

SOMMAIRE:

Chapitre 1: Introduction.....	3.
Chapitre 2 : Préliminaires.	
1. Equations différentielles-systèmes différentiels.....	5.
2. Invariants formels.....	8.
3. Ramification.....	9.
4. Polygone de Newton.....	9.
5. Phénomène de Stokes.....	11.
6. Espaces des séries Gevrey.....	11.
7. Développement asymptotiques.....	12.
8. Théorèmes de base	14.
Chapitre 3 : Faisceau de Deligne $\hat{F}$	
1. Le disque fermé $\bar{X}$:.....	18.
2. Le faisceau $\hat{F}$ sur X	18.
3. Une section typique de $\hat{F}$	19.
4. L'action de D sur la cohomologie de $\hat{F}$ (théorème 2.1).....	19.
5. L'acyclicité de pour $\text{Sol}(D; \hat{F})$:.....	20.
6. Preuve du théorème 2.1.....	22.
7. Nullité du second groupe de cohomologie	27.
8. Les gros points singuliers	28.
Chapitre 4 : Application aux théorèmes d'indices.	
1. Théorème général d'indice.....	30.
2. Indice sur un petit disque ouvert	31.
3. Indice sur un petit disque fermé.....	32.
4. Indice sur un secteur étroit	32.
5. Indice sur un tore	34.
6. Indice sur les disques.....	35.
7. Indice sur les gros points singuliers.....	36.
8. Indice sur multisecteurs.....	37.
Chapitre 5:	

Les faisceaux $\mathbb{P}^k$ et ses applications aux théorèmes d'indices.

1. L'espace X^k :	38.
2. Le faisceau $\mathbb{P}^k$ sur X^k :	39.
3. Une section typique du faisceau $\mathbb{P}^k$:	40.
4. L'action de D sur le groupe de cohomologie :	41.
5. Théorèmes d'indices :	
5.1. Théorème général d'indice :	42.
5.2. Indice sur un secteur étroit :	42.
5.3. Indice sur un tore :	43.
5.4. Indice sur disques :	44.
5.5. Indice sur un gros point singuliers :	44.

Chapitre 6: Propriétés des faisceaux $\mathbb{P}^k$ et la multisommabilité.

1. Le faisceau $\mathbb{P}^k$:	46.
2. Théorème d'indice sur un k -multisecteur :	47.

Conclusion.....49.

Appendice.....51.

Références.....56.

Chapitre 1

Introduction

Soit :

$$D = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0$$

Un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques au voisinage de zéro dans C:

B.Malrange a prouvé dans [M74] que D agissant comme étant un opérateur différentiel linéaire dans l'espace des séries formelles C et sur le sous espace des séries convergentes Cfg est à indice et il a donné les valeurs de ces indices.

Rappelons qu'un endomorphisme:

$$D : E \rightarrow E$$

D'un espace vectoriel E est à indice si

$$\dim_E \ker D < +\infty \text{ et } \dim_E \operatorname{Coker} D < +\infty$$

Et on note son indice par le nombre :

$$\hat{A}(D; E) = \dim_C \ker D - \dim_C \operatorname{Coker} D$$

Ensuite J-P.Ramis a prouvé dans [R84] des résultats similaires dans les espaces $C[[x]]_s$ des séries convergentes de type Gevrey d'ordre s et dans les sous espaces $C[[x]]_{s;C^+}$ et $C[[x]]_{s;C^-}$ des séries de type supérieur ou inférieur à C, $\forall s > 0$:

Rappelons que:

$$C[[x]]_s = \bigcup_{C > 0} C[[x]]_{s;C}, \quad C[[x]]_{s;C^+} = \bigcap_{C > 0} C[[x]]_{s;C^+} \text{ et } C[[x]]_{s;C^-} = \bigcap_{C > 0} C[[x]]_{s;C^-}$$

Où

$$C[[x]]_{s;C} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid \exists K > 0, \forall n \geq 0, |a_n| \leq K (n!)^s C^{ns} \right\}$$

Ses méthodes sont reliées à l'analyse fonctionnelle et les perturbations compactes des opérateurs.

Juste après, Deligne suggère dans la lettre à J-P. Ramis [D86] que l'ensemble des points singuliers d'un opérateur différentiel peut se décrire avec des espaces convenables équipés avec un faisceau qui prend en considération la croissance ou la décroissance des classes d'exponentielles des solutions de l'opérateur dans chaque direction autour de l'origine.

Dans le présent travail, on va étudier le faisceau de Deligne avec une application aux théorèmes d'indices comme suit:

On commence par des préliminaires dans le premier chapitre, sur les opérateurs différentiels, les espaces Gevrey d'ordre s généralisés et quelques théorèmes de base.

Ensuite dans le deuxième chapitre, on décrit le faisceau de Deligne $\hat{F}$ associé à un point singulier-notre cas est l'origine et on montre que l'opérateur D est un isomorphisme de $H^i(U; F); 0 \leq i \leq 1$.

Lorsque U est un petit secteur (théorème 2.1) et on introduit la notion des gros points singuliers avec quelques remarques.

Dans le troisième chapitre, on développe une méthode d'algèbre homologique pour établir les théorèmes d'indice pour D sur les petits secteurs, petits disques, tores et multisecteurs et on les généralise sur les grands sous-ensembles par la technique de Mayer Vietoris.

On décrit le faisceau $\hat{F}^k$ dans le quatrième chapitre, et on applique la technique développée dans le chapitre précédent pour prouver les théorèmes d'indices dans cet espace, en particulier, dans les espaces $C[[x]]_s; C[[x]]_{(s)}$ et $C[[x]]_{s; C^s}$:

Finalement, on décrit le faisceau $\hat{F}^k$ où $k = (k_1; k_2; \dots; k_n)$ pour appliquer la technique précédente et calculer l'indice sur l'espace des séries multisommables.

Chapitre 2

Preliminaire:

Dans ce chapitre on va rappeler quelques definitions et resultats de base de la theorie locale des equations differentielles lineaires.

On fixe un operateur differentiel lineaire :

$$D = a_n \frac{d^n}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

Ou les a_i sont des fonctions analytiques au voisinage de zero .

Il est preferable de considerer un systeme differentiel au lieu d'une equation differentielle.

2.1 Equation differentielle- Systeme differentiel:

L'etude des equations differentielles lineaires a coefficients analytiques est equivalente a celle des systemes differentiels lineaires d'ordre un a coefficients meromorphes .

Rappelons qu'on passe facilement d'une equation (E) :

$$(E) : a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 = 0:$$

a son systeme compagnon

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx} = AY \end{cases}$$

$$O_\mu: \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & \dots & a_{n-1} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

En prenant pour inconnue:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, on peut passer d'un système à une équation en ramenant le système à la forme compagnon, et ceci peut se faire par le changement linéaire d'inconnue défini comme suit :

$$Y = M \cdot Y_1$$

à coefficients morphiques, c'est-à-dire :

$$M \in GL(n; C(x, \frac{1}{x}))$$

2.1.1 Point singulier et point ordinaire:

Le point $x_0 = 0$ est un point singulier d'un système Φ si c'est un pôle de l'un au moins des coefficients de la matrice A :

lorsque le point $x_0 = 0$ n'est pas singulier on dit qu'il est ordinaire.

2.1.2 Point singulier régulier:

Le point $x_0 = 0$ est un point singulier régulier du système (4) si A possède un pôle à

l'origine et si $\exists P \in GL(n, \mathbb{C})$ matrice inversible à coefficients méromorphes à l'origine telle que :

$$P^{-1}AP = J$$

possède au plus un pôle d'ordre un.

Si le point $x_0 = 0$ est un point singulier régulier du système, alors toute solution série

formelle du système est convergente.

Théorème 1

Si le point $x_0 = 0$ est un point singulier régulier, alors il existe une solution fondamentale de la forme :

$$Y = F(x)x^L$$

où : L est une matrice constante et $F(x)$ est une matrice inversible à coefficients méromorphes à l'origine.

Les autres solutions fondamentales sont de la forme :

$$Z(x) = Y(x)C$$

où C est une matrice constante inversible.

2.1.3 Point singulier irrégulier:

Si le point $x_0 = 0$ n'est ni un point ordinaire ni un point singulier régulier, on dit que c'est un point singulier irrégulier.

Thorme 2 (poincaré- Fabry):

Tout système différentiel linéaire admet une solution fondamentale de la forme:

$$\hat{Y} = \hat{A}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} = \hat{A}(t)t^{vL} e^{Q(\frac{1}{t})}$$

avec: $t^v = x \quad (v \in \mathbb{N})$

$$Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n) \text{ ou } q_i \in \mathbb{C} \text{ et } \frac{1}{t} \in \mathbb{C}$$

$\hat{A}$: est une matrice inversible à coefficients série formelle.

L : $(n \times n)$ matrice constante.

2.2 Invariants formels:

2.2.1 Forme normale:

On appelle forme normale d'un système

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

le système:

$$\frac{dY}{dx} = A_0 Y$$

Dont la solution fondamentale est de la forme:

$$Y_0 = x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

.

Où L et Q sont définies dans le théorème précédent.

De plus, on peut choisir L et Q simultanément décomposés en somme

directe de blocs diagonaux:

$$L = \bigoplus_{i=1}^n L^{(i)} \quad \text{et} \quad Q = \bigoplus_{i=1}^n Q^{(i)}$$

Sachant que les q_j qui se trouvent dans les mêmes blocs sont soit tous nuls ; soit de même degré ,

bien que la forme normale ne soit pas unique , les q_j et les blocs de Jordan de L sont uniques . Ainsi , ils fournissent un ensemble complet d'invariants formels.

2.3 Ramification :

On dira que le système Φ appartient au cas sans ramification si les polynômes $q_j(\frac{1}{x})$ de $Q(\frac{1}{t})$ sont non ramifiés ($v = 1$):

Et on dira que le système Φ appartient au cas avec ramification [t] si Q contient au moins un polynôme ramifié q : ($v > 1$). le plus petit v est appelé degré de ramification.

Si le degré de cette ramification est :

$$p \text{ tel que } (t = x^{1/p});$$

alors Q contient les p polynômes ramifiés : $q(\frac{1}{x})$; $q(\frac{1}{xe^{2\pi i/p}})$; , $q(\frac{1}{xe^{2\pi i(p-1)/p}})$ avec même ordre de multiplicités.

Les degrés des polynômes q_j non nuls par rapport à $1/x$ sont appelés les niveaux de D :

Remarque 1

Les niveaux sont positifs dans le cas sans ramification et sont des nombres rationnels positifs dans le cas avec ramification .

Ils sont exactement les pentes positives du polygone de Newton .

Figure 2-1:

2.4 Polygone de Newton :

Etant donné une équation différentielle linéaire, on lui associe son polygone de Newton de la façon suivante :

Pour chaque monôme $x^j \frac{d^i y}{dx^i}$ apparaissant effectivement dans l'équation, on marque dans le demi-plan $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ le point de coordonnées $(i; j - i)$.

Le polygone de Newton est l'enveloppe convexe de la famille des deuxièmes quadrants de sommets chacun des points marqués.

Exemple 1

la singularité $(x_0 = 0)$ de l'équation (1) est de niveau 1

l'équation (1) est l'équation d'Euler :

$$x^2 y'' + y' = x \quad (1)$$

On lui associe l'équation homogène:

$$x^3 y''' + (x^2 + x) y'' + y' = 0 \quad (2)$$

Son polygone de Newton est marqué dans la figure 1.1:

Le degré de ramification p est facile à lire sur le polygone de Newton, c'est le p.p.c.m des dénominateurs des pentes non nulles des différents côtés de ce polygone, on les note par

$$k_1 < k_2 < \dots < k_v$$

Par convention si q_j est le polynôme nul alors $k_0 = 0$ (les degrés sont ceux de q_j pas de $q_j - q_l$).

Pour un côté d'une pente k_j de $N(D)$ (polygone de Newton) il y a un k_j polynôme caractéristique

Et il y a une correspondance entre les k_j racines caractéristiques et les polynômes ramifiés de niveaux k_j :

Plus précisément, pour chaque k_j -racine caractéristique α de multiplicité m , il y a m -polynômes ramifiés de la forme:

$$q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{i(\alpha)}{k_j x^j} (1 + o(x^{\frac{1}{p}})):$$

les nombres $\frac{j(\alpha)}{k_j}$ sont appelés k_j -constant caractéristique.

2.5 Phénomène de Stokes:

Les polynômes ramifiés q_j , jouent un rôle fondamental dans le phénomène de Stokes.

On dit que leurs degrés sont appelés les niveaux de D . Les directions pour lesquelles l'une des exponentielles e^q au moins est à décroissance maximale (le terme dominant de $1=x$ est réel négatif) sont appelées les directions anti-Stokes du système.

Celles pour lesquelles le terme dominant est purement imaginaire sont appelées les directions de Stokes.

Les directions de Stokes sont les directions en lesquelles se manifeste le phénomène de Stokes.

2.6 Espaces des Series Gevrey:

Soit une série formelle

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{G}_p[[x]]$$

Soient s et $C > 0$, il existe $K > 0$ tel que:

$$|a_n| < KC^{ns}(n!)^s; \quad \forall n \geq 0:$$

On dira que cette série est Gevrey d'ordre s et d'ordre précis (s, C) .

