

N° d'ordre : **/2006-M/MT

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté par

BENSAFIA Saliha

pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques

Spécialité : Analyse

Option: Système dynamique

THÈME

Résolution exacte du problème de déformation
axisymétrique en compression axiale d'un cylindre
élastique multicouches superposées

Soutenu publiquement, le 30/06/2007 devant le jury composé de :

Mr. A. KESSI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. B. KEBLI	Maître de Conférences	E.N.P	Directeur de thèse.
Mr. A. BENMEZAI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. A. TOUZALINE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

*Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **B. Kebli**, pour avoir proposé et bien dirigé ce présent travail. Je le remercie spécialement pour sa disponibilité et aussi pour ses conseils avisés sur la façon de mener ce travail.*

*J'exprime, aussi toute ma gratitude et mes remerciements les plus vifs à Monsieur **A. Kessi**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements tout aussi vifs vont à Monsieur **R. Bebbouchi** Professeur à l'U.S.T.H.B. et Monsieur **A. Benmezai**, Maître de Conférences à l'U.S.H.B. et Monsieur **A. Touzaline** Maître de Conférences à l'U.S.H.B. qui ont accepté de faire partie de mon jury.*

J'adresse aussi des remerciements particuliers à tous mes professeurs qui ont participé à ma formation en poste graduation "Système Dynamique".

Mes remerciements vont également à toute l'équipe de département de mathématique de U.M.M⁽¹⁾ de Tizi-ouzou et à tous ceux qui ont contribué à mes premiers pas de formation. Je témoigne toute ma gratitude à tous les membres de ce département.

Une pensée particulière à mes parents et à mes frères, en particulier Yahia qui m'ont soutenu durant toutes ces années, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servi, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Dieu merci pour le courage et la patience que vous m'avez, particulièrement offert le long de la préparation de ce modeste travail.

⁽¹⁾Université Mouloud Mammeri.

Résolution exacte du problème de déformation axisymétrique en compression axiale d'un cylindre élastique multicouches superposées

Résumé

On donne la solution exacte du problème de déformation axisymétrique, en compression axiale d'un cylindre élastique formé de deux couches superposées. Ce dernier occupe une paroi rigide dont les contraintes de frottement sont négligées. En utilisant la méthode de transformation finie de Hankel du vecteur déplacement, on réduira le couplé de système des E D P (de Lamé) à un système d'équations différentielles ordinaires. Les solutions de ce système s'obtiennent alors explicitement. Les contraintes et les déplacements dans le cylindre élastique se calculent à l'aide de la transformation inverse de Hankel et la loi de Hooke. A titre d'application, on illustrera par quelques graphes la contrainte radiale le long de la surface latérale du cylindre.

Mots-clés : Résolution exacte, transformation de Hankel, cylindre élastique.

Table des matières

Liste des principales notations	1
Introduction générale	1
1 Fonction de Bessel et applications	3
1.1 Fonctions cylindriques	3
1.1.1 Equation d'Euler	8
1.1.2 Résolution de l'équation de Bessel	12
1.1.3 Propriétés des fonctions de Bessel	18
1.1.4 Les zéros des fonctions de Bessel	19
1.1.5 Orthogonalité des fonctions de Bessel	20
1.1.6 Développement d'une fonction en série de Bessel	23
1.1.7 Application aux problèmes de conduction thermique	28
1.2 Transformation de Hankel:	36
2 Notions sur l'élasticité linéaire	37
2.1 Rappels et définitions	38
2.1.1 Quelques rappels	38
2.1.2 Quelques définitions	38
2.2 Etablissement des équations d'équilibres	39
2.2.1 En coordonnées cartésiennes	39
2.2.2 En coordonnées cylindriques	48
2.3 Quelques méthodes de résolution	63
2.3.1 Principe de Trefftz	63
2.3.2 Demi-espace élastique (premier problème fondamental)	67
2.3.3 Demi-espace élastique (deuxième problème fondamental)	70

2.3.4	Application " Problème de Boussinesq"	73
3	Déformation axisymétrique en compression axiale d'un cylindre élastique multicouches superposées	79
3.1	Formulation du problème	79
3.1.1	Formulation mathématique du problème	81
3.1.2	Transformation intégrale du problème	83
3.2	Résolution du problème	95
3.3	Conclusions et perspectives	104
3.3.1	Conclusion (1)	117
3.3.2	Second problème: cas d'une fixation rigide de la base $z=0$	118
3.3.3	Conclusion (2)	127
3.3.4	Conclusion générale	127
3.3.5	Généralisation du problème de deux couches à un problème de N —couches	127
3.3.6	Formulation mathématique du problème	129
3.3.7	Perspectives	135
	Bibliographie	138

Liste des figures

1.1	L'allure de J_0	16
1.2	L'allure de J_1	17
1.3	L'allure de Y_0	17
1.4	L'allure de Y_1	18
1.5	L'allure V/v en fonction r/a	30
2.1	Etat initial et final	36
2.2	Parallélépipède	39
2.3	Sens positif des contraintes	40
2.4	(a) Contraintes, (b) Contrainte sur la face $dx dy$	41
2.5	Rotation autour de $O_1 \xi$	42
2.6	Élément cylindrique	48
2.7	Contrainte sur la surface $dr d\theta$	49
2.8	Contraintes cylindriques	51
2.9	Rotation de l'élément cylindrique autour de l'axe $O_1 \xi$	52
2.10	Bras	53
2.11	Rotation de l'élément cylindrique autour de $O_1 \eta$	54
2.12	Rotation de l'élément cylindrique autour de l'axe $O_1 \zeta$	55
2.13	"Problème de Boussinesq"	73
3.1	Cylindre double couches	78
3.2	Compression linéaire, $P(r) = C(R - r)$	108
3.3	Compression parabolique, $P(r) = C(R^2 - r^2)$	108
3.4	Compression linéaire, $P(r) = Cr$	109
3.5	Compression parabolique, $P(r) = C(r^2 + Rr)$	109
3.6	Fixation rigide de la base $z = 0$	116
3.7	Fixation rigide de la base et compression linéaire, $P(r) = C(R - r)$	118
3.8	Fixation rigide de la base, $P(r) = C(R^2 - r^2)$	118
3.9	Fixation rigide de la base et compression linéaire, $P(r) = Cr$	119
3.10	Fixation rigide de la base et Compression parabolique, $P(r) = C(r^2 + Rr)$	119
3.11	Problème de N couches	128
3.12	Cylindre élastique multicouches superposées en compression axiale "contacte imparfait".	134
3.13	Cylindre élastique multicouches coaxiales en compression radiale "contacte imparfait"	135

Liste des Tableaux

3.1	Contrainte de compression du 1er type "linaire", $h_* = h/4$	106
3.2	Contrainte de compression du 1er type "parabolique", $h_* = h/4$	107
3.3	Lesgraphes des déplacements w_1 et w_2 pour $P(r) = Cr$	108
3.4	Les graphes des déplacements w_1 et w_2 pour $P(r) = C(r^2 + R^2)$	109
3.5	Lesgraphes de la contrainter radiale σ_r le long de la surface latérale, $P(r) = C(R - r)$	112
3.6	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale, $P(r) = C(R^2 - r^2)$	113
3.7	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale, $P(r) = Cr$	114
3.8	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale, $P(r) = C(r^2 + Rr)$	115
3.9	Les graphes de la contrainte axiale σ_z pour les différentes P	116
3.10	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale, $P(r) = C(R - r)$	122
3.11	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale, $P(r) = C(R^2 - r^2)$	123
3.12	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale , $P(r) = Cr$	124
3.13	Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de lasurface latérale , $P(r) = 1/2(r^2 + Rr)$	125
3.14	Les graphes de la contrainte axiale σ_z	126

Introduction

La déformation des solides élastiques est un domaine de grande utilité pratique. Les problèmes posés dans divers domaines de l'engineering: génie mécanique, génie civil, métallurgie, ... sont formulés en des problèmes aux limites de système d'équations aux dérivées partielles, nécessitant un outil analytique de résolution.

Le développement de la théorie d'élasticité linéaire a un grand succès pendant ces dernières décennies. Parmi les approches analytiques de résolution, la méthode des potentiels Muskhelishvili [10], utilisant les fonctions analytiques et les transformations intégrales de Fourier, Hankel, Legendre, ... Sneddon [17] ont aussi un grand intérêt pour des géométries régulières du domaine élastique: demi-espace, cylindre, sphère, ... L'apport considérable de l'école française est lié à la résolution des problèmes dans des espaces fonctionnels, permettant l'étude de l'existence et l'unicité des solutions.

L'étude de la déformation des solides élastiques multicouches a connu ces dernières décennies un développement considérable. Ce qui a donné naissance à une nouvelle branche, à savoir, la mécanique des composites. Vu la complexité de la forme géométrique des domaines étudiés, les méthodes les plus utilisées sont les méthodes numériques des différences et des éléments finis. Cependant, l'approche analytique de résolution se limite à quelques problèmes fondamentaux des solides multicouches de Kelvin, Boussinesq, Cerutti: action des charges concentrées sur des espaces et des demi-espaces élastiques [19] et [20]. Le travail de B. I. Kogan [6] étudiait l'effet d'une charge uniforme dans un cas axisymétrique.

Dans le premier chapitre on donne la méthode de résolution de l'équation de Bessel, les propriétés des fonctions cylindriques, ainsi que leurs applications aux problèmes de conduction thermique.

Quelques notions sur la théorie d'élasticité linéaire, établissement des équations d'équilibre et la résolution du problème de Boussinesq, sont présentées dans le second chapitre. La formulation et la résolution du problème de déformation axisymétrique en compression axiale

d'un cylindre élastique multicouches superposées, résultats du travail, ont fait l'objet du dernier chapitre.

A titre illustratif, quelques graphes correspondants aux différentes charges et matériaux sont donnés, ainsi que des conclusions et des perspectives du travail.

Chapitre 1

Fonction de Bessel et applications

1.1 Fonctions cylindriques

Les fonctions cylindriques interviennent dans l'étude de divers problèmes physiques, principalement lors de la résolution des problèmes de conduction thermique, du potentiel et de la théorie de l'élasticité.

Définition 1.1. *On appelle équation de Bessel, l'équation différentielle de second ordre suivante:*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (1.1.1)$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x , alors que ν est un paramètre réel [18].

Soit l'équation différentielle

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \quad (1.1.2)$$

où P, Q et R sont des fonctions numériques de la variable x .

Posons

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{et} \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}.$$

Définition 1.2. *a) On dira que x_0 est point ordinaire ou régulier de l'équation différentielle (1.1.2) , si*

$$P(x_0) \neq 0.$$

b) Le point x_0 est appelé point singulier de l'équation différentielle (1.1.2) , si

$$P(x_0) = 0.$$

Remarque 1.1. On distingue deux types de singularité[1],[15].

a) Point singulier régulier

Le point x_0 est un point singulier régulier de l'équation différentielle (1.1.2) si les fonctions

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{et} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

sont analytiques en x_0 .

b) Point singulier irrégulier

Le point x_0 est un point singulier irrégulier de l'équation différentielle (1.1.2) si au moins l'une des fonctions

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

n'est pas analytique en x_0 .

Exemple 1. On considère l'équation différentielle

$$4xy'' + 3y' - 3y = 0.$$

Ainsi, nous avons

$$P(x) = 4x, Q(x) = 3 \quad \text{et} \quad R(x) = 3.$$

Ce qui permet aussi d'écrire

$$y'' + \frac{3}{4x}y' - \frac{3}{4x}y = 0.$$

Donc

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3}{4x} \quad \text{et} \quad \frac{R(x)}{P(x)} = -\frac{3}{4x}.$$

Comme

$$(x - 0) \frac{3}{4x} = 3/4 \quad \text{et} \quad (x - 0) \frac{3}{4x} = \frac{-3}{4}x$$

sont analytiques au point $x = 0$, alors ce dernier est un point singulier régulier de l'équation différentielle proposée.

Exemple 2. Soit l'équation différentielle

$$2(x - 2)^2 xy'' + 3xy' - (x - 2)y = 0.$$

En divisant les termes de cette équation par $2(x - 2)^2 x$, on obtient

$$y'' + \frac{3}{2(x - 2)^2}y' - \frac{1}{2(x - 2)x}y = 0.$$

Par suite

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{3}{2(x-2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{1}{2(x-2)x}.$$

Les points singuliers sont alors, $x = 0$ et $x = 2$.

Déterminons leurs natures

a) Etude de la première singularité

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2(x-2)^2} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{2(x-2)x} = 0,$$

il vient, $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation proposée.

b) Analyse de la seconde singularité

On a

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{3}{2(x-2)^2}$$

cette dernière limite est infinie, donc $x = 2$ est un point singulier irrégulier de l'équation différentielle.

Dans le cas d'un point ordinaire, la résolution de l'équation différentielle (1.1.2) est donnée par la méthode des séries entières [1].

Théorème 1.1. Si p et q sont analytiques en x_0 , alors la solution générale de cette équation est [1], [15]

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) \tag{1.1.3}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes arbitraires, alors que les fonctions

$$y_k, k = 1, 2$$

s'obtiennent par identification de (1.1.3) avec

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Sachant que x vérifie la condition

$$|x - x_0| < R \quad \text{avec} \quad R < \min(R_p, R_q),$$

où

R_p = rayon de convergence de $p(x)$ et R_q = rayon de convergence de $q(x)$.

Remarque 1.2.

$$\max(R_{y_1}, R_{y_2}) = \min(R_p, R_q),$$

où

R_{y_k} est le rayon de convergence de la fonction y_k , $k = 1, 2$ [15].

Exemple 3. Soit l'équation différentielle

$$y'' + y = 0 \quad - \infty < x < \infty$$

On a $P(x) = 1, Q(x) = 0$ et $R(x) = 1$,

donc

$$p(x) = 0 \quad \text{et} \quad q(x) = 1.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont connues et il s'agit de $\sin x$ et $\cos x$.

Cherchons la solution générale de cette équation sous la forme d'une série entière.

De la relation

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

on tire, par dérivation des deux membres

$$y'(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots$$

en dérivant, encore une deuxième fois, on trouve

$$\begin{aligned} y''(x) &= a_2 + a_3x + a_4x^2 + a_5x^3 \dots \\ &= \sum_{n=2}^{n=\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle proposée les valeurs de y , y' et y'' , on obtient

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = 0.$$

Cette relation s'écrit aussi

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

cela est possible si tous les coefficients sont nuls

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

ou encore

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n.$$

D'où la relation de récurrence

$$\begin{aligned} n &= 0 & \text{alors} & \quad 2a_2 = -a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{-a_0}{2!}, \\ n &= 1 & \text{alors} & \quad 6a_3 = -a_1 \Rightarrow a_3 = \frac{-a_1}{3 \cdot 2} = \frac{-a_1}{3!}, \\ n &= 2 & \text{alors} & \quad 4 \cdot 3 a_4 = -a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{+a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{4!}, \\ n &= 3 & \text{alors} & \quad a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{+a_1}{5!}, \\ n &= 4 & \text{alors} & \quad a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-a_0}{6!}. \end{aligned}$$

On remarque que si n est impaire le coefficient a_n dépend de a_1 ;

si n est paire a_n dépend de a_0 .

Donc, la solution est sous la forme

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 x^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 x^{2n+1} + \dots \\ &= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] + \\ &\quad a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

et ces deux séries sont exactement le développement en série de Taylor des deux fonctions trigonométriques $\cos x$ et $\sin x$.

C'est-à-dire

$$y(x) = a_0 \sin x + a_1 \cos x$$

1.1.1 Equation d'Euler

Définition 1.3. On appelle équation d'Euler, toute équation donnée sous la forme suivante:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \quad (1.1.4)$$

où α et β sont des constantes.

Définition 1.4. On appelle équation indicielle de l'équation (1.1.4), l'équation suivante:

$$F(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0 \quad (1.1.5)$$

Remarque 1.3. $F = 0$ s'obtient, en remplaçant $y, y',$ et y'' par $x^r, (x^r)'$ et $(x^r)''$ respectivement dans l'équation (1.1.4) [15].

Théorème 1.2. La solution de l'équation différentielle (1.1.4) s'obtient à l'aide des racines r_1 et r_2 de l'équation indicielle (1.1.5) et en posant $y = x^r$ et cela comme suit:

1) Cas des racines réelles:

a) Si $r_1 \neq r_2$, alors la solution est

$$y(x) = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}.$$

b) Si $r_1 = r_2$, alors

$$y(x) = [c_1 + c_2 \ln |x|] |x|^{r_1}.$$

2) Cas des racines complexes: la solution est [15]

$$y(x) = |x|^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln |x|) + c_2 \sin(\mu \ln |x|)],$$

$$\text{où } r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$$

Exemple 4. 1) Soit l'équation différentielle d'Euler suivante:

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0,$$

l'équation indicatrice est

$$\begin{aligned} r^2 + (3/2 - 1)r - 1/2 = 0 &\Rightarrow 2r^2 + r - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (2r - 1)(r + 1) = 0, \end{aligned}$$

d'où les racines sont

$$r_1 = 1/2 \text{ et } r_2 = -1.$$

Par suite la solution est

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}.$$

2) Soit maintenant l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0.$$

La solution de l'équation

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

est la racine double

$$r = -2.$$

Par suite, la solution de l'équation différentielle proposée est

$$y(x) = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x)$$

3) Analysons l'équation suivante:

$$x^2 y'' + xy' + y = 0,$$

les racines de l'équation

$$r^2 + 1 = 0,$$

sont

$$r_1 = i \text{ et } r_2 = -i,$$

par suite, la solution de l'équation différentielle proposée est

$$y(x) = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) \quad x > 0.$$

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$x^2 y'' + x [xp(x)] y' + [x^2 q(x)] y = 0, \tag{1.1.6}$$

où x est un point singulier régulier alors que les fonctions

$$xp(x) \text{ et } x^2 q(x)$$

sont analytiques en $x = 0$.

Définition 1.5. On appelle équation indicatrice de l'équation (1.1.6), l'équation suivante:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \quad (1.1.7)$$

où

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x p(x) \quad \text{et} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x).$$

Remarque 1.4. Les solutions de l'équation (1.1.6) s'obtiennent à l'aide des séries entières et de l'équation récurrente suivante [15]:

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(r+k)p_n k + q_{n-k} = 0,$$

cette dernière permet de calculer les coefficients a_n de la solution.

Théorème 1.3. Soit r_1 et r_2 les racines de l'équation indicatrice (1.1.7)

Les deux racines vérifient

$$\operatorname{Re}(r_1) > \operatorname{Re}(r_2).$$

Le système fondamental de solution $\{y_1, y_2\}$, s'obtient comme suit [1]:

Sur l'un des deux intervalle

$$]-\rho, 0[\quad \text{ou} \quad]0, \rho[$$

l'équation différentielle admet deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 , la première est sous la forme

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right],$$

alors que la deuxième solution dépend des racines de l'équation indicatrice comme suit:

1) Si $r_1 - r_2 \neq n$ ou $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right].$$

2) Si $r_1 = r_2$, alors

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n.$$

3) Si $r_1 - r_2 = n$ ou $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n \right].$$

Remarque 1.5. La constante a et les coefficients $a_n(r_1), a_n(r_2), b_n(r_1)$ et $c_n(r_2)$ peuvent être déterminés en remplaçant l'expression de y dans l'équation (1.1.6) [15], [1].

Remarque 1.6. ρ est le minimum des rayons de convergence de deux séries

$$xp(x) \text{ et } x^2q(x).$$

Exemple 5. Soit l'équation différentielle suivante:

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0.$$

Alors

$$P(x) = 2x(1+x), Q(x) = 3+x \text{ et } R(x) = -x,$$

donc

$$p(x) = \frac{3+x}{2x(1+x)} \text{ et } q(x) = \frac{-x}{2x(1+x)}.$$

Il est clair que

$$x = 0 \text{ et } x = -1$$

sont les deux points singuliers de cette équation.

1) Le point $x = 0$ est un point singulier régulier, puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3+x}{2x(1+x)} = 3/2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = 0,$$

par suite

$$p_0 = 3/2 \text{ et } q_0 = 0.$$

Donc l'équation indicatrice est

$$r(r-1) + (3/2)r = 0.$$

Ainsi les racines de cette dernière sont

$$r_1 = 0 \text{ et } r_2 = -1/2.$$

Comme

$$r_1 - r_2 \neq n, \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

donc l'équation différentielle proposée admet deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 données par

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n$$

et

$$y_2(x) = |x|^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1/2)x^n \right].$$

Le point $x = -1$ est un point singulier régulier, car

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \frac{3+x}{2x(1+x)} = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^2 \frac{(-x)}{2x(1+x)} = 0,$$

dans ce cas,

$$p_0 = -1 \quad \text{et} \quad q_0 = 0.$$

Ainsi, l'équation indicatrice est donnée par la formule suivante:

$$r(r-1) - r = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$r_1 = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = 0.$$

Donc, la solution qui correspond à la plus grande racine c'est la suivante:

$$y_1(x) = (x+1)^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n \right],$$

la seconde est donnée par

$$y_2(x) = a_1 y_1 \ln |x+1| + \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)(x+1)^n \right].$$

1.1.2 Résolution de l'équation de Bessel

La solution générale de l'équation (1.1.1) est donnée par l'expression

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x),$$

où $J_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν , et on a

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

où Γ est la fonction gamma.

Si $-\nu$ et ν sont les racines de l'équation indicatrice de l'équation différentielle (1.1.1), alors

- 1) Si $\nu \neq n, n \in \mathbb{N}$, alors $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement indépendants.
- 2) Si $\nu = n, n \in \mathbb{N}$, alors $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement dépendants, et on a

$$J_{-\nu}(x) = (-1) J_\nu(x).$$

La fonction Y_ν forme avec $J_\nu(x)$ un système fondamental de solutions, et cette solution est appelée fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre ν , et on cherche cette fonction sous la forme suivante [9]:

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi} & \nu \neq 0.1.2.3... \\ \lim_{p \rightarrow \nu} \frac{J_p(x) \cos p \pi - J_{-p}(x)}{\sin p \pi} & \nu = 0.1.2.3... \end{cases}$$

En effet, supposons que ν est positive.

On remplace les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \\ \text{et } y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}, \end{aligned}$$

dans l'équation (1.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} &(r^2 - \nu^2) a_0 x^r + [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 x^{r+1} + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} [[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \nu^2] a_n + a_{n-2}] x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$(r^2 - \nu^2) a_0 x^r + [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} ([(r+n)^2 - \nu^2] a_n + a_{n-2}) x^{n+r} = 0,$$

et cela est vrai si

- (i) $(r^2 - \nu^2) = 0$ ie $r = \pm\nu$ et $a_0 \neq 0$;
- (ii) $(2\nu + 1)a_1 = 0$ et comme $\nu > 0$ alors $a_1 = 0$;
- (iii) $a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2\nu+n)}$.

Et comme

$$a_1 = 0, \text{ alors pour tout } n = 3, 5, 7, \dots a_n = 0.$$

Pour $k = 1, 2, 3, \dots$, on a

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2(2\nu + 2)}; \\ a_4 &= a_{2,2} = -\frac{a_2}{4(2\nu + 4)} = \frac{-a_0}{2^2(2\nu + 4)(2\nu + 2)} = \frac{-a_0}{2^2 2!(\nu + 2)(\nu + 1)}; \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\nu + k)(\nu + k - 1) \dots (\nu + 1)} = \frac{(-1)^k 2^\nu \Gamma(\nu + 1) a_0}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \end{aligned}$$

donc

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu \Gamma(\nu + 1) x^{2k+\nu}}{2^{k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

qui donne bien l'expression de $J_\nu(x)$, c'est-à-dire

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

Si ν n'est pas un entier, alors les fonctions $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement indépendantes, puisqu'elles ne sont pas proportionnelles, en effet,

Quand x tend vers zéro, $J_\nu(x)$ tend vers 0 et $J_{-\nu}(x)$ tend vers l'infini, donc dans ce cas la solution générale est

$$y(x) = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x). \quad (1.1.8)$$

Ce qui n'est pas valable si ν est un entier positif, car on peut calculer $J_{-\nu}(x)$ comme suit:

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{k-\nu} k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \\ &= (-1)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+s} x^{\nu+2s}}{2^{2s+\nu} s! \Gamma(\nu + s + 1)} \\ &= (-1)^\nu J_\nu(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement dépendantes. Dans ce cas on cherche une solution particulière de l'équation de Bessel, non proportionnelle à $J_\nu(x)$, ainsi on introduit la fonction de Bessel de seconde espèce

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \sin \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}, \quad \nu \neq n, n \in \mathbb{N} \quad (1.1.9)$$

qui représente bien une solution de l'équation de Bessel (1.1.1), en effet, il suffit de prendre $A = \frac{-1}{\sin \nu\pi}$ et $B = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi}$ dans l'équation (1.1.8). La limite de l'expression (1.1.9) quand ν tend vers la valeur entière positive n , le numérateur et dénominateur de (1.1.8) s'annulent pour $\nu = n$, on obtient cette limite par la règle de l'Hôpital.

En dérivant par rapport à ν , on obtient

$$\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-\pi J_\nu(x) \sin \nu\pi + \cos \nu\pi \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)}{\pi \cos \nu\pi}, \quad (1.1.10)$$

finalement, on obtient [9]

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{2}{\pi} \left(\nu + \log \frac{x}{2} \right) J_\nu(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n-p-1)!}{p!} (2/x)^{n-2p} \\ &\quad - 1/\pi \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!(n+p)!} (x/2)^{2p+n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right). \end{aligned}$$

Et on peut l'appliquer pour calculer Y_0 par exemple, en effet :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{-\pi J_\nu(x) \sin \nu\pi + \cos \nu\pi \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x)}{\pi \cos \nu\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) \Big|_{\nu=0}.$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial(-\nu)} J_{-\nu} = -\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu},$$

alors la limite cherchée est

$$\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu \Big|_{\nu=0}.$$

Pour obtenir $\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu$, nous dérivons la série $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{n! \Gamma(\nu+n+1)}$ par rapport à ν , et on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{(x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+n+1)} \right]. \quad (1.1.11)$$

En posant

$$G = \frac{(x/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(\nu+n+1)},$$

on trouve

$$\ln G = (\nu + 2n) \ln(x/2) - \ln \Gamma(\nu + n + 1) \quad (1.1.12)$$

En dérivant (1.1.12) par rapport à ν , on obtient

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \nu} G = \ln(x/2) - \frac{\Gamma'(\nu + n + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1)},$$

pour $\nu = 0$, on a

$$\left. \frac{\partial}{\partial \nu} G \right|_{\nu=0} = \frac{(x/2)^{2n}}{\Gamma(n+1)} \left[\ln(x/2) - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \right]. \quad (1.1.13)$$

En utilisant (1.1.11) et (1.1.13), on obtient

$$\begin{aligned} \left. \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu \right|_{\nu=0} &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n+1)} \left[\ln(x/2) - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \{ \ln(x/2) + \gamma \} J_0(x) + \\ &\quad \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) \dots \right], \end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler qui est donnée par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772156\dots$$

Remarque 1.7. Les courbes représentatives des fonctions $J_0(x)$, $J_1(x)$, Y_0 et Y_1 sont données comme suit :

Pour $J_0(x)$ on a le graphe suivant:

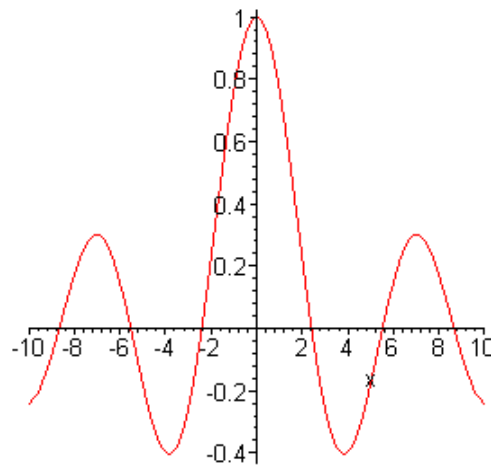


Figure 1.1: (a) L'allure de J_0

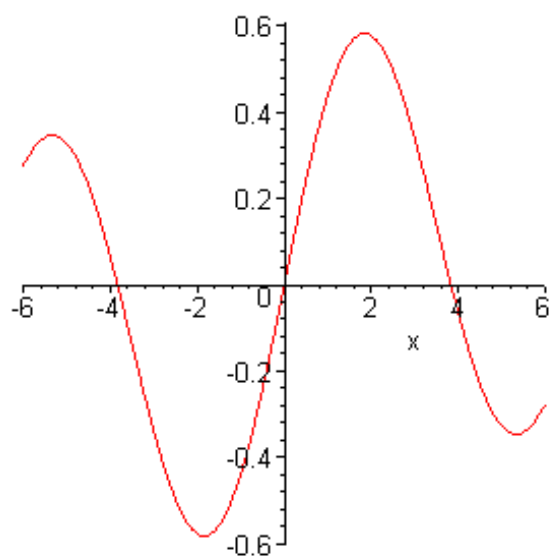


Figure 1.1: (b) L'allure de J_1

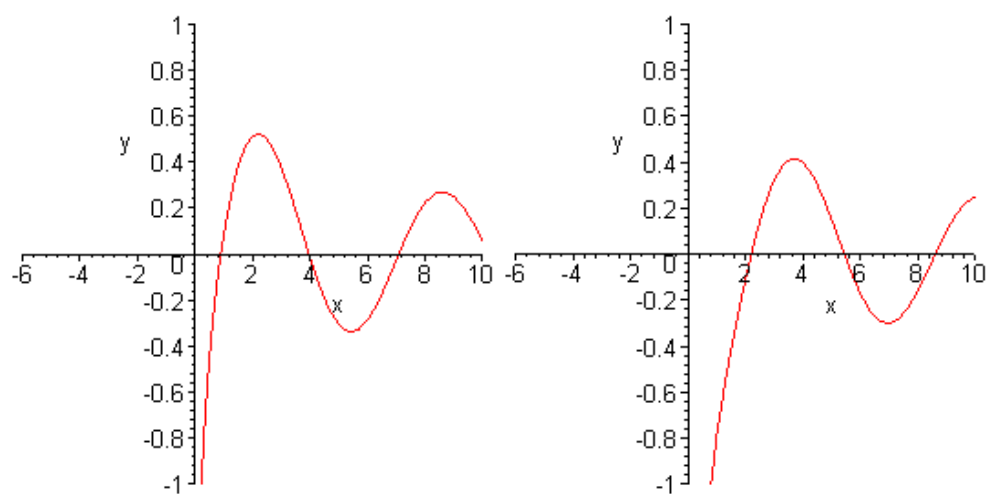


Figure 1.2: (a) L'allure de Y_0

(b) L'allure de Y_1

1.1.3 Propriétés des fonctions de Bessel

$$(1) \quad J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)$$

$$(2) \quad x J'_{\nu}(x) = \nu J_{\nu}(x) - x J_{\nu+1}(x)$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx} [x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

$$(5) \quad \int x^{\nu} J_{\nu-1}(x) dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + c$$

$$(6) \quad \int \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}} dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) + c$$

$$(7) \quad \text{La solution de l'équation différentielle } x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \text{ est } J_{\nu}(\lambda x)$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} Y_{\nu}(x) = \infty$$

Preuve. Les propriétés (1) et (2) sont déduites à partir des propriétés (3) et (4) respectivement.

