

**REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE USTHB/ALGER
FACULTE DE PHYSIQUE**



Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat
en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par

BELABBAS MOHAMED

SUJET :

***Étude de l'effet des corrélations d'appariement du type
isovectoriel sur quelques grandeurs statistiques nucléaires***

Soutenue publiquement le 23 / 05 / 2011, devant le jury composé de :

M. DJEBARA	Professeur (USTHB, Alger)	Président
N. H. ALLAL	Professeur (USTHB, Alger)	Examinatrice
M. BENTAIBA	Professeur (USD, Blida)	Examineur
M. BENAROUS	Professeur (UHBC, Chlef)	Examineur
M. MOULAY	Directeur de Recherche (CNRA, Alger)	Examineur
M. FELLAH	Professeur (USTHB, Alger)	Directeur de Thèse

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement d'un travail personnel prenant et exigeant. Toutefois, elle n'aurait sans doute pas vu le jour sans le concours de certaines personnes

*Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur **M.Fellah** professeur à l'USTHB et responsable de l'équipe "théorie de la structure nucléaire" pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et proposé ce travail. Je le remercie très sincèrement et plus encore chaleureusement, pour la patience qu'il a montrée envers moi et ses encouragements qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer tout au long de la réalisation de ce travail sans oublier les moyens qu'il a mis à ma disposition. Sa grande connaissance dans le domaine, ainsi que son expérience, ont joué un rôle important dans la conception de ce travail. Faire ma thèse sous sa direction était pour moi un grand honneur et un immense bonheur.*

*Je remercie énormément Mr **M. Djebara** professeur à l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur d'assurer la présidence du jury d'examen.*

*Je remercie chaleureusement Mlle. **N.H. Allal** professeur à l'USTHB, pour avoir non seulement accepté de participer au jury de cette thèse mais aussi pour sa pédagogie, sa patience, sa disponibilité et ses conseils m'ont aidé à surmonter beaucoup de difficultés.*

*Je tiens également à remercier vivement Mr **M.Bentaiba** professeur à l'université de Blida, Mr **M. Moulay** directeur de recherche au CNRA et Mr **M.Benarous** professeur à l'université de Chlef, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.*

*Je ne saurais oublier les gens auprès desquels j'ai trouvé tout le soutien nécessaire pour pouvoir mener à bien ce travail. Je cite notamment Mlle **N.Benhamouda** maître conférence à l'USTHB et Mme **I.Ami** maître assistante à l'université de Médea, pour lesquelles j'exprime ma profonde gratitude pour leur aide précieuse et leur conseils. Je remercie aussi Mr **M.R.Oudih** maître conférence à l'USTHB ainsi que Mme **D.Mokhtari** maître conférence à l'USTHB pour leurs aide et encouragements.*

Je tiens aussi à remercier tous les autres collègues de l'équipe.

Table des matières

Introduction	3
1 Appariement entre particules identiques à température finie par le formalisme de l'intégrale de parcours	6
1.1 Introduction	6
1.2 Hamiltonien du système	7
1.3 La grande fonction partition	11
1.4 Transformation de Hubbard-Stratonovitch	14
1.5 Approximation statique - Energie libre du système	20
1.5.1 Approximation au point de selle - Equations du gap	23
2 Appariement isovectoriel à température finie par le formalisme de l'intégrale de parcours	24
2.1 Introduction	24
2.2 Hamiltonien du système	25
2.3 Fonction partition	26
2.4 Transformation de Hubbard-Stratonovitch	27
2.5 Approximation statique	31
2.6 Equations du gap	35
2.6.1 Approximation au point de selle	35
2.6.2 Différentes limites	36
3 Grandeurs statistiques	39

3.1	Introduction	39
3.2	Grandeurs thermodynamiques en l'absence de l'appariement neutron-proton . . .	42
3.2.1	Grande fonction partition	42
3.2.2	Energie du système	43
3.2.3	Nombre de particules	44
3.2.4	Entropie	45
3.2.5	Capacité calorifique	45
3.2.6	Limite à température nulle	46
3.3	Grandeurs thermodynamiques en présence de l'appariement isovectoriel	47
3.3.1	Grande fonction partition	47
3.3.2	Energie du système	48
3.3.3	Nombre de particules	49
3.3.4	Entropie	50
3.3.5	Capacité calorifique	50
3.3.6	Absence d'appariement neutron-proton :	53
4	Résultats numériques et discussion	54
4.1	Cas d'un modèle schématique : le modèle à un niveau	54
4.1.1	Résolution des équations du gap	54
4.1.2	Les grandeurs statistiques	57
4.2	Cas réalistes	64
4.2.1	Grandeurs statistiques	65
	Conclusion	72
	Bibliographie	75

Introduction

Au cours de la dernière décennie, l'étude des corrélations d'appariement neutron-proton (np) a fait l'objet de nombreux travaux (cf. e.g. [1]-[28]) en raison des progrès expérimentaux dans la région des noyaux de masse intermédiaire tels que $N \simeq Z$ en raison de nouvelles installations de production de faisceaux d'ions radioactifs. L'étude de ces noyaux riches en protons, est intéressante, non seulement du point de vue de la structure nucléaire, mais également sur le plan de l'astrophysique nucléaire. En effet, on s'attend à ce que ce type de noyaux soit synthétisé lors du processus de capture rapide d'un proton (rapid-proton capture process, (rp process)) dans des conditions rencontrées en astrophysique [21],[22]. De plus, la plupart de ces noyaux ne sont pas accessibles sur le plan expérimental. Par conséquent, beaucoup de calculs d'intérêt astrophysique dépendent de la précision des prévisions des propriétés nucléaires. Dans les noyaux pour lesquels $N \simeq Z$, les niveaux de Fermi des systèmes neutron et proton sont énergétiquement voisins et l'on s'attend donc à ce que les corrélations d'appariement neutron-proton (np) jouent un rôle significatif dans leur structure. Il semble que ces corrélations soient, au moins, aussi importantes que les corrélations d'appariement entre particules identiques. Généralement, l'appariement est traité dans le cadre de l'approche BCS généralisée (cf. e.g. [1]-[7]). La fonction d'onde BCS n'est pas état propre de l'opérateur nombre de particules. Diverses techniques de projection dans l'espace nombre d'occupation ont donc été proposées pour conserver strictement le nombre de particules. Les techniques les plus utilisées sont par exemple l'approximation de la phase aléatoire des quasiparticules (Quasiparticle Random Phase Approximation : QRPA) (cf. e.g. [8]-[16]), la méthode de Lipkin-Nogami (LN) [17], la méthode de la coordonnée génératrice (Generator Coordinate Method : GCM) [18], les méthodes de projection nombre d'occupation de type PBCS [23]-[27] ou de projection simultanée sur l'isospin

et le nombre de particules [28].

Toutefois, toutes ces études ont été effectuées à température nulle. Il serait donc intéressant d'étudier le comportement thermique des corrélations d'appariement np. En effet, si les effets de la températures dans les corrélations d'appariement entre particules identiques ont été intensément étudiés depuis longtemps, dans le cadre de la théorie BCS et ses variantes (cf. e.g. [29]-[41]), en utilisant le formalisme de l'intégrale de chemin (cf. e.g. [42]-[51]), ou en utilisant d'autres méthodes (voir [52]), seul un nombre restreint d'études concernant les corrélations d'appariement np a été réalisé à température finie. Citons, entre autres, les travaux de Langanke et al. [53] qui ont étudié, dans le cadre du modèle Shell Model Monte Carlo (SMMC), les propriétés thermiques et la dépendance en température des corrélations d'appariement de type isoscalaire et isovectoriel. Ils se sont intéressés en particulier aux noyaux ^{50}Mn et ^{52}Fe qui sont représentatifs des noyaux impair-impairs pour lesquels $N = Z$. La méthode SMMC (cf. e.g. [54],[55]) décrit le noyau au moyen de l'ensemble canonique à température finie et utilise la méthode de Hubbard-Stratonovitch pour linéariser l'opérateur à plusieurs corps en fonction du temps imaginaire. De cette façon, les observables sont écrites sous forme d'intégrales de chemin de propagateurs à un corps dans des champs externes fluctuants. Cette étude a été confirmée, en utilisant toujours les techniques du modèle en couches, dans la Ref. [56]. Citons également Kaneko et Hasegawa [22] qui ont récemment proposé une méthode de calcul des énergies d'appariement np dans les noyaux chauds à l'aide des techniques du modèle en couches. Ils ont extrait les gaps d'appariement à température finie à partir des différences d'énergie thermiques. Cependant, dans ces dernières études, les calculs ont été réalisés numériquement et donc sans expliciter les équations du gap.

Sheikh et al. [57], pour leur part, ont étudié la dépendance vis à vis de la rotation et de la déformation des corrélations d'appariement isovectoriel et isoscalaire à température finie mais uniquement dans le cadre d'un hamiltonien de modèle en couches *cranké* et exactement soluble.

Nous nous proposons dans le présent travail d'étudier les propriétés statistiques habituelles de systèmes chauds dont les particules interagissent entre elles via l'appariement isovectoriel. Nous utiliserons pour cela le formalisme de l'intégrale fonctionnelle pour expliciter le grand potentiel du système à partir duquel les grandeurs statistiques usuelles seront déduites. Pour cela nous suivrons le plan suivant :

- Dans le premier chapitre, nous rappellerons le traitement des corrélations d'appariement entre particules identiques (neutrons ou protons) par le formalisme de l'intégrale de chemin et établirons les équations du gap de la théorie BCS à température finie (FTBCS).

- Les corrélations d'appariement isovectoriel, dans un noyau déterminé, seront traitées dans le second chapitre, par la même technique. Les équations du gap généralisées et l'énergie libre du système seront déduites.

- Les grandeurs statistiques habituelles (énergie, entropie et capacité calorifique du système) seront explicitées, avec et sans prise en compte de l'appariement np, dans le troisième chapitre.

- La résolution numérique des équations du gap généralisées et le calcul des grandeurs statistiques seront présentés et discutés dans le quatrième chapitre, dans le cadre d'un modèle schématique, puis dans celui d'un modèle réaliste basé sur les énergies du champ moyen de Woods-Saxon déformé.

- Les conclusions de cette étude seront résumées dans la dernière partie.

Chapitre 1

Appariement entre particules identiques à température finie par le formalisme de l'intégrale de parcours

1.1 Introduction

L'approximation microscopique des particules indépendantes dans laquelle on suppose que chaque particule évolue librement dans le champ moyen généré par l'ensemble des autres particules, est souvent considérée comme l'approximation "zéro" du problème microscopique à partir duquel diverses extensions sont possibles. Ces extensions au-delà du champ moyen sont utiles et nécessaires à la fois, que ce soit en structure ou en dynamique nucléaire, pour inclure un maximum de corrélations nécessaires à une description précise de la physique des noyaux. Dans les systèmes nucléaires, une partie importante des corrélations qui est négligée dans l'approximation des particules indépendantes correspond aux corrélations d'appariement. Celles-ci sont dûes à une interaction à court rayon d'action entre les nucléons se trouvant dans des états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps et formant des paires. Ce type d'interaction a été traité au début dans le cadre de la théorie BCS de Bardeen Cooper Schrieffer [58] pour la description microscopique de la supra-conductivité dans les métaux. Cette théorie a été étendue par la suite à la physique nucléaire par Belyaev [59]. Plus tard, Sano et Yamazaki [29] ont été les

premiers à généraliser la méthode pour étudier les effets de la température sur les corrélations d'appariement entre particules identiques.

Les corrélations d'appariement à température finie T ont souvent été étudiées, sur le plan théorique, dans le cadre des approximations de la théorie " Finite Temperature BCS" : FTBCS [30],[36]-[60] et sa généralisation la théorie " Finite Temperature Hartre-Fock-Bogoliubov" : FTHFB [31],[63]. L'inconvénient majeur de ces théories est le fait qu'elles ignorent complètement dans leur traitement les fluctuations quantiques et thermodynamiques. Récemment, plusieurs travaux consacrés à l'étude de l'effet des fluctuations thermiques sur le champ d'appariement, ont mis en évidence la persistance du gap en énergie même à une température non nulle [64]-[65]. Parmi ces méthodes on rencontre souvent la théorie de la transition de phase de Landau [45], [64], [66]- [67] où l'on utilise un seul paramètre appelé «degré de l'ordre » pour décrire l'état macroscopique du système, et la technique de l'intégrale de chemin de Feynman [42]-[51] qui permet de transformer, via la transformation de Hubbard-Stratonovitch [68], la fonction partition d'un système de particules en interaction en une fonction de partition d'un système équivalent de particules indépendantes interagissant avec un champ extérieur.

Nous présenterons dans ce chapitre la fonction de partition sous forme d'intégrale fonctionnelle en incluant les corrélations d'appariement entre particules identiques dans l'hamiltonien du système. En utilisant la méthode de col et l'approximation du point de selle de la fonction partition, nous établirons les équations du gap en considérant dans un premier temps l'approximation statique puis l'approximation dynamique en prenant en compte quelques modes.

1.2 Hamiltonien du système

Dans le cadre de l'hypothèse de la force à deux corps, l'hamiltonien d'un système de fermions en interaction s'écrit :

$$\mathcal{H} = \sum_i t_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \quad (1.1)$$

où t_i est l'énergie cinétique du nucléon i et V_{ij} représente l'interaction entre les nucléons i et j . Une fois établie l'expression de cette dernière, la théorie d'Hartree-Fock conduit à la détermination d'un champ moyen, local ou non local, dans lequel les fermions se déplacent indépendamment les uns des autres et par suite à un hamiltonien H_0 à particules indépendantes.

H_0 diffère de l'hamiltonien réel $\mathcal{H}$ par un terme d'interaction résiduelle v . En fait, le terme H_0 ne peut décrire à lui seul les caractéristiques effectivement observées dans l'étude systématique des spectres des noyaux pair-pairs notamment. Parmi ces caractéristiques, il y a l'effet d'appariement nucléaire mis en évidence par ses conséquences sur un grand nombre d'observables nucléaires depuis longtemps. Ces observables concernent typiquement les masses, les rayons de charge, les propriétés de déformation, les barrières de fission et certains cas de coexistence de forme.

Dans le formalisme de la seconde quantification, en prenant pour opérateurs de création et d'annihilation les opérateurs associés aux états propres de H_0 , l'hamiltonien $\mathcal{H}$ s'écrit en tenant compte de l'isospin :

$$\mathcal{H} = \sum_{\substack{k>0 \\ t=n,p}} \varepsilon_{kt} (a_{kt}^+ a_{kt} + a_{kt}^+ a_{kt}^-) + \sum_{\substack{klmn \\ t_1 t_2 t_3 t_4}} \langle kt_1, lt_2 | v | mt_3, nt_4 \rangle a_{kt_1}^+ a_{lt_2}^+ a_{nt_4}^- a_{mt_3}^- \quad (1.2)$$

où les éléments de matrice de l'interaction résiduelle :

$$v_{kt_1, lt_2, mt_3, nt_4} = \langle kt_1, lt_2 | v | mt_3, nt_4 \rangle \quad (1.3)$$

sont antisymétriques :

$$\begin{aligned} v_{kt_1, lt_2, mt_3, nt_4} &= -v_{lt_2, kt_1, mt_3, nt_4} \\ &= -v_{kt_1, lt_2, nt_4, mt_3} \\ &= v_{mt_3, nt_4, kt_1, lt_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

De plus, l'invariance par renversement du sens du temps se traduit par :

$$v_{kt_1, lt_2, mt_3, nt_4} = v_{\tilde{m}t_3, \tilde{n}t_4, \tilde{k}t_1, \tilde{l}t_2} \quad (1.5)$$

où l'on a noté par $|\tilde{k}t\rangle$ le renversé par rapport au sens du temps de l'état $|kt\rangle$. On a supposé de plus dans l'écriture de $\mathcal{H}$, que le champ moyen est invariant par renversement du sens du

temps. Ceci se traduit par le fait que les états $|\tilde{k}t\rangle$ et $|kt\rangle$ ont la même énergie, soit :

$$\varepsilon_{kt} = \varepsilon_{\tilde{k}t} \quad , \quad t = n \text{ (neutron)}, p \text{ (proton)} \quad (1.6)$$

La forme générale de l'interaction d'appariement entre particules identiques occupant une paire d'états $|\tilde{k}t\rangle$ et $|kt\rangle$ est :

$$v_{kt_1, lt_2, mt_3, nt_4} = -4G_{t_1 t_2} \delta_{k\tilde{l}} \delta_{m\tilde{n}} \delta_{t_1 t_2} \delta_{t_2 t_3} \delta_{t_3 t_4} \quad (1.7)$$

ce qui permet d'écrire $\mathcal{H}$ sous la forme :

$$\mathcal{H} = \sum_{t=n,p} \left[\sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - G_{tt} \sum_{\nu\mu>0} a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t} \right] \quad (1.8)$$

où les $a_{\nu t}^+$, et $a_{\tilde{\nu} t}^+$ (respectivement $a_{\mu t}$ et $a_{\tilde{\mu} t}$) représentent les opérateurs de création (respectivement de destruction) de nucléons dans les états $|\nu t\rangle$ et $|\tilde{\nu} t\rangle$. La constante G_{tt} ; $t = n, p$, représente l'intensité de la force d'appariement et est déterminée à partir de la table des différences de masse expérimentales [69].

En général, l'hamiltonien (1.8) est traité dans le cadre de la méthode BCS [30]. Celle-ci, permet de diagonaliser approximativement $\mathcal{H}$ moyennant l'approximation dite de quasi-particules indépendantes. Dans cette méthode, le nombre de particules $N = N_p + N_n$ avec :

$$N_t = \sum_{\nu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \quad t = n, p \quad (1.9)$$

n'est conservé qu'en moyenne. Pour tenir compte de cette contrainte, on introduit deux paramètres de Lagrange λ_t , $t = n, p$ dans $\mathcal{H}$ et on diagonalise l'hamiltonien auxiliaire :

$$H = \mathcal{H} - \sum_{t=n,p} \lambda_t N_t \quad (1.10)$$

dont la forme explicite est :

$$H = \sum_{\substack{\nu > 0 \\ t=n,p}} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \sum_{t=n,p} G_{tt} \sum_{\nu\mu > 0} a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t} \quad (1.11)$$

où $\tilde{\varepsilon}_{\nu t} = \varepsilon_{\nu t} - \lambda_t$.

Dans l'étude des noyaux chauds qui nous intéressent, la détermination de la fonction de partition est un élément fondamental pour expliciter les principales observables nucléaires comme l'énergie du système, son entropie ou sa capacité calorifique.

Cette fonction peut être calculée dans le cadre du formalisme standard de BCS. Il suffit de remplacer la probabilité d'occupation $n_{\nu t}$ d'un état $|\nu t\rangle$, donnée à température nulle par :

$$n_{\nu t} = \begin{cases} 1 & \text{si l'état } |\nu t\rangle \text{ est occupé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

par l'occupation à température non nulle de Fermi-Dirac :

$$n_{\nu t} = \frac{1}{1 + e^{\beta \varepsilon_{\nu t}}} \quad (1.13)$$

où β est l'inverse de la température $\beta = \frac{1}{T}$ en unité de la constante de Boltzman $k = 1$.

La méthode, initialement développée par Moretto [30], [60]-[61] est bien connue et a été souvent utilisée dans des travaux au sein de notre Laboratoire [70]. Malheureusement les techniques auxquelles fait appel cette méthode, comme le théorème de Wick, la linéarisation de l'hamiltonien ou sa re-diagonalisation [71]-[73], sont assez lourdes sur le plan du calcul formel. Une méthode alternative est celle de l'intégrale de chemin de Feynman ou méthode de l'intégrale fonctionnelle. Celle-ci est très utilisée dans l'étude du problème à N corps interagissant à travers une force séparable. La fonction partition du système grand canonique est approximée par une intégrale fonctionnelle dans laquelle les interactions à deux corps sont remplacées, grâce à la transformation de Hubbard -Stratonovitch [68], par des opérateurs à un corps interagissant avec un champ auxiliaire.

1.3 La grande fonction partition

Elle est définie par :

$$Z = Tr e^{-\beta H} \quad (1.14)$$

où Tr représente la trace. Cette dernière est généralement évaluée dans la base des états propres de H . Comme ces états ne sont pas connus, Z sera déterminée approximativement dans le cadre de " l'approximation du chemin statique " et qui sera traitée ci-dessous. Comme H est l'hamiltonien de deux sous-systèmes neutron et proton sans interaction :

$$H = \sum_{t=n,p} H_t \quad (1.15)$$

avec :

$$[H_n, H_p] = 0$$

$$H_t = \sum_{\nu > 0} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - G_{tt} \sum_{\nu \mu > 0} a_{\nu t}^+ a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t} \quad (1.16)$$

la fonction partition se factorise en :

$$Z = Z_n \cdot Z_p = \prod_{t=n,p} Z_t \quad (1.17)$$

Il suffit alors d'étudier la fonction $Z_t = e^{-\beta H_t}$ pour t donné. Pour cela, on décompose H_t donné par (1.16) en :

$$H_t = H_0^t + H_1^t \quad (1.18)$$

où H_0^t est l'hamiltonien moyen et H_1^t correspond au terme d'appariement.