On notera:

$$C[[x]]_{s,C} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid \forall n \geq 0; \forall s \geq 0; \forall C > 0; |a_n| < K^n C^{ns} (n!)^s \right\}$$

On pose:

$$\begin{aligned} C[[x]]_s &= \bigcap_{C>0} C[[x]]_{s,C}, & C[[x]]_{(s)} &= \bigcup_{C>0} C[[x]]_{s,C} \\ C[[x]]_{s^+} &= \bigcup_{s>0} C[[x]]_{s^+}, & C[[x]]_{s^-} &= \bigcap_{s>0} C[[x]]_{s^-} \\ C[[x]]_{s,C^+} &= \bigcup_{C>0} C[[x]]_{s,C^+}, & C[[x]]_{s,C^-} &= \bigcap_{C>0} C[[x]]_{s,C^-} \end{aligned}$$

et

$$\hat{C} = C[[x]]_1 = \bigcap_{s>0} C[[x]]_s$$

Par convention $C[[x]] = C[[x]]_{+1}$

Pour tout $s > 0$, et C, D préserve les espaces Gevrey définis, sauf l'espace $C[[x]]_{s,C}$ en général ..

2.7 Developpements asymptotiques:

Il est bien connu que les solutions formelles de l'équation $Du = 0$ sont reliées aux solutions analytiques à travers un développement asymptotique.

On fait un éclatement réel du point zéro dans C , c'est-à-dire, en utilisant les coordonnées polaires $(\mu; \frac{1}{2})$.

On identifie:

$$C^0 = C \setminus \{0\} \text{ à } R = 2\pi \mathbb{Z} \cup [0; +1[$$

avec cette identification un secteur ouvert dans C est l'ensemble ouvert .

$$S = \{(\mu; f) \mid \mu_1 < \mu < \mu_2 \text{ et } 0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{2} \text{ g:}$$

Et un intervalle ouvert I de S^1 est $I =]\mu_1; \mu_2[$ de longueur $I =]\mu_1 \setminus \mu_2]$

On introduit maintenant sur S^1 les faisceaux suivants:

1) On désigne par A le faisceau des germes des fonctions analytiques ayant un développement asymptotique à l'origine:

pour tout $\mu \in S^1$, un germe de A à μ est défini par une fonction analytique sur un secteur ouvert

$S =]0; r[$ tq: $\mu \in \mathbb{C}$ et vérifiant:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\mu+1}} (f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^n) = 0$$

2) Pour tout s , $A_{(s)}$ est le sous-faisceau de A formé par les germes vérifiant localement la condition de développement asymptotique Gevrey d'ordre k :

$$\exists K, C > 0; \forall N \in \mathbb{N}; \forall x \in S; |f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^n| \leq K(N!)^s |x|^N C^N$$

Nécessairement:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C[[x]]_s$$

3) $A^{<0}$ est le sous faisceau de A formé par les germes plats (c'est-à-dire, germes de développement asymptotique nuls).

4) Pour tout $k > 0$, A^{-k} est le faisceau des germes des fonctions holomorphes vérifiant la condition des exponentielles croissantes d'ordre k à l'origine :

$$\exists K > 0; \exists A > 0; \forall f(x) \in A^{-k}; |f(x)| \leq K \exp\left(\frac{A}{|x|^k}\right)$$

* A^{-ik} est le faisceau des germes de fonctions holomorphes vérifiant la condition des exponentielles décroissantes d'ordre k à l'origine:

$$\exists K > 0; \exists A > 0; \forall f(x) \in A^{-ik}; |f(x)| \leq K \exp\left(-\frac{A}{|x|^k}\right)$$

5) On va encore utiliser les faisceaux A^{-k_i} et A^{-ik^+} définis comme suit: pour tout $k > 0$:

$$A^{-k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} A^{-k_i^2} \text{ est un sous faisceau de } A^{-k}.$$

Un germe $f \in A^{-k_i}_{\mu_0}$ si $\exists S$ contenant μ_0 ; $\exists \epsilon > 0$; $\exists K$ et $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in S, |f(x)| \leq K \exp\left(-\frac{C}{|x|^{k_i^2}}\right)$$

La définition de A^{-ik^+} est obtenue par le changement de k par $|x|^k$ et i^2 par -2 :

Notation 1

Etant donné un morphisme de faisceaux :

$$D: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$$

On note $\text{Coker}(D; \#)$ le faisceau Conoyau de D . et

$\ker(D; \#)$ est le noyau de D , par définition

$$\ker(D; \#) = \{y \in \mathbb{C}^n \mid Dy = 0\}:$$

C'est-à-dire, les solutions de D , donc on va le noter par $\text{Sol}(D; \#)$ au lieu de $\ker(D; \#)$.

Si $A^\#$ est l'un des faisceaux définis ci-dessus on écrit $V^\#$ au lieu de $\text{Sol}(D; \#)$ et on a l'égalité suivante:

$$V^\# \cdot i^k = \begin{cases} V^\# \cdot i^k & \text{si } k \leq k_1 \\ V^\# \cdot i^{k_{j+1}} & \text{si } k_j < k \leq k_{j+1} \\ 0 & \text{si } k > k_n \end{cases}$$

dans la suite on va poser $s = \frac{1}{k}$ et $s_j = \frac{1}{k_j}$

2.8 Théorèmes de bases : \ Cas où l'ordre k est donné

Théorème 3 de Borel-Ritt: (cf [M95], Thm1.1.4.1)

La suite de faisceaux sur S^1 :

$$0 \rightarrow A^{<0} \rightarrow A \xrightarrow{T} C[[x]] \rightarrow 0$$

est exacte, où T est la fonction de Taylor à l'origine.

Théorème 4 de Cauchy-Heine: (cf [M95], Thm1.3.2.1.i et ii)

L'application :

$$H^0(S^1; A^{<0}) \rightarrow H^1(S^1; A) :$$

Est l'application nulle.

$$H^1(S^1; A=A^{<0}) = C[[x]] :$$

En effet : d'après la suite exacte :

$$0 \rightarrow A^{<0} \rightarrow A \xrightarrow{T} C[[x]] \rightarrow 0$$

On a la bijection

$$A=A^{<0} \rightarrow C[[x]]$$

D'où:

$$H^0(S^1; A=A^{<0}) = H^0(S^1; C[[x]]) \quad \text{ou} \quad H^0(S^1; C[[x]]) = C[[x]]$$

D'où le résultat. $\square$

$$2. H^0(S^1; A^{<0}) = C[[x]] = C[x]$$

En effet, d'après la suite exacte précédente, on a la suite de cohomologie suivante:

$$0 \rightarrow H^0(S^1; A^{<0}) \rightarrow H^0(S^1; A) \rightarrow H^0(S^1; C[[x]]) \rightarrow H^1(S^1; A^{<0}) \rightarrow$$

$$H^1(S^1; A) \rightarrow H^1(S^1; C[[x]]) \rightarrow \dots$$

Et le théorème de Cauchy-Heine implique :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(S^1; A^{<0}) & \rightarrow & H^0(S^1; A) & \rightarrow & H^0(S^1; C[[x]]) & \rightarrow & H^1(S^1; A^{<0}) & \rightarrow & 0 \\ & & k & & k & & k & & & & \\ & & 0 & & C[x] & & C[[x]] & & & & \end{array}$$

D'où :

$$H^1(S^1; A^{<0}) = C[[x]] = C[x] \quad \square$$

Théorème 5 de Ramis-Sibuya: (cf [M95] Thm 2.1.4.2, cor 2.1.4.3 et 2.1.4.4.)

Pour tout $k > 0$, l'application :

$$H^1(S^1; A \cdot i^k) \rightarrow H^1(S^1; A_{(s)}):$$

est l'application nulle.

Un même raisonnement que le précédent donne les résultats suivants:

$$H^0(S^1; A_{(s)} = A \cdot i^k) = H^0(S^1; A = A \cdot i^k) = C[[x]]_s:$$

Et

$$H^1(S^1; A \cdot i^k) = C[[x]]_s = C[x]:$$

Théorème 6 principal d'existence du développement asymptotique:

Les suites de faisceaux sur S^1 :

$$0 \rightarrow V^{<0} \rightarrow A^{<0} \xrightarrow{D} A^{<0} \rightarrow 0:$$

Et $8k > 0$;

$$0 \rightarrow V^{<k} \rightarrow A^{<k} \xrightarrow{D} A^{<k} \rightarrow 0:$$

sont exactes.

La forme classique du théorème d'existence du développement asymptotique est:

Etant donné:

$\hat{f} \in C[[x]]$ (resp $C[[x]]_s$) tel que $D \hat{f} = 0$ et $\mu \in S^1$, alors il existe un secteur $V =]\epsilon]0; r[$ avec $\mu \in I$ et $f \in A(V)$ (resp $A_{(s)}(V)$) tel que :

$$Tf = \hat{f} \text{ et } Df = 0 \text{ sur } V:$$

De plus, il est toujours possible de choisir I centré en μ et de longueurs $\frac{1}{K_V}$.

Lemme 1 de Malgrange:

Pour tout $k > 0$,

$$H^1(S^1; A^{<k}) = 0.$$

Et la forme faible de lemme est :

$$H^1(S^1; A^{<k_i}) = 0:$$

Théorème 7 des bases "cas où le type c est donné":

On va définir les faisceaux $A^{<k;c^-}$ et $A^{<i;k;c^+}$

-Un germe de $A^{<k;c^-}$ est une fonction $f \in A^{<k;c^-}$ telle que ::

$\exists \delta =]\epsilon]0; r[$ un secteur ouvert et $\mu_0 \in I; \delta^2 > 0$ et $K > 0$ telle que:

$$\forall x \in \delta; |f(x)| \leq K \exp\left(\frac{C}{|x|^k}\right):$$

Un germe de $A^{<i;k;c^+}$ est une fonction $f \in A^{<i;k;c^+}$ telle que:

$\exists \delta =]\epsilon]0; r[$ un secteur ouvert et $\mu_0 \in I; \delta^2 > 0$ et $K > 0$ telle que:

$$\forall x \in \delta; |f(x)| \leq K \exp\left(\frac{C}{|x|^k}\right):$$

Les formes de base rappelés plus haut peuvent être remplacés par la proposition suivante :

Pour tout $k > 0$, $c > 0$ on a :

i) la suite:

$$0 \rightarrow A^{<k;c^+} \rightarrow A_{(s);(\frac{1}{c})} \xrightarrow{T} C[[x]]_{s;(\frac{1}{c})} \rightarrow 0 :$$

est exacte ou T est l'application de Taylor

ii) Pour tout $k > 0$, l'application :

$$H^1(S^1; A^{<k;c^+}) \rightarrow H^1(S^1; A_{(s);(\frac{1}{c})})$$

est nulle.

iii) Pour tout $k > 0$, les suites :

$$0 \rightarrow V^{<k;c} \rightarrow A^{<k;c} \xrightarrow{D} A^{<k;c} \rightarrow 0 :$$

Et $8k > 0$;

$$0 \rightarrow V^{<k;c^+} \rightarrow A^{<k;c^+} \xrightarrow{D} A^{<k;c^+} \rightarrow 0 :$$

sont exactes.

$$(iv) H^1(S^1; A^{<k;c}) = 0 :$$

Chapitre 3

Faisceau de Deligne $\hat{F}$:

Dans ce chapitre on va supposer que D est singulier à l'origine, et on remplace $f_0 g$ par le disque fermé X (D'après la lettre de Deligne à Ramis 01/86; la taille d'un point) et on muni X par un faisceau convenable qui nous permet de prendre en considération le taux de croissance ou décroissance des solutions de D dans Chaque direction autour de l'origine .

De plus, l'ensemble des sections globales de ce faisceau sur X est isomorphe à $C[x]$.

3.1 Le disque fermé X :(cf [D86])

X est l'espace topologique obtenu par la compactification de C par le cercle, c'est-à-dire, X est l'union de C^a et $S^1 \times [0; +1[$ ou C^a et $S^1 \times [0; +1[$ sont identifiées par les coordonnées polaires ([D.86]).

$\forall k > 0$; $B(0; k)$: le disque ouvert de rayon k et de centre 0

$\bar{B}(0; k)$: la fermeture de $B(0; k)$.

3.2 Le faisceau $\hat{F}$ sur X :

$\hat{F}$ est le faisceau correspond au préfaisceau F défini par :

$$\begin{aligned} \forall k > 0, F(B(0; k)) &= C[[x]]_s \quad s = \frac{1}{k} \\ \forall I \text{ intervalle de } S^1 \text{ et } \forall k, k'; 0 < k < k': \\ F(I \times]k; k']) &= H^0(I; A \cdot k' = A \cdot i^k) \\ F(I \times]k; 1]) &= H^0(I; A \cdot k) \end{aligned}$$

$\hat{F}$ est un faisceau de $\mathbb{C}$ -algèbre, telle que:

La fibre au dessus de 0 de $\hat{F}$: $\hat{F}_0 = \mathbb{C}[[x]]$

La restriction au cercle $S^1 \in \text{fk g}$ de $\hat{F}$ est :

$$\hat{F}_{jS^1 \in \text{fk g}} = A \cdot k^i = A \cdot i k^+ :$$

De plus:

$$H^0(X; \hat{F}) = \mathbb{C} \text{ f x g}$$

$$8k = \frac{1}{s} > 0: H^0(B(0; k); \hat{F}) = \mathbb{C}[[x]]_{s^+}$$

$$8k = \frac{1}{s} > 0: H^0(\dot{B}(0; k); \hat{F}) = \mathbb{C}[[x]]_{s^i}$$

Avec $\hat{F}$ on va prouver, en particulier, les théorèmes d'indices de D dans les espaces $\mathbb{C}[[x]]_{s^+}$, $\mathbb{C}[[x]]_{s^i}$ et $\mathbb{C} \text{ f x g}$:

3.3 Une section typique de $\hat{F}$: $\exp(q(\frac{1}{x}))$:

L'ensemble de définitions de la fonction $\exp(q(\frac{1}{x}))$ comme étant une section de $\hat{F}$ quand $\deg q = k$ est un entier (voir Fig2.1)

Le disque $B(0; k)$ est partitionné en des secteurs, un secteur : quand $\exp q$ est égal à 0 et l'autre quand $\exp q$ n'est pas définie.