Montrons (3) et (4)

(3) La série définissant $J_{\nu}(x)$ est absolument et uniformément convergente [9], et cela pour tout x . Et il en est de même pour la série qui définit $x^{\nu} J_{\nu}(x)$.

On peut vérifier que la série dérivée est aussi uniformément convergente, ainsi [9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{\nu} J_{\nu}(x)) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} k! \Gamma(\nu + k)} \\ &= x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+(\nu-1)}}{2^{2k+(\nu-1)} k! \Gamma((\nu-1) + k + 1)} \\ &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x). \end{aligned}$$

Avec le même principe on obtient la démonstration de la propriété (4).

Pour déduire (1) et (2), il suffit de développer la première partie de l'égalité (3) puis celle

de l'égalité (4). En effet,

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J'_\nu + \nu x^{\nu-1} J_\nu = x^\nu J_{\nu-1}, \quad (1.1.14)$$

et

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = x^{-\nu} J'_\nu - \nu x^{-\nu-1} J_\nu = -x^{-\nu} J_{\nu+1}. \quad (1.1.15)$$

En éliminant J'_ν puis J_ν , on obtient

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1},$$

c'est-à-dire

$$J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu - J_{\nu-1}.$$

Pour établir (2), il suffit de considérer

$$\frac{d}{dx} [x^{-1} J_\nu(x)] \quad \text{dans (4)}$$

La propriété (5) Elle découle à partir de (3) par intégration.

La propriété (6) Elle s'obtient en intégrant la relation (4).

(7)

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (1.1.16)$$

En effectuant le changement de variable $t = \lambda x$, $z(t) = y(x)$, on a

$$y'(x) = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = \lambda z'(t),$$

$$y''(x) = \frac{dz'}{dt} \frac{dt}{dx} = \lambda^2 z''(t).$$

Ainsi, l'équation (1.1.16) devient

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \lambda^2 z''(t) + \left(\frac{t}{\lambda}\right) \lambda z'(t) + (t^2 - \nu^2) z(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$t^2 z''(t) + tz'(t) + (t^2 - \nu^2) z(t) = 0.$$

Donc la solution est $J_\nu(t) = J_\nu(\lambda x)$.

(8) On peut bien le voir sur l'expression de Y_ν développée dans le paragraphe précédent. ■

1.1.4 Les zéros des fonctions de Bessel

Si ν est un entier naturel ou relatif, alors l'équation $J_\nu(x) = 0$ a un nombre infini de racines, toutes réelles [9].

La différence entre deux racines successives tend vers π [9]. Les racines de $J_\nu(x) = 0$ sont comprises entre celles de $J_{\nu-1}(x) = 0$ et celles de $J_{\nu+1}(x) = 0$ [9].

1.1.5 Orthogonalité des fonctions de Bessel

Lemme 1.4. *Si μ et λ sont deux nombres réels distincts, alors on aura*

$$\int x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = \frac{x [\lambda J_\nu(\lambda) J'_\nu(\mu) - \mu J_\nu(\mu) J'_\nu(\lambda)]}{(\mu^2 - \lambda^2)}, \quad \lambda^2 \neq \mu^2 \quad (1.1.17)$$

Preuve. D'après la propriété (7) des fonctions de Bessel

$$y_1 = J_\nu(\lambda x) \quad \text{et} \quad y_2 = J_\nu(\mu x),$$

sont respectivement les solutions des équations suivantes:

$$x^2 y_1'' + x y_1' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y_1 = 0$$

et

$$x^2 y_2'' + x y_2' + (\mu^2 x^2 - \nu^2) y_2 = 0.$$

En multipliant la première équation par y_2 et la seconde par y_1 puis en soustrayant membre à membre de ces deux égalités, on obtient

$$x^2 [y_2 y_1'' - y_1 y_2''] + x [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) x^2 y_1 y_2.$$

On divisons sur x , on aura

$$x [y_2 y_1'' - y_1 y_2''] + [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) x y_1 y_2.$$

Ce qui est équivalent à

$$x \frac{d}{dx} [y_2 y_1' - y_1 y_2'] + [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) x y_1 y_2,$$

peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left\{ x [y_2 y_1' - y_1 y_2'] \right\} = (\mu^2 - \lambda^2) x y_1 y_2.$$

Par intégration, on aboutit à

$$x [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) \int x y_1 y_2 dx.$$

En remplaçant y_1 par $J_\nu(\lambda x)$ et y_2 par $J_\nu(\mu x)$, on trouve

$$x [\lambda J_\nu(\mu x) J'_\nu(\lambda x) - \mu J_\nu(\lambda x) J'_\nu(\mu x)] = (\mu^2 - \lambda^2) \int x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx.$$

La division des deux membres de la relation par

$$(\mu^2 - \lambda^2) \neq 0,$$

donne

$$\int x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = \frac{x [\lambda J_\nu(\mu x) J'_\nu(\lambda x) - \mu J_\nu(\lambda x) J'_\nu(\mu x)]}{(\mu^2 - \lambda^2)}. \quad (1.1.18)$$

Finalement

$$\int_0^a x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = \frac{a [\lambda J_\nu(\mu a) J'_\nu(\lambda a) - \mu J_\nu(\lambda a) J'_\nu(\mu a)]}{(\mu^2 - \lambda^2)}. \quad (1.1.19)$$

D'où le résultat cherché. ■

Remarque 1.8. *On a aussi*

$$\int_0^a x (J_\nu(\lambda x))^2 dx = \frac{a^2}{2} \left\{ \left(J'_\nu(\lambda a) \right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{a^2 \lambda^2} \right) (J_\nu(\lambda a))^2 \right\}.$$

En effet,

en faisant tendre μ vers λ dans le résultat précédent et en appliquant la règle de l'Hôpital (La dérivation s'effectue par rapport à la variable μ), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^a x J_\nu^2(\lambda x) dx &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} a^2 \left[\frac{\lambda J'_\nu(\lambda a) J'_\nu(\mu a) - J_\nu(\lambda a) J'_\nu(\mu a) - \mu J_\nu(\lambda a) J''_\nu(\mu a)}{2\mu} \right] \\ &= a^2 \left[\frac{\lambda [J'_\nu(\lambda)]^2 - J_\nu(\lambda) J'_\nu(\lambda) - \lambda J_\nu(\lambda) J''_\nu(\lambda)}{-2\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Mais, on a $J_\nu(\lambda a)$ vérifie

$$\lambda^2 J''_\nu(\lambda a) + \lambda J'_\nu(\lambda a) + (a^2 \lambda^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda a) = 0.$$

Ce qui donne l'expression de $J''_\nu(\lambda)$ comme suit

$$J''_\nu(\lambda) = \frac{-\lambda J'_\nu(\lambda a) - (a^2 \lambda^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda a)}{\lambda^2},$$

en remplaçant cette expression dans l'expression (1.1.20), on trouve

$$\int_0^a x J_\nu^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\lambda)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2} \right) J_\nu^2(\lambda). \quad (1.1.21)$$

D'où l'expression cherchée.

A partir de l'expression (1.1.19) , on peut bien voir que si μ et λ sont deux racines différentes de l'équation

$$\alpha J_\nu(xa) + \beta x J'_\nu(xa) = 0, \quad (1.1.22)$$

avec α et β sont des constantes, alors

1er cas ($\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$)

Dans ce cas, on peut écrire (1.1.22) sous la forme

$$J_\nu(xa) + Cx J'_\nu(xa) = 0, \quad C = \frac{\beta}{\alpha} \neq 0,$$

et on trouve

$$\int_0^a x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = 0.$$

En effet,

comme λ et μ sont les racines de (1.1.22) c'est-à-dire

$$\alpha J_\nu(\lambda a) + \beta \lambda J'_\nu(\lambda a) = 0 \quad (1.1.23)$$

et

$$\alpha J_\nu(\mu a) + \beta \mu J'_\nu(\mu a) = 0, \quad (1.1.24)$$

et α et β sont non nulles toutes les deux , alors

en multipliant (1.1.23) par $J_\nu(\mu)$ et (1.1.24) par $J_\nu(\lambda)$ et par soustraction, on obtient

$$\mu J_\nu(\lambda) J'_\nu(\mu) - \lambda J_\nu(\mu) J'_\nu(\lambda) = 0.$$

En remplaçant dans (1.1.19) , on trouve

$$\int_0^a x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = 0, \quad \lambda \neq \mu$$

qui représente bien le resultat cherché.

2ème cas ($\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$)

$$\lambda \text{ et } \mu \text{ sont les racines de } J'_\nu(xa) = 0,$$

c'est-à-dire

$$J'_\nu(\lambda a) = 0 \quad \text{et} \quad J'_\nu(\mu a) = 0.$$

En ramenant cette expression dans (1.1.19) on aura

$$\int_0^a x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = 0, \quad \lambda \neq \mu$$

3ème cas ($\alpha \neq 0, \beta = 0$)

λ et μ sont les racines de $J_\nu(xa) = 0$,

en tenant compte de l'équation (1.1.19), on obtient

$$\int_0^a x J_\nu(\lambda x) J_\nu(\mu x) dx = 0, \quad \lambda \neq \mu. \quad (1.1.25)$$

Ce qui montre l'orthogonalité des fonctions de Bessel par rapport à la fonction densité x dans les trois cas possibles de l'équation (1.1.22).

Remarque 1.9. Les fonctions $\sqrt{x} J_\nu(\lambda x)$ et $\sqrt{x} J_\nu(\mu x)$ sont orthogonales sur $[0, a]$ dans les trois cas possibles de l'équation (1.1.22).

1.1.6 Développement d'une fonction en série de Bessel

Définition 1.6. Une fonction numérique f est dite continue par morceaux dans l'intervalle $]a, b[$ si

i) L'intervalle $]a, b[$ peut être divisé en un nombre fini d'intervalles tels que f est continue dans chacun d'eux.

ii) Les limites de f sont finies lorsque x tend vers les bornes de chaque intervalle.

Théorème 1.5. Si f et f' sont continues par morceaux dans l'intervalle $]0, a[$, alors f admet un développement en série de Bessel sous la forme suivante [7], [9]:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 J_\nu(\lambda_1 x) + A_2 J_\nu(\lambda_2 x) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_\nu(\lambda_m x) \\ &\text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \dots \text{ sont les racines positives de l'équation (1.1.22).} \end{aligned}$$

Remarque 1.10. 1) Dans le cas où $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0$ et $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, les coefficients A_m sont calculés comme suit [9]:

$$A_m = \frac{2\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 - \nu^2 + \alpha^2/\beta^2) J_\nu^2(\lambda_m x)} \int_0^1 x J_\nu(\lambda_m x) f(x) dx,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont les racines positives de (1.1.22) .

2) Dans le cas où $\alpha = 0$ c'est-à-dire $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont les racines positives de $J_\nu(x) = 0$, les coefficients A_m sont donnés par

$$A_m = \int_0^1 x J_\nu(\lambda_m x) f(x) dx,$$

en effet;

si

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_\nu(\lambda_m x) \quad , \quad x \in]0, 1[,$$

en multipliant les deux parties de l'égalité par $x J_\nu(\lambda_k x)$ et en intégrant terme à terme de 0 à 1, et en tenant compte de (1.1.25) , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) f(x) dx &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_m x) dx \\ &= A_k \int_0^1 x J_\nu^2(\lambda_k x) dx \\ &= A_k \frac{1}{2} \left\{ J_{\nu+1}'(\lambda_k) \right\}^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) J_\nu^2(\lambda_k). \end{aligned}$$

Mais, $J_\nu^2(\lambda) = 0$,

donc

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda x) f(x) dx = \frac{1}{2} A_k J_{\nu+1}'^2(\lambda_k),$$

c'est-à-dire

$$A_k = \frac{2}{J_{\nu+1}'^2(\lambda_k)} \int_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) f(x) dx.$$

D'après les propriétés des fonctions de Bessel (propriété (2)), on a

$$\lambda_k J_\nu'(\lambda_k) = \nu J_\nu(\lambda_k) - \lambda_k J_{\nu+1}(\lambda_k),$$

et comme

$$J_\nu(\lambda_k) = 0, \text{ alors } J_\nu'(\lambda_k) = -J_{\nu+1}(\lambda_k).$$

D'où

$$A_k = \frac{2}{\{J_{\nu+1}(\lambda_k)\}^2} \int_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) f(x) dx.$$

Remarque 1.11. Sur $]0, a[$ les coefficients A_k s'obtiennent aussi comme suit :

$$A_k = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\lambda_n a)]^2} \int_0^a x J_\nu(\lambda_k x) f(x) dx,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont les racines positives de $J_\nu(x) = 0$.

En effet;

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p J_\nu(\lambda_p x), \quad x \in]0, a[.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^a x J_\nu(\lambda_n x) f(x) dx &= \int_0^a A_n x [J_\nu(\lambda_n x)]^2 dx \\ &= A_n \int_0^a x [J_\nu(\lambda_n x)]^2 dx \\ &= A_n \frac{1}{2} a^2 [J'_\nu(\lambda_n a)]^2 \\ &= A_n \frac{1}{2} a^2 [J_{\nu+1}(\lambda_n a)]^2. \end{aligned}$$

D'où

$$A_n = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\lambda_n a)]^2} \int_0^a x J_\nu(\lambda_n x) f(x) dx.$$

D'où le développement cherché.

Exemple 6. Soit la fonction constante

$$f(x) = 1, \text{ avec } x \in]0, 1[$$

Développons cette fonction en série de fonction de Bessel d'ordre $\nu = 0$, pour $x \in]0, 1[$ si $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ sont les racines positives de $J_0(x) = 0$, d'après le résultat précédent on a

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n x),$$

où

$$A_n = \frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^1 x J_0(\lambda_n x) dx.$$

On pose

$$v = \lambda_n x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda_n} v,$$

donc

$$dx = \frac{1}{\lambda_n} dv.$$

On obtient

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\lambda_n^2 [J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^{\lambda_n} v J_0(v) dv \\ &= \frac{2}{\lambda_n^2 [J_1(\lambda_n)]^2} v J_1(v) \Big|_0^{\lambda_n} \\ &= \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \quad \text{D'après la propriété (5) des fonctions de Bessel, pour } \nu = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n x).$$

Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + \frac{1}{z} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0, \quad (1.1.26)$$

avec $\nu \in \mathbb{C}$.

Définition 1.7. L'équation (1.1.26) est appelée *équation de Bessel modifiée*⁽¹⁾.

La solution de cette équation est donnée par (Voir [7] page 108 et [9] page 106)

$$y(z) = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z),$$

où

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi$$

et

$$K_\nu(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu \pi} \right] & \text{si } \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \lim_{p \rightarrow \nu} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-p}(z) - I_p(z)}{\sin p \pi} \right] & \text{si } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

⁽¹⁾Elle s'obtient en posant $z = ix$ dans l'équation de Bessel (1.1.1).

Définition 1.8. Les fonctions I_ν et K_ν sont appelées respectivement fonction de Bessel modifiée de première espèce et fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

Remarque 1.12. La fonction K_ν est appelée aussi fonction de Mc-Donald.

Remarque 1.13. Les courbes représentatives des fonctions $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$ et $K_1(x)$ sont données comme suit :

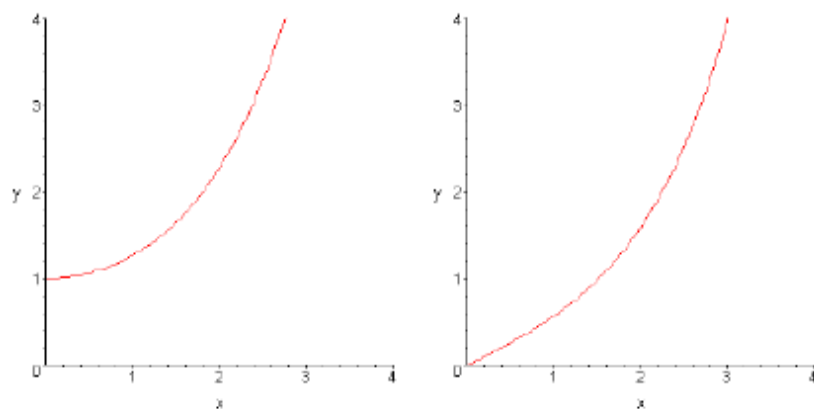


Figure 1.3: (a) Graphe de $I_0(x)$.

(b) Graphe de $I_1(x)$.

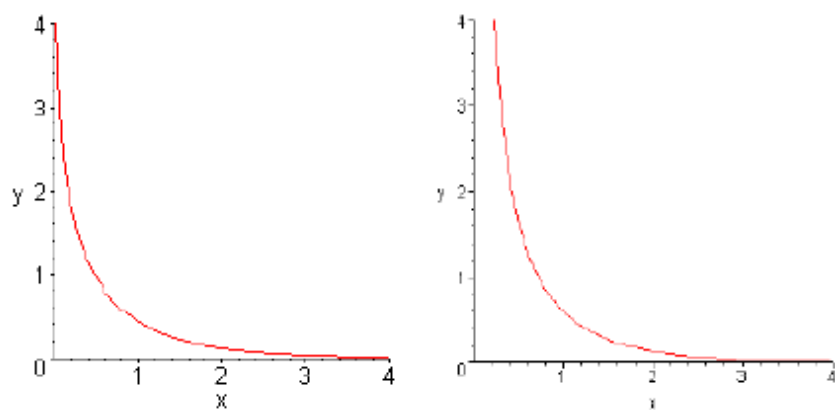


Figure 1.4: (a) Graphe de $K_0(x)$.

(b) Graphe de $K_1(x)$.

1.1.7 Application aux problèmes de conduction thermique

1) Soit à résoudre le problème de conduction thermique dans un cylindre de longueur infini, de rayon a et dont la température initiale est égale à $F(r)$. Alors que la température à la surface latérale est maintenue à zéro. Supposons que la température u dépend uniquement du temps t et de la position r . Donc il s'agit de trouver la température en toute position r et tout instant t .

Ainsi, le problème aux limites est formulé de la façon suivante [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ u(a, t) = 0, \quad u(r, 0) = F(r) \quad \text{et} \quad |u(r, t)| < M \end{cases} \quad (1.1.27)$$

où

$u = u(r, t)$;

$\kappa = \frac{k}{\sigma\mu}$: facteur de diffusion;

k : la conductibilité thermique;

σ : la chaleur spécifique;

μ : La masse spécifique

En utilisant la méthode de séparation des variables (méthode de fourrier), on cherchera la solution sous la forme

$$u = R(r)T(t),$$

le problème devient

$$RT' = \kappa(R''T + \frac{1}{r}R'T). \quad (1.1.28)$$

En divisant, alors par κT , il vient

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') = -\lambda^2,$$

où λ est la constante de séparation. Et on trouvera les deux équations suivantes:

$$T' + \kappa\lambda^2 T = 0 \quad (1.1.29)$$

et

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0. \quad (1.1.30)$$

Il est clair que (1.1.30) est une équation de Bessel, ainsi leurs solutions sont respectivement

$$T(t) = C \exp(-\kappa\lambda^2 t), \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

et

$$R(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r), \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Or, la fonction Y_0 n'est pas bornée à l'origine [9], ce qui donne $B = 0$.

D'où

$$u(r, t) = D \exp(-\varkappa \lambda^2 t) J_0(\lambda r).$$

En vérifiant la première condition limite, on aura

$$u(a, t) = D \exp(-\varkappa \lambda^2 t) J_0(\lambda a) = 0.$$

D'où

$$J_0(\lambda a) = 0.$$

Ainsi les solutions particulières du problème sont

$$u_n(r, t) = D_n \exp(-\varkappa \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et λ_n sont les racines positives de l'équation $J_0(\lambda a) = 0$.

En tenant compte de la relation $J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$, le choix de toutes les racines se ramène au cas précédant.

Le principe de la superposition permet de trouver

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t).$$

La condition initiale du problème est

$$u(r, 0) = F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\lambda_n r),$$

d'où⁽²⁾

$$D_n = \frac{2}{a^2 [J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^a r F(r) J_0(\lambda_n r) dr.$$

Par conséquent

$$u(r, t) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp(-\varkappa \lambda_n^2 t) \frac{J_0(\lambda_n r)}{[J_1(\lambda_n a)]^2} \int_0^a r F(r) J_0(\lambda_n r) dr \right\}.$$

Remarque 1.14. La méthode précédente permet aussi de résoudre le problème de conduction thermique suivant:

⁽²⁾Voir le résultat de la Remarque 1.11.

Si la température initiale est égale à 0, alors que la surface latérale est maintenue à la température constante V , dans ce cas le problème se formule comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ v|_{r=a} = V \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1.1.31)$$

La solution de ce dernier problème est donc

$$v(r, t) = V + u^*(r, t),$$

où u^* est la solution du problème (1.1.27) précédant pour $F(r) = -V$.

Ainsi

$$u^*(r, t) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp(-\varkappa \lambda_n^2 t) \frac{J_0(\lambda_n r)}{[J_1(\lambda_n)]^2} (-V) \int_0^a r J_0(\lambda_n r) dr \right\},$$

et comme

$$\begin{aligned} \int_0^a r J_0(\lambda_n r) dr &= \frac{1}{\lambda_n} r J_1(\lambda_n r) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{\lambda_n} a J_1(\lambda_n a). \end{aligned}$$

Donc

$$u^*(r, t) = -\frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\varkappa \lambda_n^2 t) \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n a)},$$

c'est-à-dire

$$v(r, t) = V - \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\varkappa \lambda_n^2 t) \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n a)}. \quad (1.1.32)$$

Cette solution vérifie bien les conditions aux limites du problème (1.1.31) .

En effet;

$$(V - u^*)|_{t=0} = V - u|_{t=0} = V - V = 0$$

et

$$(V - u^*)|_{r=a} = V - u|_{r=a} = V - 0 = V = v|_{r=a}.$$

On divise les deux parties de l'égalité (1.1.32) sur V , on obtient

$$\frac{v(r, t)}{V} = 1 - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\varkappa \lambda_n^2 t) \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n a)}. \quad (1.1.33)$$

On pose

$$\beta_n = a \lambda_n \text{ et } T = \varkappa t,$$

alors, l'expression (1.1.33) devient

$$\frac{v}{V} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta_n^2 T}{a^2}\right) \frac{J_0\left(\frac{\beta_n}{a} r\right)}{\lambda_n J_1(\beta_n)}.$$

Le graphe suivant représente la variation de $\frac{v}{V}$ en fonction $\frac{r}{a}$, pour sept instants différents:

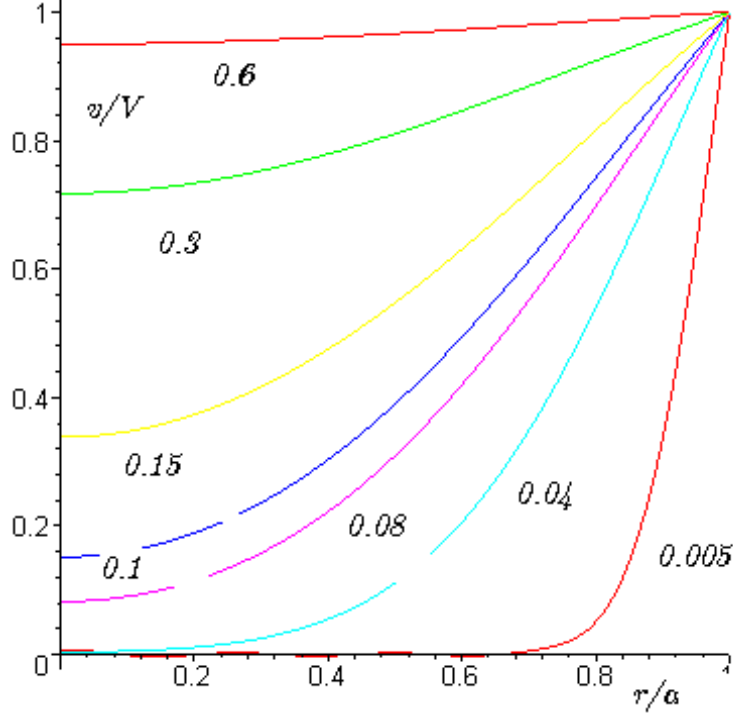


Figure 1.5: L'allure de v/V en fonction de r/a

2) Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) & 0 < r < R, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \\ u(r, 0) = \varphi(r) \end{cases} \quad (1.1.34)$$

On pose

$$u(r, t) = P(r)T(t),$$

ainsi, l'équation devient

$$PT' = a^2 \left(P''T + \frac{1}{r} P'T \right).$$

En divisant par P , on obtient

$$T' = a^2 \left(\frac{P''}{P} T + \frac{1}{r} \frac{P'}{P} T \right),$$

ensuite on divise par T , et on trouve

$$\frac{T'}{T} = a^2 \left(\frac{P''}{P} + \frac{1}{r} \frac{P'}{P} \right).$$

Ce qui donne

$$\frac{T'}{a^2 T} = \left(\frac{P''}{P} + \frac{1}{r} \frac{P'}{P} \right) = -\lambda^2,$$

où λ est la constante de séparation.

On a donc les deux équations suivantes

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0$$

et

$$r^2 P'' + r P' + r^2 \lambda^2 P = 0.$$

et leurs solutions sont respectivement

$$T(t) = C_1 \exp(-a^2 \lambda^2 t)$$

et

$$R(r) = C_2 J_0(\lambda r) + C_3 Y_0(\lambda r).$$

Comme u est bornée, alors $C_3 = 0$.

Donc, la solution est sous la forme suivante

$$u(r, t) = A \exp(-a^2 \lambda^2 t) J_0(\lambda r),$$

où $A = C_1 C_2$.

D'après la première condition aux limites, on a

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0,$$

c'est-à-dire

$$P'(R)T = 0,$$

ou encore

$$A \exp(-a^2 \lambda^2 t) J_0'(\lambda R) = 0.$$

D'où

$$J_0'(\lambda R) = 0,$$

donc

$$J_1(\lambda R) = 0.$$

Soient $\lambda_n, n = 0, 1, 2, 3 \dots$ les racines de l'équation

$$J_1(\lambda_n R) = 0 \quad (\lambda_0 = 0),$$

on a

$$u_n(r, t) = A_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r), n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

sont des solutions.

D'après le principe de superposition, on trouve

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, t).$$

La deuxième condition aux limites donne

$$u(r, 0) = \varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n r),$$

où

$$A_n = \frac{2}{R^2 [J_0(\lambda R)]^2} \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr = \frac{2}{R^2 [J_0(\lambda R)]^2} \phi_n(\lambda_n).$$

Ainsi

$$\phi_n(\lambda_n) = \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr.$$

En effet,

comme u_n est solution du problème

$$u_n(r, 0) = \varphi(r) = A_n J_1(\lambda_n r),$$

en multipliant les deux parties de l'égalité par $r J_1(\lambda_n r)$ et en intégrant par rapport à r de 0 à R , et en tenant compte de la Remarque 1.8., on obtient

$$\int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr = A_n \int_0^R r [J_1(\lambda_n r)]^2 dr = A_n \frac{R^2}{2} [J_0(\lambda R)]^2,$$

car

$$\int_0^R r J_1(\lambda_n r) J_1(\lambda_m r) dr = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m \\ [J_0(\lambda_n R)]^2 \frac{R^2}{2} & \text{si } \text{non} \end{cases}.$$

3) Soit aussi le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) & 0 < r < R, \quad t > 0 \\ u|_{r=R} = 0 \\ u(r, 0) = \varphi(r) \end{cases} \quad (1.1.35)$$

En posant

$$u(r, t) = P(r)T(t),$$

l'équation devient

$$PT' = a^2(P''T + \frac{1}{r}P'T - \frac{PT}{r^2}).$$

En divisant par P , il vient

$$T' = a^2(\frac{P''}{P}T + \frac{1}{r}\frac{P'}{P}T - \frac{T}{r^2}),$$

en divisant ensuite par a^2T , on trouve

$$\frac{T'}{a^2T} = (\frac{P''}{P} + \frac{1}{r}\frac{P'}{P} - \frac{1}{r^2}).$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{T'}{a^2T} = (\frac{P''}{P} + \frac{1}{r}\frac{P'}{P} - \frac{1}{r^2}) = -\lambda^2, \quad (1.1.36)$$

où λ est la constante de séparation.

L'égalité (1.1.36) se traduit par deux équations; la première est

$$T' + a^2\lambda^2T = 0$$

la seconde se déduit comme suit

$$\begin{aligned} P'' + \frac{1}{r}P' - \frac{P}{r^2} &= -\lambda^2P \Leftrightarrow P'' + \frac{1}{r}P' + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2}\right)P = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2P'' + rP' + (r^2\lambda^2 - 1)P = 0 \end{aligned}$$

Leurs solutions sont respectivement

$$T(t) = C_1 \exp(-a^2\lambda^2t)$$

et

$$R(r) = C_2J_1(\lambda r) + C_3Y_1(\lambda r).$$

Et comme la solution est bornée, alors $C_3 = 0$, donc la solution est sous la forme suivante

$$u(r, t) = A \exp(-a^2\lambda^2t)J_1(\lambda r)$$

où $A = C_1C_2$.

La première condition aux limites donne

$$u|_{r=R} = 0,$$

c'est-à-dire

$$u(R, t) = 0,$$

ce qui équivalent à

$$A \exp(-a^2 \lambda^2 t) J_1(\lambda R) = 0 \Rightarrow J_1(\lambda R) = 0.$$

Soit $\lambda_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ les racines positives de l'équation

$$J_1(\lambda_n R) = 0, \quad (\lambda_0 = 0).$$

On a

$$\text{Pour tout } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad u_n(r, t) = A_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) J_1(\lambda_n r),$$

est une solution.

D'après le principe de la superposition, on trouve

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, t).$$

D'après la deuxième condition aux limites on a

$$u(r, 0) = \varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n r),$$

où

$$A_n = \frac{2}{R^2 [J_0(\lambda_n R)]^2} \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr = \frac{2}{R^2 [J_0(\lambda_n R)]^2} \phi_n(\lambda_n),$$

$$\text{où} \quad \phi_n(\lambda_n) = \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr.$$

Par suite, la solution générale de ce problème est

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{R^2 [J_0(\lambda_n R)]^2} \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr \right] \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) \right\} J_1(\lambda_n r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2 J_1(\lambda_n r)}{R^2 [J_0(\lambda_n R)]^2} \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr \right] \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) \right\}. \end{aligned}$$

1.2 Transformation de Hankel:

Soient $\lambda_n, n = 0, 1, 2, 3 \dots$ les racines positives de l'équation

$$J_1(\lambda_n R) = 0, \quad (\lambda_0 = 0).$$

Définition 1.9. On appelle transformation finie de Hankel d'ordre 0 de la fonction $\psi(r)$, l'intégrale suivante:

$$\Psi_n = \int_0^R r \psi(r) J_0(\lambda_n r) dr.$$

La transformation inverse est

$$\psi(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{[J_0(\lambda_n R)]^2} \Psi_n.$$

Définition 1.10. On appelle transformation finie de Hankel d'ordre 1 de la fonction $\varphi(r)$, l'intégrale suivante:

$$\phi_n = \int_0^R r \varphi(r) J_1(\lambda_n r) dr.$$

La transformation inverse est

$$\varphi(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{[J_0(\lambda_n R)]^2} \phi_n.$$

Chapitre 2

Notions sur l'élasticité linéaire

La transformation géométrique qui décrit le passage d'un élément de matière (élément de volume) de l'état initial à l'état final se décompose en: Translation, Rotation et Déformation. Cette dernière étant la seule responsable du changement de forme de l'élément.

