi de définir un intervalle de confiance pour l'encadrement de cette prime. Ce qui donne un outil souple et interactif pour la conception d'un système d'aide à la tarification en réassurance.

D'autre part, cet estimateur constitue un schéma numérique facile à implémenter sur ordinateur, avec lequel l'utilisateur peut réaliser des scénarios en simulation, qui pourront lui servir comme étape intermédiaire avant de fixer son système tarifaire.

Cet estimateur tel qu'il a été conçu par A. Necir et K. Boukhetala [22], se présente comme suit :

2- Estimation de la prime Ajustée [22] :

Dans cette section on va présenter la forme finale de l'estimateur de la prime ajustée développer par Necir et Boukhetala.

Soit $k = k_n$ une suite d'entier satisfaisant $1 \leq k \leq n$, $k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ tel que $u_n = Q(1 - k/n)$ où $Q(s) = \inf\{t \in R, F(t) \geq s\}$, $0 \leq s < 1$,

est la fonction quantile ou l'inverse généralisée de F, alors $\Pi_{u_n}(X)$ s'écrira :

$$\Pi_{u_n}(X) = \int_{Q(1-k/n)}^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Pour tout $n \geq 1$, soit $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ la statistique d'ordre de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

La forme finale de l'estimateur sera

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \sum_{i=1}^k (i/n)^{1/p} \{X_{(n-i+1)} - X_{(n-i)}\}, \quad p \geq 1.$$

Pour plus de détail voir A. Necir et K. Boukhetala [22].

Cet estimateur a été implémenté, sous forme d'un logiciel interactif, pour application au problème de réassurance concernant des données de sinistralité observées au sud de l'Algérie. (Projet de fin d'étude réalisé par T.Kessi et A.Tata sous la direction de M. K.Boukhetala).

Chapitre 3

Le comportement Extrémal des chaînes de Markov stationnaires

3.1-Introduction :

Soit $\{X_k; k \geq 0\}$ une suite pas nécessairement stationnaire markovienne de distribution marginale F . Supposant que pour tout $\tau > 0$ il existe une suite $\{u_n(\tau)\}$ des nombres réels tels que

$$n(1 - F(u_n(\tau))) \rightarrow \tau \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Notre intérêt principal est la distribution asymptotique des processus ponctuels $N_n^{(\tau)}$, $\tau > 0$, des excès du temps normalisés de $u_n(\tau)$ par $\{X_k\}$, défini par

$$N_n^{(\tau)}(A) = \# \{k; k/n \in A, X_k > u_n(\tau)\}$$

Pour l'ensemble Borélien $A \subseteq [0, \infty)$.

Fixant un entier $r \geq 1$ et $\tau_1 > \dots > \tau_r > 0$. On note N_n le vecteur du processus ponctuel

$(N_n^{(\tau_1)}, \dots, N_n^{(\tau_r)})$ et, soit $N_n(I)$ noté $(N_n^{(\tau_1)}(I), \dots, N_n^{(\tau_r)}(I))$, I est un intervalle dans $[0, \infty)$.

Supposant que $\{X_k\}$ satisfait une restriction de dépendance de grande série et soit $\{p_n\}$ une suite des nombres entiers positifs qui croît en n à un taux approprié ; si X_k a un indice extrême $\theta > 0$, alors une condition nécessaire et suffisante de la convergence en distribution de N_n lorsque $n \rightarrow \infty$ est la convergence de la distribution conditionnelle de $N_n((0, p_n/n])$ sachant qu'il y a au moins un excès de $u_n(\tau_1)$ dans $[1, p_n]$; En particulier

on voit que les marginaux $N^{(\tau_i)}$ sont des processus de Poisson composés d'intensité $\theta\tau_i$ pour les événements de Poisson et les probabilités composées sont indépendantes de τ .

L'indice extrême, qui mesure " le groupement des extrêmes, " est important pour les propriétés extrêmes des suites stationnaires et mesure aussi la dépendance de $\{X_n\}$; si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants alors $\theta = 1$; si $X_1, \dots, X_n$ sont fortement dépendants alors $\theta \approx 0$. Dans la suite nous présentons la notion d'une queue de chaîne qui détermine les caractéristiques extrémales (une version stationnaire) de la suite originale de Markov ; et on montre que les suppositions des marginaux absolument continus et l'existence d'une densité de transition ne sont pas nécessaires pour nos résultats. En fait nous avons uniquement besoin que la distribution marginale de la chaîne soit dans le domaine d'attraction d'une certaine loi de valeur extrême avec des conditions plutôt faibles sur les probabilités de transition. En outre nous établissons la convergence en distribution du processus ponctuel d'excès à multi niveaux, N_n , et donnons ainsi une description plutôt complète des propriétés extrémales. Des expressions sont données pour l'indice extrême et pour d'autres quantités caractérisant les limites des distributions. Le calcul explicite est rarement possible, mais les expressions sont bien conformées à la simulation. Les résultats donnent, par exemple, les distributions conjointes asymptotiques du k^{eme} grands maximum sous des normalisations appropriées.

3.2 – Les Processus ponctuels des Excès des suites stationnaires générales :

Dans cette section nous spécifions les conditions de convergence en distribution du processus ponctuel $N_n = (N_n^{(\tau_1)}, \dots, N_n^{(\tau_r)})$ défini en section 1. Les conditions sont faciles à appliquer aux chaînes de Markov, un sujet qui sera encore développé dans la section 3. Chaque marginale, $N_n^{(\tau_i)}$, de N_n est un processus ponctuel sur $[0, \infty)$. Ainsi $N_n^{(\tau_i)}$ converge vers $N = (N^{(\tau_1)}, \dots, N^{(\tau_r)})$ si et seulement si $(N_n^{(\tau_i)}(B_{i,j}); i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, k_i)$ converge en distribution vers

$(N^{(\tau_i)}(B_{i,j}); i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, k_i)$ pour $k_i = 1, 2, \dots$ et $B_{i,j}$ l'ensemble des boréliens bornés avec $P\{N^{(\tau_i)}(\partial B_{i,j}) > 0\} = 0$, où ∂B représente les bornes de B .

Supposant, que $\{X_k; k \geq 0\}$ est une suite stationnaire de distribution marginal F et pour tout $\tau > 0$ il existe une suite $\{u_n(\tau)\}$ des nombres réelles satisfaisant (3.1).

Supposant que la suite $\{X_k\}$ satisfait certaines restrictions de dépendance de grandes suites. Supposant que les événements extrêmes situés loin de l'échantillon peuvent être indépendants.

3.2.1- Restriction de dépendance des suites stationnaires et condition de mélange :

Comme on l'a signalé dans l'introduction, l'une des pistes naturelles de généralisation de la théorie traditionnelle des valeurs extrêmes repose sur la remise en cause de l'hypothèse de dépendance des variables aléatoires X_i . Il s'agit maintenant de proposer des réponses appropriées aux questions précédentes dans le cas d'une suite d'observations dépendantes. D'abord, les résultats actuels concernant les suites dépendantes sont, pour la plupart, des extensions de ceux développés dans le cas indépendant. Ensuite, ces résultats sont, pour l'essentiel, très difficiles à mettre en application sur des exemples concrets. Enfin, plusieurs conditions de dépendance ont été analysées dans la littérature théorique ; il est, par conséquent, nécessaire de préciser celles qui sont utilisées ici.

On peut mesurer la dépendance entre le passé des v.a. X_j (i.e. avant $j = m$) et leur futur X_j (i.e. après $j = n$), suivant la vitesse avec laquelle leur séparation en $n = m$ augmente. On définit alors des conditions de mélange sur les variables. La condition de mélange peut être vérifiée sous de faibles hypothèses concernant les auto-covariances entre les variables aléatoires. Signalons que l'hypothèse de la mélangeance a souvent été retenue dans le cas des variables aléatoires Gaussiennes stationnaires.

Une façon intuitive de définir la notion de m -dépendance (ou de mélangeance) pour des v.a. est la suivante : les v.a. X_i et X_j sont dépendantes quand $|i - j| \leq m$. et indépendantes quand $|i - j| > m$. Plus précisément, pour $i_1, i_2, \dots, i_n$; si on note :

$$F_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_n} \leq x_n),$$

La m -dépendance correspond à : si $i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$, avec $j_1 - i_p > m$, alors,

$$F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = F_{i_1, \dots, i_p}(x_1, \dots, x_p) F_{j_1, \dots, j_q}(y_1, \dots, y_q).$$

La forte mélangeance (strong mixing) des suites stationnaires, décrite par la condition (*) ci-dessous est une façon alternative de définir la dépendance entre les variables aléatoires.

Etant données une suite de v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ et une suite $\alpha_l \rightarrow 0$, quand $l \rightarrow \infty$, on dit que les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont fortement dépendantes si :

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| < \alpha_l, \quad (*)$$

Pour $A \in \sigma(X_1, \dots, X_p)$, $B \in \sigma(X_{p+l+1}, X_{p+l+2}, \dots)$, $\forall p, \forall l$.

3.2.2- Conditions de mélange $D(u_n)$ et $\Delta(u_n)$:

Définition 1. Soit $\{u_n^{(m)}; n \geq 1\}$, $m = 1, 2, \dots, r$, une suite des nombres réels.

Pour $1 \leq i \leq j \leq n$, nous définissons $\mathcal{B}_i^j = \mathcal{B}_i^j(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$ σ -algèbre générée par les évènements $\{X_k \leq u_n^{(m)}\}$, $i \leq k \leq j$, $1 \leq m \leq r$, et soit $\mathcal{A}_i^j$ sous classe de $\mathcal{B}_i^j$ consistant des intersections des évènements dans la classe générée. Pour $1 \leq l \leq n-1$, nous écrivons

$$\beta_{n,l} = \max \left\{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{B}_1^j, B \in \mathcal{B}_{j+l}^n, 1 \leq j \leq n-l \right\}$$

Et soit $\alpha_{n,l}(\leq \beta_{n,l})$ le maximum correspondant quand A et B sont restreints à $\mathcal{A}_1^j$ et $\mathcal{A}_{j+l}^n$, respectivement i.e.

$$\alpha_{n,l} = \max \left\{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{A}_1^j, B \in \mathcal{A}_{j+l}^n, 1 \leq j \leq n-l \right\}$$

La condition $\Delta(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$ est vérifiée pour $\{X_k\}$ si $\beta_{n,l_n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ pour une suite $l_n = o(n)$. Parallèlement, La condition $D(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$ est vérifiée pour $\{X_k\}$ si $\alpha_{n,l_n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ pour $l_n = o(n)$.

La condition $D(u_n)$, qui est plus faible que la forte mélangeance habituelle, a été introduite par Leadbetter [20] qui a utilisé la condition de mélange pour restreindre la dépendance de grande série des événements $\{X_k \leq u_n\}$.

La condition de mélange légèrement plus forte $\Delta(u_n)$ a été introduite par Hsing [15] et elle est plus faible que la forte mélangeance.

La condition $D(u_n)$ se trouve à la base de l'identification des distributions des maxima des suites de v.a. stationnaires ; cette condition semble jouer un rôle primordial dans l'existence de la distribution limite des maxima d'une suite de v.a. stationnaires. En effet, lorsque la condition $D(u_n)$ est vérifiée pour une suite appropriée (u_n) , le théorème fondamental permet de montrer que pour toute distribution non dégénérée la loi des maxima des v.a. stationnaires (X_n) appartient au domaine d'attraction de l'une des trois distributions traditionnelles (Gumbel, fréchet, Weibull).

Typiquement, les excès d'un niveau donné u_n apparaissent en groupes. Pour identifier cela nous divisons $\{1, 2, \dots\}$ en intervalles de même longueur, dépendant de n , et affectons les excès de différents intervalles aux groupes séparés. La définition suivante précisera la longueur d'intervalle, p_n , requis pour accomplir l'indépendance asymptotique des événements extrêmes dans des intervalles séparés.

Définition 2. Supposant que $\{X_k\}$ satisfait la condition $\Delta(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$. La suite des entiers positifs $\{p_n; n \geq 1\}$ est dite $\Delta(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$ - séparation si, quand $n \rightarrow \infty$, $p_n / n \rightarrow 0$ et $n\beta_{n,l_n} / p_n \rightarrow 0$ où $\beta_{n,l}$ est donné dans la définition 1.

l_n dans la définition doit satisfaire $\beta_{n,l_n} \rightarrow 0$. Réciproquement, tout $l_n = o(n)$ satisfait $\beta_{n,l_n} \rightarrow 0$ peut utiliser dans la construction de $\Delta(\cdot)$ -suite de séparation p_n en prenant p_n la partie entière du $\max(n\beta_{n,l_n}^{1/2}, (nl_n)^{1/2})$. $D(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$ - suite de séparation est définie de la même manière en utilisant $\{\alpha_{n,l}\}$.