Le support de $\exp q$ est exactement l'intersection de son ensemble de définition avec $X \cap B(0; k)$.

1- Un secteur (resp. tore) est un sous-ensemble de X de la forme $I \in [\ell; k)$ (resp. $S^1 \in [\ell; k)$).

2- Un multisecteur est une réunion finie non disjointe d'un disque centre à l'origine et des secteurs S_j de la forme:

$$I_j \in [\ell_j; k_j)$$

vérifiant les conditions:

$$I_{j+1} \supset I_j \text{ et } \ell_j \leq \ell_{j+1} \leq k_j \leq k_{j+1} \leq 8j:$$

3.4 L'action de D sur la cohomologie de $\hat{F}$:

Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant :

Figure 3-1:

Les applications lineaires suivantes:

$$D : H^i(U; \hat{F}) \rightarrow H^i(U; \hat{F}) \quad \forall i \geq 1$$

Sont des isomorphismes quand U est un disque, un secteur, un multisecteur ou un tore.

La preuve se fait comme suit:

En utilisant l'algèbre homologique élémentaire et des propriétés de base du faisceau $\text{Coker}(D; \hat{F})$; on réduit le problème aux conditions du corollaire 2-7, qu'on va le prouver en utilisant les recouvrements acycliques pour $\text{Sol}(D, \hat{F})$.

Avant de retourner à la preuve du théorème 2-1, on montre l'existence du recouvrement acyclique qui est utilisé dans la preuve.

3.5 Acyclicité pour $\text{Sol}(D, \hat{F})$:

Rappelons que si le $N^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de U est nul, on dit que U est acyclique en degré N .

Si U est acyclique pour tout n , on dit qu'il est acyclique.

* Un petit disque est un disque B centré à l'origine qui est soit ouvert ou fermé inclus dans $B(0; k_1)$

* Un secteur étroit est un secteur $I \in [\ell, k)$ contenu dans un secteur $J \in [0; +1]$ ou $|J| = \frac{1}{k_v}$

On va maintenant prouver que les petits disques et les secteurs étroits sont acycliques pour $\text{Sol}(D; \hat{F})$ et la preuve est basée sur l'existence d'un isomorphisme de faisceaux entre $\text{Sol}(D; \hat{F})$ et $\text{Sol}(\tilde{D}; \hat{F})$

Où $\tilde{D}$ est la forme normale de D .

Propriétés de $\text{Sol}(D, \hat{F})$:

* Dans X ; $\text{Sol}(D; \hat{F})_{j \in S^1 \in f+1g} = V$

Car: $D: A \cdot k_j \rightarrow A \cdot k_{j+1}$ est surjective (cf[Mal])

D'où: $8 k \in 0$

$$\text{Sol}(D; A \cdot k_j = A \cdot i k_j) = V \cdot k_j = V \cdot i k_j \quad 8 k_j; 0 < k_j < k$$

Et:

$$\text{Sol}(D; A \cdot k_i = A \cdot i k_i^+) = V \cdot k_i = V \cdot i k_i^+ :$$

Donc, la restriction de $\text{Sol}(D; \hat{F})$ au cercle $S^1 \in fkgk \in 0$

est:

$$\text{Sol}(D; \hat{F})_{j \in S^1 \in fkg} = \begin{cases} V \cdot k_j = V \cdot i k_{j+1} & \text{si } k_j < k < k_{j+1} \\ V \cdot k_{j+1} = V \cdot i k_{j+1} & \text{si } k = k_j \end{cases}$$

Par convention, $k_0 = 0; k_{v+1} = +1$ et $V \cdot i k_{v+1} = 0$.

De plus:

$$\begin{aligned} & H^0(I \in]k; k[; \text{Sol}(D; \hat{F})) = H^0(I, V \cdot k / V \cdot i k) \\ & : \\ & H^0(I \in]k; +1[, \text{Sol}(D; \hat{F})) = H^0(I, V \cdot k) \end{aligned}$$

Lemme 2 :

Soit U un petit disque ou un secteur, $\tilde{D}$ la forme normale de D , alors:

les faisceaux $\text{Sol}(D, \hat{F})$ et $\text{Sol}(\tilde{D}, \hat{F})$ sont isomorphes sur $\text{Unf}0g$.

L'isomorphisme est sur $\text{Unf}0g$, car 0 est une singularité de D . ou la transformation de D à $\tilde{D}$ est méromorphe.

A cause de la transformation méromorphe, il est équivalent de considérer le système compagnon de D avec matrice fondamentale de la solution formelle $\hat{F}^{\mathcal{V}}$ ou $\hat{F} \in GL(n; \mathbb{C})$ et $\mathcal{V} = x^{L_e Q(\frac{1}{x})}$:

Dans le cas d'un secteur U , choisir une détermination de l'argument de x dans V et une évaluation asymptotique F de $\hat{F}$ pour U , alors l'application $V \ni ! FV$ est l'isomorphisme entre $\text{Sol}(D; \hat{F})$ et $\text{Sol}(\hat{D}; \hat{F})$:

Dans le cas d'un petit disque U , localement, c'est-à-dire, sur un secteur V l'application précédente est un isomorphisme mais maintenant le support de l'ème colonne de V et FV est vide dès que $q_l \neq 0$. De plus quand $q_l = 0$ la l'ème colonne $\hat{F}^{(l)}$ du $\hat{F}$ est dans $C_{s_1}^+$ ([MR 92].4). D'une manière équivalente définit une section globale de F^n sur U et l'application

$$V \ni ! \hat{F}V$$

fournit l'isomorphisme. $\square$

i) Quand $U = I \in [\ell, k)$ est un secteur, l'application:

$$H^0(I \in [\ell, +1]; \text{Sol}(D; \hat{F})) \ni ! H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$$

est surjective.

ii) Quand U est un petit disque:

$$H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = \ker(D; C):$$

i) Conséquence directe du lemme

ii) $H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ est formé par les solutions formelles méromorphe de D par conséquent, il est formé par les solutions formelles méromorphe qui peuvent être prolongés à l'origine d'où le résultat. $\square$

Proposition 1 : (Acyclicité):

Soit U un secteur ou un petit disque alors:

$$H^i(U; \text{Sol}(D; F)) = 0 \quad \forall i \geq 1$$

Une application du proposition 6-3 [Ive] donne le résultat

.

3.6 Preuve du Théorème principal:

On considère les suites exactes des faisceaux:

$$(1) 0 \ni ! \text{Sol}(D; \hat{F}) \ni ! \hat{F} \xrightarrow{D} F \ni ! \text{Coker}(D; \hat{F}) \ni ! 0$$

et on le décompose sous la forme:

$$(2) 0 \rightarrow \text{Sol}(D; \hat{F}) \rightarrow \hat{F} \xrightarrow{D} \text{Im}(D; \hat{F}) \rightarrow 0:$$

Et

$$(3) 0 \rightarrow \text{Im}(D; \hat{F}) \xrightarrow{i} \hat{F} \rightarrow \text{Coker}(D; \hat{F}) \rightarrow 0:$$

La correspondance des suites de groupe de cohomologie nous donne:

$$(4) 0 \rightarrow H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) \rightarrow H(U; \hat{F}) \xrightarrow{D} H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \hat{F}) \xrightarrow{D} H^1(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) \rightarrow H^2(U; \hat{F}) \xrightarrow{D} H^2(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow 0:$$

Et

$$(5) 0 \rightarrow H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^1(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^1(U; \hat{F}) \rightarrow H^1(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow H^2(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^2(U; \hat{F}) \rightarrow H^2(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow 0:$$

Pour simplifier l'écriture de ces suites, on utilise le lemme suivant:

i) $\text{Coker}(D; \hat{C}) = \text{Coker}(D; C[[x]]); \hat{C} = C[[x]]_1$:

ii) Le support du faisceau $\text{Coker}(D; \hat{F})$ est dans f_0 :

iii) Soit $U \subset X$, si $0 \in U$ Alors:

$$H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) = \text{Coker}(D; C[[x]]):$$

iv) $U \subset X$: d'application :

$$H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})):$$

est surjective.

v) Les applications :

$$H^1(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^1(U; \hat{F})$$

$$H^2(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \xrightarrow{i} H^2(U; \hat{F})$$

sont des isomorphismes.

i) Par passage à la limite inductive:

$$\text{Coker}(D; \hat{C}) = \varinjlim_{s \geq 0} \text{Coker}(D; C[[x]]_s):$$

Et il est suffisant de prouver que :

$$(6) \quad \varinjlim_{s \geq 1} \text{Coker}(D; C[[x]]_s) = \text{Coker}(D; C[[x]]):$$

Plus précisément: on applique le lemme de serpent à la suite exacte:

$$0 \rightarrow C[[x]]_s \rightarrow C[[x]] \rightarrow C[[x]]/C[[x]]_s \rightarrow 0:$$

$$D \downarrow \quad D \downarrow \quad D \downarrow$$

$$0 \rightarrow C[[x]]_s \rightarrow C[[x]] \rightarrow C[[x]]/C[[x]]_s \rightarrow 0:$$

D'où:

$$0 \rightarrow \ker(D; C[[x]]_s) \rightarrow \ker(D; C[[x]]) \rightarrow \ker(D; C[[x]] = C[[x]]_s) \rightarrow 0 \\ \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]]_s) \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]]) \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]] = C[[x]]_s) \rightarrow 0:$$

Pour vérifier (6) il suffit de montrer que :

$$(a) \ker(D; C[[x]] = C[[x]]_s) = 0$$

$$(b) \operatorname{Coker}(D; C[[x]] = C[[x]]_s) = 0 \quad s_0, s_1$$

Pour cela on applique le lemme du serpent à la suite exacte:

$$0 \rightarrow C[[x]]_s = Cfxg \rightarrow C[[x]] = Cfxg \rightarrow C[[x]] = C[[x]]_s \rightarrow 0:$$

D'où:

$$(7) 0 \rightarrow \ker(D; C[[x]]_s = Cfxg) \rightarrow \ker(D; C[[x]] = Cfxg) \rightarrow \ker(D; C[[x]] = C[[x]]_s) \rightarrow 0 \\ \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]]_s = Cfxg) \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]] = Cfxg) \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]] = C[[x]]_s) \rightarrow 0:$$

On a

$$\operatorname{Coker}(D; C[[x]] = Cfxg) = 0 \text{ (d'après le théorème 1.4.1 M74)}$$

Donc $\operatorname{Coker}(D; C[[x]] = C[[x]]_s) = 0$ d'où (b) et d'après ([MR92] 4.iv) on a :

$$s_0, s_1 :$$

$$\ker(D; C[[x]]_s = Cfxg) \rightarrow \ker(D; C[[x]] = Cfxg)$$

est bijective.

Donc la suite (7) devient:

$$0 \rightarrow \ker(D; C[[x]] = C[[x]]_s) \rightarrow \operatorname{Coker}(D; C[[x]]_s = Cfxg) \rightarrow 0$$

On considère la suite de cohomologie correspondante à la suite du théorème principal d'existence du développement asymptotique:

$$0 \rightarrow V \cdot i^k \rightarrow A \cdot i^k \rightarrow A \cdot i^k \rightarrow 0$$

Et de la conséquence du théorème du Borel-Ritt

$$H^1(S^1; A \cdot i^k) = C[[x]]_s = Cfxg$$

On tire :

$$\operatorname{Coker}(D; C[[x]]_s = Cfxg) = 0:$$

D'où le résultat.

ii) C'est la conséquence directe du théorème principal d'existence du développement asymptotique.

$$ii) U \times \frac{1}{2} X \text{ tel que } 0 \leq U$$

D'après ii) , $H^0(U; \operatorname{Coker}(D; \hat{F})) =$ la $\bar{\mathbb{Q}}$ -base de $\operatorname{Coker}(D; \hat{F})$ au dessus de 0.

Et d'après (i):

$$H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) = \text{Coker}(D; C[[x]]):$$

iv) D'après ([M74], théorème 1.4.1) on a:

$$H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) = \text{Coker}(D; C[[x]])$$

Alors: $\text{Coker}(D; C[[x]])$ qui est $H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F}))$ a son représentant dans Cf_{XG} donc dans $H^0(U; \hat{F})$ (car $H^0(X; \hat{F}) = Cf_{\text{XG}}$)

v) Dans la suite exacte (5)

$H^1(U; \text{Coker}(D; \hat{F}))$ et $H^2(U; \text{Coker}(D; \hat{F}))$ sont nuls puisque le support de $\text{Coker}(D; \hat{F})$ contient au maximum un seul point . et la suite (5) devient la suite suivante :

$$0 \rightarrow H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^1(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \hat{F}) \rightarrow H^1(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow$$

k

0

$$\rightarrow H^2(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^2(U; \hat{F}) \rightarrow H^2(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow 0$$

k

0

D'où le résultat.