La translation et la rotation sont deux mouvements de corps qui traduisent les changements de position et d'orientation. Du point de vue de l'état final; si l'on ne s'intéresse qu'au changement de forme de l'élément et non plus à sa position et à son orientation, alors les deux dernières configurations finales sont équivalentes [Figure 2.1].

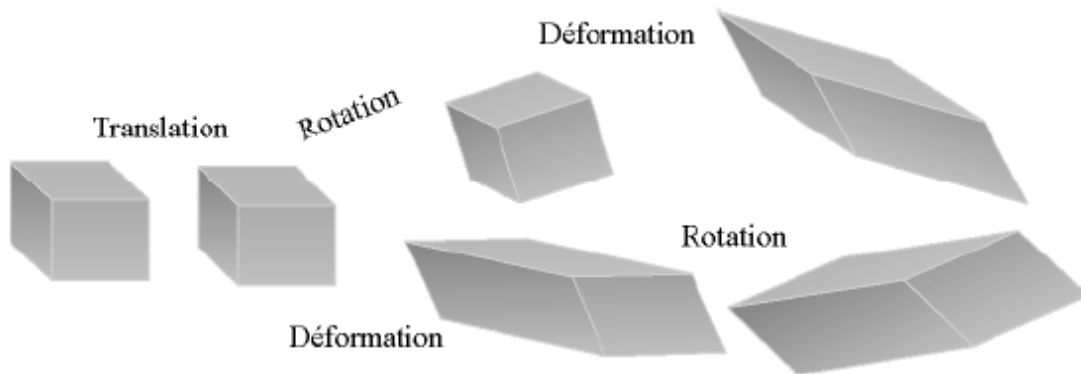


Figure 2.1: Etat initial et final

Seule la déformation⁽¹⁾ responsable des variations de longueur et des décalages angulaires caractérise le changement de la forme géométrique de l'élément. Elle seule sera liée à la contrainte appliquée.

⁽¹⁾C'est la variable pertinente du mécanicien.

2.1 Rappels et définitions

2.1.1 Quelques rappels

1) On définit la contrainte comme étant la force divisée par la surface sur laquelle elle s'exerce, cette contrainte est exprimée en newton sur le mètre carré, c'est-à-dire

$$\text{Contrainte} = \frac{\text{Force}}{\text{Aire}}$$

2) On définit le moment d'une force par rapport à l'axe de rotation par

$$\text{Moment} = \text{Force} \times \text{bras}, \quad \text{où}$$

le *bras* est la distance qui sépare le support de la force à l'axe de rotation.

Le but d'un moment de force est de produire une rotation. La condition d'équilibre d'un solide lié à tourner autour d'un axe est que la somme des moments qui tend à le faire tourner dans un sens soit nulle.

2.1.2 Quelques définitions

L'application des forces sur un corps homogène et isotrope provoque le changement de sa configuration géométrique.

Définition 2.1. *On appelle déformation élastique, une déformation réversible c'est-à-dire le milieu (le corps) retourne à son état initial lorsque l'on supprime les forces provoquant cette déformation.*

Remarque 2.1. *On peut distinguer deux systèmes de forces agissant sur un corps : les forces sollicitant tout le volume dites forces volumiques, et celles qui s'exercent sur la surface dites forces surfaciques.*

Remarque 2.2. *En état d'équilibre, la résultante des forces et des moments sollicitant le corps est égale à zéro.*

Définition 2.2. *On appelle déplacement, le vecteur dont l'origine coïncide avec la position initiale du point et l'extrémité avec la position du point après déformation. Désignons ses projections par u, v et w en coordonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques on les notes u_r, u_θ , et u_z ces dernières représentent respectivement le déplacement radial, angulaire et axial.*

Remarque 2.3. Le coefficient de Poisson⁽²⁾ permet de caractériser la contrainte perpendiculaire à la direction de la force appliquée. Dans le cas où le matériau est isotrope⁽³⁾, ce coefficient permet de relier le module de cisaillement G au module de Young⁽⁴⁾ E [14].

Remarque 2.4. Le coefficient de poisson est toujours inférieur ou égal à $1/2$. S'il est égal à $1/2$, alors le matériau est incompressible.

2.2 Etablissement des équations d'équilibres

2.2.1 En coordonnées cartésiennes

Soit l'élément de volume [Figure 2.2] représentant un parallélépipède, d'arêtes dx , dy et dz . Supposons que cet élément est soumis à une force volumique dont les composantes sont F_x , F_y et F_z . Les projections de la force sollicitant le volume sont alors : $F_x dx dy dz$, $F_y dx dy dz$ et $F_z dx dy dz$.

L'interaction de cet élément avec le milieu extérieur conduit à l'apparition d'efforts sur les faces de cet élément, que nous supposons uniformément réparties. Et comme les arêtes sont petites [Figure 2.2], les contraintes sont symboliquement identifiées à des forces appliquées au centre de chaque face.

Prenons par exemple la face $dy dz$, cette face est sollicitée par une force dont la projection sur la normale x sera σ_x dite *composante normale de la contrainte* ou bien simplement *contrainte normale*, les projections sur les directions y et z sont respectivement τ_{xy} et τ_{xz} dites: *composantes tangentielles* ou *contraintes tangentielles* et $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ et τ_{zy}

⁽²⁾Denis Poisson Français (1781-1840), auteur de travaux sur la physique mathématique.

⁽³⁾Un corps est dit isotrope lorsque les coefficients élastiques ν et G sont des constantes.

⁽⁴⁾Constante élastique qui lie la contrainte à la déformation

sont déterminées de la même manière.

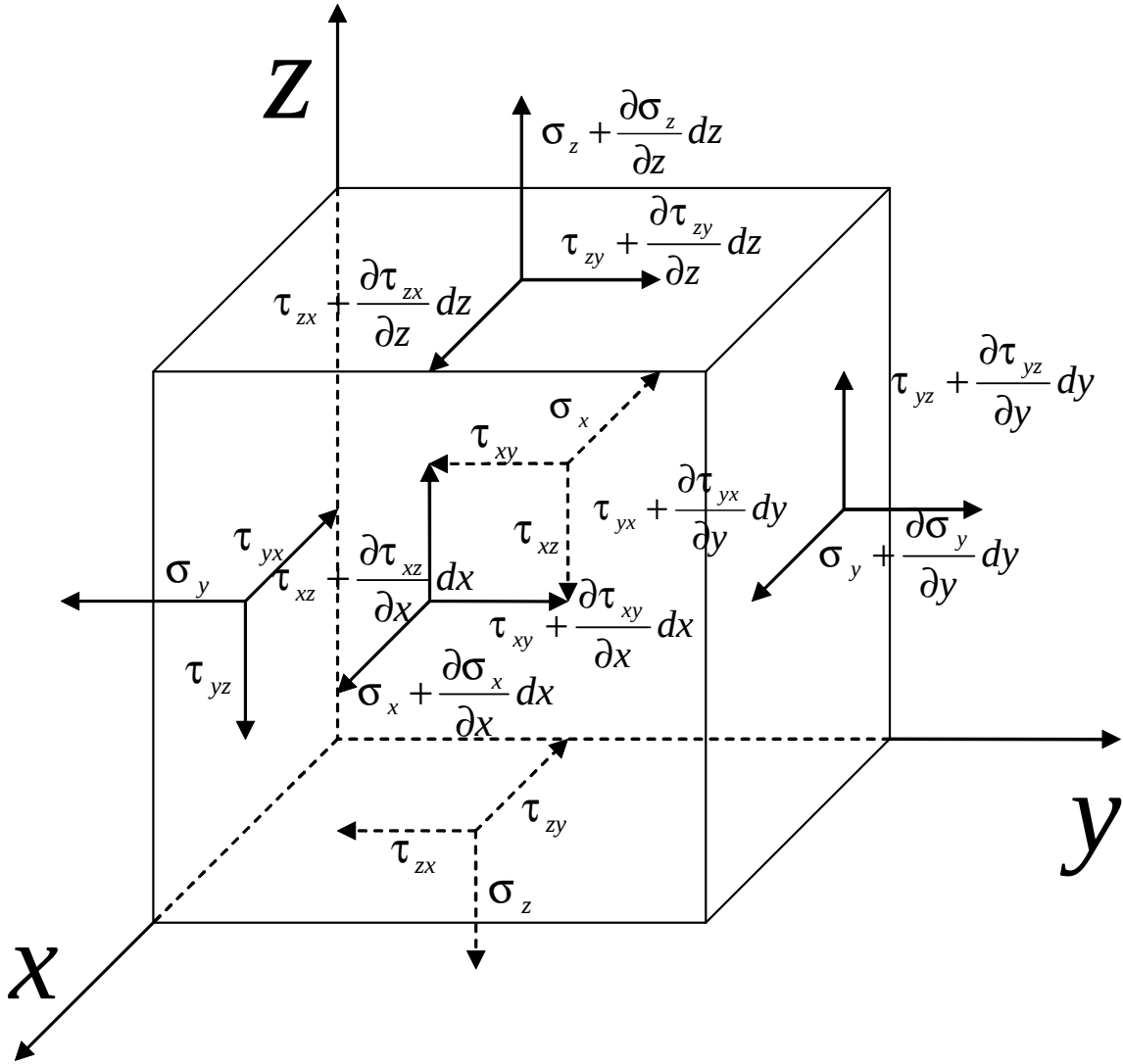


Figure 2.2: parallelepipede

Remarque 2.5. i) Les contraintes normales sollicitant une traction ont un sens positif.
 ii) Les contraintes normales sollicitant une compression ont un sens négatif.

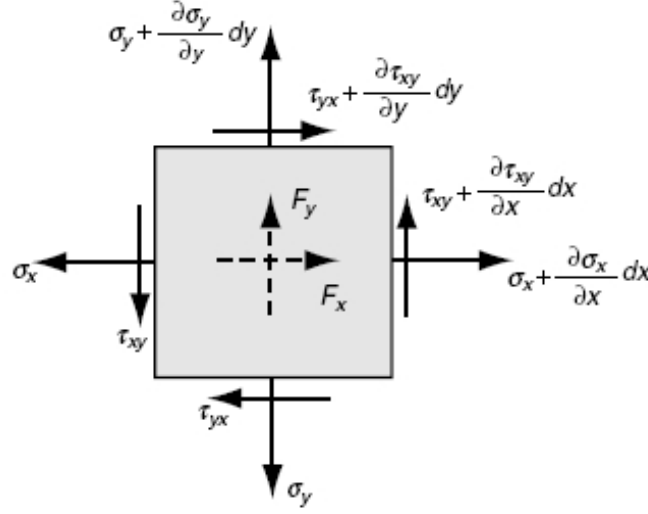


Figure 2.3: Sens positif des contraintes

iii) D'une manière générale, tout loi peut localement c'est-à-dire "pour des petite variation" être remplacé par un développement limité du premier ordre (approximation linéaire); les lois en élasticité linéaire sont des approximations linéaires [14], dans la formule de Taylor on se limite à l'ordre un c'est-à-dire

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \frac{(dx)^2}{2!} + \dots}_{\text{termes négligés}} \quad (2.2.1)$$

où (2.2.1) est la formule de Taylor.

Cette formule est appliquée aux contraintes et cela du fait que ces dernières sont des fonctions. En tenant compte des trois points de la remarque ci dessus, on a chaque face du parallélépipède [Figure 2.3] placée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est soumise à trois contraintes, une normale et deux tangentielles, et cela en état d'équilibre, comme le montre [Figure 2.4 (a) et (b)].

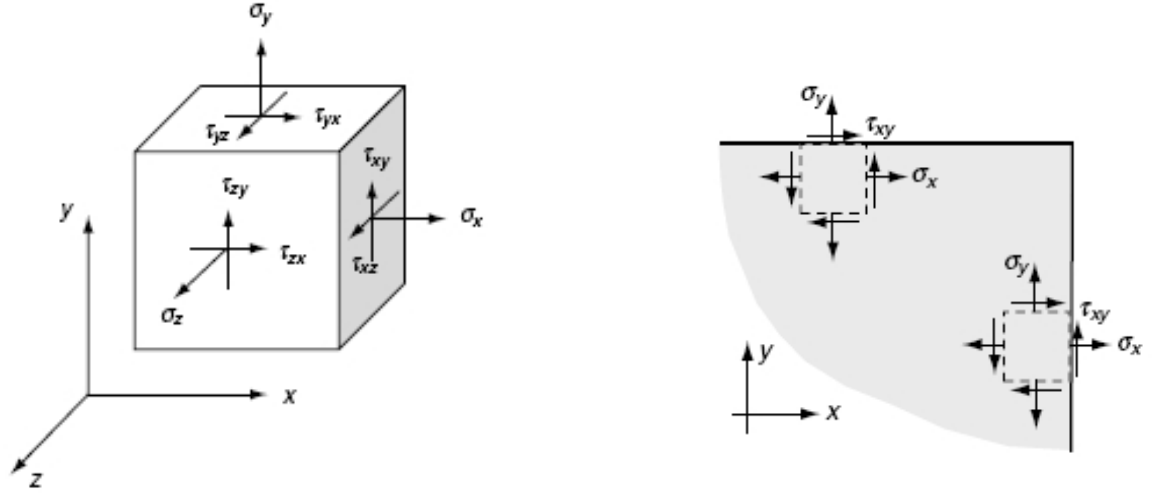


Figure 2.4: (a) Contraintes.

 (b) Contraintes sur la face $dxdy$.

Conditions d'équilibre sur les forces et les moments

a) Sur les forces En état d'équilibre, la somme de toutes les forces donne zéro.

La projection de ces dernières sur l'axe (ox)

En tenant compte de la surface sur la quelle agit chaque force [Section 2.1.1], on a

$$\begin{aligned} \sum F_{(ox)} &= -\sigma_x dydz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{zx} dx dy \\ &\quad + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + F_x dx dy dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

après simplification on trouve

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy + F_x dx dy dz = 0.$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0. \quad (2.2.2)$$

Avec le même principe, la projection sur (oy) conduit à

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0. \quad (2.2.3)$$

Et la projection sur (oz) , donne la relation

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0. \quad (2.2.4)$$

Remarque 2.6. *Le système*

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

formé par (2.2.2) , (2.2.3) et (2.2.4) est appelé système d'équilibre en contraintes.

Soit O_1 de composante $(\frac{dx}{2}, \frac{dy}{2}, \frac{dz}{2})$ le nouveaux origine du repère $O_1(\xi, \eta, \zeta)$, tel que $O_1\xi \parallel Ox$, $O_1\eta \parallel Oy$ et $O_1\zeta \parallel Oz$.

b) Sur les moments Les trois moments de forces provoquant la rotation de l'élément de volume autour des $O_1\xi$, $O_1\eta$ et $O_1\zeta$ respectivement sont égaux à zéro comme le montre cette figure.

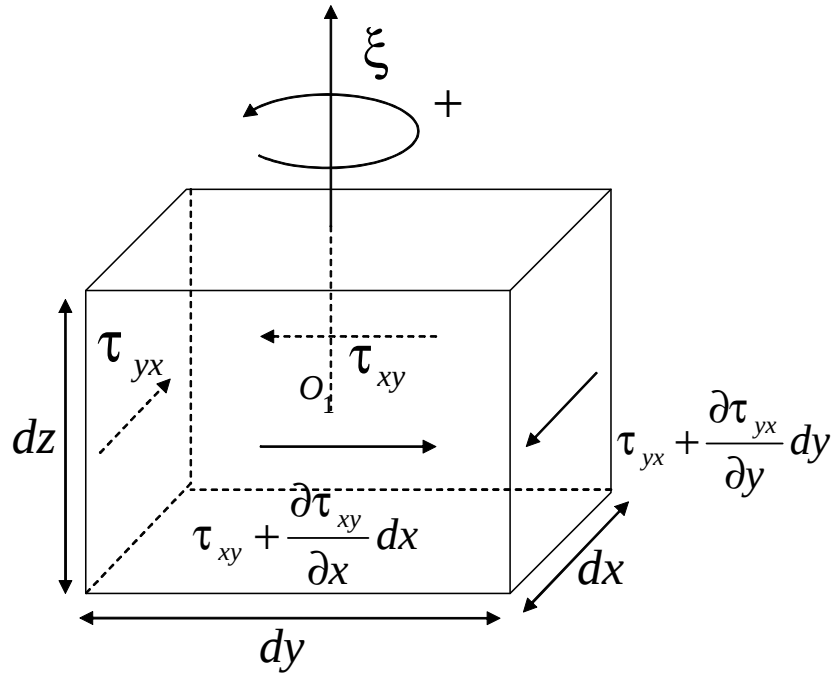


Figure 2.5: Rotation autour de $O_1\xi$

Remarque 2.7. *Par convention le sens positif est le sens antihoraire.*

Par rapport à $O_1\xi$ La somme des moments qui provoque la rotation autour de $O_1\xi$ est égale à zéro, et cela se traduit par

$$(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \tau_{xy}) dy dz \frac{dx}{2} - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \tau_{yx}) dx dz \frac{dy}{2} = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$2\tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz \frac{dx}{2} - 2\tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz \frac{dy}{2} = 0.$$

En négligeant les termes d'ordre quatre on trouve

$$\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0.$$

Ce qui donne

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Avec le même raisonnement sur $O_1\eta$ et $O_1\zeta$ on obtient respectivement

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

et

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

La loi de Hooke en coordonnées cartésiennes

La loi de Hooke permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations [14]

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \tau_{xy} = G\gamma_{yx}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

où les déformations s'obtiennent comme suit

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \text{ et} \\ \lambda = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}. \end{cases}$$

telles que

$$\begin{cases} G : \text{Module de cisaillement,} \\ \lambda : \text{Coefficient de Lamé,} \\ \nu : \text{Coefficient de Poisson,} \\ \theta : \text{Dilatation volumique.} \end{cases}$$

Equations d'équilibres en fonctions des déplacements

A l'aide de la loi de Hooke, on se ramène à des équations d'équilibre en déplacement.

La première équation du système d'équilibre en contraintes (2.2.5) est

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0. \quad (2.2.7)$$

Exprimons les termes de cette dernière en fonction des déplacements comme suit:

D'après la loi de Hooke on a

le premier terme de l'équation (2.2.7)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

le second est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right), \end{aligned}$$

et le troisième terme de l'équation (2.2.7) est exprimé par

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right).$$

En les remplaçant dans l'équation (2.2.7), on obtient

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + F_x = 0.$$

Après simplification⁽⁵⁾, on trouve

$$G \Delta u + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \theta + G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + F_x \right] = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$G \Delta u + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \theta + F_x = 0.$$

En divisant ensuite par G , on aura

$$\Delta u + \left(\frac{\lambda}{G} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \theta + \frac{F_x}{G} = 0.$$

⁽⁵⁾ $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Posons

$$\begin{aligned}\lambda &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{G} &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{G} + 1 &= \frac{2\nu}{1-2\nu} + 1 = \frac{2\nu + 1 - 2\nu}{1-2\nu} = \frac{1}{1-2\nu}.\end{aligned}$$

En posant $\frac{1}{1-2\nu} = \nu_0$, l'équation précédente devient

$$\Delta u + \nu_0 \frac{\partial}{\partial x} \theta + \frac{F_x}{G} = 0. \quad (2.2.8)$$

Prenons maintenant la deuxième équation du système d'équilibre en contraintes (2.2.5)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0. \quad (2.2.9)$$

La loi de Hooke permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ &= G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \theta + 2G \varepsilon_y) = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + 2G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) = G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right).$$

En les substituant dans (2.2.9), on obtient

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + 2G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) + F_y = 0.$$

En factorisant, on aboutit à

$$G \Delta v + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \theta + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + F_y = 0.$$

Ce qui est similaire à

$$G \Delta v + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \theta + G \frac{\partial}{\partial y} \theta + F_y = 0,$$

donc, l'équation précédente devient

$$G \Delta v + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \theta + F_y = 0.$$

C'est-à-dire

$$\Delta v + \nu_0 \frac{\partial}{\partial y} \theta + \frac{F_y}{G} = 0. \quad (2.2.10)$$

Prenons la troisième équation du système d'équilibre en contraintes (2.2.5) .

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0. \quad (2.2.11)$$

La loi de Hooke donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) = G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \\ &= G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) = G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \theta + 2G \varepsilon_z) = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta + 2G \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

En les échangeant dans (2.2.11) , on obtient

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta + 2G \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + F_z = 0,$$

par réduction, on trouve

$$G \Delta w + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_z = 0.$$

Ce qui est identique à

$$G \Delta w + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta + G \frac{\partial}{\partial z} \theta + F_z = 0.$$

Finalement, l'équation précédente devient

$$G \Delta w + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \theta + F_z = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta w + \nu_0 \frac{\partial}{\partial z} \theta + \frac{F_z}{G} = 0. \quad (2.2.12)$$

Remarque 2.8. le système suivant formé par les équations (2.2.8) , (2.2.10) et (2.2.12)

$$\begin{cases} \Delta u + \nu_0 \frac{\partial}{\partial x} \theta + \frac{F_x}{G} = 0 \\ \Delta v + \nu_0 \frac{\partial}{\partial y} \theta + \frac{F_y}{G} = 0 \\ \Delta w + \nu_0 \frac{\partial}{\partial z} \theta + \frac{F_z}{G} = 0 \end{cases}$$

est appelé système d'équilibre de Lamé ou système d'équilibre en déplacements.

2.2.2 En coordonnées cylindriques

Soient $O(r, \theta, z)$ les coordonnées cylindriques et Ω un élément de volume délimité par les faces curvilignes.

Supposons qu'il est soumis à une force F dont les composantes sont: F_r, F_θ et F_z .

On distingue trois sortes de contraintes normales⁽⁶⁾ [14]:

Contrainte radiale σ_r ,

contrainte angulaire σ_θ ,

contrainte axiale σ_z .

Et six contraintes tangentielles⁽⁷⁾:

Contraintes tangentielles axiales: τ_{rz} et $\tau_{\theta z}$,

contraintes tangentielles angulaires: $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{z\theta}$,

contraintes tangentielles radiales: τ_{zr} et $\tau_{\theta r}$.

Comme le montre la [Figure 2.6].

Remarque 2.9. *On a chaque face l'élément [Figure 2.6], est soumise à trois contraintes, une normale et deux tangentielles, et cela en état d'équilibre.*

⁽⁶⁾La contrainte normale c'est une contrainte qui est normale sur la surface sur la quelle elle agit.

⁽⁷⁾Chaque contrainte normale est associé par deux contraintes tangentielles.

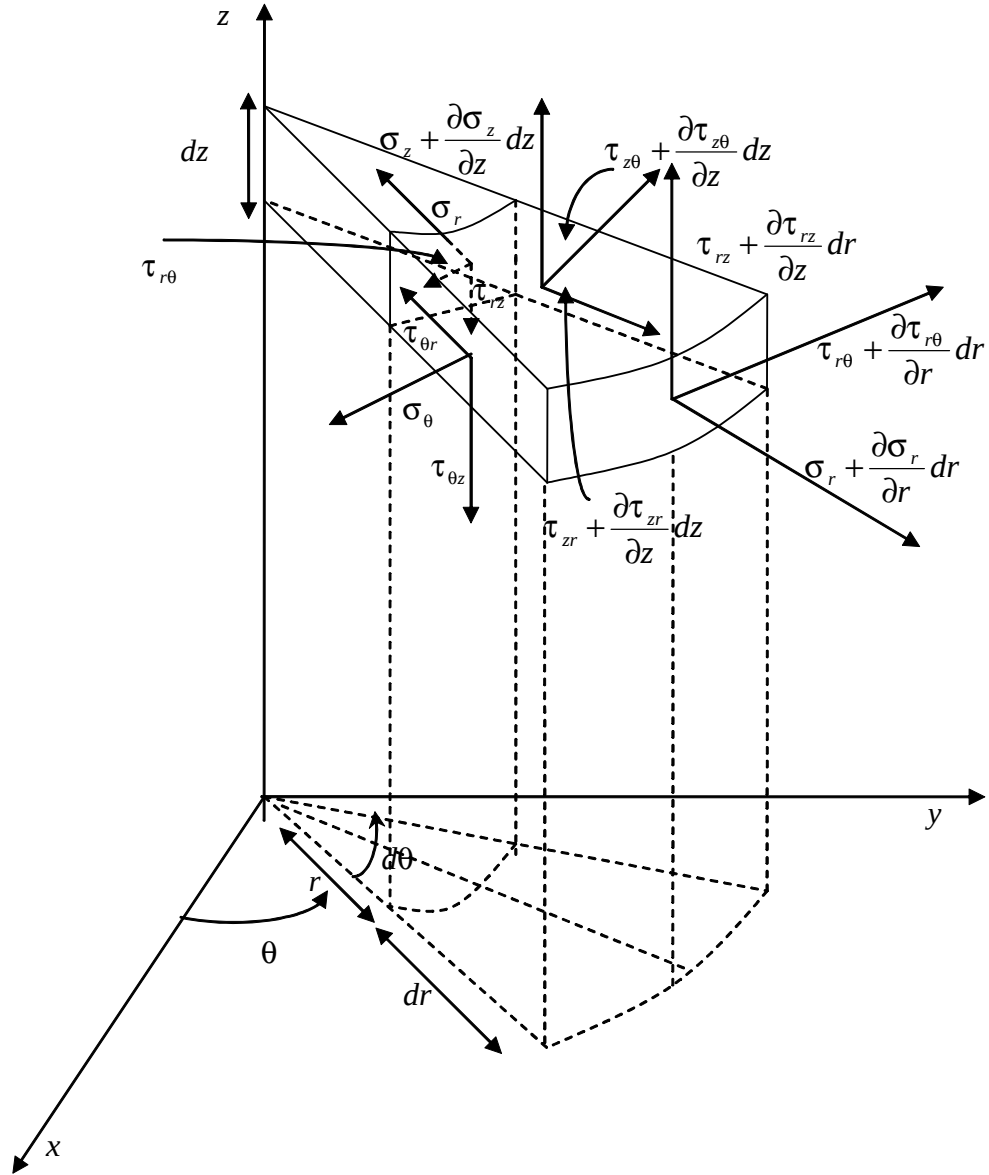


Figure 2.6: Element cylindrique

Remarque 2.10. Les contraintes normales de traction sont considérées comme étant positives, alors que celles de compression sont négatives, (le même principe appliqué en cas cartésien).

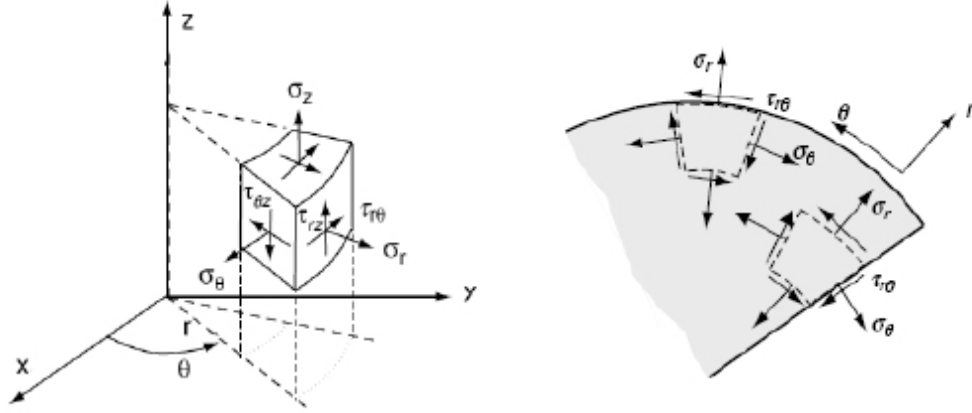


Figure 2.7: (a) Contraintes cylindriques. (b) Contraintes sur la surface $drd\theta$.

Soit $O_1\xi\eta\zeta$ un système de coordonnées cylindriques, tels que, les composantes de O_1 sont $(r + \frac{dr}{2}, \theta + \frac{d\theta}{2}, z + \frac{dz}{2})$. $O_1\xi$ et $O_1\eta$ sont les vecteurs radial et angulaire, respectivement, alors que $O_1\zeta \parallel Oz$.

L'élément Ω est en état d'équilibre si la somme des projections des forces sur chacun des axes $O_1\xi, O_1\eta$ et $O_1\zeta$ est nulle, idem pour les moments.

Conditions d'équilibre sur les forces et les moments

a) Sur les forces La projection sur $O_1\xi$

A l'état d'équilibre, la somme de toutes les forces égale à zéro donc la somme des projections de ces forces sur chaque axe égale à zéro [Figure 2.6] , [Figure 2.8] et [Section 2.1.1], on a

$$\begin{aligned} \sum F_{O_1\xi} = & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz \\ & + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) \left[(r + dr)^2 \frac{d\theta}{2} - r^2 \frac{d\theta}{2} \right] - \tau_{zr} \left[(r + dr)^2 \frac{d\theta}{2} - r^2 \frac{d\theta}{2} \right] \\ & + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) dr dz - \sigma_\theta \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) dr dz \\ & + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) \left(\cos \frac{d\theta}{2} \right) dr dz - \tau_{\theta r} \left(\cos \frac{d\theta}{2} \right) dr dz \\ & + F_r \left[(r + dr)^2 \frac{d\theta}{2} dz - r^2 \frac{d\theta}{2} dz \right] = 0. \end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned} (r + dr)^2 \frac{d\theta}{2} - r^2 \frac{d\theta}{2} &= [r^2 + 2rdr + (dr)^2] \frac{d\theta}{2} - r^2 \frac{d\theta}{2} \\ &= rdrd\theta + (dr)^2 \frac{d\theta}{2}, \end{aligned}$$

et l'angle $d\theta$ est suffisamment petit, par suite on peut écrire [voir la Remarque 2.5. (iii)]

$$\cos \frac{d\theta}{2} = 1, \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2},$$

et en négligeant les termes d'ordre quatre, on aboutit à

$$\sigma_r r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} r dr d\theta dz - \sigma_\theta r dr d\theta dz + F_r r dr d\theta dz = 0.$$

En devisant ensuite cette équation par $r dr d\theta dz$, on trouve

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0. \quad (2.2.13)$$

Ce qui donne la première équation d'équilibre en contraintes.