3.2.3- Indice Extrême sous les conditions $D(u_n)$ et $\Delta(u_n)$:

Soit $M_{i,j} = \max\{X_{i+1}, \dots, X_j\}$ pour $i < j$ et nous écrivons M_j pour $M_{0,j}$. Nous disons que la suite $\{X_k\}$ a l'indice extrême θ ($0 \leq \theta \leq 1$) si $P\{M_n \leq u_n(\tau)\} \rightarrow e^{-\theta\tau}$ ou en équivalence si $P\{M_n \leq u_n(\tau)\} \approx F^{n\theta}(u_n(\tau))$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $\tau > 0$.

On a $D(u_n(\tau))$ est égal à $D(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)})$ avec $r=1$ et $u_n^{(1)} = u_n(\tau)$.

Proposition 1. Supposant que $D(u_n(\tau))$ est vérifiée pour $\{X_k\}$, pour tout $\tau > 0$. Alors $\{X_k\}$ a un indice extrême θ si et seulement si pour tout $\tau_0 > 0$ il existe une $D(u_n(\tau_0))$ -suite de séparation $\{p_n\}$ telle que

$$P\{M_{p_n} \leq u_n(\tau_0) / X_0 > u_n(\tau_0)\} \rightarrow \theta \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Nous remarquons que si $\{X_k\}$ a un indice extrême θ et $\{u_n(\tau)\}$ est une suite telle que $n(1 - F(u_n(\tau))) \rightarrow \tau > 0$ et $D(u_n(\tau))$ est vérifiée, alors nous pouvons remarquer que (3.2) est vérifiée avec $u_n(\tau_0)$ est remplacée par $u_n(\tau)$ pour toute $D(u_n(\tau))$ - suite de séparation.

Maintenant, nous fixons un entier $r \geq 1$ et soit $\tau_1 > \dots > \tau_r > 0$. Alors de (3.1), nous avons $u_n(\tau_1) < \dots < u_n(\tau_r)$ pour n suffisamment grand. Il sera ici facile de travailler avec une transformation simple des processus d'excès. Spécifiquement, nous définissons $\tilde{N}_n^{(j)}$ le processus ponctuel des excès de $u_n(\tau_j)$ n'excédant pas $u_n(\tau_{j+1})$, c'est-à-dire $\tilde{N}_n^{(j)} = N_n^{(\tau_j)} - N_n^{(\tau_{j+1})}$, $j=1, \dots, r-1$ et $\tilde{N}_n^{(r)} = N_n^{(\tau_r)}$, et soit $N_n = (\tilde{N}_n^{(1)}, \dots, \tilde{N}_n^{(r)})$. Ainsi, pour $i = (i_1, \dots, i_r) \in Z_+^r = \{0, 1, \dots\}^r$, soit $A_j = A_j(i)$ l'ensemble $\{i \in Z_+^r, l_j = i_j - 1, l_k \geq i_k, k \neq j\}$ et on met $A_0 = A_0(i) = \{i \in Z_+^r; l_k \geq i_k, k = 1, 2, \dots, r\}$.

Le lemme suivant, qui sera la partie principale dans la démonstration du théorème 1, relie la loi non conditionnelle des processus à la loi conditionnelle sachant X_0 .

Pour la démonstration on utilise l'observation suivante :

Pour les événements $E_1, \dots, E_n$ tel que chaque intersection se compose de plus de m ($\leq n$) différents E_i a une probabilité qui égale à zéro i.e.

$$\sum_{i=1}^n P(E_i) = \sum_{j=1}^m P \left\{ \bigcup_{i_1 < \dots < i_j} (E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_j}) \right\}.$$

Lemme 1. Supposant que $\{X_k\}$ satisfait $D(u_n(\tau_1))$ et soit $i_j, j = 1, \dots, r$, des entiers non négatifs avec au moins un distinct de zéro. Ainsi, avec $\tau_{r+1} = 0$ et $u_n(\tau_{r+1}) = \infty$,

$$\sum_{j=1}^r \left(\frac{\tau_j - \tau_{j+1}}{\tau_1} \right) P \left\{ \tilde{N}_n \left(\left(0, \frac{p_n}{n} \right] \right) \in A_j / X_0 \in (u_n(\tau_j), u_n(\tau_{j+1})) \right\} - n P \left\{ \tilde{N}_n \left(\left(0, \frac{p_n}{n} \right] \right) \in A_0 \right\} / (p_n \tau_1) \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ (3.3)

pour toute $D(u_n(\tau_1))$ - suite de séparation $\{p_n\}$.

Preuve. De [24] supposant premièrement que chaque i_j est strictement positif. Soit $\{p_n\}$ une $D(u_n(\tau_1))$ - séparation et soit $v_j(m)$ tel que :

$$v_j(m) = \max \left\{ l \leq p_n + m; \tilde{N}_n^{(j)}([l/n, (p_n + m)/n]) = i_j \right\} \text{ pour } m \geq 0, j = 1, \dots, r; \text{ et}$$

$v_j(m)$ est le dernier instant avant $p_n + m$ pour le quel l'intervalle $[l, p_n + m]$ contient i_j excès de $u_n(\tau_j)$ n'excédant pas $u_n(\tau_{j+1})$. Avec $c = \sum_{j=1}^r i_j$ et utilisant la stationnarité, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \tilde{N}_n((0, p_n/n]) \in A_0 \right\} \\
&= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{p_n-c+1} \mathbb{P} \left\{ v_j(0) = k, v_l(0) > v_j(0); l \neq j \right\} \\
&= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{p_n-c+1} \mathbb{P} \left\{ X_k \in (u_n(\tau_j), u_n(\tau_{j+1})), \tilde{N}_n((k/n, p_n/n]) \in A_j \right\} \\
&\geq \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{p_n-c+1} \mathbb{P} \left\{ X_k \in (u_n(\tau_j), u_n(\tau_{j+1})), \tilde{N}_n((k/n, (p_n+k)/n]) \in A_j \right\} \quad (3.4) \\
&\quad - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{p_n-c+1} \mathbb{P} \left\{ v_j(k) = k, M_{p_n, 2p_n} > u_n(\tau_1) \right\} \\
&\geq \sum_{j=1}^r (p_n - c + 1) \mathbb{P} \left\{ X_0 \in (u_n(\tau_j), u_n(\tau_{j+1})), \tilde{N}_n((0, p_n/n]) \in A_j \right\} \\
&\quad - c \mathbb{P} \left\{ M_{p_n} > u_n(\tau_1), M_{p_n, 2p_n} > u_n(\tau_1) \right\}
\end{aligned}$$

Dans la troisième étape on a utilisé $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A^c)$ pour chacune des sommes. La dernière inégalité suit de la discussion précédant juste le lemme, puisque au plus i_j des événements $\{v_j(k) = k\}$, $k \leq p_n - c + 1$, peuvent se produire au même temps.

Pour une inégalité dans l'autre sens, on divise l'espace d'échantillon selon qu'il y a un excès de $u_n(\tau_1)$ ou non dans l'intervalle $(p_n, 2p_n]$. De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \tilde{N}_n((0, p_n/n]) \in A_0 \right\} \\
&\leq \sum_{j=1}^r (p_n - c + 1) \mathbb{P} \left\{ X_0 \in (u_n(\tau_j), u_n(\tau_{j+1})), \tilde{N}_n((0, p_n/n]) \in A_j \right\} \quad (3.5) \\
&\quad + \mathbb{P} \left\{ M_{p_n} > u_n(\tau_1), M_{p_n, 2p_n} > u_n(\tau_1) \right\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, combinant (3.4) et (3.5), (3.3) s'obtient de (3.1) si on montre que $n P \{M_{p_n} > u_n(\tau_1), M_{p_n, 2p_n} > u_n(\tau_1)\} / p_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Cependant, ceci suit en utilisant des arguments standards [20]; le cas où i_j égale à zéro est traité de la même manière. $\square$

Avant d'entamer les résultats les plus importantes de cette section, nous introduisons quelques autres notations. Pour un entier fixé $r \geq 1$, soit $\mathcal{D} = \{i \in \mathbb{Z}_+^r; i_1 \geq \dots \geq i_r, i_1 \geq 1\}$. Ainsi, pour $i \in \mathcal{D}$ on écrit $i_j = (i_{j-1}, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_r)$ (i.e. de r -vecteur avec $k^{\text{ème}}$ composante égale à $i_k - 1$ si $k \leq j$ et i_k si non), $j = 0, 1, \dots, r$ ($i_0 = i$). Finalement soit P_j la distribution conditionnelle de $\{X_k\}$ sachant $X_0 > u_n(\tau_j)$, $j = 1, \dots, r$.

3.2.4- Convergence en distribution du processus Ponctuel et probabilités composées :

Théorème 1. *Supposant que la suite stationnaire $\{X_k; k \geq 0\}$ a un indice extrême $\theta > 0$ et que $\Delta(u_n(\sigma\tau_1), \dots, u_n(\sigma\tau_r))$ est vérifiée pour $\{X_k\}$ pour tout $\sigma > 0$ et $\tau_1 > \dots > \tau_r > 0$. Alors $N_n = (N_n^{(\tau_1)}, \dots, N_n^{(\tau_r)})$ converge en distribution vers le processus ponctuel $(N^{(\tau_1)}, \dots, N^{(\tau_r)})$ quand $n \rightarrow \infty$ si et seulement si pour tout $i \in \mathcal{D}$ il existe une constante*

$\pi(i)$ telle que

$$\sum_{j=1}^r \frac{\tau_j}{\tau_1} \left(P_j \left\{ N_n \left(\left(0, \frac{p_n}{n} \right) \right) = i_j \right\} - P_j \left\{ N_n \left(\left(0, \frac{p_n}{n} \right) \right) = i_{j-1} \right\} \right) \rightarrow \theta \pi(i) \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

Pour une $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ - suite de séparation $\{p_n\}$. Dans ce cas, π est la mesure de probabilité sur $\mathcal{D}$ et $(N_n^{(\sigma\tau_1)}, \dots, N_n^{(\sigma\tau_r)})$ converge en distribution vers le processus ponctuel avec la transformée de Laplace

$$E \exp \left(- \sum_{j=1}^r \int_0^\infty f_j dN^{(\sigma\tau_j)} \right) = \exp \left(- \theta \sigma \tau_1 \int_0^\infty (1 - L(f_1(t), \dots, f_r(t))) dt \right) \quad (3.7)$$

Pour tout $\sigma > 0$, où $N^{(\sigma\tau_j)}$ est le j^{eme} marginal du processus limite, $f_j \geq 0$ et L est la transformée de Laplace de π .

Preuve. De [15], il suffit de montrer que (3.6) est équivalente à

$$P\{N_n((0, p_n/n]) = i \mid N_n^{(\tau_1)}((0, p_n/n]) > 0\} \longrightarrow \pi(i) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Utilisant le lemme 1 avec $r = 1$, $i_1 = 1$, ainsi la proposition 1 et la remarque suivante, on voit que $nP\{N_n^{(\tau_1)}((0, p_n/n]) > 0\}/(p_n\tau_1) \longrightarrow \theta$ quand $n \rightarrow \infty$, pour une $D(u_n(\tau_1))$ -suite de séparation $\{p_n\}$. Puisque toute $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ - suite de séparation est aussi $D(u_n(\tau_1))$ - séparation, donc on doit montrer que

$$\sum_{j=1}^r \frac{\tau_j}{\tau_1} \left(P_j \left\{ N_n \left((0, \frac{p_n}{n}] \right) = i_j \right\} - P_j \left\{ N_n \left((0, \frac{p_n}{n}] \right) = i_{j-1} \right\} \right) - nP \left\{ N_n \left((0, \frac{p_n}{n}] \right) = i \right\} / (p_n\tau_1) \longrightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Cependant, ceci suit du lemme 1 par un calcul un peu long; nous omettons les détails. $\square$

La transformée de Laplace L apparaît dans (3.7) est indépendante de σ et par conséquent la mesure de probabilité π apparaît dans le théorème dépend que de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ à travers $\tau_2/\tau_1, \tau_3/\tau_1, \dots, \tau_r/\tau_1$ et elle est indépendante de τ_1 si $r = 1$. Dans la suite le $\pi(i)$ est désigné sous le nom des probabilités composées. Ainsi, de (3.7) nous remarquons que chaque marginal $N^{(\sigma\tau_i)}$ du processus limite est un processus de poisson composé d'intensité $\theta\sigma\tau_i$ pour les événements de poisson. Si nous supposons que $\Delta(u_n(\sigma\tau_1), \dots, u_n(\sigma\tau_r))$ est vérifiée uniquement pour $\sigma = 1$, la conclusion du théorème est toujours valide pour la restriction de $N_n^{(\tau_i)}$ et $N^{(\tau_i)}$ sur $(0,1]$ avec, dans (3.7), $\sigma = 1$ et l'intégration sera sur $(0,1]$.