D'après le lemme précédent et les deux suites exactes (5) et (4) on peut énoncer le résultat suivant :

Les applications linéaires:

$$D : H^i(U; \hat{F}) \rightarrow H^i(U; \hat{F}) \quad i = 1, 2$$

sont des isomorphismes si et seulement si :

(i) Le morphisme de connexion $\pm : H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ est surjectif.

$$(ii) H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0$$

On va maintenant vérifier que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites.

$$\text{Le morphisme de connexion } \pm : H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})):$$

$\pm$ est une application surjective quand U est un disque ou multisecteur et quand U est un tore ou un grand secteur d'après la proposition 2.8

Si U est un disque ou un multisecteur, alors le morphisme de connexion.

$$\pm : H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$$

est surjectif.

Soit $[f]$ une classe de cohomologie dans $H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ et $U = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} U_j$, $U_j = I_j \times [0; \frac{1}{2})$ tel que $0 \in U_j$ et l'intersection de chaque triplet de secteurs est $f_0 g$; ce recouvrement est acyclique pour $\text{Sol}(D; \hat{F})$

La classe de cohomologie $[f]$ peut être représentée comme un 1-cocycle $f = (f_{j,j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ sur U

Pour prouver la proposition, il suffit de trouver une famille $(g_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $g_j \in H^0(U_j; \hat{F})$, $j \in \mathbb{Z}$ tel que :

(i) La section locale $h_j = Dg_j$ est une partition de la section globale $h \in H^0(U; \hat{F})$

(ii) Le 1-cocycle $(g_j, g_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ est cohomologue à un 1-cocycle f dans $H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$

Rappelons que deux 1-cocycles sont dits cohomologues s'il existe une 0-cochaîne $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$f_{i,j} = C_i g_{i,j} C_j^{-1} \quad \forall i, j$$

On va vérifier d'abord que f est cohomologue à un 1-cocycle $' = ('_{j,j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$'_{f_0 g} = 0:$$

En effet la restriction $(f_{j,j+1} = f_0 g)$ est un 1-cocycle de $H^1(f_0 g; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ qui est trivial

alors il existe des séries f solutions de l'équation $Du = 0$ telles que :

$$f_{j,j+1} = f_{j+1} - f_j \quad \forall j$$

Le théorème principal nous permet de prolonger f_j par un élément f_j de $H^0(I_j \times [0; 1]; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ (coro 2.4)

On pose le 1-cocycle :

$$'_{j,j+1} = f_{j,j+1} + f_j - f_{j+1} \quad \text{sur } U_{j,j+1}$$

$'_{j,j+1}$ est cohomologue à $f_{j,j+1}$:

Maintenant, pour tout j , on prolonge f en un élément de $H^1(I_j \times [0; 1]; \text{Sol}(D; \hat{F}))$

Et on considère leur restriction à $I_j \times [1; 2]$ qui fournit un 1-cocycle de $H^1(I_j; V^{<0})$ (acyclicite) donc forcément de $H^1(I_j; A^{<0})$ par Cauchy-Heine, il existe $g_j \in H^0(I_j; A)$ telle que :

$$f_{j,j+1} = i g_j + g_{j+1}$$

On note donc g_j l'élément de $H^0(U, \hat{F})$ et soit $h_j = Dg_j$; ce qui termine la preuve

■

Si U est un tore ou un secteur large l'application :

$$\pm : H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$$

est surjective.

Dans le cas d'un secteur ou d'un disque, on fait le même raisonnement que la preuve précédente.

On suppose maintenant que U est un tore $S^1 \in [k; k]$ (pas un disque), soit U un recouvrement 2-élevé de U :

Rappelons qu'un recouvrement est dit 2-élevé si l'intersection de chaque triplet secteurs est vide.

Soit $[f]$ une classe de cohomologie représentée par un 1-cocycle de $H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$

La restriction de ce cocycle à $I_j \in f + 1 g$ définit un 1-cocycle de $H^1(S^1; A^{k_i})$ qui est trivial (prop 1.1 (iv));

Donc

$$f_{j,j+1} = i g_j + g_{j+1} \quad ; g_j \in H^0(I_j; A^{k_i})$$

Et alors :

$$g_j \in H^0(U, \hat{F}) \quad : \blacksquare$$

3.7 Nullité du second groupe de Cohomologie $H^2(U, \text{Sol}(D, \hat{F}))$:

Si U est un disque, un multisecteur, un secteur ou un tore ; alors:

$$H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0:$$

On a vu que les petits disques et les secteurs sont acycliques pour $\text{Sol}(D, \hat{F})$.

Si U est un secteur, multisecteur ou un tore qui ne contient pas 0, U admet un recouvrement 2-élevé U par des petits secteurs fermés, par le théorème de Leray ([God] Cor du Théorème 5.2.4) on a

$$H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0:$$

Si U est un disque ou multisecteur qui ne contient pas zéro, on prend un recouvrement U par des petits secteurs fermés qui contiennent le zéro et qui est 2-élevé dans sa

restriction à $U \cap f_0^{-1}(g)$.

La restriction à $f_0^{-1}(g)$ d'un 2-Cocycle $f_{1,0}$ de $H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ est un 2-Cocycle de $H^2(f_0^{-1}(g); \text{Sol}(D; \hat{F}))$ qui est trivial, et alors il existe des solutions formelles $\hat{f}_{1,1}$ de $Du = 0$ telles que :

$$f_{1,0} = \hat{f}_{1,1} + \hat{f}_{1,0} + \hat{f}_{0,1} \quad \text{sur } U_1 \setminus U_1 \cup U_0$$

Soit $f_{1,1}$ le relèvement asymptotique de $\hat{f}_{1,1}$ sur $U_1 \setminus U_1$

Alors $(f_{1,0})$ est un Cobord d'un 1-Cocycle $(f_{1,1})$ de $H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ cela prouvera que $H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0$

Et le théorème de Leray implique que $H^2(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0$

D'où la fin de la preuve du théorème principal. $\square$

3.8 les gros points singuliers et quelques remarques:

Parmi les sous ensembles de X ayant un rapport important avec D , il y a les gros points singuliers et les multisecteurs construits sur ces derniers. Ils sont définis comme suit :

Définition 1 :

1- Un k -gros point dans x est un arc $I \in f_k^{-1}(g)$ où I est un intervalle fermé de longueur $\frac{1}{k}$. Il est dit de support le polynôme $q(\frac{1}{x^k}) = \frac{a}{x^k}(1 + o(x^{\frac{1}{p}}))$ de degré k s'il est centré en une direction anti-Stokes de q . dans le cas sans ramification $p \geq 2$, cela signifie que $\theta \in S^1$ est tel que $ae^{ik\theta}$ est réel négatif.

2- un $(k_1; k_2; \dots; k_r)$ -multisecteur est un multisecteur

$$U = B(0; k) \left[\bigcup_{j=1}^r (I_j \in [0; k_{j+1}[) \mid (I_0 \in [0; +1]) \right]$$

Où, pour tout $j, I_j \in f_{k_j}^{-1}(g)$ est un k_j gros point et les intervalles $[0; k_{j+1}[$ sont ouverts dans $[0; +1]$

3- Un sous ensemble U de X est dit générique pour q s'il ne contient pas un gros point de support q , il est dit générique pour D , s'il est générique pour tout les $q_j; j = 1 \dots r$

Dans le cas contraire, il est dit singulier pour q ou pour D :

4- un $(k_1; \dots; k_v)$ -multisecteur est dit fortement générique pour D s'il est générique pour D et pour tout $q_j \mid q_l \quad j = 1 \dots v$ de degré $\deg q_l$:

1. Les gros points singuliers de D sont comptés avec leurs multiplicités comme les polynômes $q_j; j = 1 \dots v$ et ils sont des invariants formels de D

2. Soit $k = (k_1; \dots; k_v)$ et U un k -multisecteur dans X

une k -multisomme $(f_1; \dots; f_v)$ des séries f dans $(I_1; \dots; I_v)$ au sens de [MR92] (définition 2-2) induit un élément de $H^0(U; \hat{F})$

3. En utilisant le théorème principal d'existence d'un développement asymptotique on a prouvé que les petits disques les secteurs étroits sont acycliques pour $\text{Sol}(D; \hat{F})$

Ce résultat n'est pas le plus important, mais il est suffisant pour l'application à nos théorèmes d'indice. Et en utilisant l'existence des multisommes des solutions on va vérifier maintenant que l'isomorphisme du lemme 2.3 et alors l'acyclicité de la proposition 2.5 sont vrais quand U est fortement générique (k -multisecteurs). On insiste sur le fait qu'on n'a pas besoin d'une amélioration dans l'application aux théorèmes d'indice.

4. Les k -multisecteurs génériques sont acycliques pour $\text{Sol}(D; \hat{F})$, et les gros points singuliers ne sont pas acyclique pour $\text{Sol}(D; \hat{F})$. Plus précisément

$$\dim H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = \# \text{fl} = U \text{ est le support de } q_l g:$$

Définition 2

On appelle cette quantité $(\dim H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})))$ la multiplicité de U par rapport à D :

Soit U un multisecteur fortement générique et D la forme normale de D . , alors les faisceaux $\text{Sol}(D; \hat{F})$ et $\text{Sol}(D; \hat{F})$ sont isomorphes sur $U \ni f \circ g$:

Preuve. ■

Le même procédé que dans le lemme 2-3 est utilisé.

Si $q_l = 0$ alors $\hat{F}^{(l)}$ est $(k_1; \dots; k_v)$ -multisommable et elle a un développement asymptotique sur n'importe quel multisecteur générique pour $q_1; \dots; q_n$, et en particulier, un relèvement $F^{(l)}$ sur U

D'où le résultat demeure vrai , en remplaçant $q_1; q_2; \dots; q_n$ par $q_1 \mid q_l; q_2 \mid q_l; \dots; q_n \mid q_l$:

Le multisecteur U sera fortement générique et il existe un multisecteur $U_1 \subset U$, égal à U sur $X \setminus B(0; k_j)$ et générique pour $q_1, \dots, q_n$.

On note F l'élévation de $F^{(1)}$ sur U_1 prolongée par 0 sur U et par F la matrice $[F^{(1)}, \dots, F^{(n)}]$.

L'application $Y \mapsto FY$ est l'isomorphisme entre $\text{Sol}(D; \hat{F})$ et $\text{Sol}(D; \hat{F})$.

Chapitre 4

Application aux théorèmes d'indices:

Dans ce chapitre , on va appliquer les propriétés précédentes du faisceau $\hat{F}$ pour prouver les théorèmes d'indices de D agissant sur le groupe de cohomologie $H^0(U; \hat{F})$ quand U est secteur , un multisecteur, un disque ou un tore qui contient le cas d'un arc, en particulier , les gros points.

Le calcul des indices est fait comme suit: on calcul les indices de D dans le cas des petits disques et secteurs étroites où le calcul est facile et après on déduit le cas général de U par la technique de Mayer -Vietoris et l'isomorphisme 2.1.

4.1 Théorème d'indice:

4.1.1 Théorème général d'indice:

Soit U un disque, un secteur, un multisecteur ou un tore, alors D est à indice sur $H^0(U; \hat{F})$ et :

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \dim H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) - \dim H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) + \dim H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})).$$

Rappelons que:

$$H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) = \begin{cases} 8 & \text{si } 0 \not\supseteq U \\ < 0 & \text{si } 0 \supseteq U \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{Coker}(D; C[[X]]) & \text{si } 0 \supseteq U \end{cases}$$

On appliquons les propositions 2.8, 2.9 et le lemme 2.6 aux suite exactes (4) et (5).

On obtient les suites exactes:

$$0 \rightarrow H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) \rightarrow H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) \rightarrow 0:$$

et

$$0 \rightarrow H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow 0:$$

Les espaces $H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ et $H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F}))$ sont de dimension finie (cf proposition 2.5)

De plus $H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F}))$ est soit 0, soit $\text{Coker}(D; C[[x]])$

Donc D est μ -indice et en utilisant l'additivité de la composition des opérateurs pour l'indice, on obtient:

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) + \hat{A}(H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^0(U; \hat{F})):$$

La suite (4) implique:

$$\hat{A}(D; H^0(D; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F}))) = \dim H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) - \dim H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})):$$

et la suite (5) implique:

$$\hat{A}(D; H^0(U; \text{Im}(D; \hat{F})) \rightarrow H^0(U; \hat{F})) = -\text{Codim}(i) = -\dim H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})):$$

Le reste de cette partie est consacré au calcul de ces indices en termes d'invariants formels

de D : C'est-à-dire en fonction des gros points Singulier de D .