La projection sur $O_1\eta$

La somme de toutes les projections sur $O_1\eta$ donne zéro;

$$\begin{aligned} \sum F_{O_1\eta} &= \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{r\theta} r dr d\theta dz \\ &\quad + \left(\tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} dz \right) [(r + dr)^2 - r^2] \frac{d\theta}{2} - \tau_{z\theta} [(r + dr)^2 - r^2] \frac{d\theta}{2} \\ &\quad + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \left(\cos \frac{d\theta}{2} \right) r dr dz \\ &\quad - \left(\sigma_\theta \cos \frac{d\theta}{2} \right) r dr dz + \left[\left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) + \tau_{\theta r} \sin \frac{d\theta}{2} \right] r dr dz \\ &\quad + F_\theta \left[(r + dr)^2 \frac{d\theta}{2} dz - r^2 \frac{d\theta}{2} dz \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

En tenant compte de

$$(r + dr)^2 \frac{d\theta}{2} - r^2 \frac{d\theta}{2} = r dr d\theta + (dr)^2 \frac{d\theta}{2}$$

et

$$\cos \frac{d\theta}{2} = 1,$$

et en négligeant les termes d'ordre quatre comme on a fait précédemment, on obtient

$$\frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} r dr d\theta dz + F_\theta r dr d\theta dz = 0.$$

En divisant ensuite cette équation par $rdrd\theta dz$, on trouve

$$\frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + F_\theta = 0 \quad (2.2.14)$$

Qui traduit la deuxième équation d'équilibre en contraintes. Cette figure montre les surfaces sur les quelles agissent les contraintes qui apparaissent dans cette équation.

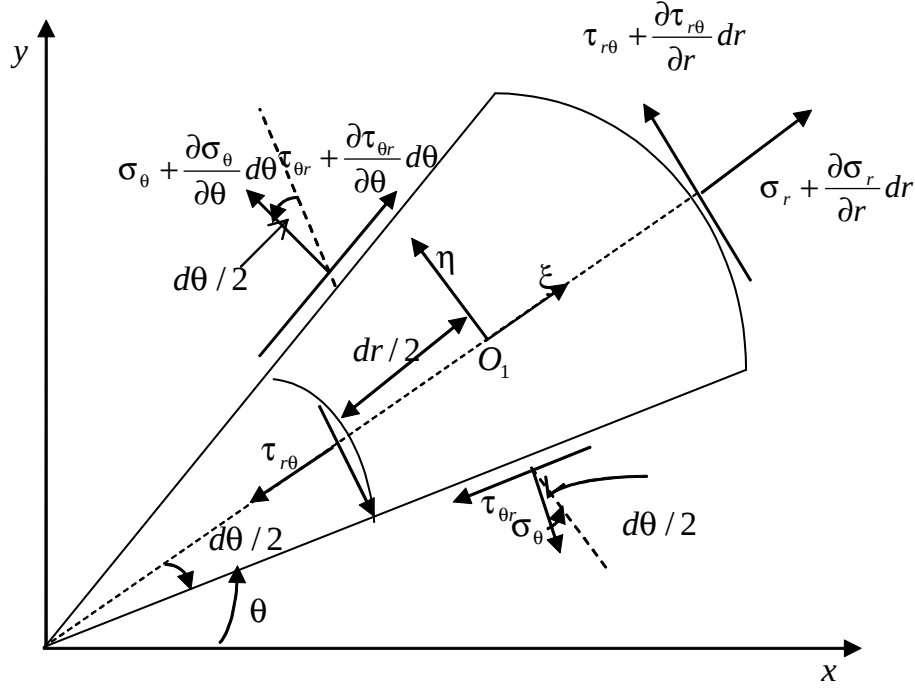


Figure 2.8: Contraintes cylindriques

Remarque 2.11. On va montrer plus tard que: $\tau_{rz} = \tau_{zr}$, $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ et $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$.

La projection sur $O_1\zeta$

La somme de toutes les projections sur $O_1\zeta$ donne zéro

$$\begin{aligned} \sum F_{O_1\zeta} &= \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r dr d\theta - \sigma_z r dr d\theta + \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{\theta z} dr dz \\ &\quad + \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{rz} r d\theta dz + F_z r dr d\theta dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} dr d\theta dz + \tau_{rz} dr d\theta dz + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr d\theta dz + F_z r dr d\theta dz = 0.$$

En divisant par $rdrd\theta dz$, on aura

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + F_z = 0. \quad (2.2.15)$$

Qui exprime la troisième équation d'équilibre en contraintes.

Définition 2.3. Les trois équations d'équilibre précédentes, à savoir (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.15) forment le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \\ \frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + F_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + F_z = 0 \end{cases} \quad (2.2.16)$$

qui est appelé système d'équilibre en contraintes.

b) sur les moments En état d'équilibre la somme des moments qui provoquent la rotation autour de chaque axe est égale à zéro.

Moments par rapport à l'axe $O_1\xi$ [Figure 2.9].

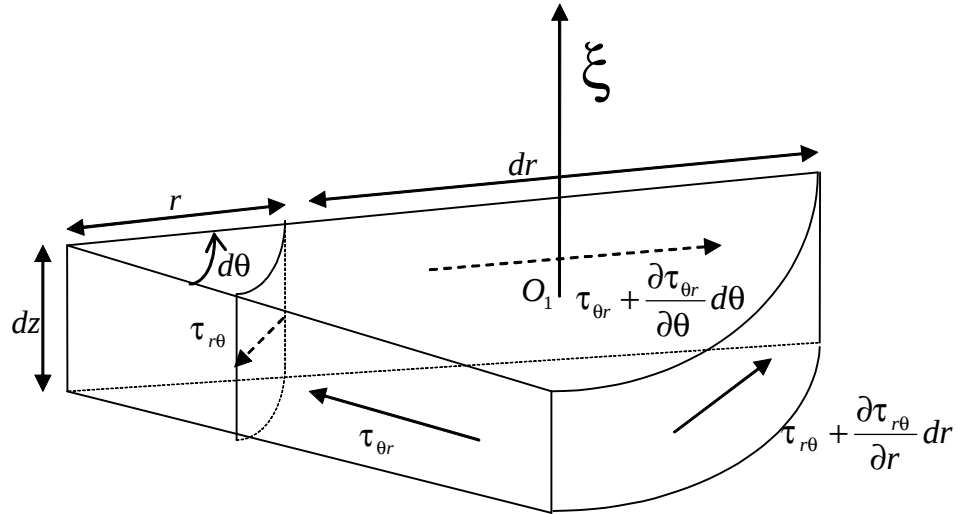


Figure 2.9: Rotation de l'élément cylindrique autour de l'axe $O_1\xi$

En tenant compte de l'expression du bras qui correspond à chaque force [Section 2.1.1], on obtient

$$\begin{aligned} \sum M_{O_1\xi} &= \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz \frac{dr}{2} + \tau_{r\theta} r d\theta dz \frac{dr}{2} - \\ &= \left[\left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) (r + dr) + \tau_{\theta r} dr dz \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) (r + dr) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Car le bras de $\tau_{\theta r}$ (resp $\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta$) est calculé ainsi

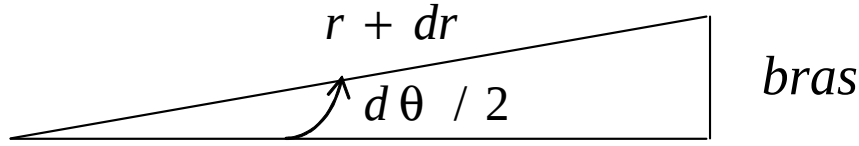


Figure 2.10: Bras

$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{bras}{r + dr} \implies bras = \sin \frac{d\theta}{2} \times (r + dr),$$

et comme⁽⁸⁾

$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2},$$

alors on a

$$\tau_{r\theta} r d\theta dz - \tau_{\theta r} r dr dz = 0.$$

Ce qui donne

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}.$$

⁽⁸⁾Voir la Remarque 2.5. (iii).

Moments par rapport à l'axe $O_1\eta$ [Figure 2.11].

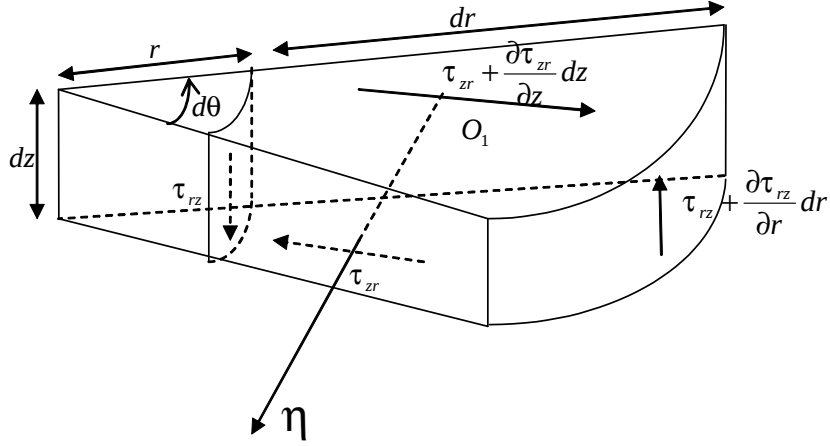


Figure 2.11: Rotation de l'element cylindrique autour de $O_1\eta$

La somme des moments qui provoquent la rotation autour de $O_1\eta$ est nulle.

Avec le même principe on a

$$\begin{aligned} \sum M_{O_1\eta} &= \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz \frac{dr}{2} + \tau_{rz} r d\theta dz \frac{dr}{2} - \\ &\quad \left[\left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) dr dz \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) (r + dr) + \tau_{zr} dr dz \left(\sin \frac{d\theta}{2} \right) (r + dr) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Après avoir négligé les termes d'ordre quatre, on obtient

$$\tau_{rz} r dr d\theta dz - \tau_{zr} dr d\theta dz = 0,$$

d'où enfin

$$\tau_{rz} = \tau_{zr}.$$

Moments par rapport à l'axe $O_1\zeta$ [Figure 2.12].

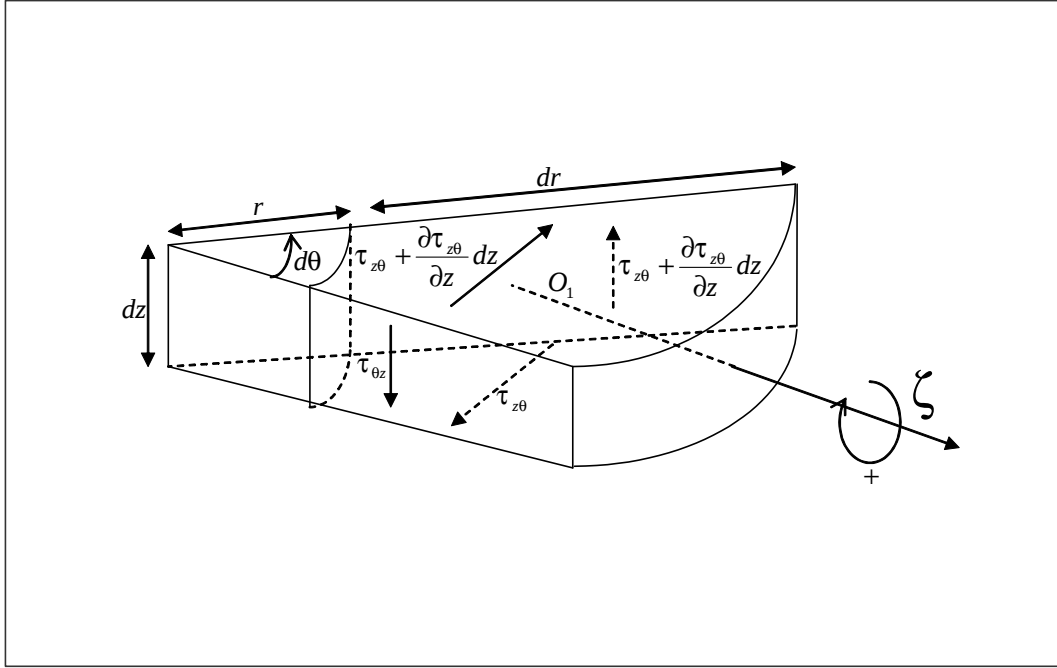


Figure 2.12: Rotation de l'élément cylindrique autour de l'axe $O_1\zeta$

$$\begin{aligned} \sum M_{O_1\zeta} &= \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta \right) dr d\left(r + \frac{dr}{2}\right) \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{\theta z} dr dz \left(r + \frac{dr}{2}\right) - \\ &\quad \left[\left(\tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} dz \right) r dr d\theta \frac{dz}{2} + \tau_{z\theta} r dr d\theta \frac{dz}{2} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}.$$

La loi de Hooke en coordonnées cylindriques La loi de Hooke donne les contraintes en fonction des déformations [14] comme suit

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\theta + 2G\varepsilon_r, \tau_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \\ \sigma_\theta = \lambda\theta + 2G\varepsilon_\theta, \tau_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z} \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz} \end{cases} \quad (2.2.17)$$

$$\text{où } \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \text{ et } \theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \text{ et } 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre en fonction des déplacements En remplaçant les expressions des contraintes données par la loi de Hooke dans le système d'équilibre en contraintes, on obtient un système d'équilibre en déplacements. En effet;

1) Exprimons les dérivées des contraintes $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$, $\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z}$ et $\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}$ en fonction des déplacements u_r , u_θ et u_z

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (\lambda \theta + 2G \varepsilon_r) = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \theta + 2G \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (2G \varepsilon_{rz}) = 2G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ &= 2G \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} &= G \frac{\partial}{\partial r} (2G \varepsilon_{\theta z}) = 2G \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \\ &= 2G \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial r} \right]\end{aligned}$$

En les remplaçant dans la première équation de système (2.2.16) et en tenant compte de l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques⁽⁹⁾, on obtient

$$\Delta u_r + \nu_0 \frac{\partial}{\partial r} \theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{F_r}{G} = 0$$

Qui représente la première équation d'équilibre en déplacement

2) Les expressions de $\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}$, $\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z}$ et $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}$ sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ &= G \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} &= G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ &= G \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda \theta + 2G \varepsilon_\theta) = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \theta + 2G \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \theta + 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right).\end{aligned}$$

⁽⁹⁾ $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

En substituant ces expressions et celles de $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{\theta r}$ données par la loi de Hooke dans (2.2.16) , on trouve

$$\Delta u_\theta + \nu_0 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{F_\theta}{G} = 0.$$

Qui donne la deuxième équation d'équilibre en déplacement

3) En explicitant $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$, $\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}$, on trouve

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta + 2G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \theta + 2G \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} &= G \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ &= G \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = G \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right).$$

En remplaçant ces expressions et celle de τ_{rz} donnée par (2.2.17) dans la troisième équation de (2.2.16) , on aura

$$\Delta u_z + \nu_0 \frac{\partial}{\partial z} \theta + \frac{F_z}{G} = 0,$$

appelée troisième équation d'équilibre en déplacements.

Définition 2.4. Les trois équations d'équilibre précédentes forme le système

$$\begin{cases} \Delta u_r + \nu_0 \frac{\partial}{\partial r} \theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{F_r}{G} = 0 \\ \Delta u_\theta + \nu_0 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{F_\theta}{G} = 0 \\ \Delta u_z + \nu_0 \frac{\partial}{\partial z} \theta + \frac{F_z}{G} = 0 \end{cases} \quad (2.2.18)$$

appelé système d'équilibre en déplacement de Lamé

Cas axisymétrique:

Définition 2.5. On dit qu'une déformation est axisymétrique, si les fonctions qui représentent cette dernière ne dépendent pas de l'angle polaire θ .

Remarque 2.12. Dans ce cas, le déplacement angulaire est nul.

Si les fonctions de déplacement correspondant à un cas axisymétrique, alors le système de Lamé est le suivant:

$$\begin{cases} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\nu_0}{\nu_*} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{\nu_*} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0 \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \nu_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nu_0 \left[r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

où $(1 + \nu_0) = \nu_*$, $\frac{1}{1 - 2\nu} = \nu_0$.

En effet;

Ce cas est axisymétrique alors on ne prend pas en considération les termes dépendant de l'angle polaire θ .

La première équation s'obtient à partir de la première équation du système de Lamé (2.2.18), c'est-à-dire

$$\Delta u_r + \nu_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (2.2.19)$$

En tenant compte de l'indépendance des expressions de l'équation (2.2.19) de θ , on obtient

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \nu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

Par factorisation, on trouve

$$(1 + \nu_0) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + (1 + \nu_0) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - (1 + \nu_0) \frac{u_r}{r^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0.$$

Donc

$$(1 + \nu_0) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0,$$

comme $1 + \nu_0 = \nu_*$, ce qui donne

$$\nu_* \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \nu_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0.$$

En divisant par ν_* , on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\nu_0}{\nu_*} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{\nu_*} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0.$$

Remarquons ensuite que

$$\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2},$$

alors la première équation est

$$r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\nu_0}{\nu_*} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{\nu_*} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0.$$

La deuxième équation du système Lamé (2.2.18), tous ses termes dépendent de θ , donc on ne va pas la prendre en considération.

Prenons maintenant la troisième équation du système d'équilibre de Lamé (2.2.18), c'est-à-dire

$$\Delta u_z + \nu_0 \frac{\partial}{\partial z} \theta + \frac{F_z}{G} = 0.$$

En remplaçant Δu_z et θ par leurs expressions, on trouve

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Après factorisation, on aboutit à

$$(1 + \nu_0) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \nu_0 \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0.$$

Or, $\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$ et $\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$,

ainsi

$$r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \nu_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nu_0 \left[r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right] = 0.$$

Remarque 2.13. Dans le cas axisymétrique les contraintes sont données en fonction des déplacements radial et axial comme suit [14]

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_z = \nu_0 \left[(1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) \right] \\ 2\tau_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases} \quad \text{où } (u, w) = 2G(u_r, u_z)$$

Ces dernières peuvent être déduites directement à partir des formules de la loi de Hooke en coordonnées cylindriques.

En effet;

La loi de Hooke donne la contrainte radiale σ_r par l'expression

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2G \varepsilon_r.$$

En tenant compte du fait que le problème est axisymétrique, on a

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ &= (2G + \lambda) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Sachant que $\lambda = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}$, on trouve alors

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G(1 + \nu\nu_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2G\nu\nu_0 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) \\ &= (1 + \nu\nu_0) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu\nu_0 \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} + \nu\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

D'où le résultat cherché.

La contrainte axiale σ_z est donnée par le système (2.2.17) comme suit

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z.$$

Et comme le problème est axisymétrique, alors on a

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (2G + \lambda) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r \\ &= 2G(1 + \nu\nu_0) \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2G\nu\nu_0 \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2G\nu\nu_0 \frac{u_r}{r} \\ &= (1 + \nu\nu_0) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu\nu_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \nu\nu_0 \frac{u}{r} \\ &= (1 + \nu\nu_0) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right).\end{aligned}$$

Or $\nu_0 = \frac{1}{1-2\nu}$; par conséquent

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \\ &= \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \\ &= (1-\nu)\nu_0 \frac{\partial w}{\partial z} + \nu\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \\ &= \nu_0 \left[(1-\nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right],\end{aligned}$$

et comme $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru)$, donc on a

$$\sigma_z = \nu_0 \left[(1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) \right].$$

La contrainte tangentielle axiale τ_{rz} est exprimée par la loi de Hooke comme suit

$$\tau_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}.$$

En tenant compte de l'indépendances des expressions de θ . On aura

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

2.3 Quelques méthodes de résolution

Dans ce paragraphe, on donne le principe de Trefftz permettant la résolution du système homogène de Lamé (absence des forces volumiques). Ce qui permet ensuite d'obtenir les solutions générales des premier⁽¹⁰⁾ et deuxième⁽¹¹⁾ problèmes fondamentaux d'un demi-espace élastique à l'aide de la transformation de Fourier. A titre d'application, on étudiera le problème de Boussinesq, action d'une force concentrée sur le demi-espace élastique [13].

Dans toute la suite ; les domaines sont supposés homogène et isotrope.

2.3.1 Principe de Trefftz

Soit le système homogène de Lamé

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.1)$$

où λ, μ constantes de Lamé et $u = (u_1, u_2, u_3)$ vecteur déplacement.

θ dilatation volumique donnée par $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$.

Remarquons tout d'abord que, θ est une fonction harmonique⁽¹²⁾ en effet, en dérivant les équations de la formule (2.3.1) par rapport à x_i , on trouve

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} = 0 \\ \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta u_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0 \\ \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta u_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

⁽¹⁰⁾ Les conditions aux limites et sous la forme $u|_{\partial\Omega} = f(x)$.

⁽¹¹⁾ Les conditions aux limites et sous la forme $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = f(x)$.

⁽¹²⁾ u est une fonction harmonique si elle vérifie $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$, c'est-à-dire $\Delta u = 0$, où Δ est l'opérateur de Laplace.

Or, $\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u_i = {}^{(13)} \Delta \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$; par conséquent

$$(2.3.2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \Delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} = 0 \\ \mu \Delta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0 \\ \mu \Delta \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = 0 \end{cases}$$

En sommant ces trois équations, on obtient

$$\mu \left(\Delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \Delta \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \Delta \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + (\lambda + \mu) \Delta \theta = 0.$$

Et comme $\Delta(f + g + h) = {}^{(14)} \Delta f + \Delta g + \Delta h$, il vient

$$\mu \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + (\lambda + \mu) \Delta \theta = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\mu \Delta \theta + (\lambda + \mu) \Delta \theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta \theta + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \Delta \theta = 0 &\Rightarrow \Delta \theta \left(1 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \Delta \theta = 0 \end{aligned}$$

Finalement, θ est une fonction harmonique.

En appliquant maintenant l'opérateur de Laplace Δ à chacune des équations (2.3.1), on trouve

$$\mu \Delta^2 u_i + (\lambda + \mu) \Delta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3$$

ou encore

$$\mu \Delta^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta \theta = 0, i = 1, 2, 3.$$

Puisque $\Delta \theta = 0$, on a donc $\mu \Delta^2 u_i = 0$, il vient $\Delta^2 u_i = 0$.

C'est-à-dire que u_i est une fonction bi-harmonique⁽¹⁵⁾.

Remarque 2.14. Ainsi, les solutions du système (2.3.1), sont des fonctions bi-harmonique.

D'après le théorème d'Almansi, qui affirme que toute fonction bi-harmonique s'exprime sous l'une des deux formes suivantes:

$$\varphi_i + x_i \psi_i \text{ et } \varphi_i + r^2 \psi_i, \text{ où } \varphi_i, \psi_i \text{ sont des fonctions harmoniques et } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

⁽¹³⁾ L'une des propriétés de l'opérateur de Laplace.

⁽¹⁴⁾ L'une des propriétés de l'opérateur de Laplace.

⁽¹⁵⁾ u est une fonction bi-harmonique si $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$, où Δ est l'opérateur de Laplace.

Le choix de l'une des représentations est conditionné par la position du problème.

Par exemple, pour le cas d'un demi-espace élastique correspond à $x_3 \geq 0$, il est préférable de chercher les solutions du système (2.3.1) sous la forme

$$\varphi_i + x_3 \psi_i \text{ avec } \Delta \varphi_i = \Delta \psi_i \text{ et } i = 1, 2, 3 \quad (2.3.3)$$

Remarque 2.15. Les fonctions φ et ψ_i sont liées par une équation différentielle, car si on prend l'expression de u_i donnée par la formule (2.3.3), et on la remplace dans (2.3.1), on trouve

$$2 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi_i + k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + x_3 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \right) \right) = 0,$$

où

$$k = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}.$$

En effet; on a

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \text{ où } \lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}, \quad (2.3.4)$$

et on a aussi $u_i = \varphi_i + x_3 \psi_i$ et $\Delta u_i = \Delta \varphi_i + \Delta (x_3 \psi_i)$.

Donc, (2.3.4) devient

$$\mu \Delta (\varphi_i + x_3 \psi_i) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \text{ où } \lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu},$$

ou encore

$$\mu (\Delta \varphi_i + \Delta (x_3 \psi_i)) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \text{ où } \lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}. \quad (2.3.5)$$

Calculons maintenant $\Delta (x_3 \psi_i)$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$,

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \Delta (x_3 \psi_i) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (x_3 \psi_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (x_3 \psi_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (x_3 \psi_i) \\ &= x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \psi_i + x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \psi_i + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\psi_i + x_3 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_3} \right) \\ &= x_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \psi_i + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \psi_i + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \psi_i \right) + 2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_3} \\ &= x_3 \Delta \frac{\partial \psi_i}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + x_3 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \right) \right).$$

En remplaçant les expressions de $\Delta(x_3\psi_i)$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ dans (2.3.5), on trouve

$$2\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_i + k\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + x_3 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \right) \right) = 0.$$

D'où le résultat cherché.

Remarque 2.16. Remarquons aussi que, si

$$\psi_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \text{ avec } \Psi \text{ est une fonction harmonique,}$$

alors l'équation précédente se simplifie donc, et elle s'écrit sous la forme

$$2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + k\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Et en intégrant cette relation par rapport à x_i et considérons que la constante d'intégration est nulle, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} &= -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) \\ &= -\frac{1}{3 - 4\mu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

En effet;

$$(2 - k) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = -k \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right),$$

et comme $2 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{3\mu + \lambda}{\mu}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} &= -\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \times \frac{\mu}{3\mu + \lambda} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) \\ &= -\left(\frac{\lambda + \mu}{3\mu + \lambda} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

et on a

$$-\left(\frac{\lambda + \mu}{3\mu + \lambda}\right) = \frac{\frac{2\nu}{1-2\nu} + 1}{\frac{2\nu}{1-2\nu} + 3} = \frac{-1}{3 - 4\nu}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{-1}{3 - 4\nu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Finalement, on représente la solution de l'exemple cité à l'aide des fonctions φ_i et Ψ , c'est-à-dire par

$$u_i = \varphi_i + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i},$$

et on détermine les fonctions inconnues à l'aide des conditions aux limites et la relation (2.3.6) .

2.3.2 Demi-espace élastique (premier problème fondamental)

Etudions le problème de demi-espace élastique ($x_3 \geq 0$), si les déplacements sont donnés pour $x_3 = 0$ (premier problème fondamental), A cet effet, on résout le système de Lamé donné par

$$\Delta u_i + k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad x_3 > 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.7)$$

avec les conditions aux limites

$$u_i(x_1, x_2, 0) = U_i(x_1, x_2). \quad (2.3.8)$$

Suivant le principe de Trefftz, on cherche la solution du système (2.3.7) sous la forme

$$u_i = \varphi_i + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.9)$$

avec φ_i et Ψ sont des fonctions harmoniques et telles que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = -\frac{1}{3 - 4\nu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right). \quad (2.3.10)$$

A l'aide des conditions (2.3.8) et (2.3.9) , on obtient

$$u_i(x_1, x_2, 0) = U_i(x_1, x_2) = \varphi_i(x_1, x_2, 0).$$

Ainsi, nous avons une condition limite connue pour la fonction harmonique φ_i .

Supposons qu'à l'infini, les fonctions auxiliaires tendent vers 0; et au voisinage de zéro, elles tendent vers 1.

La transformation double de Fourier donne

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2, \quad (2.3.11)$$

et

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (2.3.12)$$

Déterminons φ_i et Ψ

En tenant compte des relations:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 = -i\alpha_1 \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3),$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 = -i\alpha_2 \tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$$

L'équation harmonique $\Delta \varphi_i = 0$, après multiplication de deux membres de cette dernière par $\exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))$ et intégration par rapport à x_1 et x_2 , on obtient

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_i}{\partial x_3^2} - \gamma^2 \tilde{\varphi}_i = 0, \text{ où } \gamma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

En effet;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi_i \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_3^2} \right) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$-\alpha_1^2 \tilde{\varphi}_i - \alpha_2^2 \tilde{\varphi}_i + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_i}{\partial x_3^2} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_i}{\partial x_3^2} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \tilde{\varphi}_i = 0, \quad (2.3.13)$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_i}{\partial x_3^2} - \gamma^2 \tilde{\varphi}_i = 0, \text{ avec } \gamma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

La solution de l'équation (2.3.13) à l'aide du polynôme caractéristique est

$$\tilde{\varphi}_i = \alpha \exp(-\gamma x_3) + \beta \exp(\gamma x_3) = \alpha \exp(-\gamma x_3),$$

$\beta = 0$, car à l'infinie $\tilde{\varphi}_i = 0$ (d'après l'hypothèse).

Comme

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.3.14)$$

où $\tilde{U}_i$ est la transformée de U_i .

Ainsi, on trouve

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3), \quad (2.3.15)$$

et pour la fonction Ψ harmonique, on aura

$$\tilde{\Psi}(\alpha_1, \alpha_2) = B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3).$$

Dans la relation (2.3.10), par passage à la transformation double, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_3} = \frac{-1}{3-4\nu} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_3}{\partial x_3} - i\alpha_1 \tilde{\varphi}_1 - i\alpha_2 \tilde{\varphi}_2 \right). \quad (2.3.16)$$

En remplaçant les expressions (2.3.14) et (2.3.15) dans (2.3.16), on aura la constante $B(\alpha_1, \alpha_2)$ comme suit

$$\begin{aligned} -\gamma B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3) &= \frac{-1}{3-4\nu} (-\gamma \tilde{U}_3(\alpha_1, \alpha_2) \\ &\quad - i\alpha_1 \tilde{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) - i\alpha_2 \tilde{U}_2(\alpha_1, \alpha_2)) \exp(-\gamma x_3), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} B(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{-1}{\gamma(3-4\nu)} (\gamma \tilde{U}_3(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_1 \tilde{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_2 \tilde{U}_2(\alpha_1, \alpha_2)) \\ &= \frac{-1}{\gamma(3-4\nu)} \left(i\alpha_1 \tilde{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_2 \tilde{U}_2(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma \tilde{U}_3(\alpha_1, \alpha_2) \right). \end{aligned}$$

Donc, finalement

$$\tilde{\Psi}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-1}{\gamma(3-4\nu)} \left[i\alpha_1 \tilde{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_2 \tilde{U}_2(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma \tilde{U}_3(\alpha_1, \alpha_2) \right] \exp(-\gamma x_3). \quad (2.3.17a)$$

On applique la transformée inverse aux relations (2.3.15) et (2.3.17a), on trouve

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3 + i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

et

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi(3-4\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i\alpha_1}{\gamma} \tilde{U}_1 + \frac{i\alpha_2}{\gamma} \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 \right) \exp(-\gamma x_3 + i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Ce qui permet de trouver les déplacements à l'aide de la formule (2.3.9).

2.3.3 Demi-espace élastique (deuxième problème fondamental)

Notation 2.1. Dans cette partie, σ_{ij} est une $\begin{cases} \text{contrainte normale si } i = j \\ \text{contrainte tangentielle si } i \neq j \end{cases}$

Soit le demi-espace élastique et tel que à la frontière $x_3 = 0$, les contraintes $P_i(x_1, x_2)$ sont données, on détermine donc la solution du système suivant

$$\Delta u_i + k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad x_3 > 0 \text{ où } i = 1, 2, 3 \quad (2.3.18)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} \sigma_{31}(x_1, x_2, 0) = -P_1(x_1, x_2) \\ \sigma_{32}(x_1, x_2, 0) = -P_2(x_1, x_2) \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = -P_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.3.19)$$

Cherchons les solutions sous la forme

$$u_i = \varphi_i + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.20)$$

Les fonctions φ_i et Ψ sont des fonctions harmoniques, telles que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = -\frac{1}{3 - 4\nu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right). \quad (2.3.21)$$

Exprimons les conditions limites à l'aide de la loi de Hooke

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3.22)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker⁽¹⁶⁾ et

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i = j \\ \tau_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc, les conditions (2.3.19) et (2.3.21) nous permettent de trouver

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{-P_1}{\mu} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \frac{-P_2}{\mu} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + 2(1 - 2\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \frac{-P_3}{\mu} \end{cases} \quad (2.3.23)$$

⁽¹⁶⁾est une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon. Elle est symbolisée par la lettre δ (delta minuscule) de l'alphabet grec. Elle est considérée comme une convention d'écriture plutôt que comme une fonction. Ce symbole a été nommé en l'honneur du mathématicien Léopold Kronecker (1823 - 1891).

