

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DE GENIE CIVIL

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

EN GENIE CIVIL

Spécialité : Géotechnique

Par

Abdelghani MESLEM

Thème

**IDENTIFICATION DE L'AMORTISSEMENT DES
STRUCTURES REELLES SOUMISES A DES
EXCITATIONS FORCEES**

Soutenu le : 01/07/2004

Devant le jury composé de :

M. N. LARADI

Professeur, FGC/USTHB

Président

M. D. BENOUAR

Professeur, FGC/USTHB

Directeur de thèse

M. E. DJAKAB

Chargé de Cours, FGC/USTHB

Co-Directeur de thèse

M. H. AFRA

Maître de recherche, CNERIB

Examineur

M. S. DJELLAB

Chargé de Cours, FGC/USTHB

Examineur

M. A. ZERZOUR

Chargé de Cours, FGC/USTHB

Examineur

M. M. BELAZOUGUI

Directeur, CGS

Invité

REMERCIEMENTS

Ce mémoire a été réalisé sous la direction de Mr.D.Benouar, Dr.Professeur à la FGC/USTHB et Directeur du Laboratoire Bâti dans l'Environnement, que je tiens à remercier, chaleureusement et à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée, pour sa présence quotidienne, et pour ses conseils scientifiques qui m'ont été toujours précieux. Je le remercie pour sa disponibilité et pour le fait qu'il n'a jamais ménagé aucun effort pour suivre de près ce travail afin de s'assurer de son bon déroulement.

Mes remerciements vont également à Mr. E.Djakab, Enseignant Chargé de cours à la FGC/USTHB, pour son suivi et son aide à mon travail de recherche, je le remercie aussi pour tous les documents qui m'ont permis à la finalisation de ma thèse. Je lui témoigne ma profonde gratitude.

L'idée de base de la méthode, que nous avons utilisé dans ce travail a été proposée par A.Nour du CGS, à qui je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée pour mener à bien ce travail. Je le remercie vivement pour toutes les discussions que nous avons pu entamer ensemble dans mon travail de recherche.

Mes sincères remerciements vont aussi à :

Mr.N.LARADI, Dr. Professeur, FGC/USTHB,
Mr. H.AFRA, Dr. Maître de recherche, CNERIB
Mr.S.DJELLAB, Chargé de Cours, FGC/USTHB
Mr.A.ZERZOUR, Chargé de Cours, FGC/USTHB

pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury. Je leur témoigne ma profonde gratitude.

Je remercie également Mr. M. Belazougui, Directeur du CGS, pour l'honneur qu'ils me font en s'associant au jury en tant qu'invité d'honneur.

Sans oublier une pensée toute particulière à mon ami M'hamed Badaoui, Maître assistant à la FGC/USTHB, qui m'a aussi aidé à concrétiser ce travail. Je tiens aussi à rendre hommage à mes amis Youcef Mehani et Mounir Naïli pour leurs encouragements et leur soutien.

ABSTRACT

The state of current knowledge of damping in real life application still not has a mathematical model able to represent its complex behavior. The variation of its values, which depends on the nature of the material, can be very significant if this material presents an important non homogeneity. In our work, which is mainly based on experimental studies, we present a method, derived from the finite difference method, for the identification of damping in time domain. The use of this method requires the preliminary knowledge of system responses.

By using the data acquisition technique, the responses obtained from cantilever beams, with a constant section (steel beam, plastic beam, concrete beam and wood beam), were exploited for the identification of damping. We considered two assumptions: damping in our beam is of viscous type for which the attenuation force is proportional to the velocity. The second assumption we supposed that damping is the same at any point of the beam which has been modeled as one degree of freedom system.

The findings made possible to study the behavior of damping function with time. For the case of the beam systems used, it is easily noticed that damping is almost constant according to the time-history of the response for each beam. However, it was recorded the appearance of the peaks which can even reach infinite values, those peaks are the consequence of the mathematical tools used to calculate the damping for each interval of time.

RESUME

L'état de connaissance actuel concernant la loi de comportement de l'amortissement dans le domaine d'application réelle n'a toujours pas trouvé un modèle mathématique capable de représenter son comportement complexe. Les variations de ses valeurs, sont liées à la nature du matériau et peuvent être très importantes si ce matériau présente un degré de non-linéarité significatif. Dans notre travail, ayant un caractère expérimental, nous avons présenté une méthode pour l'identification de l'amortissement en fonction du temps en utilisant la méthode des différences finies. L'utilisation de cette méthode nécessite la connaissance de la réponse du système dynamique.

En utilisant la technique d'acquisition des données expérimentales, les réponses obtenues, de nos systèmes cantilever en utilisant des barres de section constante (de type métallique, plastique, béton et bois), ont été exploitées pour l'identification de l'amortissement. Ceci en considérant deux hypothèses : la première c'est que l'amortissement dans notre barre est du type visqueux pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse. La deuxième hypothèse suppose que l'amortissement dans la barre soit le même en chaque point. Nous avons modélisé les cantilevers en des systèmes à un seul degré de liberté.

Cette présente méthode avait l'avantage de montrer le caractère instantané de l'amortissement, mais nous avons enregistré une instabilité correspondant aux pics visualisés sur les courbes d'amortissement fonction du temps.

SOMMAIRE

Nomenclature	6
1. Introduction	8
1.1 Motivation	8
1.2 Définition du problème	9
1.3 Synthèse bibliographique	9
1.4 Objectifs et organisation de la thèse	16
2. Développement théorique de la méthode proposée pour l'identification de l'amortissement	19
2.1 Développement de la méthode	20
2.2 Application théorique de la présente méthode d'identification	23
3. Acquisition et traitement de données expérimentales	33
3.1 Types de signaux à mesurer	34
3.2 La composition d'une chaîne d'acquisition	34
3.2.1 Excitation de la structure	36
3.2.1.1 Les différents types d'excitateurs	36
3.2.1.2 Les différents types de test	38
3.2.1.3 Le marteau d'impact	39
3.2.2 Capteurs	42
3.3 Identification des fréquences de résonance et calcul de module de Young	43
3.4 Théorème d'échantillonnage	45
3.5 Analyse dans le domaine fréquentiel	46
3.5.1 Fonctionnement théorique de la FFT	46
3.5.2 La transformée de Fourier d'une fonction réelle	47
3.5.3 Transformée de Fourier Discrète	48
4. Etude expérimentale et mise en œuvre de la méthode proposée	50
4.1 Equipements utilisés dans le cas de nos essais	52
4.2 Elaboration d'un programme pour acquisition et traitement ultérieur des données	57
4.3 Présentation des résultats et discussion	59

4.3.1 Identification des fréquences de résonances et le module de Young des barres étudiées	59
4.3.2 Identification de l'amortissement	66
5. Conclusions et recommandations	74
5.1 Synthèse	74
5.2 Recommandations	76
Références bibliographiques	77
Annexes	84
Annexe 1 : Flexion des poutres	84
Annexe 2 : Calcul théorique des fréquences naturelles de résonances des barres de section constante et de masse uniformément répartie	87
Annexe 3 : Principe des systèmes énergitiqument équivalents	90
Annexe 4 : Les méthodes expérimentales pour la mesure de facteur d'amortissement visqueux réduit	94

NOMENCLATURE

C	Amortissement visqueux
C_c	Amortissement critique
E	Module de Young
$F(t)$	Force extérieure dans le domaine temporel
$F(f)$	Force extérieure dans le domaine fréquentiel
$F_D(t)$	Force d'amortissement d'un système dynamique
$F_I(t)$	Force d'inertie d'un système dynamique
$F_S(t)$	Force de rigidité d'un système dynamique
f	Fréquence
f_0	Fréquence propre du premier mode de vibration du système
f_m	Fréquence la plus élevée contenue dans le signal
f_N	Fréquence de Nyquist de l'échantillonneur
f_n	Fréquences propres de résonance d'un système dynamique
f_s	Fréquence d'échantillonnage
$H(f)$	Fonction de Réponse en Fréquence (FRF)
I	Moment d'inertie de la surface d'intersection de la barre
k	Rigidité d'un système dynamique
k^*	Rigidité généralisée
L	Longueur de la barre
m	Masse d'un système dynamique
m^*	Masse généralisée
N	Nombre d'échantillonnage
Q	Facteur de qualité
S	Section de la surface d'intersection de la barre
T	Période de vibration
t	Temps
x	Abscisse

$y(t)$	Réponse d'un système dans le domaine temporel
$\ddot{y}(t)$	Accélération d'un système dynamique
$\dot{y}(t)$	Vitesse d'un système dynamique
$Y(f)$	Réponse d'un système dans le domaine fréquentiel
Y_N, Y_{N+M}	Amplitude de la vibration en un instant quelconque, et l'amplitude M cycles plus tard.
$Z(x, t)$	Réponse en déplacement transversal
$[\Phi]$	Matrice des vecteurs propres
$[\Phi]^T$	Transposé de la Matrice des vecteurs propres
ω	Pulsation de vibration
ω_0	Pulsation du premier mode des vibrations propres non amorties
ω_D	Pseudo-fréquence angulaire en oscillation amortie.
ξ	Facteur d'amortissement réduit
ρ	Masse volumique
δ	Décrément logarithmique d'un mouvement de vibration.
$Y_{\max}$	Réponse maximale du système
Y_0	Réponse du système à l'état statique.
$\Psi(x)$	Fonction de déformée d'un système
Δt	Intervalle d'échantillonnage dans le domaine temporel
Δf	Intervalle d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

Les phénomènes d'amortissement dans les matériaux sont étudiés depuis des années avec pour principales motivations l'analyse des mécanismes qui conduisent au comportement inélastique et à la dissipation d'énergie. Il en est de même pour le contrôle à la fabrication de certaines caractéristiques des matériaux et surtout la conception des structures dans lesquelles il est en général intéressant d'atténuer les sollicitations dynamiques.

Le mécanisme de l'amortissement dans les matériaux est le résultat d'une interaction moléculaire complexe dans le matériau de construction /49/. Par conséquent, l'amortissement matériel (amortissement structurel) dépend du type et de la nature de matériau, des méthodes employées pour la fabrication de ce matériau, et des procédés de finissage final. La complexité de la situation est encore plus importante par le fait que les propriétés matérielles diffèrent souvent d'un échantillon à l'autre ; et qui pourrait avoir comme conséquence des différences significative en déperditions d'énergie le long des points distincts d'un système structural.

En outre, les équations du mouvement en dynamique des structures décrivent habituellement le comportement macroscopique, alors que les processus des amortissements matériels résultent des phénomènes microscopiques. Cette problématique a poussé de nombreux chercheurs à identifier le comportement réel des amortissements au moyen des méthodes expérimentales /1/2/14/16/17/19/26/35/37/44/50/.

1.2 Définition du problème

Les caractéristiques physiques : masse et rigidité, d'une structure donnée peuvent être déterminées aisément, soit par des considérations physiques simples, soit au moyen d'expressions généralisées /16/43/. En revanche, les caractéristiques réelles d'amortissement des structures sont très complexes et délicates à déterminer, les mécanismes de dissipation d'énergie possèdent un caractère difficile à comprendre: Il en résulte qu'il n'est généralement pas possible de déterminer l'amortissement sous la forme d'un amortissement généralisé au moyen d'expression du même type que celles donnant la masse ou la rigidité /16/. Pour cette raison, l'amortissement de la plupart des structures doit être mesuré directement au moyen de méthodes expérimentales /1/2/16/45/ ensuite s'investir à la recherche d'un modèle théorique adéquat de l'amortissement représentant le mieux possible le comportement réel du mécanisme de dissipation d'énergie de vibration.

1.3 Synthèse bibliographique

Dans les calculs dynamiques, la modélisation des structures est l'une des étapes essentielles en vue de faire une investigation théorique ou expérimentale. Il est souvent admis que l'amortissement et la rigidité sont constants dans l'espace d'une structure ou matériau donné, d'où il est courant d'admettre qu'un système continu peut être transformé en un système à un certain nombre de degrés de liberté. Le nombre d'équations nécessaires pour connaître les mouvements du système doit être égal au nombre de degrés de liberté.

En général, on peut trouver deux types de modèles : système représenté par un seul degré de liberté et un système modélisé par plusieurs degrés de liberté.

Dans la majorité des études dynamiques, un système à plusieurs degrés de liberté soumis à une force extérieure $F(t)$ et qui sera caractérisé avec une matrice de masse $[M]$, une matrice de rigidité $[K]$ et une matrice d'amortissement $[C]$ telle que la réponse du système $\{y(t)\}$ satisfait l'homogénéité de l'équation du mouvement :

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [C]\{\dot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{F(t)\}$$

(1-1)

Où $\{y(t)\}$ est un vecteur, à n lignes et 1 colonne, variant en fonction du temps, et qui représente les déplacements des masses (n est le nombre de degrés de liberté). Les vecteurs $\{\ddot{y}(t)\}$ et $\{\dot{y}(t)\}$ représentent l'accélération et la vitesse respectivement des masses.

Les méthodes d'identification des paramètres physiques, que sont les matrices de masse et de rigidité, ont été développées par beaucoup de chercheur, l'identification de l'amortissement elle aussi a fait l'objet de plusieurs études analytiques et expérimentales.

Pour le cas des études analytique la plupart des méthodes proposées, qui sont valables pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté aussi bien qu'à un seul degré de liberté, supposent un modèle visqueux équivalent tel que :

$$C_i = 2m_i \omega_i \xi_i \quad (1-2)$$

avec :

m_i : est la masse ;

ω_i : est la fréquence angulaire;

ξ_i : est le facteur d'amortissement réduit.

Dans la pratique, la matrice des coefficients d'amortissement est supposée diagonalisable dans la même base que celle qui diagonalise la matrice de rigidité. Il existe un grand nombre de techniques numériques de résolution des équations de l'équilibre dynamique tel que la méthodes de superposition modale /16/. Une technique largement employée pour modéliser l'amortissement, est de ne retenir pour le calcul de la réponse dynamique que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement modale. Si $[C]$ est la matrice d'amortissement visqueux équivalent dans l'espace physique, $[\Phi]$ la matrice des vecteurs propres du système non amorti, m_i la masse modale du mode i de pulsation ω_i /16/ :

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [\text{diag}(C_i)] = [\text{diag}(2m_i \omega_i \xi_i)] \quad (1-3)$$

Dans l'espace physique, **Rayleigh** exprime la matrice d'amortissement visqueux équivalent du système $[C]$ comme une combinaison linéaire des matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$ /5/16/48/:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (1-4)$$

c'est la raison pour la quel l'amortissement est dit proportionnel

α et β sont des coefficients qui conduisant à une condition d'orthogonalité, laquelle permettra de découpler les forces d'amortissement de la même manière qu'elle découple les forces d'inertie et de rigidité. Ces deux coefficients sont déterminé en donnant des valeurs initiales pour le facteur d'amortissement.

La condition d'orthogonalité conduira pour définir une loi sur les facteurs d'amortissement des modes en fonction de leurs fréquences :

$$\xi_i = \frac{C_i}{2m_i\omega_i} = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (1-5)$$

qui permettra d'obtenir une matrice d'amortissement diagonal.

Aussi soit-elle, la forme de la matrice d'amortissement de Rayleigh ne rend pas compte de vraie nature de la dissipation d'énergie.

Nous citerons aussi les méthodes analytiques ou expérimentales d'identification de la matrice d'amortissement. En effet,

Hasselman /31/ suppose un amortissement visqueux linéaire et étudie deux types d'amortissement: un amortissement proportionnel, où la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, et un amortissement non-proportionnel, qui généralement n'est pas diagonalisable.

La méthode des modes normaux peut être employée pour l'analyse des structures. D'abord, les équations du mouvement sont écrites en termes de coordonnées modales. Généralement l'amortissement est introduit ensuite en supposant qu'il est diagonal.

Wilson et Penzien /53/ ont présenté une méthode analytique de construction de la matrice de l'amortissement. Cette matrice peut être évaluée en premier lieu en utilisant la série de Caughey où en considérant que $[C]$ est la somme d'une série de matrices où chacune d'elles provient de l'amortissement d'un mode seulement de la structure.

Il apparaît clairement qu'un nombre de degrés de liberté important est un handicap pour la méthode de Wilson et qu'il est pratiquement impossible de considérer l'amortissement pour un mode de vibration tout en éliminant la contribution des autres modes.

Caravani et Thomson /12/ ont introduit une technique numérique pour l'identification de l'amortissement. Cette méthode qui se fait d'une manière itérative est basée sur la solution de l'équation différentielle du mouvement. La nature itérative de l'algorithme impose des estimations initiales des coefficients de l'amortissement pour construire la matrice $[C]$. Cette approche nécessite la connaissance des matrices de masse $[M]$ et de rigidité $[K]$.

Potter /46/ présente une méthode basée sur la connaissance de la fonction de transfert et son inverse dans le domaine des fréquences. La matrice de l'amortissement est déduite de la valeur de la dérivée de la fonction de transfert au pôle égal à zéro. Les matrices de masse et de rigidité sont déterminées par le même procédé.

Beliveau /7/ avait utilisé les fréquences naturelles, les rapports d'amortissement, les formes modales et les angles de phase pour identifier les paramètres d'une matrice d'amortissement visqueux. L'identification est effectuée itérativement.

Pour **Ibrahim /33/** dans sa méthode proposée, il suppose que nous sommes donnés un modèle analytique du système aussi bien que des modes complexes mesurés. La première étape est de calculer les modes normaux à partir des modes complexes obtenus. Ces modes normaux sont ensuite employés dans la condition d'orthogonalité de la matrice de masse ce qui va permettre, ensuite, l'identification de la matrice analytique d'amortissement.

Fabunmi, Chang, et Vorwald /27/ Présentent une méthode pour l'identification de la matrice d'amortissement en utilisant des données de la réponse forcée dans le domaine de fréquence. Dans cette méthode ils supposent la connaissance de la matrice de masse, de rigidité, et des données de la réponse en fréquence.

Chen et al /15/ sont arrivés à identifier la matrice de l'amortissement d'une structure en commençant par la connaissance de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) par moyen expérimental. La matrice d'amortissement identifiée est fonction de la matrice de la fonction normale en fréquence et celle de la fonction de transformation, qui sont toutes les deux des dérivés de la FRF.

Gaylard /30/ présente une approche pour l'identification de l'amortissement dans le domaine de temps, et qui peut être liée aux méthodes d'analyse de modèle d'autocorrélation. Les investigations menées par l'auteur ont montré que cette méthode donne des bons résultats seulement pour le cas de modèle d'amortissement de Rayleigh.

D'autres sources analytiques qui ont été adressées pour l'identification de l'amortissement peuvent être trouvées dans beaucoup de références ; on cite à titre d'exemple: la méthode de Fritzen /29/, Mottershead et Foster /42/, Minas & Inman /41/, He et Ewins /32/, Pilkey /45/, Adhikari et Woodhouse /1/, Djakab et Benouar /20/, Kagawa /36/....etc.

Pour chacune de ces méthodes exposées, certains facteurs ont été négligés dans le but de faciliter leur mise en oeuvre. Chaque auteur a supposé des hypothèses précises pour le développement de sa propre méthode. Dans la pratique, il est nécessaire de comparer ces méthodes dans le contexte de disponibilité des informations utilisées pour les besoins de calculs. Généralement, les facteurs à considérer sont : la fiabilité, la durée du calcul, la complexité et la méthodologie.

En pratique, on peut trouver diverses méthodes, concernant l'identification et la mesure de l'amortissement à partir des moyens expérimentaux, pour lesquels l'amortissement est supposé constant tout au long de la structure étudiée.

Ces méthodes selon le type d'excitations :

- a) Identification de l'amortissement à partir des mesures de la réponse en vibrations libres ;
- b) Identification de l'amortissement à partir des mesures de la réponse en vibrations forcées.

Pour les vibrations libres, la méthode expérimentale la plus simple et la plus fréquemment utilisée consiste à mesurer le décrétement logarithmique des amplitudes des vibrations libres d'un système initiées par un moyen quelconque, le facteur d'amortissement réduit peut être déterminé à partir du rapport des amplitudes de déplacements mesuré à m cycles d'intervalle. Si Y_N est l'amplitude de la vibration en un instant quelconque et Y_{N+M} son amplitude M cycles plus tard, le facteur d'amortissement est donné par /16/ :

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} \quad (1-6)$$

où

$$\delta = \frac{1}{M} \ln \left(\frac{Y_N}{Y_{N+M}} \right) \quad (1-7)$$

représente le décrétement logarithmique.

Pour les essais expérimentaux avec des vibrations forcées, on note :

La méthode de demi-puissance (Half-power method) qui est une méthode basée sur la mesure de la fonction de transfert (Fonction de Réponse en Fréquence) $H(f)$, de la structure à partir du rapport réponse à l'excitation.

La construction de la courbe $H(f)$ en fonction de la fréquence, et pour $\frac{1}{\sqrt{2}}H(f_0)$ (f_0 est la fréquence de résonance) on définit la largeur de bande Δf ce qui permet de définir un facteur appelé facteur de qualité :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (1-8)$$

le facteur d'amortissement n'est autre que le rapport inverse de $2Q$:

$$\xi = \frac{1}{2Q} \quad (1-9)$$

La méthode de demi-puissance est aussi présentée par d'autre façon en utilisant le même principe de base, c'est-à-dire, déduire la largeur de bande de fréquence correspondant à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la réponse à la résonance. Ces réponses sont le résultat d'une excitation harmonique.

C'est une technique de mesure de l'amortissement basée sur l'observation du comportement harmonique de la structure dans le but de construire la courbe représentant les variations des amplitudes des déplacements en fonction des fréquences appliquées sous chargement harmonique à des intervalles de fréquences encadrant la fréquence de résonance.

Les valeurs des fréquences f_1 et f_2 à demi-puissance s'obtiennent sachant que l'amplitude de la réponse est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fois l'amplitude de résonance. Ensuite, de là on obtient le rapport suivant /16/ :

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (1-10)$$

ce qui permet de calculer le facteur d'amortissement.

Une autre méthode pour mesurer expérimentalement le facteur d'amortissement, elle aussi basée sur l'observation de la variation des amplitudes en fonction des intervalles de fréquences d'excitations d'un chargement harmonique. Le tracé de la courbe de l'amplitude en fonction de la variation de la fréquence permettra d'en déduire la réponse maximale $Y_{\max}$ supposée correspondant à l'amplitude à la résonance. Le facteur d'amortissement est calculé à partir de cette expression /16/ :

$$\xi = \frac{Y_0}{2 Y_{\max}} \quad (1-11)$$

où Y_0 représente la réponse à l'état statique.

Une autre nouvelle technique, permettant de calculer le facteur d'amortissement, en utilisant la méthode de transformée de Hilbert /8/9/RT.4/ a été proposée par **C.B.Smith et N.M.Wereley** /51/. Selon leur méthode, l'analyse de l'amortissement consiste à calculer l'enveloppe de la réponse transitoire $y(t)$ en prenant sa transformée de Hilbert $\tilde{y}(t)$, qui est le signal $y(t)$ décalé de 90° , le facteur d'amortissement dans le domaine du temps, est exprimé comme suit /51/:

$$\xi = \frac{1}{\omega_0} \frac{d(\ln(A(t)))}{dt} \quad (1-12)$$

où $A(t)$ l'enveloppe du signal $A(t)$ est donné par l'expression suivante:

$$A(t) = \sqrt{y^2(t) + \tilde{y}^2(t)} \quad (1-13)$$

Dans la bibliographie que nous avons consulté il est rare de trouver des travaux de recherche concernant l'identification de la variation de l'amortissement en fonction du temps. Même si ces recherches existent, elles sont très peu courantes, ce qui explique la complexité du problème d'identification de l'amortissement en fonction du temps.

Cependant, il est intéressant de signaler les travaux menés par **D.W.Chang et al /13/**. Ces auteurs ont proposé une alternative conduisant à un modèle permettant de calculer la variation de l'amortissement en fonction du temps basé sur une analyse d'intégration des réponses structurales. L'amortissement considéré par cette méthode est du type visqueux équivalent. Cette méthode consiste à calculer d'abord les facteurs d'amortissement qui sont fonction de la fréquence (donc un calcul dans le domaine fréquentiel) en utilisant des fonctions théoriques d'impédance et des observations expérimentales. Ensuite incorporer ces facteurs avec la rigidité structurale pour obtenir, finalement, la variation de l'amortissement en fonction du temps par la technique de transformé de Fourier inverse.

De leurs côté, **Simon et Tomlinson /50/** ont employé la transformée Hilbert pour identifier la présence des effets d'amortissement non linéaires en utilisant des données dans le domaine des fréquence.

1.4 Objectifs et organisation de la mémoire

Pour de nombreux matériaux de construction, il ne sera pas possible de supposer un comportement linéaire et de considérer que les mécanismes de dissipation d'énergie sont invariables sur l'ensemble de la réponse en fonction du temps /17/.

Dans ce présent travail, nous proposons une alternative pour l'identification de la variation de l'amortissement en fonction du temps. Cette méthode permet de voir le comportement instantané de l'amortissement sur toute l'histoire de la réponse. Il s'agit-là d'une identification, par moyen expérimental, de l'amortissement matériel existant au sein du matériau et ceci à travers une équation du mouvement reliant les différentes forces agissant sur la structure. On suppose que cet amortissement est du type visqueux.

Ceci est réalisé en trois étapes:

- Développement de la méthode théorique permettant l'identification de l'amortissement en fonction du temps
- Vu que notre méthode nécessite la connaissance préalable de la réponse de notre système à chaque instant t , le but sera d'acquérir les réponses par moyen expérimental en utilisant la technique d'acquisition de données
- Ensuite exploitation des réponses obtenues pour le calcul de l'amortissement en fonction du temps.

Pour atteindre notre objectif, ce travail va être réalisé en deux parties, la première partie correspond à une étude théorique dans laquelle nous faisons le développement de la méthode proposée. Ensuite des démonstrations seront présentées pour la validation de cette méthode, et ceci en faisant des applications théoriques. La deuxième partie correspond à l'étude expérimentale, où nous présentons l'équipement expérimental utilisé pour l'identification de l'amortissement. Nous montrons aussi ses domaines d'application pour l'identification d'autres paramètres qui ne sont pas moins importants, tel que les fréquences de résonances et le module d'élasticité de Young. Finalement une investigation pour le calcul de l'amortissement en exploitant les réponses obtenues expérimentalement est entreprise.

Tout notre travail est réalisé à travers les chapitres suivants :

Chapitre 2 : Développement théorique de la méthode proposée pour l'identification de l'amortissement

Ce chapitre sera consacré au développement théorique de la présente méthode permettant le calcul de l'amortissement en fonction du temps, connaissant la réponse du système considéré. Ensuite nous avons fait des applications théoriques pour la validation de notre modèle, une discussion sur les résultats obtenus par l'application de cette méthode.