Considérons l'opérateur $S_t(\beta)$ défini par :

$$\exp(-\beta H_t) = \exp(-\beta H_0^t) S_t(\beta) \quad (1.19)$$

soit

$$S_t(\beta) = \exp(\beta H_0^t) \exp(-\beta H_t) \quad (1.20a)$$

Notons que, H_0^t et H_t ne commutent pas et donc :

$$\exp(-\beta H_t) \neq \exp(-\beta H_0^t) \exp(-\beta H_1^t) \quad (1.21)$$

On vérifie, aisément que $S_t(\beta)$ satisfait à l'équation différentielle du premier ordre par rapport à β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_t(\beta)}{\partial \beta} &= -\exp(\beta H_0^t) H_1^t \exp(-\beta H_t) \\ &= -H_1^t S_t(\beta) \end{aligned} \quad (1.22)$$

où :

$$H_1^t(\beta) = \exp(\beta H_0^t) H_1^t \exp(-\beta H_0^t) \quad (1.23)$$

L'équation (1.22) s'intègre facilement en tenant compte de la condition initiale $S_t(\beta = 0) = 1$, et admet pour solution :

$$S_t(\beta) = \mathbf{I} - \int_0^\beta H_1^t(\tau_1) S_t(\tau_1) d\tau_1 \quad ; \quad 0 \leq \tau_1 \leq \beta \quad (1.24)$$

qui est une solution implicite. En remplaçant $S_t(\tau_1)$ par :

$$S_t(\tau_1) = \mathbf{I} - \int_0^{\tau_1} H_1^t(\tau_2) S_t(\tau_2) d\tau_2 \quad ; \quad 0 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \quad (1.25)$$

et en procédant par itération, on obtient de proche en proche le développement formel d'une exponentielle.

En effet, considérons l'intégrale :

$$I_2 = \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 H_1^t(\tau_1) H_1^t(\tau_2) \quad (1.26)$$

En utilisant le fait que :

$$\int_a^b dx \int_a^x dy f(x, y) = \int_a^b dy \int_y^b dx f(x, y) \quad (1.27)$$

qui signifie que l'intégrale de $f(x, y)$ dans le triangle hachuré inférieur est égale à celle calculée dans le triangle supérieur (voir fig 1-1) ;

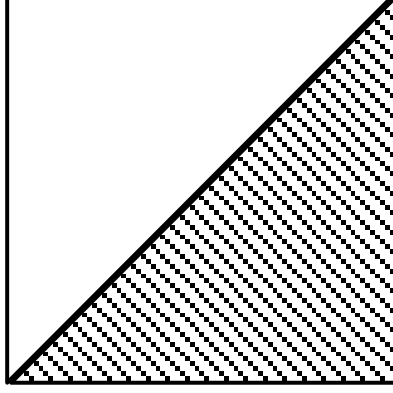


FIG. 1-1 –

l'équation (1.26) s'écrit :

$$I_2 = \int_0^\beta d\tau_2 \int_{\tau_2}^\beta d\tau_1 H_1^t(\tau_1) H_1^t(\tau_2) \quad (1.28)$$

qui devient en échangeant τ_1 et τ_2 :

$$I_2 = \int_0^\beta d\tau_1 \int_{\tau_1}^\beta d\tau_2 H_1^t(\tau_2) H_1^t(\tau_1) \quad (1.29)$$

I_2 est donc la demi-somme de (1.26) et (1.29) :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \left[\int_0^{\tau_1} d\tau_2 H_1^t(\tau_1) H_1^t(\tau_2) + \int_{\tau_1}^\beta d\tau_2 H_1^t(\tau_2) H_1^t(\tau_1) \right] \quad (1.30)$$

En introduisant l'opérateur chronologique T_τ qui permet de ranger un produit d'opérateurs de droite à gauche selon les τ croissants , soit :[74]

$$T_\tau \{A(\tau_1)B(\tau_2)\} = \begin{cases} A(\tau_1)B(\tau_2) & \text{si } \tau_1 > \tau_2 \\ B(\tau_2)A(\tau_1) & \text{si } \tau_2 > \tau_1 \end{cases} \quad (1.31)$$

L'intégrale I_2 prend la forme simple suivante :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 T_\tau \{H_1^t(\tau_2) H_1^t(\tau_1)\} \quad (1.32)$$

D'une manière générale, on établit que :

$$\int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n T_\tau \{H_1^t(\tau_1) \dots H_1^t(\tau_n)\} = \frac{1}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \dots \int_0^\beta d\tau_n T_\tau \{H_1^t(\tau_1) \dots H_1^t(\tau_n)\} \quad (1.33)$$

L'opérateur $S_t(\beta)$ s'écrit alors formellement :

$$S_t(\beta) = T_\tau \exp \left[\int_0^\beta H_1^t(\tau) d\tau \right] \quad (1.34)$$

En divisant l'intervalle $[0, \beta]$ en N intervalles de même longueur, on a :

$$\int_0^\beta H_1^t(\tau) d\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N H_1^t(\tau_j) \quad (1.35)$$

où $\tau_j = \frac{j\beta}{N}$; $j = 1, 2, \dots, N$; de sorte que :

$$\begin{aligned} S_t(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[-\frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N H_1^t(\tau_j) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \exp \left[-\frac{\beta}{N} H_1^t(\tau_j) \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.4 Transformation de Hubbard-Stratonovitch

C'est la généralisation aux opérateurs de l'intégrale de Gauss :

$$\exp(\alpha^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-\pi y^2 - 2\sqrt{\pi} y \alpha) \quad (1.37)$$

En effet, si O est un opérateur diagonalisable et borné, il satisfait à l'équation :

$$\exp(O^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-\pi y^2 - 2\sqrt{\pi} y O) \quad (1.38)$$

qui est la transformation de Hubbard-Stratonovitch [68]. L'opérateur $H_1^t(\tau)$ admet la factorisation :

$$H_1^t(\tau) = \theta_1(\tau_j) \cdot \theta_2(\tau_j) \quad (1.39)$$

avec :

$$\theta_1(\tau_j) = -\sqrt{G_{tt}} \sum_{\nu>0} a_{\nu t}^+ a_{\nu t}^+ \quad , \quad \theta_2(\tau_j) = -\sqrt{G_{tt}} \sum_{\nu>0} a_{\tilde{\nu} t} a_{\mu t} \quad (1.40)$$

$\theta_1(\tau_j)$ et $\theta_2(\tau_j)$ ne commutent pas car :

$$[\theta_1(\tau_j), \theta_2(\tau_j)] = G_{tt} \sum_{\nu>0} [a_{\nu t}^+ a_{\nu t}^+, a_{\tilde{\nu} t} a_{\mu t}] \quad (1.41)$$

Cependant, si G_{tt} est suffisamment petite ; ce qui est le cas, car elle représente l'intensité d'une interaction résiduelle, on a approximativement :

$$\exp\left(-\frac{\beta}{N} \theta_1 \cdot \theta_2\right) = \exp\left\{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{N}} (\theta_1 - \theta_2)\right)^2\right\} \exp\left\{\left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\beta}{N}} (\theta_1 + \theta_2)\right)^2\right\} \quad (1.42)$$

En appliquant la transformation de Hubbard-Stratonovitch (1.38) à chacune des exponentielles du second membre de (1.42), on obtient :

$$\exp\left\{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{N}} (\theta_1 - \theta_2)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \exp(-\pi x_j^2 - \sqrt{\frac{\pi\beta}{N}} (\theta_1 - \theta_2) x_j) \quad (1.43)$$

et

$$\exp\left\{\left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\beta}{N}} (\theta_1 + \theta_2)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \exp(-\pi y_j^2 - i \sqrt{\frac{\pi\beta}{N}} (\theta_1 + \theta_2) y_j) \quad (1.44)$$

expressions dans lesquelles on a noté par $x_j = x_j(\tau_j)$ et $y_j = y_j(\tau_j)$.

En opérant les changements de variables :

$$x_j = \sqrt{\frac{\beta}{N}} X_j \quad \text{et} \quad y_j = \sqrt{\frac{\beta}{N}} Y_j \quad (1.45)$$

l'expression (1.42) devient :

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\beta}{N}\theta_1.\theta_2\right) &= \int \frac{\beta}{N}dX_j dY_j \exp\left[-\frac{\pi\beta}{N}(X_j^2 + Y_j^2) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\beta}{N}\sqrt{\pi}\{(X_j + iY_j)\theta_1(\tau_j) - (X_j - iY_j)\theta_2(\tau_j)\}\right] \end{aligned} \quad (1.46)$$

L'opérateur $S_t(\beta)$ donné par (1.36) prend ainsi la forme :

$$\begin{aligned} S_t(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \frac{\beta}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dX_j \int_{-\infty}^{+\infty} dY_j \exp\left[-\frac{\pi\beta}{N}(X_j^2 + Y_j^2) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\beta}{N}\sqrt{\pi}\{(X_j + iY_j)\theta_1(\tau_j) - (X_j - iY_j)\theta_2(\tau_j)\}\right] \end{aligned} \quad (1.47)$$

Introduisons les mesures :

$$\int \mathfrak{D}X = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{\beta}{N}} dX_j \quad \text{et} \quad \int \mathfrak{D}Y = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{\beta}{N}} dY_j \quad (1.48)$$

et posons :

$$z_t(\tau_j) = X_j(\tau_j) + iY_j(\tau_j) = X_j + iY_j$$

Sachant que :

$$\int \mathfrak{D}z_t = \int \mathfrak{D}X \mathfrak{D}Y$$

on obtient :

$$S_t(\beta) = \int \mathfrak{D}z_t \exp\left[-\pi \int_0^\beta |z_t(\tau)|^2 d\tau\right] \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \sqrt{\pi} \{z_t(\tau)\theta_1(\tau) - \bar{z}_t(\tau)\theta_2(\tau)\}\right] \quad (1.49)$$

En remplaçant θ_1 et θ_2 par leurs expressions (1.40), la grande fonction partition des particules du type t (n ou p) devient :

$$Z_t = Tr \left\{ \exp(-\beta H_0^t) \int \mathfrak{D}z_t \exp\left[-\pi \int_0^\beta |z_t(\tau)|^2 d\tau\right] \exp\left[\int_0^\beta \mathcal{H}'_t(\tau) d\tau\right] \right\} \quad (1.50)$$

où

$$\mathcal{H}'_t(\tau) = \sqrt{\pi G_{tt}} \{a_{\nu t}^+(\tau) a_{\tilde{\nu} t}^+(\tau) z_t(\tau) + a_{\tilde{\nu} t}(\tau) a_{\nu t}(\tau) \bar{z}_t(\tau)\} \quad (1.51)$$

Comme $Z = \prod_{t=n,p} Z_t$, il vient pour la fonction partition du noyau :

$$Z = Tr \left\{ e^{-\beta(H_0^n + H_0^p)} \int \mathfrak{D}z_n \mathfrak{D}z_p T_\tau \exp \left[-\pi \int_0^\beta \left(|z_n(\tau)|^2 + |z_p(\tau)|^2 \right) d\tau + \int_0^\beta \mathcal{H}'(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (1.52)$$

où :

$$\mathcal{H}'(\tau) = \sum_{t=n;p} \mathcal{H}'_t(\tau) = \mathcal{H}'_n(\tau) + \mathcal{H}'_p(\tau) \quad (1.53)$$

On constate que le calcul de Z nécessite la connaissance de la dépendance en τ des chemins $z_t(\tau)$ et des opérateurs $a_{\nu t}^+(\tau)$ et $a_{\nu t}(\tau)$.

Selon Feynman [75], les champs auxiliaires $X(\tau_j)$ et $Y(\tau_j)$ peuvent être développés en séries de Fourier par sommation sur un ensemble discret de fréquences $\frac{2\pi k}{\beta}$:

$$\begin{cases} X(\tau_j) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \exp \left(i \frac{2\pi k \tau_j}{\beta} \right) \\ Y(\tau_j) = Y_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k \exp \left(i \frac{2\pi k \tau_j}{\beta} \right) \end{cases} \quad (1.54)$$

Les champs $X(\tau_j)$ et $Y(\tau_j)$ étant réels, leurs composantes doivent satisfaire aux conditions :

$$X_{-k} = X_k^* \quad \text{et} \quad Y_{-k} = Y_k^*$$

Le champ complexe $z_t(\tau_j)$ admet pour développement :

$$z_t(\tau_j) = z_{0t} + \sum_{k=1}^{+\infty} z_{kt} \exp \left(i \frac{2\pi k \tau_j}{\beta} \right) \quad (1.55)$$

Le opérateurs $a_{\nu t}^+(\tau)$ et $a_{\nu t}(\tau)$ sont tels que :

$$a_{\nu t}^+(\tau) = \exp(\tau H_0^t) a_{\nu t}^+ \exp(-\tau H_0^t) \quad (1.56)$$

$$a_{\nu t}(\tau) = \exp(-\tau H_0^t) a_{\nu t} \exp(\tau H_0^t) \quad (1.57)$$

Pour expliciter la dépendance en τ de $a_{\nu t}^+(\tau)$, on écrit d'abord H_0^t sous forme :

$$H_0^t = \tilde{\varepsilon}_{\nu t}(n_{\nu t} + n_{\tilde{\nu} t}) + \sum_{\mu \neq \nu} \tilde{\varepsilon}_{\mu t}(n_{\mu t} + n_{\tilde{\mu} t}) \quad (1.58)$$

où l'on a isolé le terme d'indice ν . En remplaçant (1.58) dans (1.56) on obtient :

$$a_{\nu t}^+(\tau) = \exp(\tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t} n_{\nu t}) a_{\nu t}^+ \exp(-\tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t} n_{\nu t}) \quad (1.59)$$

On établit aisément que :

$$\exp(\pm \tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t} n_{\nu t}) = 1 + n_{\nu t} [\exp(\pm \tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t}) - 1] \quad (1.60)$$

du fait que $(n_{\nu t})^m = n_{\nu t}$ quel que soit l'entier m . La substitution de (1.60) dans (1.56) conduit à la forme explicite de $a_{\nu t}^+(\tau)$ en fonction de τ :

$$a_{\nu t}^+(\tau) = \exp(\tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t}) a_{\nu t}^+ \quad (1.61)$$

On établit de la même manière que :

$$a_{\nu t}(\tau) = \exp(-\tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t}) a_{\nu t} \quad (1.62)$$

Il est commode de séparer dans l'opérateur $\mathcal{H}'_t(\tau)$ la partie statique (indépendante de τ) de la partie dynamique. Pour cela, on écrit les produits d'opérateurs figurant dans $\mathcal{H}'_t(\tau)$ sous la forme :

$$\begin{cases} a_{\nu t}^+(\tau) a_{\tilde{\nu} t}^+(\tau) = a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ + \delta_t^+(\tau) \\ a_{\tilde{\nu} t}(\tau) a_{\nu t}(\tau) = a_{\tilde{\nu} t} a_{\nu t} + \delta_t(\tau) \end{cases}, \quad t = n, p \quad (1.63)$$

où les termes fluctuants $\delta_t^+(\tau)$ et $\delta_t(\tau)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \delta_t^+(\tau) = a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ [\exp(2\tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t}) - 1] \\ \delta_t(\tau) = a_{\tilde{\nu} t} a_{\nu t} [\exp(-2\tau \tilde{\varepsilon}_{\nu t}) - 1] \end{cases}, \quad t = n, p \quad (1.64)$$

Quant à la mesure figurant dans (1.50), elle s'exprime à l'aide des nouvelles variables z_{kt} par la

relation :

$$\int \mathfrak{D}z_t = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \prod_{k=0}^N \int dz_{kt} \quad (1.65)$$

où J_N est le Jacobien et s'écrit :

$$J_N = \left| \frac{dz_t(\tau_j)}{dz_{kt}} \right| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & x_2^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdot & \cdot & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \quad (1.66)$$

avec $x_j = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j\right)$ et $j = 1, N$.

Le déterminant (1.66) n'est autre que le déterminant de Vandermonde d'ordre N donné par :

$$J_N = \prod_{\substack{k,j=1 \\ k>j}}^N \left[\exp\left(i\frac{2\pi}{N}k\right) - \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j\right) \right] \quad (1.67)$$

Compte tenu des équations (1.54), (1.61) et (1.62) et après l'intégration sur τ dans (1.50), la fonction partition Z_t devient alors :

$$Z_t = Tr \left\{ e^{-\beta H_0^t} \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \prod_{k=0}^N \int dz_{kt} \right. \quad (1.68) \\ \left. \exp -\beta \left[\pi |z_{tk}|^2 - \frac{\sqrt{\pi G_t}}{2(\beta \tilde{\varepsilon}_{\nu t} + i2\pi k)} \left\{ \left(e^{2\beta \tilde{\varepsilon}_{\nu t}} - 1 \right) a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu}t}^+ z_{kt} + \left(1 - e^{-2\beta \tilde{\varepsilon}_{\nu t}} \right) a_{\tilde{\nu}t} a_{\nu t} \bar{z}_{kt} \right\} \right] \right\}$$

Ainsi la fonction partition est le produit des fonctions partition de chacun des sous-systèmes neutron et proton. L'expression (1.68), est une intégrale fonctionnelle de particules indépendantes interagissant avec le champ externe $z_t(\tau)$.

En intégrant sur tous les chemins possibles reliant les points 0 et β , le calcul de $z_t(\beta)$ serait exact. Comme cela est très difficile, des méthodes approximatives permettent de calculer $S_t(\beta)$ et donc $S(\beta)$. C'est le cas de l'approximation statique qui est discutée ci-dessous.

1.5 Approximation statique - Energie libre du système

L'approximation du chemin statique consiste à supposer que les champs $X(\tau_j)$ et $Y(\tau_j)$, et par conséquent $z_t(\tau_j)$, sont indépendants du temps imaginaire τ . Dans ce cas, dans l'intégrale fonctionnelle (1.68) on ne garde que les termes non fluctuants dans (1.63). Dans ce cas l'intégrale fonctionnelle représentant la fonction partition (1.52) se réduit à une intégrale ordinaire et est donnée par :

$$Z = \int dz_{0n} dz_{0p} \exp \left[-\pi\beta \left(|z_{0n}|^2 + |z_{0p}|^2 \right) \right] T_r e^{-\beta H'} \quad (1.69)$$

où :

$$H' = \sum_{\nu>0, t=n;p} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \sqrt{\pi G_t} \{ a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ z_{0t} + a_{\tilde{\nu} t} a_{\nu t} \bar{z}_{0t} \} \right] \quad (1.70)$$

La trace de $\exp(-\beta H')$ peut être évaluée facilement dans la base propre de H' . Il est aisé de voir que l'expression (1.70) s'écrit aussi sous la forme matricielle :

$$H' = \sum_{\nu>0, t=n;p} \eta_{\nu t}^+ A_{\nu t} \eta_{\nu t} + \sum_{\nu>0, t=n;p} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \quad (1.71)$$

où les matrices $A_{\nu t}$ et $\eta_{\nu t}$ sont données par :

$$A_{\nu t} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} & \sqrt{\pi G_{tt}} z_t \\ \sqrt{\pi G_{tt}} \bar{z}_t & -\tilde{\varepsilon}_{\nu t} \end{pmatrix}, \quad \eta_{\nu t} = \begin{pmatrix} a_{\nu t} \\ -a_{\tilde{\nu} t}^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta_{\nu t}^+ = (a_{\nu t}^+, -a_{\tilde{\nu} t}); \quad (1.72)$$

Les valeurs propres de $A_{\nu t}$, solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A_{\nu t} - \alpha I) = 0 \quad (1.73)$$

sont données par :

$$E_{\nu t}^{\pm} = \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}^2 + |\Delta_t|^2} \quad (1.74)$$

où l'on a noté par :

$$\Delta_t = \sqrt{\pi G_{tt}} z_t \quad (1.75)$$

On calcule aussi facilement les vecteurs propres normalisés correspondants. Ils sont donnés respectivement par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} u_{\nu t} \\ v_{\nu t} \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{\nu t} \\ -u_{\nu t} \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

où les composantes $u_{\nu t}$ et $v_{\nu t}$ s'écrivent :

$$\left. \begin{matrix} u_{\nu t}^2 \\ v_{\nu t}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\tilde{\epsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} \right) \quad (1.77)$$

Les vecteurs v_1 et v_2 ainsi que leurs composantes $u_{\nu t}$ et $v_{\nu t}$ sont tous déterminés à une phase près, supposée nulle dans les expressions (1.76) et (1.77) [76].

La matrice $A_{\nu t}$ s'écrit alors :

$$A_{\nu t} = T_{\nu t}^{-1} D(\nu) T_{\nu t} \quad (1.78)$$

où :

$$D(\nu) = \begin{pmatrix} E_{\nu t} & 0 \\ 0 & -E_{\nu t} \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

et :

$$T_{\nu t} = \begin{pmatrix} u_{\nu t} & v_{\nu t} \\ v_{\nu t} & -u_{\nu t} \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

D'après les équations (1.72) et (1.78), on déduit que :

$$\eta_{\nu t}^+ A_{\nu t} \eta_{\nu t} = (u_{\nu t} a_{\nu t}^+ - v_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t}^+, v_{\nu t} a_{\nu t}^+ + u_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t}^+) \begin{pmatrix} E_{\nu t} & 0 \\ 0 & -E_{\nu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\nu t} a_{\nu t} - v_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t}^+ \\ v_{\nu t} a_{\nu t} + u_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t}^+ \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

En définissant la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \alpha_{\nu t}^+ = u_{\nu t} a_{\nu t}^+ - v_{\nu t} a_{\nu t} \\ \alpha_{\nu t} = u_{\nu t} a_{\nu t} - v_{\nu t} a_{\nu t}^+ \end{cases} \quad (1.82)$$

les opérateurs $\alpha_{\nu t}^+$ et $\alpha_{\nu t}$ ne sont autres que les opérateurs de création et d'annihilation des quasi-particules. La transformation correspondante est celle de Bogoliubov-Valatin.