En effet;

ona

$$\sigma_{31} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \lambda \delta_{31} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

or, $\delta_{31} = 0$, et $u_i = \varphi_i + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$, $i = 1, 3$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \mu \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \left(x_3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \left(x_3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Pour $x_3 = 0$, il vient

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{-P_1}{\mu},$$

d'où la première condition, avec le même principe, on trouve les deux autres conditions.

Introduisons trois fonctions harmoniques auxiliaires Ω_i , $i = 1, 2, 3$, telles que

$$\Delta \Omega_i = 0, \quad x_3 > 0, \quad (2.3.24)$$

vérifiant les conditions

$$\Omega_i(x_1, x_2, 0) = \frac{-P_i(x_1, x_2)}{\mu}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3.25)$$

Sur le plan $x_3 = 0$ on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \Omega_1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \Omega_2 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + 2(1 - 2\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \Omega_3 \end{cases} \quad (2.3.26)$$

Les relations (2.3.26), restent aussi valable pour $x_3 > 0$, car les deux membres de l'égalité (2.3.26) sont des fonctions harmoniques et elle sont égales à $P_i(x_1, x_2)$ sur la frontière (principe de la valeur maximale).

En dérivant les trois équations de (2.3.26); chaque équation d'ordre i par rapport à la variable x_i et en sommant ensuite les trois équations obtenues, on trouve

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} + (1 - 4\nu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_3} \quad (2.3.27)$$

En tenant compte de (2.3.21), on arrive à

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_3} \right). \quad (2.3.28)$$

Ainsi, pour la résolution du système de Lamé, on trouve les solutions Ω_i des équations harmoniques (2.3.24) vérifiant (2.3.25). Et Ψ s'obtient en intégrant (2.3.28). Les constantes d'intégration sont nulles car les Ψ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}$ sont égales à zéro à l'infini. On détermine φ_i à l'aide de (2.3.26) qui est valable pour $x_3 \geq 0$. Ayant les fonctions φ_i et $\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}$, on exprime les déplacements à l'aide de la relation (2.3.20).

Passons maintenant à la résolution de l'équation (2.3.24), et cela en utilisant la méthode de la transformation double de Fourier.

L'équation transformée⁽¹⁷⁾ est

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}_i}{\partial x_3^2} - \gamma^2 \tilde{\Omega}_i = 0.$$

Sa solution est

$$\tilde{\Omega}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{-\tilde{P}_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3)}{\mu}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad (2.3.29)$$

avec $\tilde{P}_i$ transformée de P_i .

Les fonctions Ψ et φ_i sont aussi données respectivement par

$$\tilde{\Psi}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3), \quad (2.3.30)$$

et

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = C_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3). \quad (2.3.31)$$

La transformée de (2.3.28), sera

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2} \left(-i\alpha_1 \tilde{\Omega}_1 - i\alpha_2 \tilde{\Omega}_2 + \frac{\partial \tilde{\Omega}_3}{\partial x_3} \right).$$

Et tenant compte de (2.3.29), on obtient

$$B = -\frac{1}{2\mu\gamma^2} \left(i\alpha_1 \tilde{P}_1 + i\alpha_2 \tilde{P}_2 + \gamma \tilde{P}_3 \right). \quad (2.3.32)$$

Les relations (2.3.26) sont valables pour $x_3 \geq 0$ et par passage aux transformées, on trouve

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_3} - i\alpha_1 \tilde{\varphi}_3 - i\alpha_1 \tilde{\Psi} = \tilde{\Omega}_1, \quad (2.3.33)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x_3} - i\alpha_2 \tilde{\varphi}_3 - i\alpha_2 \tilde{\Psi} = \tilde{\Omega}_2, \quad (2.3.34)$$

$$2\frac{\partial \tilde{\varphi}_3}{\partial x_3} + 2(1-2\nu) \tilde{\Psi} = \tilde{\Omega}_3. \quad (2.3.35)$$

⁽¹⁷⁾Voir le premier problème fondamental.

En portant dans ces équations les relations (2.3.29) , (2.3.30) et (2.3.32) , on aura le système algébrique suivant

$$\begin{cases} \gamma C_1 + i\alpha_1 C_3 + i\alpha_1 B = \frac{\widetilde{P}_1}{\mu} \\ \gamma C_2 + i\alpha_2 C_3 + i\alpha_2 B = \frac{\widetilde{P}_2}{\mu} \\ 2\gamma C_1 + 2(1 - 2\nu)\gamma B = \frac{\widetilde{P}_3}{\mu} \end{cases} \quad (2.3.36)$$

La résolution de ce système permet de trouver les valeurs $C_i(\alpha_1, \alpha_2)$, et par passage aux transformées inverses de $\widetilde{\varphi}_i$ et $\widetilde{\Psi}$, on aura les formules

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_i(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x_3 + i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

et

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^2} \left(i\alpha_1 \widetilde{P}_1 + i\alpha_2 \widetilde{P}_2 + \gamma \widetilde{P}_3 \right) \exp(-\gamma x_3 + i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2$$

La solution du système de Lamé s'obtient ainsi par la formule (2.3.20) .

Parmi les nombreux cas particulier; on peut citer l'exemple de l'action d'une force verticale P_3 (orientée suivant l'axe Ox_3) ce qui implique $P_1 = P_2 = 0$, et c'est pourquoi $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ et $B = -\frac{1}{2\mu\gamma} \widetilde{P}_3$. La résolution du système (2.3.36) permet de trouver φ_i et Ψ .

2.3.4 Application " Problème de Boussinesq "

On appelle problème de Boussinesq, le problème de l'action d'une force concentrée P sur le demi-espace élastique [Figure 2.13].

On résout ce problème à l'aide de la représentation de Trefftz, en utilisant la méthode des transformations de Fourier en cosinus.

Considérons le demi-espace élastique sur lequel agit une force concentrée [11]

$$P_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2),$$

orientée suivant l'axe Ox , où $\delta^{(18)}$ est la fonction généralisée de Dirac.

Ainsi, nous avons un cas particulier du deuxième problème fondamental avec

$$P_1 = P_2 = 0,$$

⁽¹⁸⁾ $\delta(x) = 0$, si $x \neq 0$, comme elle peut être notée par $\text{Dirac}(x)$.

et

$$P_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2) = -\sigma_{33}(x_1, x_2, 0).$$

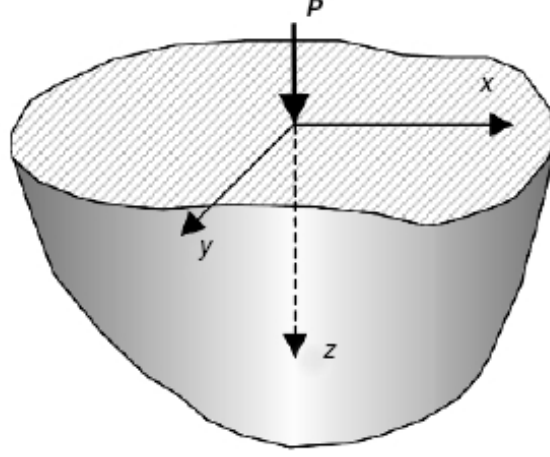


Figure 2.13: "Probleme de Boussinesq"

Les contraintes sont symétriques par rapport aux plans Ox_1x_3 et Ox_2x_3 .

Alors, on applique la méthode des transformées doubles de Fourier en cosinus donné par ces formules

$$\tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) dx_1 dx_2, \quad (2.3.37)$$

et

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (2.3.38)$$

Le choix de cette transformation est justifié par la parité des fonctions qui expriment les contraintes par rapport à la variable x_1 et x_2 [9].

On suit la même démarche comme précédemment, et on cherche la solution du système de Lamé sous la forme

$$u_i = \varphi_i + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}. \quad (2.3.39)$$

La fonction auxiliaire Ω_3 vérifie l'équation

$$\Delta \Omega_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (2.3.40)$$

et la condition limite

$$\mu \Omega_3(x_1, x_2, 0) = -P_3(x_1, x_2) \quad (2.3.41)$$

La transformation double de Fourier en cosinus de l'équation (2.3.40) permet de trouver l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Omega}_3}{\partial x_3} - \gamma^2 \widetilde{\Omega}_3 = 0, \quad \gamma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

qui admet comme solution

$$\widetilde{\Omega}_3 = \frac{-\widetilde{P}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\mu} \exp(-\gamma x_3). \quad (2.3.42)$$

Comme

$$P_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2),$$

la transformée de P_3 est⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_3 &= \frac{2P}{\pi} \int_0^{+\infty} \delta(x_1) \cos(\alpha_1 x_1) dx_1 \int_0^{+\infty} \delta(x_2) \cos(\alpha_2 x_2) dx_2 \\ &= \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1) \cos(\alpha_1 x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_2) \cos(\alpha_2 x_2) dx_2 \\ &= \frac{P}{2\pi}, \end{aligned}$$

par suite

$$\widetilde{\Omega}_3 = -\frac{P}{2\pi\mu} \exp(-\gamma x_3). \quad (2.3.43)$$

Par passage à la transformée inverse on aura

$$\Omega_3 = -\frac{P}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.3.44)$$

On a l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \cos(\alpha_1 x_1) \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2})}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(\alpha_1 x_1) K_0(\alpha_1 r) d\alpha_1 \\ &= \frac{\pi}{2R} [5], \end{aligned}$$

où $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ et $R = \sqrt{r^2 + x_1^2}$ et K_0 est la fonction de Mc-Donald donnée par⁽²⁰⁾

$$K_0(\alpha_1 r) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2})}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_2,$$

⁽¹⁹⁾ La fonction généralisée de Dirac satisfait les relations $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cos(x) dx = 1$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cos(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \delta(x) \cos(x) dx$.

⁽²⁰⁾ Voir [5] la formule 3.961 (2), page 498.

et elle satisfait aussi la formule⁽²¹⁾

$$\int_0^{+\infty} K_0(\alpha_1 r) \cos(\alpha_1 x_1) d\alpha_1 = \frac{\pi}{2R}$$

Ainsi, on trouve

$$\Omega_3 = -\frac{P}{\pi^2 \mu} \left(-\frac{\partial I}{\partial x_3} \right) \quad (2.3.45)$$

$$= -\frac{P}{2\pi \mu} \frac{x_3}{R^3} \quad (2.3.46)$$

Utilisons la formule (2.3.28) de la section précédente (deuxième problème fondamental)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_3} \right), \quad (2.3.47)$$

comme $P_1 = P_2 = 0$, alors $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, ainsi (2.3.47) devient

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_3}.$$

Exprimons Ψ à l'aide de l'intégrale de Fourier

$$\Psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} B(\alpha_1, \alpha_2) \exp \left(-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right) \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

et en tenant compte de (2.3.47) et (2.3.44), on obtient la relation

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{p}{4\pi \mu} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}. \quad (2.3.48)$$

Par conséquent

$$\Psi = -\frac{p}{2\pi^2 \mu} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp \left(-x_3 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos(\alpha_1 x_1) \cos(\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.3.49)$$

$$= -\frac{p}{4\pi \mu R}. \quad (2.3.50)$$

On détermine φ_i à l'aide des équations (2.3.26) de la section précédente (et qui sont valable pour $x_3 \geq 0$).

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 0 \\ 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + 2(1 - 2\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \Omega_3 \end{cases} \quad (2.3.51)$$

⁽²¹⁾Voir [5] la formule 6.671 (6), page 731.

La dernière équation permet de trouver⁽²²⁾

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} &= \frac{\Omega_3}{2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \\ &= -\frac{p(1 - \nu)}{4\pi\mu R^3} x_3.\end{aligned}$$

Ce qui donne⁽²³⁾

$$\varphi_3 = \frac{(1 - \nu)p}{4\pi\mu R} + C$$

la constante d'intégration C est nulle car à l'infinie $\varphi_3 = 0$.

La deuxième équation de (2.3.51) permet d'avoir⁽²⁴⁾

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} &= -\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{p}{4\pi\mu} (1 - 2\nu) \frac{x_3}{R^3},\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi_2 = -\frac{(1 - 2\nu)p}{4\pi\mu} \frac{x_2}{R(R + x_3)}.$$

Finalement, la première équation de (2.3.51) donne

$$\varphi_1 = -\frac{(1 - 2\nu)p}{4\pi\mu} \frac{x_1}{R(R + x_3)}.$$

Par conséquent à l'aide de la formule (2.3.39), on trouve les déplacements

$$u_i = \frac{Px_i}{4\pi\mu} \left(\frac{x_3}{R^3} - (1 - 2\nu) \frac{1}{R(R + x_3)} \right), \quad i = 1, 2 \quad (2.3.52)$$

$$\text{et} \quad u_3 = \frac{P}{4\pi\mu} \left(\frac{x_3^2}{R^3} - 2(1 - \nu) \frac{1}{R} \right). \quad (2.3.53)$$

Pour $x_3 = 0$, ces déplacements vérifient

$$\begin{aligned}u_i &= \frac{Px_i(1 - 2\nu)}{4\pi\mu\rho^2}, \quad i = 1, 2 \\ u_3 &= \frac{(1 - 2\nu)P}{2\pi\mu\rho}, \quad \text{avec } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\end{aligned}$$

(22) $\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\Omega_3}{2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)$
 $= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{P}{4\pi\mu} \frac{x_3}{R^3} - (1 - 2\nu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{p}{4\pi\mu R} \right) \right)$
 $= -\frac{p(1 - \nu)}{4\pi\mu R^3} x$, et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $R = \sqrt{r^2 + x_1^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
(23) $\int \frac{x_3}{R^3} dx_3 = \int \frac{x_3}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^3} dx_3 = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{R}$, et $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
(24) $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = -\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{(1 - \nu)p}{4\pi\mu R} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{p}{4\pi\mu R} \right) \right)$
 $= \frac{p}{4\pi\mu} (1 - 2\nu) \frac{x_3}{R^3}$

Les contraintes s'obtiennent à l'aide de la loi de Hooke (2.3.22) , par les expressions

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{-3P}{2\pi} \left(\frac{x_1^2 x_3}{R^5} + \frac{1}{3} (1 - 2\nu) \left(\frac{R^2 + Rx_3 + x_3^2}{R^3 (R + x_3)} - \frac{x_1^2 (2R + x_3)}{R^3 (R + x_3)^2} \right) \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{-3P}{2\pi} \left(\frac{x_2^2 x_3}{R^5} + \frac{1}{3} (1 - 2\nu) \left(\frac{R^2 + Rx_3 + x_3^2}{R^3 (R + x_3)} - \frac{x_2^2 (2R + x_3)}{R^3 (R + x_3)^2} \right) \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{-3P}{2\pi} \left(\frac{x_1 x_2 x_3}{R^5} - \frac{1}{3} (1 - 2\nu) \frac{x_1 x_2}{R^3} \frac{2R + x_3}{(R + x_3)} \right), \\ \sigma_{3i} &= \frac{-3P}{2\pi} \frac{x_i x_3^2}{R^3}, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Remarque 2.17. Les contraintes σ_{3i} ne dépendent pas des constantes élastiques.

Chapitre 3

Déformation axisymétrique en compression axiale d'un cylindre élastique multicouches superposées

3.1 Formulation du problème

Etant donné un cylindre élastique multicouches de rayon R et de hauteur h , formé par deux couches⁽¹⁾ superposées⁽²⁾ D_1 et D_2 telles que D_1 définit le premier matériau⁽³⁾ et D_2 définit le second. Ce cylindre est paramétré en coordonnée cylindrique comme suit

$$D_1 \cup D_2, \text{ où}$$

$$D_1 = \{(r, \theta, z) \text{ telle que: } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq h_*\},$$

et

$$D_2 = \{(r, \theta, z) \text{ telle que: } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } h_* \leq z \leq h\}.$$

⁽¹⁾Chaque couche représente un matériau .

⁽²⁾Contacte parfait.

⁽³⁾Un matériau est caractérisé par deux constantes d'élasticité ν et G , qui représentent respectivement coefficient de poisson et module de cisaillement.

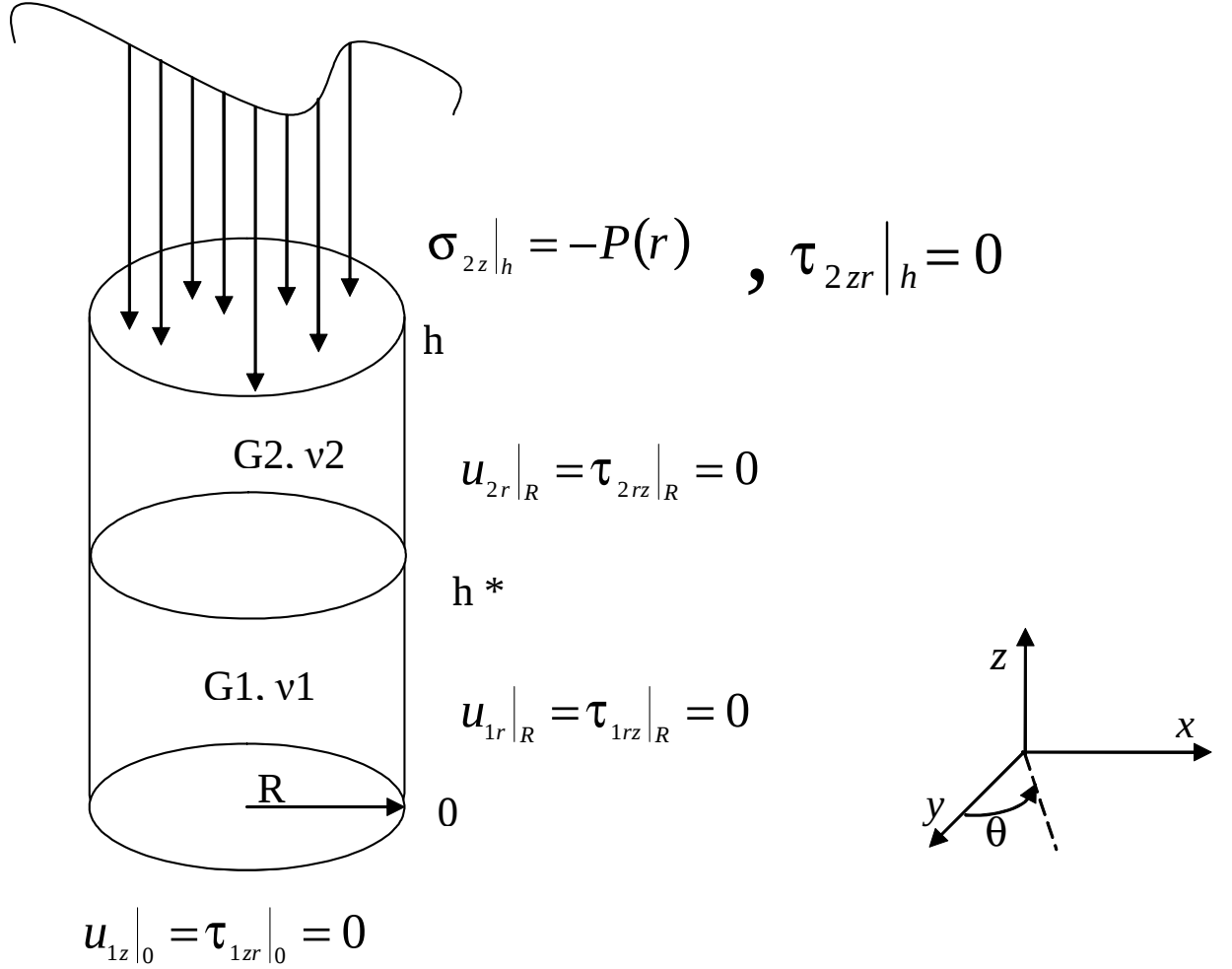


Figure 3.1: Cylindre double couches

Supposons que ce cylindrique soit placé dans une cavité rigide, de même rayon et de même hauteur.

Les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement des deux matériaux sont respectivement: ν_1, ν_2, G_1 et G_2 .

A l'extrémité $z = h$, agit une contrainte de compression " $-P(r)$ " [Figure 3.1].

Les contraintes de frottement des deux matériaux avec la cavité sur la surface latérale $r = R$ est négligeable, ainsi que celles du premier matériau avec la base de la cavité. On suppose aussi que les contraintes de frottement entre les deux matériaux sont négligeables.

La déformation élastique du cylindre est alors axisymétrique, c'est-à-dire le déplacement en θ est nulle $u_{k\theta} = 0$, et les déplacements u_{kr}, u_{kz} sont indépendants de l'angle θ , où u_{kr} et u_{kz} sont respectivement la composante radiale et axiale du vecteur déplacement. Et $k = 1$ correspond au premier matériau et $k = 2$ correspond au second.

On cherche à trouver la contrainte normale radiale σ_r le long de la surface latérale du cylindre, ainsi que la contrainte normale axiale σ_z .

3.1.1 Formulation mathématique du problème

Avant tout, effectuons le changement de variable suivant:

$$(u_k, w_k) = 2G(u_{kr}, u_{kz}), k = 1, 2$$

Dans le chapitre précédent on a établi le système d'équilibre de Lamé en coordonnées cylindriques dans le cas axisymétrique qui est le suivant:

$$\begin{cases} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} u_k) + \frac{1}{b_k} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} - \frac{u_k}{r^2} + \frac{a_k}{b_k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial r \partial z} = 0 \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} w_k) + b_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} + a_k r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial z} u_k) = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2 \quad (3.1.1)$$

où

$$a_k = (1 - 2\nu_k)^{-1}, b_k = 1 + a_k, k = 1, 2$$

Conditions aux limites du problème

Sur la surface latérale ($r = R$) Comme la paroi de la cavité est rigide donc le déplacement radial pour u_{kr} est nul, et on donne aussi la contrainte tangentielle τ_{krz} sur la surface latérale qui sont traduites par

$$u_{1r}(r, z)|_{r=R} = \tau_{1rz}(r, z)|_{r=R} = 0$$

et

$$u_{2r}(r, z)|_{r=R} = \tau_{2rz}(r, z)|_{r=R} = 0.$$

Extrémités ($z = 0$ et $z = h$) La rigidité de la paroi de la cavité implique "pas de déplacement vers le bas" c'est-à-dire le déplacement axial u_{1z} en $z = 0$ est nul, et on donne aussi la contrainte tangentielle radiale, cela se traduit par

$$\text{pour } z = 0, \text{ on a } u_{1z}(r, z)|_{z=0} = \tau_{1zr}(r, z)|_{z=0} = 0$$

En $z = h$ la contrainte axiale et la contrainte tangentielle radiale sont données comme suit

$$\text{pour } z = h, \text{ on a } \sigma_{2z}(r, z)|_{z=h} = -P(r) \text{ et } \tau_{2zr}(r, z)|_{z=h} = 0$$

Surface de séparation des deux matériaux ($z = h_*$) On a la continuité des déplacements et des contraintes, c'est à dire

$$\begin{aligned} u_{1r}(r, h_* - 0) &= u_{2r}(r, h_* + 0), \\ u_{1z}(r, h_* - 0) &= u_{2z}(r, h_* + 0), \\ \sigma_{1z}(r, h_* - 0) &= \sigma_{2z}(r, h_* + 0), \\ \tau_{1rz}(r, h_* - 0) &= \tau_{2rz}(r, h_* + 0). \end{aligned}$$

Remarque 3.1. *Au début de cette Section, on a posé le changement de variable suivant*

$$(u_k, w_k) = 2G(u_{kr}, u_{kz}), k = 1, 2,$$

par conséquent on a

1) Les deux conditions aux limites sur la surface latérale deviennent

$$\begin{aligned} u_{1r}(r, z)|_{r=R} &= \tau_{1rz}(r, z)|_{r=R} = 0, \\ \text{et} \quad u_2(r, z)|_{r=R} &= \tau_{2rz}(r, z)|_{r=R} = 0. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} u_{1r}(r, z)|_{r=R} &= \tau_{1rz}(r, z)|_{r=R} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2G} u_1(r, z)|_{r=R} &= \tau_{1rz}(r, z)|_{r=R} = 0 \\ \Rightarrow u_1(r, z)|_{r=R} &= \tau_{1rz}(r, z)|_{r=R} = 0, \end{aligned}$$

le même principe pour $u_2(r, z)|_{r=R} = \tau_{2rz}(r, z)|_{r=R} = 0$.

2) La première condition à l'extrémité ($z = 0$) c'est-à-dire $u_{1zr}(r, z)|_{z=0} = \tau_{1zr}(r, z)|_{z=0} = 0$, devient

$$w_1(r, z)|_{z=0} = \tau_{1zr}(r, z)|_{z=0} = 0.$$

3) Les deux premières conditions à la surface de séparation des deux matériaux

$$\begin{aligned} u_{1r}(r, h_* - 0) &= u_{2r}(r, h_* + 0), \\ u_{1z}(r, h_* - 0) &= u_{2z}(r, h_* + 0), \end{aligned}$$

deviennent

$$\begin{aligned} u_1(r, h_* - 0) &= u_2(r, h_* + 0), \\ w_1(r, h_* - 0) &= w_2(r, h_* + 0), \end{aligned}$$

la démonstration est similaire à celle effectuée en 1).

3.1.2 Transformation intégrale du problème

Définition 3.1. On définit les deux opérateurs H_0 et H_1 par

$$H_0(f) = \int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n) dr,$$

et

$$H_1(f) = \int_0^R r f(r) J_1(\lambda_n) dr,$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 respectivement.

Définition 3.2. Soit f une fonction C^∞ , on définit l'opérateur Δ_k comme suit

$$\Delta_k = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{kf}{r^2}.$$

Lemme 3.1. Si f est de classe C^∞ , alors on a

1)

$$\begin{aligned} H_0(\Delta_0) &= \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] J_0(\lambda_n r) dr \\ &= R f'(R) J_0(\lambda_n R) + R f(R) J_1(\lambda_n R) - \lambda_n^2 H_0(f), \end{aligned}$$

et 2)

$$\begin{aligned} H_1(\Delta_1) &= \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right] J_1(\lambda_n r) dr \\ &= R f'(R) J_1(\lambda_n R) - R \lambda_n f(R) J_1'(\lambda_n R) - \lambda_n^2 H_1(f), \end{aligned}$$

et on a aussi

3)

$$H_1\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = R f(R) J_1(\lambda_n R) - \lambda_n H_0(f).$$

Preuve. 1) On a

$$H_0(\Delta_0) = \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] J_0(\lambda_n r) dr \quad (3.1.2)$$

$$= \int_0^R r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} J_0(\lambda_n r) dr + \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} J_0(\lambda_n r) dr. \quad (3.1.3)$$

L'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} H_0(\Delta_0) &= r \frac{\partial f}{\partial r} J_0(\lambda_n r) \Big|_0^R - \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_0(\lambda_n r)) dr + \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} J_0(\lambda_n r) dr \quad (3.1.4) \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r J_0(\lambda_n r)) - J_0(\lambda_n r) \right\} dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left\{ J_0(\lambda_n r) + \lambda_n r J_0'(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r) \right\} dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} r J_0'(\lambda_n r) dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n f(r) J_0'(\lambda_n r) \Big|_0^R + \lambda_n \int_0^R f(r) \frac{\partial}{\partial r} (r J_0'(\lambda_n r)) dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_0'(\lambda_n R) + \lambda_n \int_0^R f(r) \frac{\partial}{\partial r} (r J_0'(\lambda_n r)) dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_0'(\lambda_n R) \\ &\quad + \lambda_n \int_0^R f(r) \left\{ J_0'(\lambda_n r) + \lambda_n r J_0''(\lambda_n r) \right\} dr. \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

Comme $J_0(\lambda_n r)$ vérifie

$$J_0''(\lambda_n r) + \frac{1}{\lambda_n r} J_0'(\lambda_n r) + J_0(\lambda_n r) = 0,$$

ou encore

$$\lambda_n r J_0''(\lambda_n r) + J_0'(\lambda_n r) + \lambda_n r J_0(\lambda_n r) = 0.$$

Ce qui donne

$$\lambda_n r J_0''(\lambda_n r) + J_0'(\lambda_n r) = -\lambda_n r J_0(\lambda_n r). \quad (3.1.6)$$

En remplaçant (3.1.6) dans (3.1.5), on obtient

$$\begin{aligned} H_0(\Delta_0) &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_0'(\lambda_n R) + \lambda_n \int_0^R f(r) (-\lambda_n r J_0(\lambda_n r)) dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_0'(\lambda_n R) - \lambda_n^2 \int_0^R r f(r) (J_0(\lambda_n r)) dr \\ &= R \frac{\partial f}{\partial r}(R) J_0(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_0'(\lambda_n R) - \lambda_n^2 H_0(f). \end{aligned}$$

Or, si l'on observe que⁽⁴⁾

$$-\lambda_n J_0'(\lambda_n R) = J_1(\lambda_n R),$$

il vient

$$\int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] J_0(\lambda_n r) dr = Rf'(R)J_0(\lambda_n R) + Rf(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n^2 H_0(f).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} H_0(\Delta_0) &= \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] J_0(\lambda_n r) dr \\ &= Rf'(R)J_0(\lambda_n R) + Rf(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n^2 H_0(f). \end{aligned}$$

2) On a

$$H_1(\Delta_1) = \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right] J_1(\lambda_n r) dr,$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] J_1(\lambda_n r) dr &= \int_0^R r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} J_1(\lambda_n r) dr + \int_0^R r \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} J_1(\lambda_n r) dr \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} J_1(\lambda_n r) \Big|_0^R - \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_1(\lambda_n r)) dr \\ &\quad + \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} J_1(\lambda_n r) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \int_0^R \frac{\partial f}{\partial r} \left(r \lambda_n J_1'(\lambda_n r) + J_1(\lambda_n r) - J_1(\lambda_n r) \right) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n \int_0^R f'(r) r J_1'(\lambda_n r) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(r) r J_1'(\lambda_n r) \Big|_0^R \\ &\quad + \lambda_n \int_0^R f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r J_1'(\lambda_n r) \right) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_1'(\lambda_n R) \\ &\quad + \lambda_n \int_0^R f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r J_1'(\lambda_n r) \right) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R) R J_1'(\lambda_n R) \\ &\quad + \lambda_n \int_0^R f(r) \left(\lambda_n r J_1''(\lambda_n r) + J_1'(\lambda_n r) \right) dr. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Puisque, $J_1(\lambda_n R)$ vérifie l'équation

$$J_1''(\lambda_n r) + \frac{1}{\lambda_n r} J_1'(\lambda_n r) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n^2 r^2} \right) J_1(\lambda_n r) = 0,$$

⁽⁴⁾La propriété (4) des fonction de Bessel appliquée pour $\nu = 0$.

on a donc

$$\lambda_n r J_1''(\lambda_n r) + J_1'(\lambda_n r) + \left(\lambda_n r - \frac{1}{\lambda_n r} \right) J_1(\lambda_n R) = 0,$$

ce qui est similaire à

$$\lambda_n r J_1''(\lambda_n r) + J_1'(\lambda_n r) = \left(-\lambda_n r + \frac{1}{\lambda_n r} \right) J_1(\lambda_n R).$$

En remplaçant l'expression $\lambda_n r J_1''(\lambda_n r) + J_1'(\lambda_n r)$ par $\left(-\lambda_n r + \frac{1}{\lambda_n r} \right) J_1(\lambda_n R)$ dans l'intégrale (3.1.8) , on obtient

$$\begin{aligned} H_1(\Delta_1) &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R)RJ_1'(\lambda_n R) + \lambda_n \int_0^R f(r) \left(-\lambda_n r + \frac{1}{\lambda_n r} \right) J_1(\lambda_n R) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R)RJ_1'(\lambda_n R) + \lambda_n^2 \int_0^R r f(r) \left(-1 + \frac{1}{\lambda_n^2 r^2} \right) J_1(\lambda_n R) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R)RJ_1'(\lambda_n R) + \lambda_n^2 H_1(f) + \lambda_n^2 \int_0^R r f(r) \frac{1}{\lambda_n^2 r^2} J_1(\lambda_n R) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R)RJ_1'(\lambda_n R) + \lambda_n^2 H_1(f) + \int_0^R r f(r) \frac{1}{r^2} J_1(\lambda_n R) dr \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right] J_1(\lambda_n r) dr = Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R)RJ_1'(\lambda_n R) + \lambda_n^2 H_1(f).$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} H_1(\Delta_1) &= \int_0^R r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right] J_1(\lambda_n r) dr \\ &= Rf'(R)J_1(\lambda_n R) - \lambda_n f(R)RJ_1'(\lambda_n R) + \lambda_n^2 H_1(f). \end{aligned}$$

3) D'abord on a⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \int_0^R r \frac{\partial f}{\partial r} J_1(\lambda_n r) dr &= r f(r) J_1(\lambda_n r) \Big|_0^R - \int_0^R f(r) \frac{\partial}{\partial r} (r J_1(\lambda_n r)) dr \\ &= Rf(R)J_1(\lambda_n R) - \int_0^R f(r) \frac{\partial}{\partial r} (r J_1(\lambda_n r)) dr \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

D'après la propriété (3) des fonctions de Bessel, on a

$$\frac{\partial}{\partial r} (r J_1(\lambda_n r)) = r J_0(\lambda_n r),$$

en remplaçant cette expression dans (3.1.9) , on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^R r \frac{\partial f}{\partial r} J_1(\lambda_n r) dr &= Rf(R)J_1(\lambda_n R) - \int_0^R f(r) \lambda_n r J_0(\lambda_n r) dr \\ &= Rf(R)J_1(\lambda_n R) - H_0(f). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

⁽⁵⁾L'intégration par partie.