Chapitre 3 : Acquisition et traitement de données expérimentales

L'expérimental nécessite à la fois une bonne connaissance de la théorie des vibrations, une bonne maîtrise des techniques de mesure et des outils d'analyse des résultats

expérimentaux performants. Pour ces raisons, dans ce présent chapitre nous présentons les notions de base concernant les tests dynamiques qui sont largement utilisés dans divers domaines d'engineering, que nous utiliserons pour l'identification de l'amortissement. L'identification d'autres paramètres tel que les fréquences de résonance (fréquences propres) des systèmes et ainsi que le module d'élasticité de Young pour certains modes de vibrations est entreprise.

Chapitre 4 : *Etude expérimentale et mise en œuvre de la méthode proposée*

Dans ce chapitre, nous allons faire des tests expérimentaux sur différents type de barres soumises à des excitations impulsionnelles et les données acquises seront exploitées pour l'identification de l'amortissement en fonction du temps. Les résultats de notre méthode sous les essais expérimentaux seront analysés.

Chapitre 5 : *Conclusions et recommandations*

Nous achevons notre travail par une conclusion générale où nous analysons la nature des résultats obtenus par application de notre méthode proposée, et d'énumérer les recommandations ou pour enrichir la méthode proposée.

Chapitre 2

Développement théorique de la méthode proposée pour l'identification de l'amortissement

Selon les phénomènes physiques mis en cause, on distingue plusieurs types d'amortissement.

- l'amortissement visqueux pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse ;
- l'amortissement hystérétique pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle au déplacement et de signe opposé à celui de la vitesse ;
- l'amortissement de Coulomb qui correspond à un amortissement de frottement: la force d'amortissement est proportionnelle à la force de réaction normale à la direction du déplacement et de signe opposé à celui de la vitesse.

Le modèle, visqueux équivalent, est le plus utilisé pour les applications courantes. Ce choix est dû au fait qu'il présente une mise en équation du mouvement des systèmes dynamiques simple par rapport à d'autres modèles.

Considérons le cas d'un système masse ressort et un amortisseur visqueux comme illustré ci-dessous (figure-1).

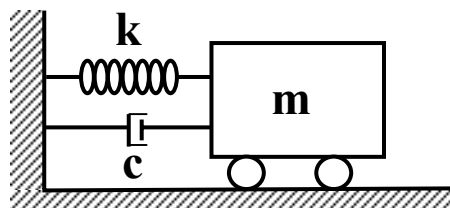


Figure-1- Système à un seul degré de liberté

La théorie de la friction interne suppose que dans les corps solides il existe des actions visqueuses qui peuvent être comparées à la viscosité d'un fluide et qui sont proportionnelles à la première dérivée de la déformation /38/. D'où la force d'amortissement

$$F_D = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (2-1)$$

Les caractéristiques du système, qui représentent des grandeurs généralisées, produisant des forces agissant sur la masse du système. L'écriture de l'équation du mouvement consiste à exprimer à tout instant t l'équilibre de ces forces.

$$F_I + F_D + F_S = F \quad (2-2)$$

Le principe de d'Alembert (ou Newton) considère que la force d'inertie est le produit de la masse et de l'accélération :

$$F_I(t) = m \ddot{y}(t) \quad (2-3)$$

De même la force de rigidité, elle est bien sûr supposée linéaire, est donnée par le produit de la rigidité et du déplacement :

$$F_S(t) = k y(t) \quad (2-4)$$

Si on reporte les trois expressions (2-1, 2-3 et 2-4), on obtient l'équation du mouvement de système comme étant :

$$m \ddot{y}(t) + C \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (2-5)$$

2.1 Développement de la méthode

Pour un mécanisme d'amortissement visqueux et pour une analyse non-linéaire, la force d'amortissement prend la forme suivante /13/:

$$F_D(t) = C(t) \dot{y}(t) \quad (2-6)$$

Le terme $C(t)$ représente la variation d'amortissement du système en fonction du temps.

Ainsi, on obtient l'équation du mouvement du système comme suit:

$$m \ddot{y}(t) + C(t) \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (2-7)$$

Pour les mécanismes non-linéaires, les méthodes d'analyses les plus puissantes sont celles qui dérivent de l'intégration pas à pas /4/5/6/16/17/21/22/56/. Les méthodes d'intégration pas à pas, nommées aussi méthodes directes, sont des procédures numériques qui satisfont l'équation d'équilibre dynamique pour des temps t_i discrets ; elles peuvent résoudre les systèmes d'équations différentielles comme ceux déjà donnés par l'expression (2-7). A l'instant t_i , cette expression peut s'écrire sous la forme suivante :

$$m \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + k y_i = F_i \quad (2-8)$$

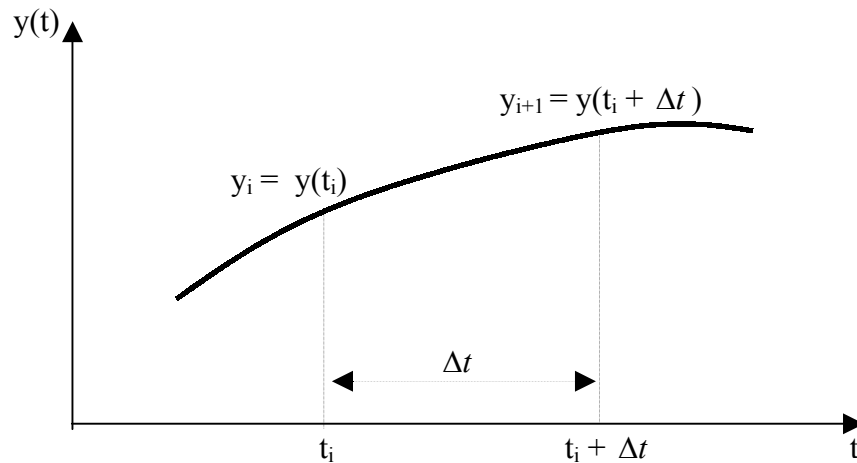


Figure-2- La variation de déplacement entre deux instants de temps

La méthode des différences centrales finies, l'une des méthodes d'intégration la plus utilisée pour les analyses non-linéaires, donne une haute précision et un maximum de stabilité si le pas Δt choisi est très petit /4/6/17/. Cette méthode est basée sur les formules des différences finies :

$$\ddot{y}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad (2-9)$$

$$\dot{y}_i = \frac{1}{2\Delta t} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (2-10)$$

la substitution de $\ddot{y}_i$ et $\dot{y}_i$ des équations (2-9) et (2-10) dans l'équation (2-8) mène à l'équation suivante :

$$C_i \left[\frac{1}{2\Delta t} (y_{i+1} - y_{i-1}) \right] = F_i - \left[\frac{m}{\Delta t^2} y_{i+1} + \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) y_i + \frac{m}{\Delta t^2} y_{i-1} \right] \quad (2-11)$$

l'équation (2-11) peut aussi prendre la forme suivante :

$$C_i \left[\frac{1}{2\Delta t} (y_{i+1} - y_{i-1}) \right] = \tilde{F}_i \quad (2-12)$$

avec

$$\tilde{F}_i = F_i - \left[\frac{m}{\Delta t^2} y_{i+1} + \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) y_i + \frac{m}{\Delta t^2} y_{i-1} \right] \quad (2-13)$$

d'où, l'amortissement à l'instant t_i est calculé à partir de la formule suivante :

$$C_i = \frac{2\Delta t}{y_{i+1} - y_{i-1}} \tilde{F}_i \quad (2-14)$$

En utilisant cette méthode, connaissant bien entendu les réponses et les forces d'excitation à chaque instant t_i . L'identification de la variation d'amortissement dépendra de l'incrément de temps Δt qui doit être assez petit pour permettre une bonne représentation de $C(t)$.

La nature temporelle du système de dissipation est prise en considération par le calcul de nouvelles caractéristiques d'amortissement relatives à l'état déformé pris au début de chaque incrément de temps.

2.2 Application théorique de la présente méthode d'identification

Dans cette partie, nous utilisons un système analytique pour analyser la capacité de la méthode proposée pour l'identification de l'amortissement, et aussi pour voir ses limites d'application.

On suppose un système à 1 seul degré de liberté de masse m , et de rigidité k , avec un amortissement C . (Figure.3) le système sera soumis à une force d'excitation $F(t)$.

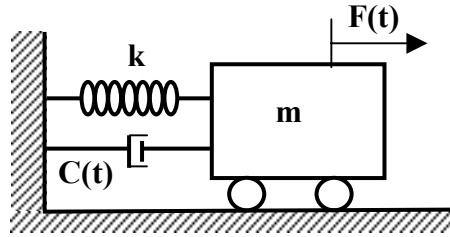


Figure-3- Système à un seul degré de liberté

Dans cette application nous supposons un d'amortissement du type visqueux équivalent, et aussi cet amortissement sera supposé égal à une valeur constante C tel que :

$$C(t) = C = 2\xi m \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-15)$$

ω_0 est la pulsation de premier mode de vibration du système.

En remplaçant l' expression (2-15) dans l'équation de mouvement on obtient :

$$m \ddot{y}(t) + 2\xi m \omega_0 \dot{y}(t) + k y(t) = F(t) \quad (2-16)$$

En considérant le cas où l'excitation est une impulsion caractérisée par la fonction de DIRAC $\delta(t)/2\pi$, la solution de l'équation en terme de déplacement pour un système sous amorti ($\xi < 1$) est :

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi\omega_0 t) \sin((\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) t) \quad (2-20)$$

Connaissant les différents facteurs de cette expression, nous avons calculé la réponse de notre système à chaque instant t . Nous avons exploité ces valeurs de la réponse pour l'identification de l'amortissement en utilisant la méthode proposée qui est basée sur l'utilisation de la relation des différences finies. L'organigramme de cette démarche est représenté ci-après.

Organigramme de la démarche de calcul de l'amortissement pour l'exemple théorique

Entré des données :
 $m, \omega_0, \xi \implies C_{th} = 2 m \xi \omega_0$

Calcul de la réponse sous une impulse unitaire pour un intervalle du temps t

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi\omega_0 t) \sin((\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) t)$$

Exploitation de la réponse totale obtenue pour l'identification de l'amortissement a chaque instant t_i

$$C_i = \frac{2 \Delta t}{y_{i+1} - y_{i-1}} \tilde{F}_i$$

Comparaison entre chaque valeur identifiée de C_i avec celle de C_{th}

L'identification de l'amortissement a été faite en adoptant des système dynamique à un seul degré de liberté de masse $m = 0,4 \text{ kg}$ et ayant des valeurs pour la fréquence propre du système qui varient de 50 à 600 rad/sec, et aussi des systèmes dynamiques à un seul degré de liberté ayant des valeurs de facteur d'amortissement théorique varient entre 1 à 10%. Les résultats obtenus sont présentées dans les graphes ainsi que dans les tableaux ci-dessous.

❖ Identification de l'amortissement en fonction de la variation de la fréquence propre de vibration

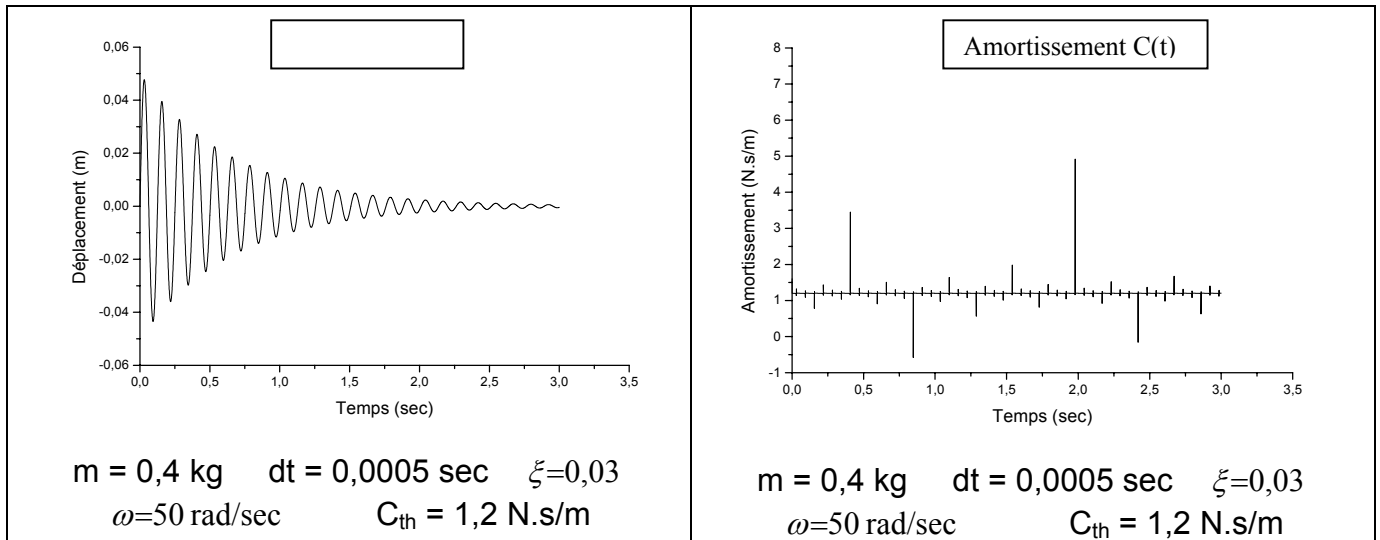


Figure-4-a- Identification de l'amortissement pour $\omega = 50 \text{ rad/sec}$

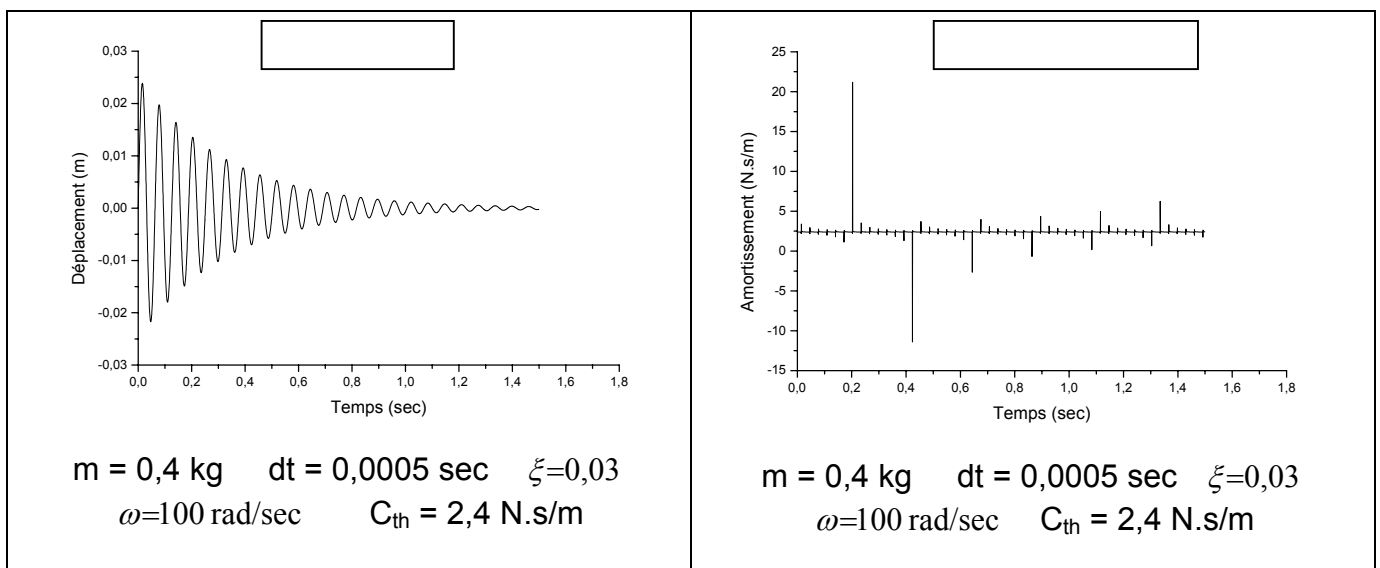


Figure-4-b- Identification de l'amortissement pour $\omega = 100 \text{ rad/sec}$

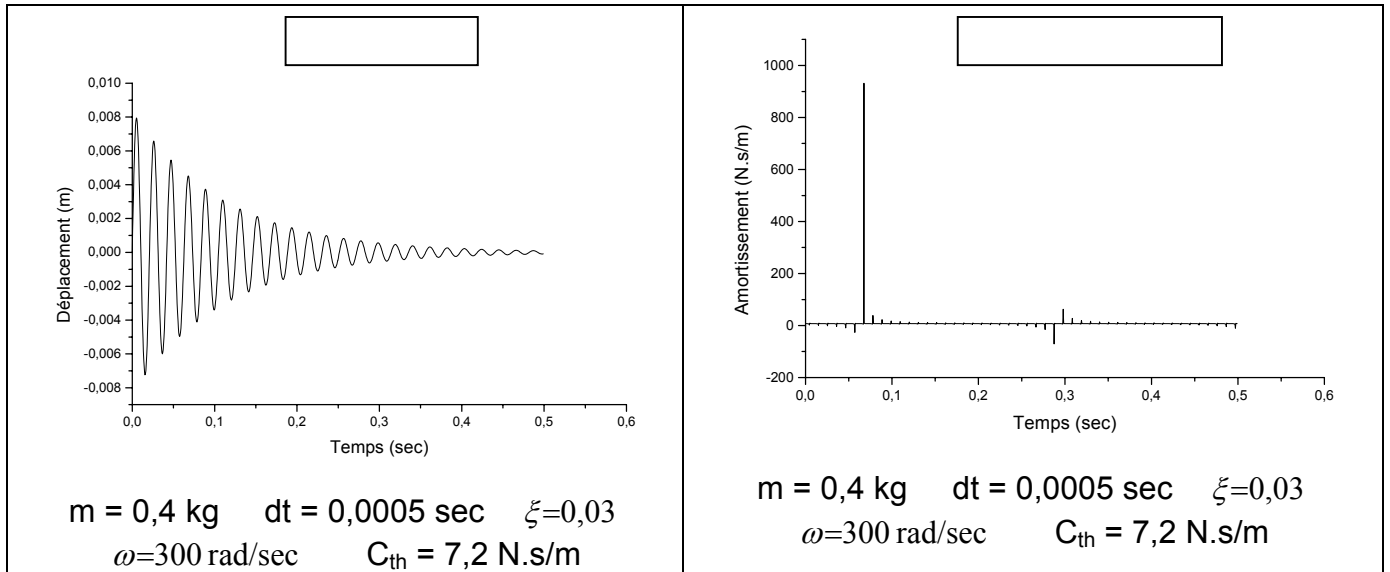


Figure-4-c- Identification de l'amortissement pour $\omega = 300 \text{ rad/sec}$

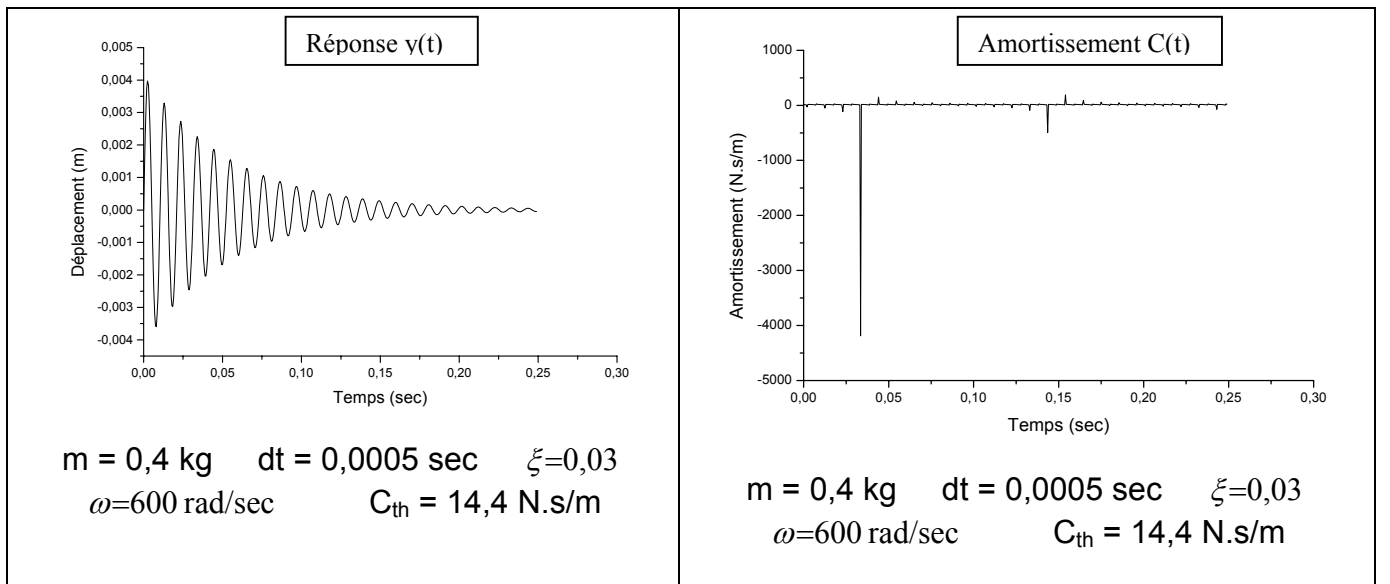


Figure-4-d- Identification de l'amortissement pour $\omega = 600 \text{ rad/sec}$

❖ Identification de l'amortissement en fonction de la variation de facteur d'amortissement ξ

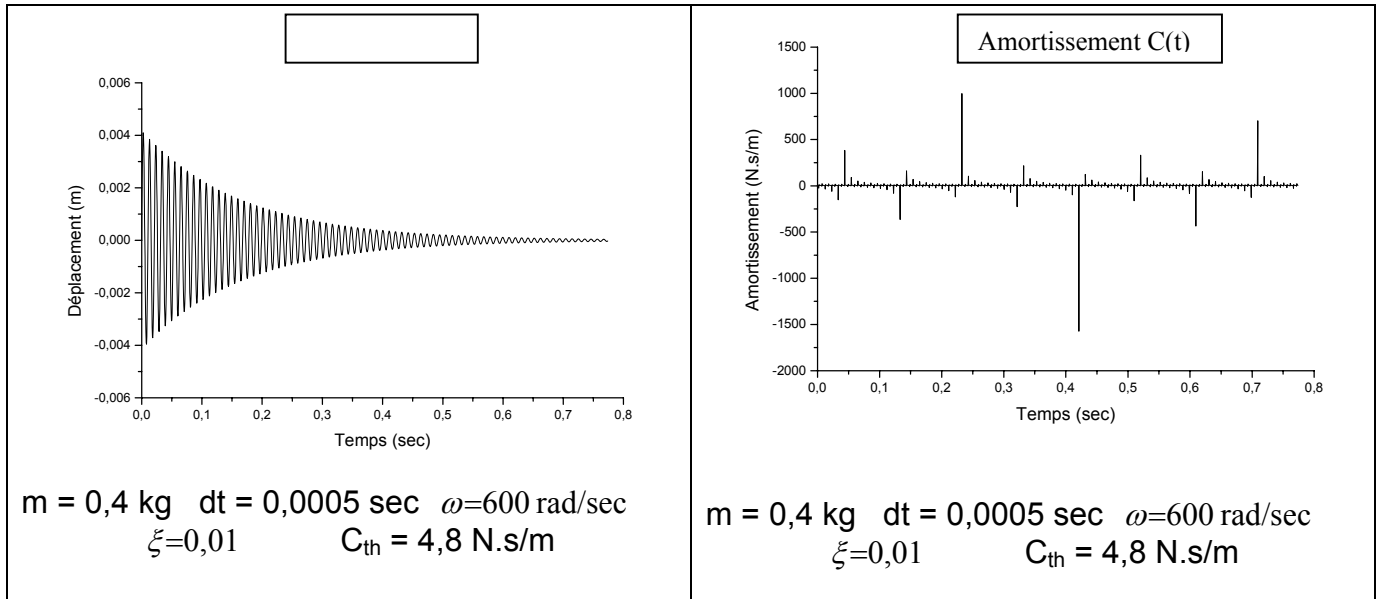


Figure-5-a- Identification de l'amortissement pour $\xi = 1 \%$

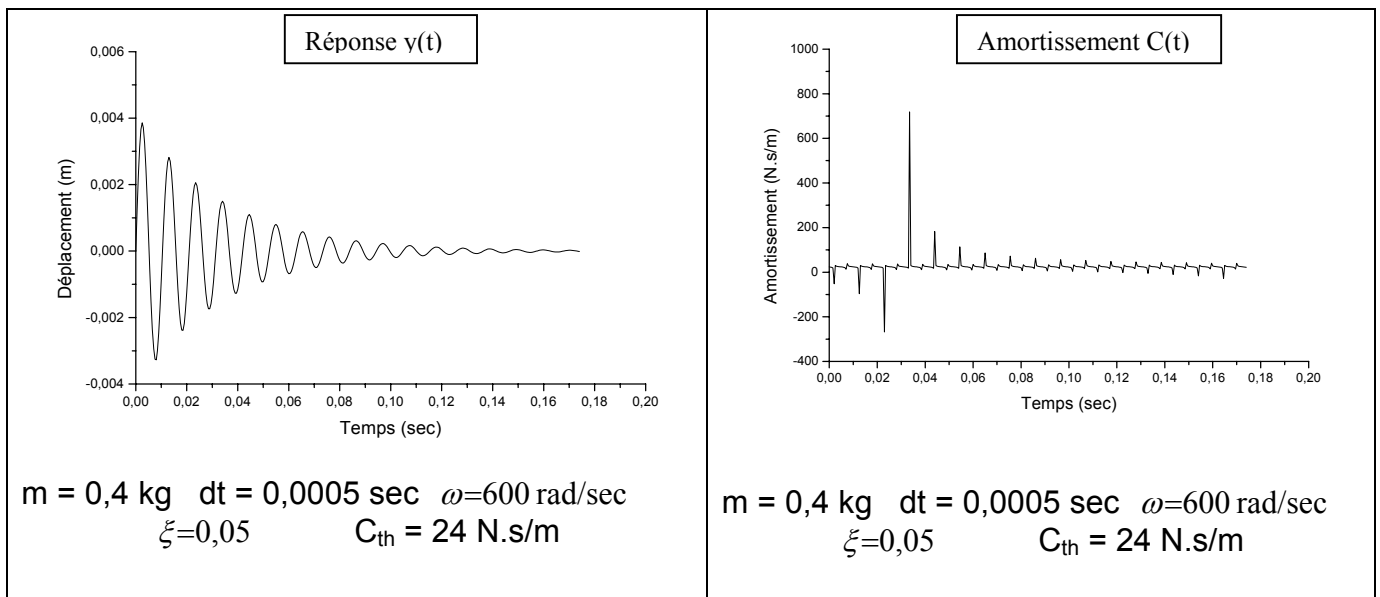
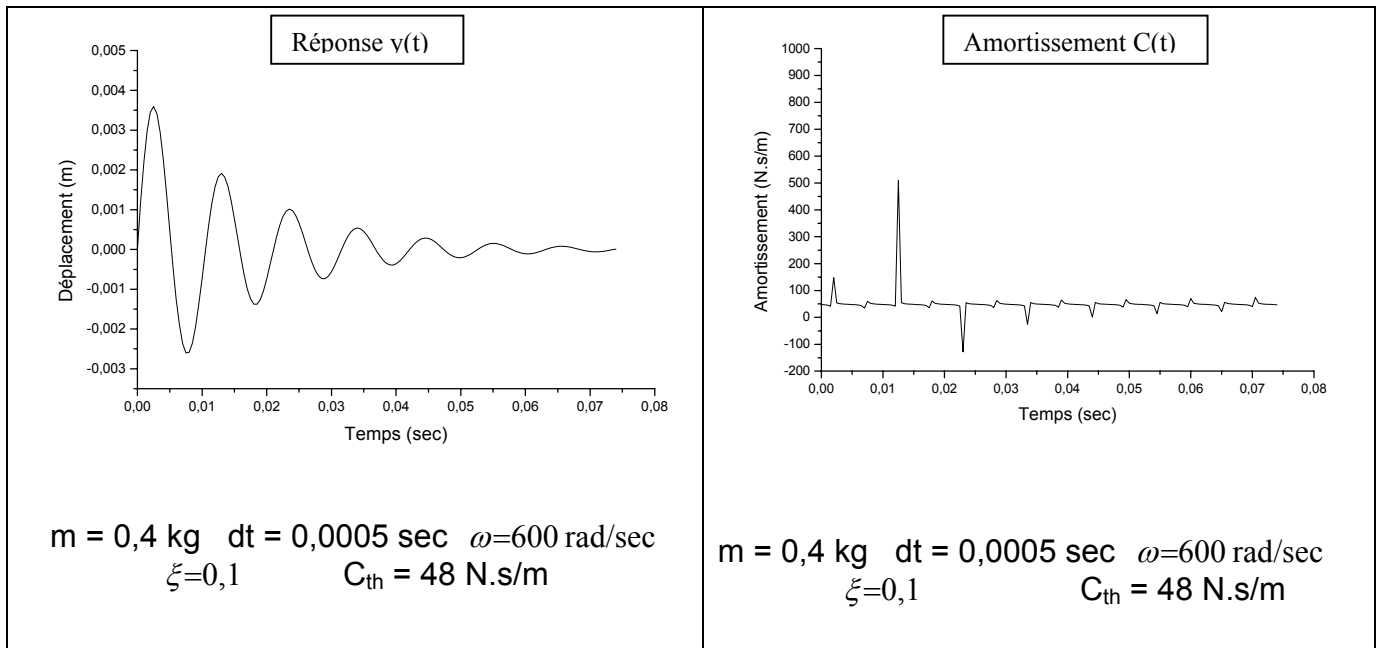