On peut même utiliser le théorème 1 pour trouver la distribution des caractéristiques extrêmes du processus de Lindley.

Exemple (Processus de Lindley) :

Considérant la file d'attente GI/G/1, où les clients arrivent selon un processus de renouvellement de distribution des interarrivées générale, et les temps de service sont des réalisations i.i.d., de distribution générale. Si le $n^{\text{ème}}$ client doit attendre un moment W_n jusqu'à ce qu'il soit servi, alors le temps d'attente du client $n+1$ est W_n plus la différence, notée $D_{n+1} = x_n - t_{n+1}$, entre le temps de service du client n noté x_n et le temps d'interarrivée entre le client n et $n+1$ noté $t_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n$, si la quantité est positive, et 0 ailleurs. Ainsi $\{W_n; n \geq 0\}$ est décrit comme un « processus de Lindley », i.e. par

$$W_{n+1} = (W_n + D_{n+1})_+, n = 0, 1, \dots,$$

où $x_+ = \max(0, x)$, $\{D_n\}$ est une suite i.i.d., et W_0 , le temps d'attente du client d'indice zéro, est indépendant de $\{D_n\}$. Le processus W_{n+1} est une chaîne de Markov de probabilités de transitions stationnaires ; et soit $S_n = \sum_{k=1}^n D_k$, $n \geq 1$ désigne la suite des

sommes partielles associées, donc, $\{W_n\}$ a même distribution que le maximum de la marche aléatoire (S_n) et dans la section 3 on verra qu'un comportement similaire de queue, déterminé par les fonctions des suites i.i.d, est donné par une grande classe de chaîne de Markov. En effet, le comportement extrême du processus de Lindley peut également être tiré à partir des résultats de la section 3.

Il est possible d'énoncer un résultat complet de convergence pour $\{X_k\}$. Spécifiquement, nous supposons que $u_n(\tau)$ soit continue et strictement décroissante en $\tau > 0$ pour tout n donc la fonction inverse u_n^{-1} est bien définie. Ainsi, supposant que $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ est vérifiée pour $\{X_k\}$ pour tout $r = 1, 2, \dots$ et tout choix de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r > 0$. On note cette condition de mélange légèrement forte par la condition Δ . Soit N_n^* le processus ponctuel de $[0, \infty) \times (0, \infty)$ de points à $(k/n, u_n^{-1}(X_k))$, $k \geq 0$.

Théorème 2. [24]. *Supposant que la suite stationnaire $\{X_k; k \geq 0\}$ a l'indice extrême $\theta > 0$ et satisfait la condition Δ . Alors N_n^* converge en distribution vers un certain processus ponctuel N^* sur $[0, \infty) \times (0, \infty)$ si et seulement si pour tout $r \geq 1$ et tout choix de $\tau_1 > \dots > \tau_r > 0$, ils existent des constantes $\pi(i)$, $i \in \mathcal{T}$, satisfaisant (3.6) pour certain $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ - suite de séparation $\{p_n\}$. Dans ce cas, N^* a la représentation*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{(S_i, T_i Y_{ij})}, \quad (3.8)$$

où (S_i, T_i) , $i \geq 1$, sont les points d'un processus de poisson homogène sur $[0, \infty) \times (0, \infty)$ de moyenne θ , Y_{ij} , $1 < j < K_i$, sont les points du processus ponctuel η_i sur $[1, \infty)$,

$\eta_1, \eta_2, \dots$ sont i.i.d et indépendantes du processus de poisson, et $\delta_{(x, y)}(A) = 1$ si $(x, y) \in A$ et zéro ailleurs.

Le processus ponctuel η_i décrit asymptotiquement la structure locale de dépendance de la suite. Ecrivant η pour η_i arbitraire. Utilisant la représentation du processus limite du théorème 2 et [15], on voit de la structure de N^* que la relation suivante entre la distribution de η et les probabilités composées vérifient :

$$\pi(i) = \int_{\tau_1/\tau_p}^{\tau_1/\tau_{p+1}} P\{\eta([1, x\tau_j/\tau_1]) = i_j; j = 1, 2, \dots, p\} x^{-2} dx, \quad (3.9)$$

où $p = \max\{j \geq 1; i_j \geq 1\}$ et $\tau_1/\tau_{r+1} = \infty$.

et on va voir dans le chapitre 4 l'exemple 1, une écriture explicite de la structure de N^* .

3.3 - Processus ponctuel d'Excès pour des chaînes de Markov stationnaires :

Dans cette section nous étudions les propriétés extrémales d'une classe assez grande des chaînes de Markov stationnaires en utilisant la proposition 1 et le théorème 1 ensemble. Ainsi, nous utilisons la supposition de base donnée par [28]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{M_{p,p_n} > u_n / X_0 > u_n\} = 0 \quad (3.10)$$

Pour des suites appropriées $\{p_n\}$ et $\{u_n\}$.

Soit $\{X_k; k \geq 0\}$ une chaîne de Markov d'espace d'état $E \subseteq \mathbb{R}$. On écrit $x_E = \sup E$ et pour une chaîne stationnaire de fonction de distribution marginale (d.f) F soit $x_F = \sup\{x; F(x) < 1\} \leq \infty$. Si $x_F < \infty$, on suppose que $E \cap [x_F, \infty)$ est vide, implique que $x_E = x_F$ sans prendre en considération si le right-end point de F soit fini ou non. Les chaînes stationnaires étudiées seront limitées à celles pour lesquelles F appartient au domaine d'attraction d'une loi de valeur extrême. Ceci garantit que la loi conditionnelle de X_0 , correctement normalisé, sachant que $X_0 > u$, converge vers une distribution de Pareto généralisée quand $u \uparrow x_F$ voir la proposition 2. Ainsi, quand l'indice extrême existe et est strictement positif, il y a une normalisation linéaire du maximum, M_n , qui converge en distribution quand $n \rightarrow \infty$ vers certaines variables aléatoires non dégénérées, ont nécessairement une distribution de type de valeur extrême.

3.3.1- Domaine d'attraction et Chaîne de Markov :

Proposition 2. Une fonction de distribution F est dans le domaine d'attraction d'une certaine loi de valeur extrême si et seulement si pour certain γ , $-\infty < \gamma < \infty$,

$$\lim_{u \uparrow x_F} [1 - F(u + g(u)x)] / [1 - F(u)] = (1 - \gamma x)_+^{1/\gamma} \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.11)$$

où $y_+ = \max\{0, y\}$ et

$$\begin{aligned} x_F = \infty \text{ et } g(u) &= -\gamma u & \text{si } \gamma < 0, \\ x_F < \infty \text{ et } g(u) &= \gamma (x_F - u) & \text{si } \gamma > 0 \end{aligned}$$

si $\gamma = 0$, alors la fonction auxiliaire g est unique et strictement positive sur (x_0, x_F) pour $x_0 < x_F$. Par conséquent, si (3.11) est vérifiée, ils existent $a_n > 0$, b_n telles que

$$F^n(a_n x + b_n) \rightarrow \exp(-(1 - \gamma x)_+^{1/\gamma}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Considérant le processus de Lindley $\{W_n\}$ mentionné dans la section 2. On s'intéresse aux très grandes valeurs du temps d'attente. Sous les suppositions sur la distribution de D_1 , la version stationnaire existe et satisfait $P\{W_0 > u\} \approx C \exp(-\alpha u)$ quand $u \rightarrow \infty$ pour les constantes $C, \alpha > 0$.

Donc (3.11) est vérifiée pour la distribution marginale avec $\gamma = 0$, $g(u) \equiv \alpha^{-1}$ et $x_F = \infty$. Ainsi, les probabilités de transition satisfont

$$P\{W_1 - W_0 \leq x / W_0 = u\} \rightarrow P\{D_1 \leq x\} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

Utilisant l'argument heuristique Aldous[1] a approximé l'indice extrême par $P\{Z+M < 0\}$, où Z et M sont indépendants, Z a une distribution exponentielle et M est le suprême d'une marche aléatoire générée par la suite i.i.d. $\{D_n\}$. Relativement à [26], c'est un résultat exacte dans le cas du processus de Lindley.

Supposant maintenant que $\{X_k ; k \geq 0\}$ est stationnaire de fonction de distribution marginale F telle que (3.11) est vérifiée pour un $-\infty < \gamma < \infty$. On définit

$$\psi(x) = (1 - \gamma x)_+^{-1/\gamma}$$

On note par $(\rightarrow_w)$ la convergence faible. Ainsi, on considère les probabilités de transition qui satisfont

$$P\{\psi([X_1 - u]/g(u)) \leq x / X_0 = u\} \rightarrow_w H(x) \quad \text{quand } u \uparrow x_E, u \in E, \quad (3.12)$$

pour une fonction de distribution H sur $[0, \infty)$. Si $H(\{0\}) > 0$, supposant alors que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{u \uparrow x_E} \sup_{\substack{x \in E \\ \psi([x-u]/g(u)) \leq \delta}} P\{X_1 > u / X_0 = x\} = 0. \quad (3.13)$$

On remarque que (3.12) est équivalente à

$$P\{X_1/X_0 \leq x / X_0 = u\} \rightarrow_w H(x^{-1/\gamma}) \quad \text{pour } \gamma < 0 \text{ et}$$

$$P\{(x_E - X_0)/(x_E - X_1) \leq x / X_0 = u\} \rightarrow_w H(x^{1/\gamma}) \quad \text{pour } \gamma > 0, \text{ et } x \geq 0.$$

quand $\gamma = 0$, (3.12) est égale à

$$P\{(X_1 - X_0)/g(X_0) \leq x / X_0 = u\} \rightarrow_w H(e^x), \quad -\infty \leq x < \infty.$$

Également, (3.13) peut être donnée en trois versions différentes et le sup étant pris sur $x \in E$ tel que

$$x \leq u\delta \quad \text{quand } \gamma < 0$$

$$x \leq u + g(u) \log \delta \quad \text{quand } \gamma = 0$$

$$x \leq x_E - (x_E - u)/\delta \quad \text{quand } \gamma > 0$$

Le processus de Lindley satisfait (3.12) avec $H(x) = P\{\exp(\alpha D_1) \leq x\}$.

On va présenter quelques autres exemples dans le chapitre 4.

On doit préciser que le cas $H(\{0\}) > 0$ est possible; par exemple, l'indépendance asymptotique de X_1 et X_0 dans les queues correspond à $H(\{0\}) = 1$.

3.3.2- Queue de la chaîne :

Soit $\{A_n ; n \geq 1\}$ une suite i.i.d. de distribution marginale H et soit Y_0 une variable aléatoire indépendante de $\{A_n\}$. On définit la queue de la chaîne $\{Y_n ; n \geq 0\}$ par

$$Y_n = A_n Y_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Et on note par P^μ la loi de $\{Y_n\}$ tel que μ est la distribution de Y_0 . L'utilisation du mot "queue" se rapporte au fait que le comportement de la chaîne originale est déterminé par $\{Y_n\}$ si la valeur initiale, X_0 , est suffisamment loin dans la queue droite de la distribution marginale, F ; voir le théorème 3 et le lemme 2. Ainsi, soit $R(x)$ le nombre des instants pour que la chaîne de queue excède x (>0) pour $n \geq 1$; i.e.

$$R(x) = \# \{n \geq 1 ; Y_n > x\}, \quad x > 0. \quad (3.14)$$

Finalement, pour $\tau_1 > \tau_2 > \dots > 0$, soit le r-vecteur Λ_j donné par

$$\Lambda_j = (R(\tau_j/\tau_1), \dots, R(\tau_j/\tau_r)), \quad j = 1, \dots, r.$$

Nous formulons maintenant le résultat principal concernant les propriétés extrémales de la classe des chaînes de Markov étudiées.