Transformation intégrale du problème (système de Lamé)

La transformation du problème fait appel à la transformation intégrale de Hankel suivante:

$$\begin{cases} u_{kn}(z) = \int_0^R r u_k(r, z) J_1(r \lambda_n) dr \\ w_{kn}(z) = \int_0^R r w_k(r, z) J_0(r \lambda_n) dr, \end{cases} \quad k = 1, 2 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

où les λ_n vérifient l'équation transcendante $J_1(R \lambda_n) = 0$, et $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$,
et les transformations inverses sont données par

$$\begin{cases} u_k(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{[J_0(\lambda_n R)]^2} u_{kn}(z) \\ w_k(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{[J_0(\lambda_n R)]^2} w_{kn}(z) \end{cases} \quad k = 1, 2 \text{ et } n \in \mathbb{N} \quad (3.1.10)$$

En multipliant la première équation du système (3.1.1) par $r J_1(r \lambda_n)$ et la deuxième équation par $r J_0(r \lambda_n)$, et en intégrant ensuite les équations obtenues de 0 à R suivant la variable r , on obtient le système transformé, et ce la comme suit:

La première équation de Lamé

$$\begin{aligned} & \int_0^R \left(r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u_k \right) + \frac{\partial^2 u_k}{\partial^2 z} - \frac{u_k}{r^2} + \frac{a_k}{b_k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial r \partial z} \right) r J_1(r \lambda_n) dr \\ &= \int_0^R r^{-1} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial^2 z} - \frac{u_k}{r^2} + \frac{a_k}{b_k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial r \partial z} \right) r J_1(r \lambda_n) dr \\ &= \int_0^R r \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_k}{\partial r} - \frac{u_k}{r^2} \right) J_1(r \lambda_n) dr + \frac{1}{a_k} \int_0^R r \frac{\partial^2 u_k}{\partial^2 z} J_1(r \lambda_n) dr + \frac{a_k}{b_k} \int_0^R r \frac{\partial^2 w_k}{\partial r \partial z} J_1(r \lambda_n) dr. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.1, le premier terme est donné par

$$\int_0^R r \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_k}{\partial r} - \frac{u_k}{r^2} \right) J_1(r \lambda_n) dr = R \frac{\partial u_k}{\partial r}(R, z) J_1(\lambda_n R) - R \lambda_n u_k(R, z) J_1'(\lambda_n R) - \lambda_n^2 H_1(u_k).$$

Et tenant compte de la condition limite $u_k|_R = 0$ et la condition $J_1(\lambda_n R) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^R r \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_k}{\partial r} - \frac{u_k}{r^2} \right) J_1(r \lambda_n) dr &= \lambda_n^2 H_1(u_k) \\ &= \lambda_n^2 u_{kn}. \end{aligned}$$

Passons maintenant au deuxième terme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_k} \int_0^R r \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} J_1(r \lambda_n) dr &= \frac{1}{a_k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^R r u_k J_1(r \lambda_n) dr \\
 &= \frac{1}{a_k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_{kn} \\
 &= \frac{1}{a_k} u_{kn}'''.
 \end{aligned}$$

Le troisième terme est déduit comme suit :

On applique le troisième point du Lemme 3.1, et en tenant compte ensuite de $J_1(\lambda_n R) = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
 \frac{a_k}{b_k} \int_0^R r \frac{\partial^2 w_k}{\partial r \partial z} J_1(r \lambda_n) dr &= \frac{a_k}{b_k} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r \frac{\partial w_k}{\partial r} J_1(r \lambda_n) dr \\
 &= R w_k(R) J_1(\lambda_n R) - \frac{a_k}{b_k} \frac{\partial}{\partial z} H_0(w_k) \\
 &= -\frac{a_k}{b_k} \frac{\partial}{\partial z} w_{kn} \\
 &= -\frac{a_k}{b_k} w_{kn}'.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la première équation du système de Lamé devient après transformation

$$-\lambda_n^2 u_{kn}(z) + \frac{1}{a_k} u_{kn}''(z) - \frac{a_k}{b_k} w_{kn}'(z) = 0.$$

La deuxième équation de Lamé

$$\begin{aligned}
 &\int_0^R r \left(r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} w_k \right) + b_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} w_k + a_k r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial z} u_k \right) \right) J_0(r \lambda_n) dr \\
 &= \int_0^R r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_k + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} \right) J_0(r \lambda_n) dr + b_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^R r w_k J_0(r \lambda_n) dr \\
 &\quad + a_k \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial z} u_k + r \frac{\partial^2 u_k}{\partial r \partial z} \right) r J_0(r \lambda_n) dr.
 \end{aligned}$$

Le Lemme 3.1 nous permet d'expliciter le premier terme par

$$\int_0^R r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_k + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} \right) J_0(r \lambda_n) dr = R \frac{\partial w_k}{\partial r}(R, z) J_0(\lambda_n R) + R w_k(R, z) J_1(\lambda_n R) - \lambda_n^2 w_{kn}(z),$$

et d'après les deux conditions $w'|_R = 0$ et $J_1(\lambda_n R) = 0$, on a

$$\int_0^R r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_k + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} \right) J_0(r \lambda_n) dr = -\lambda_n^2 w_{kn}(z).$$

Le deuxième terme est donné par

$$\begin{aligned} b_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^R r w_k J_0(r \lambda_n) dr &= b_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} w_{kn}(z) \\ &= b_k w''_{kn}(z). \end{aligned}$$

Finalement, le troisième terme est calculé comme suit

$$a_k \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial z} u_k + r \frac{\partial^2 u_k}{\partial r \partial z} \right) r J_0(r \lambda_n) dr \quad (3.1.11)$$

$$= a_k \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \left(\frac{u_k}{r} + \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) J_0(r \lambda_n) dr \quad (3.1.12)$$

$$= a_k \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^R u_k J_0(r \lambda_n) dr + \int_0^R r \frac{\partial u_k}{\partial r} J_0(r \lambda_n) dr \right]. \quad (3.1.13)$$

Or,

$$\int_0^R r \frac{\partial u_k}{\partial r} J_0(r \lambda_n) dr = r u_k J_0(r \lambda_n) \Big|_0^R - \int_0^R u_k(r, z) \frac{\partial}{\partial r} [r J_0(r \lambda_n)] dr, \quad (3.1.14)$$

et comme, on a la condition $u_k|_R = 0$, par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^R r \frac{\partial u_k}{\partial r} J_0(r \lambda_n) dr &= - \int_0^R u_k(r, z) \left[\lambda_n r J_0'(r \lambda_n) + J_0(r \lambda_n) \right] dr \\ &= - \int_0^R u_k(r, z) \lambda_n r J_1'(r \lambda_n) dr - \int_0^R u_k(r, z) J_0(r \lambda_n) dr. \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans (3.1.13), on trouve

$$\begin{aligned} a_k \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial z} u_k + r \frac{\partial^2 u_k}{\partial r \partial z} \right) r J_0(r \lambda_n) dr &= a_k \frac{\partial}{\partial z} \lambda_n u_{kn}(z) \\ &= a_k \lambda_n u'_{kn}(z), \end{aligned}$$

finalement, on a

$$a_k \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial z} u_k + r \frac{\partial^2 u_k}{\partial r \partial z} \right) r J_0(r \lambda_n) dr = a_k \lambda_n u'_{kn}(z).$$

Ainsi, la deuxième équation du système de Lamé devient après transformation

$$-\lambda_n^2 w_{kn}(z) + b_k w''_{kn}(z) + a_k \lambda_n u'_{kn}(z) = 0.$$

Donc le problème (3.1.1) transformé est

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_{kn}(z) + \frac{1}{a_k} u''_{kn}(z) - \frac{a_k}{b_k} \lambda_n u'_{kn}(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{kn}(z) + b_k w''_{kn}(z) + a_k \lambda_n u'_{kn}(z) = 0 \end{cases}, k = 1, 2 \quad (3.1.15)$$

Remarque 3.2. On a réduit le système d'équations aux dérivées partielles (3.1.1) à un système d'équations différentielles ordinaires (3.1.15), et cela à l'aide des transformations intégrales de Hankel.

Remarque 3.3. Le système (3.1.15) obtenu dépend seulement de la variable z , donc les conditions aux limites doivent aussi être donnée par rapport à cette variable, à savoir; $z = 0$, $z = h_*$, $z = h$.

Remarque 3.4. La transformation intégrale des conditions aux limites données sur la surface latérale ($r = R$), nous apporte aucune information dans la résolution du système (3.1.15).

Transformation intégrale des conditions aux limites

Extrémisés ($z = 0$ et $z = h$)

La condition sur la base inférieure du cylindre est

$$\text{pour } z = 0, \text{ on a } u_{1z}|_{z=0} = \tau_{1zr}|_{z=0} = 0.$$

La transformation intégrale de cette condition est

$$\begin{aligned} \int_0^R u_{1z}|_{z=0} r J_0(r \lambda_n) dr &= \frac{1}{2G} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^R w_1(r, z) r J_0(r \lambda_n) dr \\ &= \frac{1}{2G} \lim_{z \rightarrow 0} w_{1n}(z) \\ &= \frac{1}{2G} w_{1n}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$w_{1n}(0) = 0.$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^R \tau_{1zr}|_{z=0} r J_1(r\lambda_n) dr &= \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^R \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) r J_1(r\lambda_n) dr \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_0^R u_1(r, z) J_1(r\lambda_n) dr + \int_0^R \frac{\partial w_1}{\partial r}(r, z) J_1(r\lambda_n) dr \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} u'_{1n}(z) + \lim_{z \rightarrow 0} (\lambda_n w_{1n}(z)) \\ &= u'_{1n}(0) + \lambda_n w_{1n}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u'_{1n}(0) + \lambda_n w_{1n}(0) = 0.$$

La condition sur la base (ou surface plane) supérieure du cylindre ($z = h$) est

$$\sigma_{2z}|_{z=h} = -P(r) \quad \text{et} \quad \tau_{2zr}|_{z=h} = 0.$$

On a

$$\sigma_{2z} = a_2 \left[\nu_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_2) \right) + (1 - \nu_2) \frac{\partial w_2}{\partial z} \right].$$

La transformation intégrale de cette condition est:

$$\begin{aligned} \int_0^R \sigma_{2z}|_{z=h} &= \lim_{z \rightarrow h} a_2 \left[\int_0^R \left[\nu_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_2) \right) + (1 - \nu_2) \frac{\partial w_2}{\partial z} \right] r J_0(r\lambda_n) dr \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow h} a_2 \left[\nu_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_2) \right) r J_0(r\lambda_n) dr + (1 - \nu_2) \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R ru_2 J_0(r\lambda_n) dr \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow h} a_2 \left[\nu_2 (ru_2) J_0(r\lambda_n)|_0^R - \nu_2 \int_0^R -ru_2 \lambda_n J_1(r\lambda_n) dr \right] \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow h} a_2 \left((1 - \nu_2) w'_{2n}(z) \right). \end{aligned}$$

Et d'après la condition limite, $u_2|_R = 0$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^R \sigma_{2z}|_{z=h} &= \lim_{z \rightarrow h} a_2 \left(\nu_2 \lambda_n u_{2n}(z) + (1 - \nu_2) w'_{2n}(z) \right) \\ &= a_2 \left(\nu_2 u_{2n}(h) + (1 - \nu_2) w'_{2n}(h) \right) = Pn, \end{aligned}$$

où

$$P_n = \int_0^R r P(r) J_0(r \lambda_n) dr,$$

donc

$$\left(\nu_2 u_{2n}(h) + (1 - \nu_2) w'_{2n}(h) \right) = -a_2^{-1} P_n.$$

Transformons maintenant la condition $\tau_{2zr}|_{z=h} = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^R \tau_{2zr}|_{z=h} r J_1(r \lambda_n) dr &= \lim_{z \rightarrow h} \int_0^R \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) r J_1(r \lambda_n) dr \\ &= \lim_{z \rightarrow h} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \left(u_2 r J_1(r \lambda_n) dr + \int_0^R \frac{\partial w_2}{\partial r} r J_1(r \lambda_n) dr \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow h} \left(u'_{2n}(z) + \lambda_n w_{2n}(z) \right) \\ &= \left(u'_{2n}(h) + \lambda_n w_{2n}(h) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc la condition $\tau_{2zr}|_{z=h} = 0$, devient

$$\left(u'_{2n}(h) + \lambda_n w_{2n}(h) \right) = 0.$$

Sur la surface de séparation des deux matériaux ($z = h_*$)

La première condition est

$$u_{1r}(r, h_* - 0) = u_{2r}(r, h_* + 0).$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} u_1(r, h_* - 0) &= \frac{1}{2G_2} u_2(r, h_* + 0) \\ \Rightarrow u_1(r, h_* - 0) &= \frac{G_1}{G_2} u_2(r, h_* + 0). \end{aligned}$$

En posant $G = \frac{G_1}{G_2}$, on obtient

$$u_1(r, h_* - 0) = G u_2(r, h_* + 0).$$

La transformation intégrale du premier membre de cette égalité, donne

$$\begin{aligned} \int_0^R u_1(r, h_* - 0) r J_1(r \lambda_n) dr &= \lim_{z \rightarrow h_*} \int_0^R u_1(r, z) r J_1(r \lambda_n) dr \\ &= u_{1n}(h_*), \end{aligned}$$

et la transformation intégrale du second membre est

$$\begin{aligned} \int_0^R u_2(r, h_* + 0) r J_1(r \lambda_n) dr &= \lim_{z \rightarrow h_*} \int_0^R u_2(r, z) r J_1(r \lambda_n) dr \\ &= u_{2n}(h_*). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$u_{1n}(h_*) = G u_{2n}(h_*).$$

La deuxième condition sur la surface de séparation des deux matériaux est

$$u_{1z}(r, h_* - 0) = u_{2z}(r, h_* + 0),$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} w_1(r, h_* - 0) &= \frac{1}{2G_2} w_2(r, h_* + 0) \\ \Rightarrow w_1(r, h_* - 0) &= \frac{G_1}{G_2} w_2(r, h_* + 0) = G w_2(r, h_* + 0). \end{aligned}$$

La transformation intégrale de cette égalité donne

$$\int_0^R w_1(r, h_* - 0) r J_0(r \lambda_n) dr = \int_0^R w_2(r, h_* + 0) r J_0(r \lambda_n) dr.$$

Ce qui entraîne

$$\lim_{z \rightarrow h_*} \int_0^R w_1(r, z) r J_0(r \lambda_n) dr = \lim_{z \rightarrow h_*} G \int_0^R w_2(r, z) r J_0(r \lambda_n) dr.$$

Ainsi, on trouve

$$w_{1n}(h_*) = G w_{2n}(h_*).$$

La troisième condition sur la surface de séparation des deux matériaux est

$$\sigma_{1z}(r, h_* - 0) = \sigma_{2z}(r, h_* + 0),$$

donc

$$\int_0^R \sigma_{1z}(r, h_* - 0) r J_0(r \lambda_n) dr = \int_0^R \sigma_{2z}(r, h_* + 0) r J_0(r \lambda_n) dr$$

or,

$$\sigma_{kz} = a_1 \left[\nu_k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_k) + (1 - \nu_k) \frac{\partial w_k}{\partial z} \right], \quad k = 1, 2.$$

Par conséquent la transformation intégrale de cette condition est

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow < h_*} \int_0^R a_1 \left[\nu_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_1) + (1 - \nu_1) \frac{\partial w_1}{\partial z} \right] r J_0(r \lambda_n) dr \\ &= \lim_{z \rightarrow > h_*} \int_0^R a_2 \left[\nu_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_2) + (1 - \nu_2) \frac{\partial w_2}{\partial z} \right] r J_0(r \lambda_n) dr, \end{aligned}$$

qui nous conduit finalement, à

$$a_1 \left[\nu_1 \lambda_n u_{1n}(h_*) + (1 - \nu_1) w'_{1n}(h_*) \right] = a_2 \left[\nu_2 \lambda_n u_{2n}(h_*) + (1 - \nu_2) w'_{2n}(h_*) \right].$$

Maintenant, on prend la quatrième condition sur la surface de séparation des deux matériaux qui est la suivante

$$\tau_{1rz}(r, h_* - 0) = \tau_{2rz}(r, h_* + 0).$$

Rappelons que,

$$\tau_{krz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial r} \right),$$

alors, la transformation intégrale de cette condition est

$$\int_0^R \tau_{1rz}(r, h_* - 0) r J_1(r \lambda_n) dr = \lim_{z \rightarrow < h_*} \int_0^R \tau_{2rz}(r, h_* + 0) r J_1(r \lambda_n) dr.$$

Ce qui se traduit par

$$\lim_{z \rightarrow < h_*} \int_0^R \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) r J_1(r \lambda_n) dr = \lim_{z \rightarrow > h_*} \int_0^R \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) r J_1(r \lambda_n) dr,$$

et comme

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow < h_*} \int_0^R \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) r J_1(r \lambda_n) dr &= \lim_{z \rightarrow < h_*} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_0^R u_1 r J_1(r \lambda_n) dr + \int_0^R \frac{\partial w_1}{\partial r} r J_1(r \lambda_n) dr \right] \\ &= u'_{1n}(h_*) - \lambda_n w_{1n}(h_*), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow > h_*} \int_0^R \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) r J_1(r \lambda_n) dr &= \lim_{z \rightarrow < h_*} \left[\frac{\partial}{\partial z} \int_0^R u_2 r J_1(r \lambda_n) dr + \int_0^R \frac{\partial w_2}{\partial r} r J_1(r \lambda_n) dr \right] \\ &= u'_{2n}(h_*) - \lambda_n w_{2n}(h_*). \end{aligned}$$

Donc, la condition précédente devient

$$u'_{1n}(h_*) - \lambda_n w_{1n}(h_*) = u'_{2n}(h_*) - \lambda_n w_{2n}(h_*)$$

Remarque 3.5. Ainsi, on obtient huit conditions correspondant au problème transformé (3.1.15), et elles sont résumées dans le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{1n}(0) = 0 \\ u'_{1n}(0) - \lambda_n w_{1n}(0) = 0 \\ \nu_2 \lambda_n u_{2n}(h) + (1 - \nu_2) w'_{2n}(h) = -a_2^{-1} P_n \\ u'_{2n}(h) - \lambda_n w_{2n}(h) = 0 \\ u_{1n}(h_*) = G u_{2n}(h_*) \\ w_{1n}(h_*) = G w_{2n}(h_*) \\ a_1(\nu_1 \lambda_n u_{1n}(h_*) + (1 - \nu_1) w'_{1n}(h_*)) = a_2(\nu_2 \lambda_n u_{2n}(h_*) + (1 - \nu_2) w'_{2n}(h_*)) \\ u'_{1n}(h_*) - \lambda_n w_{1n}(h_*) = u'_{2n}(h_*) - \lambda_n w_{2n}(h_*) \end{array} \right. \quad (3.1.16)$$

3.2 Résolution du problème

La résolution du système (3.1.15) revient à résoudre les deux systèmes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n^2 u_{1n}(z) + \frac{1}{b_1} u''_{1n}(z) - \frac{a_1}{b_1} \lambda_n u'_{1n}(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{1n}(z) + b_1 w''_{1n}(z) + a_1 \lambda_n u'_{1n}(z) = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n^2 u_{2n}(z) + \frac{1}{b_2} u''_{2n}(z) - \frac{a_2}{b_2} \lambda_n u'_{2n}(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{2n}(z) + b_2 w''_{2n}(z) + a_2 \lambda_n u'_{2n}(z) = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Remarque 3.6. On remarque deux cas possibles pour λ_n , $\lambda_n = 0$ et $\lambda_n \neq 0$, pour cette raison, on va étudier les deux cas.

a) Premier cas ($\lambda_n = 0$)

On a $n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0$, c'est-à-dire, $\lambda_0 = 0$ car $J_1(0) = 0$ (Voir le premier chapitre).

Déterminons la solution du premier système

A partir de la première équation du système (3.2.1), on tire

$$u''_{10}(z) = 0.$$

Donc, l'expression de $u_{10}(z)$ est sous la forme

$$u_{10}(z) = \alpha_1 z + \beta_1, \quad (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{R}.$$

Et de la deuxième équation du système (3.2.1) , on a

$$w''_{1n}(z) = 0,$$

ce qui se traduit par

$$w_{10}(z) = \alpha_2 z + \beta_2, \quad (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}.$$

Pour le deuxième système, On procède comme suit

En remplaçant la valeur $\lambda_0 = 0$ dans la première équation du système (3.2.2) , on trouve

$$u''_{20}(z) = 0.$$

Donc,

$$u_{20}(z) = \alpha_3 z + \beta_3, \quad (\alpha_3, \beta_3) \in \mathbb{R}.$$

Et en apportant la valeur de λ_0 dans la deuxième équation du système (3.2.2) , on obtient

$$w''_{20}(z) = 0,$$

c'est-à-dire

$$w_{20}(z) = \alpha_4 z + \beta_4, \quad (\alpha_4, \beta_4) \in \mathbb{R}.$$

Finalement, pour déterminer (α_i, β_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on est conduit à résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{10}(0) = 0 \\ u'_{10}(0) = 0 \\ \nu_2 u_{20}(h) + (1 - \nu_2) w'_{20}(h) = -a_2^{-1} P_0 \\ u'_{20}(h) = 0 \\ u_{10}(h_*) = G u_{20}(h_*) \\ w_{10}(h_*) = G w_{20}(h_*) \\ (1 - \nu_1) w'_{10}(h_*) = (1 - \nu_2) w'_{20}(h_*) \\ u'_{10}(h_*) = u'_{20}(h_*) \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

Alors, cherchons la solution de ce système.

D'abord, on vérifie immédiatement que

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \text{ et } \beta_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3.2.3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \nu_2 \beta_3 + (1 - \nu_2) \alpha_4 = -a_2^{-1} P_0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = G(\alpha_3 h_* + \beta_3) \Leftrightarrow \beta_1 = G\beta_3 \\ \alpha_2 h^* = G(\alpha_4 h^* + \beta_4) \\ (1 - \nu_1) \alpha_2 = (1 - \nu_2) \alpha_4 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \alpha_4 \\ \alpha_1 = \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{G}{h_*} (\alpha_4 h^* + \beta_4) \Leftrightarrow \alpha_2 = G\alpha_4 + \frac{G}{h_*} \beta_4 \\ \alpha_2 = \frac{(1-\nu_2)}{(1-\nu_1)} \alpha_4 \\ \alpha_4 = \frac{-a_2^{-1}}{(1-\nu_2)} P_0 = \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} P_0 \end{cases}$$

Donc, la solution du système algébrique (3.2.3) est donnée par

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \beta_1 = 0, \\ \alpha_2 = \frac{1-2\nu_2}{(1-\nu_1)} P_0, \\ \beta_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \\ \beta_3 = 0, \\ \alpha_4 = \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} P_0, \\ \beta_4 = \frac{h_*}{G} \left(\frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} - G \right) \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} P_0. \end{cases}$$

Par conséquent la solution dans ce cas est donnée par

$$\begin{cases} u_{10}(z) = 0, \\ w_{10}(z) = \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} P_0 \right) z, \\ u_{20}(z) = 0, \\ w_{20}(z) = \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} P_0 \right) \left(z + \left(\frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} - G \right) \frac{h_*}{G} \right). \end{cases} \quad (3.2.4)$$

En appliquant ensuite les transformations inverses (3.1.10) à l'ordre $n = 0$, on trouve

$$\begin{cases} u_1(r, z) = 0, \\ u_2(r, z) = 0, \\ w_1(r, z) = \frac{2}{R^2} \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} P_0 \right) z, \\ w_2(r, z) = \frac{2}{R^2} \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} P_0 \right) \left(z + \left(\frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} - G \right) \frac{h_*}{G} \right). \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Ces dernières représentent les solutions du problème (3.1.1) correspondant au premier cas ($\lambda_n = 0$).

b) Deuxième cas ($\lambda_n \neq 0$)

b) 1) Résolution du premier système

Déterminons d'abord l'équation séparée en $w_{1n}(z)$.

En dérivant les deux équations du système (3.2.1), on obtient

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_{1n}(z) + \frac{1}{b_1} u_{1n}''(z) - \frac{a_1}{b_1} \lambda_n w_{1n}'(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{1n}'(z) + b_1 w_{1n}^{(3)}(z) + a_1 \lambda_n u_{1n}''(z) = 0 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

En multipliant la première équation de (3.2.6) par $a_1 \lambda_n$ et la deuxième par $\frac{1}{b_1}$, on aura

$$\begin{cases} -a_1 \lambda_n^3 u_{1n}(z) + \frac{a_1}{b_1} \lambda_n u_{1n}''(z) - \frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 w_{1n}'(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 \frac{1}{b_1} w_{1n}'(z) + w_{1n}^{(3)}(z) + \frac{a_1}{b_1} \lambda_n u_{1n}''(z) = 0 \end{cases}$$

par soustraction, on trouve

$$-a_1 \lambda_n^3 u_{1n}(z) + \left(-\frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 + \frac{1}{b_1} \lambda_n^2\right) w_{1n}'(z) - w_{1n}^{(3)}(z) = 0. \quad (3.2.7)$$

Donc, pour $\lambda_n \neq 0$, on a

$$u_{1n}(z) + \frac{1}{-a_1 \lambda_n^3} \left[\left(-\frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 + \frac{1}{b_1} \lambda_n^2\right) w_{1n}'(z) - w_{1n}^{(3)}(z) \right] = 0.$$

Ce qui donne

$$u_{1n}(z) = \frac{-1}{a_1 \lambda_n^3} \left[\left(\frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 - \frac{1}{b_1} \lambda_n^2\right) w_{1n}'(z) + w_{1n}^{(3)}(z) \right]. \quad (3.2.8)$$

D'une part, la dérivation de $u_{1n}(z)$, donne

$$u_{1n}'(z) = \frac{-1}{a_1 \lambda_n^3} \left[\left(\frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 - \frac{1}{b_1} \lambda_n^2\right) w_{1n}''(z) + w_{1n}^{(4)}(z) \right],$$

et d'autre part, la deuxième équation du système (3.2.1) permet de tirer $u_{1n}'(z)$ comme suit

$$u_{1n}'(z) = \frac{1}{a_1 \lambda_n} \left(\lambda_n^2 w_{1n}(z) - b_1 w_{1n}''(z) \right).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{-1}{a_1 \lambda_n^3} \left[\left(\frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 - \frac{1}{b_1} \lambda_n^2\right) w_{1n}''(z) + w_{1n}^{(4)}(z) \right] = \frac{1}{a_1 \lambda_n} \left(\lambda_n^2 w_{1n}(z) - b_1 w_{1n}''(z) \right),$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{-1}{\lambda_n^2} \left[\left(\frac{a_1^2}{b_1} \lambda_n^2 - \frac{1}{b_1} \lambda_n^2\right) w_{1n}''(z) + w_{1n}^{(4)}(z) \right] = \left(\lambda_n^2 w_{1n}(z) - b_1 w_{1n}''(z) \right),$$

ou encore

$$\left[\left(-\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{1}{b_1}\right) w_{1n}''(z) + \frac{-1}{\lambda_n^2} w_{1n}^{(4)}(z) \right] = \left(\lambda_n^2 w_{1n}(z) - b_1 w_{1n}''(z) \right).$$

Ce qui donne

$$\left[\left(-\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{1}{b_1} + b_1 \right) w_{1n}''(z) + \frac{-1}{\lambda_n^2} w_{1n}^{(4)}(z) \right] - \lambda_n^2 w_{1n}(z) = 0.$$

Or, si on observe que

$$\begin{aligned} -\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{1}{b_1} + b_1 &= \frac{-a_1^2 + 1 + b_1^2}{b_1} \\ &= \frac{(b_1 - 1)^2 + 1 + b_1^2}{b_1} \quad \text{car } b_1 = a_1 + 1 \\ &= \frac{-(b_1^2 - 2b_1 + 1) + 1 + b_1^2}{b_1} \\ &= 2, \end{aligned}$$

il vient

$$2w_{1n}''(z) + \frac{-1}{\lambda_n^2} w_{1n}^{(4)}(z) - \lambda_n^2 w_{1n}(z) = 0.$$

En l'arrangeant suivant le degré des dérivées, on trouve

$$\frac{-1}{\lambda_n^2} w_{1n}^{(4)}(z) + 2w_{1n}''(z) - \lambda_n^2 w_{1n}(z) = 0.$$

Ce qui se traduit par

$$w_{1n}^{(4)}(z) - 2\lambda_n^2 w_{1n}''(z) + \lambda_n^4 w_{1n}(z) = 0.$$

A partir de (3.2.8) , on a

$$u_{1n}(z) = \left(-\frac{a_1}{\lambda_n b_1} + \frac{1}{\lambda_n b_1} \right) w_{1n}'(z) - \frac{1}{a_1 \lambda_n^3} w_{1n}^{(3)}(z) = 0.$$

En tenant compte de $a_1 = (1 - \nu_1)^{-1}$ et $b_1 = 1 + a_1$, on obtient

$$u_{1n}(z) = \left(\frac{-2\nu_1}{\lambda_n b_1} \right) w_{1n}'(z) - \frac{(1 - \nu_1)}{\lambda_n^3} w_{1n}^{(3)}(z).$$

Donc la résolution du premier système revient à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} w_{1n}^{(4)}(z) - 2\lambda_n^2 w_{1n}''(z) + \lambda_n^4 w_{1n}(z) = 0 \\ u_{1n}(z) = \left(\frac{-2\nu_1}{\lambda_n b_1} \right) w_{1n}'(z) - \frac{(1 - \nu_1)}{\lambda_n^3} w_{1n}^{(3)}(z) \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Remarque 3.7. L'obtention de l'expression de la fonction $w_{1n}(z)$ permettra d'en déduire celle de $u_{1n}(z)$, ce qui nous conduit à résoudre la première équation du système (3.2.9) .