Figure-5-b- Identification de l'amortissement pour $\xi = 5 \%$


 Figure-5-c- Identification de l'amortissement pour $\xi = 10 \%$

Sur l'ensemble des graphes qui donnent l'amortissement en fonction du temps, nous remarquons la présence de pics correspondant à une instabilité de la méthode proposée (expression 2-14) :

$$C_i = \frac{2 \Delta t}{y_{i+1} - y_{i-1}} \tilde{F}_i$$

Cette instabilité est due a la forme de l'expression 2-14 dans sa partie inférieure qui dépend du rapport existant entre les réponse y_{i+1} et y_{i-1} . Les pics peuvent atteindre même des valeurs infini dans le cas ou la différence entre la réponse a une instante t_{i+1} et t_{i-1} tendent vers zéro. Dans nos calculs, nous n'avons pas tenu compte des valeurs infinis.

Cependant, ces pics n'ont pas une grande influence sur la valeur moyenne de l'amortissement identifié. Par exemple pour le système dynamique avec une fréquence de vibration de 50rad/sec, nous avons enregistré un rapport de 1,0005 entre la valeur de l'amortissement moyenne identifié $C_{moy \text{ ident}}$ sur la valeur théorique C_{th} qui est de 1,2000 N.s/m. Nous avons aussi enregistré un écart-type de 0,0678 pour les valeurs de l'amortissement identifiés par rapport a la valeur moyenne $C_{moy \text{ ident}}$ qui est de 1,2006 N.s/m.

Par contre dans le cas des systèmes ayant des fréquences propres de vibration importante, nous pouvons remarqué une différence remarquable pour l'amortissement identifié par rapport a la valeur théorique, comme le cas du système possédant une fréquence de vibration de 600 rad/sec, dans lequel nous avons enregistré un rapport de 0,3453 entre la valeur de l'amortissement moyenne identifié $C_{moy \text{ ident}}$ sur la valeur théorique C_{th} qui est de 14,4000 N.s/m, et aussi nous avons enregistré un écart-type de 190,1652 pour les valeurs de l'amortissement identifiés par rapport a la valeur moyenne $C_{moy \text{ ident}}$ qui est de 4,9724 N.s/m.

Dans le tableau-1 nous avons présenté l'ensemble des résultats trouvés pour lequel nous avons présenté les résultats concernant le rapport entre l'amortissement théorique avec celui identifié par la méthode proposée et qui est en réalité la moyenne des valeurs obtenus sur la marge du temps de la réponse et l'écart-type.

Tableau-1- Evaluation de l'amortissement en fonction de la variation de la fréquence de vibration

Pulsation de Vibration Propre ω (Rad/sec)	50	100	300	600
C_{th} (N.s/m)	1,2000	2,4000	7,2000	14,4000
C_{moy ident} (N.s/m)	1,2006	2,4014	8,0533	4,9724
Rapport C_{moy ident} / C_{th}	1,0005	1,0006	1,1188	0,3453
Ecart-Type	0,0678	0,4610	29,5012	190,1652

De même, nous avons analysé la méthode proposé en variant le facteur d'amortissement théorique. Nous pouvons remarquer (tableau 2) que la valeur de facteur d'amortissement a une influence sur la fiabilité des résultats, mais toujours avec la présence de pics avec des écarts-type moins important pour les systèmes plus amortis comme le cas du système avec un facteur d'amortissement de 0,1, cela correspond à une valeur d'amortissement théorique de 48,0000 N.s/m et une valeur moyenne identifiée de 49,9837 N.s/m avec un écart-type de 42,4852. Pour le cas de système a faible amortissement avec un facteur d'amortissement de 0,01 nous avons enregistré un grand écart type, de l'ordre de 56,6934, par rapport a la valeur théorique, égale à 4,8000 N.s/m, et à la valeur identifiée de l'amortissement égale à 4,7247 N.s/m.

Tableau-2- Evaluation de l'amortissement en fonction de la variation de facteur d'amortissement

Facteur d'amortissement ξ (%)	1	5	10
C_{th} (N.s/m)	4,8000	24,0000	48,0000
C_{moy ident} (N.s/m)	4,7247	25,4970	49,9837
Rapport C_{moy ident} / C_{th}	0,9843	1,0624	1,0413
Ecart-Type	56,6934	43,1020	42,4852

Les systèmes utilisés jusqu'à présent, possèdent des fréquences propres de vibration élevées. Or, les constructions Génie Civil, sont des structures possédant des basses fréquences de vibration. Il serait très intéressant d'appliquer la méthode proposée à des modèles des structures réelles possédant des fréquences de vibration basses.

L'exemple du château d'eau (figure-6-a), a été l'objet d'une investigation théorique expérimentale et théorique /40/, pour l'évaluation d'un modèle mathématique permettant de calculer la fréquence de résonance du premier mode de vibration, et ceci en la comparant avec la valeur expérimentale trouvée.

La valeur expérimentale de la pulsation de vibration trouvée est égale à 13,446 rad/sec. Dans l'analyse théorique, ce château d'eau a été modélisé comme un système à un seul degré de liberté (figure-6-b) en utilisant le critère des systèmes énergiquement équivalent décrits par Tzenove et Bonneville /52/.

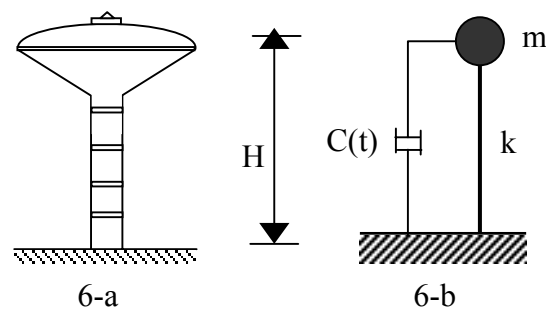


Figure-6- modélisation d'un château d'eau en un système équivalent d'un seul degré de liberté

Pour le calcul théorique de la fréquence du premier mode de vibration, une marge de 24MPa à 28MPa pour la valeur de la résistance à la compression a été adoptée. La pulsation du premier mode obtenue égale a 16,2169 rad/sec pour une valeur de la résistance à la compression de 24 MPa et de 16,6379 rad/sec pour une valeur de résistance a la compression de 28 MPa.

Théoriquement nous avons soumis ce modèle à une force unitaire de forme impulsionnelle. Les réponses obtenues considèrent une valeur d'amortissement théorique constante comme le cas des exemples précédents. Nous avons adopté une valeur pour le facteur d'amortissement de 5%. Les réponses obtenus ont été exploitées pour l'identification de l'amortissement comme présenté sur les figures ci-dessous (figures : 7-a, 7-b, et 7-c).

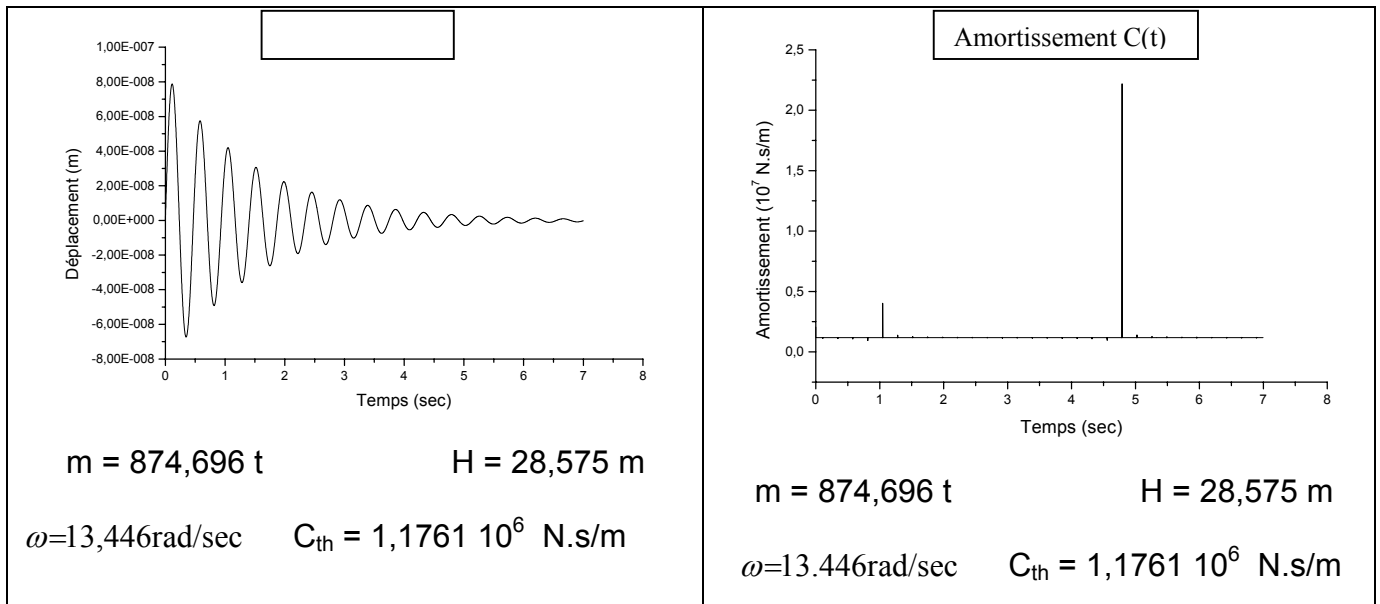


Figure-7-a- Identification de l'amortissement pour le cas de château d'eau avec $\omega = 13,446 \text{ rad/sec}$

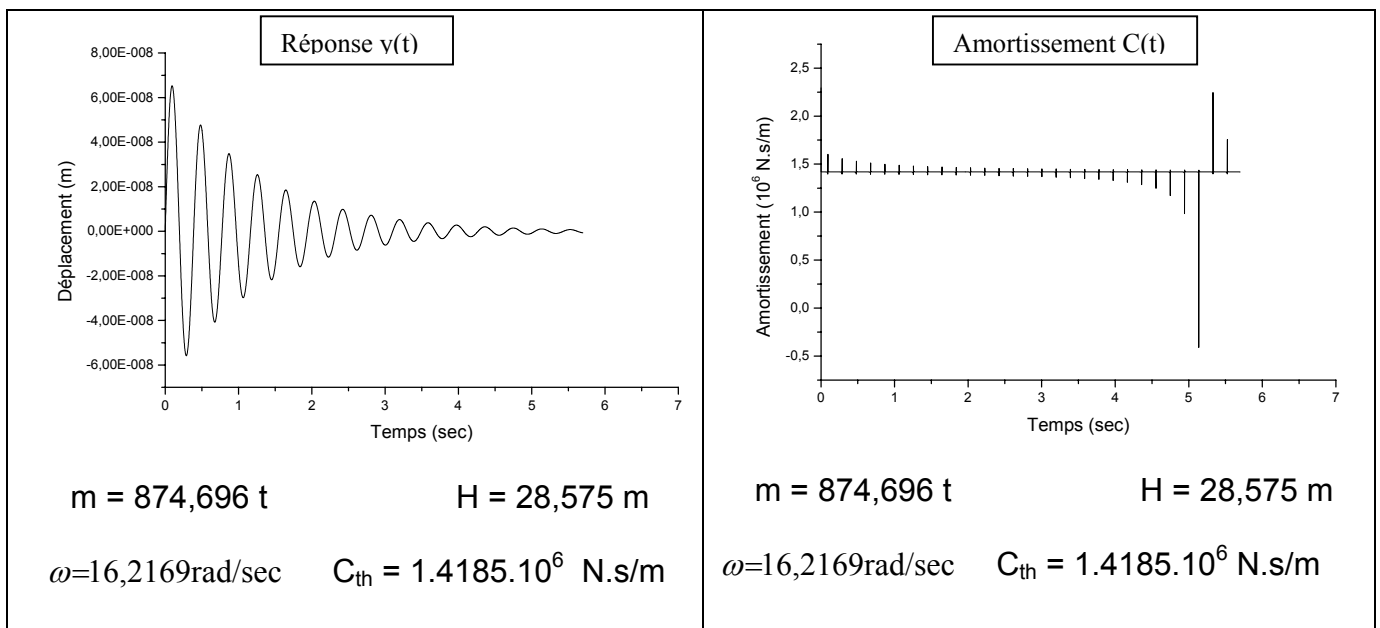
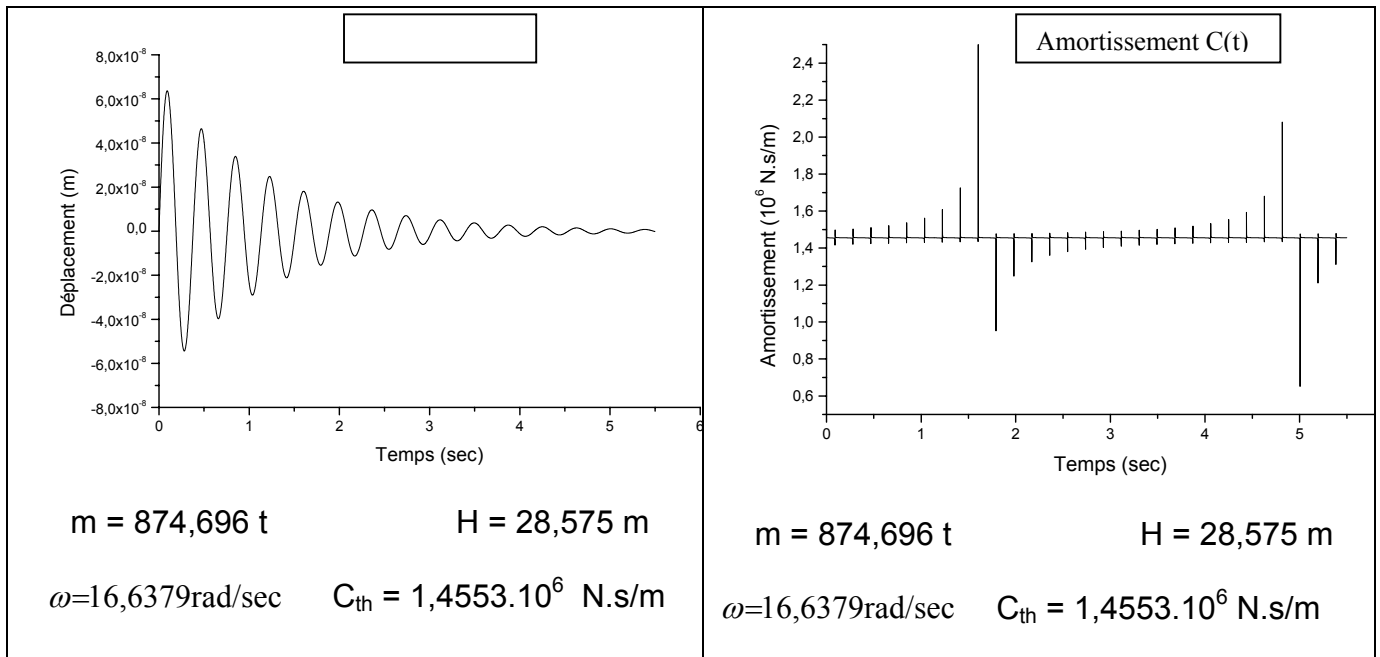


Figure-7-b- Identification de l'amortissement pour le cas de château d'eau avec $\omega = 16.2169 \text{ rad/sec}$


 Figure-7-c- Identification de l'amortissement pour le cas de château d'eau avec $\omega = 16.6379 \text{ rad/sec}$

Le tableau-3 présente l'ensemble des résultats obtenus pour les 3 fréquences propres de vibration, nous remarquons qu'il y a une satisfaction malgré qu'il y est des écart-types très importants, qui sont dus aux pics obtenus dans les cas de l'amortissement en fonction du temps. Ces pics sont la conséquence de la forme de l'expression de la méthode proposée (expression 2-14) qui dépend du rapport de différence entre la réponse à un instant t_{i+1} avec celle d'un instant t_{i-1} .

Tableau-3- Evaluation de l'amortissement pour le cas du château d'eau en fonction de la fréquence expérimentale et théorique

Pulsation de Vibration Propre ω (Rad/sec)	13,446	16,2169	16,6379
C_{th} (N.s/m)	$1,1761 \cdot 10^{+6}$	$1,4185 \cdot 10^{+6}$	$1,4553 \cdot 10^{+6}$
$C_{moy \text{ ident}}$ (N.s/m)	$1,1797 \cdot 10^{+6}$	$1,4184 \cdot 10^{+6}$	$1,4556 \cdot 10^{+6}$
Rapport $C_{moy \text{ ident}} / C_{th}$	1,0030	1,0000	1,0002
Ecart-Type	$2,5374 \cdot 10^{+5}$	$3,0771 \cdot 10^{+4}$	$2,6466 \cdot 10^{+4}$

Chapitre 3

Acquisition et traitement de données expérimentales

L'étude expérimentale de la vibration structurale a toujours fourni une contribution importante pour comprendre et contrôler de nombreux phénomènes de vibration afin d'obtenir une description mathématique de leur comportement dynamique. Aujourd'hui, les problèmes résolus en vibration des structures présentent une diminution du risque dans les calculs pour plusieurs domaines d'engineering :

- études de problèmes de bruit ou de vibration
- vérification des modèles d'éléments finis
- simulation de la réponse structurelle
- modifications structurelles
- Conception d'amortisseurs accordés....etc.

Aujourd'hui, la science d'engineering possède un très grand nombre de publications et travaux, en particulier les manuels de divers équipements, exposant les principaux aspects concernant ce sujet et fournissant un guide complet de la théorie, de la pratique sur les essais d'acquisition et d'analyse des données.

Dans le domaine de la dynamique, l'application la plus généralement utilisée est la mesure des modes de vibration afin de les comparer à ceux obtenus par la méthode des éléments finis ou tout autre modèle théorique. Cette application est souvent utilisée dans le but de valider le modèle théorique avant son utilisation, afin de prévoir les niveaux de réponse des systèmes dynamiques aux excitations complexes.

Généralement, on estime que la confirmation des modes propres de vibration par des essais peut fournir la réassurance pour la validation du modèle qui peut alors être mis dans d'autres domaines d'utilisation /26/.

3.1 Types de signaux à mesurer

les données représentant un phénomène physique peuvent être classées en deux catégories suivant le fait que le signal est de nature déterministe ou non-déterministe /48/

- Données déterministes

Les données de ce type sont celles qui peuvent être décrites par une relation mathématique explicite. On peut les classer en 4 sous-catégories : les données périodiques sinusoïdales, les données périodiques complexes, les données non-périodiques « pseudo-périodique » et les données non-périodiques transitoires.

- Données non-déterministes

Les phénomènes qui ont un caractère aléatoire produisent des données qui ne peuvent être décrites par des relations mathématiques explicites ; ce sont alors des données non-déterministes.

3.2 La composition d'une chaîne d'acquisition

Les techniques de mesure des sollicitations exercées sur les structures et les réponses de ces dernières pour l'analyse dynamique comprennent trois aspects fondamentaux /10/18/23/ 24/ /25/26/39/45/49/54/55/ :

- Le mécanisme permettant d'exciter correctement la structure
- Celui permettant de mesurer les signaux souhaités (forces, accélérations, déplacement...etc.)
- Et enfin celui qui assure l'extraction des informations que l'on désire acquérir.

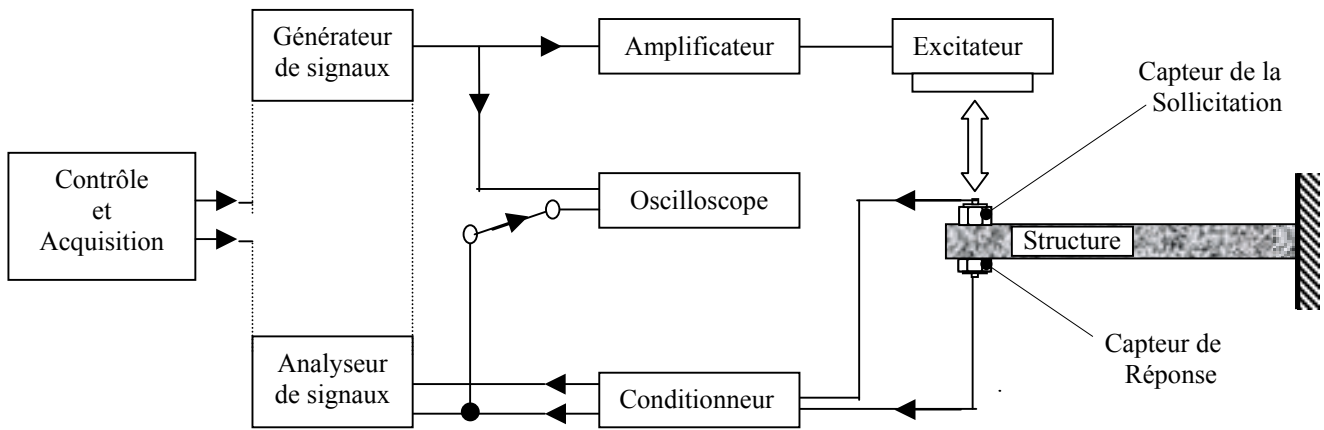


Figure-8–Schéma de composition d'une chaîne d'acquisition

Les principaux composants de la chaîne de mesure sont les suivants /3/24/34/39/:

a)- Le générateur de signaux : délivre des signaux de faible puissance et de différentes natures ; sinusoïdal (par un oscillateur), aléatoire (par un générateur de bruit), transitoire (par un générateur ou un marteau d'impulsion), périodique (par un générateur spécial capable de produire un signal dans une bande de fréquence donnée),

b)- l'Amplificateur de signaux : amplifie le signal d'entrée afin de l'adapter à la puissance de l'excitateur

c)- l'Excitateur : permet d'exciter la structure étudiée au moyen de mécanisme divers ; pots d'excitation électrodynamiques (magnétiques, hydrauliques...etc.), marteaux d'impact.

d)- le Capteur : délivre un signal proportionnel à la quantité physique mesurée (force, accélération, vitesse, déplacement).

e)- le Conditionneur : amplifie le signal (charge ou tension) de manière à l'analyser plus facilement.

f)- l'Analyseur de signaux : a la même fonction de base qu'un voltmètre (mesure de la tension) mais permet en plus de visualiser et d'interpréter les signaux complexes dans le domaine fréquentiel.

3.2.1 Excitation de la structure

3.2.1.1 Les différents types d'excitateurs

Les excitateurs peuvent être classés en deux catégories : ceux directement en contact avec la structure étudiée pendant toute la durée de l'essai et ceux qui agissent à distance ou qui ne sont en contact que pendant un certain laps de temps (cas des marteaux d'impulsion). Le tableau-4 présente les principaux avantages et inconvénients des différents types d'excitateurs.