4.1.2 Indice sur des petits disques ouverts:

Soit $k = \frac{1}{s}$ et $k_1 = \frac{1}{s_1}$ et soit $U = B(0; k)$ un disque ouvert de rayon k centré à l'origine

Alors :

$$H^0(U; \hat{F}) = C[[x]]_{s^+} \text{ et } \hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \hat{A}(D; C[[x]])$$

De plus:

$$\text{Ker}(D; C[[x]]_{s^+}) = H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = \text{ker}(D; C[[x]])$$

$$\text{Coker}(D; C[[x]]_{s^+}) = H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) = \text{Coker}(D; C[[x]])$$

Dans ce cas, $H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0$ (cf Proposition 2.5) et les deux suites exactes précédentes

seront:

$$(6) \quad 0 \rightarrow H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) \rightarrow H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \hat{F}) \rightarrow H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{cc} k & k \\ C[[x]]_{s^+} & C[[x]]_{s^+} \end{array}$$

De plus, $H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = \ker(D; C[[x]])$ (Corollaire 2.4)

et

$$\text{Coker}(D; C[[x]]) = H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F})) \quad (\text{Lemme 2.6(ii)})$$

De la même manière, on considère les petits disques fermés.

4.1.3 Indices sur de petits disques fermés :

Soit $k = \frac{1}{s} < k_1 = \frac{1}{s_1}$ et soit $U = \bar{B}(0; k)$ un disque fermé de rayon k centré à l'origine, alors:

$$H^0(U; \hat{F}) = C[[x]]_{s_i} \quad \text{et} \quad \hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \hat{A}(D; C[[x]])$$

De plus:

$$\begin{aligned} \ker D; C[[x]]_{s_i} &= H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = \ker(D; C[[x]]) \\ \text{Co ker}(D; C[[x]]_{s_i} &= H^0(U; \text{Co ker}(D; \hat{F})) = \text{Co ker}(D; C[[x]]) \end{aligned}$$

Rappelons que $\hat{A}(D; C[[x]])$ est donné dans [M74] par:

L'application $D: C[[x]] \rightarrow C[[x]]$ est à indice et on a:

$$\hat{A}(D; C[[x]]) = \sup_i (i \cdot \nu(a_i))$$

ou ν est la valuation discrète de $C[[x]]$ (cf Appendice)

4.1.4 Indice sur un secteur étroit:

Soit U un secteur étroit et $\bar{D}$ la forme normale de D ,

Alors:

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \dim H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})):$$

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \# f_j = \deg q_j < \mathbb{N}g + \# f_j / \deg q_j \in [\mathbb{N}, k] \text{ et } \exp q_j \text{ est plate sur } I_g$$

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \# f_j = \deg q_j < \mathbb{N}g + \# f_k \text{-gros points singuliers de } D \text{ dans } U_g$$

Dans ce cas on a aussi $H^1(U, \text{Sol}(D; \hat{F})) = 0$, De plus, $H^0(U, \text{Coker}(D; \hat{F})) = 0$.
(Lemme 2.6.ii) et $\text{Sol}(D; \hat{F})$ est isomorphe à $\text{Sol}(\bar{D}; \hat{F})$ (Lemme 2.3), alors: le théorème 3.1 implique la première égalité.

La deuxième égalité est obtenue par le calcul des solutions non nuls définies sur U .

Donc :

$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \sum_j f_j / \deg q_j < \mathbb{N}g + \sum_j f_j / \deg q_j \in [\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ et $\exp q_j$ est plate sur Ig

Et d'après la définition 1.4.4 [MR 94] on a

$$\begin{aligned} \sum_j f_j / \deg q_j \in [\mathbb{N}, \mathbb{N}] \exp q_j \text{ est plate sur } Ig \\ = \sum_j f_j / \deg q_j \in [\mathbb{N}, \mathbb{N}] \text{ et } \operatorname{Re}(ae^{i k \mu}) < 0 \text{ sur } Ug \\ = \# \text{fk-gros points singulier sur } Ug \end{aligned}$$

Dans la suite on déduit l'indice de D pour des grands ensembles U par les résultats précédentes et la technique de Mayer-Vietoris:

4.1.5 Technique de Mayer-Vietoris:

Soit $U = U_1 \cup U_2$ ou U_1, U_2 sont ouverts ou fermés dans U

Si D est un isomorphisme sur $H^i(U; \hat{F}), H^i(U_j; \hat{F}), H^i(U_1 \setminus U_2; \hat{F})$ pour $i \geq 1$ et $j=1,2$ et D est p -indice sur $H^0(U_1; \hat{F})$ et $H^0(U_2; \hat{F})$ et dans $H^0(U_1 \setminus U_2; \hat{F})$: alors est p -indice sur $H^0(U; \hat{F})$ et:

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \hat{A}(D; H^0(U_1; \hat{F})) + \hat{A}(D; H^0(U_2; \hat{F})) - \hat{A}(D; H^0(U_1 \setminus U_2; \hat{F}))$$

On écrit la suite de Mayer-Vietoris de Cohomologie ([Ive] proposition 5.6 et 5.10)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(U; \hat{F}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^2 H^0(U_j; \hat{F}) \rightarrow H^0(U_1 \setminus U_2; \hat{F}) \rightarrow H^1(U; \hat{F}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^2 H^1(U_j; \hat{F}) \rightarrow \\ H^1(U_1 \setminus U_2; \hat{F}) \rightarrow H^2(U; \hat{F}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^2 H^2(U_j; \hat{F}) \rightarrow H^2(U_1 \setminus U_2; \hat{F}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et on applique l'additivité de la caractéristique d'Euler.

Le lemme suivant est utile pour le cas ramifié. On considère une deuxième copie $X^t, F^t, \dots$ de X, F (resp. $\mathbb{D} = \mathbb{A}^1 / \mathbb{D}$) le relèvement de D (resp. $\mathbb{D}$) par le relèvement p -feuille ramifié

$$\mathbb{A}^1: X^t \rightarrow X; \quad t \mapsto x = t^p$$

4.1.6 Ramification:

Soit U un secteur étroit qui ne contient pas l'origine, Alors D^t est p -indice sur $\mathbb{A}^{i-1}(U)$ variant :

$$\hat{A}(D^t; H^0(\mathbb{A}^{i-1}(U); \hat{F}^t)) = p \hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}))$$

Dans ce cas, $\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \dim H^0(U; \operatorname{Sol}(\mathbb{D}; \hat{F}))$

L'image inverse $\mathbb{A}^{i-1}(U)$ de U est une réunion disjointe de p secteurs étroits U^i , $i = 1, \dots, p$

$$\hat{A}(D^t; H^0(\frac{1}{2}i^1(U); \mathbb{F}^t)) = \sum_{i=1}^P \dim H^0(U^i; \text{Sol}(D^t; \mathbb{F}^t))$$

Ce résultat est obtenue du fait que $\frac{1}{2}$ est un isomorphisme entre $\text{Sol}(D^t; \mathbb{F}^t)_{j_{U^i}}$ et $\text{Sol}(D; \mathbb{F})_{j_U}$ pour tout i .

4.1.7 Indice sur le tore:

Soit $0 < k \leq k_0 + 1$ et $U = S^1 \times [k; k_0]$ un tore, alors :

$$\hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F})) = \sum_{k_j \in [k; k_0]} k_j \# \text{fl} = \deg q_1 = k_j g$$

$\hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F})) = \# \text{fgros points singulier de } D \text{ dans } U \text{ comptés avec leur multiplicité}$

En particulier, si U est générique, $\hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F})) = 0$ et si $U = S^1 \times [k; +1]$ Alors:

$2\hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F}))$ est la variation de la fonction:

$$\mu_i = \dim V_{\mu}^{i, k}$$

Soit $U = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} U_z$ un recouvrement 2-né de U par un secteur étroit.

Le lemme de Mayer-Vietoris appliqué par récurrence sur U_z (Lemme 3.5) nous donne:

$$(7) \quad \hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F})) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \hat{A}(D; H^0(U_z; \mathbb{F})) - \hat{A}(D; H^0(U_z \cup U_{z+1}; \mathbb{F})).$$

Il y a plus de U_z que des $U_z \cup U_{z+1}$; donc si U est générique c'est-à-dire quand D n'a pas des niveaux dans $[k; k_0]$ la proposition 3.4 implique

$$\hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F})) = 0:$$

Si il existe un unique niveau $k_j \in [k; k_0]$ le calcul se fait comme suit :

On suppose que k_j est un entier et on considère les gros points singuliers $A_i; i = 1, \dots, k_j$ du

polynôme q_1 de degré k_j . Pour chaque A_i on considère l'intervalle non vide $I_{j,i} = U_j \setminus A_i$: La fonction $\exp q_1$ est plate sur $I_{j,i} \setminus I_{j,i+1}$ que sur $I_{j,i}$, elle nous donne $(j+1)$ la valeur de l'indice sur chaque k_j points singuliers.

Si maintenant $k_j = \frac{j}{p}$; le lemme 3.6 de ramification et la formule (7) impliquent:

$$\hat{A}(D^t; H^0(\frac{1}{2}i^1(U); \mathbb{F}^t)) = p \hat{A}(D; H^0(U; \mathbb{F})).$$

d'où le résultat (l'unique niveau de D^t est r_j)

D'une manière analogue, on écrit tout disque comme étant une réunion convenable de disques

et de tores ; les propositions 3.2, 3.3 et 3.7 impliquent le résultat suivant:

4.1.8 Indice sur disques:

Soit $0 < k = \frac{1}{s} < 1$ et soit U un disque ouvert ou fermé de rayon k .

$$H^0(U; \hat{F}) = \begin{cases} C[x] & \text{si } U = X \\ C[[x]]_{s^+} & \text{si } U = B(0; k) \\ C[[x]]_{s_i} & \text{si } U = B(0; k) \quad 0 < k < 1 \\ \hat{C} & \text{si } U = \{0\} \end{cases}$$

Et :

$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \hat{A}(D; C[[x]]) + \# \text{fgros points singuliers de } D \text{ sur } U \text{ comptés avec leurs multiplicités}$

La fonction $s \mapsto \hat{A}(D; C[[x]]_{s^+})$ est constante par morceaux, croissante et semi-continue à gauche et :

$$\hat{A}(D; C[[x]]_{s^+}) = \begin{cases} \hat{A}(D; C[x]) & \text{si } s < s_0 \\ \hat{A}(D; C[[x]]_{s_j^+}) & \text{si } s_j < s < s_{j+1}, j = 1, 2, \dots, 0 \\ \hat{A}(D; C[[x]]) & \text{si } s_1 < s \end{cases}$$

et la discontinuité est donnée par:

$$\hat{A}(D; C[[x]]_{s_j^+}) - \hat{A}(D; C[[x]]_{s_{j+1}^+}) = k_j \cdot \# \text{fl} = \deg q_i = k_j g:$$

La fonction $s \mapsto \hat{A}(D; C[[x]]_{s_i})$ est constante par morceaux croissante et semi-continue à droite et :

$$\hat{A}(D; C[[x]]_{s_i}) = \begin{cases} \hat{A}(D; C[x]) & \text{si } s > s_0 \\ \hat{A}(D; C[[x]]_{s_{j+1}^-}) & \text{si } s_j < s < s_{j+1}, j = 1, 2, \dots, 0 \\ \hat{A}(D; C[[x]]) & \text{si } s_1 < s \end{cases}$$

De plus:

$$\hat{A}(D; C[[x]]_{s_{j+1}^-}) = \hat{A}(D; C[[x]]_{s_j^+}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, 0:$$

Et

$$\hat{A}(D; C[[x]]_{s_i}) = \hat{A}(D; C[[x]]_{s^+}) \quad \forall s \in s_1, \dots, s_0:$$

Rappelons que $k_1 < k_2 < \dots < k_0$ sont les niveaux de D et $s_1 = \frac{1}{k_1}, \dots, s_0 =$

$\frac{1}{k_0}$

Figure 4-1:

4.1.9 Indice sur les gros points :

Soit $k > 0$ et U un k -gros point $I \in fkg$, soit $\text{mult}_D(U)$ la multiplicité de U par rapport à D ; alors:

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \sum_{j=1}^k \deg q_j < kg:$$

Même raisonnement que la proposition 3.7 .

On suppose d'abord que k est un entier: pour le recouvrement $(U_j)_{j=1}^n$ on a :

$$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \sum_{j=1}^n \hat{A}(D; H^0(U_j; \hat{F})) + \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}(D; H^0(U_j \setminus U_{j+1}; \hat{F})).$$

Il y a un U_j plus que $U_j \setminus U_{j+1}$ donc chaque $\exp q_j$ est le terme $\sum_{j=1}^k \deg q_j < kg$, pour l'autre on va calculer les exponentielles de niveau k qui sont plates sur chaque I_j et $I_j \setminus I_{j+1}$ ($U_j = I_j \in fkg$).

Si U est le support de l'exponentielle de niveau k elle est plate sur I_j que sur $I_j \setminus I_{j+1}$; sinon, elle est plate sur $I_j \setminus I_{j+1}$ que sur I_j :

Si k est rationnel la preuve est faite comme dans la proposition 3.7.

A la fin, on écrit un $(k_1, \dots, k_n)$ -multisecteur sous forme d'une réunion convnable d'un disque et des k_j -secteurs, $j = 1, \dots, n$.