3.3.3- Résultat principal des caractéristiques extrémales des Chaînes de Markov :

Théorème 3. *Supposant que $\{X_k ; k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov stationnaire qui satisfait (3.11) et (3.12) pour un γ , $-\infty < \gamma < +\infty$. Ainsi, si la limite H dans (3.12) est une densité positive à 0, supposant alors que (3.13) est vérifiée. Soit la distribution initiale de la queue de la chaîne donnée par $\mu(dx) = x^{-2} dx$, $x > 1$, et soit $\{u_n(\tau)\}$, $\tau > 0$, une suite qui satisfait (3.1).*

- i) *Supposant que $D(u_n(\tau))$ est vérifiée pour tout $\tau > 0$. Si pour un $\tau_0 > 0$ il existe $D(u_n(\tau_0))$ -suite de séparation $\{p_n\}$ telle que (3.10) est vérifiée avec $u_n = u_n(\tau_0)$ alors $\{X_k\}$ a l'indice extrême θ donné par*

$$\theta = P^\mu \{R(1) = 0\}. \quad (3.15)$$

- ii) *Supposant que $\{X_k\}$ a l'indice extrême $\theta > 0$ et, pour $\tau_1 > \dots > \tau_r > 0$, satisfaisant $\Delta(u_n(\sigma\tau_1), \dots, u_n(\sigma\tau_r))$ pour tout $\sigma > 0$. Supposant ainsi qu'il y a $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ - suite de séparation $\{p_n\}$ telle que (3.10) est vérifiée avec $u_n = u_n(\tau_1)$. Ainsi, pour tout $\sigma > 0$, $(N_n^{(\sigma\tau_1)}, \dots, N_n^{(\sigma\tau_r)})$ converge en distribution vers le processus ponctuel $(N^{(\sigma\tau_1)}, \dots, N^{(\sigma\tau_r)})$ caractérisé dans le théorème 1, avec les probabilités composées $\pi(i)$ données par :*

$$\pi(i) = \theta^{-1} \sum_{j=1}^r \frac{\tau_j}{\tau_1} \left[P^\mu \{ \Lambda_j = i_j \} - P^\mu \{ \Lambda_j = i_{j-1} \} \right], \quad i \in \mathcal{O}. \quad (3.16)$$

Pour la démonstration du théorème on peut sans perte de généralité supposer que la fonction auxiliaire g a les propriétés suivantes quand $u \uparrow x_F$:

$$g(u)/u \rightarrow -\gamma \quad \text{si } x_F = \infty, \quad (3.17) \text{ (i)}$$

$$g(u)/(x_F - u) \rightarrow \gamma \quad \text{si } x_F < \infty, \quad (3.17) \text{ (ii)}$$

$$yg(u) + u \rightarrow x_F \quad \text{si } y\gamma < 1, \quad (3.17) \text{ (iii)}$$

$$g(yg(u) + u)/g(u) \rightarrow 1 - y\gamma \quad \text{uniformément locale pour } y \text{ avec } y\gamma < 1. \quad (3.17) \text{ (iv)}$$

Cela est insignifiant pour $\gamma \neq 0$ et vérifié pour $\gamma = 0$, de [25]; Resnick montre que si (3.11) est vérifiée pour une fonction auxiliaire g qui n'admette pas les propriétés (3.17), alors il existe une autre fonction auxiliaire $\tilde{g}$ qui satisfait (3.17) et (3.11), avec g est remplacée par $\tilde{g}$ et $\tilde{g} \sim g$ quand $u \uparrow x_F$.

Le lemme suivant est important puisqu'il décrit le comportement local de la chaîne quand elle commence d'un niveau élevé.

Lemme 2. Soit $\{X_k; k \geq 0\}$ une chaîne de Markov pas nécessairement stationnaire. Supposant que les probabilités de transition satisfont (3.12) avec $H(\{0\}) = 0$, pour un γ , $-\infty < \gamma < \infty$, et une fonction $g(u)$ strictement positive sur un intervalle (x_0, x_E) et satisfait (3.17) avec x_F remplacé par x_E . Alors pour tout $p \geq 1$, la loi conditionnelle de $(\psi([X_k - u]/g(u)); k = 1, \dots, p)$ sachant que $X_0 = u$ converge vers la loi de $(\prod_1^k A_i; k = 1, \dots, p)$ quand $u \uparrow x_E$, $u \in E$, où $\{A_n; n \geq 1\}$ est une suite i.i.d. de distribution marginale H .

Preuve. [24]. Supposant que $\gamma < 0$. Et utilisant (3.17), $x_E = \infty$ et (3.12) est équivalente à

$$\bar{H}_u(x) = P\{X_1/X_0 \leq x/X_0 = u\} \rightarrow_w H(x^{-1/\gamma}) = \bar{H}(x), \text{ pour } x \geq 0.$$

Soit $C(\bar{H})$ l'ensemble des points de continuité de $\bar{H}$ et choisisant $0 < x'_1 < x_1$, $0 \leq x_2$, tels que $x'_1, x_1, x_2 \in C(\bar{H})$. Ainsi, utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned}
& \left| P\{X_2/X_1 \leq x_2, x'_1 < X_1/X_0 \leq x_1 / X_0 = u\} - \bar{H}(x_2) [\bar{H}(x_1) - \bar{H}(x'_1)] \right| \\
& \leq \int_{(x'_1, x_1]} P\{X_2/X_1 \leq x_2 / X_1 = uy\} - \bar{H}(x_2) \Big| 1_{E/u}(y) \bar{H}_u(dy) \\
& + \left| \bar{H}_u(x_1) - \bar{H}(x_1) \right| + \left| \bar{H}_u(x'_1) - \bar{H}(x'_1) \right| \\
& \leq \sup_{y \in [x'_1, \infty) \cap E/u} \left| P\{X_2/X_1 \leq x_2 / X_1 = uy\} - \bar{H}(x_2) \right| + o(1) \rightarrow 0 \quad \text{quand } u \rightarrow \infty, u \in E.
\end{aligned}$$

De $\bar{H}(\{0\}) = 0$ par supposition, on aura

$$P\{X_2/X_1 \leq x_2, X_1/X_0 \leq x_1 / X_0 = u, X_1 > 0\} \rightarrow_w \bar{H}(x_2) \bar{H}(x_1).$$

Avec le même type d'argument il est facile de montrer inductivement, que

pour un $p \geq 1$, $P\{X_i > 0; i = 1, \dots, p-1 / X_0 = u\} \rightarrow 1$ et

$$P\{X_i/X_{i-1} \leq x_i; i = 1, \dots, p / X_0 = u, X_i > 0; i = 1, \dots, p-1\} \rightarrow_w \prod_{i=1}^p \bar{H}(x_i) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty,$$

$u \in E$.

le cas de $\gamma = 0$ et $\gamma > 0$ peut être traité de la même façon ; nous omettons les détails. $\square$

Nous remarquons que quand $\gamma = 0$, d'après le lemme la loi conditionnelle de $((X_k - u)/g(u); k = 1, \dots, p)$ converge vers la loi de $(\sum_1^k \log A_i; k = 1, \dots, p)$, qui est le comportement d'une marche aléatoire observé par Smith [28].

Preuve du Théorème 3. Fixant $r \geq 1$ et $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_r > 0$. On écrit $u_n^{(j)} = u_n(\tau_j)$,

$j = 1, \dots, r$, et rappelant que P_j est la loi conditionnelle de $\{X_k\}$ sachant que $X_0 > u_n^{(j)}$.

Utilisant (3.10) et d'après la proposition 1 et le théorème 1 on peut montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_j \{N_n((0, p/n]) = i\} = P^\mu \{\Lambda_j = i\}$$

pour $i = (i_1, \dots, i_r)$, $i_1 \geq \dots \geq i_r \geq 0$ et $j = 1, \dots, r$.

Soit $\Lambda_j^{(p)}$ le r -vecteur avec la $k^{\text{ème}}$ composante

$$\Lambda_{j,k}^{(p)} = \# \{1 \leq m \leq p; Y_m > \tau_j / \tau_k\}, \quad k, j = 1, \dots, r,$$

où $\{Y_n\}$ est la queue de la chaîne. Puisque $P^\mu\{\Lambda_j^{(p)} \leq i\} \downarrow P^\mu\{\Lambda_j \leq i\}$ quand $p \rightarrow \infty$ il suffit de montrer que

$$P_j\{N_n((0, p/n]) = i\} \rightarrow P^\mu\{\Lambda_j^{(p)} = i\} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Cependant, ceci est vrai si on montre que

$$P_j\{X_{m_s} \leq u_n^{(l_s)}; s = 1, \dots, t\} \rightarrow P^\mu\{Y_{m_s} \leq \tau_j / \tau_{l_s}; s = 1, \dots, t\} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

Pour $t = 1, \dots, p$, $1 \leq m_1 < \dots < m_t \leq p$ et $l_1, \dots, l_t \in \{1, \dots, r\}$.

En effet, soit κ_n la loi conditionnelle de $(X_0 - u_n^{(j)})/g(u_n^{(j)})$ sachant que $X_0 > u_n^{(j)}$.

Avec $I_\gamma = \{x > 0; x\gamma < 1\}$ et $E_n = I_\gamma \cap ([E - u_n^{(j)}]/g(u_n^{(j)}))$ on a $\kappa_n(E_n) = 1$.

Ainsi, de (3.11), $\kappa_n \rightarrow_w \kappa$, où $\kappa(x) = 1 - (\psi(x))^{-1} = 1 - (1 - \gamma x)_+^{1/\gamma}$, $x \in I_\gamma$.

Supposant premièrement que $H(\{0\}) = 0$. Pour $x \in I_\gamma$ on met $a_n(x) = u_n^{(j)} + xg(u_n^{(j)}) \rightarrow x_F$ quand $n \rightarrow \infty$ et on définit

$$h_n(x) = P\left\{\Psi\left(\frac{X_{m_s} - a_n(x)}{g(a_n(x))}\right) \leq \Psi\left(\frac{u_n^{(l_s)} - a_n(x)}{g(a_n(x))}\right); 1 \leq s \leq t / X_0 = a_n(x)\right\}$$

si $a_n(x) \in E$ et égale à 0 ailleurs, et

$$h(x) = P\left\{\prod_{i=1}^{m_s} A_i \leq (\psi(x))^{-1} \tau_j / \tau_{l_s}; 1 \leq s \leq t\right\}.$$

On remarque de (3.1), (3.11) et (3.17) qu'on a

$$\Psi([u_n^{(l_s)} - a_n(x)]/g(a_n(x))) \rightarrow (\psi(x))^{-1} \tau_j / \tau_{l_s} \quad (3.19)$$

Uniformément locale en x quand $n \rightarrow \infty$ pour $s = 1, \dots, t$.

Formulant (3.18) en différentes notations, on doit montrer que

$$\int_{I_\gamma} h_n(x) \kappa_n(dx) \rightarrow \int_{I_\gamma} h(x) \kappa(dx).$$

Ceci suivra d'une version légèrement prolongée du théorème 5.5 dans [5] si on peut montrer que l'ensemble

$$C = \{x \in I_\gamma; \exists \{x_n\}, x_n \in E_n \text{ avec } x_n \rightarrow x \text{ mais } h_n(x_n) \not\rightarrow h(x)\}$$

Consiste au plus d'un nombre comptable d'éléments et par conséquent a la probabilité zéro sous la mesure limite κ , Soit D l'ensemble des discontinuités de la fonction de distribution du $(\prod_1^{m_1} A_i, \dots, \prod_1^{l_1} A_i)$ sur la ligne segment $\{(\psi(x))^{-1}(\tau_j/\tau_{l_1}, \dots, \tau_j/\tau_{l_1}); x \in I_\gamma\}$ dans $\mathbb{R}^t$. Puisque $x \in E_n$ donc $a_n(x) \in E$, d'après le lemme 2 et (3.19) on a $C \subseteq D$.

Après, supposant que (3.12) est vérifiée avec $H(\{0\}) > 0$ et que (3.13) est vérifiée aussi.

Utilisant la propriété de Markov, on remarque que pour chaque $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{x \in E \\ \psi([x-u]/g(u)) \leq \delta}} P\{X_p > u / X_0 = x\} \\ & \leq \sum_{j=1}^p \sup_{\substack{x \in E \\ \psi([x-u]/g(u)) \leq \delta^{(p-j)/p}}} p\{X_1 > u + g(u)\psi^{-1}(\delta^{(p-j)/p}) / X_0 = x\}, \end{aligned}$$

où $\psi^{-1}(y) = (1 - y^{-\gamma})/\gamma$, $y \in (0, \infty)$, est la fonction inverse de ψ sur I_γ .