Tableau-4- Principaux avantages et inconvénients de différents types d'excitateurs /19/38/

Type d'excitateur	Avantages	Inconvénients
Excitateur électrohydraulique	- Possibilité d'appliquer simultanément une charge statique et une charge dynamique - Amplitudes des déplacements imposés importantes - Encombrement réduit, légèreté	- Coût élevé
Excitateur électromagnétique	- Fréquence et amplitude contrôlables de manière indépendante - Coût raisonnable - Bonne reproductibilité	- Impédance électrique variant en fonction de l'amplitude du mouvement - Impossible de mesurer directement l'effort à partir de la tension délivrée => nécessité d'utiliser un capteur de force supplémentaire - Amplitude de la force d'excitation affaiblie lorsqu'une fréquence de résonance est atteinte => sensibilité au bruit - Encombrement important
Marteau d'impulsion	- Simplicité de mise en œuvre - Capteur de force intégré - Faible encombrement - Coût réduit	- Problème de reproductibilité - Incertitude sur l'orientation de la force appliquée

3.2.1.2 Les différents types de test

- **Sinus échelonné**

Cette méthode nécessite l'utilisation d'une excitation contrôlée par un signal sinusoïdal discret d'amplitude constante mais de fréquence variable. La fonction de transfert est directement tracée, point par point, en incrémentant la fréquence d'excitation dans la bande de fréquences considérée pour l'étude. L'incrément de fréquence utilisé ne reste pas constant pendant toute la durée du test. Il est généralement diminué lorsque l'on s'approche d'une fréquence de résonance ou d'anti-résonance de la structure. A l'inverse, loin de ces zones critiques, on choisit un incrément plus grand. Cette façon de procéder permet de diminuer la durée des essais tout en augmentant la précision des résultats.

- **Sinus balayé**

Cette méthode s'apparente à la précédente mais la fréquence d'excitation varie cette fois de manière continue. A noter que la montée en fréquence doit être suffisamment lente pour éviter les phénomènes transitoires qui fausseraient les mesures. Afin de s'assurer que le taux de variation utilisé n'est pas trop élevé, on effectue généralement un double balayage (une montée suivie d'une descente en fréquence). Les deux courbes obtenues doivent théoriquement être identiques lorsque le taux de variation est correct.

- **Excitation périodique**

Cette variante des deux méthodes précédentes consiste à appliquer simultanément une multitude d'excitations harmoniques dont les fréquences sont inclus dans le domaine d'étude. L'amplitude et la phase de chaque harmonique peuvent être ordonnées d'une certaine façon ou bien distribuées de manière pseudo-aléatoire. Dans les deux cas, on obtient simultanément la réponse du système à toutes les fréquences d'excitation.

- **Excitation aléatoire**

Un signal aléatoire (bruit blanc) contrôle le pot d'excitation. Les auto-spectres et les inter-spectres de l'excitation F et de la réponse y sont estimées à l'aide d'un analyseur spectral.

- **Excitation transitoire**

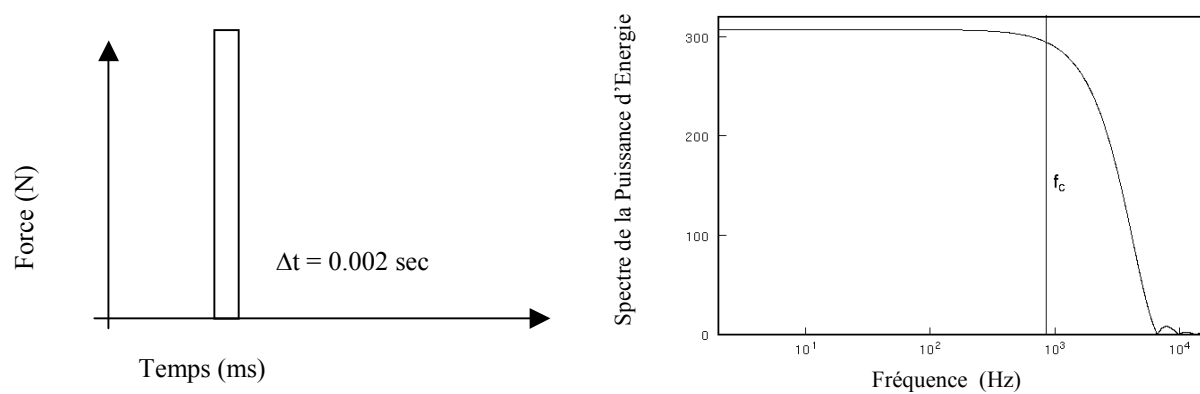
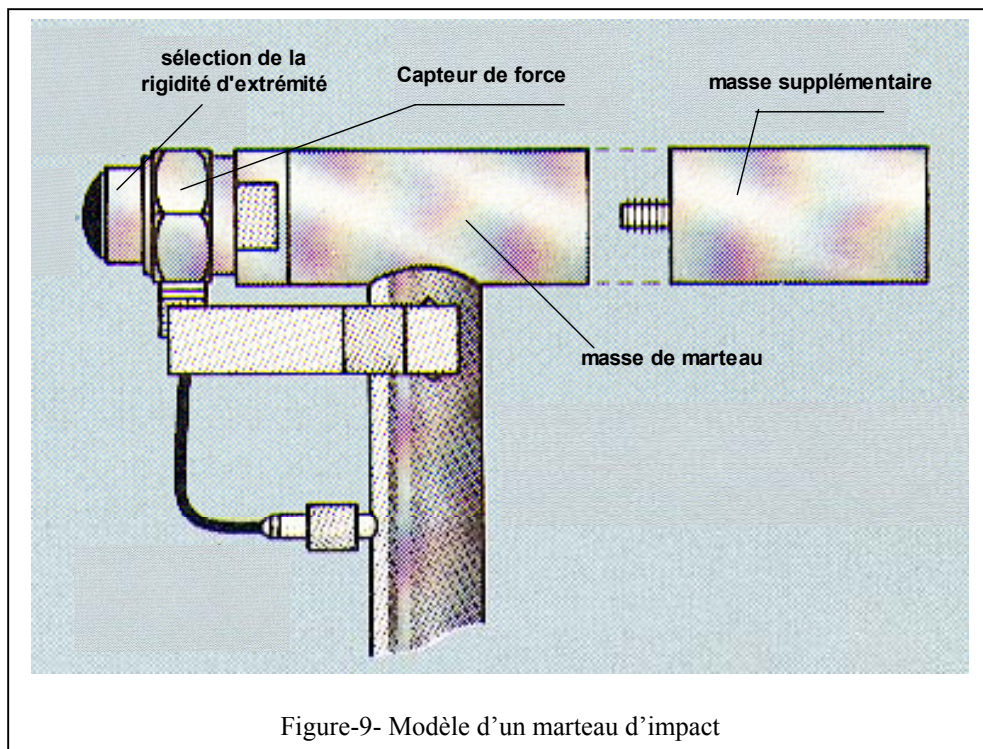
Il existe deux types d'excitations transitoires :

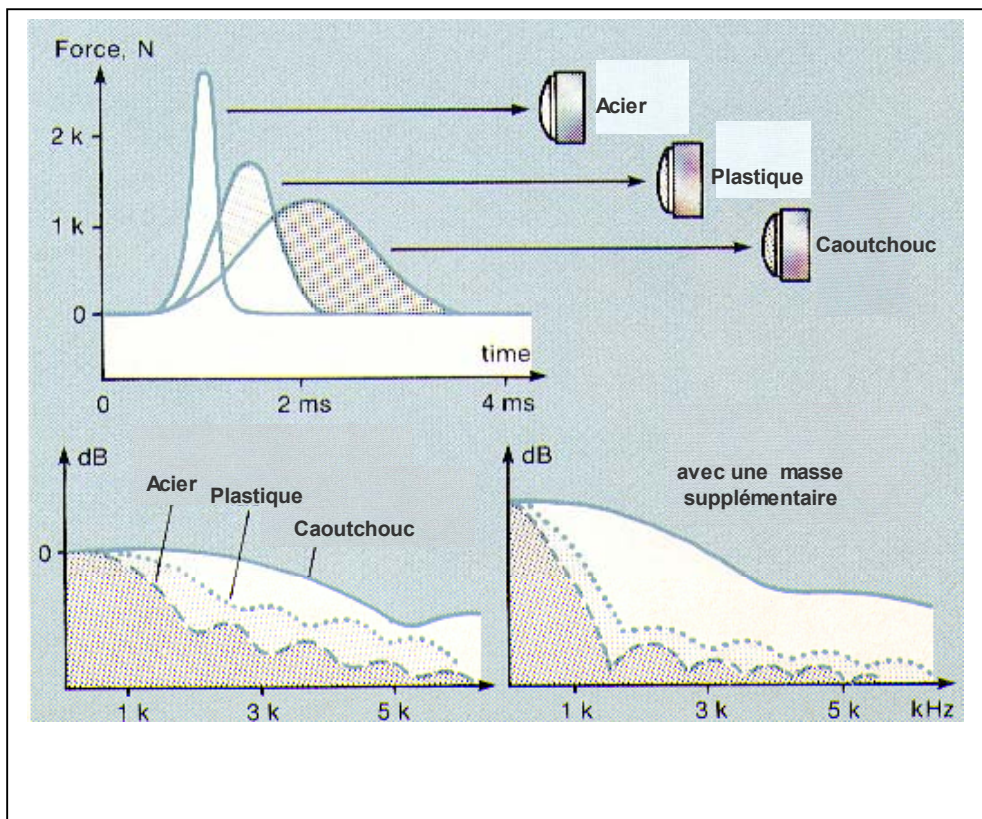
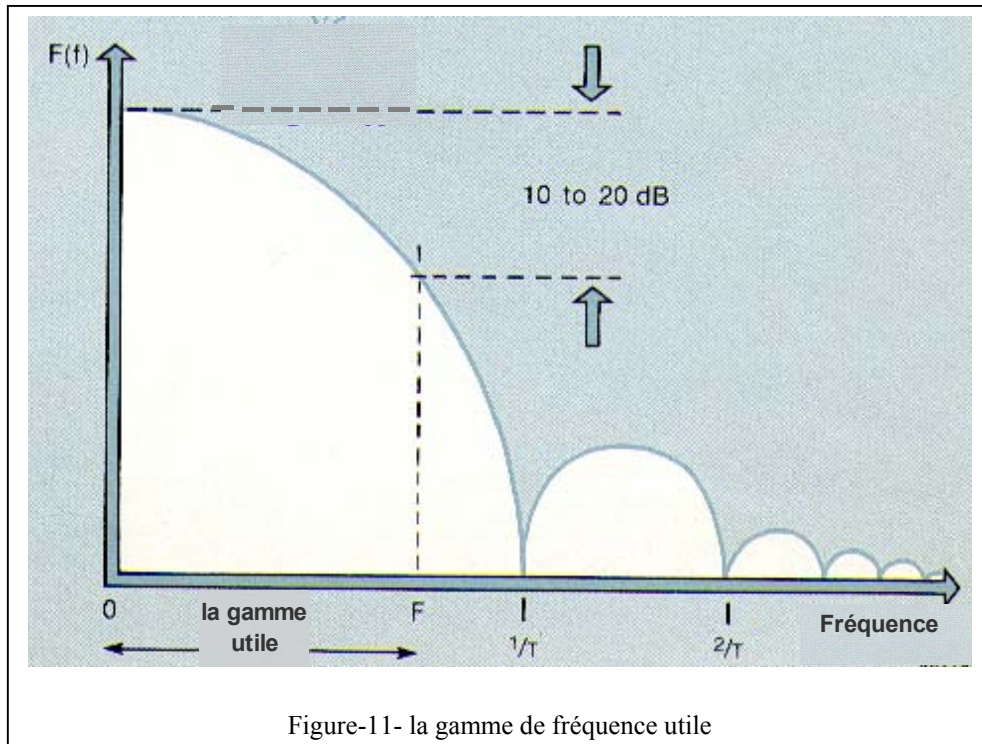
- l'impulsion résultant de l'impact d'un marteau à impulsion,
- l'impulsion sinusoïdale à fréquence variant au cours du temps ('chirp '), obtenue par l'intermédiaire d'un pot d'excitation.

3.2.1.3 Le Marteau d'impact

Un marteau d'impact est simplement un marteau avec les diverses masses connectables et des bouts qui servent à développer les gammes de fréquence et de force de l'impact (figure 9) /19/. Une pièce intégrale du marteau est un capteur de force pour détecter l'importance de la force ressentie par la structure. Selon la troisième loi de Newton, cette force doit être égale et à la force éprouvée par la structure. L'importance de la force est déterminée par la masse de la tête de marteau et de la vitesse avec laquelle il se déplace quand il frappe la structure. Le niveau de force peut être ajusté en changeant la masse de la tête de marteau.

La gamme de fréquence de l'excitation fournie par un marteau est déterminée par la rigidité des surfaces de contact entre marteau-structure et la masse de la tête de marteau. Quand le marteau frappe la structure d'essai, la force d'impulsion résultante a une forme générale, comme montré dans la fig.10.(a). Le spectre de fréquence d'une telle impulsion est montré dans la fig.10.(b); le spectre est essentiellement plat jusqu'à une certaine valeur de fréquence f_c , après il chute de manière significative /19/22/.





La gamme de fréquence qui est au-dessous de la fréquence de coupure (La gamme de fréquence utile) est celle qui efficacement excite les structures. Cette gamme peut aller jusqu'à 10 à 20 dB (figure 11) /19/. Ce type d'impulsion serait relativement inefficace pour des vibrations excitées dans la gamme de fréquence au-dessus de f_c ; à partir de cette valeur les autres modes de vibration ne seront pas excités (il n'y a pas assez d'énergie pour les exciter).

Il y a un rapport direct entre la durée de l'impact et la **fréquence de coupure f_c** ; cette durée d'impact est liée à la rigidité du bout et la masse de la tête de marteau (figure 12) /19/. Des surfaces dures et des marteaux plus légers rapportent des gammes de fréquence plus élevée.

D'une façon générale, il est important d'employer un coup de frappe le plus doux possible. Un coup de frappe trop raide aura comme conséquence des vibrations en dehors de la gamme de fréquence d'intérêt aux dépens des vibrations dans la marge de fréquence désirée.

3.2.2 Capteurs

Dans la plupart des essais dynamiques, il est d'usage de mesurer simultanément l'excitation (force appliquée) et la réponse (déplacement, vitesse ou accélération) de la structure étudiée. Les capteurs de déplacement et de vitesses sont en effet plus délicats à utiliser étant donné qu'ils nécessitent tous deux un repère de référence ce qui peut être gênant lorsque la structure étudiée est amenée à se déplacer (exemple : essais en libre-libre sur une structure suspendue à des élastiques). Les accéléromètres, qui sont pour leur part fixés à la structure, ne posent pas ce problème. Il faut cependant bien garder à l'esprit que leur présence peut modifier le comportement de la structure /54/. Afin de minimiser ce phénomène, il est primordial de choisir des capteurs de masse de taille négligeable par rapport à celles de la structure étudiée. Les capteurs de force et d'accélération les plus couramment utilisés sont de type piézo-électrique. Ils délivrent un signal (charge ou tension) directement proportionnel à la quantité physique que l'on désire mesurer (figure 13).

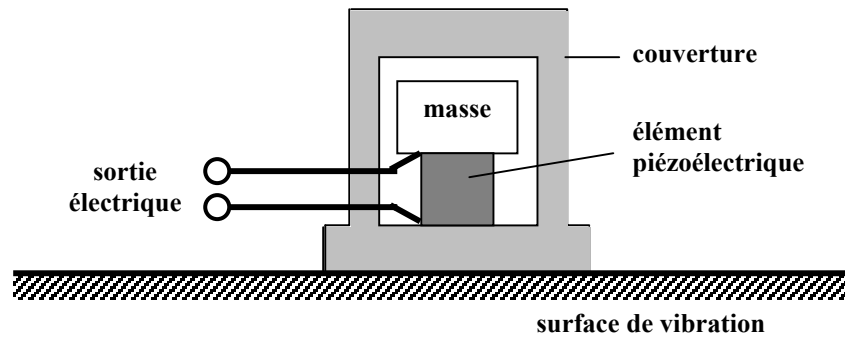


Figure.13- Modèle simple d'accéléromètre piézoélectrique

3.3 Identification des fréquences de résonance et calcul de module de Young

Dans la pratique, le calcul des fréquences de vibrations propres des systèmes se fait sans tenir compte de la force d'amortissement, cela est dû au fait qui est généralement admis de négliger l'effet de l'amortissement sur les valeurs de la fréquence de vibration vu qu'il est faible par rapport à d'autres facteurs. Pour une barre rectangulaire de section constante et de masse uniformément répartie et selon ses conditions géométriques aux extrémités, constitue un système vibrant que les équations du mouvement peuvent être résolues analytiquement par dérivation de l'équation de mouvement obtenue à partir d'une analyse de la seconde loi de Newton pour les forces et les moments agissant sur la barre /10/16/:

$$\rho S \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3-1)$$

Où

E : module de Young

I : moment d'inertie de la barre

ρ : la masse volumique de la barre

S : la section de la barre

Dans la pratique, le calcul des paramètres modaux de vibration des structures passe par une hypothèse sur la déformée $Z(x, t)$ que prendrait la structure dans ses modes de vibration /10/11/16/28/. Cette hypothèse exprime une solution de type :

$$Z(x, t) = \Psi(x) y(t) \quad (3-2)$$

Où $\Psi(x)$ est la fonction de déformée qui doit satisfaire les conditions géométriques imposées aux états limites et qui préservent la continuité des déplacements internes.

Ainsi, on obtient l'expression ci-dessous permettant de calculer les fréquences naturelles théoriques du système selon les conditions aux limites :

$$f_n = \frac{A_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} \quad n=1,2,3\dots \quad (3-3.a)$$

Les valeurs de A_n dépendent des conditions aux limites de la barre (voir l'annexe-2).

Notons que dans le cas où la valeur théorique exacte de module de Young, dans notre barre, est inconnue, et en connaissant les valeurs expérimentales de ses fréquences propres, on peut identifier le module d'élasticité de Young en utilisant la même expression (formule 3-3.a).

En absence de données théoriques sur les valeurs de fréquences de résonance vue que le module de Young est inconnu, il est toujours intéressant d'identifier ce dernier en exploitant les valeurs expérimentales de la fréquence de résonance obtenue. Ensuite le comparer avec la marge de valeurs de module d'élasticité théorique que peuvent avoir les matériaux soumis aux essais dynamiques.

En connaissant les fréquences de résonances et les dimensions géométriques de la barre, le module d'élasticité de Young peut se calculer à partir de l'expression suivante /10/:

$$E = 48 \pi^2 \rho \left(\frac{L^2}{h} \frac{f_n}{K_n^2} \right)^2 \quad \text{N/m}^2 \quad (3-3.b)$$

avec

L : C'est la longueur active de la barre ;

h : C'est l'épaisseur de la barre ;

ρ : C'est la masse volumique de la barre ;

K_n : C'est une constante qui dépend des conditions aux limites de la barre.

Pour le cas d'une barre console les valeurs de K_n pour les trois premiers modes sont données comme suite /10/ :

$$K_1 = 4,73 ; \quad K_2 = 7,853 ; \quad K_3 = 10,996$$

3.4 Théorème d'échantillonnage

La fréquence d'échantillonnage a un effet significatif sur la reconstruction d'un signal analogique dans le domaine temporel. La perception que l'on peut avoir d'un signal mal échantillonné peut être tout à fait fausse si l'on compare au signal original. Lorsque la fréquence d'échantillonnage diminue, la quantité d'informations par unité de temps servant à décrire le phénomène diminue.

Le théorème d'échantillonnage stipule que pour reconstruire correctement le contenu en fréquence d'un signal analogique, la fréquence d'échantillonnage f_s doit être plus de deux fois la fréquence la plus élevée f_m contenue dans le signal (Shannon's Sampling Theorem Stats) /3/39/ :

$$f_s > 2f_m \quad (3-4)$$

Lorsqu'un signal est échantillonné à une fréquence inférieure à $2f_m$, le contenu haute fréquence du signal analogique prendra la fausse identité d'un signal à fréquence plus faible dans la série discrète résultant de l'échantillonnage.

A partir de la fréquence d'échantillonnage, on définit la fréquence de Nyquist de l'échantillonneur (Nyquist Critical Frequency) par /39/48/ :

$$f_N \leq \frac{f_s}{2} \quad (3-5)$$

La fréquence de Nyquist représente ce qu'on appelle un point de repliement ('folding') du phénomène de recouvrement ('aliasing'). Tout le contenu en fréquence du signal analogique supérieur à f_N apparaîtra dans la série discrète à des fréquences à f_N .

3.5 Analyse dans le domaine fréquentiel

Le calcul et la représentation des fonctions en domaine fréquentiel nécessitent la connaissance des signaux dans le domaine fréquentiel. En pratique, on a seulement accès aux signaux dans le domaine temporel (réponse d'un accéléromètre par exemple). Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel est réalisé à l'aide de la Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform - FFT).

La FFT est simplement un moyen rapide d'effectuer une transformée de Fourier discrète qui est, pour un signal discrétisé, l'équivalent d'une décomposition en série de Fourier d'un signal continu.

3.5.1 Fonctionnement théorique de la FFT

Théorème de Fourier: Toute fonction continue est décomposable en série de FOURIER. Si de plus cette fonction est périodique de période T , le nombre de termes de la décomposition est fini.

On peut alors écrire la fonction comme une somme de sinus (ou de cosinus)

$$y(t) = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{2T}\right) + \dots + a_n \sin\left(\frac{2\pi t}{nT}\right) \quad (3-6)$$

où a_i est le coefficient de la série de FOURIER à la fréquence $f_k = \frac{1}{kT}$

Dans la pratique cela veut dire que l'on peut décomposer notre fonction comme une somme de sinus (cosinus) de périodes multiples de la période de base de notre fonction. Les coefficients représentent alors (si on se débrouille bien dans notre calcul) le niveau "énergétique de chacune des fréquences élémentaires".

L'application principale de l'analyse FFT est donc la mise en évidence des périodicités du signal et le calcul de l'énergie contenue dans le signal pour chacune des fréquences /RT.2/RT.3/RT.5/RT.7/.

Aussi, l'analyse FFT sert à observer des signaux qui ne sont pas périodiques (aléatoires par exemple). Cette extension de capacité du calcul FFT, qui n'est pas naturelle pour ce type de signal, appelle à la plus grande prudence dans l'interprétation des résultats.

3.5.2 La Transformée de Fourier d'une fonction réelle

L'expression de la transformée de Fourier d'une fonction réelle $y(t)$ définie pour $0 \leq t \leq \infty$ a la forme /26/39/47/48/54/ :

$$Y(f) = \int_0^{\infty} y(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (3-7)$$

la transformée inverse est définie par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (3-8)$$

la relation entre ω et f , $Y(\omega)$ et $Y(f)$ est :

$$\omega = 2\pi f \quad Y(\omega) = Y(f) \Big|_{f=\frac{\omega}{2\pi}}$$

d'où on aura :

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} y(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (3-9)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (3-10)$$

3.5.3 Transformée de Fourier Discrète

Pour un signal continu défini par sa transformée de Fourier donnée par l'équation (3-7), en prenant une fréquence d'échantillonnage f_s et un temps d'observation T on aura alors un échantillon $y(t_n)$ de taille N défini par la relation :

$$N = T \times f_s \quad (3-11)$$

Cela revient à observer $y(t)$ à des temps discrets espacés d'un pas $\Delta t = \frac{1}{f_s}$; on observe donc un signal aux instants $t_n = n \times \Delta t$ avec $0 \leq n \leq N - 1$

Selon le critère de Rayleigh, la transformée de Fourier discrète que l'on obtient possède alors N fréquence discrète, f_k , espacées d'une valeur Δf :

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T} \quad (3-12)$$

$$Y(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \exp(-j2\pi f_k n \Delta t) \Delta t \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-13)$$

Le résultat de cette opération présente un caractère unique pour les fréquences f_k allant jusqu'à $k = \frac{N}{2}$. Ceci est dû au fait qu'à cette valeur k , on a :

$$f = \frac{N}{2} \times \frac{f_s}{N} = \frac{f_s}{2} = f_n \quad (3-14)$$

Cette fréquence correspond à la fréquence de Nyquist de l'échantillonneur (critère de la fréquence de Nyquist) Δf .

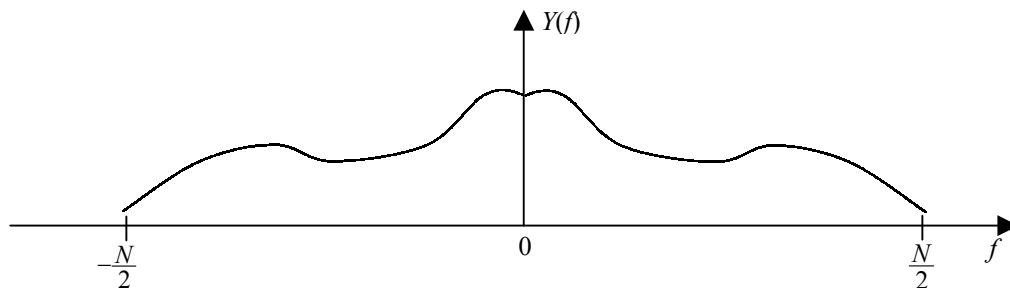


Figure.14 - La transformée de Fourier discrète de la fonction $y(t)$

Noter qu'en réalité, il y a $N + 1$ valeurs de fréquence et non N [30]. Les $\frac{N}{2}$ valeurs représentent les fréquences négatives et les autres $\frac{N}{2}$ valeurs représentent les fréquences positives, pour la valeur au milieu, elle correspond à $f = 0$.

Les fréquences positives sont réparties comme suite :

$$\frac{f_s}{N} \leq f_k \leq \frac{f_s}{2} \quad (3-15)$$

$$\text{avec } f_s = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{N\Delta t} \leq f_k \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (3-16)$$

sachant que l'intervalle entre deux fréquences est de $\frac{1}{N\Delta t}$, on aura donc les valeurs de fréquence suivantes :

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{1}{N\Delta t}, \quad f_2 = \frac{2}{N\Delta t}; \dots, f_k = \frac{k}{N\Delta t}, \dots, f_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3-17)$$

En écrivant

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (3-18)$$

la transformée de Fourier discrète s'exprime alors sous la forme :

$$Y(f_k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} y_n \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (3-19)$$

Chapitre 4

Etude expérimentale et mise en œuvre de la méthode proposée

Nous avons vu dans les exemples théoriques précédents, que la fréquence de vibration du système a une influence significative sur la fiabilité de notre méthode proposée. Pour cela nous avons fait des tests de vibration pour l'identification de l'amortissement pour différents type de matériaux (figure-15), et donc une différence sur la valeur de la fréquence propre de vibration. Les matériaux qui ont été soumis à des tests expérimentaux sont des barres en métal, en plastique, en bois et en béton.



Figure-15- Test d'acquisition et traitement des données réalisé au sein du labo LBE

La méthode d'identification de l'amortissement proposée nécessite la connaissance de la réponse, en déplacement, du système à chaque instant t . Comme le domaine des tests expérimentaux propose des outils très efficaces pour avoir ces réponses, nous avons adopté l'un de ces essais expérimentaux pour acquérir ces données et les exploiter afin d'atteindre nos objectifs.