La trace dans l'équation (1.69) devient alors :

$$\begin{aligned}
T_r e^{-\beta H'} &= \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \right) T_r \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \xi_{\nu t}^+ D(\nu) \xi_{\nu t} \right) \\
&= \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \right) T_r \prod_{\nu > 0, t} \exp \left[-\beta E_{\nu t} (\alpha_{\nu t}^+ \alpha_{\nu t} - \alpha_{\nu t}^+ \alpha_{\tilde{\nu} t}) \right] \\
&= \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \right) \prod_{\nu > 0, t} T_r \exp \left[-\beta E_{\nu t} (\alpha_{\nu t}^+ \alpha_{\nu t} - \alpha_{\nu t}^+ \alpha_{\tilde{\nu} t}) \right] \quad (1.83)
\end{aligned}$$

L'opérateur $\alpha_{\nu t}^+ \alpha_{\nu t}$ est l'opérateur nombre d'occupation de l'état $|\nu t\rangle$ par une quasi-particule et dont les valeurs propres sont 0 et 1. L'équation (1.83) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
T_r e^{-\beta H'} &= \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \right) \prod_{\nu > 0, t} [1 + \exp(-\beta E_{\nu t})] [1 + \exp(\beta E_{\nu t})] \quad (1.84) \\
&= \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \right) \prod_{\nu > 0, t} 4ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}
\end{aligned}$$

Après avoir injecté (1.84) dans (1.69), la fonction de partition prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
Z &= \int dz_{0n} \int dz_{0p} e^{-\pi\beta(|z_{0n}|^2 + |z_{0p}|^2)} \exp \left(-\beta \sum_{\nu > 0, t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \right) \prod_{\nu > 0, t} 4ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \\
&= \int dz_{0n} \int dz_{0p} e^{-\pi\beta(|z_{0n}|^2 + |z_{0p}|^2)} \\
&\quad \exp \left\{ -\beta \sum_{\nu > 0} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - \frac{1}{\beta} \text{Log} \left(16ch^2 \frac{\beta E_{\nu n}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu p}}{2} \right) \right] \right\} \quad (1.85)
\end{aligned}$$

Sachant que l'énergie libre F du système est définie par :

$$Z = \int dz_{0n} \int dz_{0p} e^{-\beta F} \quad (1.86)$$

on obtient :

$$F = \pi \left(|z_{0n}|^2 + |z_{0p}|^2 \right) + \sum_{\nu > 0} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - \frac{1}{\beta} \ln \left(16ch^2 \frac{\beta E_{\nu n}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu p}}{2} \right) \right] \quad (1.87)$$

1.5.1 Approximation au point de selle - Equations du gap

Le principe de cette approximation, est de minimiser l'exposant dans l'équation (1.86) pour que la fonction de partition soit dominante [42]. Ceci peut être fait par la méthode du col. Le point de selle correspond à :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{0n}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{0p}} = 0 \quad (1.88)$$

d'où :

$$\pi z_{0t} = \sum_{\nu > 0, t} th \left(\frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \frac{\partial E_{\nu t}}{\partial \bar{z}_{0t}} \quad t = n, p \quad (1.89)$$

Après avoir calculé la dérivée de $E_{\nu t}$ par apport à $\bar{z}_{0t}$, on trouve :

$$\frac{\partial E_{\nu t}}{\partial \bar{z}_{0t}} = \pi G_{tt} \frac{z_{0t}}{E_{\nu t}} \quad (1.90)$$

et l'équation (1.89) devient :

$$\frac{2}{G_{tt}} = \sum_{\nu > 0} \frac{th \left[\frac{\beta}{2} \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{\nu t}^2 + |\Delta_{0t}|^2)} \right]}{\sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{\nu t}^2 + |\Delta_{0t}|^2)}} \quad (1.91)$$

où $\Delta_{0t} = z_{0t} \sqrt{\pi G_{tt}}$ est la demi-largeur du gap.

L'équation (1.91) et la condition de conservation du nombre de particules représentent les équations du gap pour un système de particules identiques à une température finie.

Chapitre 2

Appariement isovectoriel à température finie par le formalisme de l'intégrale de parcours

2.1 Introduction

Dans la théorie de corrélations de paire originale, chaque paire de Cooper contient deux neutrons ou deux protons d'une même couche et se meuvent dans des orbites renversées l'une de l'autre par rapport au sens du temps [58]. Cependant, il est connu que la paire de Cooper peut aussi être composée d'un neutron et d'un proton [78]. Les conditions idéales pour trouver les corrélations d'appariement neutron-proton (np) existent dans les noyaux tels que $N = Z$ et dans lesquels les neutrons et les protons occupent des couches d'énergies voisines. Le recouvrement des fonctions d'onde des deux nucléons (neutron et proton) est alors maximal [37], [79]-[80]. En effet, la mesure des énergies de liaison [81]-[84] ainsi que l'étude de la structure isospin des états moins liés dans les noyaux impair-impairs [82], [85]-[88], montrent que les corrélations d'appariement np sont très importantes dans les noyaux tels que $N = Z$.

L'appariement np joue un rôle significatif dans plusieurs processus nucléaires tels que la désintégration bêta [89], la double désintégration bêta [17], [90], la structure des états collectifs moins liés [91], ainsi que dans la structure des états de haut spin [2]-[3], [17], [22], [84], [91]-[53].

Contrairement à l'appariement entre particules identiques (neutron-neutron (nn) ou proton-proton (pp)), l'appariement np peut exister sous deux formes : l'appariement isoscalaire ($\tau = 0$) et isovectoriel ($\tau = 1$). Un formalisme général de traitement de ces deux types d'appariement, a été proposé au cours des années soixante par Chen et Goswami [80] et repris par d'autres auteurs [81]-[83], [96]. Le manque de données expérimentales à cette époque a fait que l'étude de ces corrélations est tombée dans l'oubli. Ce n'est qu'avec l'avènement des faisceaux d'ions radioactifs que l'étude de l'appariement np a connu un regain d'intérêt. Ceci s'est traduit par de nombreuses publications [1]-[28] qui concernent essentiellement les noyaux à température nulle. Nous nous proposons, dans ce chapitre, de traiter les corrélations d'appariement isovectoriel dans les noyaux chauds par la même technique qu'au chapitre précédent, à savoir l'intégrale de chemin.

2.2 Hamiltonien du système

Dans le formalisme de la seconde quantification et du spin isotopique, un système de N neutrons et Z protons totalement appariés est décrit par l'hamiltonien [97] :

$$\mathcal{H} = \sum_{\nu > 0, t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) + H_{nn} + H_{pp} + H_{np} \quad (2.1)$$

où t est l'indice correspondant à la composante du spin isotopique ($t = n, p$).

$a_{\nu t}^+$ et $a_{\nu t}$ représentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation de la particule dans l'état $|\nu t\rangle$, d'énergie $\varepsilon_{\nu t}$; et $a_{\tilde{\nu} t}^+$ et $a_{\tilde{\nu} t}$ ceux de son renversé par rapport au sens du temps $|\tilde{\nu} t\rangle$, ayant la même énergie et $H_{tt'}$ désigne l'interaction résiduelle de corrélation d'appariement entre deux types des particules t et t' , donné par :

$$H_{tt'} = -G_{tt'} \sum_{\nu\mu > 0} P_{\nu tt'}^+ P_{\mu tt'} \quad , \quad t, t' = n, p \quad (2.2)$$

avec :

$$P_{\nu tt}^+ = a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ \quad , \quad P_{\nu np}^+ = \left(a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ + a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ \right) \quad (2.3)$$

$G_{tt'}$ caractérise la force d'appariement supposée indépendante des niveaux.

Afin de fixer le nombre de particules (neutron et proton) qui n'est pas conservé, on introduit

l'hamiltonien auxiliaire suivant :

$$H = \mathcal{H} - \sum_{t=n,p} \lambda_t N_t \quad (2.4)$$

où les λ_t sont des paramètres de Lagrange et où les N_t sont les opérateurs nombre de particules :

$$N_t = \sum_{\nu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \quad t = n, p \quad (2.5)$$

On a donc :

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.6)$$

avec :

$$H_0 = \sum_{\nu>0} \sum_{t=n,p} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \quad (2.7)$$

où $\tilde{\varepsilon}_{\nu t} = \varepsilon_{\nu t} - \lambda_t$; et où :

$$H_1 = \sum_{t=n,p} H_{tt} + H_{np} \quad (2.8)$$

2.3 Fonction partition

Lorsque le système est en équilibre thermodynamique, la plupart de ses propriétés sont déduites de sa fonction de partition quantique :

$$Z = \text{Tre}^{-\beta H} = \text{Tre}^{-\beta H_0} S(\beta) \quad (2.9)$$

où $\beta = \frac{1}{kT}$ est l'inverse de la température du système et :

$$S(\beta) = T_\tau \exp \left[- \int_0^\beta H_1(\tau) d\tau \right] \quad (2.10)$$

T_τ est un opérateur chronologique permettant de ranger les produits d'opérateurs de droite à gauche par τ croissant.

Il est difficile d'expliciter l'opérateur $S(\beta)$ étant donné que ni H_{nn} , ni H_{pp} ne commutent

avec H_{np} . Nous admettrons cependant que c'est le cas car :

$$[H_{tt}, H_{np}] = G_{tt}G_{np} \left[\sum_{\nu\mu>0} P_{\nu tt}^+ P_{\mu tt}, \sum_{\nu\mu>0} P_{\nu np}^+ P_{\mu np} \right] \quad , \quad t = n, p \quad (2.11)$$

et le produit $G_{tt}G_{np}$ ($t = n, p$) est petit devant les énergies du champ moyen.

Alors on peut supposer que :

$$[H_{tt}, H_{np}] \simeq 0 \quad (2.12)$$

Moyennant cette supposition, il vient pour l'opérateur $S(\beta)$, la factorisation :

$$S(\beta) = T_\tau \exp \left(- \int_0^\beta H_{nn}(\tau) d\tau \right) \exp \left(- \int_0^\beta H_{pp}(\tau) d\tau \right) \exp \left(- \int_0^\beta H_{np}(\tau) d\tau \right) \quad (2.13)$$

Notons par :

$$S_{tt'}(\beta) = \exp \left(- \int_0^\beta H_{tt'}(\tau) d\tau \right) \quad , \quad t, t' = n, p \quad (2.14)$$

on a alors :

$$S(\beta) = T_\tau S_{nn}(\beta) S_{pp}(\beta) S_{np}(\beta) \quad (2.15)$$

2.4 Transformation de Hubbard-Stratonovitch

En approximant dans le second membre de (2.14) l'intégrale sur τ par une somme discrète, il vient :

$$\begin{aligned} S_{tt'}(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(- \frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N H_{tt'}(\tau_j) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \exp \left(\frac{\beta}{N} G_{tt'} \sum_{\nu\mu>0} P_{\nu tt'}^+(\tau_j) P_{\mu tt'}(\tau_j) \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

après avoir partagé l'intervalle $[0, \beta]$ en N intervalles égaux, et avoir fait tendre N vers l'infini.

L'interaction d'appariement isovectorielle étant une interaction à deux corps, elle peut être remplacée par une interaction à un corps avec un champ externe au moyen de la transformation

de Hubbard-Stratonovitch [68]. Posons :

$$\theta_1 = -\sqrt{G_{tt'}} \sum_{\nu>0} P_{\nu tt'}^+ \quad , \quad \theta_2 = -\sqrt{G_{tt'}} \sum_{\nu>0} P_{\nu tt'} \quad (2.17)$$

Etant donné que l'intensité de l'interaction d'appariement est petite comparée à l'énergie du champ moyen, on peut supposer que θ_1 et θ_2 commutent, ce qui permet d'écrire la relation :

$$\theta_1 \theta_2 = \frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4} - \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{4} \quad (2.18)$$

et par conséquent :

$$\exp\left(-\frac{\theta_1 \theta_2}{N}\right) = \exp\left[-\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4N}\right] \exp\left[\frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{4N}\right] \quad (2.19)$$

D'autre part, sachant que [42] :

$$\exp(\theta^2) = \int dx \exp(-\pi x^2 - 2\sqrt{\pi} x \theta) \quad (2.20)$$

où θ est un opérateur hermitique et borné et x un champ externe, il vient :

$$\exp\left[\frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{4N}\right] = \int dx_j \exp\left[-\pi x_j^2 - \sqrt{\frac{\pi}{N}} x_j (\theta_1(\tau_j) - \theta_2(\tau_j))\right] \quad (2.21)$$

où l'on a noté par $x_j = x(\tau_j)$.

De même on a :

$$\exp\left[-\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4N}\right] = \int dy_j \exp\left[-\pi y_j^2 - i\sqrt{\frac{\pi}{N}} y_j (\theta_1(\tau_j) - \theta_2(\tau_j))\right] \quad (2.22)$$

où $y_j = y(\tau_j)$.

Opérons les changement de variables : $X_j = \sqrt{\frac{N}{\beta}} x_j$, $Y_j = \sqrt{\frac{N}{\beta}} y_j$ dans les équations (2.21) et (2.22) respectivement, il vient :

$$\exp\left[\frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{4N}\right] = \int \sqrt{\frac{\beta}{N}} dX_j \exp\left[-\frac{\pi\beta}{N} X_j^2 - \frac{\sqrt{\pi\beta}}{N} X_j (\theta_1(\tau_j) - \theta_2(\tau_j))\right] \quad (2.23)$$

$$\exp \left[-\frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{4N} \right] = \int \sqrt{\frac{\beta}{N}} dY_j \exp \left[-\frac{\pi\beta}{N} Y_j^2 - i \frac{\sqrt{\pi}\beta}{N} Y_j (\theta_1(\tau_j) - \theta_2(\tau_j)) \right] \quad (2.24)$$

En substituant ces deux dernières équations dans (2.16), $S_{tt'}(\beta)$ devient alors :

$$\begin{aligned} S_{tt'}(\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \int \sqrt{\frac{\beta}{N}} dX_j \int \sqrt{\frac{\beta}{N}} dY_j \exp \left[-\frac{\pi\beta}{N} (X_j^2 + Y_j^2) \right] \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\pi}\beta}{N} [(X_j + iY_j) \theta_1(\tau_j) - (X_j - iY_j) \theta_2(\tau_j)] \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

En notant par :

$$\int \mathfrak{D}X = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{\beta}{N}} dX_j \quad , \quad \int \mathfrak{D}Y = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{\beta}{N}} dY_j \quad (2.26)$$

les mesures pour les chemins X_j et Y_j et en introduisant la fonction complexe : $z_{tt'}(\tau_j) = X_j + iY_j$ on a :

$$S_{tt'}(\beta) = \int \mathfrak{D}z_{tt'} \exp \left[-\pi \int_0^\beta d\tau |z_{tt'}(\tau)|^2 \right] \exp \left\{ -\int_0^\beta d\tau \sqrt{\pi} [\theta_1(\tau) z_{tt'}(\tau) - \theta_2(\tau) \bar{z}_{tt'}(\tau)] \right\} \quad (2.27)$$

Par remplacement θ_1 et θ_2 par leurs expressions (2.17) on obtient :

$$\begin{aligned} S_{tt'}(\beta) &= \int \mathfrak{D}z_{tt'} \exp \left[-\pi \int_0^\beta d\tau |z_{tt'}(\tau)|^2 \right] \\ &\quad \exp \left\{ -\int_0^\beta d\tau \sqrt{\pi G_{tt'}} \left[\sum_{\nu > 0} (P_{\nu tt'}^+(\tau) z_{tt'}(\tau) - P_{\nu tt'}(\tau) \bar{z}_{tt'}(\tau)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

La grande fonction partition du système est alors :

$$\begin{aligned} Z &= Tr \exp(-\beta H_0) \int \mathfrak{D}z_{nn} \int \mathfrak{D}z_{pp} \int \mathfrak{D}z_{np} \\ &\quad T_\tau \exp \left[-\pi \int_0^\beta d\tau [|z_{nn}(\tau)|^2 + |z_{pp}(\tau)|^2 + |z_{np}(\tau)|^2] \right] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}'_1(\tau) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

avec :

$$\mathcal{H}'_1(\tau) = \sum_{t, \nu > 0} \left[\sqrt{\pi G_{tt'}} (P_{\nu tt}^+(\tau) z_{tt}(\tau) - P_{\nu tt}(\tau) \bar{z}_{tt}(\tau)) \right] + \sqrt{\pi G_{np}} (P_{\nu np}^+(\tau) z_{np}(\tau) - P_{\nu np}(\tau) \bar{z}_{np}(\tau)) \quad (2.30)$$

En introduisant comme au chapitre I, la transformée de Fourier discrète du champ $z_{tt'}(\tau)$:

$$z_{tt'}(\tau_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N z_k^{tt'} \exp\left(i \frac{2\pi k \tau_j}{\beta}\right) \quad , \quad t = n, p \quad (2.31)$$

En explicitant la dépendance en τ de opérateurs $a_{\nu t}^+$ et $a_{\mu t}$ et de leur renversé par rapport au sens du temps, on peut séparer les parties statique et dynamique des opérateurs $P_{\nu np}^+(\tau)$ et $P_{\nu np}(\tau)$:

$$\begin{aligned} P_{\nu np}^+(\tau) &= P_{\nu np}^+ + \delta_{np}^+(\tau) \\ P_{\nu np}(\tau) &= P_{\nu np} + \delta_{np}(\tau) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $\delta^+(\tau)$ et $\delta(\tau)$ sont les termes fluctuants et s'expriment par :

$$\begin{aligned} \delta_{np}^+(\tau) &= P_{\nu np}^+ \left(e^{\tau(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p})} - 1 \right) \\ \delta_{np}(\tau) &= P_{\nu np} \left(e^{-\tau(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p})} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

La mesure introduite dans (2.29), se transforme d'une manière analogue à celle du premier chapitre mais avec des nouvelles notations, soit :

$$\int \mathfrak{D} z_{tt'} = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N \prod_{k=0}^N \int dz_k^{tt'} \quad , \quad t, t' = n, p \quad (2.34)$$

où J_N est le Jacobien donné par l'équation (1.67).

A l'aide des équations (1.61), (1.62), (2.31) et (2.32) et après l'intégration sur τ dans (2.29), la fonction partition devient :

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_0} \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^3 \prod_{k=0}^N \int dz_k^{nn} \int dz_k^{pp} \int dz_k^{np} \exp \left[-\beta \pi \left(|z_k^{nn}|^2 + |z_k^{pp}|^2 + |z_k^{np}|^2 \right) \right] \left(e^{-\beta \Gamma} \right) \quad (2.35)$$

avec :

$$\Gamma = \sum_{k, \nu > 0} \left\{ \sum_t \left(\frac{-1}{2(\beta \tilde{\varepsilon}_{\nu t} + i2\pi k)} \sqrt{\pi G_{tt}} \left[\left(e^{2\beta \tilde{\varepsilon}_{\nu t}} - 1 \right) P_{\nu tt}^+ z_k^{tt} + \left(1 - e^{-2\beta \tilde{\varepsilon}_{\nu t}} \right) P_{\nu tt} \bar{z}_k^{tt} \right] \right) - \right. \quad (2.36)$$

$$\left. - \sqrt{\pi G_{np}} \frac{1}{((\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p})\beta + i2\pi k)} \left[\left(e^{(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p})\beta} - 1 \right) z_k^{np} P_{\nu np}^+ + \left(1 - e^{-(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p})\beta} \right) \bar{z}_k^{np} P_{\nu np} \right] \right\}$$

C'est l'expression de la grande fonction partition prenant en compte l'ensemble des fluctuations. Son évaluation complète étant compliquée, nous commencerons, comme dans le premier chapitre par l'étude du cas statique.

2.5 Approximation statique

Les intégrales figurant dans (2.29) portent sur l'ensemble des fonctions $z_{tt'}(\tau)$. Cependant, vu la complexité des calculs, il est nécessaire d'utiliser certaines approximations pour évaluer la fonction partition. Il s'agit de l'approximation du chemin statique qui consiste à supposer que les champs $X(\tau)$ et $Y(\tau)$ et par conséquent $z_{tt'}(\tau)$ sont indépendants du temps imaginaire τ . Ceci simplifie considérablement la fonction de partition (2.35) qui devient ainsi :

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{nn} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{pp} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{np} \exp \left[-\pi\beta \left(|z_{nn}|^2 + |z_{pp}|^2 + |z_{np}|^2 \right) \right] \text{Tr} \exp(-\beta H') \quad (2.37)$$

où l'on a noté par :

$$H' = \sum_{\nu > 0} \sum_{t=n,p} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \sqrt{\pi G_{tt}} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ z_{tt} + a_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t} \bar{z}_{tt}) \right] \\ - \sqrt{\pi G_{np}} \sum_{\nu > 0} \left[(a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ + a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+) z_{np} + (a_{\tilde{\nu} n} a_{\nu p} + a_{\tilde{\nu} p} a_{\nu n}) \bar{z}_{np} \right] \quad (2.38)$$

Sous forme matricielle, cet opérateur prend la forme :

$$H' = \sum_{\nu > 0} \left[\left(a_{\nu p}, a_{\nu n}, a_{\tilde{\nu} p}^+, a_{\tilde{\nu} n}^+ \right) A_{\nu} \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ \\ a_{\nu n}^+ \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} + \tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} \right] \quad (2.39)$$

où A_ν est la matrice :

$$A_\nu = \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & \bar{\Delta}_{pp} & \bar{\Delta}_{np} \\ 0 & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} & \bar{\Delta}_{np} & \bar{\Delta}_n \\ \Delta_{pp} & \Delta_{np} & \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 \\ \Delta_{np} & \Delta_{nn} & 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

et où l'on a posé :

$$\Delta_{tt} = z_{tt}\sqrt{\pi G_{tt}} \quad , \quad t = n, p \quad \text{et} \quad \Delta_{np} = z_{np}\sqrt{\pi G_{np}} \quad (2.41)$$

Il s'agit à présent de diagonaliser H' . En écrivant que :

$$A_\nu = T_\nu^+ D_\nu T_\nu \quad (2.42)$$

où la matrice diagonale D_ν : $D_\nu = \text{diag}(E_{\nu 1}, -E_{\nu 1}, E_{\nu 2}, -E_{\nu 2})$ où les valeurs propres $E_{\nu 1}$ et $E_{\nu 2}$ sont données, pour $\tau = 1, 2$, par :

$$E_{\nu\tau}^2 = \left\{ E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2|\Delta_{np}|^2 + (-1)^{\tau+1} \sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4|\Delta_{np}|^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4|\Delta_{nn}\bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp}\Delta_{np}|^2} \right\} \quad (2.43)$$

La matrice unitaire T_ν ($T_\nu^{-1} = T_\nu^+$) est telle que :

$$T_\nu = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} & v_{\nu 1p} & v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2p} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 1n} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} \\ -v_{\nu 2p} & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

avec :

$$u_{\nu\tau p} = \frac{C_{\nu 1}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad , \quad u_{\nu\tau n} = -\frac{C_{\nu 2}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad , \quad v_{\nu\tau p} = \frac{C_{\nu 3}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad , \quad v_{\nu\tau n} = -\frac{C_{\nu 4}^\tau}{C_\nu^\tau} \quad (2.45)$$

où les $C_{\nu i}^\tau$ sont donnés explicitement par les expressions :

$$\begin{cases} C_{\nu 1}^\tau = -(\tilde{\varepsilon}_{\nu p} - E_{\nu\tau}) \left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + |\Delta_{nn}|^2 - E_{\nu\tau}^2 \right) - |\Delta_{np}|^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - E_{\nu\tau}) \\ C_{\nu 2}^\tau = -\Delta_{pp} \bar{\Delta}_{np} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - E_{\nu\tau}) - \bar{\Delta}_{nn} \Delta_{np} (\tilde{\varepsilon}_{\nu p} - E_{\nu\tau}) \\ C_{\nu 3}^\tau = -\Delta_{pp} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 - E_{\nu\tau}^2) + \bar{\Delta}_{nn} (\Delta_{pp} \Delta_{nn} - |\Delta_{np}|^2) \\ C_{\nu 4}^\tau = -\Delta_{np} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + E_{\nu\tau}) (\tilde{\varepsilon}_{\nu p} - E_{\nu\tau}) + \bar{\Delta}_{np} (\Delta_{pp} \Delta_{nn} - |\Delta_{np}|^2) \end{cases} \quad (2.46)$$

et :

$$C_\nu^\tau = \sqrt{(C_{\nu 1}^\tau)^2 + (C_{\nu 2}^\tau)^2 + (C_{\nu 3}^\tau)^2 + (C_{\nu 4}^\tau)^2} \quad (2.47)$$

En identifiant les différents Δ aux paramètres du gap, et en tenant compte du fait que ces derniers sont des quantités réelles, il vient, tous calculs faits :

$$E_{\nu\tau}^2 = E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2\Delta_{np}^2 + (-1)^{\tau+1} \sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}, \quad \tau = 1, 2 \quad (2.48)$$

où l'on a introduit les énergies des quasi-particules neutron et proton :

$$E_{\nu n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + \Delta_{nn}^2} \quad ; \quad E_{\nu p} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2 + \Delta_{pp}^2} \quad (2.49)$$

En introduisant les opérateurs $\alpha_{\nu\tau}^+$ et $\alpha_{\tilde{\nu}\tau}$ définis par :

$$\begin{cases} \alpha_{\nu\tau}^+ = \sum_t (u_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + v_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \\ \alpha_{\tilde{\nu}\tau} = \sum_t (-v_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + u_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \end{cases} \quad (2.50)$$

avec $t = n, p$ et $\tau = 1, 2$, H' prend la forme diagonale :

$$H' = \sum_{\nu>0, t=n,p} E_{\nu\tau} (\alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau} - \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+) + \sum_{\nu>0, t=n,p} \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \quad (2.51)$$

Les opérateurs $\alpha_{\nu\tau}^+$ et $\alpha_{\tilde{\nu}\tau}$ définis par (2.50) ne sont autres que les opérateurs de création et d'annihilation de quasiparticules. La transformation correspondante est donc la transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée.