1) La résolution de la première équation du système (3.2.9) , ce fait à l'aide de l'équation caractéristique, puisque cette équation est à coefficients constants⁽⁶⁾.

L'équation caractéristique est

$$\begin{aligned} t^4 - 2\lambda_n^2 t^2 + \lambda_n^4 &= 0 \\ \iff (t^2 - \lambda_n^2) &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $\begin{cases} t = -\lambda_n \\ t = +\lambda_n \end{cases}$ sont les deux racines doubles de l'équation caractéristique.

Ainsi, la solution est sous la forme [12]

$$w_{1n}(z) = \exp(-\lambda_n z) (c_1 + c_2 z) + \exp(\lambda_n z) (c_3 + c_4 z).$$

Et comme $u_{1n}(z)$ s'écrit en fonction de $w'_{1n}(z)$ et $w_{1n}^{(3)}(z)$, calculons alors l'expression de ces dernières.

On a

$$\begin{aligned} w'_{1n}(z) &= -\lambda_n \exp(-\lambda_n z) (c_1 + c_2 z) + c_2 \exp(-\lambda_n z) + \\ &\quad \lambda_n \exp(\lambda_n z) (c_3 + c_4 z) + c_4 \exp(\lambda_n z) \\ &= \exp(-\lambda_n z) (-\lambda_n (c_1 + c_2 z) + c_2) + \exp(\lambda_n z) (\lambda_n (c_3 + c_4 z) + c_4), \end{aligned}$$

en dérivant cette expression, on trouve

$$\begin{aligned} w''_{1n}(z) &= \exp(-\lambda_n z) [-\lambda_n (c_1 + c_2 z) - \lambda_n c_2 - \lambda_n c_2] \\ &\quad + \exp(\lambda_n z) [\lambda_n^2 (c_3 + c_4 z) + \lambda_n c_4 + \lambda_n c_4] \\ &= \exp(-\lambda_n z) [-\lambda_n (c_1 + c_2 z) - 2\lambda_n c_2] \\ &\quad + \exp(\lambda_n z) [\lambda_n^2 (c_3 + c_4 z) + 2\lambda_n c_4]. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} w_{1n}^{(3)}(z) &= \exp(-\lambda_n z) [-\lambda_n^3 (c_1 + c_2 z) - 3\lambda_n^2 c_2] \\ &\quad + \exp(\lambda_n z) [\lambda_n^2 (c_3 + c_4 z) + 3\lambda_n^2 c_4]. \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions $w'_{1n}(z)$ et $w_{1n}^{(3)}(z)$ dans la deuxième équation de (3.2.9) et en posant $\varkappa_1 = 3 - 4\nu_1$, on obtient

$$u_{1n}(z) = (c_1 - \varkappa_1 \lambda_n^{-1} c_2 + c_2 z) \exp(-\lambda_n z) + (c_3 - \varkappa_1 \lambda_n^{-1} c_4 + c_4 z).$$

⁽⁶⁾Méthode de résolution d'une équation différentielle à coefficients constants.

Donc la solution du premier système est

$$\begin{cases} w_{1n}(z) = \exp(-\lambda_n z) (c_1 + c_2 z) + \exp(\lambda_n z) (c_3 + c_4 z), \\ u_{1n}(z) = (c_1 - \varkappa_1 \lambda_n^{-1} c_2 + c_2 z) \exp(-\lambda_n z) + (c_3 - \varkappa_1 \lambda_n^{-1} c_4 + c_4 z). \end{cases}$$

Où $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$.

b) 2) Résolution du deuxième système

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_{2n}(z) + \frac{1}{b_2} u_{2n}''(z) - \frac{a_2}{b_2} \lambda_n w_{2n}'(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{2n}(z) + b_2 w_{2n}''(z) + a_2 \lambda_n u_{2n}'(z) = 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

La résolution de ce système se fait exactement comme le premier système, et on trouve la solution du ce système sous la forme

$$\begin{cases} w_{2n}(z) = \exp(-\lambda_n z) (c_5 + c_6 z) + \exp(\lambda_n z) (c_7 + c_8 z), \\ u_{2n}(z) = (c_5 - \varkappa_2 \lambda_n^{-1} c_6 + c_6 z) \exp(-\lambda_n z) + (-c_7 - \varkappa_2 \lambda_n^{-1} c_8 - c_8 z) \exp(\lambda_n z), \end{cases}$$

avec $\varkappa_2 = 3 - 4\nu_2$ et $(c_5, c_6, c_7, c_8) \in \mathbb{R}^4$.

En résumé

La solution du problème transformé (3.1.15) est donnée par

$$\begin{cases} w_{1n}(z) = \exp(-\lambda_n z) (c_1 + c_2 z) + \exp(\lambda_n z) (c_3 + c_4 z), \\ u_{1n}(z) = (c_1 - \varkappa_1 \lambda_n^{-1} c_2 + c_2 z) \exp(-\lambda_n z) + (c_3 - \varkappa_1 \lambda_n^{-1} c_4 + c_4 z), \\ w_{2n}(z) = \exp(-\lambda_n z) (c_5 + c_6 z) + \exp(\lambda_n z) (c_7 + c_8 z), \\ u_{2n}(z) = (c_5 - \varkappa_2 \lambda_n^{-1} c_6 + c_6 z) \exp(-\lambda_n z) + (-c_7 - \varkappa_2 \lambda_n^{-1} c_8 - c_8 z) \exp(\lambda_n z), \end{cases}$$

où $\varkappa_1 = 3 - 4\nu_1$, $\varkappa_2 = 3 - 4\nu_2$ et les constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ et c_8 sont solutions du système⁽⁷⁾ algébrique suivant

⁽⁷⁾ Système obtenu en explicitant les expressions w_{1n} , u_{1n} , w_{2n} et u_{2n} dans chaque équation du système (3.1.16) .

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (c_1 + c_2 z) \exp(-\lambda_n z) + (c_3 + c_4 z) \exp(\lambda_n z) = 0 \quad - (1) \\
 \\
 c_2 \exp(-\lambda_n z) - \left(c_1 + \left(z - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_2 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n z) - \left(c_3 + \left(z - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_2 \right) \lambda_n \exp(\lambda_n z) \\
 - (c_1 + c_2 z) \exp(-\lambda_n z) + (c_3 + c_4 z) \exp(\lambda_n z) = 0 \quad - - - (2) \\
 \\
 \nu_2 \lambda_n \left(c_5 + \left(h - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \exp(-\lambda_n h) - \left(c_7 + \left(h + \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h) \\
 + (1 - \nu_2) (c_7 \exp(-\lambda_n h) - (c_5 + c_6 h) \exp(-\lambda_n h) + c_8 \exp(\lambda_n h) + (c_7 + c_8 h) \exp(\lambda_n h)) \\
 = - (1 - 2\nu_2) P_n \quad - - - - (3) \\
 \\
 c_6 \exp(-\lambda_n h) - \left(c_5 + \left(h - \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n h) + c_8 \exp(\lambda_n h) - \\
 \left(c_7 + \left(h + \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h) - (c_5 + c_6 h) \exp(-\lambda_n h) + (c_7 + c_8 h) \exp(\lambda_n h) = 0 \quad - (4) \\
 \\
 c_2 \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_1 + \left(z - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_2 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n h_*) - c_4 \exp(\lambda_n h_*) - \\
 \left(c_3 + \left(z - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_4 \right) \lambda_n \exp(\lambda_n h_*) - (c_1 + c_2 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + \\
 (c_3 + c_4 h_*) \exp(\lambda_n h_*) = c_6 \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_5 + \left(h_* - \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n h_*) - \\
 c_8 \exp(\lambda_n h_*) - \left(c_7 + \left(h_* + \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \lambda_n \exp(\lambda_n h_*) - \\
 \lambda_n (c_5 + c_6 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) (c_7 + c_8 h_*) \exp(\lambda_n h_*) \quad - - - - - (5) \\
 \\
 (\nu_1 \lambda_n \left((c_1 + \left(h_* - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_2 \right) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_3 + \left(h_* + \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_4 \right) \exp(\lambda_n h_*) \\
 + (1 - \nu_1) [(c_2 \exp(-\lambda_n h_*) - (c_1 + c_2 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + \\
 c_4 \exp(\lambda_n h_*) + (c_3 + c_4 h_*) \exp(\lambda_n h_*)) (1 - 2\nu_2) = \\
 (1 - 2\nu_1) \nu_2 \lambda_n [\left(c_5 + \left(h_* - \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_7 + \left(h_* + \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h_*)] + \\
 (1 - \nu_2) (c_6 \exp(-\lambda_n h_*) - (c_5 + c_6 h_*) \lambda_n \exp(-\lambda_n h_*) + c_8 \exp(\lambda_n h_*) \\
 + (c_7 + c_8 h_*) \lambda_n \exp(\lambda_n h_*))] \quad - - - (6) \\
 \\
 \left((c_1 + \left(h_* - \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_2 \right) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_3 + \left(h_* + \frac{z_1}{\lambda_n} \right) c_4 \right) \exp(\lambda_n h_*) = \\
 G \left(\left(c_5 + \left(h_* - \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_7 + \left(h_* + \frac{z_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h_*) \right) \quad - - - (7) \\
 \\
 (c_1 + c_2 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + (c_3 + c_4 h_*) \exp(\lambda_n h_*) = \\
 G ((c_5 + c_6 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + (c_7 + c_8 h_*) \exp(\lambda_n h_*)) \quad - - - - - (8)
 \end{array} \right.$$

Si $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, la résolution de ce dernier système se fait à l'aide du logiciel Maple [14].

Les solutions sont donnés comme suit:

$$c_i = \frac{c_{in}}{c_{id}}, i = 1, 2, \dots, 8. \text{ où } c_{2d} = c_{4d} = c_{6d} = c_{8d}, c_{1d} = c_{3d} = c_{5d} = c_{7d}, \text{ et } c_{7d} = \lambda_n c_{8d}$$

$$c_{1n} = 4(-1 + \nu) GP \exp(\lambda_n(h + 2h_*)) \{ (G - 1)(d_3 + d_4) \exp(4\lambda_n h_*) + (d_3 - d_4) \exp(2\lambda_n h) + \exp(2\lambda_n h_*) [(d_1 + d_2 - (d_1 - d_2) \exp(2\lambda_n h))] \},$$

$$c_{2n} = -4(-1 + \nu) GP \exp(\lambda_n(h + 2h_*)) \\ \times \{ (1 - 2\lambda_n(h - h_*)) \exp(4\lambda_n h_*) - (1 - 2\lambda_n(h - h_*)) \exp(2\lambda_n h) (G - 1) \\ + (\varkappa G + 1) (\exp(2\lambda_n h) - 1) \exp(2\lambda_n h_*) \},$$

$$c_{3n} = -c_{1n},$$

$$c_{4n} = c_{2n},$$

$$c_{5n} = P \exp(\lambda_n(h + 2h_*)) \{ [\lambda_n h + 2(\nu - 1)] \exp(2\lambda_n h_*) [(\varkappa G + 1)(G + \varkappa - 4\lambda_n h_*(G - 1) \exp(2\lambda_n h_*)) - (G - 1)^2 \varkappa \exp(4\lambda_n h_*)] + [-4(d_{10} + d_{11}) \exp(2\lambda_n h_*) + (G - 1)(d_7 + d_8)(1 - \exp(4\lambda_n h_*))] \exp(2\lambda_n h) \},$$

$$c_{6n} = P \exp(\lambda_n(h + 2h_*)) \{ [\varkappa(G - 1)^2 \exp(4\lambda_n h_*) + (\varkappa G + 1)(4\lambda_n h_*(G - 1)) \exp(2\lambda_n h_*) - (G - \varkappa) \exp(2\lambda_n h_*) + 4(d_5 - d_6) \exp(2\lambda_n(h + h_*)) + (G - 1)(G + \varkappa)(1 + 2\lambda_n(h - h_*)) \exp(2\lambda_n h) (\exp(4\lambda_n h_*) - 1) \},$$

$$c_{7n} = P \exp(\lambda_n h) \{ (\lambda_n h - 2(\nu - 1)) \exp(2\lambda_n h) \\ \times [(\varkappa G + 1) \exp(2\lambda_n h_*) - (G + \varkappa - 4\lambda_n h_*(G - 1)) + (G - 1)^2 \varkappa] \\ + [-4(d_{10} - d_{11}) \exp(2\lambda_n h_*) + (G - 1)(d_7 - d_8)(1 - \exp(4\lambda_n h_*))] \exp(2\lambda_n h_*) \},$$

$$c_{8n} = P \exp(\lambda_n(h + 2h_*)) \\ \times \{ [-\varkappa(G - 1)^2 \exp(-2\lambda_n h_*) + (\varkappa G + 1)(4\lambda_n h_*(G - 1) + (G + \varkappa) \exp(2\lambda_n h_*))] \\ \exp(2\lambda_n h) - 4(d_5 - d_6) \exp(2\lambda_n h_*) + (G + 1)(G + \varkappa)(1 - 2\lambda_n(h - h_*)) (\exp(4\lambda_n h_*) - 1) \}$$

et

$$c_{8d} = 2 \exp(2\lambda_n(h + h_*)) \\ \times [4\lambda_n d_9 \exp(2\lambda_n h_*) + (G - 1) d_{12} (\exp(4\lambda_n h_*) - 1)] + (\varkappa G + 1)(G + \varkappa) \exp(4\lambda_n h_*) \\ (\exp(4\lambda_n h) - 1) + 4\lambda_n h_*(G - 1)(\varkappa G + 1) \exp(2\lambda_n h_*) (\exp(4\lambda_n h_*) + \exp(4\lambda_n h)) + \varkappa(G - 1)^2$$

$$(\exp(4\lambda_n h_*) - \exp(4\lambda_n h)).$$

Les coefficients $d_j, j = 1, 2, 3, \dots, 12$ figurant dans ces dernières expressions s'obtiennent par

$$\begin{aligned} d_1 &= G(8\nu^2 - 12\nu + 5) \varkappa, \\ d_2 &= -\lambda_n h (\varkappa + G) + 2\lambda_n h_* (1 - 2\nu) (1 - G), \\ d_3 &= \lambda_n (h\varkappa + 4h_* (\nu - 1)), \\ d_4 &= 2\lambda_n^2 h_* (h - h_*) - \varkappa, \\ d_5 &= 4G(\nu - 1)^2 + (G - 1)^2 2\lambda_n^2 h_* (h - h_*), \\ d_6 &= \lambda_n h_* (G - 1)^2, \\ d_7 &= \lambda_n (G + \varkappa) [-\varkappa h + 4h_* (1 - \nu)], \\ d_8 &= -2\varkappa (1 - \nu) (G + 1) + 2\lambda_n^2 h_* (\varkappa + G) (h - h_*), \\ d_9 &= 2\lambda_n^2 h_* (h - h_*)^2 + 8G\nu^2 (h - h_*) - 2(1 - 2\nu) G (3h_* - 4h) + G^2 h_* (8\nu^2 - 12\nu + 5) + \\ & h_*, \\ d_{10} &= \lambda_n^2 h_* (G - 1)^2 [4h_* (1 - \nu) \varkappa h] + 8G(\nu - 1)^3, \\ d_{11} &= -2\lambda_n^3 h_*^2 (G - 1)^2 (h - h_*) + 4G\lambda_n (\nu - 1)^2 (2h_* - h) + 2\lambda_n h_* (\nu - 1) [\varkappa G^2 + 1], \\ d_{12} &= 2\lambda_n^2 (h_* - h)^2 [G + \varkappa] + \varkappa + G(8\nu^2 - 12\nu + 5). \end{aligned}$$

Remarque 3.8. Les transformations inverses (3.1.10), nous permettent d'avoir les fonctions en déplacements $u_1(r, z)$, $w_1(r, z)$, $u_2(r, z)$ et $w_2(r, z)$, avec ces dernières et à l'aide des expressions des contraintes normales radiales (resp axiales) suivantes

$$\begin{cases} \sigma_{kr} = \frac{\partial u_k}{\partial r} + a_k \nu_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{u_k}{r} + \frac{\partial w_k}{\partial z} \right) \\ \sigma_{kz} = a_k \left[(1 - \nu_k) \frac{\partial w_k}{\partial z} + \nu_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_k) \right) \right] \end{cases} \quad k = 1, 2$$

on déterminera les contraintes qu'on vient d'évoquer.

3.3 Conclusions et perspectives

On va nommer dans toute la suite, les contraintes de compression qui atteignent le maximum en $r = 0$ par contraintes de 1er type, et celles qui atteignent le maximum en $r = R$ par contraintes de 2ème type.

Exemple 7. 1) Contrainte de 1er type comme $P(r) = C(R - r)$ et $P(r) = C(R^2 - r^2)$, où $C \in \mathbb{R}$

2) Contraintes de 2ème type comme $P(r) = Cr$ et $P(r) = C(r^2 + Rr)$, où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.9. Remarquons d'abord que si la contrainte de compression est constante; alors la contrainte radiale et axiale le sont aussi; En effet;
 $P(r) = C$ où $C \in \mathbb{R}$, alors la transformation intégrale est

$$P_n = \int_0^R r C J_0(\lambda_n r) dr = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_n \neq 0 \\ C \frac{R^2}{2} & \text{si } \lambda_n = 0 \end{cases} \quad \text{Car, } J_0(0) = 1$$

C'est à dire $P_0 = C \frac{R^2}{2}$.

En la remplaçant dans les expressions de w_{10} et w_{20} données par (3.2.5), on obtient

$$\begin{aligned} w_1(r, z) &= \frac{2}{R^2} \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C \frac{R^2}{2} \right) z = \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C \right) z \Rightarrow \frac{\partial w_1}{\partial z}(r, z) = \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C, \\ w_2(r, z) &= \frac{2}{R^2} \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C \frac{R^2}{2} \right) \left(z + \left(\frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} - G \right) \frac{h^*}{G} \right) \Rightarrow \frac{\partial w_2}{\partial z}(r, z) = \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C. \end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned} u_1(r, z) &= 0, \\ u_2(r, z) &= 0, \end{aligned}$$

Alors, les expressions de σ_{kr} et σ_{kz} sont

$$\begin{cases} \sigma_{kr} = \nu_k a_k \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C \right) \\ \sigma_{kz} = a_k (1 - \nu_k) \left(\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_1} C \right) \end{cases}, k = 1, 2.$$

Dans la partie qui suit, on donnera les graphes des déplacements et des contraintes pour les différentes valeurs de la contrainte de compression, ensuite on portera des conclusions.

A) Déplacements axiaux w_1 et w_2

A) a) Contrainte de compression de 1er type

1) Si on applique la contrainte linéaire $P(r) = C(R - r)$, alors on a les graphes des déplacements axiaux w_1 et w_2 pour des différentes valeurs de R et de h^* qui sont résumés dans le Tableau 3.1.

2) Si on prend la contrainte parabolique $P(r) = C(R^2 - r^2)$ et on a les graphes des déplacements axiaux w_1 et w_2 pour des différentes valeurs de R et de h^* qui sont rassemblés dans le Tableau 3.2.

A) b) Contrainte de compression de 2ème type

1) Si on applique la contrainte linéaire $P(r) = Cr$, alors on a les graphes des déplacements axiaux w_1 et w_2 qui sont figurés dans le Tableau 3.3.

2) Si on prend la contrainte parabolique $P(r) = C(r^2 + R^2)$ et on a les graphes des déplacements axiaux w_1 et w_2 qui sont donnés dans le Tableau 3.4.

Tableau 3.1: Contrainte de compression du 1er type linéaire, $h_* = h/4$

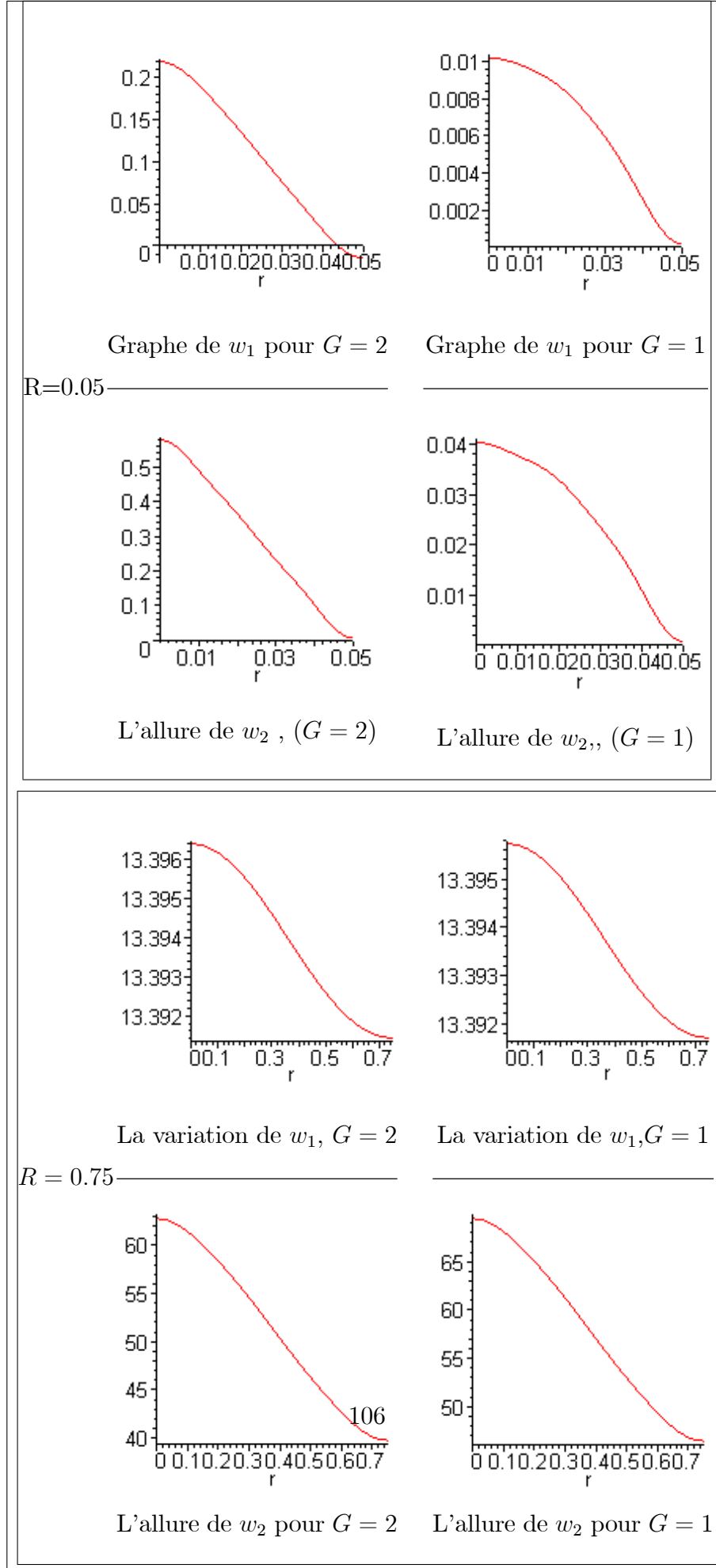


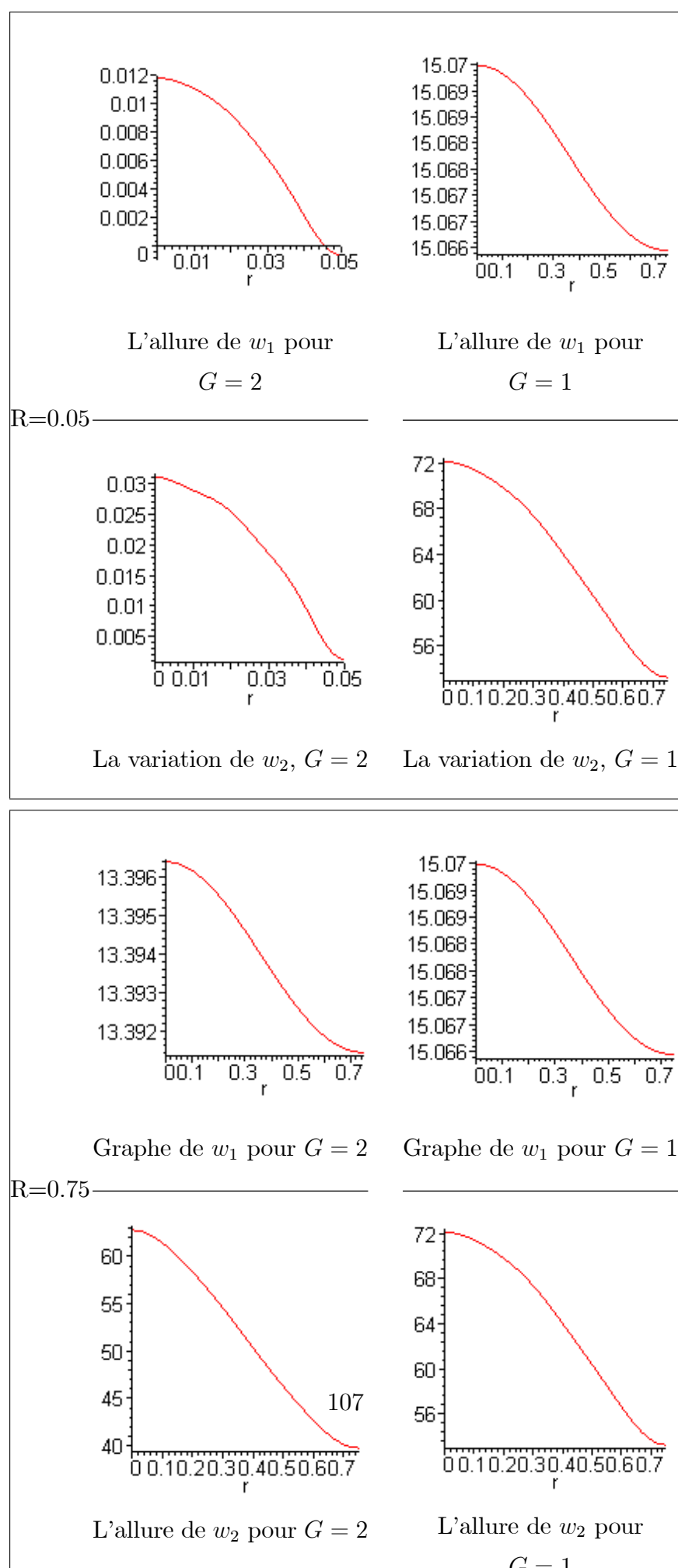
Tableau 3.2 : Contrainte de compression du premier type parabolique, $h_* = h/4$ 