Les essais expérimentaux ont été réalisés au sein de **Laboratoire Bâti dans l'Environnement (L.B.E)** de la Faculté de Génie Civil à l'USTHB (figure 16).



Figure-16- Laboratoire Bâti dans l'Environnement (L B E)

4.1 Equipements utilisés dans le cas de nos essais

- Accéléromètre, model Brüel & Kjaer de type 8305 (figure 17), sa sensibilité est définie comme le quotient de son signal de sortie par accélération appliquée et peut être exprimé en terme de charge par unité d'accélération (Pc/ms^{-2}) ou en termes de tension par unité d'accélération (mV/ms^{-2}). Les limites supérieures en fréquence données dans les spécifications sont égales à 30% et à 22% de la fréquence de résonance de l'accéléromètre monté ce qui correspond à des erreurs de moins de 10% à 5% respectivement. Les accéléromètres peuvent être utilisés jusqu'à 30% de leur fréquence de résonance /10/FT.3/.



Figure-17- Accéléromètre model Brüel & Kjaer de type 8305

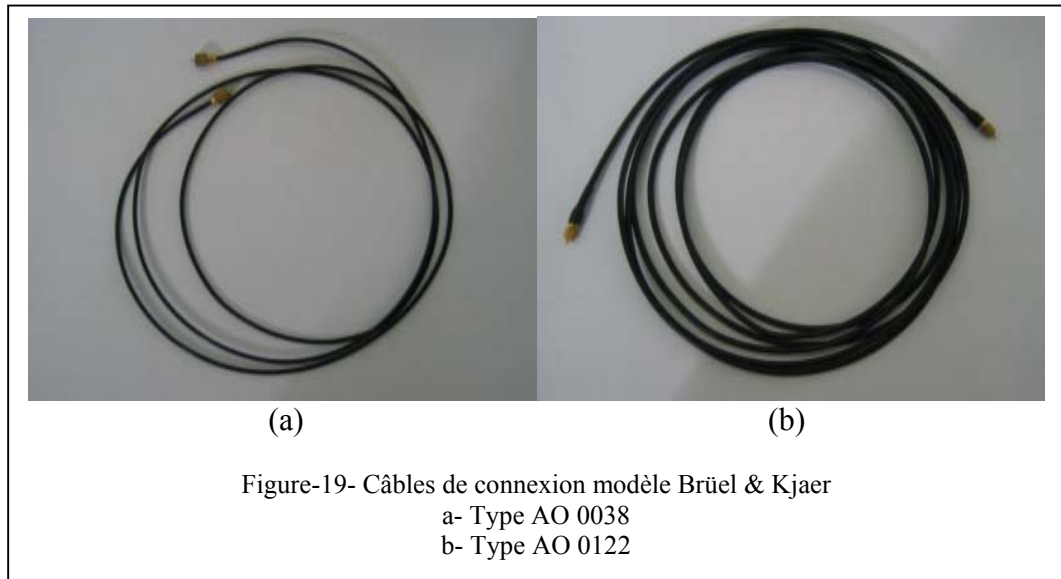
- Marteau d'impact, model Brüel & Kjaer de type 8202 (transducteur de force de type 8200 incorporé) (figure 18): L'excitation d'une structure par un marteau d'impact est probablement l'une des méthodes la plus commode. Le modèle d'un marteau d'impact tel que Brüel & Kjaer type 8202 ressemble à un marteau ordinaire mais il a un capteur de force (type 8200) implanté à son extrémité pour enregistrer la force appliquée durant l'essai. L'excitation avec un marteau exige moins de matériel que n'importe quelle autre méthode d'excitation. Le type 8202 de marteau d'impact peut être employé pour exciter les masses structurales jusqu'à approximativement 1000kg, selon les propriétés de la structure.

Pour de plus grandes structures, des marteaux d'impact peuvent être construits individuellement en utilisant un capteur de force type 8201. Le signal du capteur de force dans la tête de marteau est conduit par l'intermédiaire d'un préamplificateur à l'instrumentation de mesure / analyse. La force pour le marteau avec un transducteur de force type 8200 incorporé est de 5000 N, la durée d'impulsion est entre 0.23ms à 5ms /10/25/RT.1/RT.6/FT.3/.

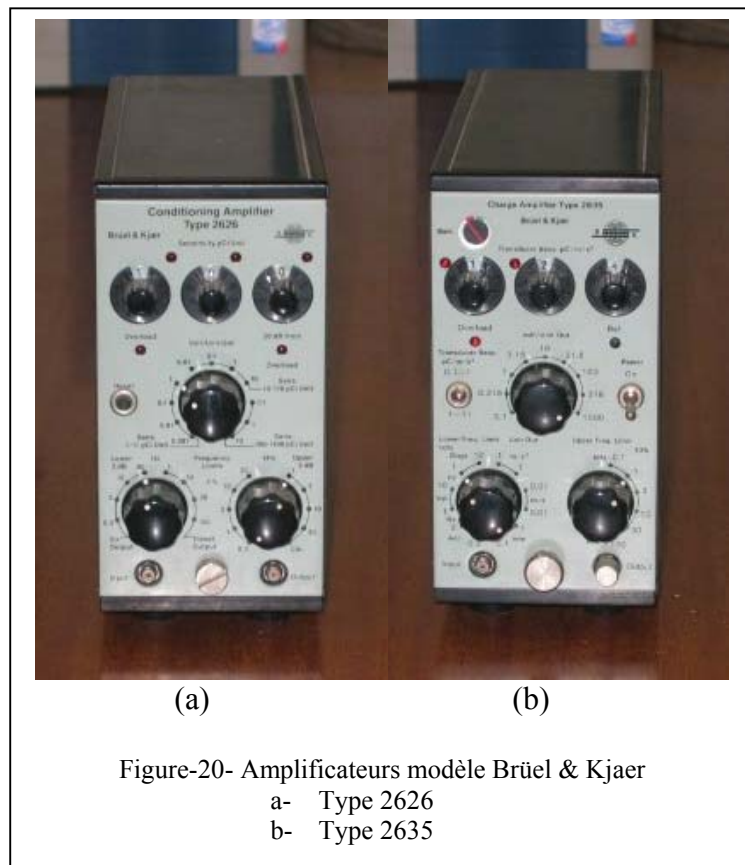


Figure-18- Marteau d'impact model Brüel & Kjaer de type 8202

- Câbles de connexion pour les capteurs, model Brüel & Kjaer ; deux types de câbles monoaxiaux miniatures à faible bruit sont disponibles, ce sont les câbles isolés au Téflon AO0038 de 1.2m de long (figure 19-a) et le câble renforcé isolé au Téflon AO0122 de 3m de long (figure 19-b). Avec les préamplificateurs de charge 2626 et 2635 de longs câbles de connexion peuvent être utilisés sans modifier la sensibilité de la combinaison accéléromètre-préamplificateur ou marteau d'impact-préamplificateur.



- Amplificateur, model Brüel & Kjaer de type 2626 (figure 20-a) pour accéléromètre et un autre amplificateur, model Brüel & Kjaer de type 2635 (figure 20-b) pour le Marteau d'impact. Ces deux amplificateurs assurent une limite inférieure de fréquences très basse permettant d'utiliser de longs câbles d'entrée ou de connexion /FT.2/.



- Carte d'acquisition, modèle National Instruments de type PCI-6034E de 16 Bits reliés à l'accessoire modèle National Instruments type CA-1000 à l'aide d'un câble de connexion modèle National Instruments Type R6868 de 1m de longueur (figure 21). La carte d'acquisition doit être connectée au micro-ordinateur /MU.1/MU.2/MU.3/ et de son côté, l'accessoire se connecte à l'accéléromètre et au marteau d'impact à travers les deux amplificateurs par moyen d'un câble modèle Brüel & Kjaer type AO 0087 (figure 22).



Figure-21- Carte d'acquisition PCI-6034E de 16 bits avec accessoire et câble de connexion fabriquées par National Instruments



Figure-22- Câble de connexion modèle Brüel & Kjaer type AO 0087

- Les caractéristiques des barres des différents matériaux sont données par le tableau ci-dessous :

Tableau-5- Les caractéristiques des barres

	Les Barres			
	En Métal	En plastique	En béton	En bois
Masse Volumique (kg/m ³)	7424,7	1429,3	2323	524,537
Largeur (cm)	2,475	3,50	5	2,4
Epaisseur (cm)	0,33	1,65	5	2
Longueur des barres (cm)	80	60	60	90

Ces barres ont été placées de telle sorte qu'elles forment un système encastré d'un côté et libre de l'autre côté (figure 23)

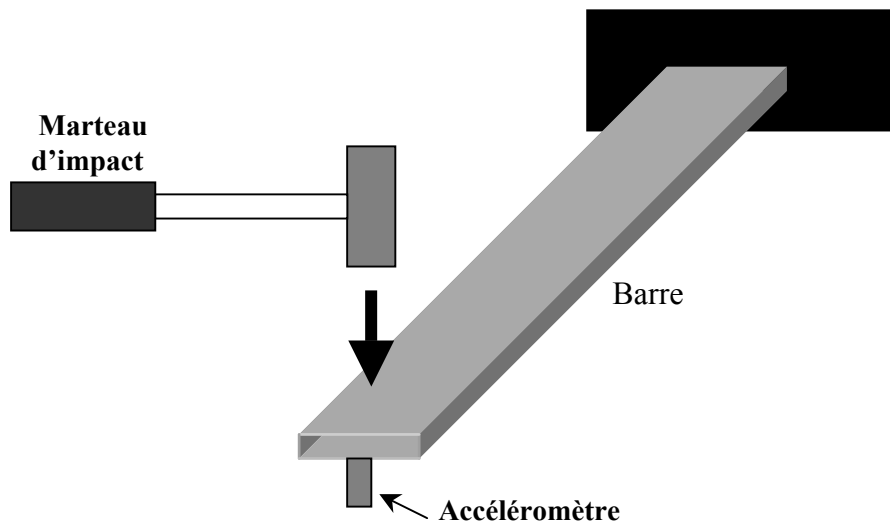
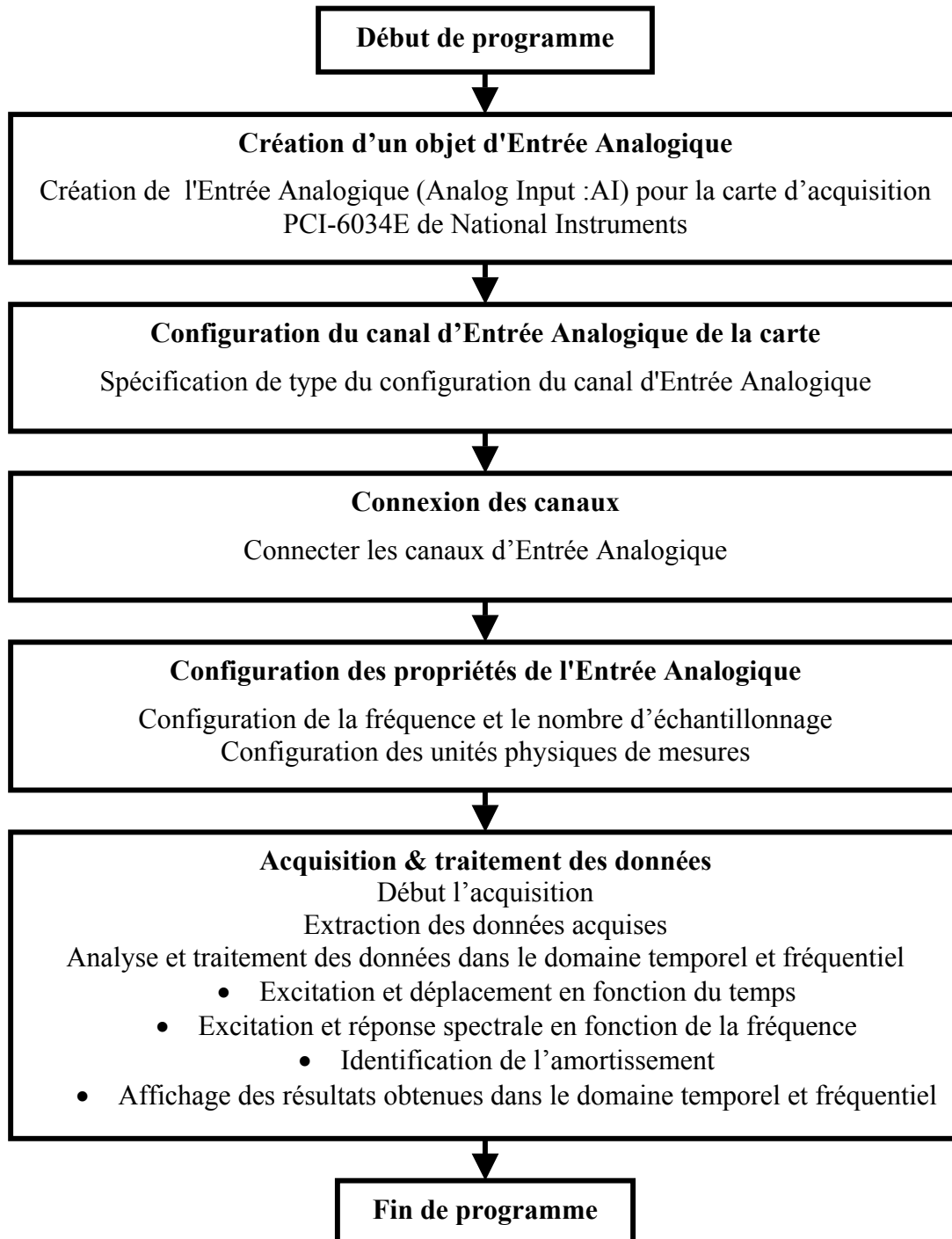


Figure-23- Installation d'équipements pour le cas d'une barre encastrée en une pente extrémité et libre à l'autre côté (Cantilever)

4.2 Elaboration d'un programme pour acquisition et traitement ultérieur des données

Nous avons élaboré un programme informatique qui reconnaît la carte d'acquisition, modèle National Instruments de type PCI-6034E et la contrôle. Ce programme permet à la carte de se connecter aux composantes d'acquisition: les capteurs de force et de réponse, et de lire les données acquises, pour le traitement ultérieur de ces données dans le domaine temporel et fréquentiel.

Organigramme de programme d'acquisition et traitement de données



4.3 Présentation des résultats et discussion

4.3.1 Identification des fréquences de résonance et le module de Young des barres étudiées

L'acquisition des données nous a permis l'identification des fréquences propre, ainsi que le module d'élasticité longitudinale de chaque mode de vibration des systèmes. En effet, nos systèmes ont été soumis à des excitations impulsionnelles de courte durée (figure 23). Nous avons enregistré les réponses et les excitations dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel.

La valeur de l'incrément du temps Δt choisi chaque système est de 0,0001 seconds ce qui nous donne une gamme de fréquence de 10000 Hz. Bien entendu dans les calculs en domaine fréquentiel nous avons pris seulement la partie positive des valeurs de fréquence [0 à 5000 Hz].

En ce qui concerne la durée de l'excitation, nous avons donné une étude complète concernant l'acquisition des données avec des excitations impulsionnelle par marteau d'impact. Pour chaque matériau nous avons choisi la durée d'impact en fonction de la plage des fréquences de résonance désirée. Dans le tableau ci-dessous (tableau-6), nous avons donné la durée d'impulsion pour chaque système.

Tableau-6- La durée de l'excitation impulsionnelle pour chaque système

	Type de Barre			
	En Métal	En plastique	En béton	En bois
La durée d'excitation (second)	0,003	0,001	0,0012	0,0013

Les graphes obtenus par acquisition, correspondant aux excitations et aux réponses obtenues pour chaque système, dans le domaine de temps et de fréquence sont donnés ci-après.

❖ Barre en métal

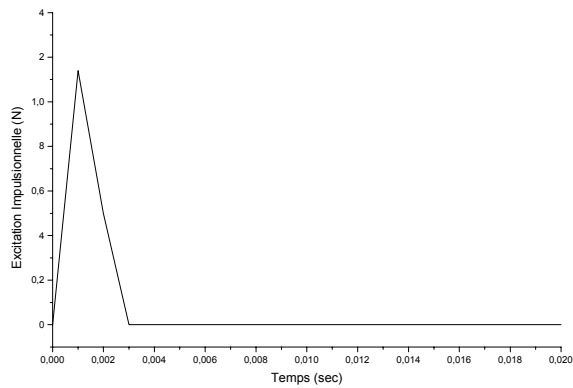


Figure-24- Force d'excitation par une impulsion pour le cas d'une barre en métal

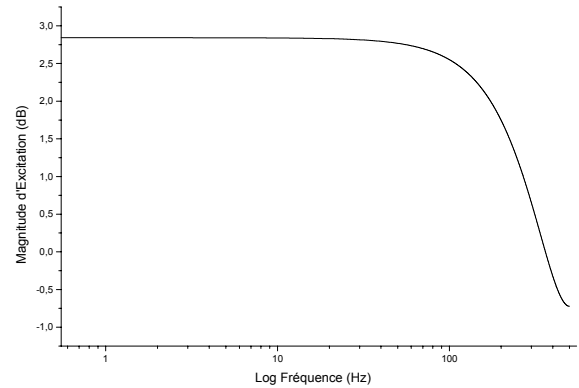
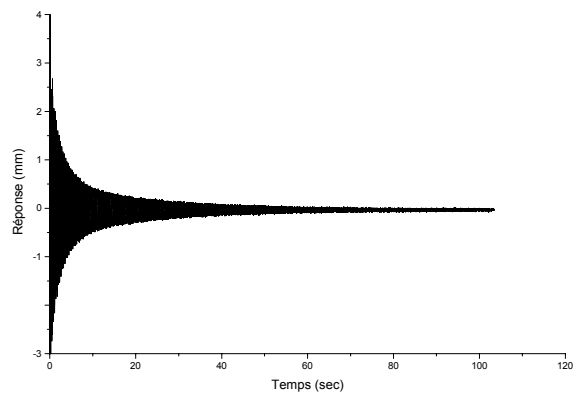


Figure-25- Spectre de la force d'impulse pour le cas d'une barre en métal



F réponse temporelle de la barre en métal

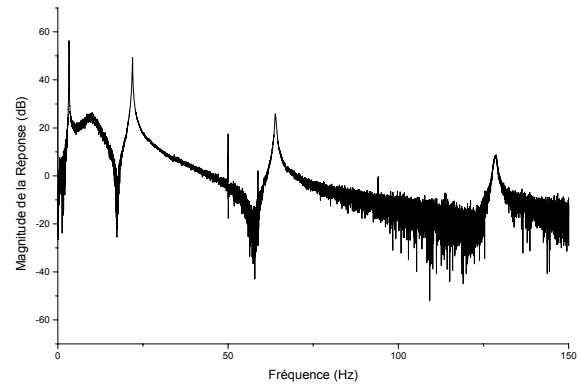


Figure-27- spectre de la réponse de la barre en métal

❖ Barre en plastique

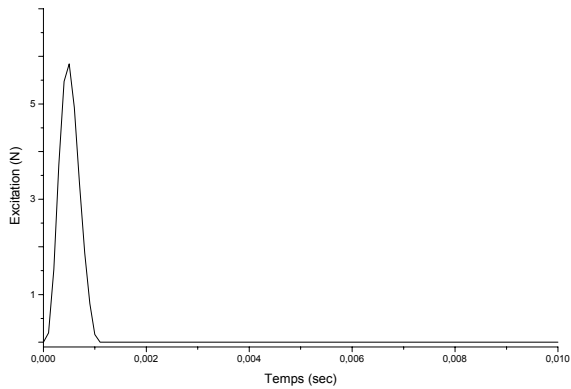


Figure-28- Force d'excitation par une impulsion pour le cas d'une barre en plastique

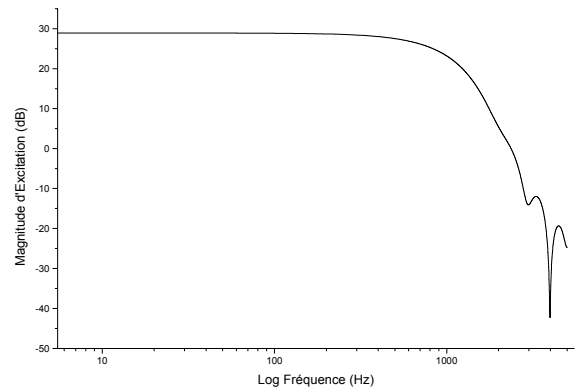
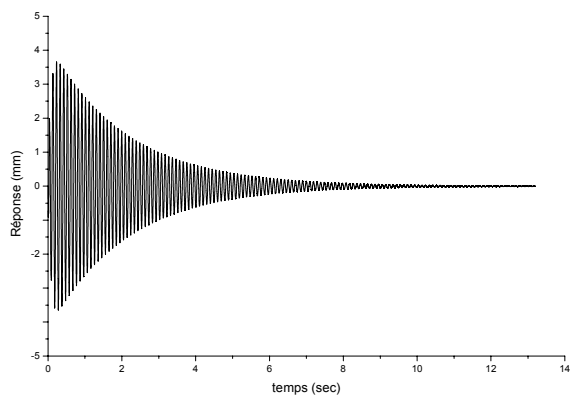


Figure-29- Spectre de la force d'impulsion pour le cas d'une barre en plastique



Fi éponse temporelle de la barre en plastique

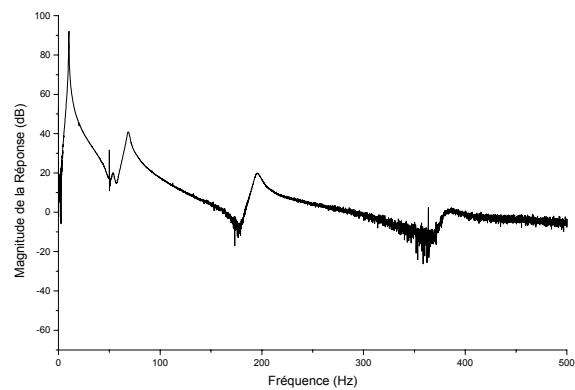


Figure-31- Spectre de la réponse de la barre en plastique

❖ Barre en béton

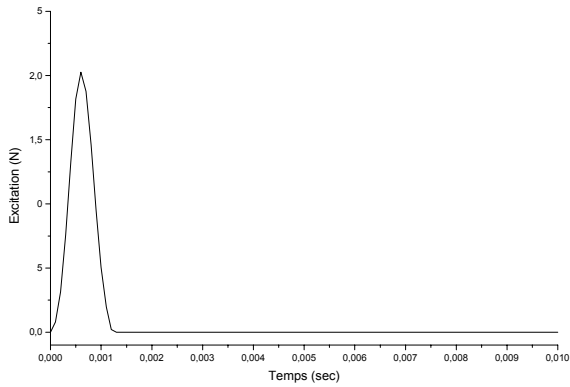


Fig e-32- Force d'excitation par une impulsion pour le cas d'une barre en béton

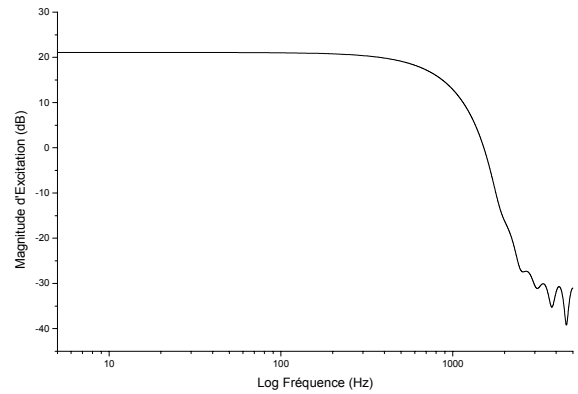


Figure-33- Spectre de la force d'impulse pour le cas d'une barre en béton

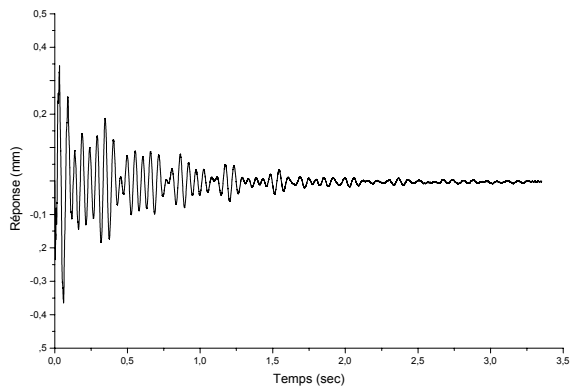


Figure-34- Réponse temporelle de la barre en béton

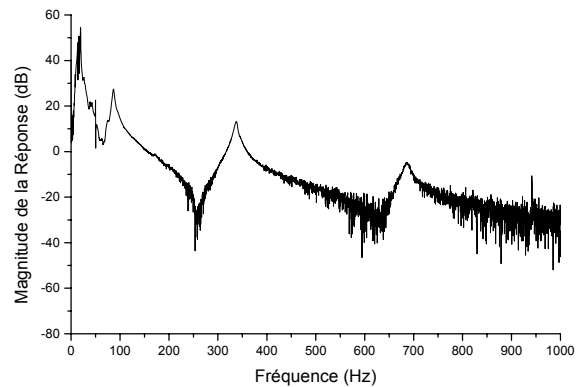


Figure-35- Spectre de la réponse de la barre en béton

❖ Barre en bois

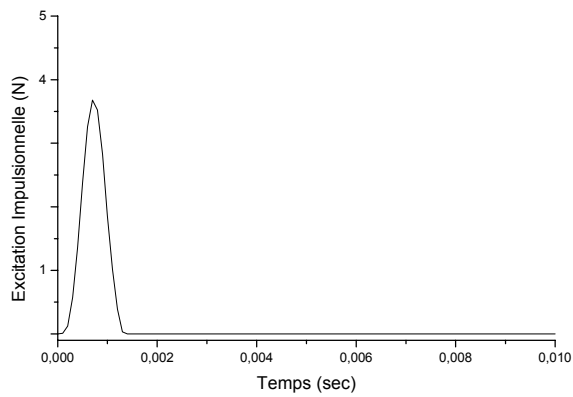


Figure-36- Force d'excitation par une impulsion pour le cas d'une barre en bois

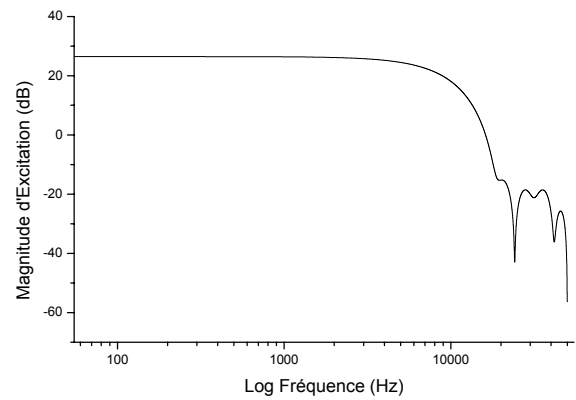


Figure-37- Spectre de la force d'impulsion pour le cas d'une barre en bois

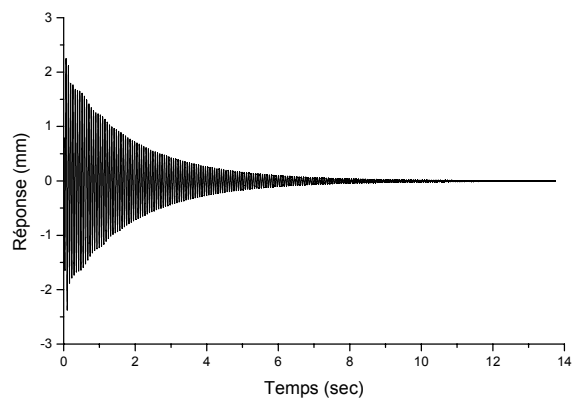


Figure-38- Réponse temporelle de la barre en bois

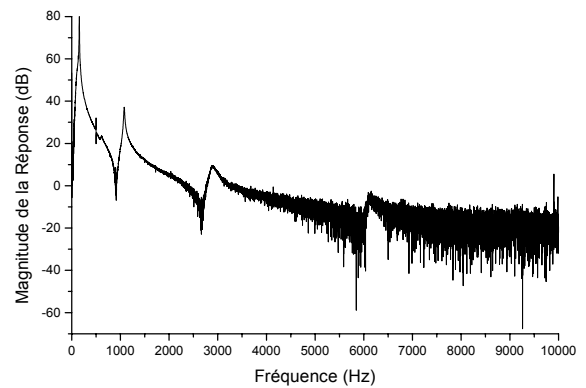


Figure-39- Spectre de la réponse de la barre en bois

Les figures 24, 28, 32, et 36 représentent les excitations auxquelles les barres ont été soumises, pour chaque matériau. Les figures 25, 29, 33, et 37, respectivement, représentent le spectre dans le domaine fréquentiel de ces excitations. A partir de ces spectres d'excitation nous remarquons la gamme de fréquence qui est efficacement excitée par ce dispositif impulsif. Cette gamme correspond à la forme linéaire constante de la courbe de spectre d'excitation. Au-delà d'une certaine valeur de la fréquence (fréquence de coupure) , là-où la courbe commence à chuter, les modes de vibration ne seront pas excités (c'est-à-dire qu'ils ne seront pas bien visibles) et ils vont être perturbés par le bruit au fur et à mesure de l'augmentation de la fréquence (le rapport Signal - Bruit diminue).