Il est à présent possible de calculer $Tr \exp(-\beta H')$ dans l'expression (2.37) de Z , soit :

$$\begin{aligned}
Tr \exp(-\beta H') &= \exp\left(-\beta \sum_{\nu t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t}\right) Tr \prod_{\nu t} \exp\left[-\beta E_{\nu\tau} (\alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau} - \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+)\right] \\
&= \exp\left(-\beta \sum_{\nu t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t}\right) \prod_{\nu t} Tr \exp(-\beta E_{\nu\tau} \alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau}) \exp(\beta E_{\nu\tau} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+) \\
&= \exp\left(-\beta \sum_{\nu t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t}\right) \prod_{\nu t} [1 + \exp(-\beta E_{\nu\tau})] [1 + \exp(\beta E_{\nu\tau})] \\
&= \exp\left(-\beta \sum_{\nu t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t}\right) \prod_{\nu t} 4ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

La fonction partition devient alors :

$$\begin{aligned}
Z &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{nn} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{pp} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{np} \exp\left[-\pi\beta \left(|z_{nn}|^2 + |z_{pp}|^2 + |z_{np}|^2\right)\right] \\
&\quad \exp\left(-\beta \sum_{\nu t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t}\right) \prod_{\nu t} 4ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{nn} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{pp} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_{np} \exp\left[-\pi\beta \left(|z_{nn}|^2 + |z_{pp}|^2 + |z_{np}|^2\right)\right] \\
&\quad \exp\left\{-\beta \sum_{\nu} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - \frac{1}{\beta} \text{Log}\left(16ch^2 \frac{\beta E_{\nu 1}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu 2}}{2}\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Sachant que l'énergie libre du système est définie par :

$$Z = \int dz_{nn} \int dz_{pp} \int dz_{np} \exp(-\beta F) \tag{2.54}$$

il vient :

$$F = \pi \left(|z_{nn}|^2 + |z_{pp}|^2 + |z_{np}|^2\right) + \sum_{\nu} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - \frac{1}{\beta} \text{Log}\left(16ch^2 \frac{\beta E_{\nu 1}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu 2}}{2}\right)\right] \tag{2.55}$$

2.6 Equations du gap

2.6.1 Approximation au point de selle

L'approximation qui consiste à donner la contibution dominante à la fonction de partition est l'approximation au point de selle caractérisée par les équations [76] :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{nn}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{pp}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{np}} = 0 \quad (2.56)$$

ou sous forme abrégée :

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_{tt'}} = 0 \quad \forall t, t' = n, p$$

On en déduit :

$$\pi z_{tt'} = \sum_{\nu t} \left[\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{z}_{tt'}} t h \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \right] \quad (2.57)$$

En donnant à t et t' leurs valeurs possibles, on obtient les équations :

$$\begin{aligned} \frac{4\Delta_{nn}}{G_{nn}} &= \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} t h \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \\ &\left\{ \Delta_{nn} + (-1)^{\tau+1} \frac{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{nn} + 2\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\Delta_{pp}}{G_{pp}} &= \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} t h \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \\ &\left\{ \Delta_{pp} + (-1)^{\tau+1} \frac{(E_{\nu p}^2 - E_{\nu n}^2) \Delta_{pp} + 2\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{G_{np}} &= \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} t h \frac{1}{2} \beta E_{\nu\tau} \\ &\left\{ 1 + (-1)^{\tau+1} \frac{E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2(\Delta_{nn}\Delta_{pp} - \tilde{\varepsilon}_{\nu n}\tilde{\varepsilon}_{\nu p})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Condition de conservation du nombre de particules

Compte tenu de la transformation inverse de (2.50), la valeur moyenne de l'opérateur nombre

de particules défini par (2.5) s'écrit, pour chaque type de particules (i.e neutron ou proton) :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu, \tau \tau'} [u_{\nu \tau t} u_{\nu \tau' t} f_{\nu \tau} \delta_{\tau \tau'} + v_{\nu \tau t} v_{\nu \tau' t} \delta_{\tau \tau'} (1 - f_{\nu \tau})] \quad , \quad t = n, p \quad (2.61)$$

Sachant que :

$$f_{\nu \tau} = \frac{1}{2} \left[1 - th \frac{1}{2} \beta E_{\nu \tau} \right] \quad (2.62)$$

soit :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu > 0} \left[1 - \sum_{\tau} (u_{\nu \tau t}^2 - v_{\nu \tau t}^2) th \frac{1}{2} \beta E_{\nu \tau} \right] \quad , \quad t = n, p \quad (2.63)$$

où l'on a tenu compte de l'unitarité de la transformation (2.50).

Les équations (2.58) à (2.60) et (2.63) constituent alors les équations du gap à température finie dans le cas isovectoriel.

Nous considérons ci-dessous le cas particulier correspondant à l'absence d'appariement np, puis celui de la température nulle.

2.6.2 Différentes limites

Absence d'appariement neutron-proton

Si $\Delta_{np} = 0$, les énergies des quasiparticules définies par (2.48) deviennent :

$$E_{\nu 1} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + \Delta_{nn}^2} \equiv E_{\nu n} \quad , \quad E_{\nu 2} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2 + \Delta_{pp}^2} \equiv E_{\nu p} \quad (2.64)$$

qui ne sont autres que les énergies des quasiparticules de la théorie BCS habituelle. Les expressions (2.58) et (2.59) s'écrivent alors :

$$\frac{2}{G_{nn}} = \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_{\nu n}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu n} \quad ; \quad \frac{2}{G_{pp}} = \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_{\nu p}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu p} \quad (2.65)$$

Quant à l'expression (2.63), elle devient :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu > 0} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu \tau}}{E_{\nu \tau}} th \frac{1}{2} \beta E_{\nu \tau} \right] \quad , \quad \tau = n, p \quad (2.66)$$

Ces expressions ne sont autres que celles de la théorie BCS habituelle à température finie.

Température nulle

A température nulle les expressions (2.58) à (2.60) deviennent :

$$\frac{4\Delta_{nn}}{G_{nn}} = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} \left\{ \Delta_{nn} + (-1)^{\tau+1} \frac{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{nn} + 2\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\} \quad (2.67)$$

$$\frac{4\Delta_{pp}}{G_{pp}} = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} \left\{ \Delta_{pp} + (-1)^{\tau+1} \frac{(E_{\nu p}^2 - E_{\nu n}^2) \Delta_{pp} + 2\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\} \quad (2.68)$$

$$\frac{2}{G_{np}} = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{E_{\nu\tau}} \left\{ 1 + (-1)^{\tau+1} \frac{E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 + 2(\Delta_{nn}\Delta_{pp} - \tilde{\varepsilon}_{\nu n}\tilde{\varepsilon}_{\nu p})}{\sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4\Delta_{np}^2 (\Delta_{nn} + \Delta_{pp})^2}} \right\} \quad (2.69)$$

Quant à la conservation du nombre de particules, elle devient :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu>0,\tau} v_{\nu\tau}^2 \quad , \quad t = n, p \quad (2.70)$$

Si de plus $\Delta_{np} = 0$, l'expression (2.48) se ramène à :

$$E_{\nu 1} \equiv E_{\nu n} \quad ; \quad E_{\nu 2} \equiv E_{\nu p} \quad (2.71)$$

qui ne sont autres que les énergies des quasiparticules pour un système de neutrons et de protons. Quant aux expressions (2.67) et (2.68), elles deviennent :

$$\frac{2}{G_{nn}} = \sum_{\nu} \frac{1}{E_{\nu n}} \quad ; \quad \frac{2}{G_{pp}} = \sum_{\nu} \frac{1}{E_{\nu p}} \quad (2.72)$$

qui ne sont autres que les équations du gap habituelles dans le cas de l'appariement entre les particules identiques. Finalement, l'expression (2.69) devient :

$$\frac{2}{G_{np}} = \sum_{\nu} \frac{1}{E_{\nu n}} \frac{E_{\nu n}^2 + \Delta_{nn}\Delta_{pp} - \tilde{\varepsilon}_{\nu n}\tilde{\varepsilon}_{\nu p}}{E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2} + \sum_{\nu} \frac{1}{E_{\nu p}} \frac{E_{\nu p}^2 + \Delta_{nn}\Delta_{pp} - \tilde{\varepsilon}_{\nu n}\tilde{\varepsilon}_{\nu p}}{E_{\nu p}^2 - E_{\nu n}^2} \quad (2.73)$$

Elle permet d'évaluer la valeur critique $(G_{np})_c$ en dessous de laquelle les corrélations d'appariement np disparaissent.

Quant à la condition de conservation du nombre de particules, elle s'écrit :

$$\langle N_t \rangle = \sum_{\nu>0, \tau} v_{\nu\tau t}^2 \quad , \quad t = n, p \quad (2.74)$$

Les équations du gap ainsi obtenues généralisent donc la forme (2.72) de la théorie BCS habituelle plutôt que celle de la forme :

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_{\nu} v_{\nu} \quad (2.75)$$

C'est la généralisation de cette dernière que l'on obtient par un traitement BCS de l'appariement neutron-proton, soit [4] :

$$\Delta_t = -G_{tt} \sum_{\nu>0} \sum_{\tau=1,2} u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau t} \quad , \quad t = n, p \quad (2.76)$$

$$\Delta_{np} = -2G_{np} \sum_{\nu>0} \sum_{\tau=1,2} (u_{\nu\tau p} v_{\nu\tau n} + u_{\nu\tau n} v_{\nu\tau p}) \quad , \quad t = n, p \quad (2.77)$$

Cette dernière expression est moins maniable sur le plan numérique.

Chapitre 3

Grandeurs statistiques

3.1 Introduction

L'agitation thermique des neutrons et des protons rend le noyau très instable et excité. Si l'on traduit en température les énergies d'excitation ainsi obtenues, on obtient des températures de l'ordre de quelques MeV et le noyau peut être considéré, du point de vue thermodynamique, comme un système chaud. Les approches théoriques de ces systèmes font de plus en plus appel aux concepts de la thermodynamique ou de la physique statistique quantique, ne serait-ce que par l'introduction de la température que l'on vient de mentionner. La description microscopique du noyau est donc nécessairement statistique et les grandeurs macroscopiques observables correspondent à des moyennes de caractéristiques microscopiques.

Cette description repose sur une grandeur statistique fondamentale qui est la fonction partition $Z = \exp(-\beta H')$, à l'aide de laquelle on peut calculer l'ensemble des grandeurs statistiques pour un système à l'équilibre, représenté par son hamiltonien auxiliaire H' , défini dans le chapitre précédent. Le calcul de cette fonction dépend du genre de l'ensemble considéré : micro-canonique, canonique ou grand canonique. En théorie de la structure nucléaire, le nombre de particules n'étant conservé qu'en moyenne, l'ensemble grand canonique est le plus adapté pour l'étude statistique du noyau et pour lequel nous avons vu précédemment de façon détaillée le calcul de la fonction partition .

En effet, il est connu en thermodynamique que l'ensemble grand canonique convient parfaitement à l'étude des systèmes en contact avec un réservoir de chaleur (qui est dans notre

cas le noyau) et l'ensemble des nucléons. L'énergie et le nombre de particules étant variables, leurs valeurs moyennes sont identifiées aux quantités thermodynamiques correspondantes.

A l'équilibre thermique, toutes les grandeurs statistiques peuvent être déduites de la fonction partition. Ces grandeurs nous expliquent ce qui se passe à l'échelle microscopique au niveau du noyau, c'est-à-dire qu'elles jouent en quelque sorte le rôle d'une loupe pour donner des informations concernant les événements internes dans les noyaux chauds.

Nous commençons cette partie par définir les principales grandeurs statistiques et leurs significations physiques, puis nous les calculerons dans une première étape en prenant en compte l'influence des corrélations d'appariement uniquement entre particules identiques puis dans une seconde étape en considérant toutes les contributions de l'appariement isovectoriel.

Les effets thermiques ainsi que ceux relatifs aux corrélations d'appariement entre particules identiques ont été depuis longtemps étudiés d'abord par Moretto [60] dans le cadre de la théorie Finite Temperature BCS (FTBCS) et de sa généralisation par d'autres auteurs, la méthode d'Hartree-Fock-Bogoliubov : (FTHFB) [60], [77]. Ces méthodes ont connu un grand succès dans l'explication des transitions de phases ainsi que des diverses observables statistiques comme l'énergie d'excitation, la capacité calorifique ou l'entropie.

Les grandeurs statistiques d'un ensemble grand canonique caractérisé par sa grande fonction partition Z à l'équilibre thermique, sont définies de la manière suivante :

1) Le grand potentiel ou potentiel thermodynamique Ω est le logarithme népérien de la fonction partition :

$$Z = e^{\Omega} = Tr e^{-\beta H'} \quad (3.1)$$

où Tr désigne la trace exprimée dans la base des états propres de H' . La recherche du problème aux valeurs propres de H' étant dans la plupart des cas très compliquée, on se contente le plus souvent d'une diagonalisation approximative de cet opérateur et que l'on complète par des calculs perturbatifs.

2) L'énergie totale d'un système E est l'une des caractéristiques thermodynamiques les plus importantes et est définie comme étant la somme de toutes les énergies qui spécifient ce système et s'exprime par l'équation :

$$E = - \left. \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right|_{\alpha=cte} \quad (3.2)$$

où $\alpha = \beta\lambda$, et λ désigne le potentiel chimique , grandeur correspondant en principe au travail reçu par le système lors de l'introduction d'une particule supplémentaire au système.

3) Le nombre moyen de particules est tel que :

$$N = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \right|_{\beta=cte} \quad (3.3)$$

4) L'entropie S est l'une des grandeurs les plus importantes et les plus anciennes dans l'histoire de la thermodynamique . Cette grandeur permet de faire le lien entre le monde microscopique des particules et le comportement macroscopique du noyau. Tout comme l'énergie, on ne peut la définir que si le système est à l'équilibre. Elle est exprimée par la relation de Boltzman :

$$S = k \text{Log} W \quad (3.4)$$

où k désigne la constante de Boltzman et W est le nombre de micro-états du système. L'entropie permet de quantifier la qualité et le sens d'évolution de l'énergie d'un système et mesure le degré de désordre de l'état de ce système au niveau microscopique pour voir sa capacité à se transformer spontanément. Elle s'exprime aussi par la relation :

$$S = \Omega - \alpha N + \beta E \quad (3.5)$$

où N est le nombre total de particules défini en 3). L'entropie est toujours positive .

5) La capacité calorifique d'un corps est le fait pour ce dernier d'emmagasiner de la chaleur sans pour autant prendre beaucoup en température. Elle est donnée par l'expression :

$$C = -\beta \frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (3.6)$$

Elle est également toujours positive.

3.2 Grandeurs thermodynamiques en l'absence de l'appariement neutron-proton

3.2.1 Grande fonction partition

La fonction partition d'un noyau chaud composé de deux sous systèmes de neutrons et protons indépendants et où l'interaction résiduelle ne contient que les corrélations d'appariement entre les particules identiques, est donnée par l'équation (1.85). Au point de selle, cette fonction partition s'écrit :

$$Z = e^{\Omega} \quad (3.7)$$

où Ω définit le grand potentiel du système donné par :

$$\Omega = \sum_{t=n,p} \Omega_t \quad (3.8)$$

et qui est la somme de deux potentiels des systèmes de protons Ω_p et de neutrons Ω_n respectivement :

$$\Omega_t = -\beta \frac{\Delta_{tt}^2}{G_{tt}} - \beta \sum_{\nu>0} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu t} + \text{Log} \left(4ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \right] \quad ; \quad t = n, p \quad (3.9)$$

Signalons qu'il a été montré par des calculs de type Hartree-Fock-Bogoliubov que les énergies individuelles $\varepsilon_{\nu t}$, $t = n, p$ sont quasiment indépendantes de la température et ce jusqu'à $T = 0.5 \text{ MeV}$ [98].

La fonction de partition (3.7) se présente donc sous la forme :

$$Z = Z_n Z_p = \exp(\Omega_n) \exp(\Omega_p) \quad (3.10)$$

Cette factorisation entraine que les grandeurs statistiques du noyau sont la somme de leurs homologues des sous-systèmes neutrons et protons. Il devient maintenant possible de déduire les propriétés thermodynamiques du noyau à partir de l'expression approchée de la fonction partition calculée au point de selle.

Comme la fonction partition se factorise, son logarithme est une somme de termes relatifs à chacun des deux sous-systèmes de neutrons et de protons, il en est de même pour les grandeurs

qui s'en déduisent par dérivation. Ainsi, les propriétés thermodynamiques du noyau peuvent être maintenant déduites directement à partir de la grande fonction partition évaluée au point de selle.

3.2.2 Energie du système

L'énergie du sous-système $t=n,p$ est définie par :

$$E_t = - \left. \frac{\partial \Omega_t}{\partial \beta} \right|_{\alpha_t = cte} ; \quad t = n, p \quad (3.11)$$

avec

$$\alpha_t = \beta \lambda_t \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial \lambda_t}{\partial \beta} = - \frac{\lambda_t}{\beta} \quad (3.12)$$

La dérivation de l'équation (3.9) par rapport à β conduit à l'expression :

$$E_t = 2 \frac{\beta \Delta_{tt}}{G_{tt}} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} + \frac{\Delta_{tt}^2}{G_{tt}} + \sum_{\nu > 0} \left(\varepsilon_{\nu t} - \frac{\partial \beta E_{\nu t}}{\partial \beta} t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) ; \quad t = n, p \quad (3.13)$$

avec la valeur suivante de la dérivée, facile à établir à partir de l'expression de l'énergie de la quasi-particule $E_{\nu t}$:

$$\frac{\partial \beta E_{\nu t}}{\partial \beta} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t} \varepsilon_{\nu t} + \Delta_{tt}^2}{E_{\nu t}} + \beta \frac{\Delta_{tt}}{E_{\nu t}} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} ; \quad t = n, p \quad (3.14)$$

Sans avoir à calculer la dérivée $\frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta}$, on remplace $\frac{\partial \beta E_{\nu t}}{\partial \beta}$ par son expression (3.14) dans la relation (3.13) ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} E_t = & 2 \frac{\beta \Delta_{tt}}{G_{tt}} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} + \frac{\Delta_{tt}^2}{G_{tt}} + \sum_{\nu > 0} \left(\varepsilon_{\nu t} - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t} \varepsilon_{\nu t} + \Delta_{tt}^2}{E_{\nu t}} t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \\ & - \beta \Delta_{tt} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} \sum_{\nu > 0} \frac{t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2}}{E_{\nu t}} ; \quad t = n, p \end{aligned} \quad (3.15)$$

En tenant compte de la relation déjà établie :

$$\frac{2}{G_{tt}} = \sum_{\nu > 0} \frac{t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2}}{E_{\nu t}} ; \quad t = n, p \quad (3.16)$$

dans l'équation (3.15), l'énergie de sous-système $t = n, p$ prend la forme suivante :

$$E_t = \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu t} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right] - \frac{\Delta_{tt}^2}{G_{tt}} \quad ; \quad t = n, p \quad (3.17)$$

et l'énergie totale du noyau s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E(T) &= E_n + E_p \\ &= \sum_{t=n,p, \nu>0} \varepsilon_{\nu t} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right] - \frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} - \frac{\Delta_{pp}^2}{G_{pp}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'énergie d'excitation du noyau est définie par :

$$E^*(T) = E(T) - E(T = 0) \quad (3.19)$$

Sachant que :

$$E(T = 0) = \sum_{t=n,p, \nu>0} \varepsilon_{\nu t} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} \right] - \frac{\Delta_{nn}^2(T = 0)}{G_{nn}} - \frac{\Delta_{pp}^2(T = 0)}{G_{pp}}$$

où $\Delta_{tt}(T = 0)$ est la valeur de la demi-largeur du gap $\Delta_{tt}(T)$ à température nulle pour $t = n, p$.