D'où, il est facile de montrer, utilisant (3.17), que (3.13) est

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{u \uparrow x_F} \sup_{\substack{x \in E \\ \psi([x-u]/g(u)) \leq \delta}} P\{X_p > u / X_0 = x\} = 0 \text{ pour tout } p \geq 1. \quad (3.20)$$

Pour $t = 1, \dots, p$, $1 \leq m_1 < \dots < m_t \leq p$ et $l_1, \dots, l_t \in \{1, \dots, r\}$,

On définit $v_n = \min\{1 \leq k \leq t; X_{m_k} > u_n^{(l_k)}\}$ et $v = \min\{1 \leq k \leq t; Y_{m_k} > \tau_j/\tau_{l_k}\}$

Pour montrer (3.18), pour le moment il est plus facile de montrer

$$P_j\{v_n = s\} \rightarrow P^\mu\{v = s\} \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

(3.21) implique (3.18) ce sera suffisant pour accomplir la preuve.

Si $m_s = 1$ la preuve de (3.21) est complètement analogue au cas où $H(\{0\}) = 0$, donc on peut supposer que $m_s > 1$. Procédant comme dans la preuve du lemme 2, on a

$$P\left\{\psi\left(\frac{X_i - X_{i-1}}{g(X_{i-1})}\right) \in (a_i, b_i]; i = 1, \dots, p / X_0 = u\right\} \rightarrow \prod_{i=1}^p (H(b_i) - H(a_i)) \quad (3.22)$$

quand $u \uparrow x_F$, $u \in E$, et $0 < a_i < b_i \leq \infty$ pour $i = 1, \dots, p-1$, $-\infty \leq a_p < b_p \leq \infty$ et a_i, b_i sont, si sont finis, les points de continuité de H . On choisit $\delta > 0$ comme point de continuité de H tel que $H(\delta) < 1$ si $H(\{0\}) < 1$. Pour $k = 0, 1, \dots$ soit $B_k = \{g(X_i) > 0; i = 0, \dots, k\}$ et on définit

$$D_{k+1} = B_k \cap \left\{ \psi \left(\frac{X_{k+1} - X_k}{g(X_k)} \right) \leq \delta, \psi \left(\frac{X_i - X_{i-1}}{g(X_{i-1})} \right) > \delta; i = 1, \dots, k \right\}$$

et

$$D_{k+1}^* = B_k \cap \left\{ \psi \left(\frac{X_i - X_{i-1}}{g(X_{i-1})} \right) > \delta; i = 1, \dots, k+1 \right\}.$$

De (3.17) on trouve que $\{X_0 > u_n^{(j)}\} \subseteq \cup_{i=1}^{m_s-1} D_i \cup D_{m_s-1}^*$ pour tout n suffisamment grand.

Ainsi pour n quelconque, on a

$$\begin{aligned} P_j \{v_n = s\} &= \sum_{i=1}^{m_s-1} P_j (\{v_n = s\} \cap D_i) + P_j (\{v_n = s\} \cap D_{m_s-1}^*) \\ &= S_n(\delta) + T_n(\delta). \end{aligned}$$

Le même raisonnement pour le cas où $H(\{0\}) = 0$ on montre

$$T_n(\delta) \rightarrow P^\mu \{v = s, A_k > \delta; 1 \leq k \leq m_s - 1\} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

δ peut être prise arbitrairement petite et $P^\mu \{v = s, A_k = 0, k \leq m_s - 1\} = 0$. $\square$

Le corollaire suivant précise des situations où la distribution composée à un niveau $\{\pi(i); i \geq 1\}$ a une forme simple, étant géométrique d'indice extrême θ , comme paramètre ; c'est $\pi(i) = \theta(1-\theta)^{i-1}$, $i \geq 1$.

Corollaire 1. *Supposant que $\{X_k; k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov satisfaisant les conditions du théorème 3*

- i) si $A_1 < 1$ p.s., alors $\theta = 1 - EA_1$.
- ii) si $A_1 = 0$ avec probabilité (a.p.) $p > 0$ et $A_1 \geq 1$ a.p. $1 - p$, alors $\theta = P\{A_1 = 0\}$.

Dans les deux cas la distribution composée à un niveau $\{\pi(i)\}$ est une géométrie de paramètre θ .

Démonstration. Utilisant les expressions pour θ et $\{\pi(i)\}$ données en (3.15) et (3.16) du théorème 3, respectivement. $\square$

Une prolongation du théorème lorsque $\gamma < 0$. Supposant que (3.11) est vérifiée avec $\gamma < 0$, et $\inf\{x; F(x) > 0\} = -\infty$ et

$$P\{X_1/u \leq x / X_0 = u\} \rightarrow_w \bar{H}(x) \quad \text{quand } |u| \rightarrow \infty, u \in E, \quad (3.23)$$

Pour une fonction de distribution $\bar{H}$ sur $(-\infty, \infty)$, on pose $\bar{H}((-\infty, 0)) > 0$. si $\bar{H}(\{0\}) > 0$, supposant ainsi que (3.13) est vérifiée ou que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{u \rightarrow \infty} \sup_{\substack{x \in E \\ |x| \leq \delta u}} P\{|X_1| > u / X_0 = x\} = 0$$

Soit $\{\bar{A}_n; n \geq 1\}$ une suite i.i.d. avec $P\{\bar{A}_1 \leq x\} = \bar{H}(x)$ et on définit la queue de la chaîne $Y_n = \bar{A}_n Y_{n-1}$, $n \geq 1$, Y_0 est indépendant de $\{\bar{A}_n\}$. Ainsi, si $\{X_n\}$ satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème 3, le résultat du théorème est vérifié avec la distribution initiale μ est remplacée par $\bar{\mu}(dx) = |\gamma|^{-1} x^{1/\gamma} dx$, pour $x > 1$ et Λ_j est remplacé par

$$\bar{\Lambda}_j = (R((\tau_j/\tau_1)^{-\gamma}), \dots, R((\tau_j/\tau_r)^{-\gamma})), j = 1, \dots, r,$$

où $R(\cdot)$ est donné en (3.14). Ainsi, si $|\bar{A}_1| < 1$ p.s., alors

$$\theta = 1 - \left[E|\bar{A}_1|^{-1/\gamma} 1_{\{\bar{A}_1 > 0\}} + \left(E|\bar{A}_1|^{-1/\gamma} 1_{\{\bar{A}_1 < 0\}} \right)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(E|\bar{A}_1|^{-1/\gamma} 1_{\{\bar{A}_1 > 0\}} \right)^i \right].$$

Spécifiquement, si $-1 < \bar{A}_1 \leq 0$, alors $\theta = 1 - (E|\bar{A}_1|^{-1/\gamma})^2$ et aussi si $\bar{A}_1 = 0$ a.p. $p > 0$ et $\bar{A}_1 \leq -1$ a.p. $1 - p$, alors $\theta = 1 - (P\{\bar{A}_1 \leq -1\})^2$.

Dans les deux cas, $\{\pi(i)\}$ est géométrique de paramètre θ , cette prolongation peut être prouvée exactement de la même manière que le théorème 3 et le corollaire 1.

Maintenant nous aborderons dans le quatrième chapitre deux exemples d'application, le premier concerne un processus AR(1) avec des marginaux uniformes, avec une étude simulation, le deuxième concerne le comportement extrémal des solutions des équations aux différences stochastiques du premier ordre à coefficients aléatoires en donnant un algorithme de simulation.

Introduction :

Dans ce chapitre on applique les résultats de la section 2 du chapitre 3 sur deux exemples. Le premier illustre les idées à travers d'un processus où il est possible d'exprimer les caractéristiques extrêmes des suites aléatoires explicitement. Le deuxième exemple concerne les équations aux différences stochastiques à coefficients aléatoires. On considère le comportement extrême au niveau multiple et la possibilité d'avoir un processus à valeurs négatives.

4.1- Exemple 1 (Processus AR(1)) :

Soit X_0 uniformément distribué sur $E = (0, 1)$ et pour $k \geq 1$ soit X_k un processus autorégressive d'ordre 1 strictement stationnaire donné par

$$X_k = \frac{1}{r} X_{k-1} + \varepsilon_k, \quad (4.1)$$

Où $r \geq 2$ est un entier et $X_k \sim U_{[0, 1]}$, $\{\varepsilon_k\}$ sont i.i.d. et uniformément distribués sur $\{0, 1/r, \dots, (r-1)/r\}$ et $\{\varepsilon_k\}$ est indépendant de X_0 . La suite stationnaire $\{X_k\}$ a été étudiée par Chernick [8] comme un exemple où des groupes des valeurs élevées se produisent. Il a montré par un argument direct que $\{X_k\}$ a l'indice extrême $\theta = (r-1)/r$. On va utiliser ici le théorème 3 pour trouver l'indice extrême et les probabilités composées limites associées au excédants d'un et deux niveaux. En outre, on va décrire explicitement le processus limite N^* du résultat de convergence complète dans le théorème 2.

Soit F la fonction de distribution de X_0 . Alors (3.11)

$$\lim_{u \uparrow x_F} [1 - F(u + g(u)x)] / [1 - F(u)] = (1 - \gamma x)_+^{1/\gamma} \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.11)$$

où $y_+ = \max\{0, y\}$ et

$$\begin{aligned} x_F = \infty \text{ et } g(u) &= -\gamma u & \text{si } \gamma < 0, \\ x_F < \infty \text{ et } g(u) &= \gamma (x_F - u) & \text{si } \gamma > 0 \end{aligned}$$

est vérifiée pour F avec $\gamma = 1$ et utilisant (4.1) on remarque que les probabilités de transition satisfont (3.12)

$$P\{\psi([X_1 - u]/g(u)) \leq x / X_0 = u\} \rightarrow_w H(x) \text{ quand } u \uparrow x_E, u \in E, \quad (3.12)$$

avec

$$H(x) = \begin{cases} (r-1)/r, & 0 \leq x < r, \\ 1, & r \leq x. \end{cases} \quad (4.2)$$

Puisque $H(\{0\}) = (r-1)/r > 0$, nous devons vérifier aussi (3.13).

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{u \uparrow x_E} \sup_{\substack{x \in E \\ \psi([x-u] \setminus g(u)) \leq \delta}} P\{X_1 > u / X_0 = x\} = 0. \quad (3.13)$$

Cependant, pour un δ et u avec $0 < \delta \leq 1/r$, $u > 1 - \delta$, on a

$\sup_{x \leq 1-(1-u)/\delta} P\{X_1 > u / X_0 = x\} = 0$ et (3.13) suit immédiatement.

Après, puisque les X_k sont uniformes, on définit $u_n(\tau) = 1 - \tau/n$ pour $\tau > 0$, on vérifie $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ pour $r \geq 1$, $\tau_1 > \dots > \tau_r > 0$. On note qu'un évènement dans $\mathcal{B}_i^j = \sigma(\{X_k \leq u_n(\tau_m)\}; i \leq k \leq j, 1 \leq m \leq r)$ peut être écrit comme union disjoint fini des évènements de type

$$\{u_n(\tau_{m_k}) < X_k \leq u_n(\tau_{m_k+1}); i \leq k \leq j\}$$

Où $m_k \in \{0, 1, \dots, r\}$, $u_n(\tau_0) = -\infty$ et $u_n(\tau_{r+1}) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors pour v fixé avec $0 < v < 1$, utilisant le même type d'argument que dans la preuve du théorème 2.1 dans [12], on voit que

$$\beta_{n, [nv]} \leq n \sum_{i=1}^r P\{1 - (\tau_i + \varepsilon)/n < X_0 \leq 1 - (\tau_i - \varepsilon)/n\} + 2nP\{X_0 / r^{[nv]} > \varepsilon / (2n)\}.$$

Puisque $nP\{X_0 > \varepsilon r^{[nv]} / (2n)\} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors $\beta_{n, [nv]} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\Delta(u_n(\tau_1), \dots, u_n(\tau_r))$ est vérifiée.