4.1.10 Indice sur multisecteurs:

Soit $k = (k_1, \dots, k_n)$ et U un k -multisecteur Alors: D est à indice sur $H^0(U; \hat{F})$ et :

$\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})) = \hat{A}(D; C[[x]]) + \# \text{fgros points singuliers de } D \text{ comptés avec leurs multiplicités dans } U_g$

En particulier, si U est générique

$$\hat{A}(D; C[[x]]) = \hat{A}(D; H^0(U; \hat{F})):$$

On résume les valeurs des indices sur les sous-ensemble de $\hat{A}$ dans le tableau suivant:

$U \subset X$	Indice : $\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}))$
En général	$\dim H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) + \dim H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) + \dim H^0(U; \text{Coker}(D; \hat{F}))$
Petit disque	$\hat{A}(D; C[[x]])$
Secteur	$\dim H^0(U; \text{Sol}(D; \hat{F})) = \# f_j = \deg q_j < k_g + \# \text{fgros points singuliers}$
k-gros point	$\# f_j = \deg q_j < k_g + \text{multi}_D(U)$
Tore	$+ \# \text{fgros points singuliers de } D \text{ dans } U_g$
Disque Multisecteurs	$\hat{A}(D; C[[x]]) + \# \text{fgros points singuliers de } D \text{ dans } U_g$

NOTE:

Les gros points singuliers sont comptés avec leurs multiplicités.

Chapitre 5

Propriétés du $\hat{F}^k$ et ses applications aux théorèmes d'indice de D:

Dans ce chapitre, on introduit la notion de l'espace topologique X^k et le faisceau $\hat{F}^k$ sur X^k qui prend en considération le type de croissance ou décroissance d'exponentielle d'un ordre k , puis on applique la technique développée dans le 3^{ème} chapitre pour prouver les théorèmes d'indice dans cet espace.

En particulier, on obtient les théorèmes d'indice dans les espaces des séries Gevrey $C[[x]]_s$, $C[[x]]_{(s)}$ et $C[[x]]_{s;(\frac{1}{c})^i}$ due à J-P-Ramis.

5.1 L'espace X^k :

Soit $k > 0$, et Y^k une copie du tore $S^1 \in]0; +1[$:

X^k est l'espace topologique obtenu en remplaçant le tore fermé $Y^k = S^1 \in [0; +1]$ par le cercle $S^1 \in fkg$ plus précisément, on identifie d'un côté la frontière $S^1 \in fkg$ du disque ouvert $B(0; k)$ de X avec la frontière $S^1 \in f0g$ de Y^k et d'un autre côté la frontière $S^1 \in f+1g$ de Y^k avec la frontière $S^1 \in fkg$ de $X \setminus B(0; k)$.

Comme espace topologique, l'espace X^k est isomorphe à X , d'ailleurs la définition suivante du préfaisceau F^k sur un ouvert U dépend de la position de l'ouvert U ; il est soit à l'extérieur du tore Y^k , dans Y^k ou entre deux frontières des cercles de Y^k .

Soit $(\mu; f; k; \frac{1}{2}g)$ les coordonnées polaires dans Y^k et $\pi_k : X^k \rightarrow X$ la surjection canonique.

Pour tout $k > 0$, on appelle un disque ouvert de rayon k dans X^k qu'on note $B(0; k)$ l'image inverse

$\frac{1}{k} i^1(B(0; k))$ du disque ouvert de rayon k centré à l'origine.

Pour $c \in [0; +1]$, on appelle disque ouvert (respectivement: disque fermé) de rayon $fk; cg$, la réunion de $B(0; k)$ et de $S^1 \cap [0; c]$ (respectivement: $S^1 \cap [0; c]$) les disques ouverts et les secteurs ouverts forment une base de X^k

La définition d'un secteur $I \in]k; fk; cg$ est similaire, c'est-à-dire, un secteur $I \in]k; fk; cg$ est l'union d'un secteur $I \in]k; k$ et de $S^1 \cap [0; c]$

5.2 Le faisceau $\hat{F}^k$ sur X^k

Soit $k > 0$:

Le faisceau $\hat{F}^k$ correspond au préfaisceau défini comme suit:

* à l'intérieur de $X \cap Y^k$: $\hat{F}^k = F$:

* à l'intérieur de Y^k :

$$F^k(I \in]fk; cg; fk; cg]) = H^0(I; A^{\cdot k; c} = A^{\cdot i k; c^+}):$$

* Entre deux frontières de Y^k :

$$\hat{F}^k(I \in]fk; cg; k]) = H^0(I; A^{\cdot k} = A^{\cdot i k; c^+}):$$

$$\hat{F}^k(I \in]fk; cg; k]) = H^0(I; A^{\cdot k; c} = A^{\cdot i k}):$$

Le faisceau $\hat{F}$ est le faisceau de $C \times g$ module (pas C algèbre), dans la restriction au cercle $S^1 \cap]fk; cg; 0 \leq c \leq +1$:

$$\hat{F}_{S^1 \cap]fk; cg}^k = \begin{cases} A^{\cdot k; c} = A^{\cdot i k} & \text{si } c = 0: \\ A^{\cdot k; c} = A^{\cdot i k; c^+} & \text{si } 0 < c < +1 \\ A^{\cdot k} = A^{\cdot i k^+} & \text{si } c = +1 \end{cases}$$

De plus:

$$H^0(B(0; fk; cg); \hat{F}^k) = \begin{cases} C[[X]]_{s^+} & \text{si } c = 0 \\ C[[X]]_{s; (\frac{1}{c})^+} & \text{si } 0 < c < +1 \\ C[[X]]_{(s)} & \text{si } c = +1 \end{cases}$$

et

$$H^0(\mathbb{B}(0;fk;cg); \hat{F}^k) = \begin{cases} C[[X]]_S & \text{si } c=0 \\ C[[X]]_{S(\frac{1}{c})^+} & \text{si } 0 < c < +1 \\ C[[X]]_{S^1} & \text{si } c = +1 \end{cases}$$

Pour un intervalle I de S^1 :

$$H^0(I \in [0;fk;cg]; \hat{F}^k) = \begin{cases} H^0(I; A=A \cdot i^k) & \text{si } c=0 \\ H^0(I; A=A \cdot i^{k;c^+}) & \text{si } 0 < c < +1 \\ H^0(I; A=A \cdot i^{k^+}) & \text{si } c = +1 \end{cases}$$

Avec $\hat{F}^k$ on va prouver, en particulier, les théorèmes d'indice de D dans les espaces $C[[X]]_S$, $C[[X]]_{(S)}$, $C[[X]]_{S;(\frac{1}{c})^+}$ et $C[[X]]_{S;(\frac{1}{c})^1}$:

On note par :

$B(0,fk,cg)$ le disque ouvert dans X centré à l'origine est l'union du disque $B(0,k)$ et le tore $S^1 \in [fk,0g, fk, cg[$ et $B(0,fk,cg)$ sa fermeture.

Notation 2

On note par $B(0;fk;cg)$ Le disque ouvert dans X centré à l'origine est l'union du disque $B(0;k)$ et de tore $S^1 \in [fk;0g; fk, cg[$ qu'on note par $B(0;fk;cg)$ et sa fermeture est noté par $\mathbb{B}(0;fk;cg)$ (cf figure 4.1)

5.3 Une section typique du faisceau $\hat{F}^k \setminus \exp q(\frac{1}{x})$ quand $\deg q = k$

L'ensemble de définition de la fonction $\exp q(\frac{1}{x})$ comme étant une section de $\hat{F}^k$ quand $\deg q = k$ est un entier est comme indique sur la figure 4.2

Les secteurs sont maintenant remplacés par des pétales, le complément du support est sous la forme des margeurites et $\exp q$ est égale zéro sur une pétale sur deux . La fermeture des morceaux des pétales dans $\mathcal{Y}^k$ quand $\exp q$ n'est pas définie sont les gros points singuliers de q dans X^k . Comme dans le cas de $(X; \hat{F})$ ils ont un rôle important par rapport aux indices de D :

1- Un k -gros point dans X^k est la fermeture d'une composante connexe où la fonction $\exp(\frac{Ae^{i\theta}}{x^k})$; $A > 0$ n'est pas définie dans $\mathcal{Y}^k$, il est dit de support les polynômes

Figure 5-1:

$$q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{i A e^{i\theta}}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right) ..$$

On considère aussi le cas où A tends vers zéro et le cas ramifié par le choix d'une détermination θ de l'argument θ .

Un k -gros points a pour équation polaire dans $\mathbb{Y}^k$, $\frac{1}{2} \cdot \text{Acos}(k(\theta - i \mu))$;

$$k(\theta - i \mu) \in 2\left[-\frac{1}{2} + 2i\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} + 2i\frac{1}{4}\right] \quad l \in \mathbb{Z}$$

quand $k \in \mathbb{Z}$ on définit un k -gros points dans X^k comme étant un k -gros points de X (définition 2.11)

2- Le point top $a = (\theta; fk; Ag) \in \mathbb{Y}^k$ d'un k -gros point du support q est appelé point k -anti-Stokes de q :

On note par $\text{Sing}^k(q)$ l'ensemble de points k -anti-Stokes de q , Si $\deg q \in k$, alors: $\text{Sing}^k(q) = ?$

3- Un sous ensemble U de X^k est dit générique pour q s'il ne contient pas des gros points de support q , il est dit générique pour D s'il est générique pour tout q_j , $j = 1, \dots, v$

Dans le cas contraire on dit qu'il est singulier pour q ou pour D .

5.4 L'action de D sur le groupe de cohomologie de $\hat{\mathbb{A}}^k$:

L'opérateur différentiel D induit un morphisme de faisceaux sur $\hat{\mathbb{A}}^k$ et alors aussi sur ses groupes de cohomologie, l'exposé dans le 2^{ème} chapitre a son analogue dans $(X^k; \hat{\mathbb{A}}^k)$, En particulier l'isomorphisme suivant:

Les applications linéaires :

$$D : H^i(U; \hat{\mathbb{A}}^k) \rightarrow H^0(U; \hat{\mathbb{A}}^k) \quad i \geq 1$$

Sont des isomorphismes quand U est un disque, un secteur, un multisecteur ou un tore (Définition 4.1)

La preuve est semblable à celle du théorème 2.1 avec quelques modifications nécessaires, les théorèmes de base pour un ordre donné sont remplacés par la proposition 1.1 pour un type donné.

Les secteurs sont acycliques pour $\text{Sol}(D; \hat{\mathbb{A}}^k)$ (cf proposition 2.5)

Le morphisme de connexion

$$\pm : H^0(U; \text{Im}(D; \hat{\mathbb{A}}^k)) \rightarrow H^1(U; \text{Sol}(D; \hat{\mathbb{A}}^k))$$

est surjectif quand U est un tore ou un secteur qui ne contient pas l'origine, de même que la proposition 1.1(iv) est le lemme de Malgrange.

5.5 Théorèmes d'indice de D dans $(X^k, \hat{\mathbb{A}}^k)$:

5.5.1 Théorème général de l'indice dans $(X^k, \hat{\mathbb{A}}^k)$:

Soit U un disque, un secteur, un multisecteur ou un tore (Définition 4.1). , alors D est à indice sur $H^0(U^k; \hat{\mathbb{A}}^k)$ et

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{\mathbb{A}}^k)) = \dim H^0(U^k; \text{Sol}(D; \hat{\mathbb{A}}^k)) - \dim H^1(U^k; \text{Sol}(D; \hat{\mathbb{A}}^k)) - \dim H^0(U^k; \text{Coker}(D; \hat{\mathbb{A}}^k))$$

Où

$$H^0(U^k; \text{Coker}(D; \hat{\mathbb{A}}^k)) = \begin{cases} 8 & \text{si } 0 \in U^k \\ 0 & \text{si } 0 \notin U^k \\ \dim \text{Coker}(D; C[[X]]) & \text{si } 0 \in U^k \end{cases}$$

Preuve. Même preuve que dans le théorème 3.1. ■

Le théorème 4.2 implique que la technique de Mayer-Vietoris est valable dans

Figure 5-2:

$(X^k; \hat{F}^k)$ qui nous permet de déduire les théorèmes d'indice sur les grands ensembles à partir des petits disques les secteurs étroits (même dans $(X; \hat{F})$).

Sur les petits disques de rayon inférieur à k et $\mathbb{R}$, le faisceau $\hat{F}^k$ est $\hat{F}$, sur les secteurs étroits le résultat est analogue à celui de proposition 3.4.

5.5.2 Indice sur les secteurs étroits:

Soit U un secteur étroit dans X et soit D la forme normale de $\bar{D}$, alors:

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \dim H^0(U^k; \text{Sol}(\bar{D}; \hat{F}^k))$$

La preuve de cette égalité est analogue à celle de la proposition 3.4. $\square$

Et le calcul de $\dim H^0(U^k; \text{Sol}(\bar{D}; \hat{F}^k))$ quand $U^k = I \in [\mathbb{R}; fk; cg]$ et c est une constante k -caractéristique de D exige quelques précautions :

Soit S le sous-faisceau de $\hat{F}$ engendré par $\exp q$ avec $\deg q = k$ et on suppose que un point singulier $a \in \text{Sing} q$ est à l'intérieur de la frontière de l'arc $I \in [fk; cg]$ (cf. 4.3)

à cause de l'élargissement de I , le point singulier a est nécessairement unique, donc $U^k \cap B$ a une seule composante connexe dans U^k (U fermé) et deux composantes si $a \notin U^k$ (U^k ouvert).

D'où le résultat suivant:

Sous les conditions précédentes:

$$\dim H^0(U^k; S) = \begin{cases} < 1 & \text{si } U^k = I \in [\mathbb{R}; fk; cg] \\ 2 & \text{si } U^k = I \in [\mathbb{R}; fk; cg[\end{cases}$$

On va formuler les indices de D sur les grands U^k .