L'énergie d'excitation nucléaire a ainsi pour expression :

$$E^*(T) = \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu>0}} \left\{ \frac{\varepsilon_{\nu t} \tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} \left(1 - t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) + \frac{\Delta_{tt}^2(T = 0) - \Delta_{tt}^2(T)}{G_{tt}} \right\}$$

3.2.3 Nombre de particules

Le nombre moyen de particules N_t d'un sous système de particules de type t est obtenu à partir de la relation :

$$N_t = \left. \frac{\partial \Omega_t}{\partial \alpha_t} \right|_{\beta=cte} = \frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_t} \frac{\partial \Omega_t}{\partial \lambda_t} \quad (3.20)$$

Etant donné que :

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_t} = \frac{1}{\beta} \quad et \quad \frac{\partial E_{\nu t}}{\partial \lambda_t} = -\frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} \quad (3.21)$$

on obtient :

$$N_t = \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu>0}} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} th \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \quad (3.22)$$

soit pour le nombre total de nucléons du noyau :

$$N = N_n + N_p = \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu>0}} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} th \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \quad (3.23)$$

3.2.4 Entropie

L'entropie est une grandeur qui mesure le désordre existant dans l'état d'un système et elle est définie pour un système de particules de type t par :

$$S_t = \Omega_t - \lambda_t N_t + \beta E_t \quad (3.24)$$

En substituant les expressions de Ω_t , N_t et E_t établies précédemment, on obtient :

$$S_t = -\beta \sum_{\nu>0} E_{\nu t} th \frac{\beta E_{\nu t}}{2} + \sum_{\nu>0} \text{Log} \left(4ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \quad (3.25)$$

et l'entropie totale du noyau $S = S_n + S_p$, s'écrit :

$$S = -\beta \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu>0}} E_{\nu t} th \frac{\beta E_{\nu t}}{2} + \sum_{\nu>0} \text{Log} \prod_{t=n,p} \left(4ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2} \right) \quad (3.26)$$

3.2.5 Capacité calorifique

Pour un sous système de particules de type t , la capacité calorifique est définie par :

$$C_t = -\beta \frac{\partial S_t}{\partial \beta} \quad (3.27)$$

Après avoir explicité la dérivée de l'entropie et effectué tous les calculs intermédiaires on obtient :

$$C_t = \frac{1}{2} \sum_{\nu>0} \left(\beta^2 E_{\nu t} + \beta^3 \frac{\partial E_{\nu t}}{\partial \beta} \right) \frac{E_{\nu t}}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \quad (3.28)$$

avec

$$\frac{\partial E_{\nu t}}{\partial \beta} = \frac{\Delta_{tt}}{E_{\nu t}} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} \quad (3.29)$$

ce qui nous permet de réécrire la relation (3.27) sous la forme :

$$C_t = \frac{1}{2} \sum_{\nu > 0} \left(\beta^2 E_{\nu t}^2 + \beta^3 \Delta_{tt} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} \right) \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \quad (3.30)$$

En dérivant les deux membres de l'équation du gap (3.16), on obtient la forme explicite de $\frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta}$, soit :

$$\frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \sum_{\nu > 0} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \left[\sum_{\nu > 0} \frac{\Delta_{tt}}{E_{\nu t}^3} th \frac{\beta E_{\nu t}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\nu > 0} \frac{\beta \Delta_{tt}}{2 E_{\nu t}^2} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \right]^{-1} \quad (3.31)$$

La chaleur spécifique totale du noyau étant également additive, il vient :

$$\begin{aligned} C &= C_n + C_p \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu > 0}} \left(\beta^2 E_{\nu t}^2 + \beta^3 \Delta_{tt} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} \right) \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Toutes ces grandeurs peuvent être calculées directement dès la résolution des équations du gap données par les équations (3.16) et (3.22).

3.2.6 Limite à température nulle

Lorsque $T \rightarrow 0$ soit $\beta \rightarrow \infty$ les équations (3.16) et (3.22) se réduisent aux équations habituelles du gap à température nulle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{G_{tt}} = \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_{\nu t}} \\ N_t = \sum_{\nu > 0} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} \right) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad t = n, p \quad (3.33)$$

Il en est de même pour l'énergie :

$$\begin{aligned}
E &= E_n + E_p \\
&= \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu>0}} \varepsilon_{\nu t} \left[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t}}{E_{\nu t}} \right] - \frac{\Delta_{nn}^2}{G_{nn}} - \frac{\Delta_{pp}^2}{G_{pp}}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Quant à l'entropie et la capacité calorifique , elles sont évidemment toutes les deux nulles.

3.3 Grandeurs thermodynamiques en présence de l'appariement isovectoriel

3.3.1 Grande fonction partition

On a vu dans le chapitre précédent que le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman nous a conduit, dans le cadre de l'approximation statique, à l'expression suivante de l'énergie libre du système :

$$F = \pi(|z_{nn}|^2 + |z_{pp}|^2 + |z_{np}|^2) + \sum_{\nu} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p} - \frac{1}{\beta} \text{Log}(4^2 ch^2 \frac{\beta E_{\nu 1}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu 2}}{2}) \right]$$

où les paramètres $z_{tt'}$; $t, t' = n, p$ ont été fixés par la méthode du col (ou approximation du point de selle) et sont donnés par :

$$z_{tt'} = \pi^{-1} \sum_{\nu} \left[\frac{\partial E_{\nu \tau}}{\partial \bar{z}_{tt'}} t h^{\frac{1}{2}} \beta E_{\nu \tau} \right]$$

Etant donné que le grand potentiel Ω : est relié à l'énergie libre F par :

$$\Omega = -\beta F$$

on obtient l'expression explicite suivante :

$$\begin{aligned}
\Omega &= -\beta \left(\frac{|\Delta_{nn}|^2}{G_{nn}} + \frac{|\Delta_{pp}|^2}{G_{pp}} + \frac{|\Delta_{np}|^2}{G_{np}} \right) - \beta \sum_{\nu} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) \\
&\quad + \sum_{\nu} \text{Log}(4^2 ch^2 \frac{\beta E_{\nu 1}}{2} ch^2 \frac{\beta E_{\nu 2}}{2})
\end{aligned} \tag{3.35}$$

où les $\Delta_{tt'}$ représentent les demi-largeurs du gap pour $t, t' = n, p$.

A partir de cette expression, nous déduirons, comme ci-dessus, toutes les valeurs moyennes des grandeurs statistiques du noyau [99]-[101].

3.3.2 Energie du système

Sachant que :

$$E = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} \right)_{\alpha_t = cte} \quad (3.36)$$

et tenant compte du fait que : $\alpha_t = \lambda_t \beta_t = \text{constante}$ puis des équations du gap (2.58) à (2.60) et (2.63), et de la dérivée donnée par l'équation (3.9) on aboutit à :

$$E = \frac{|\Delta_{nn}|^2}{G_{nn}} + \frac{|\Delta_{pp}|^2}{G_{pp}} + \frac{|\Delta_{np}|^2}{G_{np}} + \sum_{\nu} (\varepsilon_{\nu n} + \varepsilon_{\nu p}) - \sum_{\nu\tau} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \frac{\partial \beta E_{\nu\tau}}{\partial \beta} \quad (3.37)$$

où la dérivée de $\frac{\partial \beta E_{\nu\tau}}{\partial \beta}$ est donnée explicitement par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta E_{\nu\tau}}{\partial \beta} = & \frac{1}{2E_{\nu\tau}} \left[h_{\nu\tau} \right. \\
& + \left\{ \Delta_{nn} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{nn} + 2\Delta_{np} (\Delta_{nn} \bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp} \Delta_{np})] \right\} \\
& \times \left(\frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{\Delta}_{nn}}{\partial \beta} + \bar{\Delta}_{nn} \right) + \\
& + \left\{ \Delta_{pp} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [-(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{pp} + 2\Delta_{np} (\bar{\Delta}_{nn} \Delta_{np} + \Delta_{pp} \bar{\Delta}_{np})] \right\} \\
& \times \left(\frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{\Delta}_{pp}}{\partial \beta} + \bar{\Delta}_{pp} \right) + \\
& + 2 \left\{ \Delta_{np} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [\Delta_{np} (E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 - 2\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) + 2\Delta_{pp} \Delta_{nn} \bar{\Delta}_{np}] \right\} \\
& \times \left(\frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{\Delta}_{np}}{\partial \beta} + \bar{\Delta}_{np} \right) + \\
& + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} \left\{ \bar{\Delta}_{pp} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [-(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \bar{\Delta}_{pp} + 2\bar{\Delta}_{np} (\Delta_{nn} \bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp} \Delta_{np})] \right\} \\
& + \frac{\beta}{2} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} \left\{ \bar{\Delta}_{nn} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \bar{\Delta}_{nn} + 2\bar{\Delta}_{np} (\bar{\Delta}_{nn} \Delta_{np} + \Delta_{pp} \bar{\Delta}_{np})] \right\} \\
& \left. + \beta \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta} \left\{ \bar{\Delta}_{np} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [\Delta_{np} (E_{\nu n}^2 + E_{\nu p}^2 - 2\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) + 2\bar{\Delta}_{pp} \bar{\Delta}_{nn} \Delta_{np}] \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

et où l'on a noté par :

$$t_\nu = \sqrt{(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2)^2 + 4|\Delta_{np}|^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + 4|\bar{\Delta}_{pp} \Delta_{np} + \Delta_{nn} \bar{\Delta}_{np}|^2} \tag{3.39}$$

et

$$h_{\nu\tau} = \varepsilon_{\nu n} \tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \varepsilon_{\nu p} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} \left[2|\Delta_{np}|^2 (\varepsilon_{\nu n} - \varepsilon_{\nu p}) (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) + (\varepsilon_{\nu n} \tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \varepsilon_{\nu p} \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) (E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \right] \tag{3.40}$$

ce qui permet d'écrire le dernier terme du second membre de (3.37) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\tau} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \frac{\partial \beta E_{\nu\tau}}{\partial \beta} &= \sum_{\nu\tau} \left(\frac{th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}}{2E_{\nu\tau}} h_{\nu\tau} \right) + \frac{2\Delta_{nn}}{G_{nn}} \left(\frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{\Delta}_{nn}}{\partial \beta} + \bar{\Delta}_{nn} \right) + \frac{2\Delta_{pp}}{G_{pp}} \left(\frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{\Delta}_{pp}}{\partial \beta} + \bar{\Delta}_{pp} \right) \\
&+ \frac{2\Delta_{np}}{G_{np}} \left(\frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{\Delta}_{np}}{\partial \beta} + \bar{\Delta}_{np} \right) + \bar{\Delta}_{np} \\
&+ \frac{\beta \bar{\Delta}_{nn}}{G_{nn}} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\beta \bar{\Delta}_{pp}}{G_{pp}} \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\beta \bar{\Delta}_{np}}{G_{np}} \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

En substituant cette dernière somme dans l'expression (3.37) on aboutit à l'énergie E du système qui est donnée par :

$$E = -\frac{|\Delta_{nn}|^2}{G_{nn}} - \frac{|\Delta_{pn}|^2}{G_{pp}} - \frac{|\Delta_{np}|^2}{G_{np}} + \sum_{\nu} (\varepsilon_{\nu n} + \varepsilon_{\nu p}) - \sum_{\nu\tau} \frac{th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}}{2E_{\nu\tau}} h_{\nu\tau} \tag{3.42}$$

3.3.3 Nombre de particules

Le nombre de particules du type $t = n, p$ étant :

$$\begin{aligned}
N_t &= \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_t}, \quad t = n, p \\
&= \sum_{\nu\tau} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \lambda_t} \right) th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \right), \quad t = n, p \quad \text{et} \quad \tau = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

on obtient à partir du grand potentiel (3.35) :

$$N_n = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}}{E_{\nu\tau}} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_{\nu}} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu n} (E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) + 2 |\Delta_{np}|^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) \right] \right] \right\} \tag{3.44}$$

$$N_p = \sum_{\nu\tau} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}}{E_{\nu\tau}} \left[-\tilde{\varepsilon}_{\nu p} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_{\nu}} \left[\tilde{\varepsilon}_{\nu p} (E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) + 2 |\Delta_{np}|^2 (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) \right] \right] \right\} \tag{3.45}$$

et donc le nombre total de particules est :

$$\begin{aligned}
N &= N_n + N_p \\
&= \sum_{\nu\tau} \left\{ 1 - \frac{th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}}{2E_{\nu\tau}} \left[(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_{\nu}} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p}) (E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

3.3.4 Entropie

L'entropie S du noyau est définie par :

$$S = \Omega + \beta E - \lambda_n N_n - \lambda_p N_p \quad (3.47)$$

En remplaçant le grand potentiel, l'énergie et les nombres de neutron et de proton par leurs expressions, on trouve tous calculs faits l'expression simplifiée suivante :

$$S = \sum_{\nu\tau} \left\{ \text{Log} \left(4ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \right) - \beta E_{\nu\tau} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \right\} \quad (3.48)$$

3.3.5 Capacité calorifique

La capacité calorifique est donnée par :

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = -\beta \frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (3.49)$$

Après dérivation de l'entropie S par rapport à β on trouve :

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\nu\tau} \frac{E_{\nu\tau}}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \left(\beta^2 E_{\nu\tau} + \beta^3 \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \beta} \right) \quad (3.50)$$

expression dans laquelle

$$\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \beta} = \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}} \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}} \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{np}}{\partial \beta} \quad (3.51)$$

Dérivées de $\Delta_{tt'}$ par rapport à β pour $t, t' = n, p$

Les équations de gaps (2.58) à (2.60) pouvant être regroupées en une seule équation donnée par :

$$\frac{\Delta_{tt'}}{G_{tt'}} = \sum_{\nu\tau} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{tt'}} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} \quad ; \quad t, t' = n, p \quad (3.52)$$

les dérivées partielles apparaissant dans l'eq.(3.54) sont données par :

pour $\Delta_{tt'} = \Delta_{nn}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} \left[\frac{1}{G_{nn}} - \sum_{\nu\tau} \beta \frac{\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}}}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \right] - \frac{\partial \bar{\Delta}_{nn}}{\partial \beta} \sum_{\nu\tau} \left\{ \frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}^2} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} + \frac{\beta \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}} \right)^2}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \right\} \quad (3.53) \\ &= \sum_{\nu\tau} \frac{\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}}}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \left\{ E_{\nu\tau} + \beta \left[\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}} \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}} \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{np}}{\partial \beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

pour $\Delta_{tt'} = \Delta_{pp}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} \left[\frac{1}{G_{pp}} - \sum_{\nu\tau} \beta \frac{\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}}}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \right] - \frac{\partial \bar{\Delta}_{pp}}{\partial \beta} \sum_{\nu\tau} \left\{ \frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}^2} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} + \frac{\beta \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}} \right)^2}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \right\} \quad (3.54) \\ &= \sum_{\nu\tau} \frac{\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}}}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \left\{ E_{\nu\tau} + \beta \left[\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}} \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{np}}{\partial \beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

pour $\Delta_{tt'} = \Delta_{np}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta} \left[\frac{1}{G_{np}} - \sum_{\nu\tau} \beta \frac{\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}} \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}}}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \right] - \frac{\partial \bar{\Delta}_{np}}{\partial \beta} \sum_{\nu\tau} \left\{ \frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}^2} th \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2} + \frac{\beta \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}} \right)^2}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \right\} \quad (3.55) \\ &= \sum_{\nu\tau} \frac{\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{np}}}{2ch^2 \frac{\beta E_{\nu\tau}}{2}} \left\{ E_{\nu\tau} + \beta \left[\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{pp}} \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{pp}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \Delta_{nn}} \frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta} + \frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}} \frac{\partial \bar{\Delta}_{nn}}{\partial \beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

Le système linéaire constitué de ces trois équations permet de calculer les trois inconnues :

$$\frac{\partial \Delta_{nn}}{\partial \beta}, \frac{\partial \Delta_{pp}}{\partial \beta}, \frac{\partial \Delta_{np}}{\partial \beta}.$$

Dérivées du premier ordre de $E_{\nu\tau}$ par rapport à $\bar{\Delta}_{tt'}$ pour $t, t' = n, p$ et $\tau = 1, 2$

Ces dérivées sont données explicitement par les expressions :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}} &= \frac{1}{4E_{\nu\tau}} \left\{ \Delta_{nn} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{nn} + 2\Delta_{np} (\Delta_{nn}\bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp}\Delta_{np})] \right\} \\
\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}} &= \frac{1}{4E_{\nu\tau}} \left\{ \Delta_{pp} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [-(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{pp} + 2\Delta_{np} (\bar{\Delta}_{nn}\Delta_{np} + \Delta_p\bar{\Delta}_{np})] \right\} \\
\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}} &= \frac{1}{2E_{\nu\tau}} \left\{ \Delta_{np} + \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} [\Delta_{np} [(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + (|\Delta_{nn}|^2 + |\Delta_{pp}|^2)] + 2\Delta_{pp}\Delta_{nn}\bar{\Delta}_{np}] \right\}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Dérivées du second ordre de $E_{\nu\tau}$ par rapport à $\Delta_{tt'}$

Là également on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}^2} &= \frac{1}{4E_{\nu\tau}} \left\{ \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} \left[\Delta_{nn}^2 - \frac{1}{t_\nu^2} \{ (E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{nn} + 2\Delta_{np} (\Delta_{nn}\bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp}\Delta_{np}) \}^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - 4 \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{nn}} \right)^2 \right\} \\
\frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}^2} &= \frac{1}{4E_{\nu\tau}} \left\{ \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} \left[\Delta_{pp}^2 - \frac{1}{t_\nu^2} \{ -(E_{\nu n}^2 - E_{\nu p}^2) \Delta_{pp} + 2\Delta_{np} (\Delta_{pp}\bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{nn}\Delta_{np}) \}^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - 4 \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{pp}} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}^2} &= \frac{1}{E_{\nu\tau}} \left\{ 2 \frac{(-1)^{\tau+1}}{t_\nu} \left[\Delta_{nn}\Delta_{pp} - \frac{1}{t_\nu^2} \left\{ \Delta_{np} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p})^2 + \Delta_{nn} (\Delta_{np}\bar{\Delta}_{nn} + \bar{\Delta}_{np}\Delta_{pp}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \Delta_{pp} (\Delta_{nn}\bar{\Delta}_{np} + \bar{\Delta}_{pp}\Delta_{np}) \right\}^2 \right] - \left(\frac{\partial E_{\nu\tau}}{\partial \bar{\Delta}_{np}} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

3.3.6 Absence d'appariement neutron-proton :

Lorsque $\Delta_{np} = 0$, les énergies de quasiparticules des types 1 et 2 se réduisent à celles des quasi-particules neutron et proton ou inversement :

$$\begin{aligned} E_{\nu 1} &= E_{\nu n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + |\Delta_{nn}|^2} \\ E_{\nu 2} &= E_{\nu p} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2 + |\Delta_{pp}|^2} \end{aligned}$$

Quant à l'énergie E , le nombre de particules N, l'entropie S et la capacité calorifique C du noyau, elles sont données par :

$$E = \sum_{\nu, t} \left[\varepsilon_{\nu t} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t} t h \frac{\beta E_{\nu \tau}}{2}}{E_{\nu t}} \right) - \frac{|\Delta_{tt}|^2}{G_{tt}} \right]$$

$$N = \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu > 0}} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu t} t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2}}{E_{\nu t}} \right)$$

$$S = 2 \sum_{\nu t} \text{Log} \left[1 + e^{-\beta E_{\nu t}} \right] + 2\beta \sum_{\nu \tau} \frac{E_{\nu \tau}}{1 + e^{\beta E_{\nu t}}}$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\substack{t=n,p \\ \nu > 0}} \left(\beta^2 E_{\nu t}^2 + \beta^3 \Delta_{tt} \frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} \right) \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}}$$

avec

$$\frac{\partial \Delta_{tt}}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \sum_{\nu > 0} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \left[\sum_{\nu > 0} \frac{\Delta_{tt}}{E_{\nu t}^3} t h \frac{\beta E_{\nu t}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\nu > 0} \frac{\beta \Delta_{tt}}{2 E_{\nu t}^2} \frac{1}{ch^2 \frac{\beta E_{\nu t}}{2}} \right]^{-1}$$

Chapitre 4

Résultats numériques et discussion

Le modèle précédemment décrit a été, dans une première étape, testé dans le cadre du modèle schématique à un niveau. Dans une seconde étape, des cas réalistes ont été considérés.

4.1 Cas d'un modèle schématique : le modèle à un niveau

4.1.1 Résolution des équations du gap

Les équations du gap en présence de l'appariement isovectoriel, (2.58) à (2.60) et les éqs. (2.63) de conservation du nombre de particules, constituent un système non linéaire de cinq équations à cinq inconnues, à savoir les trois demi-largeurs du gap $\Delta_{pp}(T)$, $\Delta_{nn}(T)$ et $\Delta_{np}(T)$ et les deux niveaux de Fermi λ_n et λ_p . C'est un système fortement non linéaire et dont la résolution s'est avérée assez ardue. Il a été résolu avec le concours des membres de notre équipe par la méthode itérative de Broyden ([102]). Il a été constaté que le système pouvait admettre plusieurs solutions et qui ne sont pas toujours des solutions physiques.