Maintenant les résultats des parties (i) et (ii) du théorème 3 sont vérifiés si on montre que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{M_{p, p_n} > u_n(\tau) / X_0 > u_n(\tau)\} = 0 \quad (4.3)$$

Pour tout $\tau > 0$ et toute suite $\{p_n\}$ avec $p_n \rightarrow \infty$, $p_n = o(n)$. Cependant,

$$\begin{aligned} P\{X_j > u_n(\tau) / X_0 > u_n(\tau)\} \\ = P\{X_j > u_n(\tau), \varepsilon_i > 0; i = 1, 2, \dots, j-1 \mid X_0 > u_n(\tau)\} \\ + P\{X_j > u_n(\tau), \varepsilon_i = 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, j-1 \mid X_0 > u_n(\tau)\} \\ = (A) + (B), \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ici $(A) \leq ((r-1)/r)^{j-1}$ et

$$\begin{aligned} (B) &= \sum_{i=1}^{j-1} P\{X_j > u_n(\tau), \varepsilon_i = 0, \varepsilon_l > 0; l \leq i-1 \mid X_0 > u_n(\tau)\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} P\{X_j > u_n(\tau) \mid X_i = 1/r\} (r-1)^{i-1} / r^i \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} P\{X_{j-i} > u_n(\tau) \mid X_0 = 1/r\} (r-1)^{i-1} / r^i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où on utilise la propriété de Markov et le fait que $P\{X_j > u_n(\tau) / X_i = x\}$, $0 < x < 1$,

$i < j$, est une fonction de x non décroissante. La distribution conditionnelle de X_p sachant $X_0 = 1/r$ est uniforme sur $\{1/r^{p+1} + i/r^p; i = 0, \dots, r^p - 1\}$ et donc

$$P\{X_p > u_n(\tau) \mid X_0 = 1/r\} \leq P\{X_p > u_n(\tau)\} + 1/r^{p+1}, \quad p \geq 1.$$

Par conséquent, de (4.5) on a

$$(B) \leq P\{X_0 > u_n(\tau)\} + (j-1)((r-1)/r)^{j-1} \quad (4.6)$$

Finalement, combinant (4.4) et (4.6) on aura

$$P\{M_{p,p_n} > u_n(\tau) \mid X_0 > u_n(\tau)\} \leq p_n P\{X_0 > u_n(\tau)\} + \sum_{j=p+1}^{\infty} j ((r-1)/r)^{j-1},$$

et (4.3) donne $p_n = o(n)$.

Ainsi les conditions du corollaire 1 (ii) sont vérifiées et $\{X_k\}$ a l'indice extrême $\theta = (r-1)/r$ et les probabilités composées à un niveau sont $\pi(i) = (r-1)r^{-i}$, $i \geq 1$.

En particulier du théorème 6.1 dans [17], si $M_n^{(k)}$ est le $k^{\text{ème}}$ plus grand parmi $X_1, \dots, X_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ M_n^{(k)} \leq \frac{x}{n} + 1 \right\} = \exp \left(\frac{r-1}{r} x \right) \times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j}^{k-1} \frac{-((r-1)/r)x^j}{j!} \binom{i-1}{j-1} \left(\frac{r-1}{r} \right)^j \left(\frac{1}{r} \right)^{i-j} \right),$$

Pour $x < 0$ et $k \geq 1$.

Après considérant les excès de deux différents niveaux, $u_n(\tau_1)$ et $u_n(\tau_2)$ avec $\tau_1 > \tau_2 > 0$.

Soit $x = \tau_1/\tau_2 > 1$ et soit $m = m(x)$ la partie entière de $\log x / \log r$.

Il est facile de montrer que les probabilités composées à deux niveaux

$\{\pi(i, j) = \pi(i, j; x); i \geq j \geq 0, i \geq 1\}$ sont données par

$$\pi(i, j; x) = \begin{cases} (r-1)r^{-i}, & i \leq m, j = 0, \\ r^{1-i} - x^{-1}, & i = m+1; j = 0, \\ x^{-1}r^{1-j} - r^{-i}, & i = m+j, j \geq 1, \\ x^{-1}r^{-j} - r^{1-i}, & i = m+j+1, j \geq 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad (4.7)$$

La distribution (4.7) peut être utilisé pour obtenir la distribution asymptotique conjointe de $M_m^{(k)}, M_n^{(l)}$, $k \neq l$; voir [15] théorème 4.3.2.

Finalement considérant le processus ponctuel N_n^* sur $[0, \infty) \times (0, \infty)$ de points à

$(k/n, n(1 - X_k))$, $k \geq 0$. Soit $S_i(x) = \sum_{j=1}^i \pi(j, 0; x)$, pour $x = \tau_1/\tau_2 > 1$, $i \geq 1$, d'après

(3.9) et $S_i(x) = \int_1^x P\{\eta([1, y)) \leq i\} y^{-2} dy$. Cependant, selon (4.7),

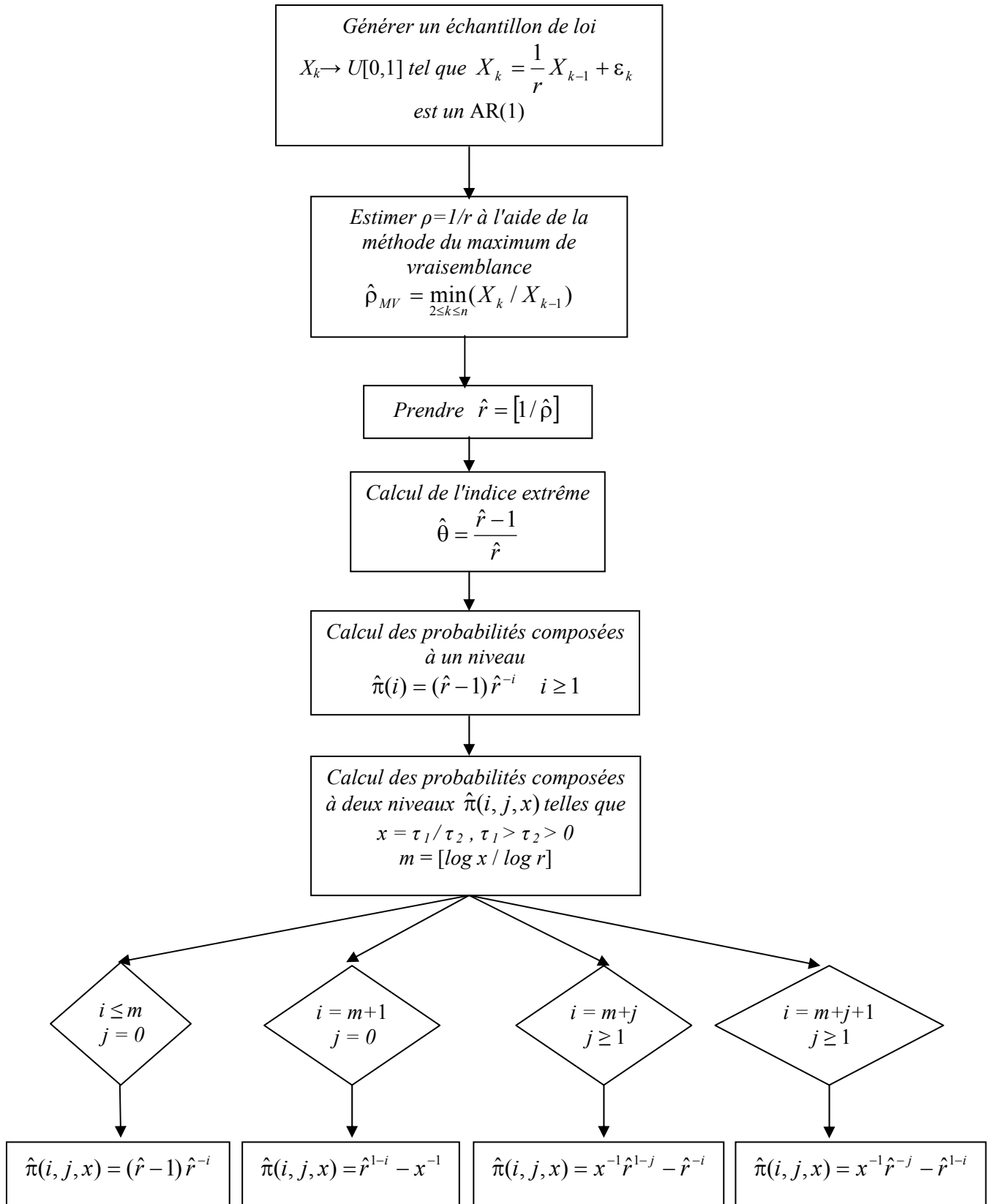
$$S_i(x) = \begin{cases} 1 - x^{-1}, & 1 < x \leq r^i, \\ 1 - r^{-i}, & r^i < x, \end{cases}$$

Par conséquent on voit que $P\{\eta([1, x]) \leq i\} = 1$ si $1 < x \leq r^i$ et zéro ailleurs.

Donc, la représentation (3.8) est vérifiée pour N^* avec $Y_{ij} = r^{j-1}$ p.s. $j \geq 1$; c'est-à-dire N^* est distribué comme $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{(S_i, T_i r^{j-1})}$, où $\{S_i, T_i\}$ sont les points du processus de poisson homogène sur $[0, \infty) \times (0, \infty)$ de moyenne $(r-1)/r$.

4.1.1- Simulation et Application :

Dans le but d'étudier le comportement extrême d'une chaîne de Markov stationnaire où on exprime explicitement les caractéristiques extrêmes on a généré des échantillons issues de loi uniforme sur $[0,1]$ et qui sont des processus stationnaires autorégressives d'ordre 1 et on a calculé l'indice extrême et les probabilités composées limites associées aux excédants à un et à deux niveaux et cela par la procédure suivante :

Organigramme de simulation :

On remarque que ces quantités dépendent de r tel que $1/r$ est le coefficient du modèle AR(1) ; donc pour chaque échantillon on aura une valeur de r . On prend des échantillons de tailles $k = 100$ et pour un nombre d'excès $i = 5$, on a obtenu les résultats suivants pour θ d'abord (Tab.4.1) :

$\hat{r}$	$\hat{\theta}$
2	0.5000
3	0.6667
4	0.7500
5	0.8000
6	0.8333
7	0.8571
8	0.8750
9	0.8889
10	0.9000
12	0.9167
13	0.9231
16	0.9375
24	0.9583
39	0.9744
43	0.9767
58	0.9828
88	0.9886
161	0.9938

Tab.4.1- Les valeurs de θ en fonction de r .

Le tableau suivant (Tab.4.2) représente les valeurs des probabilités composées à un niveau d'excès $\pi(i)$ en fonction des différentes valeurs de r et θ .

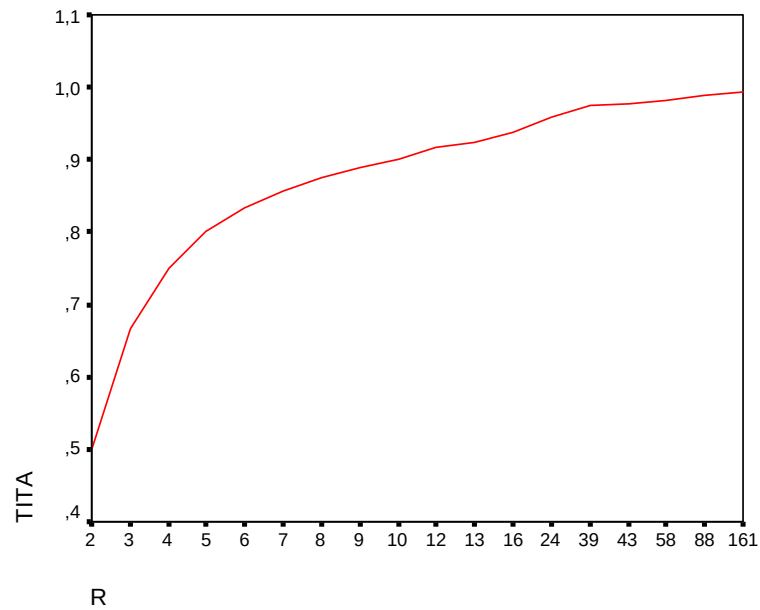
$\hat{r}$	$\hat{\theta}$	i	$\hat{\pi}(i)$
3	0.6667	1	0.6667
		2	0.2222
		3	0.0741
		4	0.0247
		5	0.0082
4	0.7500	1	0.7500
		2	0.1875
		3	0.0117
		4	0.0047
		5	0.0029
5	0.8000	1	0.8000
		2	0.1600
		3	0.0320
		4	0.0064
		5	0.0013

Tab.4.2- Les valeurs des probabilités composées à un niveau $\pi(i)$

Lorsque r augmente l'indice extrême θ augmente et quand θ atteint la valeur 1 on obtient une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, donc les petites valeurs de θ indiquent qu'il y a une forte dépendance entre les variables.