5.5.3 Indice sur le tore de X^k :

Soit $U = S^1 \times [k; k]$ un tore dans X^k .

i) Soit $0 \leq \alpha \leq \beta \leq +1$ et $k = f; \alpha, k = f; \beta$, alors:

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \sum_{i=1}^P \# \{U^k \setminus \text{Sing}^k(q_i)\} \\ = \sum_{i=1}^P \# \{\text{point } k \text{ anti-Stokes de } D \text{ sur } U \text{ compté avec}$$

leur multiplicité}\}

ii) Pour k, k quelconques on a :

$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \sum_{i=1}^P \# \{k\text{-gros points singulier sur } U^k \text{ - point } k\text{-anti Stokes dans } U^k \text{ comptés avec leur multiplicité}\}$.

i) Soit $U = (U_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un recouvrement 2-élevé par des secteurs étroits.

La technique de Mayer-Vietoris est applicable d'où:

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \sum_{j=1}^P \hat{A}(D; H^0(U_j^k; \hat{F}^k)) + \hat{A}(D; H^0(U_j^k \setminus U_{j+1}^k; \hat{F}^k))$$

il y a plus de U_j^k que de $U_j^k \setminus U_{j+1}^k$:

Donc :

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \sum_{j=1}^P \dim \hat{A}(D; H^0(U_j^k; \hat{F}^k)):$$

Et

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \dim H^0(U^k; \text{Sol}(D; \hat{F}^k))$$

Et la méthode de calcul dans lemme 4.5, proposition 3.7 nous donne le résultat.

ii) On écrit U comme réunion de deux secteurs, l'un de la forme (i) et l'autre d'un secteur étroit quelconque, et on applique la technique de Mayer-Vietoris. On obtient le résultat. $\square$

5.5.4 Indice sur disques de X^k :

Soit U^k un disque de rayon K dans X^k :

i) Soit $K = f; \alpha, K = f; \beta$, alors:

$$H^0(U^k; \hat{F}^k) = \begin{cases} C[[X]]_{s^+} & \text{si } U^k = B(0, fk, 0g) \\ C[[X]]_s & \text{si } U^k = \dot{B}(0, fk, 0g) \\ C[[X]]_{s;(\frac{1}{c})^+} & \text{si } U^k = B(0, fk, cg) \\ C[[X]]_{s;(\frac{1}{c})^-} & \text{si } U^k = \dot{B}(0, fk, cg) \\ C[[X]]_{(s)} & \text{si } U^k = B(0, fk, cg) \\ C[[X]]_{s_i} & \text{si } U^k = \dot{B}(0, fk, +1g) \end{cases} \quad 0 \leq c \leq +1$$

Et:

$\hat{A}(D; U^k) = \hat{A}(D; C[[X]]_{s^+})$; # fk-gros points singuliers de D dans U^k comptes avec multiplicité

$= \hat{A}(D; C[[X]])$; # fk-gros points singuliers comptes avec multiplicité

En particulier:

$$\hat{A}(D, C[[X]]_{s^+}) = \hat{A}(D, C[[X]]_s)$$

$$\hat{A}(D, C[[X]]_{s;(\frac{1}{c})^+}) \text{ ou } c \text{ est petit.}$$

$$\hat{A}(D, C[[X]]_{s;(\frac{1}{c})^+}) = \hat{A}(D, C[[X]]_{s;(\frac{1}{c})^-})$$

Où c n'est pas une constante k-caractéristique de D

$$\hat{A}(D; C[[X]]_{(s)}) = \hat{A}(D; C[[X]]_{s_i})$$

$$= \hat{A}(D; C[[X]]_{s;(\frac{1}{c})^+}) \text{ ou } c \text{ est grand.}$$

La fonction $C = \frac{1}{c}$; $\hat{A}(D; C[[X]]_{s; c^+})$ est croissante et semi-continue à gauche.

La fonction $C = \frac{1}{c}$; $\hat{A}(D; C[[X]]_{s; c^-})$ est croissante et semi-continue à droite.

Soit $K < k$ ou $K > k$ et soit U le disque de rayon K induit par U^k dans X^k . ,alors:

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}))$$

5.5.5 Indice sur k-gros point:

Soit U^k un k-gros point et U^k le plus petit secteur fermé qui contient U^k .

Soit $\text{mult}_D(U^k)$ la multiplicité de U^k comme étant un k-gros points singuliers de D dans X^k , alors:

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k)) = \hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{F}^k))$$

$$= \sum_{j=1}^n \deg q_j < kg \text{ ; } \text{multi}_D(U^k):$$

En particulier si U est générique

$$\hat{A}(D; H^0(U^k; \hat{E}^k)) = \sum f_j \deg q_j < kg$$

Même raisonnement que dans la proposition 3.9

On résume les valeurs des indices de cette partie dans le tableau suivant:

$U^k \times \mathbb{X}^k$	Indice $\hat{A}(D, H^0(U^k, \hat{E}^k))$
En général	$\dim H^0(U^k; \text{Sol}(D; \hat{E}^k)) - \dim H^1(U^k; \text{Sol}(D; \hat{E}^k)) - \dim H^0(U^k; \text{Coker}(D))$
Petit disque	$\hat{A}(D, C[[x]])$
K-gros point	$\sum f_j / \deg q_j < kg - \text{mult}_D(U^k)$
Tore	$-\# \text{ f k-gros point singulier} - \# \text{ f point k-antistokes dans } U^k g$
Disque Multisecteurs	$\hat{A}(D, C[[x]]) - \# \text{ f gros point singulier } t \text{ de } D \text{ dans } U^k g$

Tous les gros points singuliers sont comptés avec leurs multiplicités.

*5020.7425Chapitre 6

24.8830

]

20.7425Chapitre 6

24.8830

20.7425Chapitre 6

24.8830

20.7425Chapitre 6

24.8830

20.7425Chapitre 6

24.8830Proprietes de $\hat{F}^k$ et multisommabilite:

Dans ce chapitre on note par $k = (k_1; \dots; k_v)$ un multi-indice tel que

$0 < k_1 < \dots < k_v < +1 :$

Repetons a $k_1; \dots; k_v$ la construction a k de $(X^k; \hat{F}^k)$ a partir de $(X; \hat{F})$ pour obtenir

l'espace topologique X^k et le faisceau $\hat{F}^k$ qui prend en consideration le type de croissance ou decroissance d'exponentiel pour chaque ordre $k_1; \dots; k_v$:

On rassemble dans $(X^k; \hat{F}^k)$ les proprietes locales des faisceaux $(X^k; \hat{F}^k)$ pour $k = k_1; \dots; k_v$:

10.9513.6

Figure6-1:

Un k -multisecteur U dans X^k est une réunion finie:

$$U = \bigcup_{j=1}^v \mathbb{B}(0; k_j; 0) \cap \bigcup_{j=1}^v (I_j \times [0; k_{j+1}; 0]):$$

Ou, pour $j = 1; \dots; v$ I_j est un intervalle ferme de longueur $|I_j| = \frac{2\pi}{k_j}$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset \dots \cap I_v = \emptyset$. (par convention $k_{v+1}; 0 = +1$) (cf figure 5.1)

Notation 3

- * Un multisecteur U dans X^k est un sous-ensemble ferme dans X^k :
- * La définition d'un k -gros point dans X^k est celle dans X^k pour chaque $k_1; \dots; k_v$.

Proposition 2

Soit U un k -multisecteur dans X^k , alors: $H^0(U; \mathbb{A}^k)$ est l'espace des séries k -multisommables sur $(I_1; \dots; I_v)$:

(cf Remarque 2.2) ■

De plus, les propriétés de $\mathbb{A}^k$ sont prolongées dans $\mathbb{A}^k$, donc on utilise une autre fois la technique de Mayer-Vietoris pour prouver les théorèmes d'indice dans $H^0(U; \mathbb{A}^k)$ quand U est un disque, un secteur, un multisecteur, un tore ou un gros point car U est un sous-ensemble d'un $\mathbb{A}^k$ pour $k = k_1; \dots; k_v$.

Thorme 8

Soit U un k -multisecteur dans X^k , alors: D est a indice dans l'espace des series multisommables $H^0(U; \hat{F}^k)$ et

$\text{bold}\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}^k)) = \text{bold}\hat{A}(D; C[[x]]) - \# \text{gros point singulier de } D \text{ dans } U \text{ comptes avec leurs multiplicites.}$

En particulier, si U est generique, c'est-a-dire: U ne contient pas des gros points singuliers alors :

$$\text{bold}\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}^k)) = \text{bold}\hat{A}(D; C[[x]]):$$

■

D'apres la de-nition 5.1, U est une reunion -nie, on applique la technique de Mayer-Vietoris on obtient:

$$\text{bold}\hat{A}(D; H^0(U; \hat{F}^k)) = \text{bold}\hat{A}(D; H^0(\hat{B}(0; k_1; 0); \hat{F}^k)) + \text{bold}\hat{A}(D; H^0(\bigcup_{j=2}^n U_j; \hat{F}^k))$$

$$\text{Ou } U_j = I_j \in [0; k_{k+1}; 0]:$$

Et d'apres le 3^{eme} chapitre on obtient le resultat.

A la -n on remarque que les formules d'indices donnees dans le 3^{eme}, 4^{eme} et 5^{eme} chapitre sont relative a l'invariant formel meromorphe de D qui est $\text{bold}\hat{A}(D; C[[x]])$

.

Conclusion 1

En utilisant une procedure generale on a prouve les theoremes d'indice pour un operateur differentiel D sur les grands sous-ensembles a partir de ceux sur les petits sous-ensembles dans les espaces $(X; \hat{F})$; $(X^k; \hat{F}^k)$ et $(X^k; \hat{F}^k)$:

On a prouve que l'indice de D sur un petit disque centre a l'origine est egal a l'indice de D dans l'espace des series formelles $C[[x]]$ et ce dernier a ete calcule par B-Malgrange dans [M74]; sur un petit secteur, l'indice de l'operteur D est l'indice de sa forme normale $\hat{D}$ et est egal au nombre des solutions sur ce secteur.

Cette procedure appliquee sur les disques dans l'espace $(X; \hat{F}^k)$ fournit en particulier, l'indice de D dans les espaces $C[[x]]_{s+}; C[[x]]_{s-}$ et Cx , le calcul de l'indice dans Cx a ete calcule par deux methodes, une par l'analyse fonctionnelle due a B-Malgrange dans [M74] et l'autre par P-Deligne et B-Malgrange (cf Appendice).

Les indices dans $C[[x]]_{s+}; C[[x]]_{s-}$, bien que ne soient pas donnees explicitement dans [R84] mais sont une consequence des indices dans les espaces Gevrey ..

La procedure appliquee sur les disques dans l'espace $(X^k; \hat{F}^k)$ donne , en particulier les indices de D dans $C[[x]]_s, C[[x]]_{(s)}; C[[x]]_{s;(\frac{1}{c})^+}$ et $C[[x]]_{s;(\frac{1}{c})^-}$, ces indices sont etablis par J-P.Ramis [R.84] par l'analyse fonctionnelle qui a ete initiee par B-Malgrange [M74] et dans l'espace $C[[x]]_{s;\frac{1}{c}}$, D n'est pas a indice en general (par exemple l'operateur d'Euler: $x^2 \frac{d}{dx} + 1$ sur $C[[x]]_{1,1}$):

La procedure appliquee sur les k -multisecteurs dans l'espace $(X^k; \hat{F}^k)$ ou $k = (k_1; \dots; k_v)$ sachant que $k_1 < \dots < k_v$ fournit l'indice de D dans l'espace des series k -multisommables.

Les valeurs de ces indices sont calculees en fonction des invariants formels meromorphes de D et surtout les gros points singuliers.

En utilisant une procedure generale on a prouve les theoremes d'indice pour un operateur differentiel D sur les grands sous-ensembles a partir de ceux sur les petits sous-ensembles dans les espaces $(X; \hat{F}); (X^k; \hat{F}^k)$ et $(X^k; \hat{F}^k)$:

On a prouve que l'indice de D sur un petit disque centre a l'origine est egal a l'indice de D dans l'espace des series formelles $C[[x]]$ et ce dernier a ete calcule par B-Malgrange dans [M74]; sur un petit secteur, l'indice de l'operateur D est l'indice de sa forme normale $\tilde{D}$ et est egal au nombre des solutions sur ce secteur.

Cette procedure appliquee sur les disques dans l'espace $(X; \hat{F}^k)$ fournit en particulier, l'indice de D dans les espaces $C[[x]]_{s+}; C[[x]]_{s-}$ et Cx , le calcul de l'indice dans Cx a ete calcule par deux methodes, une par l'analyse fonctionnelle due a B-Malgrange dans [M74] et l'autre par P-Deligne et B-Malgrange (cf Appendice).

Les indices dans $C[[x]]_{s+}; C[[x]]_{s-}$, bien que ne soient pas donnees explicitement dans [R84] mais sont une consequence des indices dans les espaces Gevrey ..