La résolution numérique du système a d'abord été réalisée dans le cadre du modèle à un niveau d'énergie $\varepsilon = 0$ et possédant une dégénérescence totale de paires égale à 11 ($\Omega = 11$). Nous avons considéré pour cela un système à 6 neutrons et 4 protons ($N = 6$, $Z = 4$) avec des paramètres d'appariement $G_{nn} = G_{pp} = 0.242 \text{ MeV}$ comme dans les références [2] et [103].

Les variations de Δ_{nn} , Δ_{pp} et Δ_{np} à température nulle en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} sont portées dans la figure 4-1. Ces variations sont rigoureusement les mêmes que celles des références ci-dessus citées. En effet Δ_{np} est nul pour $G_{np} < (G_{np})_c$, $[(G_{np})_c = 0.5G_{pp}$ dans le présent cas]

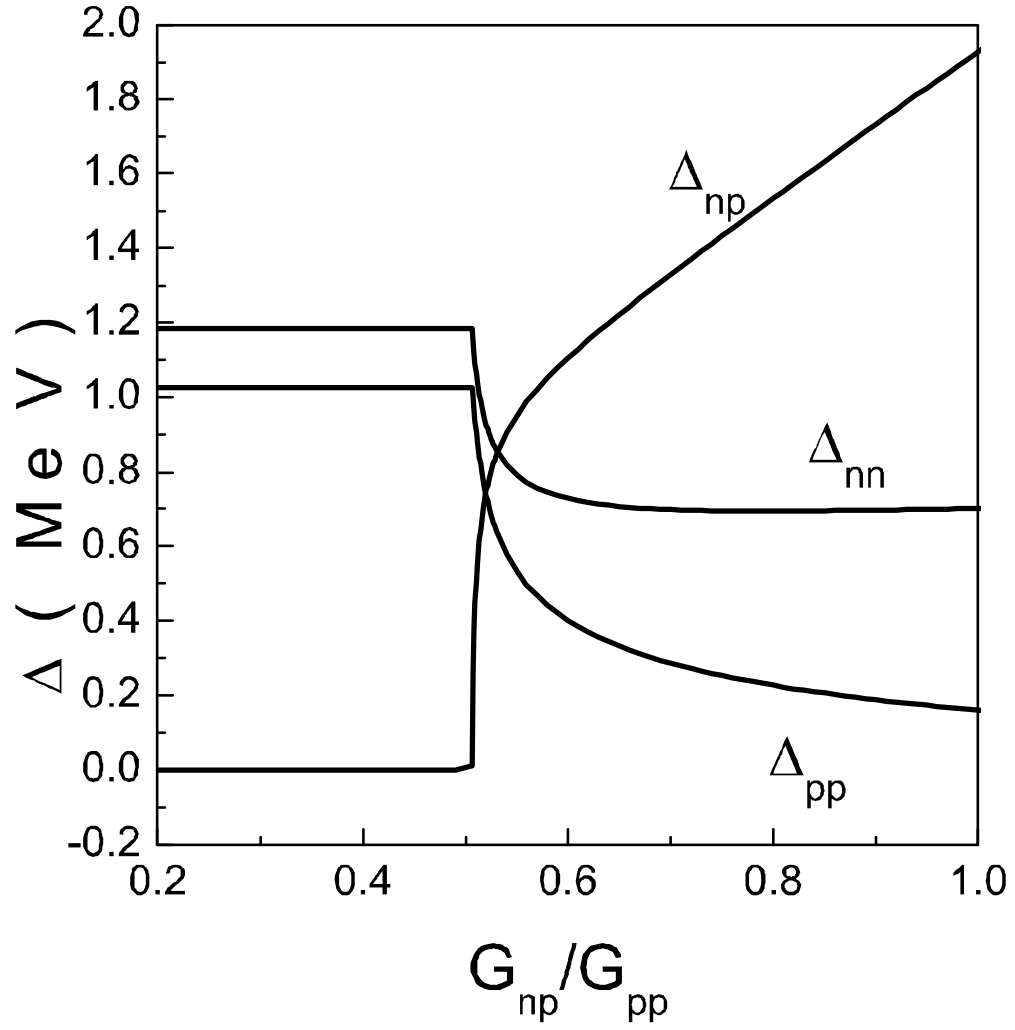


FIG. 4-1 – Variation des paramètres Δ_{nn} , Δ_{pp} , Δ_{np} en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} à température nulle dans le cadre du modèle à un niveau.

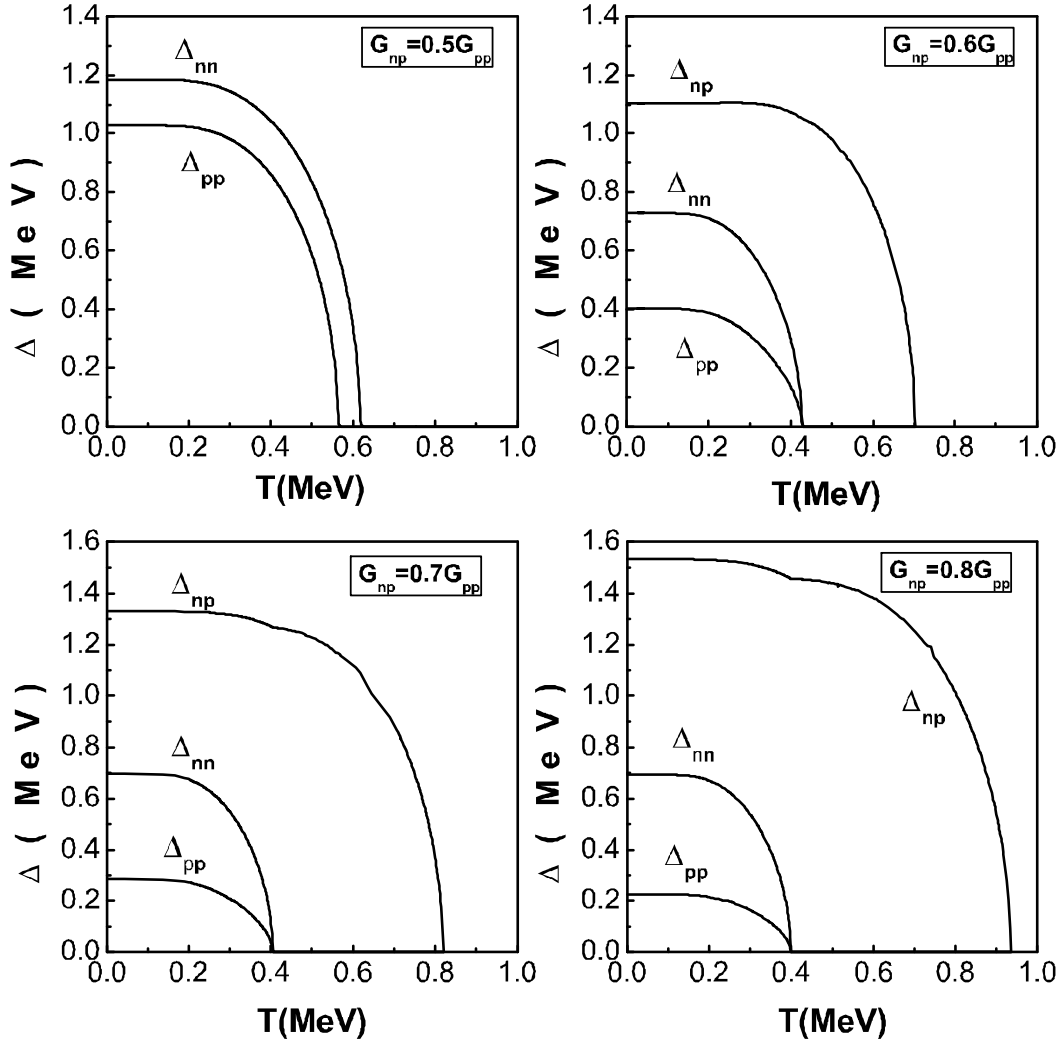


FIG. 4-2 – Variation des différents paramètres d'appariement en fonction de la température pour différentes valeurs du rapport G_{np}/G_{pp} , dans le cadre du modèle à un niveau.

puis présente une croissance très rapide au delà. Les paramètres Δ_{pp} et Δ_{nn} gardent les mêmes valeurs que celles de la méthode BCS pour $G_{np} < (G_{np})_c$ puis décroissent. Nous avons étudié par la suite les variations de ces mêmes paramètres en fonction de la température pour différentes valeurs du rapport G_{np}/G_{pp} dans la figure 4-2. On remarque tout d’abord que dans le présent modèle, on retrouve le comportement habituel de Δ_{nn} et Δ_{pp} de la théorie BCS habituelle sans corrélations d’appariement np. Nos résultats sont conformes à ceux de la ref [30]. De plus les variations de Δ_{np} présentent la même allure que celle de Δ_{nn} et Δ_{pp} . Dans chaque cas cependant l’influence de l’appariement isovectoriel persiste au-delà de la température critique des appariements entre particules identiques (neutrons et protons). Nous avons remarqué de plus que la température critique np varie d’une manière quasi-linéaire en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} . On constate à partir de la figure 4-2 que lorsque $G_{np} > (G_{np})_c$ (i.e. $\Delta_{np} > 0$), les températures critiques pour neutrons T_{cn} et pour protons T_{cp} diminuent. Ces dernières restent pratiquement constantes lorsque Δ_{np} augmente. De plus, ces valeurs, qui sont différentes dans le cas $\Delta_{np} = 0$, se confondent lorsque le rapport G_{np}/G_{pp} croît[97].

4.1.2 Les grandeurs statistiques

Les grandeurs statistiques à savoir l’énergie, l’entropie et la capacité calorifique du système, avec et sans appariement n-p ont été étudiées numériquement, dans une seconde partie, dans le cadre du même modèle à un niveau, mais avec des intensités d’appariement différentes. Les différentes interactions $G_{tt'}$, $t, t' = n, p$ ont été choisies de sorte que les demi-largeurs du gap proton $\Delta_{pp}(T)$ et neutron $\Delta_{nn}(T)$ aient des valeurs égales respectivement à $\Delta_{pp}(0) = 1.0 MeV$ et $\Delta_{nn}(0) = 1.2 MeV$ pour une température nulle. En effet ces valeurs sont plus conformes aux valeurs des cas réalistes. Nous considérons également quatre valeurs du paramètre $\Delta_{np}(0)$ telles que $0.6 MeV \leq \Delta_{np}(0) \leq 0.9 MeV$, toujours à température nulle. Pour chacune de ces valeurs, nous étudierons simultanément les variations, en fonction de la température, des paramètres du gap et de celles des trois grandeurs statistiques considérées.

Paramètres du gap

Les variations des différents paramètres du gap ont été étudiées en fonction de la température et portées dans les figures. 4-3 à 4-6. Nous avons également, dans un souci de cohérence,

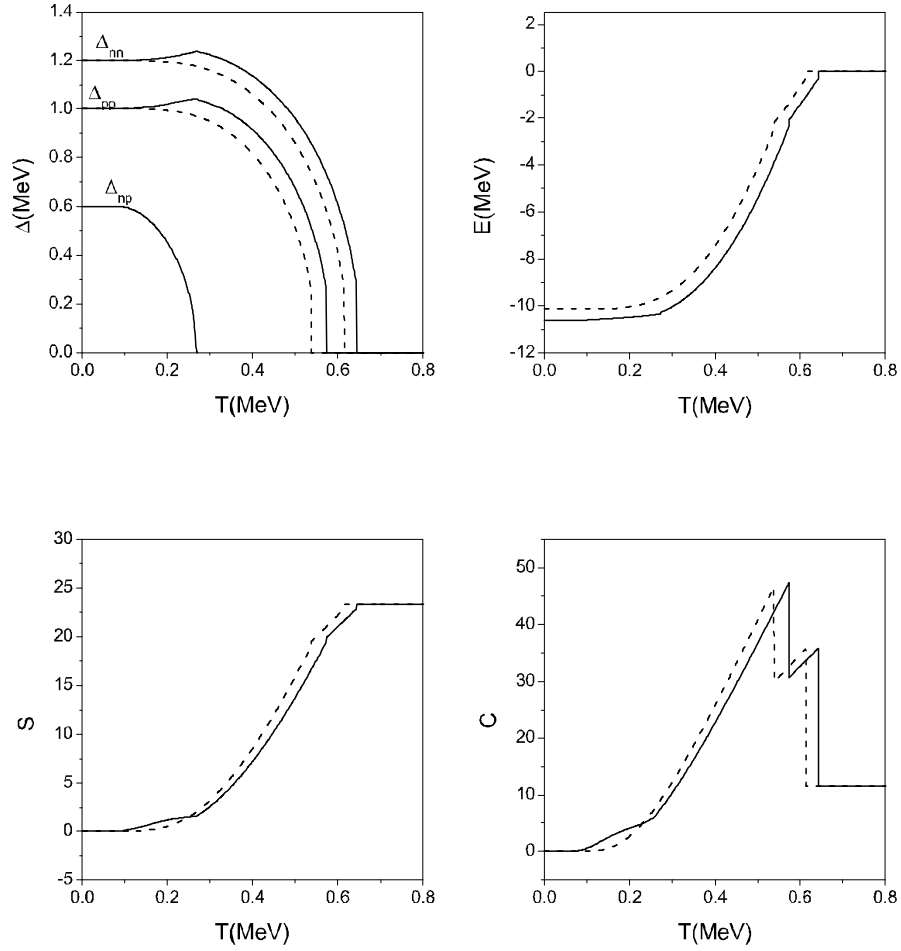


FIG. 4-3 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température dans le cadre du modèle à un niveau, pour $\Delta_{np}(0) = 0.6 \text{ MeV}$. Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

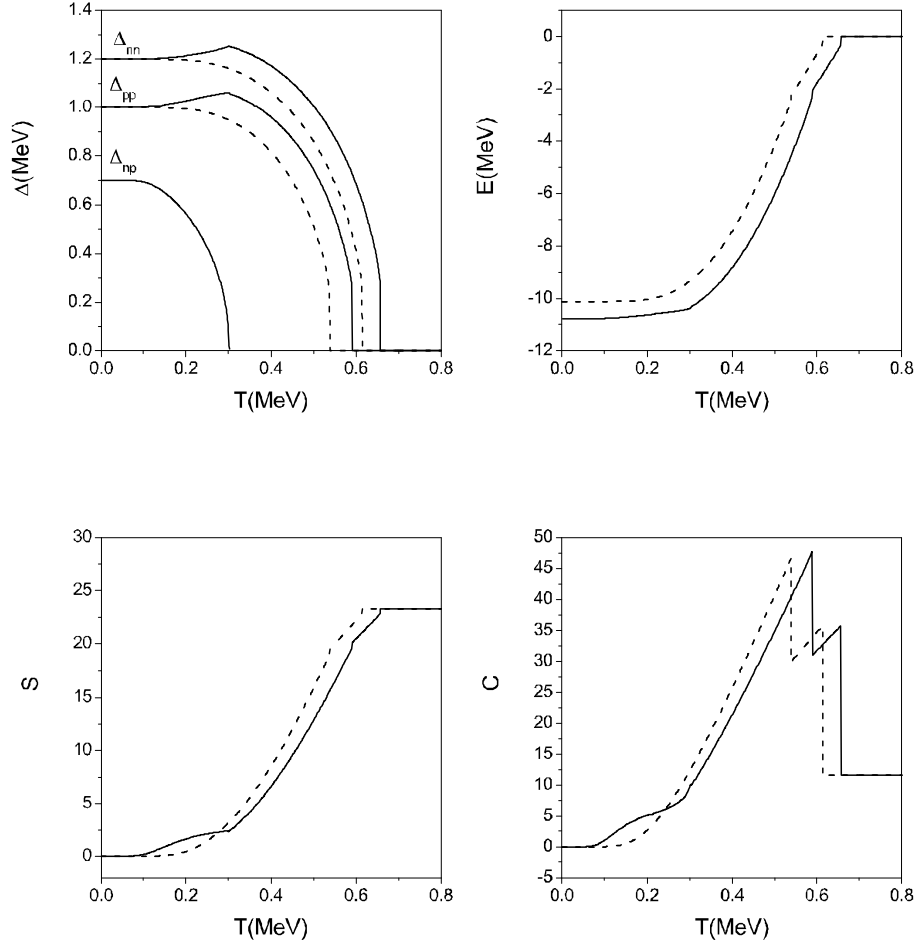


FIG. 4-4 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température dans le cadre du modèle à un niveau, pour $\Delta_{np}(0) = 0.7 \text{ MeV}$. Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

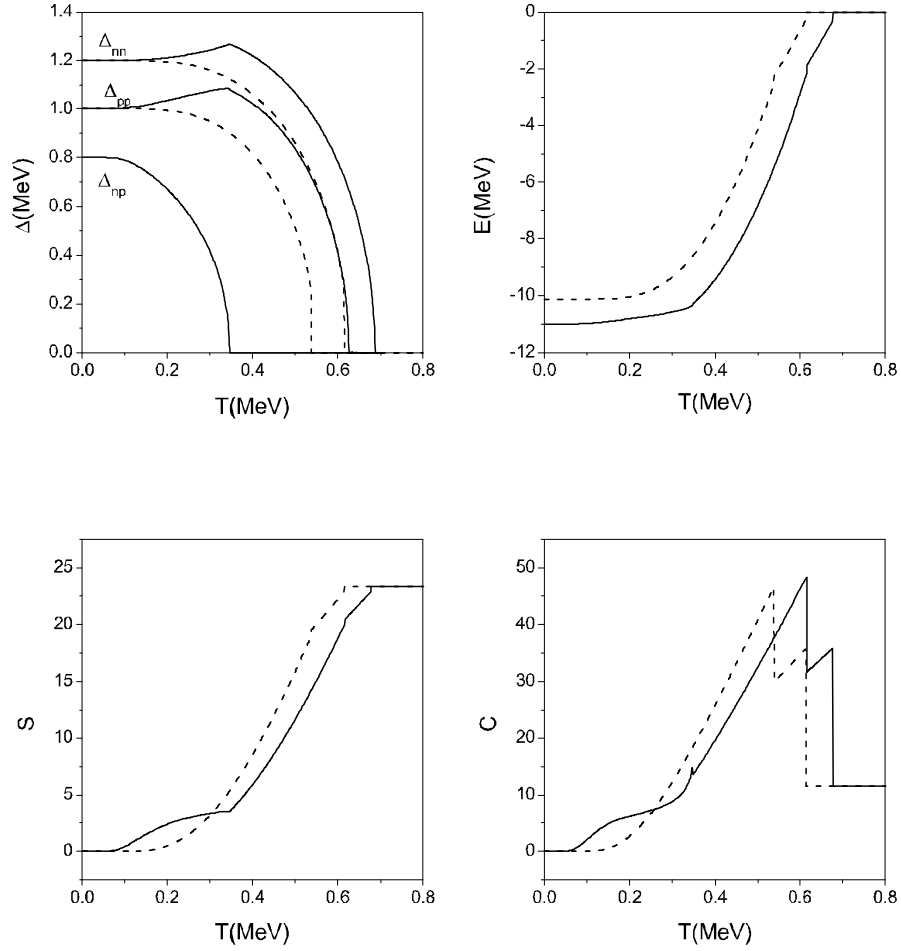


FIG. 4-5 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température dans le cadre du modèle à un niveau, pour $\Delta_{np}(0) = 0.8 \text{ MeV}$. Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

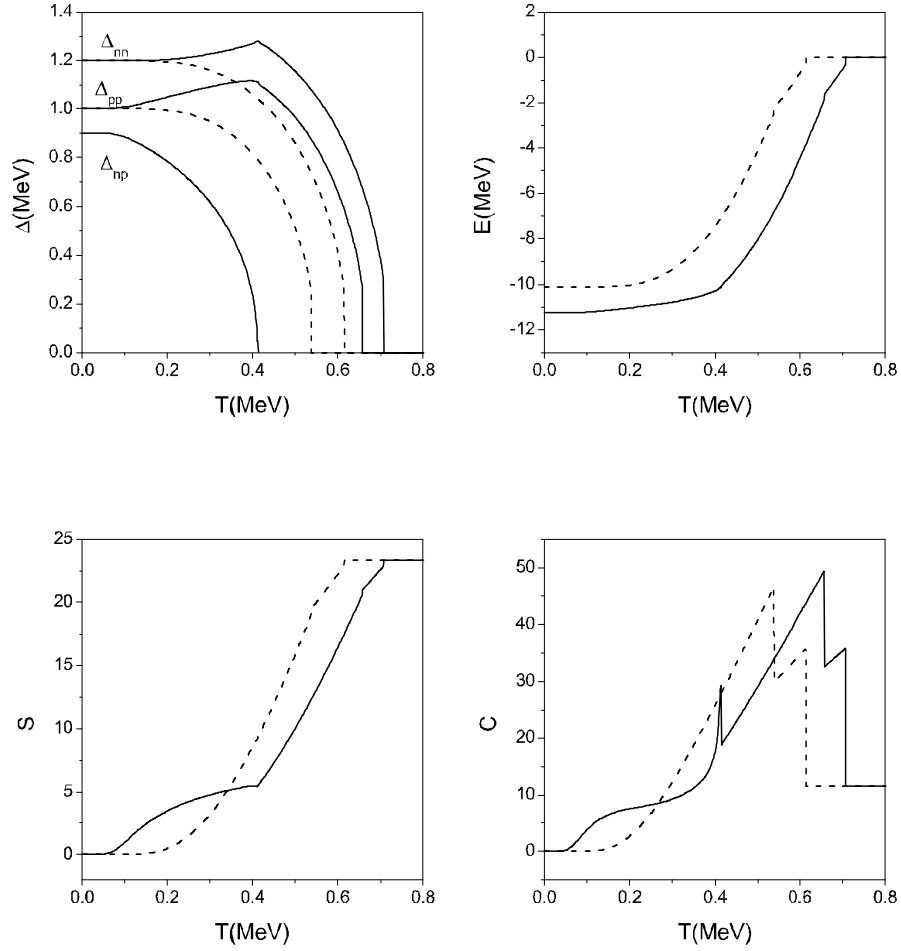


FIG. 4-6 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température dans le cadre du modèle à un niveau, pour $\Delta_{np}(0) = 0.9 \text{ MeV}$. Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

porté sur ces mêmes figures les variations de leurs homologues évalués dans le cadre de la théorie FTBCS habituelle.