Les figures 27, 31, 35, et 39 qui sont le spectre de réponse de chaque système. Il correspondent aux transformées de Fourier dans le domaine de fréquence des réponses temporelle, données par les figures 26, 30, 34, et 38 respectivement. Les fréquences de résonance des modes de vibration sont clairement identifiées et correspondent aux pics présents sur ces spectres. Aussi on peut remarquer, toujours dans les courbes de spectre de réponse, qu'à partir d'une certaine valeur de fréquence de coupure, et ceci pour chaque système, de bruit est prédominant, ce qui empêche l'apparition d'autres modes de vibration.

En regardant les courbes du spectre d'excitation et celles du spectre de réponse, on peut lire la fréquence de coupure pour laquelle le bruit commence à être nuisible pour chaque type de système console.

- Pour le cas du système console avec une barre en métal, la fréquence de coupure est aux environs de 30 Hz ;
- Pour le cas du système console avec une barre en plastique, la fréquence de coupure est aux environs de 300 Hz ;
- Pour le cas du système console avec une barre en béton, la fréquence de coupure est aux environs de 200 Hz ;
- Pour le cas du système console avec une barre en bois, la fréquence de coupure est aux environs de 3000 Hz.

Dans les tableaux ci-dessous, nous avons présenté les valeurs de fréquence de résonance obtenue à partir des spectres de réponse pour chaque système de barre. Nous avons présenté les valeurs des 3 premiers modes de vibrations. En exploitant ces valeurs, nous avons pu identifier le module d'élasticité longitudinal pour chaque matériau. En peuvent clairement voir que ce module de Young n'est pas constant. Nous avons enregistré quelques variations sur les valeurs qu'il peut prendre. Dans les calculs théoriques il est courant de considérer que le module d'Young est le même pour tous les modes de vibration.

Tableau-7- Valeurs de Fréquences de résonances et de module de Young des trois premiers modes obtenues pour le cas de la barre en métal

Modes	1	2	3
Fréquences (Hz)	3,300	21,950	63,885
Module de Young (N/m ²)	11,542 10 ¹⁰	12,300 10 ¹⁰	14,042 10 ¹⁰

Tableau-8- Valeurs de Fréquences de résonances et de module de Young des trois premiers modes obtenues pour le cas de la barre en plastique

Modes	1	2	3
Fréquences (Hz)	10,230	68,578	195,354
Module de Young (N/m ²)	27,290 10 ⁸	31,230 10 ⁸	32,31 10 ⁸

Tableau-9- Valeurs de Fréquences de résonances et de module de Young des trois premiers modes obtenues pour le cas de la barre en béton

Modes	1	2	3
Fréquences (Hz)	19,097	86,536	337,491
Module de Young (N/m ²)	16,835 10 ⁸	8,800 10 ⁸	17,068 10 ⁸

Tableau-10- Valeurs de Fréquences de résonances et de module de Young des trois premiers modes obtenues pour le cas de la barre en bois

Modes	1	2	3
Fréquences (Hz)	156,437	1079,055	2890,093
Module de Young (N/m ²)	79,99 10 ¹⁰	96,89 10 ¹⁰	88,63 10 ¹⁰

4.3.2 Identification de l'amortissement

En ce qui concerne l'identification de l'amortissement, les valeurs expérimentales obtenues de la réponse, sont exploitées dans les calculs en se basant sur deux hypothèses :

- La méthode donnée par Tzenov et Bonneville /52/ ramènent l'étude de la structure réelle avec une infinité degré de liberté en une structure ne possédant qu'un seul degré de liberté. Cette méthode repose sur le principe de deux systèmes énergiquement équivalents. Ainsi la masse généralisée et la rigidité généralisée ont été calculées à partir des deux formules suivantes /16/43/52/ (voir annexe-3):

$$m^* = \rho S \int_0^L \Psi^2(x) dx$$

$$k^* = \int_0^L EI [\Psi''(x)]^2 dx$$

- Nous avons supposé que l'amortissement matériel existant est du type visqueux.

Les figures 40, 41, 42, et 43 correspondent aux courbes d'amortissement en fonction du temps, identifiées pour chaque cas de barre (barre en métal, en plastique, en béton, et en bois respectivement).

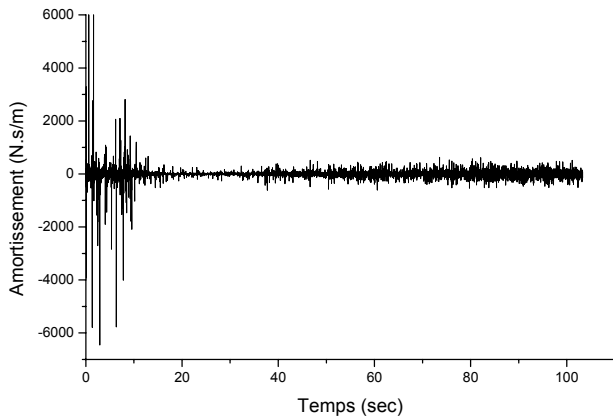


Figure-40- Identification de l'amortissement fonction du temps pour le cas d'une barre en métal

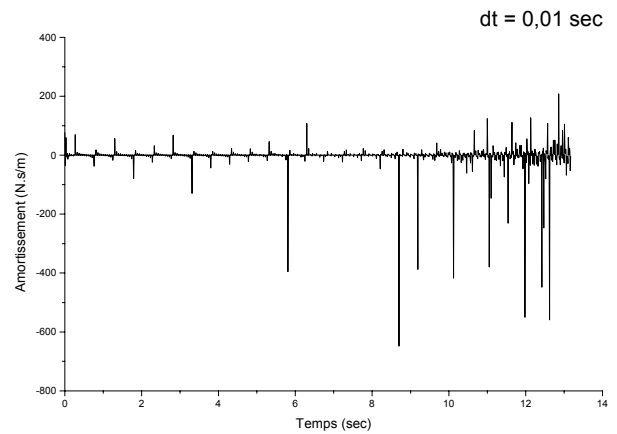


Figure-41- Identification de l'amortissement fonction du temps pour le cas d'une barre en plastique

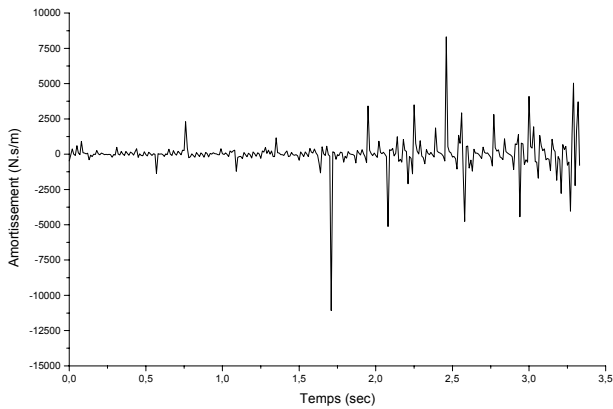


Figure-42 Identification de l'amortissement fonction du temps pour le cas d'une barre en béton

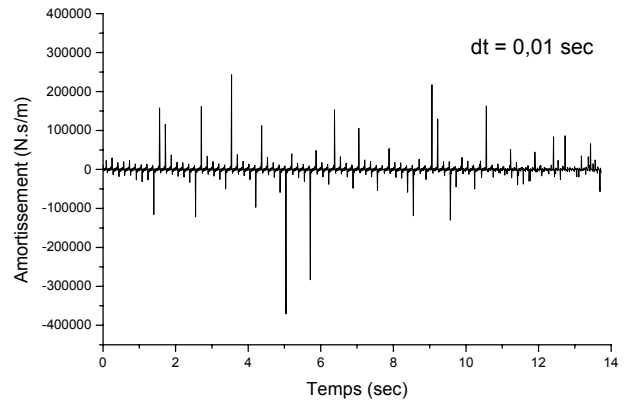


Figure-43- Identification de l'amortissement fonction du temps pour le cas d'une barre en bois

Tableau-11- Identification de l'amortissement moyen à partir des données expérimentales

	Les Barres			
	En Métal	En plastique	En béton	En bois
Fréquence du Premier mode [Hz]	3,300	10,230	19,097	156,437
$C_{exp\ moy}$ [N.s/m]	69,189	8,942	497,314	$6,247 \cdot 10^{+3}$
Ecart-type	660,726	40,827	1072,300	$21,029 \cdot 10^{+3}$

Nous remarquerons, que le problème de pics existe toujours quelle que soit la nature de la barre étudiée. L'amortissement identifié, est en réalité fonction du temps et noté $C(t)$. La valeur moyenne calculée est celle de l'ensemble des valeurs obtenues. Du tableau 11 on peut voir que l'écart-type reste toujours important, ceci est dû au fait de la variation des valeurs de $C(t)$.

Nous avons utilisé des systèmes ayant de basses fréquences et d'autres des hautes fréquences propres de vibration. Les pics, peuvent atteindre des valeurs infinies. Nous avons montré par application des exemples théoriques, que ces pics sont dus à la relation utilisée, correspondant à la différence entre la valeur de la réponse à t_{i+1} et t_{i-1} de l'expression permette d'identifier l'amortissement instantané.

En ce qui concerne le comportement de l'amortissement en fonction du temps, pour le cas de nos systèmes console étudiés (barres de différente nature) l'amortissement en fonction du temps est constant si les pics sont négligés. En effet, la courbe de l'amortissement en fonction du temps prend des formes linéaire constante pour chaque système.

Le degré d'homogénéité d'une barre donnée joue un rôle important, et donc la validation d'admettre que l'amortissement est le même sur chaque point de cette barre est relatif. Pour cela, considérons une barre quelconque possédant deux milieux A et B (figure.44-a)

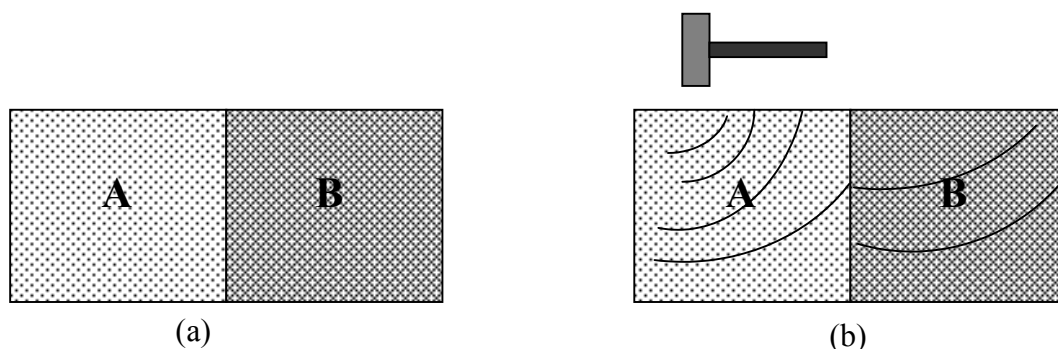


Figure-44- Une barre composée en deux milieux

Supposant qu'on excite la barre par une force extérieure sur la zone de milieu A (figure-44.b), ceci produira des ondes qui traversant les deux milieux. Dans le cas où ces deux milieux seraient différents structurellement (barre hétérogène), les ondes produites par l'excitation ne seront pas amorties de la même manière, les deux milieux auront donc un comportement

différent l'un par rapport à l'autre, d'où la différence de valeur de l'amortissement suivant la position de mesure et d'excitation.

Dans le but de montrer en claire la nature de nos barres, en ce qui concerne leur homogénéité, nous avons fait des essais d'identification des fréquences propres en choisissant 3 points sur le long de chaque boîte, comme il est montré sur la figure.45

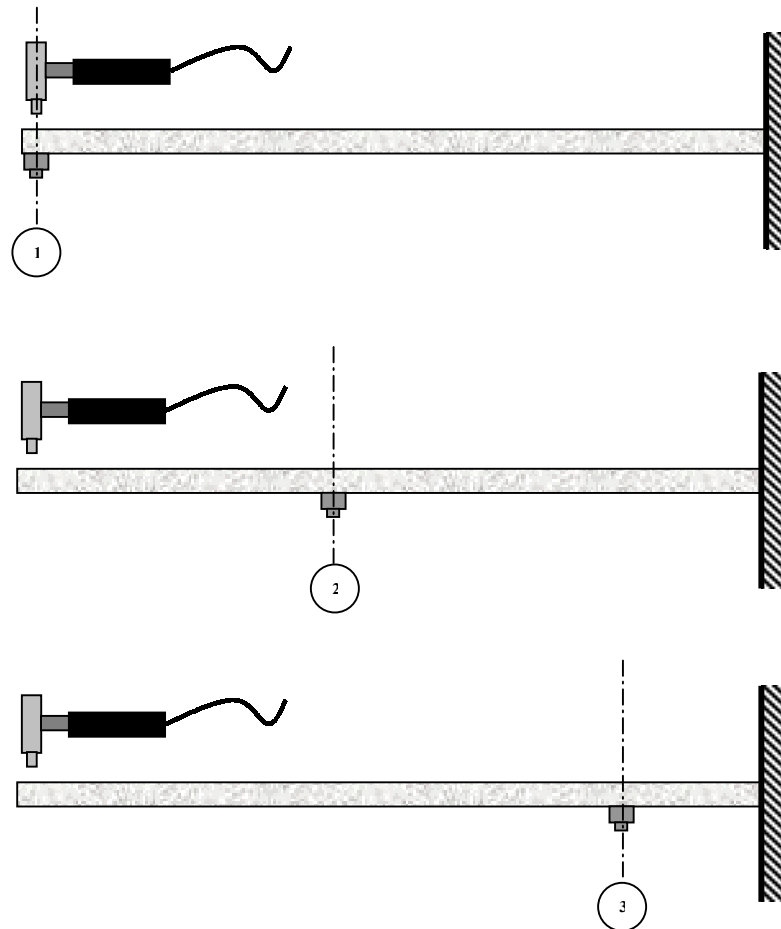
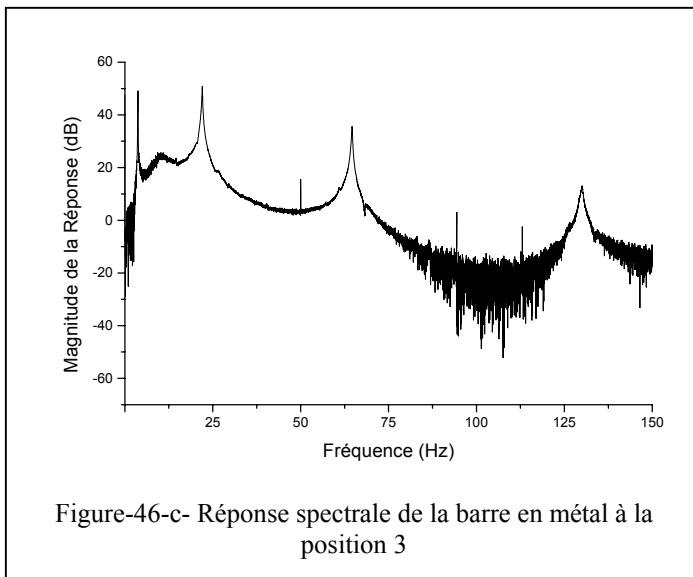
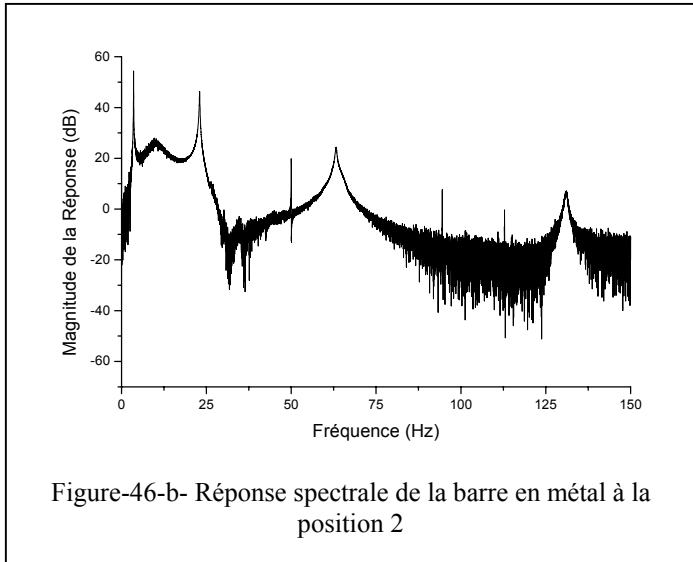
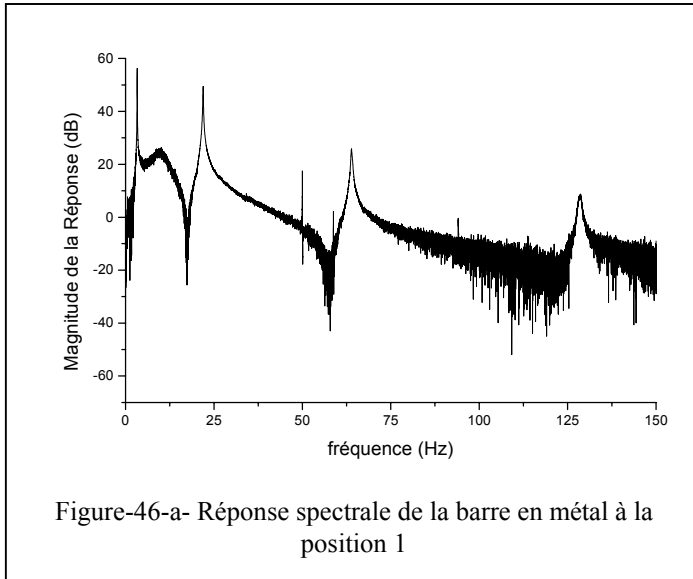


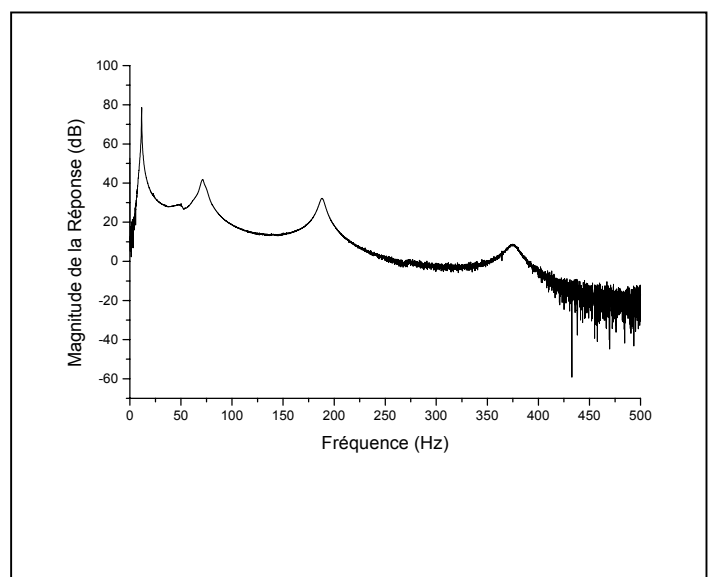
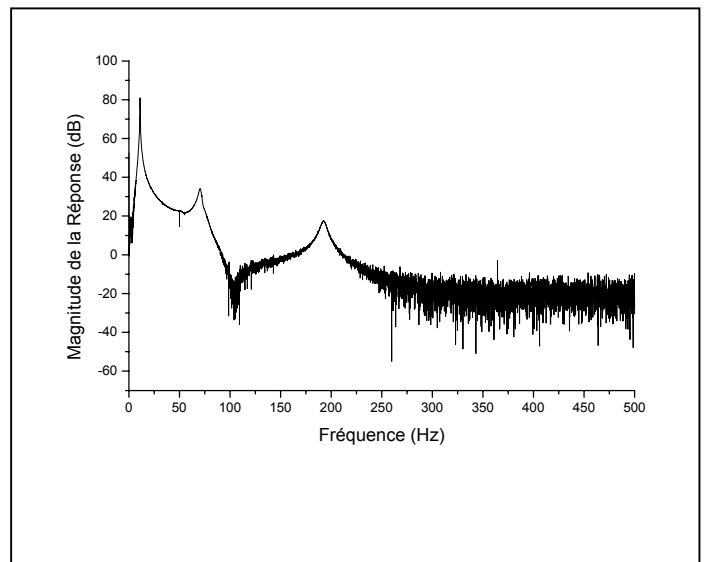
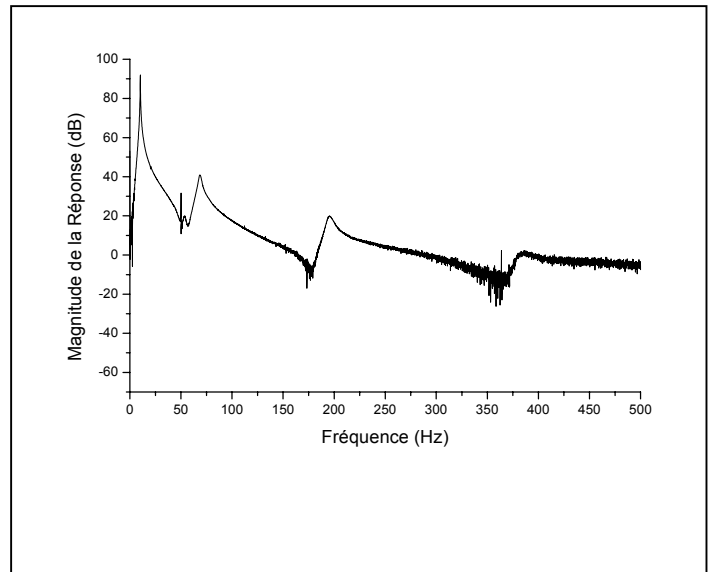
Figure-45- Positions de mesures des réponses et excitations des systèmes console

Les courbes de réponses spectrales obtenues à chaque position d'accéléromètre et pour chaque type de barre, sont présentées ci-dessous. A partir de ces courbes nous pouvons lire les fréquences propres de vibration pour chaque type de système et à chaque point de mesure. Ces résultats, sont donnés sous forme de tableaux qui sont aussi présentés par la suite.