D'après le tableau (Tab.4.2) les probabilités composées à un niveau d'excès $\pi(i)$ représentant la distribution du processus ponctuel qui compte le nombre des points X_i excédant le niveau i est une fonction décroissante.

Le graphe suivant (Fig.4.1) représente la variation de θ en fonction de r .

Fig.4.1. Variation de θ en fonction de r

Et pour les probabilités composées à deux niveaux (excès) $\pi(i,j; \tau_1, \tau_2)$ tel que $\tau_1 > \tau_2$, on aura 5 valeurs de $x = \tau_1 / \tau_2$ et sont (4, 7, 1.75, 10, 2.5) et les valeurs de m correspondantes sont (1, 1, 0, 2, 0) donc les probabilités composés à deux niveaux pour $r = 4$ et pour les 5 valeurs de τ_1 et τ_2 et m sont :

i	j	$\hat{\pi}(i,j; 4,1)$
1	0	0.7500
2	0	0.7500
2	1	0.1875
3	1	0.0586
3	2	0.0469
4	2	0.0146
4	3	0.0117
5	3	0.0037
5	4	0.0029
6	4	0.0009
6	5	0.0007
7	5	0.0002
7	6	0.0002
8	6	0.0000
8	7	0.0000
9	7	0.0000
9	8	0.0000
10	8	0.0000
10	9	0.0000

Tab.4.3- Les probabilités composées
à deux niveaux pour $\tau_1 = 4$ et $\tau_2 = 1$

i	j	$\hat{\pi}(i,j; 7,1)$
1	0	0.7500
2	0	0.8571
2	1	0.0804
3	1	0.0268
3	2	0.0201
4	2	0.0067
4	3	0.0050
5	3	0.0017
5	4	0.0029
6	4	0.0004
6	5	0.0003
7	5	0.0001
7	6	0.0000
8	6	0.0000
8	7	0.0000
9	7	0.0000
9	8	0.0000
10	8	0.0000
10	9	0.0000

Tab.4.4- Les probabilités composées
à deux niveaux pour $\tau_1 = 7$ et $\tau_2 = 1$

i	j	$\hat{\pi}(i,j;7,4)$
1	0	0.7500
1	1	0.3214
2	1	0.1072
2	2	0.0804
3	2	0.0268
3	3	0.0201
4	3	0.0067
4	4	0.0050
5	4	0.0017
5	5	0.0013
6	5	0.0004
6	6	0.0030
7	6	0.0001
7	7	0.0001
8	7	0.0000
8	8	0.0000
9	8	0.0000
9	9	0.0000
10	9	0.0000

Tab.4.5- Les probabilités composées
à deux niveaux pour $\tau_1 = 7$ et $\tau_2 = 4$

i	j	$\hat{\pi}(i,j;10,4)$
1	0	0.7500
1	1	0.4500
2	1	0.0750
2	2	0.1125
3	2	0.0188
3	3	0.0281
4	3	0.0047
4	4	0.0070
5	4	0.0012
5	5	0.0018
6	5	0.0003
6	6	0.0004
7	6	0.0001
7	7	0.0001
8	7	0.0000
8	8	0.0000
9	8	0.0000
9	9	0.0000
10	9	0.0000

Tab.4.6- Les probabilités composées
à deux niveaux pour $\tau_1 = 10$ et $\tau_2 = 4$

i	j	$\hat{\pi}(i,j;10,1)$
1	0	0.7500
2	0	0.1875
3	0	0.1500
3	1	0.3844
4	1	0.0844
4	2	0.0961
5	2	0.0211
5	3	0.0240
6	3	0.0053
6	4	0.0060
7	4	0.0013
7	5	0.0015
8	5	0.0003
8	6	0.0004
9	6	0.0000
9	7	0.0000
10	7	0.0000

Tab.4.7- Les probabilités composées
à deux niveaux pour $\tau_1 = 10$ et $\tau_2 = 1$

On remarque d'après les probabilités composées à deux niveaux que la distribution du processus ponctuel (nombres de points X_i qui dépassent $u_n(\tau_1)$ et $u_n(\tau_2)$) est une fonction décroissante quelque soit les valeurs de τ_1 et τ_2 donc quelque soit m .

4.2- Exemple 2 (Equations aux Différence Stochastiques) :

Soit Y_0 une variable aléatoire et soit $\{(A_n, B_n); n \geq 1\}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeur dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes de Y_0 . On définit Y_n , $n \geq 1$, par l'équation au différence stochastique

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n \quad (4.8)$$

Le comportement extrémal des solutions de (4.8) était étudié dans [12] pour le cas où A_n et B_n sont non négatifs presque sûrement. Les résultats, incluent les expressions de l'indice extrême et les probabilités composées limites à un niveau, ont été appliqués à un processus ARCH d'ordre 1 d'intérêt en modélisation économétrique. Ici on va prolonger le résultat de [12] en posant $P\{A_1 < 0\} > 0$ et établissant un résultat à multi niveaux.

Supposant que $B_1/(1 - A_1)$ est non dégénéré et que la distribution conditionnelle de $\log|A_1|$ sachant $A_1 \neq 0$ est non bornée. Ainsi, supposant qu'il existe un $\alpha > 0$ telle que $E|A_1|^\alpha = 1$, $E|A_1|^\alpha \log^+ |A_1| < \infty$, et $0 < E|B_1|^\alpha < \infty$.

Sous ces suppositions, les résultats de Vervaat [29] et Kesten [19] montre que l'équation $Y_\infty =_d A_1 Y_\infty + B_1$, où Y_∞ est indépendant de (A_1, B_1) , a une solution unique en distribution, donné par

$$Y_\infty =_d \sum_{j=1}^{\infty} B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i.$$

Si $Y_0 =_d Y_\infty$, alors $\{Y_n\}$ est stationnaire et Y_n converge en distribution vers Y_∞ quelque soit la distribution de Y_0 . En outre, ils existent des constantes non négatives c_+ et c_- , avec $c_+ + c_- > 0$, telles que

$$P\{Y_\infty > t\} \approx c_+ t^{-\alpha} \text{ et } P\{Y_\infty < -t\} \approx c_- t^{-\alpha} \text{ quand } t \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Soit $Y_0 =_d Y_\infty$, donc $\{Y_n\}$ est stationnaire. Dorénavant, on va se restreint au cas où $c_+ > 0$. Cela est évidemment vérifié lorsque $\{(A_n, B_n)\}$ sont dans $\mathbb{R}_+^2$ et en outre, utilisant le

résultat de Goldie([14], théorème 3.1), on remarque que $c_+ > 0$ aussi lorsque $P\{A_1 < 0\} > 0$.

On définit $u_n(x) = xn^{1/\alpha}$, $x > 0$. Pour vérifier les conditions du théorème 2, on doit montrer d'abord que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\{M_{p,p_n} > xn^{1/\alpha} \mid Y_0 > xn^{1/\alpha}\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } p \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Pour tout $x > 0$ et toute suite $\{p_n\}$ avec $p_n \rightarrow \infty$, $p_n = o(n)$. Comme dans la preuve du théorème 2.1 dans [12], on introduit le processus auxiliaire

$$Y_n^\# = Y_0 \prod_{j=1}^n A_j, \quad n \geq 1, \quad Y_0^\# = Y_0,$$

Et on écrit $\Delta_n = Y_n - Y_n^\#$, $n \geq 0$. Puisque $\{\Delta_n\}$ est indépendant de Y_0 , on a

$$\begin{aligned} P\{M_{p,p_n} > xn^{1/\alpha} \mid Y_0 > xn^{1/\alpha}\} &\leq P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} Y_j^\# > \frac{xn^{1/\alpha}}{2} \mid Y_0 > xn^{1/\alpha}\right\} + P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} \Delta_j > \frac{xn^{1/\alpha}}{2}\right\} \\ &= (A) + (B). \end{aligned}$$

Ecrivant Q_n pour la distribution conditionnelle de $Y_0/(xn^{1/\alpha})$ sachant $Y_0 > xn^{1/\alpha}$, on constate de (4.9) que Q_n converge faiblement vers Q , où $Q(dy) = \alpha y^{-\alpha-1} dy$, $y > 1$.

Rappelons que $Y_0 =_d Y_\infty$ et que c_+ est supposée strictement positive.

Maintenant, pour un $\varepsilon > 0$ on choisie $\tilde{x}$ tel que $Q\{(\tilde{x}, \infty)\} < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} (A) &= \int_{(1, \infty)} P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} \prod_{i=1}^j A_i > 1/(2y)\right\} Q_n(dy) \\ &\leq \int_{(1, \tilde{x}]} P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} \prod_{i=1}^j A_i > 1/(2y)\right\} Q_n(dy) + Q_n\{(\tilde{x}, \infty)\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Il découle des suppositions faites que $E \log |A_1| < 0$; voir par exemple [14], lemme 2.2,

et donc il existe $t > 0$ avec $E|A_1|^t < 1$; et [12], section 3.

Puisque le premier terme dans (4.11) est borné par $\sum_{j=p+1}^{p_n} (E|A_1|^t)^j / (1/(2\tilde{x}))^t$,

on obtient $\lim_{p \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} (A) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(B) &\leq P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} |\Delta_j| > \frac{xn^{1/\alpha}}{2}\right\} \\
&\leq P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} |Y_0| \prod_{i=1}^j |A_i| > \frac{xn^{1/\alpha}}{4}\right\} + P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{p_n} |Y_j| > \frac{xn^{1/\alpha}}{4}\right\} \\
&\leq P\left\{\bigcup_{j=p+1}^{\infty} |Y_0| \prod_{i=1}^j |A_i| > \frac{xn^{1/\alpha}}{4}\right\} + p_n P\left\{|Y_0| > \frac{xn^{1/\alpha}}{4}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Le premier terme dans (4.12) converge vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ puisque $E \log |A_1| < 0$ implique $\bigcup_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j |A_i| < \infty$ presque sûrement et le deuxième terme aussi tend vers zéro, de (4.9) on aura $p_n = o(n)$. Donc (4.10) est vérifié.

Après, si on procède de la même manière que l'exemple 1 alors la condition de mélange $\Delta(u_n(x_1), \dots, u_n(x_r))$ sera vérifiée pour $\{Y_n\}$.

De (4.9) la fonction de distribution de Y_0 satisfait (3.11) avec $\gamma = -\alpha^{-1}$. Ainsi, on voit clairement que (3.23) est vérifiée avec $\bar{H}(x) = P\{A_1 \leq x\}$ et que (3.24) est satisfaite dans le cas où $P\{A_1 = 0\}$ est différent de zéro. Par conséquent, les résultats du théorème 2 sont vérifiés pour $\{Y_n\}$, avec μ et Λ_j remplacés par $\bar{\mu}$ et $\bar{\Lambda}_j$, respectivement, comme c'est donné dans le paragraphe qui suit le corollaire 1.

Finalement on remarque que la supposition que $\{Y_n\}$ soit stationnaire n'est pas importante; le résultat de convergence du processus ponctuel est vérifié indépendamment de la distribution de Y_0 .

Nous présentant maintenant l'algorithme de simulation de la solution de l'équation au différence stochastique donc le comportement extrémal de cette solution.

4.2.1- Algorithme de simulation :

Etape1: Générer des variables aléatoires A_1, B_1, Y_0 de la loi en question vérifiant

$$Y_N = A_1 Y_N + B_1 \quad \{(A_1, B_1) \text{ couple aléatoire générique avec la même distribution que } (A_n, B_n) \text{ et indépendant de } Y_0, \text{ pour } N \text{ suffisamment grand.}\}$$

Etape2: tant que $\|P\{Y_N > t\} - c_+ t^{-\alpha}\| < \varepsilon$ et $\|P\{Y_N < -t\} - c_- t^{-\alpha}\| < \varepsilon$ et $(c_+ + c_- > 0)$
 $\{\alpha > 0, t = Nh, h > 0.\}$

$$\text{faire} \quad Y_N =_d \sum_{j=1}^N B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i.$$

Cet algorithme est facile à implémenter.

4.3- Conclusion :

Pour réaliser l'exemple 1, nous avons simulé des données en se basant sur la loi uniforme et en utilisant un programme de Matlab et cela nous a permis de voir les différents résultats tirés de la théorie, mais ce programme reste toujours valable pour des données réelles, ainsi ces méthodes peuvent servir en système de tarification en réassurance.