Comme cela a déjà été mentionné dans la référence [99], le paramètre Δ_{np} a un comportement similaire aux comportements des paramètres Δ_{nn} et Δ_{pp} pour lesquels l'appariement np n'a pas été pris en considération (cas FTBCS) [30], [33], [35], [38], [41]. La fonction $\Delta_{np}(T)$ est quasiment constante sur un certain intervalle, puis décroît très rapidement jusqu'à s'annuler pour une valeur critique de la température que nous notons par T_{cnp} dans toute la suite de cette discussion.

En ce qui concerne Δ_{pp} et Δ_{nn} , leur comportement est différent de celui de leurs homologues de la théorie FTBCS. En effet elles présentent toutes les deux un plateau qui correspond à celui de Δ_{np} . Ces fonctions augmentent ensuite jusqu'à la température $T = T_{cnp}$ puis chutent rapidement jusqu'à $T = T_{cp}$ et $T = T_{cn}$ respectivement. Ces températures critiques sont plus grandes que les T_{cp} et T_{cn} de la méthode FTBCS. Malgré le fait que les équations du gap se réduisent à celles de l'appariement entre particules identiques (voir (2.65) et (2.66)), les intensités des forces d'appariement sont différentes. C'est la raison pour laquelle les valeurs de Δ_{nn} et Δ_{pp} tout comme celles de T_{cn} et T_{cp} sont différentes lorsque $T > T_{cnp}$. Nous constatons de plus que les valeurs des trois températures critiques augmentent avec la valeur de $\Delta_{np}(0)$.

Notons par ailleurs que les variations des $\Delta(T)$ du cas présent sont différentes de celles de la Ref. [97] et de la figure 4-4 dans lesquelles la valeur de $\Delta_{np}(0)$ est plus grande que celles de $\Delta_{pp}(0)$ et $\Delta_{nn}(0)$. Dans le présent travail, la situation inverse a été choisie, soit : $\Delta_{np}(0) < \Delta_{pp}(0) < \Delta_{nn}(0)$. En effet, cette situation est plus conforme aux cas réalistes (voir à ce sujet les valeurs empiriques des paramètres du gap dans la Ref. [4] et les références citées).

Energie du système

Les variations de l'énergie totale du système E donnée par l'éq. (3.45), en fonction de la température sont présentées dans les Figs. 4-3 à 4-6. Les valeurs de la même observable évaluée en l'absence de l'appariement np, sont également portées sur les mêmes figures pour comparaison.

On note dans chaque cas, une discontinuité à $T = T_{cnp}$, $T = T_{cp}$ et $T = T_{cn}$. En outre, comme cela était prévisible, l'inclusion des corrélations d'appariement np attractives, entraîne

une diminution de l'énergie. L'écart relatif entre les valeurs lorsqu'on prend en compte les effets np et celles de la méthode FTBCS, est une fonction croissante de $\Delta_{np}(0)$ (à $T = 0$). Il varie de 4% quand $\Delta_{np}(0) = 0.6 \text{ MeV}$ jusqu'à 11% quand $\Delta_{np}(0) = 0.9 \text{ MeV}$.

Quand $T_{cnp} < T < T_{cn}$, le comportement global des deux courbes est similaire, mais l'écart entre elles persiste. Il peut être attribué, dans ce cas aussi, aux valeurs des intensités des forces d'appariement. Quand $T > T_{cn}$, les deux courbes se rejoignent puisque les effets de l'appariement sont nuls.

Entropie

Les variations de l'entropie S du système définie par l'éq. (3.51), en fonction de la température, sont portées sur les Figs. 4-3 to 4-6. Les courbes de leurs homologues de la méthode FTBCS sont également tracées sur ces mêmes figures. Là également, on observe une discontinuité à $T = T_{cnp}$, $T = T_{cp}$ et $T = T_{cn}$.

Nous remarquons également que, tant que Δ_{np} , Δ_{pp} et Δ_{nn} restent constants, l'entropie est nulle. Dans la région dans laquelle Δ_{np} décroît jusqu'à $T = T_{cnp}$, S augmente mais de manière différente de celle de la méthode FTBCS : les concavités des deux courbes sont en effet opposées.

De plus, comme pour le cas de l'énergie, l'écart entre les courbes de la méthode np et celui de la méthode FTBCS est une fonction croissante de $\Delta_{np}(0)$.

Lorsque $T_{cnp} < T < T_{cn}$, les deux courbes présentent un comportement similaire : l'effet d'appariement np se traduit par une translation des valeurs de T_{cp} et de T_{cn} . Comme pour l'énergie et pour les mêmes raisons, les deux courbes se rejoignent dès que $T > T_{cn}$.

Capacité calorifique Les variations de la capacité calorifique C du système définie par l'éq. (3.53), en fonction de la température, sont présentées dans les Figs. 4-3 à 4-6. Le comportement de son homologue de la méthode FTBCS est également présenté sur les mêmes figures et ce pour une étude comparative. Comme pour les grandeurs statistiques précédentes, on observe les mêmes discontinuités aux mêmes valeurs des températures critiques. Dans ce cas, les positions des températures critiques pour la capacité calorifique sont plus nettes que dans les cas de l'énergie ou de l'entropie.

Comme pour l'entropie, la capacité calorifique est nulle ($C = 0$) dans la région où la demi-largeur du gap $\Delta_{np}(T)$ est quasiment constante. Quand Δ_{np} décroît, et ce jusqu'à $T = T_{cnp}$, la capacité C augmente de manière monotone comme dans le cas de l'appariement entre particules identiques. L'écart entre les valeurs tenant compte des effets np et celles de la méthode FTBCS croît lorsque $\Delta_{np}(0)$ augmente. Le pic que l'on observe à $T = T_{cnp}$ augmente en fonction de $\Delta_{np}(0)$.

Comme pour les autres grandeurs statistiques, les effets des corrélations np sur C , dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$, sont dûs essentiellement au décalage des valeurs T_{cp} et T_{cn} par rapport à celles de la méthode FTBCS. Finalement les deux courbes se confondent pour $T > T_{cnp}$ puisqu'on a affaire à un gaz de Fermi.

4.2 Cas réalistes

Les grandeurs statistiques calculées dans le chapitre 3, à savoir l'énergie d'excitation du noyau, l'entropie et la chaleur spécifique ont été numériquement étudiées en utilisant les énergies du champ de Woods-Saxon. C'est un champ réaliste qui a été déduit d'une distribution de densité nucléaire de type Fermi à symétrie axiale [104]. La déformation est caractérisée par les paramètres d'élongation c et d'étranglement h du noyau [105]. Ces derniers peuvent être reliés par des relations non linéaires aux paramètres habituels β_2 et β_4 de Bohr-Mottelson ou aux paramètres ε_2 et ε_4 de Nilsson [106] par les conditions habituelles de conservation du volume nucléaire et du rapport des fréquences.

Pour assurer une stabilité des calculs, nous avons inclus tous les niveaux du champ moyen à particules indépendantes correspondant un nombre maximal de couches $N_{max} = 12$. Nous avons également supposé que les énergies de ces niveaux sont indépendantes de la température [98].

Nous nous sommes restreints dans le présent travail aux noyaux pair-pairs tels que $N=Z$ et pour lesquels les valeurs des paramètres du gap peuvent être déduites des valeurs des masses expérimentales. Ces paramètres ont été calculés à partir des différences de masses paire-impaires

[4] :

$$\begin{aligned}
\Delta_{pp}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) - 4M(Z-2, N)] \\
\Delta_{nn}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z, N+2) - 4M(Z, N+1) + 6M(Z, N) - 4M(Z, N-1) - 4M(Z, N-2)] \\
\Delta_{np}^{\text{exp}} &= \frac{1}{4} \left\{ 2[M(Z, N+1) + M(Z, N-1) + M(Z-1, N) + M(Z+1, N)] - 4M(Z, N) \right. \\
&\quad \left. - [M(Z+1, N+1) + M(Z-1, N+1) + M(Z-1, N-1) + M(Z+1, N-1)] \right\}
\end{aligned}$$

où $M(Z, N)$ est la valeur de la masse expérimentale de la table de Möller [69].

Les valeurs des constantes d'appariement $G_{tt'}$, $t, t' = n, p$ ont été déduites directement des valeurs des $\Delta_{tt'}^{\text{exp}}$ à température nulle.

Les paramètres de déformation de l'état fondamental des noyaux étudiés ont aussi été pris de la table de Möller .

Les quatre noyaux suivants ^{36}Ar , ^{48}Cr , ^{52}Fe et ^{64}Ge ont été choisis à titre d'exemple. Les résultats correspondants sont montrés dans les figures 4-7 à 4-10 . Les principales remarques sont présentées ci-dessous.

4.2.1 Grandeurs statistiques

Les paramètres du gap

Le comportement général de la courbe $\Delta_{np}(T)$ est similaire à celui de son homologue du cas schématique (voir Figs. 4-7 à 4-10). Cependant la décroissance de cette fonction au voisinage de T_{cnp} est beaucoup plus rapide que dans le cas du modèle à un niveau. D'autre part, les fonctions $\Delta_{pp}(T)$ et $\Delta_{nn}(T)$ qui étaient pratiquement constantes pour $0 \leq T \leq T_{cnp}$ montrent une décroissance rapide dès que T est plus grand que T_{cnp} en présentant la même allure de décroissance que $\Delta_{np}(T)$.

De plus on constate, comme dans le cas schématique, que les valeurs critiques T_{cp} et T_{cn} sont nettement supérieures à leurs homologues de la méthode classique FTBCS .

Finalement quand $\Delta_{np} = 0$ on a un changement brusque qui correspond à la transition de phase . Comme dans le cas de l'appariement entre particules identiques ce changement soudain de phase [35], [107] pourrait être éventuellement amorti si l'on inclut les fluctuations

³⁶Ar

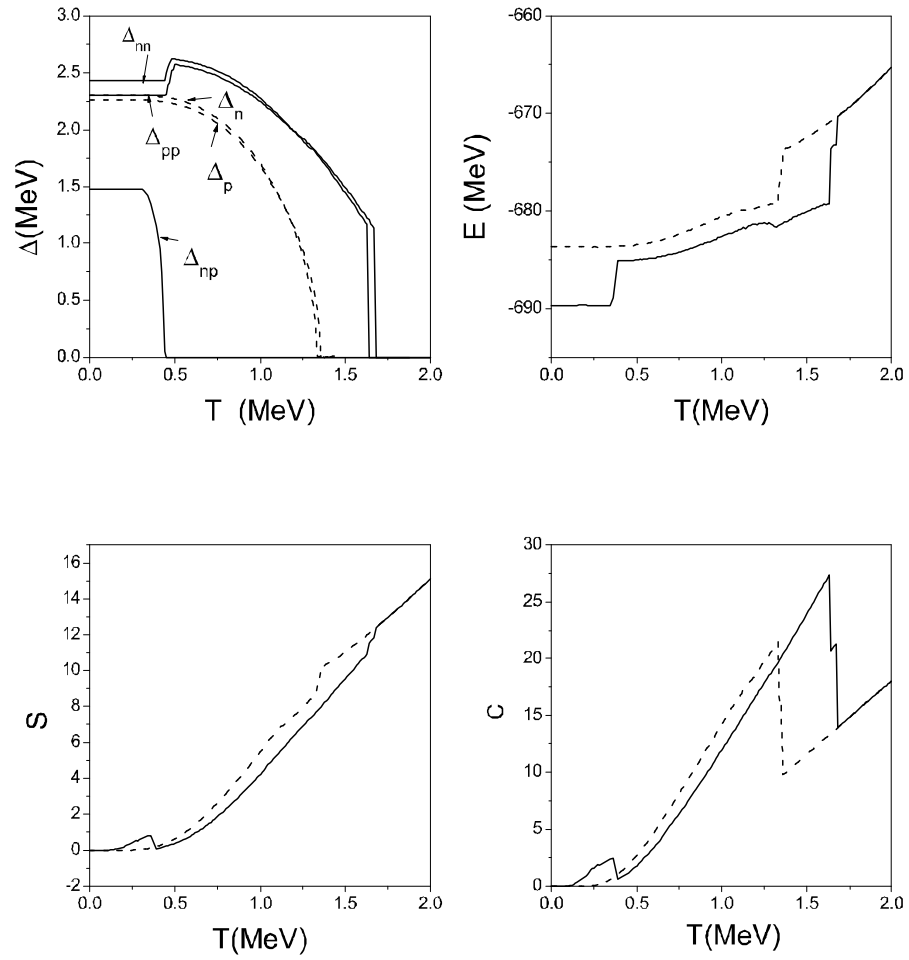


FIG. 4-7 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température pour le noyau ³⁶Ar. Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

^{48}Cr

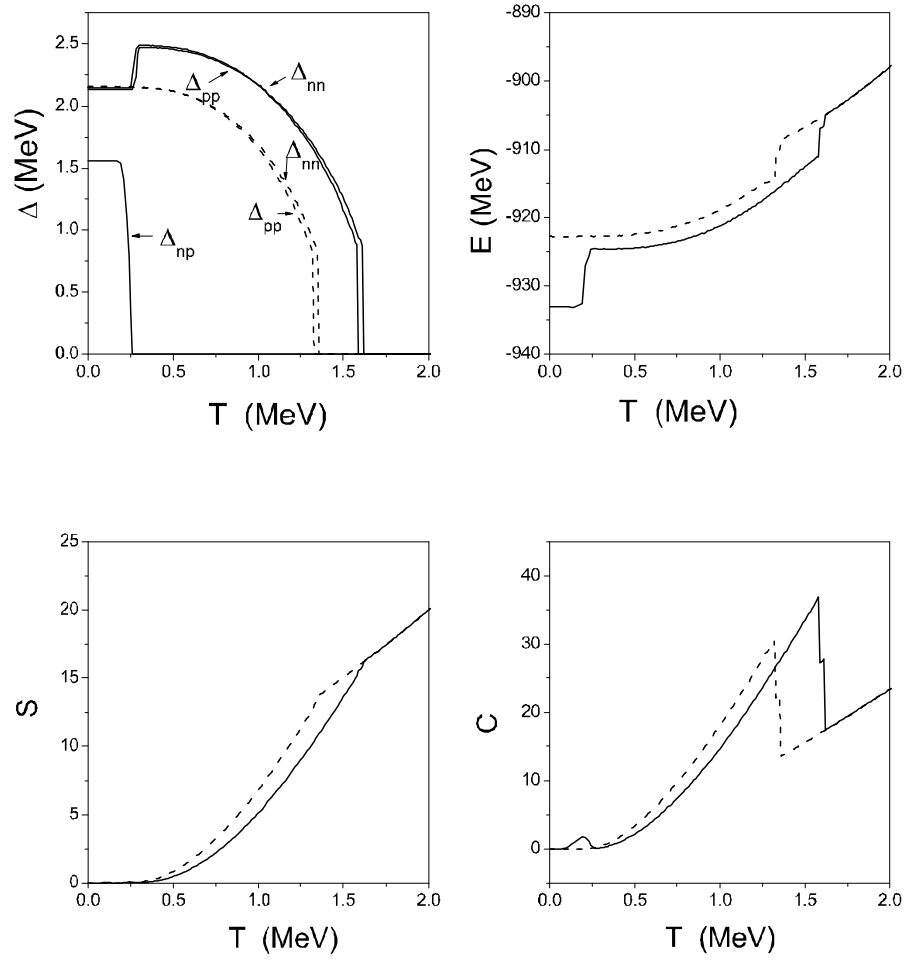


FIG. 4-8 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température pour le noyau ^{48}Cr . Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques. .

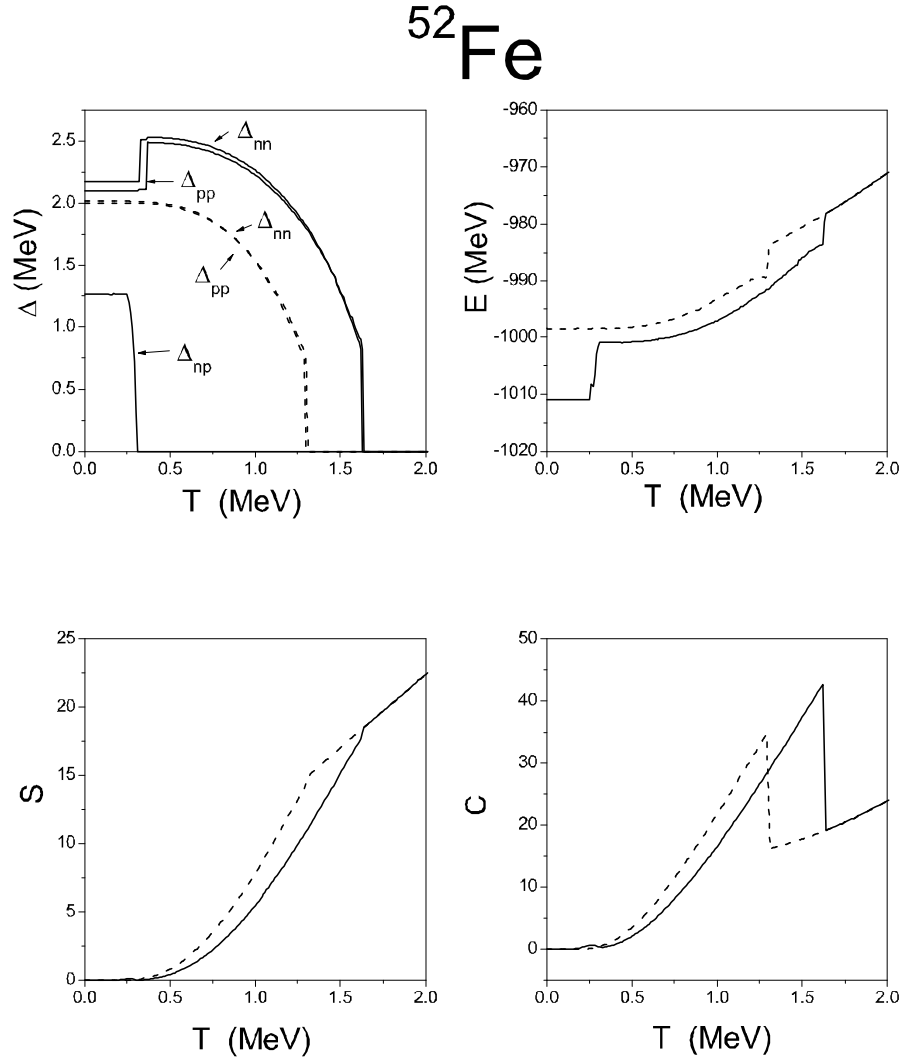


FIG. 4-9 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température pour le noyau ^{52}Fe . Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

^{64}Ge

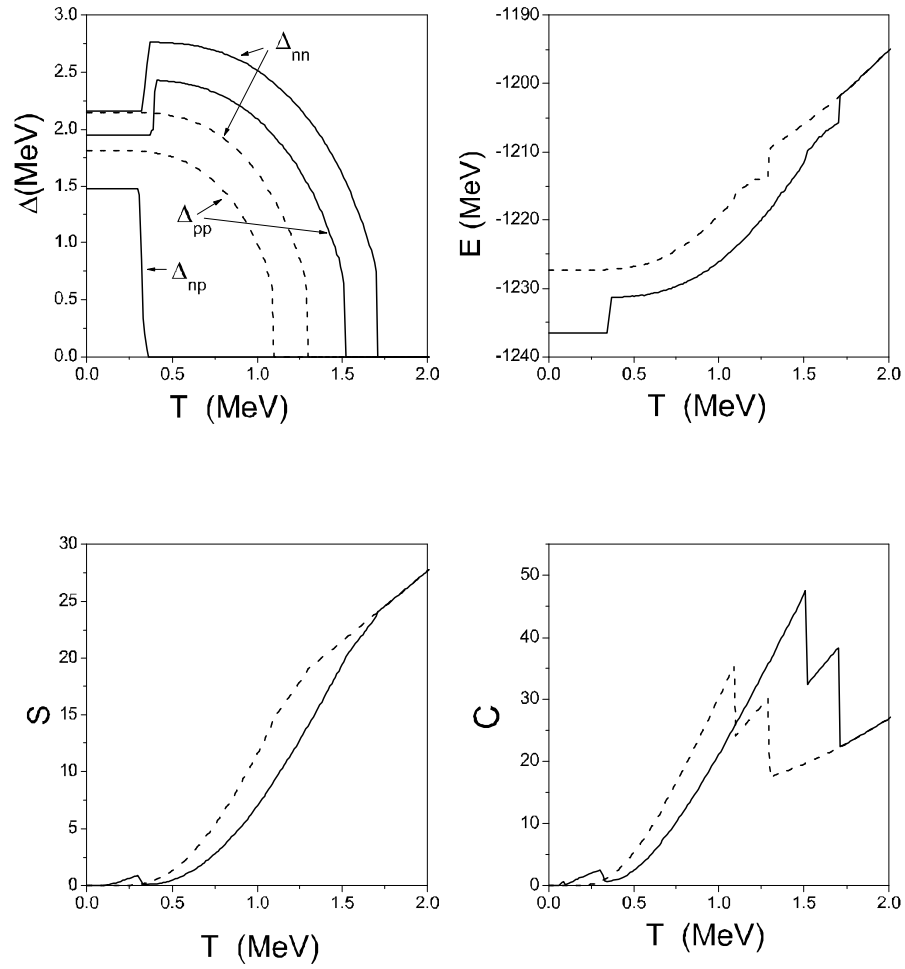


FIG. 4-10 – Variations des différents paramètres du gap, de l'énergie, de l'entropie et de la capacité calorifique du système en fonction de la température pour le noyau ^{64}Ge . Les lignes continues correspondent à l'appariement isovectoriel et les tirets à l'appariement entre particules identiques.

quantiques qui ont été négligées dans l'évaluation de la fonction partition à cause de l'utilisation de l'approximation statique. (voir Ref. [97]). Les fluctuations du nombre de particules, dues à la non conservation de ce dernier, pourraient également contribuer à adoucir ce changement brutal comme cela a déjà été souligné dans les Refs. [39], [44], [107].