- Barre en métal



- Barre en plastique



- Barre en béton

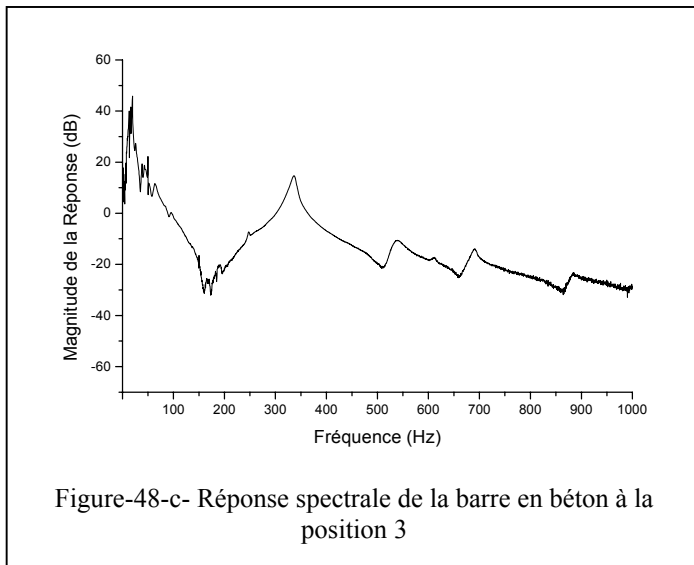
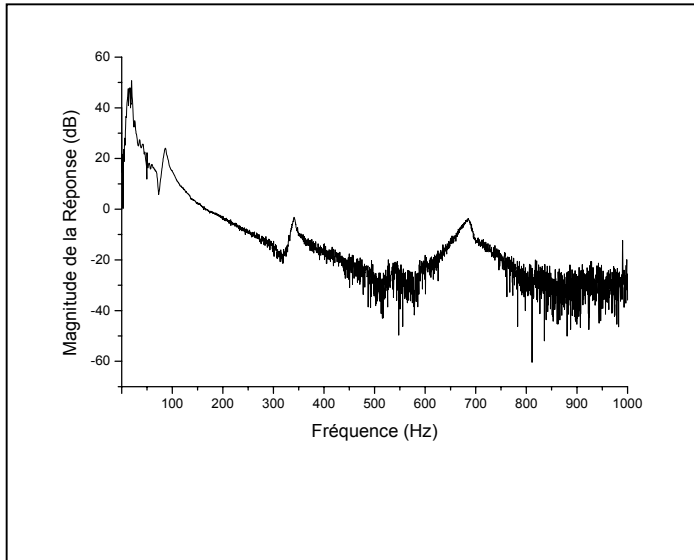
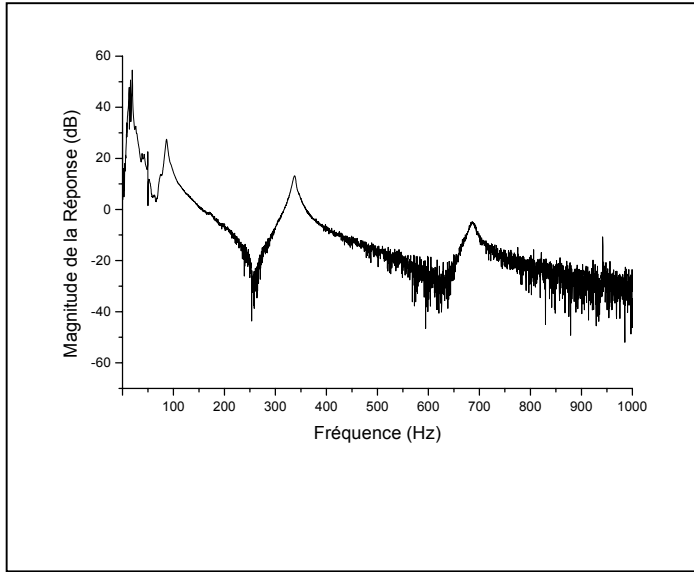


Figure-48-c- Réponse spectrale de la barre en béton à la position 3

- Barre en bois

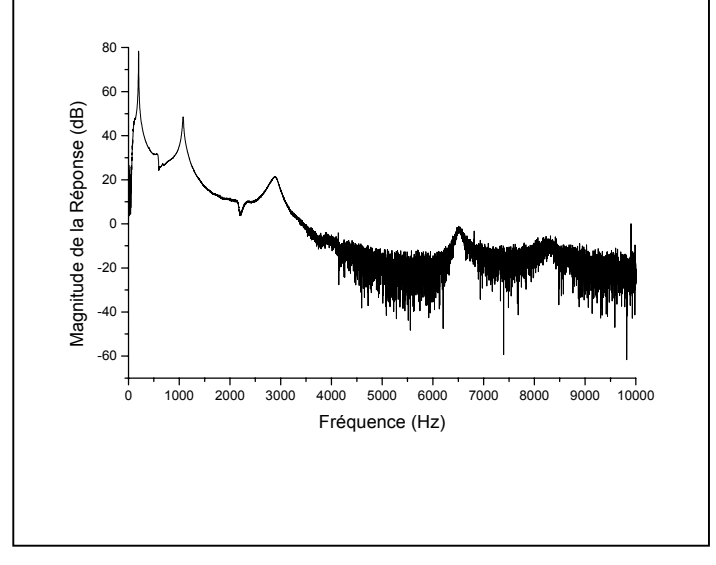
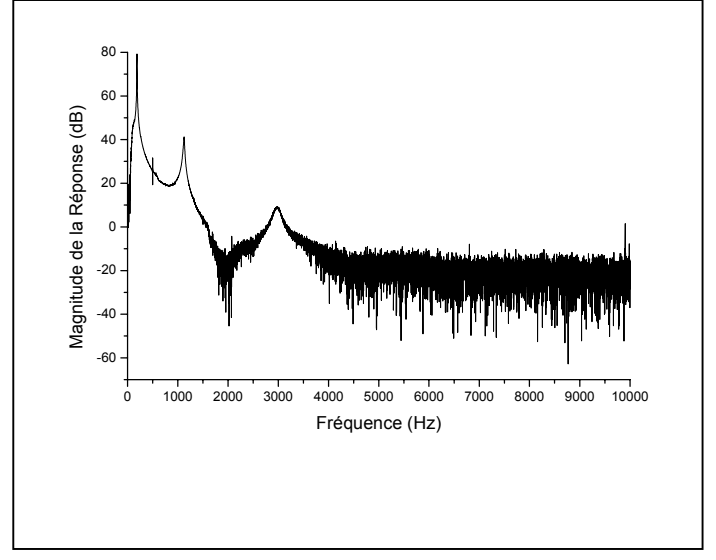
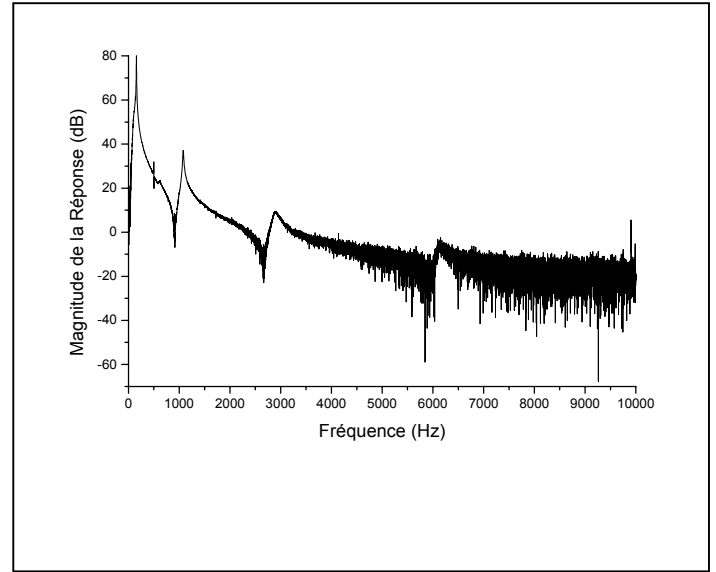


Tableau-12- Identification des fréquences de résonances d'une barre en métal

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Position 1	3,300	21,950	63,885
Position 2	3,567	23,030	63,212
Position 3	3,714	22,028	64,627

Tableau-13- Identification des fréquences de résonances d'une barre en plastique

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Position 1	10,230	68,578	195,354
Position 2	10,958	70,290	192,320
Position 3	11,498	71,192	188,134

Tableau-14- Identification des fréquences de résonances d'une barre en béton

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Position 1	19,097	86,536	337,491
Position 2	19,633	86,532	340,677
Position 3	19,697	63,506	336,548

Tableau-15- Identification des fréquences de résonances d'une barre en bois

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Position 1	156,437	1079,055	2890,093
Position 2	188,368	1124,750	2983,865
Position 3	199,6199	1076,796	2888,731

On conclut à travers les tableaux ci-dessus, qu'il n y a pas une grande différence entre les valeurs des fréquences propres de vibration pour les 3 positions. L'identification de l'amortissement nous permet de conclure que celui-ci est pratiquement constant.

Chapitre 5

Conclusions et recommandations

5.1 Synthèse

L'étude, que nous avons menée dans le cadre de ce mémoire de magister intitulé "Identification de l'amortissement des structures réelles soumises a des excitations forcées", avait deux grandes parties, théorique et expérimentale. Le but de ce travail est de proposer une méthode permettant l'identification expérimentale de l'amortissement en fonction du temps. C'est une technique de calcul basé sur l'utilisation de la méthode des différences finies centrales. La formulation de cette méthode pour l'identification de l'amortissement a été faite en supposant un modèle le plus adopté dans le domaine d'engineering, il s'agit d'un amortissement visqueux équivalent.

Dans la pratique, la prise en compte des valeurs d'amortissement dans les calculs se fait toujours en prenant des valeurs moyennes en supposant que l'amortissement est constant comme une première approximation, mais cette simplification n'est pas toujours acceptable particulièrement dans le cas des structures qui possèdent un degré d'hétérogénéité important. Ce conflit a poussé de nombreux chercheurs à s'investir à la recherche des théories phénoménologiques sur ce mécanisme de dissipation d'énergie, permettant de donner un model adéquat de l'amortissement représentant le mieux possible le comportement réel du mécanisme.

A travers notre travail, qui est une contribution modeste, nous avons fait une investigation théorique en utilisant quelques exemples pour une démonstration sur la capacité de cette présente méthode concernant l'identification de l'amortissement pour des systèmes possédant des basses et hautes fréquences de vibration. Son application nécessite la connaissance préalable de la réponse de la structure. Elle a l'avantage de montrer le caractère variable de l'amortissement, mais aussi à l'instabilité dûe aux pics visualisés sur les courbes d'amortissement fonction du temps. Nous avons constaté à travers ces exemples théoriques, que les pics n'avaient pas une grande influence sur la valeur moyenne.

Dans la deuxième partie, après avoir consacré tout un chapitre sur les aspects d'acquisition de données ainsi quelques démonstrations sur le traitement des résultats dans le domaine de fréquence, nous avons fait quelques essais expérimentaux sur des systèmes consoles avec une barre en métal, en plastique, en béton et enfin en bois. Le but d'utiliser ces différents types de barre, étant de faire des essais sur des systèmes réels avec différente fréquence de résonance. Les réponses réelles de nos structures obtenue par moyen expérimental, supposé correspondante à des déplacements par flexion sans rotation, à été exploitée pour l'identification de l'amortissement.

Dans notre étude, nous avons utilisé des modèle des systèmes à un seul degré de liberté. En effet, pour la partie expérimentale nos barres qui sont des systèmes continus, donc une infinité de degrés de liberté, ont été modélisés comme étant des systèmes à un seul degré de liberté et ceci grâce à théorie donnée par Tzenov et Bonneville /52/, qui ramène l'étude des systèmes continus à plusieurs de degré de liberté à un système ne possédant qu'un seul degré de liberté en utilisant le principe de deux systèmes énergiquement équivalent.

La modélisation d'un système à un seul degré de liberté est de permettre de considérer que l'amortissement existant et le même en chaque point de la barre, bien entendu en supposant que les caractéristiques du matériau sont identiques en tout point du. Pour cela dans la dernière phase de la partie expérimentale nous avons fait des essais en prenant plusieurs points de mesure de la réponse spectrale. Nous remarquons que la différence entre les valeurs des fréquences de résonance en considérant plusieurs points est très petite. Ce que nous permet de conclure que l'amortissement peut être considéré comme étant constant en chaque point de la barre.

5.2 Recommandations

A travers notre travail, nous avons présenté une méthode pour l'identification de l'amortissement en fonction du temps. La limitation de la présente méthode est l'apparition du pics dans les graphes de la variation de l'amortissement en fonction du temps. Pour cela on propose une amélioration a ce travail qui consiste en :

- L'utilisation de lissage de la courbe d'amortissement ;
- Une analyse du signal par bande ;
- L'utilisation d'autres formules d'intégration classique comme la méthode de Trapèze et celle de Romberg.

REFERENCES BIBIOGRAPHIQUES

- /1/- **Adhikari.S and Woodhouse.J** (2001) "Identification of damping: part1, viscous damping", *Journal of Sound and Vibration* 243(1), 43-61.
- /2/- **Alvin.K.F, Peterson.L.D. and Park.K.C.** (1997) "Extraction of normal modes and full modal damping from complex modal parameters". *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*..35,1187-1194.
- /3/- **Avitabile.P** (2001) "Overview of digital signal processing and experimental modal analysis". *Seminar on Modal Analysis: Theory and Application. University of Massachusetts Lowell. February-3, Orlando, Florida.*
- /4/- **Barbat.A.H., Canet. J.M.** (1989) "Structural response computation in earthquake engineering ", *Peniridge Press, Swansea, U.K.*
- /5/- **Barkanov. E., Hufenbach.W, Kroll.L** (2003) "Transient response analysis of systems with different damping models ", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 33-46.
- /6/- **Bathe.K, Wilson.E.L** (1976) "Numerical methods in finite elements analysis ". *Prentice Hall*
- /7/- **Beliveau J.G,** (1976) " Identification of viscous damping in structures from modal information ", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.43, pp.335-338.
- /8/- **Bendat.J.S** "The Hilbert Transform and applications to correlation measurements ", *Brüel & Kjaer.*
- /9/- **Bendat.J.S, Piersot. A.G.** (1986) "Random Data: Analysis and Measurement Procedures", *New York: Wiley 2nd edition.*

- /10/- **Broch.J.T.** (1984) "Mechanical vibration and shock measurements" 2nd Edition, *Brüel&Kjaer*
- /11/- **Capra.A, V.Davidovici.V** (1982) "Calcul dynamique des structures en zone sismique" *Eyrolles*, 2^{ème} édition.
- /12/- **Caravani. P, Thomson.W.T,** (1974) " Identification of damping coefficients in multi-dimensional linear systems ", *Journal of Applied Mechanics*, pp.379-382, June.
- /13/- **Chang.D.W, J.M.Roesset.J.M, Wen.C.H** (2000) "A time-domain viscous damping model based on frequency-dependent damping ratios". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 19 551-558.
- /14/- **Chen.LY, Chen J.T, Chen.C.H, Hong.H.K** (1994) "Free vibration of SDOF system with hysteretic damping" *Mechanics Research Communications*; 21(6):599-604.
- /15/- **Chen. S.Y, Ju. M.S, and Tsuei. Y.G,** (1996) " Estimation of mass, stiffness, and damping matrices from frequency response functions ", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.118, pp.78-82.
- /16/- **CloughR.W, Penzien.J** (1975) "Dynamic of structures". *Mc Graw Hill* .
- /17/- **Cook.R.D** (1981) "Concept and applications of finite element analysis" John Willy & Sons .
- /18/- **Cupial.P, Artoos.K** "Experimental modal analysis of the CMS MSGC Tracker prototype", *Technical Note, EST-ME/2001/2002*.
- /19/- **Davidovici.V** (1985) " Génie parasismique", Presses de l'école national des ponts et chaussées.
- /20/- **Djakab. E, Benouar. D,** (2000) " Identification of the damping matrix coefficients of linear systems with proportional damping ", *Journal of European Association for earthquake Engineering*, 3.

- /21/- **Dokainish.M.A, Subbaraj.K** (1989) “A survey of direct time integration methods in computational structural Dynamics –I-Explicit methods ”. *Compt & Struct Vol 32 N°6 PP 1371-1386*.
- /22/- **Dokainish.M.A, Subbaraj.K** (1989) “A survey of direct time integration methods in computational structural Dynamics –II-Implicit methods ”.*Compt & Struct Vol 32 N°6 PP 1387-1401*.
- /23/- **DØssing.O**, (1987) “Structural Testing Part 1: Mechanical Mobility Measurements”, *Brüel & Kjaer, April*.
- /24/- **Dumas.J, Bennevault.B** (2001) “Debuter la mesure vibratoire”, *MVI technologies group. Version Février*.
- /25/- **DIGITAL SIGNAL ANALYSIS** using Digital Filters and FFT Techniques, *selected from Technical Review, Brüel & Kjaer, January 1985*.
- /26/- **Ewins.D.J** (1984) “Modal Testing: Theory and Practice”, *Research Studies Press. Ltd. England*.
- /27/- **Fabunmi. J, Chang. P, and Vorwald. J**, (1988) “ Damping matrix identification using the spectral basis technique ”, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.110, pp.332-337*.
- /28/- **Fertis.D.G** (1995) “Mechanical ans Structural Vibration”, *a Wiley-Interscience publication,. John Wiley & Sons, INC*.
- /29/- **Fritzen. C.P**, (1986) “ Identification of Mass, damping, and stiffness matrices of mechanical systems ”, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.108, pp.9-16*.
- /30/- **Gaylard. M.E**, (1996) “ Identification of damping matrices: an autocorrelation-style technique ”, *Identification in Engineering Systems. Proceedings of the Conference, pp.225-237*.

- /31/- **Hasselman, T.K.**, (1972) “ A method of constructing a full modal damping matrix from experimental measurements ”, *AIAA Journal*, Vol.10, pp.526-527.
- /32/- **He. J, and Ewins. D.J**, (1992) “ Identification of damping properties in vibrating structures ”, *Proceedings MOVIC, Japan, September*.
- /33/- **Ibrahim. S.R**, (1983) “Dynamic modeling of structures from measured complex modes”, *AIAA Journal*, Vol.21, N°.6, pp.898-901.
- /34/- **Inaudi.J.A, Kelly.J.M** (1995) “Linear hysteretic damping and the Hilbert transform”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE 121 (5) 626-632*.
- /35/- **Jeary.A.P** (1986) “Damping in tall buildings – a mechanism and a predictor”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics vol 14 733-750*.
- /36/- **Kagawa.T** (1991) “Dynamic soil reaction to axially loaded piles”, *Journal of Geotechnical Engineering. ASCE; 117(7): 100-20*.
- /37/- **Kijewski.T, Kareem.A** “ Estimation and modeling of damping and engineering auxiliary damping systems in civil engineering”, *An overview. NatHaz Modeling Laboratory. University of Notre Dame*.
- /38/- **Lalanne.C.**(2002) “ Sinusoidal vibrations, mechanical vibration and schock, volume I ”, *Kogan page science*.
- /39/- **Lemay.J** (2001) “Acquisition, traitement de données, cours GMC-64506 ”, *Université LAVAL. Septembre*.
- /40/- **Meslem.A, Azzoune.R**, (2001) “ Investigation numérique et expérimentale sur la période fondamentale d'un château d'eau tronconique ”, *Projet de Fin d'Etude, USTHB. Septembre*.
- /41/- **Minas. C, and Inman. D.J**, (1991) “ Identification of nonproportional damping matrix from incomplete modal information ”, *Journal of Vibration and Acoustics, Vol.113, pp.219-224*.

- /42/- **Mottershead. J.E, Foster. C.D**, (1988) "An instrument variable method for the estimation of mass, stiffness, and damping parameters from measured frequency response functions ", *Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.2, N°4, pp.379-390.*
- /43/- **Naeim.F** (1989) "The seismic design handbook", *Structural Engineering series. Van Nostrand Reinhold, New York*
- /44/- **Nashif.A.D, Jones.D.G, Henderson.J.P** (1984) "Vibration Damping", *John Wiley & Sons.*
- /45/- **Pilkey.D.F** (1998) "Computation of a damping matrix for finite element model updating", *Ph.D Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University. April.*
- /46/- **Potter. R, Richardson. M**, (1974) "Mass, stiffness and damping matrices from measured model parameters ", *I.S.A. ac reprint : Advances in Instrumentation.*
- /47/- **Press.W.H, Flannery.B.P, Teukolsky.S.A, Vetterling.W.T** (1989) "Numerical Recipes", *Cambridge University Press , first edition.*
- /48/- **Preumont.A** (1990) "Vibrations aléatoires et analyse spectrale", *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. 1^{ère} édition.*
- /49/- **Schwarz.B.J, Richardson.M.H** "Experimental modal analysis", *CSI Reliability Week. Orlando, FL.*
- /50/- **Simon.M, Tomlinson.G.R** (1984) "Use of the Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures", *Journal of Sound and Vibration 96 421-36.*
- /51/- **Smith.C.B, Wereley.N.M** (1996) "Transient analysis for damping identification in rotating composite beams with integral damping layers", *Smart Mater.Struct. 5 540-550. UK.*
- /52/- **Tzenov.L, Bonneville.P** (1985) "Calcul des structures parasismique", *Entreprise National du Livre, Alger.*

/53/- **Wilson.E, Penzien.N**, (1972). "Evaluation of orthogonal damping matrices", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.4, pp.5-10.

/54/- **Yakhou.K** (1999) "Validation expérimentale d'un modele dynamique globale de boite de vitesses automobile", *Thèse de Doctorat, Institut National des Science s Appliquées de Lyon*, Novembre.

/55/- **Zaveri.K, Phil.M** (1984) "Modal Analysis of Large Structures-Multiple Exciter Systems ", *Brüel &Kjaer*, 1st edition, November

/56/- **Zienkiewicz.O.C, Taylor.R.L** (1991) "The finite element method Vol 2 : Solids and fluid mechanics, dynamic and nonlinearity", *McGraw Hill*.

Revues Techniques

/RT.1/- R.B.Bandall and N.Thrane, "Impulse Analysis using a Real-Time Digital Filter Analyzer", Technical Review, Brüel & Kjaer N° 4- 1979.

/RT.2/- R.B. Bandall and R. Upton, "Digital Filters and FFT Technique in Real-Time Analysis", Technical Review, Brüel & Kjaer N°1 – 1978.

/RT.3/- N. Thrane, "The Discrete Fourier Transform and FFT Analyzers", Technical Review, Brüel & Kjaer N° 1- 1979.

/RT.4/- N.Thrane, "The Hilber Transform", Technical Review, Brüel & Kjaer, N° 3- 1984.

/RT.5/- N.Thrane, "Zoom-FFT", Technical Review, Brüel & Kjaer, N° 2- 1980.

/RT.6/- R.C. Sohaney and J.M. Nieters, "Proper use of Weighting Functions for Impact Testing", Technical Review, Brüel & Kjaer, N° 4- 1984.

/RT.7/- R.Upton, "An Objective Comparison of Analog and Digital Methods of Real-time Frequency Analysis" , Technical Review Brüel & Kjaer N° 1 – 1977.

Fiches Techniques

/FT.1/- Accéléromètres piézoélectriques, fiche technique, Brüel & Kjaer.

/FT.2/- Amplificateur de charge, fiche technique, Brüel & Kjaer.

/FT.3/- Capteurs de force, fiche technique, Brüel & Kjaer.

Manuels d'Utilisation

/MU.1/- DAQ Hardware, Overview Guide, National Instruments, October 2000 Edition, Part Number 370097C-01

/MU.2/- NI 6034E/6035E/6036E, User Manual, National Instruments, May 2001 Edition, Part Number 322339B-01

/MU.3/- NI-DAQ User Manual for PC Compatibles, version 6.9.1, National Instruments, February 2001 Edition, Part Number 321644K-01.

ANNEXES

1- Flexion des poutres

Considère le cas d'une poutre rectiligne de longueur L de section variable (-Figure A.1.a.). Les caractéristiques physiques principales de cette poutre sont supposées être la rigidité de flexion $EI(x)$ et la masse linéique $m(x)$ qui peuvent varier toutes deux de manière arbitraire en fonction de la position x sur l'axe. Le chargement transversal $F(x,t)$ varie arbitrairement avec la position et le temps, et la réponse en déplacement transversal $Z(x, t)$ est une fonction de ces mêmes variables. Les conditions d'appui aux extrémités sont arbitraires; Ici nous représentons le cas d'une console à des fins d'illustration

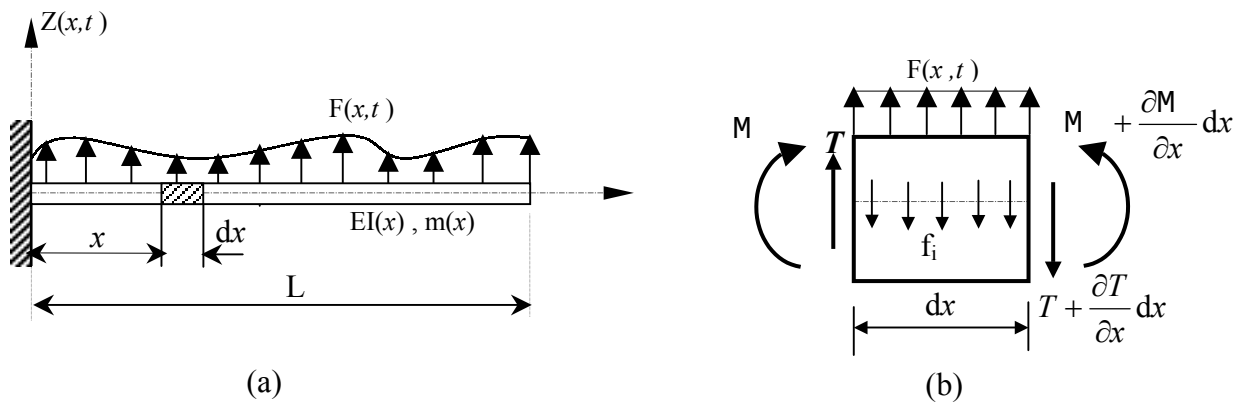


Figure A.1- Console soumise à un chargement dynamique
(a)- caractéristiques de la console et coordonnées
(b)- efforts agissant sur une section élémentaire

L'équation du mouvement de ce système simple est facilement déterminé si on considère l'équilibre des forces qui agissent sur le segment élémentaire représenté à la Fig.A.1.b. La sommation de toutes les forces verticales mène à la première relation d'équilibre dynamique

$$T + F dx - \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) - f_i dx = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

où $f_i dx$ représente l'effort d'inertie réparti transversal et est donné par le produit de la masse élémentaire et de l'accélération locale :

$$f_i dx = m dx \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2}$$

(A.1.2)

Substitution dans l'Eq. (A.1.1) et simplification donnent

$$\frac{\partial T}{\partial x} = F - m \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2}$$

(A.1.3)

que l'on reconnaît comme la relation standard entre l'effort tranchant et le chargement transversal, où apparaît à présent la force d'inertie de la poutre en accélération.

La seconde relation d'équilibre s'obtient en sommant les moments comme suit :

$$M + T dx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

On a vu que la force latérale répartie ne contribue qu'au moment de second ordre. Tout cela se simplifie pour donner directement la relation statique standard entre effort tranchant et moment fléchissant

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T \quad (\text{A.1.5})$$

Aucune force d'inertie ne contribue ici à l'équilibre des moments. En dérivant par rapport à x et en reportant dans l'Eq. (A.1.3) on obtien:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2} = F \quad (\text{A.1.6})$$

Enfin, l'utilisation de l'équation $M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ (relation entre moment et courbure, élémentaire en théorie des poutres) mène à l'équation aux dérivées partielles de ce mouvement de flexion :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} = F \quad (\text{A.1.7})$$

où EI et m varient tous deux de manière arbitraire en fonction de x .

2- Calcul théorique des fréquences naturelles de résonance des barres de section constante et de masse uniformément répartie

Dans la pratique, le calcul des paramètres modaux de vibration des structures passe par une hypothèse sur la déformée $Z(x, t)$ que prendrait la structure dans ses modes de vibration /10/16/28/. Cette hypothèse exprime une solution de type :

$$Z(x, t) = \Psi(x) y(t) \quad (\text{A.2.1})$$

Où $\Psi(x)$ est la fonction de déformée, qui doit satisfaire les conditions géométriques imposées aux états limite et qui préserve la continuité voulue des déplacements internes.