Conclusion Générale

Notre principal objectif était d'étudier le comportement extrémal des valeurs réelles de chaînes de Markov stationnaires sous des hypothèses assez générales, des conditions sont obtenus pour la convergence en distribution du processus ponctuel des excédants à multiniveaux associés aux familles des suites à haut niveau, et applicable aux suites stationnaires générales, ces conditions sont aussi valables pour les chaînes de Markov, et sont prises pour grandes classes des chaînes. Les plus importantes hypothèses utilisées sont que les distributions marginales appartiennent au domaine d'attraction de loi des valeurs extrêmes avec des conditions plutôt faibles sur les probabilités de transitions, ainsi le résultat de la convergence complète a été donné. Les résultats qui représentent les quantités caractérisant les distributions limites sont appliqués avec des simulations à un processus AR(1) avec des marginaux uniformes; et aux solutions d'une équation au différence stochastique d'ordre un à coefficients aléatoires.

En outre, il pourrait être intéressant d'étudier dans des travaux futur d'autres suites pour l'estimation des paramètres des distributions asymptotiques des valeurs extrêmes, par exemple poser des hypothèses relatives aux autocorrélations des observations, remettre en cause à la fois l'hypothèse de stationnarité et celle d'indépendance, étudier le cas de v.a. dépendantes gaussiennes, des processus non stationnaires et enfin le cas des processus à temps continu.

- [1] ALDOUS, D. (1989). Approximations via the Poisson Clumping Heuristic. Springer, New York.
- [2] ALPUIM, M.T. (1989). An extremal Markovian sequence. J. Appl. Probab. 26 p 219-232.
- [3] ASMUSSEN, S. (1987). Applied Probability and Queues. Wiley, New York.
- [4] BERMAN, S. M. (1992). Sojourns and Extremes of stochastic processes. Wadsworth et Brooks/ Cole, Belmont, CA.
- [5] BILLINGSLEY, P. (1968). Convergence of probability Measures. Wiley, New York.
- [6] BOLLERSLEV, T. and ENGLE, R. F. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. Econom. Rev. 27 p 1-50.
- [7] BOULEAU, N. (2000). Processus stochastiques et applications. Hermann.
- [8] CHERNICK, M. R. (1981). A limit theorem of the maximum of autoregressive processes with uniform marginal distributions . Ann. Probab. 9 p 145-149.
- [9] CHERNICK, M. R, HSING. T. and Mc CORMICK, W.P. (1991). Calculating the extremal index for a class of stochastic processes. Adv. In Appl. Probab. 23 p 835-850.
- [10] CHAFAÏ, D. (2002). Petit manuel à l'usage des agrégatifs préparant l'oral de modélisation stochastique. Université de Toulouse.
- [11] CHERFI, M. (2005). Statistique des valeurs Extrêmes en Assurance. Thèse de Magister encadré par K. Boukhetala, USTHB.
- [12] DE HAAN, L., RESNICK, S.I., ROOTZEN, H. and DEVRIES, C.G. (1989). Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes. Stochastic process. Appl. 32 p 213-224.
- [13] EMBRECHTS, P., KLUPPELBERG, C., MIKOSCH, T., (2001). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.
- [14] GOLDIE, C. M. (1991). Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. Ann. Appl. Probab. 1 p 126-166.
- [15] HSING, T. (1984). Point processes associated with extreme value theory. Dissertation, Technical Report 83, Center for stochastic processes, Univ. North Carolina.
- [16] HSING, T. (1987). On the characterization of certain point processes. Stochastic process. Appl. 26 p 297-316.

- [17] HSING, T., HUSLER, J. and LEADBETTER, M.R. (1988). On the exceedance point process for a stationary sequence. *Probab. Theory related fields* 78 p 97-112.
- [18] KALLENBERG, O. (1976). *Random Measures*. Academic, New York.
- [19] KESTEN, H. (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta. Math.* 131 p 207-248.
- [20] LEADBETTER, M. R., LINDGREN, G. and ROOTZEN, H. (1983). *Extremes and Related properties of Random sequences and Processes*. Springer, New York.
- [21] NOUALI, FELLAG.(2004). Sur l'estimation du paramètre d'un AR(1) avec innovations uniformes cas des échantillons finis. Colloque international de modélisation stochastique et statistique, USTHB, 17-19 Avril 2004.
- [22] Necir.A, Boukhetala.K “ Estimating the Risk-Adjusted Premium For The Largest Claims Reinsurance Covers” , COMPSTAT 2004 Edition Physica Verlag Heidelberg 2004/ Springer, Volume1.pp.1577-1585.
- [23] O'BRIEN, G.L. (1987). Extreme values for stationary and Markov sequences. *Ann. Probab.* 15 p 281-291.
- [24] PERFEKT, R. (1994). Extremal Behaviour of sationary Markov chains with Applications. *Ann. Appl. Probab.* 4 p 529-548.
- [25] RESNICK, S.I. (1987). *Extreme values, Regular variation and point processes*. Springer, New York.
- [26] ROOTZEN, H. (1988). Maxima and Exceedances of stationary Markov Chains. *Adv. In Appl. Probab.* 20 p 371-390.
- [27] RONCALLI, T. (2002). *Théorie des valeurs Extrêmes ou Modélisation des évènements rares pour la gestion des risques*. DESS de l'université Paris IX Dauphine.
- [28] SMITH, R.L. (1992). The extremal index for a Markov chain. *J. Appl. Probab.* 29 p 37-45.
- [29] TONG, H. (1990). *Time series, a Dynamical system approach*. Oxford Univ. Press.
- [30] VERVAAT, W.(1979). On a stochastic difference equation and a representation of non negative infinitely divisible random variables. *Adv. In Appl. Probab.* 11 p 750-783.

1- Modes de convergence :**1- Convergence en distribution :**

Définition. On dit que (A_n) converge en distribution ou converge faiblement vers la v.a. A ($A_n \xrightarrow{d} A$) si pour toute fonction f conjointe continue la relation

$$E(f(A_n)) \longrightarrow E(f(A)), \quad n \rightarrow \infty,$$

est vérifiée.

2- Convergence en probabilité :

Définition. On dit que (A_n) converge en probabilité vers la v.a. A ($A_n \xrightarrow{P} A$) si pour tout ε positif la relation

$$P(|A_n - A| > \varepsilon) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

est vérifiée.

La convergence en probabilité implique la convergence en distribution, l'inverse est vrai si et seulement si $A = a$ p.s. pour une constante a .

3- Convergence presque sûr :

Définition. On dit que (A_n) converge presque sûrement (p.s.) ou avec la probabilité 1 vers la v.a. A ($A_n \xrightarrow{p.s.} A$) si pour P-presque tout $\omega \in \Omega$ la relation

$$A_n(\omega) \longrightarrow A(\omega), \quad n \rightarrow \infty,$$

est vérifiée.

2- Programme de simulation :

Nous présentons dans cette annexe le programme utilisé dans la simulation

```
X=rand(10,1);
for k=2:10
    a(k-1)=(X(k)/X(k-1));
end
rho=min(a);
r=round(1/rho)

tita=(r-1)/r

for i=1:5
    p0(i)=(r-1)*r^-i
end

tho1=1:3:10
tho2=1:3:10
n=length(tho1);
h=zeros(n,n);
m=zeros(n,n);
for i=1:n      %i=1:n
    for j=1:n    %j=1:i-1
        if tho1(i)>tho2(j)
            h(i,j)=tho1(i)/tho2(j)
            m(i,j)=round(log(h(i,j))/log(r))
        else h(i,j)=0
            m(i,j)=-1
        end
    end
end
end
k=zeros(1,n*(n-1)/2);
hh=zeros(1,n*(n-1)/2);
s=1
for i=2:n
    for j=1:i-1
        k(s)=m(i,j)
        hh(s)=h(i,j)
        s=s+1
    end
end
end

d=0
for i=1:s-1
```

```
if k(i)==0
    d=d+1; %c'est le nombre de zéro dans k
end
end
h4=zeros(1,d);
kk=zeros(1,length(k)-d);
u=1
i=1
for s=1:(n*(n-1)/2)-1 %5=6-1=2*(n-1)=length(k)
    if k(s)>0
        kk(u)=k(s)
        hhh(u)=hh(s)
        u=u+1
    else
        kk(u)=k(s+1)
        h4(i)=hh(s)
        i=i+1
        hhh(u)=hh(s)
        u=u+1
    end
    if k((n*(n-1)/2))>0
        kk(u)=k(n*(n-1)/2) % kk(u)=m sous forme d'un vecteur
        hhh(u)=hh((n*(n-1)/2))
    else
        h4(i)=hh(n*(n-1)/2)
    end
end

end

p1=zeros(length(kk)+1,length(kk));
for i=1:length(kk)+1
    for j=1:length(kk)
        p1(i,j)=2
    end
end
end

for u=1:length (kk)
    for i=1:kk(u)
        p1(i,u)=(r-1)*r^(-i); %i<=m, j=0
    end
    p1(kk(u)+1,u)=r^(1-i)-hhh(u)^(-1); %i=m+1, j=0
end
dd=0
for i=1:length(kk)+1
    for j=1:length(kk)
        if p1(i,j)<2
            dd=dd+1;
        end
    end
end
```

```
        end
    end
end
p11=zeros(1,dd);
g=1
for i=1:length(kk)+1
    for j=1:length(kk)
        if p1(i,j)<=1
            p11(g)=p1(i,j);
            g=g+1;
        end
    end
end
p2=zeros(10,10-length(kk),length(hhh)); %i<=10, i=m+j, j>=1
p3=zeros(10,10-length(kk)-1,length(hhh)); %i=m+j+1, j>=1
for i=1:10
    for j=1:10-length(kk)
        for u=1:length(hhh)
            p2(i,j,u)=2
        end
    end
end
for i=1:10
    for j=1:10-length(kk)-1
        for u=1:length(hhh)
            p3(i,j,u)=2
        end
    end
end
end

for u=1:length(kk)
    for i=1:10
        for j=1:i-kk(u)
            p2(i,j,u)=hhh(u)^(-1)*r^(1-j)-r^(-i);
        end
        for j=1:i-kk(u)-1
            p3(i,j,u)=hhh(u)^(-1)*r^(-j)-r^(1-i);
        end
    end
end
end
dd2=0
for i=1:10
    for j=1:10-length(kk)
        for u=1:length(hhh)
            if p2(i,j,u)<2
                dd2=dd2+1;
            end
        end
    end
end
```

```
end
end
dd3=0
for i=1:10
    for j=1:10-length(kk)-1
        for u=1:length(hhh)
            if p3(i,j,u)<2
                dd3=dd3+1;
            end
        end
    end
end
p22=zeros(1,dd2);
g2=1
for i=1:10
    for j=1:10-length(kk)
        for u=1:length(hhh)
            if p2(i,j,u)<=1
                p22(g2)=p2(i,j,u)
                g2=g2+1;
            end
        end
    end
end
p33=zeros(1,dd3);
g3=1
for i=1:10
    for j=1:10-length(kk)-1
        for u=1:length(hhh)
            if p3(i,j,u)<=1
                p33(g3)=p3(i,j,u);
                g3=g3+1;
            end
        end
    end
end
end
% si m=0:

p111=zeros(length(h4)); %m=0,j=0,i=m+1=1
for u=1:d
    p111(u)=1-1/h4(u); % suite de p11
end

p4=zeros(10,length(h4)); %i=m+j<=10,j>+1
p5=zeros(10-1,length(h4)); %i=m+j+1>=1, j>=1
for i=1:10
    for u=1:d
```

```
        p4(i,u)=2
    end
end
for i=1:10-1
    for u=1:d
        p5(i,u)=2
    end
end

for u=1:d
    for i=1:10
        p4(i,u)=h4(u)^(-1)*r^(1-i)-r^(-i); % i=0+j donc i=j
    end
    for i=2:10
        p5(i,u)=h4(u)^(-1)*r^(-i+1)-r^(1-i); % i=0+j+1 donc j=i-1
    end
end
dd4=0
for i=1:10
    for u=1:d
        if p4(i,u)<2
            dd4=dd4+1;
        end
    end
end
dd5=0
for i=1:10-1
    for u=1:d
        if p5(i,u)<2
            dd5=dd5+1;
        end
    end
end
p44=zeros(1,dd4);
g4=1
for i=1:10
    for u=1:d
        if p4(i,u)<=1
            p44(g4)=p4(i,u);
            g4=g4+1;
        end
    end
end
p55=zeros(1,dd5);
g5=1
for i=1:10-1
    for u=1:d
```



```
        if p5(i,u)<=1
            p55(g5)=p5(i,u);
            g5=g5+1;
        end
    end
end
end
```