Energie du système

Les figures 4-7 à 4-10 montrent que le comportement de l'énergie est différent de celui de la méthode FTBCS. En effet E est quasiment constante pour $T < T_{cnp}$ et croît très rapidement dès que $T = T_{cnp}$, ce qui correspond à des valeurs nulles du paramètre Δ_{np} . On note également que l'effet d'appariement np diminue l'énergie, comparée à celle obtenue par la méthode FTBCS. Les températures critiques T_{cp} et T_{cn} sont elles aussi légèrement supérieures à celles de la même méthode en plus de l'écart dû au décalage des valeurs de T_{cp} et T_{cn} . Dans tous les noyaux étudiés, l'accroissement de l'énergie est plus important pour $T = T_{cnp}$ que pour $T = T_{cp}$ ou $T = T_{cn}$.

L'effet de l'appariement np semble plus visible dans les cas réalistes que dans le cas schématique. En effet, la discontinuité à $T = T_{cnp}$ est beaucoup plus nette dans les Figs. 4-7 à 4-10. En moyenne, cette différence est de l'ordre de 10 MeV ce qui correspond à un écart relatif moyen de 1%.

Entropie

Les effets de l'appariement isovectoriel sur l'entropie sont différents d'un noyau à un autre comme on peut le constater sur les Figs 4-7 à 4-10. Cependant dans chaque cas l'écart entre les courbes de l'appariement np et celles de la méthode FTBCS, dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$, est dû au décalage des valeurs de T_{cp} et T_{cn} comme nous l'avons déjà mentionné dans le cas de l'énergie.

Dans la région $0 \leq T \leq T_{cnp}$, la différence entre les deux modèles n'apparaît que si la valeur de T_{cnp} (et donc celle de $\Delta_{np}(0)$) est assez importante, comme dans le cas des noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge .

Pour les noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe , et dans la région dans laquelle l'effet np est effectif, l'entropie est nulle et les deux modèles ne présentent aucune différence. Notons dans ce cas, que

les courbes du présent modèle présentent un comportement similaire à celles déjà obtenues par Z. Kargar [107] pour les noyaux ^{96}Mo et ^{97}Mo . Ces dernières ont été obtenues en extrayant d'abord les capacités calorifiques à partir des densités de niveaux expérimentales pour en déduire par la suite l'entropie.

En résumé l'entropie des noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge présente un comportement similaire à celui des figures 4-5 et 4-6, alors que celle des noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe se comporte comme l'entropie de la figure. 4-3 du modèle schématique.

Capacité calorifique

Comme dans le cas schématique, la différence entre les courbes du présent modèle et celles de la méthode FTBCS, dans la région $T_{cnp} < T < T_{cn}$, est plus visible dans le cas de la capacité calorifique que sur les autres grandeurs statistiques.

Comme dans le cas de l'entropie, l'effet de l'appariement isovectoriel sur la capacité calorifique dans la région $0 \leq T \leq T_{cnp}$ semble dépendre de la valeur de T_{cnp} et par conséquent de la valeur de $\Delta_{np}(0)$. En effet, l'effet de l'appariement np n'est perceptible dans cette région que pour les noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge . Pour les noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe , la capacité calorifique est encore nulle dans les deux modèles (la présente méthode et celle relative à la méthode FTBCS) quand T atteint sa valeur critique T_{cnp} .

Dans ce cas également, les noyaux ^{36}Ar et ^{64}Ge sont dans une situation similaire à celles présentées dans les figures 4-5 et 4-6, tandis que les noyaux ^{48}Cr et ^{52}Fe sont plutôt dans une situation similaire à celle de la figure 4-3 du cas schématique.

Finalement, dans le cas de la capacité calorifique également, la transition de phase brusque pourrait être atténuée par la prise en compte des fluctuations quantiques dans l'expression de la fonction de répartition [35], [107] ou en effectuant une projection dans l'espace nombre d'occupation [39], [44], [107]

Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail l'influence des corrélations d'appariement du type isovectoriel (cas $\tau = 1$ dans le langage de l'isospin) sur les grandeurs statistiques habituelles qui sont l'énergie, l'entropie et la capacité calorifique des systèmes pour lesquels le nombre de neutrons est voisin de celui des protons ($N \simeq Z$).

Nous avons, dans un premier chapitre, rappelé les équations du gap de la théorie BCS habituelle à température finie (méthode FTBCS) par le formalisme de l'intégrale de chemin. Dans le second chapitre, nous avons établi celles relatives à la prise en compte de l'appariement isovectoriel, par le même formalisme. Nous avons commencé, dans chacun des deux chapitres, par transformer dans l'ensemble grand canonique, la fonction partition du système de particules (neutron ou/et proton) en interaction, via l'appariement, en une fonction de partition d'un système de particules en interaction avec un champ extérieur. Cette fonction se présente sous forme d'une intégrale fonctionnelle dans laquelle l'intégration porte sur un ensemble de chemins complexes dépendants d'un temps imaginaire, qui est dans le cas de la présente étude l'inverse de la température. L'évaluation de cette dernière étant compliquée, les calculs ont été explicités puis poursuivis en se plaçant dans le cadre de l'approximation statique, qui ne prend en considération que le chemin statique. Après la diagonalisation de l'hamiltonien des particules en interaction avec le champ extérieur, dont les valeurs et les vecteurs propres correspondent respectivement aux énergies de quasi-particules et à la représentation de Bogoliubov-Valatin, la fonction de partition a été explicitée et écrite sous forme d'une intégrale ordinaire. Celle-ci a été ensuite évaluée approximativement par la méthode du col, ce qui a permis d'explicitier une partie des équations du gap ainsi que le grand potentiel du système. Le reste des équations provient de l'évaluation du nombre moyen de particules. Il a été, enfin, vérifié que ces équations généralisent

bien celles de la méthode FTBCS puis celles de la théorie BCS à température nulle.

Dans le troisième chapitre, les grandeurs statistiques habituelles du système, qui sont l'énergie, l'entropie et la capacité calorifique, ont été déduites à partir du grand potentiel qui a été évalué au point de selle. Dans ce cas également, il a été vérifié que les expressions obtenues généralisent bien celles de leurs homologues de la théorie FTBCS puis celles de la méthode BCS à température nulle.

Sur le plan numérique, les équations du gap ont été résolues dans un premier temps dans le cadre du modèle à un niveau. Dans une première phase, nous avons considéré des valeurs du paramètre du gap $\Delta_{np}(0)$ (à température nulle) supérieures aux valeurs des paramètres $\Delta_{nn}(0)$ et $\Delta_{pp}(0)$. Il a été constaté que l'évolution de chaque paramètre : Δ_{np} , Δ_{nn} et Δ_{pp} , en fonction de la température, est semblable à celle du paramètre homologue de la théorie FTBCS. Toutefois, ces valeurs de $\Delta_{np}(0)$ sont beaucoup plus grandes que celles des cas réalistes. C'est pour cela que nous avons, dans une seconde phase, utilisé des valeurs des trois paramètres modélisant mieux les cas réalistes. On constate alors un changement d'allure de Δ_{nn} et Δ_{pp} à partir de $T = T_{cnp}$ (valeur critique de la température). De plus, les valeurs des températures critiques dans le cas de l'appariement np sont différentes de celles en l'absence de cet effet. D'autre part, il apparaît que l'influence de l'appariement np persiste même au delà de T_{cnp} .

Les grandeurs thermodynamiques ont ensuite été étudiées numériquement en fonction de la température. Il a été montré que l'effet np sur ces grandeurs est non négligeable. En outre les positions des températures critiques sont nettement mises en évidence dans les graphes de l'énergie, de l'entropie et surtout dans celui de la capacité calorifique dont l'expression est proportionnelle à la dérivée de l'entropie.

Nous avons considéré, dans une dernière partie, et à titre d'exemple, les grandeurs statistiques de quatre noyaux pair-pairs tels que $N = Z$ pour lesquels les valeurs expérimentales des paramètres du gap à température nulle sont connues. Il s'agit de l'argon ^{36}Ar , du chrome ^{48}Cr , du fer ^{52}Fe et du germanium ^{64}Ge . L'évolution de ces grandeurs, ainsi que celle des paramètres d'appariement, en fonction de la température, est globalement similaire à celle du cas schématique. L'évolution des graphes de ces observables met nettement en évidence l'influence et l'importance de l'effet d'appariement isovectoriel. Les températures critiques dans ce cas, sont généralement supérieures à celles de la théorie FTBCS et l'influence de ce type d'interaction

persiste même au-delà de la température critique correspondante.

Nos calculs ont mis en évidence l'importance de l'effet de ce type d'appariement et la nécessité d'en tenir compte dans toute évaluation d'observables des noyaux riches en protons.

Signalons enfin que, tout au long de nos calculs analytiques dans les chapitres deux et trois, plusieurs approximations ont été faites et sans lesquelles les prévisions concernant les grandeurs calculées seraient de meilleure qualité. Il s'agit de la non commutativité de certains opérateurs, que nous avons supposé commuter, pour pouvoir utiliser la transformation de Hubbard-Stratonovitch. Seule la contribution du chemin statique ou chemin classique à l'intégrale fonctionnelle représentant la fonction partition, a été considérée pour le calcul du grand potentiel ; les contributions des chemins voisins, appelées fluctuations quantiques, peuvent être tout aussi importantes. De plus, il faut aussi analyser l'importance des fluctuations thermiques induites par la conservation en moyenne du nombre de particules et de l'énergie en évaluant leur variance pour chaque noyau étudié.

Bibliographie

- [1] A. Goodman, *Adv. Nucl. Phys.* **11** (1979) 263.
- [2] O. Civitarese and M. Reboiro, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 1179.
- [3] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 1840.
- [4] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Pacearescu and A. Faessler, *Phys. Rev.* **C68** (2003) 054319.
- [5] J. Engel, S. Pittel, M. Stoitsov, P. Vogel and J. Dukelsky, *Phys. Rev.* **C55**(1997) 1781.
- [6] A. L. Goodman, *Phys. Rev.* **C60** (1999) 014311.
- [7] D. Mokhtari, N.H. Allal and M. Fellah, *Acta Phys. Hung. A : Heavy Ion Phys.* **19**(2004)187.
- [8] G. Pantis, F. Simkovic, J.D. Vergados and A. Faessler, *Phys. Rev.* **C53** (1996) 695.
- [9] J. Dobes and S. Pittel, *Phys. Rev.* **C57** (1998) 688.
- [10] O. Civitarese, F. Montani and M. Reboiro, *Phys. Rev.* **C60** (1999) 024305.
- [11] A. Bobyk, W.A. Kaminski and P. Zareba, *Eur. Phys. J.* **A5** (1999) 385.
- [12] S. G. Frauendorf and J. A. Sheikh, *Nucl. Phys.* **A645** (1999) 509.
- [13] D. S. Delion, J. Dukelsky, P. Schuck, E. J. V. de Passos and F. Krmpotic, *Phys. Rev.* **C62** (2000) 044311.
- [14] A. A. Raduta, L. Pacearescu, V. Baran, P. Sarriguren, and E. Moya de Guerra. *Nucl. Phys.* **A675** (2000) 503.
- [15] P. Sarriguren, E. Moya de Guerra and R. Alvarez-Rodriguez, *Nucl. Phys.* **A716** (2003) 230.

- [16] N. Paar, T. Niksic, D. Vretenar and P. Ring, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 054303.
- [17] W. Satula and R. Wyss, *Nucl. Phys.* **A676** (2000) 120.
- [18] M. Kyotoku and H.T. Chen, *Phys. Rev.* **C36** (1987) 1144.
- [19] R.R. Chasman, *Phys. Lett.* **B524** (2002) 81.
- [20] E. Perlinska, S.G. Rohozinski, J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, *Phys. Rev.* **C69** (2004) 014316.
- [21] Y. Sun, *Eur. Phys. J.* **A20** (2004) 133.
- [22] K. Kaneko and M. Hasegawa, *Phys. Rev.* **C72** (2005) 031302(R).
- [23] N.H. Allal, M. Fellah, M.R. Oudih and N. Benhamouda, *Eur. Phys. J.* **A27**, s01 (2006) 301.
- [24] D. Mokhtari, I. Ami, M. Fellah and N.H. Allal, *Int. J. Mod. Phys. E* **17** (2008)655.
- [25] S. Kerrouchi, D. Mokhtari, N.H. Allal and M. Fellah, *Int. J. Mod. Phys. E* **18** (2009) 141.
- [26] S. Kerrouchi, N.H. Allal, M. Fellah and M. Douici, *Int. J. Mod. Phys. E* **19** (2010)1383.
- [27] N. Sandulescu, B. Errea and J. Dukelsky, arXiv :0903.4117v1.
- [28] A. A. Raduta and E. Moya de Guerra, *Ann. Phys.-New-York* **284** (2000) 134.
- [29] M. Sano and S. Yamazaki, *Prog. Theor. Phys.* **29** (1963) 397.
- [30] L.G. Moretto, *Nucl. Phys.* **A185** (1972) 145.
- [31] A. Goodman, *Nucl. Phys.* **A352** (1981) 30.
- [32] F. Alasia, O. Civitarese and M. Reboiro, *Phys. Rev.* **C35**(1987) 812.
- [33] C. Esebbag and J.L. Egido, *Nucl. Phys.* **A552** (1993) 205.
- [34] R. Rossignoli, N. Canosa and P. Ring, *Nucl. Phys.* **A591** (1995) 15.
- [35] R. Rossignoli, N. Canosa and J.L. Egido, *Nucl. Phys.* **A605** (1996) 1.
- [36] N. Sandulescu, O. Civitarese and R.J. Liotta, *Phys. Rev.* **C61** (2000) 044317.
- [37] D.J. Dean and M. Hjorth-Jensen, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 607.
- [38] H. Nakada and K. Tanabe, *Phys. Rev.* **C74** (2006) 061301(R).
- [39] N.Dinh Dang, *Phys. Rev.* **C76** (2007) 064320.

- [40] N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R.Oudih, *Phys. Rev.* **C77**(2008) 054310.
- [41] V. Yu. Ponomarev and A.I. Vdovin, *Nucl. Phys.* **A824** (2009) 24.
- [42] G. Fletcher, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 50.
- [43] G. Puddu, *Phys. Rev.* **B45** (1992) 9882.
- [44] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C47** (1993) 1067.
- [45] M. Marinus, H.G. Miller, R.M. Quick, F. Solms and D.M. van der Walt, *Phys. Rev.* **C48** (1993) 1713.
- [46] N. Canosa and R. Rossignoli, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 791.
- [47] N. Canosa, R. Rossignoli and P. Ring, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 185.
- [48] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C44** (1991)905.
- [49] G. Puddu, P.F. Bortignon and R.A. Broglia, *Ann. Phys.* **206** (1991) 409.
- [50] R.Rossignoli, *Phys.Rev.* **C54**(1996)1230.
- [51] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 2500.
- [52] T. Sumaryada and A. Volya, *Phys. Rev.* **C76** (2007) 024319.
- [53] K. Langanke, D.J. Dean, S.E. Koonin and P.B. Radha, *Nucl. Phys.* **A613** (1997) 253.
- [54] K. Langanke, P. Vogel and Dao-Chen Zhen, *Nucl. Phys.* **A626** (1997) 735.
- [55] S.E. Koonin, D.J. Dean and K. Langanke, *Phys. Rep.* **278** (1997) 1.
- [56] G. Martinez-Pinedo, K. Langanke and P. Vogel, *Nucl. Phys.* **A 651** (1999) 379.
- [57] J.A. Sheikh, R. Palit and S. Frauendorf, *Phys. Rev. C* **72** (2005) 041301(R).
- [58] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1975)1175.
- [59] S.T. Belyaev, K. Dan. Selsk, *Mat. Fys. Medd.* **11**(1959)31.
- [60] L. G. Moretto, *Nucl. Phys.* **A182** (1972)641.
- [61] L. G. Moretto, *Phys. Lett.* **B40** (1972)1.
- [62] O. Civitarese, G. G. Dusseland R. P. J. Perazzo, *Nucl. Phys.* **A404** (1983) 15.
- [63] A.L. Goodman, *Phys. Rev.* **C29** (1984)1887.
- [64] N. Dinh Dang, *Z. Phys. Lett.* **A335** (1990)253.

- [65] N. Dinh Dang, P. Ring and R. Rossignoli, Phys. Rev. **C47**(1993)606.
- [66] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Course of Theoretical Physics", **Vol. 5** : Statistical Physics, (Nauka, Moscow, 1964), pp. 297, 308.
- [67] F. Solms, N. J. Davidson, H. G. Miller, R.M. Quick and H.L. Gaigher, Phys. Lett. **A170** (1992)137.
- [68] J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959) 77 ; R.L. Stratonovich, *Sov. Phys. Dokl.* **2** (1958) 416.
- [69] P. Möller and J.R. Nix, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **59** (1995) 185.
- [70] F. Boudali, Mémoire de Magister, (U.S.T.H.B 2008).
- [71] F. Douici, Mémoire de Magister, (U.S.T.H.B 2008).
- [72] F. Kerrouchi, Thèse de Doctorat, (U.S.T.H.B 2010).
- [73] D. Mokhtari, Thèse de Doctorat, (U.S.T.H.B 2010).
- [74] L.Ait Gougami, Thèse de Magister, (U.S.T.H.B 1998).
- [75] R.P.Feynmann and A.R.Hibbs, "*Quantum Mechanics and Path Integrals*", **Ch. 10** (McGraw-Hill, NY, 1965).
- [76] P.Ring and P.Schuck, "*The Nuclear Many-Body Problem*", (Springer, Berlin, 1980).
- [77] N. Dinh Dang, and N. Quang Hung, Phys. Rev. **C77**(2008)064315 ; N. Q. Hung and N. Dinh Dang, Phys. Rev. **C78**(2008)064315.
- [78] A. Sedrakina and U. Lombardo, Phys. Rev. Lett. **84**(2000)602.
- [79] A. Goswami, Nucl. Phys. **60**(1964)228.
- [80] H.T. Chen and A. Goswami, Phys. Lett. **B42**(1967)257.
- [81] P. Camiz, A. Covello and M. Jean, Nuovo Cimento **A42**(1966)199.
- [82] A. L. Goodman, G. L. Strube and A. Goswami, Phys. Lett. **B26**(1968)260.
- [83] A.L. Goodman, G. L.Strube, J.Bar-Touv and A. Goswami, Phys. Rev. **C2**(1970)3800.
- [84] H.H. Wolter, A. Faessler and P. U. Sauer, Phys. Lett. **B31**(1970)516.
- [85] A.L. Goodman, Nucl. Phys. **A186**(1972)475.
- [86] T.S. Sandhu, M.L. Rustgi and A.L. Goodman, Phys. Rev. **C12**(1975)1340.

- [87] T.S. Sandhu and M.L. Rustgi, *Phys. Rev.* **C14**(1976)675.
- [88] E. M. Muller, K. Muhlhans, K. Neegard and U. Mosel, *Nucl. Phys.* **A383**(1982)233.
- [89] A.L. Goodman, *Phys. Rev.* **C58**(1998)R3051
- [90] Y.V. Palchikov, J. Dobes and R.V. Jolos, *Phys. Rev.* **C63**(2001) 034320.
- [91] J. Engels, K. Langanke and P. Vogel, *Phys. Lett.* **B 389**(1996)211.
- [92] J. Engels, K. Langanke and P. Vogel, *Phys. Lett.* **B 429**(1998)215.
- [93] J. Dobes, *Phys. Lett. B* 413, 239 (1997) ; J. Dobes, S. Pittel, *Phys. Rev.* **C57**(1998)688.
- [94] G. Martinez-Pinedo, K. Langanke, P. Vogel, *Nucl. Phys.* **A 651**(1999)379.
- [95] W. Satula and R.A. Wyss, *Acta Phys. Pol.* **B 32**(2001)2441.
- [96] M. Fellah, Thèse de Doctorat Troisième Cycle, (Université d'Alger, 1969).
- [97] M. Fellah, N.H. Allal, M. Belabbas, M.R. Oudih and N. Benhamouda , *Phys. Rev.* **C76** (2007) 047306.
- [98] M. Brack and P. Quentin, *Nucl. Phys.* **A361** (1981) 35.
- [99] M. Belabbas, M. Fellah, N.H. Allal, N. Benhamouda, I. Ami and M.R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E19**(2010)1973.
- [100] M. Belabbas, I. Ami, N. Benhamouda, M. Fellah and N.H. Allal, European Nuclear Physics Conference, Bochum, Germany, March 2009.
- [101] I. Ami, M. Belabbas, N. Benhamouda, M. Fellah and N.H. Allal, European Nuclear Physics Conference, Bochum, Germany, March 2009.
- [102] J. Nocedal and S.J. Wright, "*Numerical Optimization*", (Springer, Berlin, 2006).
- [103] P. Vogel, *Czech. J. Phys.* **48**(1998)269.
- [104] H.C. Pauli, *Phys. Rep.* **7C**(1973)37.
- [105] N.H. Allal and M. Fellah, *Phys. Rev.* **C50** (1994) 1404.
- [106] S. G. Nilsson , C. F. Tsang, A. Sobiczewski, I. L. Lamm, P. Möller and B. Nilsson, *Nucl. Phys.* **A131**(1969)1.
- [107] Z. Kargar, *Phys. Rev.* **C75** (2007) 064319.