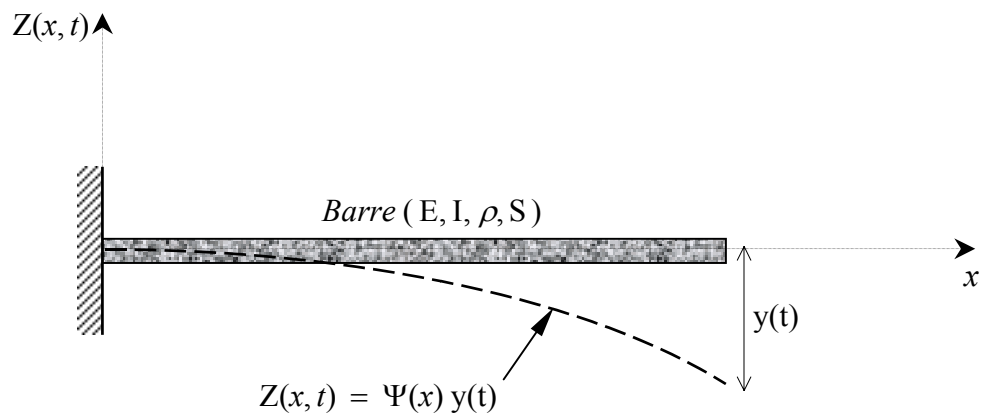


Figure.A.2- présentation de la déformée d'une barre en état de mouvement

E : module de Young

I : moment d'inertie de la surface d'intersection de la barre

L : la longueur de la barre

ρ : la masse volumique de la barre

S : la section de la surface d'intersection de la barre

De la théorie de déformée des barres et de la seconde lois de Newton du mouvement, selon l'expression A.1.7 l'équation différentielle qui gouverne les vibrations libres transversales d'une barre est /10/:

$$\rho S \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

où $Z(x, t)$ est donner par l'équation A.2.1. ce qui conduit à la forme suivante :

$$\rho S \Psi(x) \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + \left[EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right) \right] y(t) = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

l'expression (A.2.3) a pour solution :

$$y(t) = B_1 \cos \left[\left[\frac{EI}{\rho S \Psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} t \right] + B_2 \sin \left[\left[\frac{EI}{\rho S \Psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} t \right]$$

Les fréquences naturelles de vibration peuvent être calculées par la formule suivante :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S \Psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right)} \quad (\text{A.2.4})$$

Considérons, par exemple, le cas d'une barre encastree comme la montre la figure A.2. En assumant que la fonction de la déformée qui satisfaisant les conditions aux limites, a la forme suivante :

$$\Psi(x) = \sin(\lambda x) \quad \text{avec} \quad \lambda = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.2.5})$$

par substitution de l'expression A.2.5. dans l'équation A.2.3, on obtient :

$$\ddot{y}(t) + \frac{EI}{\rho S} \lambda^4 y(t) = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

la solution de cette équation aura la forme suivante :

$$y(t) = B_1 \cos\left(\left[\frac{EI}{\rho S} \lambda^4\right]^{\frac{1}{2}} t\right) + B_2 \sin\left(\left[\frac{EI}{\rho S} \lambda^4\right]^{\frac{1}{2}} t\right) \quad (\text{A.2.7})$$

Ainsi, les fréquences de vibrations seront calculées par l'expression suivante :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S} \lambda^4} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} \quad \text{avec } n=1,2,3,\dots \quad (\text{A.2.8})$$

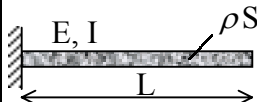
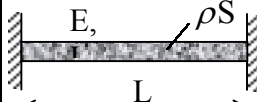
Notons que les formes modales correspondantes sont représentées par l'équation A.1.5.

D'une manière générale, les valeurs théoriques des fréquences de résonance pour le cas des barres de section uniforme et de masse uniformément répartie peuvent être calculés à partir de la formule suivante /10/ :

$$f_n = \frac{A_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} \quad \text{avec } n=1,2,3,\dots \quad (\text{A.2.9})$$

où, A_n est un coefficient dépendant de la fonction de la déformée et des conditions aux limites de la barre. Les valeurs de A_n sont données dans le tableau ci-dessous pour les 4 premiers modes de vibration pour différents types de configuration de la barre.

Tableau.A.1- Les valeurs de A_n pour différentes conditions aux limites

Conditions aux limites	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
	$A = 3.52$	$A = 22.4$	$A = 61.7$	$A = 121.0$
	$A = 22.4$	$A = 61.7$	$A = 121$	$A = 200$

3- Principe des systèmes énergiquement équivalents

Rayleigh a donné une méthode approchée ramenant l'étude de la structure réelle à une structure ne possédant qu'un seul degré de liberté. Cette méthode repose sur le principe de la conservation d'énergie /16/43/52/.

A-2-1- Cas des systèmes consols

Considérons le cas d'une barre de section constante et de masse uniformément répartie du système-1 de la figure.A.3. Dans le but de transformer ce système qui a une infinité de degré de liberté à un système à un degré de liberté (système-2), on doit vérifier que leurs énergies soit égales à tout moment.



Figure.A.3- Deux systèmes énergiquement équivalents

l'Equivalence cinématique des deux systèmes

L'énergie cinématique du premier système est :

$$E_c(1) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left(\frac{\partial Z(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{A.3.1})$$

L'énergie cinématique du second système est :

$$E_c(2) = \frac{1}{2} m^* \left(\frac{\partial Z(L, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{A.3.2})$$

Pour déterminer la masse généralisée m^* sur la base de l'équivalence cinématique des deux systèmes:

$$E_c(1^{\text{er}} \text{ système}) = E_c(2^{\text{ème}} \text{ système})$$

On va admet, comme l'on a déjà parlé dans l'annexe-1, que les vibrations propres peuvent être représentées par l'expression A.2.1 :

$$Z(x, t) = \Psi(x) y(t)$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \rho S \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^L \Psi^2(x) dx = \frac{1}{2} m^* \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right)^2 \Psi^2(L) \quad (\text{A.3.3})$$

avec

$$\Psi(x) = \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}$$

$$\Rightarrow m^* = \frac{\rho S \int_0^L \Psi^2(x) dx}{\Psi^2(L)} \quad (\text{A.3.4})$$

le choix de $\Psi(x)$ doit vérifier les conditions aux limites, donc $\Psi(L)$ doit être égale à 1. d'où /16/43/52/ :

$$m^* = \rho S \int_0^L \Psi^2(x) dx \quad (\text{A.3.5})$$

$$m^* = \rho S \int_0^L \left(\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3} \right)^2 dx = \frac{33}{140} \rho S L \quad (\text{A.3.6})$$

L'Équivalence potentielle des deux systèmes

L'énergie potentielle du premier système est :

$$E_p(1) = \frac{1}{2} \int_0^L E I \left(\frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{A.3.7})$$

L'énergie potentielle du second système est :

$$E_p(2) = \frac{1}{2} k^* Z^2(L, t) \quad (\text{A.3.8})$$

Maintenant on doit déterminer la rigidité pour laquelle la condition d'équivalence potentielle soit satisfaite :

$$E_p(1^{\text{er}} \text{ système}) = E_p(2^{\text{ème}} \text{ système})$$

$$\frac{1}{2} E I y^2(t) \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} k^* y^2(t) \Psi^2(L) \quad (\text{A.3.9})$$

d'où :

$$k^* = \frac{\rho S \int_0^L \Psi^2(x) dx}{\Psi^2(L)} \quad (\text{A.3.10})$$

le choix de $\Psi(x)$ doit vérifier les conditions aux limites, donc $\Psi(L)$ doit être égale à 1.
d'où /16/43/52/:

$$k^* = \int_0^L E I [\Psi''(x)]^2 dx \quad (\text{A.3.11})$$

$$k^* = E I \int_0^L \left(\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3} \right)^2 dx = \frac{3 E I}{L^3} \quad (\text{A.3.12})$$

A-2-2- Cas des systèmes de barres encastrées aux deux extrémités

De la même manière, on peut trouver la masse m^* et la rigidité généralisée k^* pour lesquels un système continu encastré sur ses deux extrémités (système-1 de la figure.A.4), soit énergiquement équivalent à un système ne possédant qu'un seul degré de liberté et encastrée aux deux extrémités (système-2) :



Figure.A.4- Deux systèmes énergiquement équivalents

Ainsi les résultats obtenus seront comme suite :

$$m^* = \rho S \int_0^L \Psi^2(x) dx = \frac{13}{35} \rho S L \quad (\text{A.3.13})$$

$$k^* = \int_0^L EI [\Psi''(x)]^2 dx = \frac{12EI}{L^3} \quad (\text{A.3.14})$$

avec

$$\Psi(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

4- Les méthodes expérimentales pour la mesure de facteur d'amortissement visqueux réduit ξ

A-4-1- les essais de mesures pour les vibrations libres

Méthode de Décrément logarithmique :

Pour les vibrations libres d'un système à un seul degré de liberté, on aura une équation différentielle de la forme :

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = 0 \quad (\text{A.4.1})$$

l'expression de la réponse aura la forme :

$$y(t) = \rho \exp(-\xi \omega_0 t) \cos(\omega_D t - \theta) \quad (\text{A.4.2})$$

ρ c'est l'amplitude de la réponse (l'amplitude du mouvement) ;

θ c'est le déphasage

ω_0 c'est la fréquence naturelle (fréquence de résonance)

ω_D c'est le pseudo-fréquence en oscillation amortie

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{A.4.3})$$

le coefficient d'amortissement est donner par :

$$c = 2\xi m \omega_0 \quad (\text{A.4.4})$$

On tire le rapport des amplitudes des deux pics positifs successifs de la réponse de l'équation (A.4.2) ; on obtient :

$$\frac{Y_N}{Y_{N+1}} = \exp(2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_D}) \quad (\text{A.4.5})$$

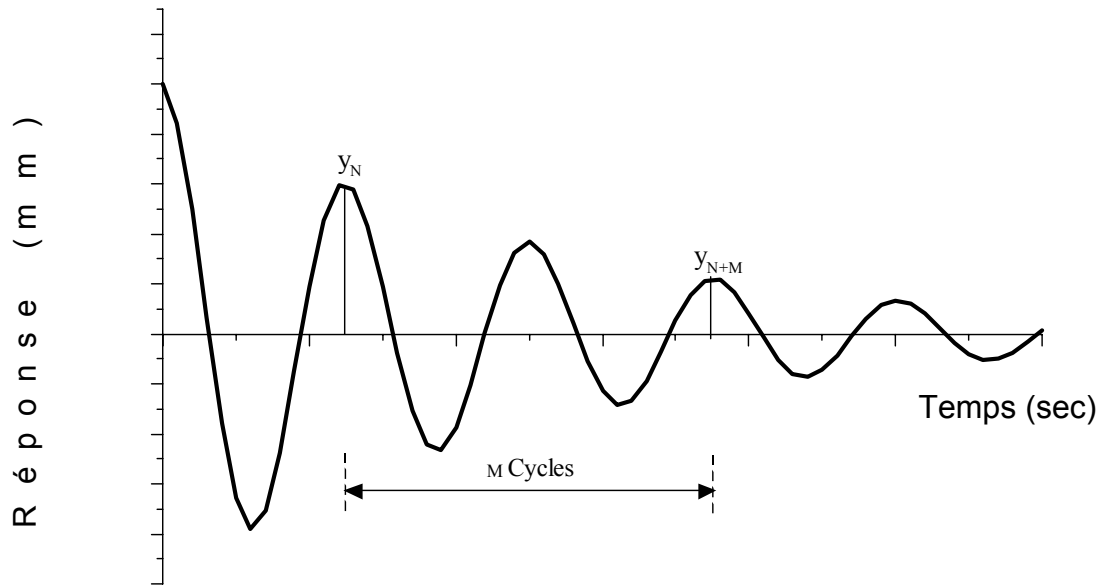


Figure.A.5- Méthode du décréement logarithmique des amplitudes des vibrations

En prenant le logarithme népérien des deux membres de l'équation A.4.5 on obtient le décréement logarithmique δ :

$$\delta = \ln\left(\frac{Y_N}{Y_{N+1}}\right) \quad (\text{A.4.6})$$

$$\Rightarrow \quad \delta = 2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_D} \quad (\text{A.4.7})$$

soit, avec l'équation A.4.3. :

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\text{A.4.8})$$

Dans le cas normal des structures Génie Civil, le facteur d'amortissement ξ prend des valeurs entre 0,02 et 0,2 d'où cette dernière équation peut s'approcher par /3/4/16/19/37/43/51/:

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (\text{A.4.9})$$

Pour les systèmes Génie civil (généralement peu amortis), une approche est obtenue en utilisant des pics séparés par plusieurs cycles, M cycle par exemple, dans ce cas :

$$\frac{Y_N}{Y_{N+M}} = M \exp(2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_D}) \quad (\text{A.4.10})$$

En utilisant le décrétement logarithmique:

$$\delta = \frac{1}{M} \ln\left(\frac{Y_N}{Y_{N+M}}\right) \quad (\text{A.11})$$

cela conduit à la même expression déjà donnée par l'équation A.4.9, pour la mesure de facteur d'amortissement :

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (\text{A.12})$$

A-4-2- les essais de mesures pour les vibrations forcées

Pour un chargement harmonique, l'équation différentielle prend la forme suivante :

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = F_0 \exp(j2\pi f t) \quad (\text{A.4.13})$$

d'où, l'expression de la réponse sera comme suite :

$$y(t) = \rho \sin(\omega t - \theta) \quad (\text{A.4.14})$$

$$\rho = \frac{F_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4.15})$$

ρ c'est l'amplitude de la réponse permanente.

β c'est le rapport des fréquences

$$\beta = \frac{f}{f_0} \quad (\text{A.4.16})$$

f c'est la fréquence d'excitations et f_0 c'est la fréquence naturelle propre du système (ou fréquence de résonance).

A l'état statique ($\beta = 0$), l'amplitude a la forme :

$$\rho_0 = \frac{F_0}{k} \quad (\text{A.4.17})$$

Pour un chargement harmonique avec des fréquences variable, l'expression A.4.15 prennent la forme suivante :

$$\rho(f) = \rho_0 [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4.18})$$

Cette expression montre que toute la courbe de la réponse en fréquence dépend de la valeur de l'amortissement présent dans le système. Il est possible de déterminer le facteur d'amortissement à partir des caractéristiques de la courbe. A la résonance ($\beta=1$), l'équation.A.4.18 devient :

$$\rho_{\beta=1} = \frac{\rho_0}{2\xi} \quad (\text{A.4.19})$$

A-3-2-1- Amplification résonante

Dans le cas de résonance l'amplitude de la réponse est inversement proportionnelle au facteur d'amortissement ; de l'équation.A.4.19 le facteur d'amortissement est donné par:

$$\xi = \frac{\rho_0}{2\rho_{\beta=1}} \quad (\text{A.4.20})$$

Bien que l'en soient proche, l'équation.A.4.19 ne représente pas la réponse maximale exacte de système amortis. La fréquence d'excitation à la réponse maximale exacte peut s'obtenir en annulant la dérivée de l'équation.A.13. par rapport à la fréquence d'excitation :

$$\frac{d\rho(f)}{df} = 0 \quad (\text{A.4.21})$$

pour les structures courantes, dont le facteur d'amortissement est inférieur à $1/\sqrt{2}$, on trouve que la fréquence du pic de la réponse est :

$$\beta_{pic} = \sqrt{1-2\xi^2} \quad (\text{A.4.22})$$

et donc les valeurs du pic sont :

$$\rho_{max} = \frac{\rho_0}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\rho_0 \omega_0}{2\xi \omega_D} \quad (\text{A.4.23})$$

$$\xi = \frac{\rho_0 \omega_0}{2 \rho_{\max} \omega_D} \approx \frac{\rho_0}{2 \rho_{\max}} \quad (\text{A.4.24})$$

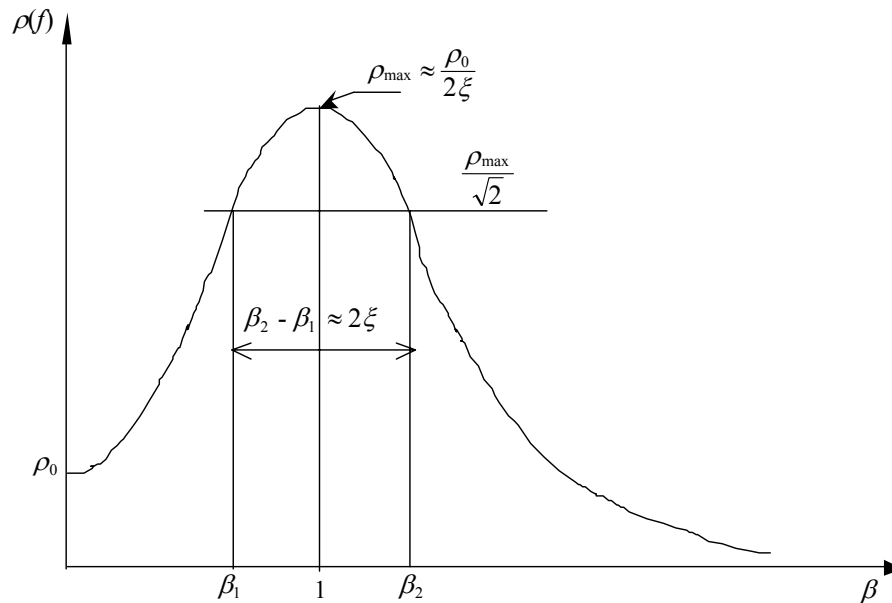


Figure.A.6- Evaluation de facteur d'amortissement a la résonance

Méthode de la Demi-Puissance (largeur de bande)

Cette méthode a le même principe que celui de la méthode présentée précédemment, c'est-à-dire l'évaluation de facteur d'amortissement à partir des caractéristiques de la courbe d'amplitude de la réponse en fonction de la variation de la fréquence d'excitation.

Le facteur d'amortissement sera déterminé sur la base des fréquences pour lesquelles la réponse est réduite à $\frac{1}{\sqrt{2}} \rho_{\beta=1}$, c'est-à-dire des fréquences pour lesquelles la puissance d'entrée est la moitié de la puissance de sortie obtenue à la résonance.

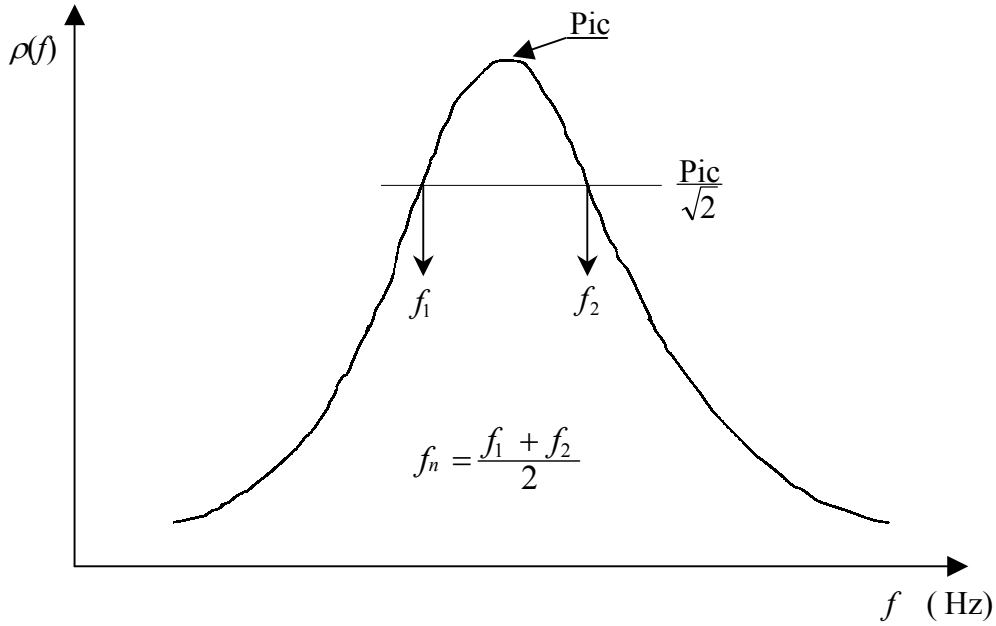


Figure.A.7- Evaluation de facteur d'amortissement a la demi-puissance de l'amplitude

Les valeurs des fréquences à demi-puissance peuvent s'obtenir en écrivant que l'amplitude de la réponse donnée par l'équation.A.4.18 est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fois l'amplitude de résonance donnée par l'équation.A.4.19 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_0}{2\xi} = \rho_0 [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4.25})$$

En élevant au carré on obtient :

$$\frac{1}{8\xi^2} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (\text{A.4.26})$$

ce qui donne le rapport de fréquences

$$\beta^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2} \quad (\text{A1.4.27})$$

Si on néglige le terme ξ^2 sous le radical, les deux fréquences à demi-puissance sont

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &\cong 1 - 2\xi - 2\xi^2 & \text{et} & & \beta_2^2 &\cong 1 + 2\xi - 2\xi^2 \\ \Rightarrow \quad \beta_1^2 &\cong 1 - \xi - \xi^2 & \text{et} & & \beta_2^2 &\cong 1 + \xi - \xi^2 \end{aligned}$$

Le facteur d'amortissement est donné par la demi-différence entre ces fréquences :

$$\xi \cong \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$$

$$\xi \cong \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (\text{A.4.28})$$

On voit que cette méthode évite la mesure de la flèche statique ; elle exige néanmoins un tracé précis de la courbe de réponse au voisinage de la demi-puissance et à la résonance.

Une autre manière pour mesurer le facteur d'amortissement au moyen de la largeur de bande, c'est-à-dire la demi-puissance, existe. Elle est basée sur l'évaluation de la fonction de transfert $H(f)$ qui exprime la relation entre l'excitation et la réponse et ensuite, la largeur de bande Δf est déduite à partir de la courbe de $H(f)$ en fonction de la fréquence.

Donc, en supposant une équation différentielle d'un système mécanique supposé linéaire :

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = f(t) \quad (\text{A.4.29})$$

par application de la transformée de Fourier :

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (\text{A.4.30})$$

et inversement :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (\text{A.4.31})$$

lorsque on dérive l'équation.A.4.31 par rapport au temps on obtient l'expression de la vitesse et d'accélération successivement :

$$\dot{y}(t) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (\text{A.4.32})$$

$$y(t) = -\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (\text{A.4.33})$$

On peut voir clairement qu'à partir des équations A.4.32 et A.4.33 on peut tirer les deux relations suivantes :

$$\dot{y}(t) = j\omega y(t) \quad (\text{A.4.34})$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) \quad (\text{A.4.35})$$

par la substitution de ces deux dernières expressions dans l'équation A.4.29. on obtient :

$$\{-\omega^2 + j\omega c + k\}y(t) = f(t) \quad (\text{A.4.36})$$

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega c + k} = H(\omega) \quad (\text{A.4.37})$$

$H(\omega)$ c'est la fonction de transfert ou la Fonction de Réponse en Fréquence ou bien aussi c'est la Réceptance car elle exprime le rapport entre les déplacements et l'excitation. Cette expression, peut aussi prendre la forme suivante :

$$H(f) = \frac{1/k}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\left(\frac{f}{f_0}\right)} \quad (\text{A.4.38})$$

où :

f c'est la fréquence d'excitation

f_0 c'est la fréquence de résonance (fréquence naturelle)

Q c'est le facteur de qualité

$$Q = \frac{1}{c} \sqrt{km} = \frac{1}{2\xi} \quad (\text{A.4.39})$$

une mesure approximation de Q est obtenue en pratique par la mesure de la largeur de la courbe de réponse, $|H(f)|$, aux points correspondant au valeurs $\frac{1}{\sqrt{2}}H(f_0)$. $H(f_0)$ correspond à la réponse a la fréquence de résonance ($f = f_0$).

En écrivant :

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(f_0)| \quad (\text{A.4.40})$$

les fréquences de la demi-puissance sont des points de la courbe pour lesquelles :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{2} |H(f_0)|^2 \quad (\text{A.4.41})$$

si cette largeur est Δf , alors on obtient :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad \text{avec} \quad \Delta f = f_2 - f_1 \quad (\text{A.4.42})$$

d'où :

$$\xi = \frac{1}{2Q} = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} \quad (\text{A.4.43})$$

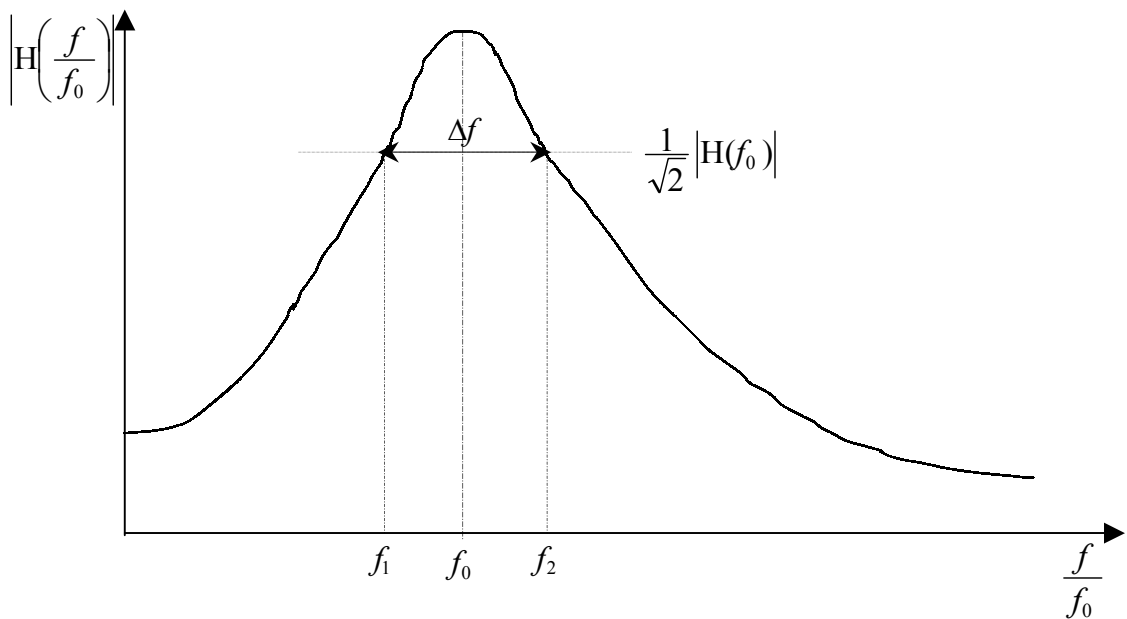


Figure.A.8- Evaluation de facteur d'amortissement a la demi-puissance de la fonction de transfert