La procedure appliquee sur les disques dans l'espace $(X^k; \hat{F}^k)$ donne , en particulier les indices de D dans $C[[x]]_s, C[[x]]_{(s)}; C[[x]]_{s;(\frac{1}{c})^+}$ et $C[[x]]_{s;(\frac{1}{c})^-}$, ces indices sont etablis par J-P.Ramis [R.84] par l'analyse fonctionnelle qui a ete initiee par B-Malgrange [M74] et dans l'espace $C[[x]]_{s;\frac{1}{c}}$, D n'est pas a indice en general (par exemple l'operateur d'Euler: $x^2 \frac{d}{dx} + 1$ sur $C[[x]]_{1,1}$):

La procedure appliquee sur les k -multisecteurs dans l'espace $(X^k; \hat{F}^k)$ ou $k = (k_1; \dots; k_v)$ sachant que $k_1 < \dots < k_v$ fournit l'indice de D dans l'espace des series k -multisommables.

Les valeurs de ces indices sont calculees en fonction des invariants formels meromorphes de D et surtout les gros points singuliers.

1. Claim 1 24.8830Appendice:

14.4186.1 I)

Les theoremes d'indice de B.Malgrange et J-P.Ramis sont prouver par des methodes de l'analyse fonctionnelle et les perturbations compactes, on va les rappeler dans cette partie:

17.2822 Theoremes d'indice dans l'anneau des series formelles :

Deñition:

On appelle valuation sur un corps K une application surjective

$\text{bold}^\circ : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ telle que:

- 1) $\text{bold}^\circ(xy) = \text{bold}^\circ(x) + \text{bold}^\circ(y)$:
- 2) $\text{bold}^\circ(x + y) \geq \min(\text{bold}^\circ(x); \text{bold}^\circ(y))$.
- 3) $\text{bold}^\circ(0) = +\infty$:

14.418 Theoreme 1: (cf [M74])

Soit $D : C[[x]] \rightarrow C[[x]]$ un operateur differentiel

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{d^i}{dx^i} \quad \text{ou } a_i(x) \in C[[x]]$$

Alors: D est a indice et

$$\text{bold}\hat{A}(D; C[[x]]) = \sup_{i=1, \infty} (i - \text{bold}^\circ(a_i)):$$

14.418Theoreme 2: (cf [M74] et [K71])

Soit $D : C[[x]] \rightarrow C[[x]]$ un operateur differentiel tel que:

$$\text{Avec } D = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(x)} \frac{d^i}{dx^i} \quad a_i \notin 0$$

Alors: D est a indice et $\text{bold}\hat{A}(D; C[[x]]) = \sup_{i=1, \infty} (i - \text{bold}^\circ(a_i)):$

14.418Theoreme 2: (cf [M74] et [K71])

Soit $D : C[[x]] \rightarrow C[[x]]$ un operateur differentiel tel que:

$$\text{Avec } D = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(x)} \frac{d^i}{dx^i} \quad a_i \notin 0$$

Alors: D est a indice et $\text{bold}\hat{A}(D; C[[x]]) = \sup_{i=1, \infty} (i - \text{bold}^\circ(a_i)):$

14.418 Theoreme 3: (cf [R84]):

$$\text{Soit } D = \sum_i a_i \frac{d^i}{dx^i} \quad a_i \in \mathbb{C}[x]$$

i) a) Les operateurs $D : \mathbb{C}[[x]]_s \rightarrow \mathbb{C}[[x]]_s$ sont d'indice fini pour $s > 1$

b) Les operateurs $D : \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \rightarrow \mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ sont d'indice fini pour $s > 1$.

c) Les operateurs $\mathbb{C}[[x]]_{s, \frac{1}{C}} \rightarrow \mathbb{C}[[x]]_{s, \frac{1}{C}}$ et $\mathbb{C}[[x]]_{s, \frac{1}{C}} \rightarrow \mathbb{C}[[x]]_{s, \frac{1}{C}}$ sont d'indices finis pour $s > 0$ et $C > 0$.

14.4186.2

On donne ici le calcul de l'irregularite $\text{irr}_0(D)$ apres Deligne [D77] et Malgrange [M79]

14.418 Proposition 7.1: (Deligne- Malgrange):

Soit $N(\mu)$ la dimension de la $\mathbb{C}[[x]]$ -brev $V^{<0}$ de $V^{<0}$ et $\mu \in S^1$ et $\text{var } N$ la variation de la fonction

$\mu \mapsto N(\mu)$ sur S^1 .

Alors:

$$\text{irr}_0(D) = \dim H^1(S^1; V^{<0})$$

$$\dim H^1(S^1; V^{<0}) = \frac{1}{2} \text{var}(N)$$

Preuve:

La suite exacte longue de cohomologie correspondante a la suite:

$$0 \rightarrow A^{<0} \rightarrow A \rightarrow A = A^{<0} \rightarrow 0:$$

est donnee par

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(S^1; A) & \rightarrow & H^0(S^1; A = A^{<0}) & \rightarrow & H^1(S^1; A^{<0}) & \rightarrow & H^1(S^1; A) \\ k & & k & & \oplus & & \\ \mathbb{C}[x] & & \mathbb{C}[[x]] & & 0 & & \end{array}$$

D'ou $H^1(S^1; A^{<0}) = \mathbb{C}[[x]] = \mathbb{C}[x]$

De la, on tire la suite exacte longue de cohomologie:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(S^1; V^{<0}) & \rightarrow & H^1(S^1; A^{<0}) & \rightarrow & H^1(S^1; A^{<0}) \rightarrow 0 \\ & & k & & k & & \\ & & \mathbb{C}[[x]] = \mathbb{C}[x] & & \mathbb{C}[[x]] = \mathbb{C}[x] & & \end{array}$$

Deduite de la suite exacte courte des faisceaux :

$$V^{<0} \rightarrow A^{<0} \rightarrow A^{<0} \rightarrow 0$$

Implique les relations :

$$\ker(D; C[[x]] = Cx) = H^1(S^1; A^{<0}):$$

$$\operatorname{Coker}(D; C[[x]] = Cx) = 0:$$

ii) Le calcul de $\dim H^1(S^1; V^{<0})$ par P. Deligne est relié au fait que $V^{<0}$ est constante par morceaux et que la fonction $\dim V^{<0}$ est semicontinue à gauche.

Soit $\mathcal{O}_i$, $1 \leq i \leq n$ les directions de Stokes de D dans un ordre cyclique. et soit $i_i : \mathbb{C} \rightarrow S^1$ et $j_i :]\mathcal{O}_i; \mathcal{O}_{i+1}[\rightarrow S^1$ les inclusions naturelles.

On note par $j_{A!} V^{<0}$ le faisceau constant de rang $\dim V^{<0}$ sur A prolongé par zéro sur $S^1 \setminus A$:
et $i_{(U \cap A)!} V^{<0}$ l'image directe du faisceau $V^{<0}$ par l'inclusion canonique

La suite:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n j_{i!} V^{<0} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n i_{i!} V^{<0} \rightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux sur S^1 d'où:

$$H^k(D; V^{<0}) = \bigoplus_i H^k(j_{i!} V^{<0}) + H^k(i_{i!} V^{<0})$$

par définition:

$$H^k(D; V^{<0}) + \dim H^0(S^1; V^{<0}) = \dim H^1(S^1; V^{<0}) \quad \text{et} \quad H^0(S^1; V^{<0}) = 0:$$

k

0

Alors:

$$H^1(D; V^{<0}) = \dim H^1(S^1; V^{<0})$$

et :

$$\dim H^1(S^1; V^{<0}) = \bigoplus_i H^1(j_{i!} V^{<0}) + H^1(i_{i!} V^{<0})$$

De plus:

$$H^1(j_{i!} V^{<0}) = \dim H^1(S^1; j_{i!} V^{<0})$$

$$(H^0(S^1; j_{i!} V^{<0})) = 0 \quad (\text{car le support }]\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i+1}[\text{ n'est pas fermé dans } S^1)$$

Donc:

$$H^1(j_{i!} V^{<0}) = \dim H^1(]\mathcal{O}_i; \mathcal{O}_{i+1}[; V^{<0}) \quad (V^{<0} \text{ est constante sur }]\mathcal{O}_i; \mathcal{O}_{i+1}[)$$

$$= \dim V^{<0} \quad \text{sur }]\mathcal{O}_i; \mathcal{O}_{i+1}[$$

et

$$H^1(i_{i!} V^{<0}) = \dim H^0(S^1; i_{i!} V^{<0}) = H^0(S^1; i_{i!} V^{<0}) \quad \text{car le support } \mathcal{O}_i \text{ est réduit à un seul point.}$$

Donc

$$\dim \hat{A}(i_! V^{<0}) = \dim_{\text{bold} \otimes} V^{<0}$$

Maintenant, on utilise le fait que $V^{<0}$ est localement isomorphe au faisceau $\mathcal{V}^{<0}$ des solutions plates de la forme normale $\mathcal{D}$ de D (le théorème principal de développement asymptotique) résulte :

$$\dim_{\text{bold} \otimes_L} V^{<0} - \dim_{\text{bold} \otimes_L} V^{<0} = \dim_{\text{bold} \otimes_L} \mathcal{V}^{<0} - \dim_{\text{bold} \otimes_L} \mathcal{V}^{<0} :$$

et en chaque point, $\dim_{\text{bold} \otimes} \mathcal{V}^{<0}$ est le nombre des $\exp(q_j)$ qui sont plates en $\text{bold} \otimes$

. Le coefficient $\frac{1}{2}$ vient du fait qu'un $\exp q_j$ augmente $\dim_{\text{bold} \otimes_i} \mathcal{V}^{<0} - \dim_{\text{bold} \otimes_i} \mathcal{V}^{<0}$ par un, si $\text{bold} \otimes$ est une direction de Stokes de q_j

Sachant que $\exp q_j$ est plate sur $] \text{bold} \otimes_i; \text{bold} \otimes_{i+1} [$ d'où il contribue le un demi de ses directions de Stokes.

On remplace $A^{<0}$ par $A \cdot i^k$ et $V^{<0}$ par $V \cdot i^k$ et on utilise le théorème de Borel-Ritt au lieu du théorème principal du développement asymptotique on obtient un résultat semblable avec condition Gevrey.

14.418 Proposition 7.2:

Soit $N \cdot i^k$ ($\text{bold} \mu$) la dimension de la fibre $V \cdot i^k$ de $V \cdot i^k$ à $\text{bold} \mu \in S^1$. ($s = \frac{1}{k}$);
alors: D est à indice sur $C[[x]]_s = Cx$ et $\hat{A}(D; C[[x]]_s = Cx) = \dim H^1(S^1; V \cdot i^k)$:
$$= \frac{1}{2} \text{ var } N \cdot i^k$$

*5024.8830Bibliographie:

[1]

24.8830References:

- [B92] K.Betina; Indices polynomiaux et solutions polynomiales de certains systemes de Pfa® singuliers ,(Analysis 12, 195-216).
- [B].K-Betina , sur l'indice des operateurs di®erentiel ordinaires lectures notes; Equation di®erentiel et systeme de Pfa® dans le plan complexe,Lecture Notes in Maths, Springer Verlag, n° = 1015
- [BJ79].W.Blaser, W.B.Jurkat, D.A.Lutz, A General theory of invariants for meromorphic di®erentiel equation, part I, formal invariants, Funkcialaj Ekvacioj 22,(1979),197-221.
- [D86], Lettres de P.Deligne a J.P.Ramis(25=02=86; 20=02=86; 7=01=86)
- [God] Roger Godement , theroie des faisceaux .Hermann Paris 1958.
- [Ive] Birger Iversen, Cohomology of sheaves, Springer, Verlag 1986.
- [K71] Hikosabura Komatsu, On the index of ordinary di®erential operators, J.Fac.Sc.Univ.Tokyo I.A 1971.379-398
- [LR 94] Michele Loday-Richaud, Stokes phenomenon, multisummability and di®erential Galois groups ,Ann .Inst. Fourier, Grenoble 44,3(1994) 849-906
- [LR91] Michele Loday -Richaud, classi¯cation meromorphes locale des systemes di®erentiels lineaires meromorphe, phenomene de Stokes et applications ;these d'etat-University d'Orsay.
- [LR90] Michele Loday -Richaud,;Introduction a la multisommabilite; Gazette des matimaticiens Avril 90.n° = 44
- [LR] Michele Loday -Richaud, : Theoremes d'indices dans les espaces de type Gevrey generalise; lecture note;Equation di®erentiel et systemes de Pfa® dans le plan complexe , Lecture Notes in Maths, Springer Verlag , n° = 1015
- [Mal] Bernard Malgrange ,equations di®erentielles a coe±cients polynomiaux, Progress in Math, Birkhauser (1991).

- [M74] Bernard Malgrange, Sur les points singuliers des equations différentielles ; L'Enseignement Mathematiques XX, 1-2 (1974) 147-176.
- [M79] Bernard Malgrange , Remarque sur les equations différentielles a points singuliers irreguliers in lecture notes in Mathematics, Equations différentiels et systemes de Pfaff dans le plan complexe, Lecture Notes in Maths, Springer Verlag, n° = 712
- [M95] Bernard Malgrange, Sommation des series divergentes . Exposition Mathematicae, 13, 2-3, (1995) 163-222.
- [MR92] Bernard Malgrange et Jean Pierre Ramis, Fonctions multisommables. Ann.Inst. Fourier, Grenoble, 42, 1-2, (1992), 353-368.
- [R78] Jean-Pierre Ramis, Devissage Gevrey, Soc.Math.France, Asterisque 59-60, (1978). 173-204.
- [R84] Jean-Pierre Ramis, Theoremes d'indices Gevrey pour les equations différentielles ordinaires. Memoirs of the AMS 48, (1984), 296