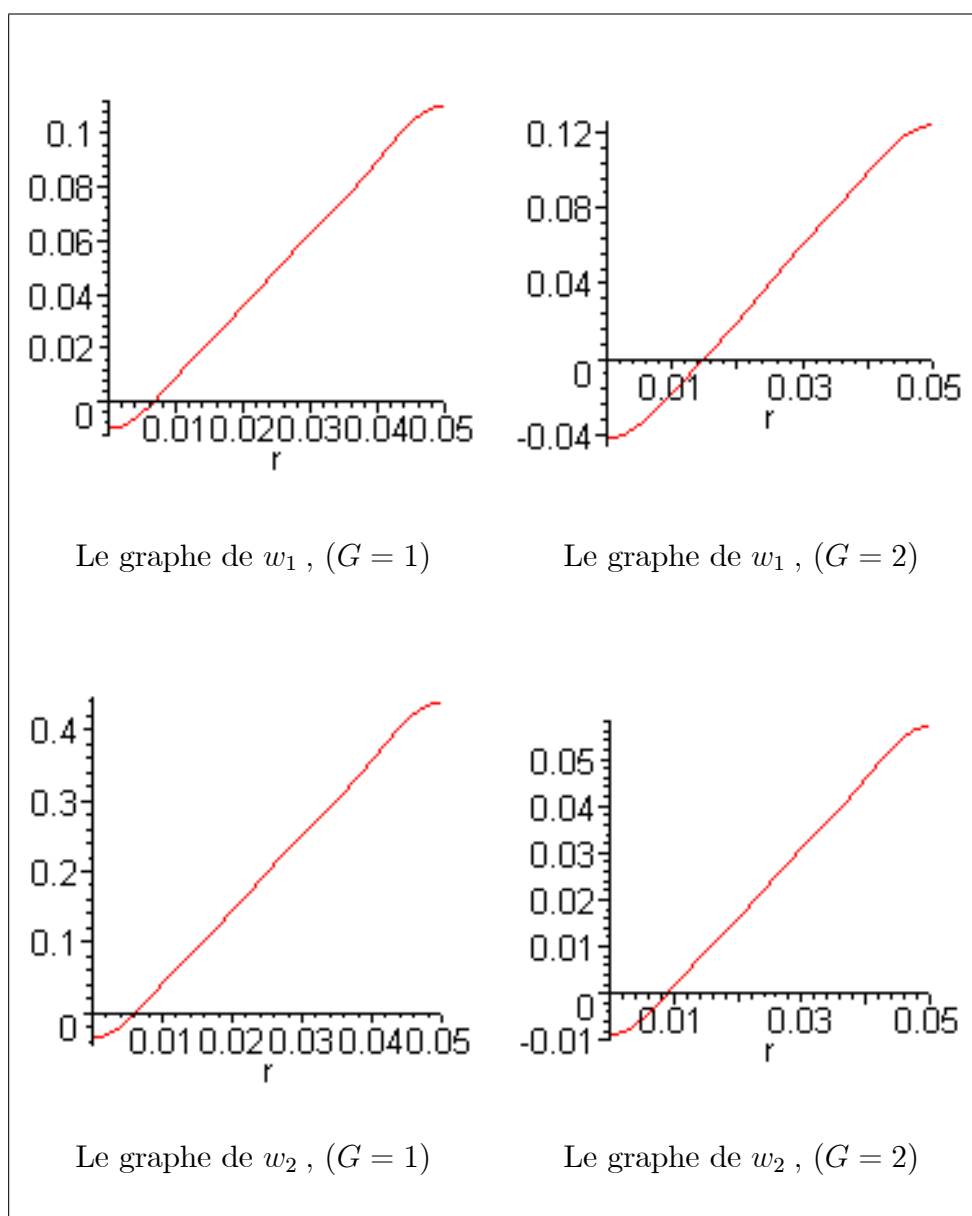
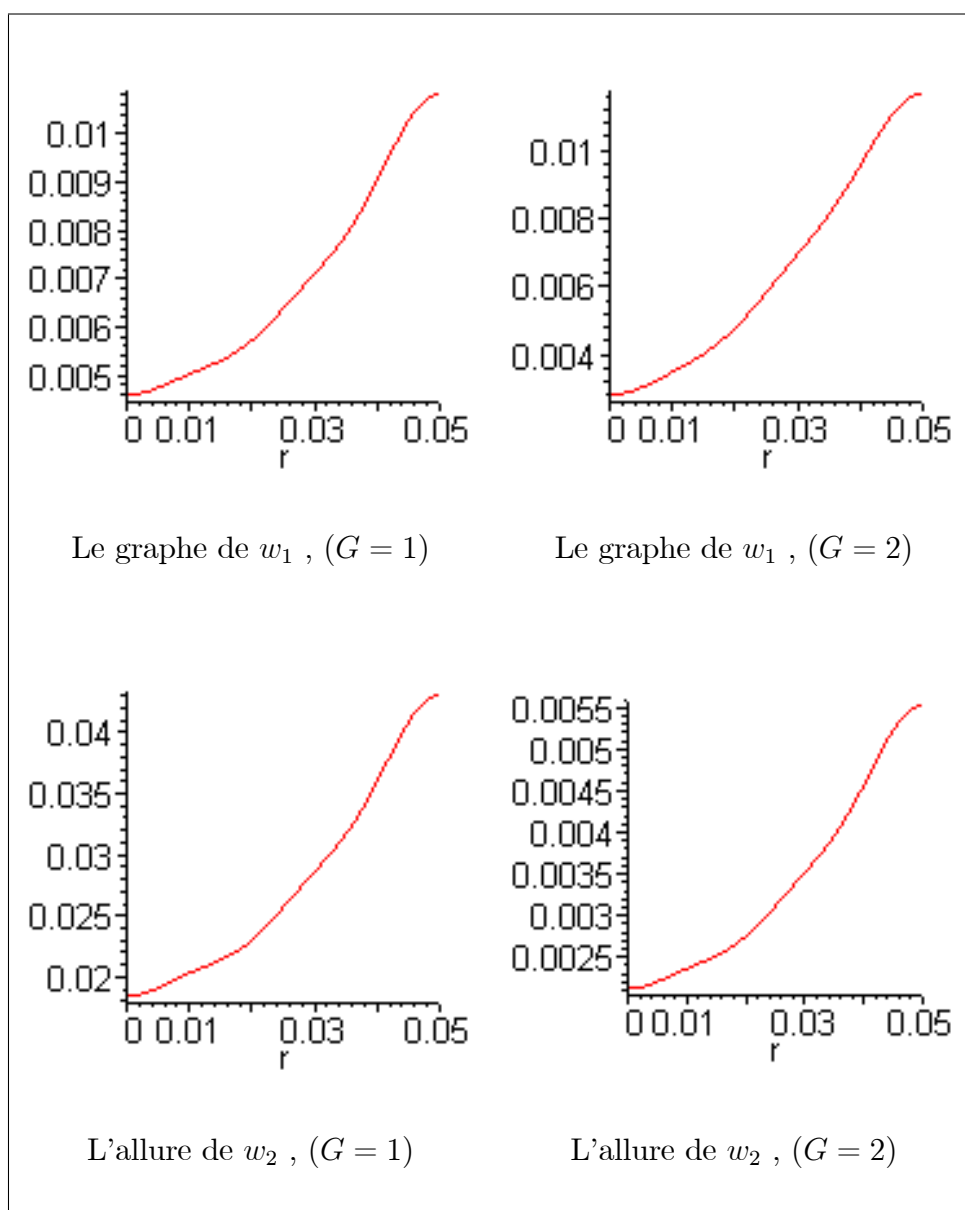
Tableau 3.3 : Les graphes des déplacements w_1 et w_2 pour $P(r) = Cr$ 

Tableau 3.4 : Les graphes des déplacements w_1 et w_2 pour $P(r) = C(r^2 + R^2)$ 

B) Contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale

B) a) Contrainte de compression de 1er type

1) Si la contrainte appliquée est linéaire $P(r) = C(R - r)$, [Figure 3.2], alors les résultats sont regroupés dans le Tableau 3.5.

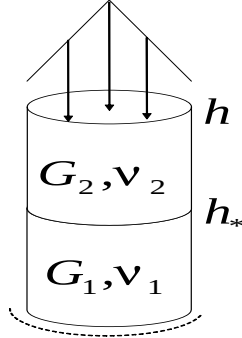


Figure 3.2:
Compression
linéaire
 $P(r) = C(R - r)$

2) Si la contrainte appliquée est parabolique $P(r) = C(R^2 - r^2)$, [Figure 3.3], alors les résultats sont donnés dans le Tableau 3.6.

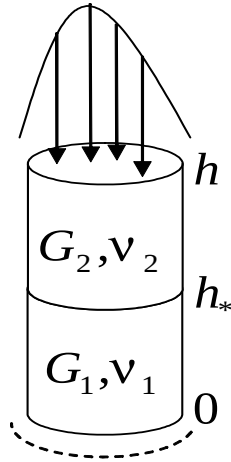


Figure 3.3:
Compression
parabolique
 $P(r) =$
 $C(R^2 - r^2)$

B) b) Contrainte de compression de 2ème type

1) Si on applique la contrainte linéaire $P(r) = Cr$ [Figure 3.4], alors les résultats sont figurés dans le Tableau 3.7.

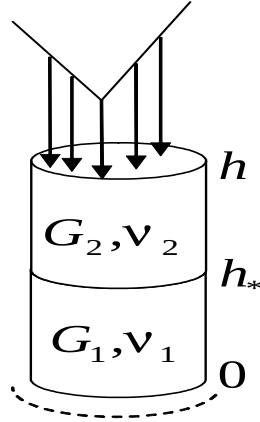


Figure 3.4:
Compression
linéaire $P(r) = Cr$

2) Si on exerce une contrainte linéaire dont l'équation $P(r) = C(r^2 + Rr)$ [Figure 3.5], alors les résultats sont regroupés dans le Tableau 3.8.

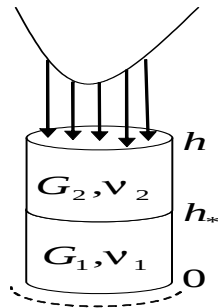


Figure 3.5:
Compression
linéaire $P(r) =$
 $C(r^2 + Rr)$

C) Contrainte axiale σ_z

Les différentes cas possibles de la contrainte de compression et leurs graphes correspondants sont indiqués dans le Tableau 3.9.

Tableau 3.5: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = C(R - r)$.

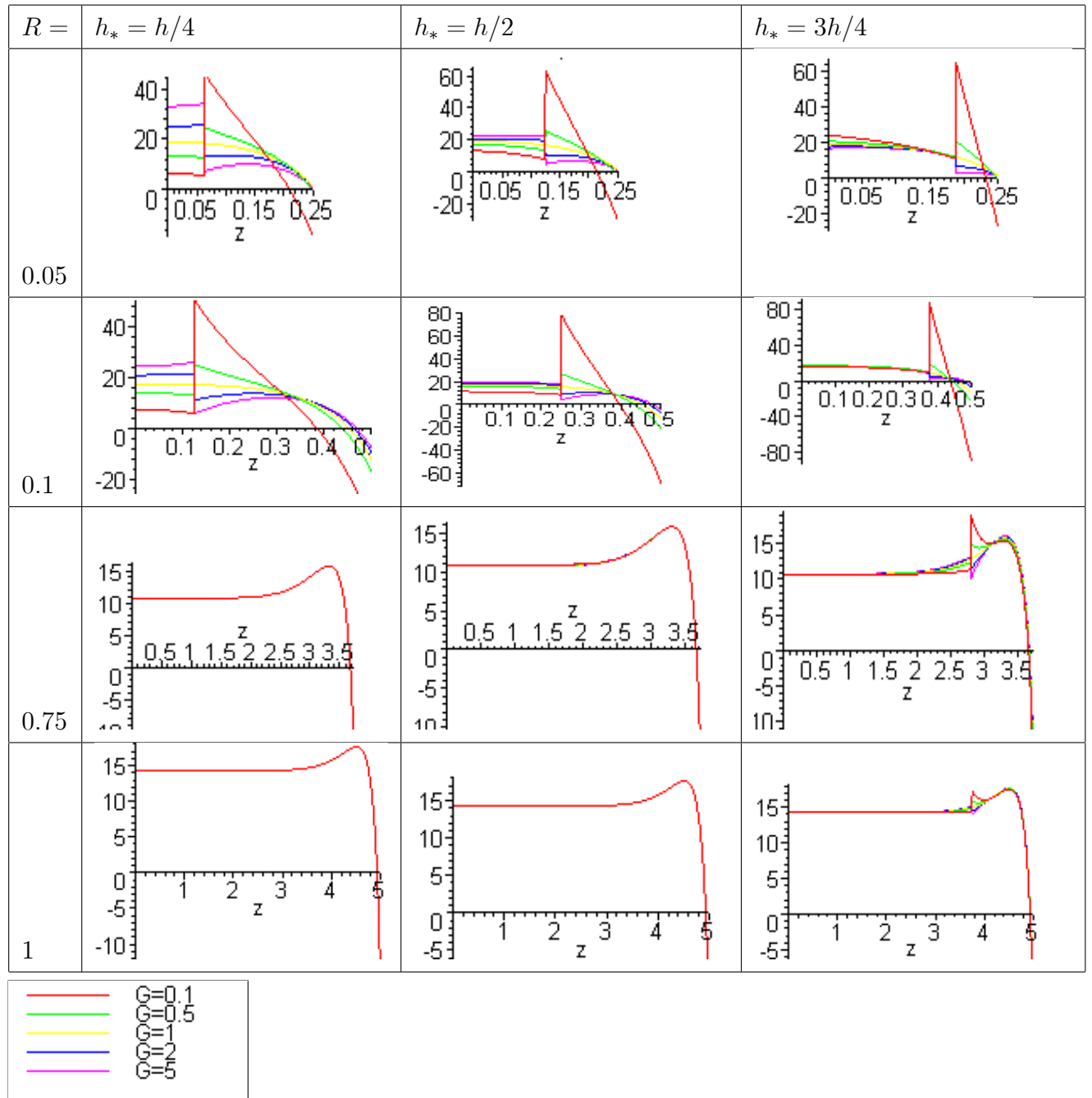


Tableau 3.6: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = C(R^2 - r^2)$

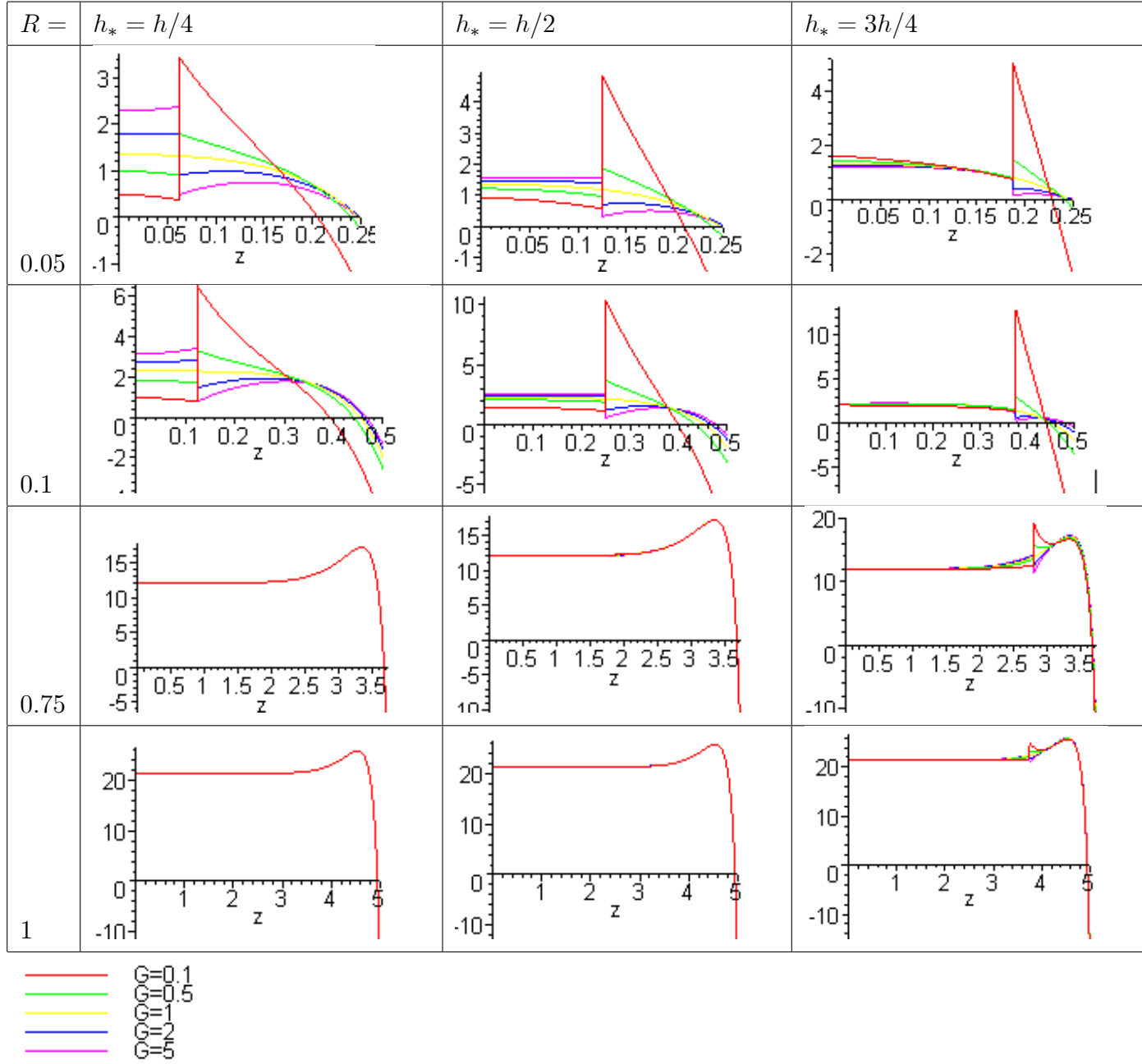


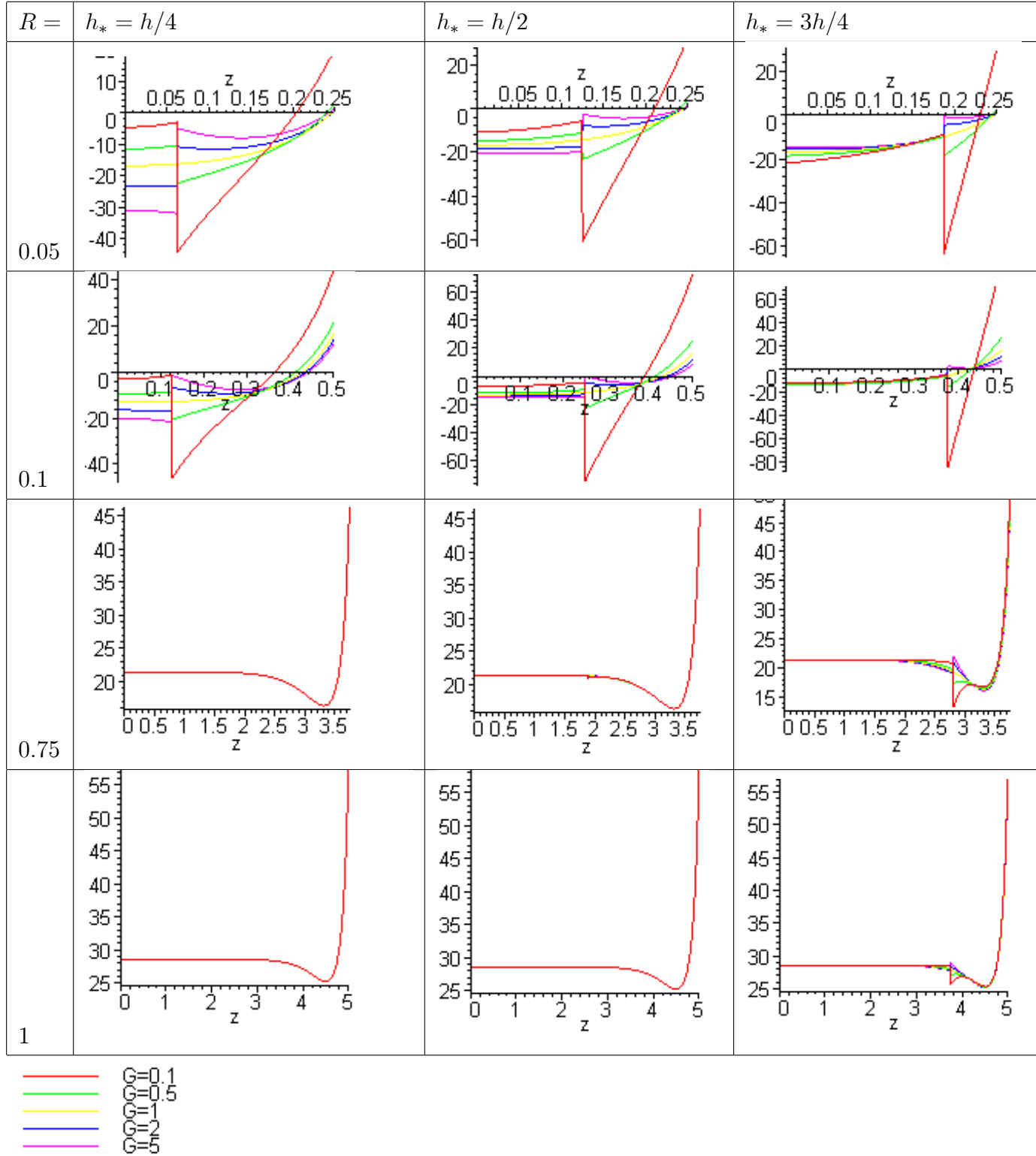
Tableau 3.7: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = Cr$


Tableau 3.8: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = C(r^2 + Rr)$

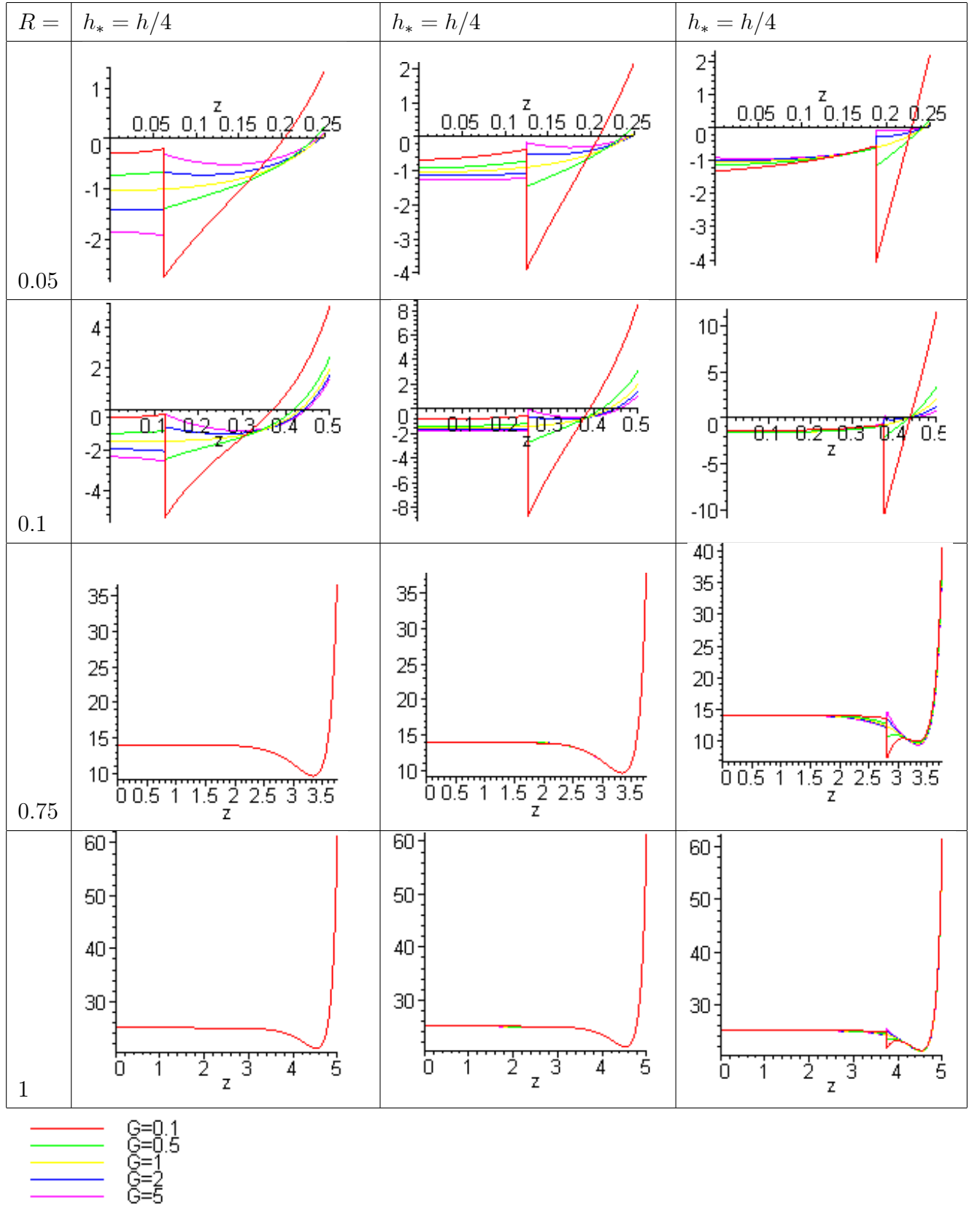
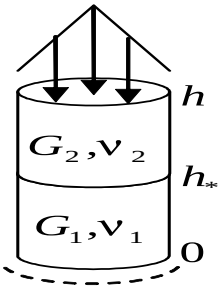
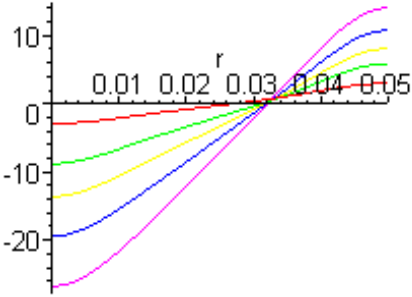
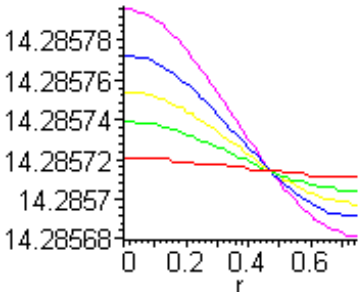
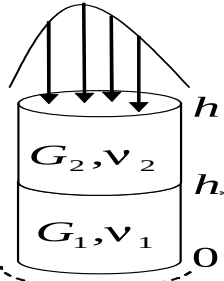
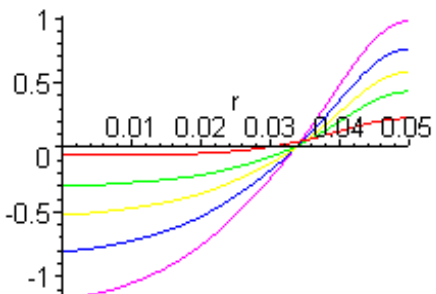
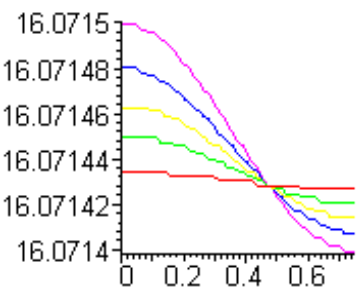
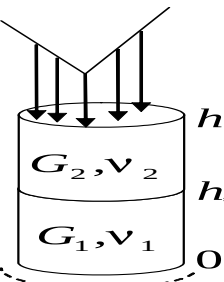
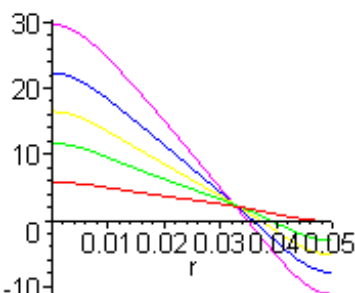
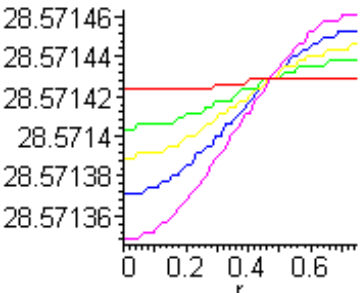
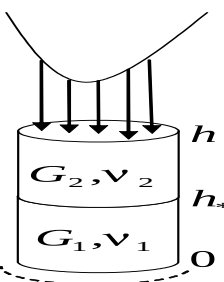
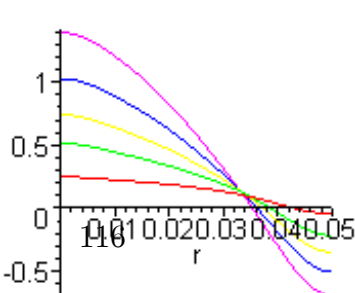
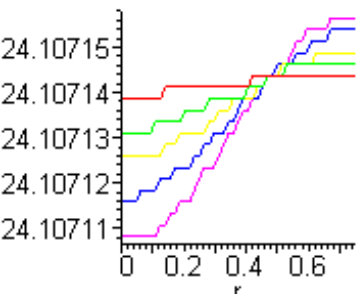


Tableau 3.9: Les graphes de la contrainte axiale σ_z pour les différentes P

Type	Contrainte	$R = 0.05$	$R = 0.75$
1er type	 $p(r) = C(R - r)$		
1er type	 $P(r) = C(R^2 - r^2)$		
2ème type	 $P(r) = Cr$		
2ème type	 $P(r) = C(r^2 + Rr)$		

— $G=0.1$
— $G=0.5$
— $G=1$
— $G=2$
— $G=5$

3.3.1 Conclusion (1)

1) Déplacements axiaux

a) Compression de 1er type

Si P obéit à une loi linéaire, alors les déplacements ont presque la même allure dans les deux cas d'un cylindre d'une seule⁽⁸⁾ couche ou deux couches.

Par contre la similitude s'observe aussi pour le cas où P est parabolique seulement à partir de $R \geq 0.75$.

b) Compression de 2ème type

La remarque précédente reste valable.

Dans les deux cas les extrêmes de déplacement sont atteints pour des valeurs de r pour lesquelles la contrainte de compression est maximale.

2) Contrainte radiale le long de la surface latérale

Si $R \geq 0.75$ et $h_* \leq h/4$ les contraintes sont presque les mêmes que celles apparaissant dans un cylindre d'une seule couche. Alors que si $h_* > h/4$ la similitude est valable uniquement en dehors d'un certain voisinage de h_* .

a) Compression de 1er type

Le maximum de la contrainte radiale est proportionnel au rayon du cylindre dans le cas P est parabolique. Cette proportionnalité est inversée dans le cas linéaire.

Si $R \leq 0.1$ le maximum de la contrainte est atteint en $z = h_*$

b) Compression de 2ème type

Le maximum en valeur absolue atteint au point $z = h_*$ si $R \leq 0.1$ et en $z = h$ si $R \geq 0.75$.

3) Contraintes axiales sur la base du cylindre ($z = 0$)

Le maximum de la contrainte est atteint au même point où la contrainte de compression est maximale.

Par contre si $R \leq 0.05$ et si P est de 1er type, le maximum en valeur absolue est atteint au même point où la contrainte de compression est maximale.

A partir de $R \geq 0.75$ les sauts des discontinuités commencent à apparaître.

⁽⁸⁾Lorsque $G = \frac{G_1}{G_2} = 1$

3.3.2 Second problème: cas d'une fixation rigide de la base $z=0$

Remarque 3.10. Si la base du cylindre est fixé en ($z = 0$), alors le déplacement axial est nul en $z = 0$, ainsi que le déplacement radial et cela se traduit par $u_r(r, z)|_{z=0} = u_z(r, z)|_{z=0} = 0$.

Etudions le problème précédant si les conditions imposées lorsque $z = 0$, sont:

$$u_r(r, z)|_{z=0} = u_z(r, z)|_{z=0} = 0.$$

Voir [Figure 3.6].

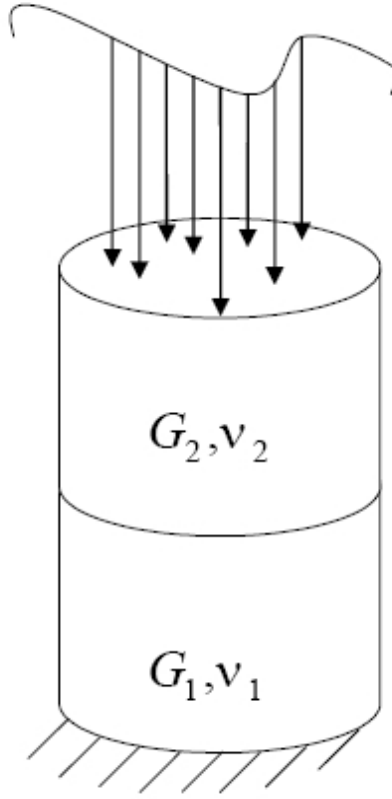


Figure 3.6: Fixation rigide de la base
 $z = 0$.

La résolution du système de Lamé nous conduit à résoudre un système qui est similaire au (3.1.16), obtenu en remplaçant la seconde équation $u'_{1n}(0) - \lambda_n w_{1n}(0) = 0$ par $u_{1n}(0) = 0$.

On trouvera alors un système algébrique analogue au précédant, en remplaçant la deuxième équation par

$$c_1 - \lambda_n c_2 - c_3 - \frac{\kappa}{\lambda_n} c_4 = 0.$$

Alors le système correspondant à ce problème est

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (c_1 + c_2 z) \exp(-\lambda_n z) + (c_3 + c_4 z) \exp(\lambda_n z) = 0 \quad - - (1) \\
 c_1 - \lambda_n c_2 - c_3 - \frac{\kappa_1}{\lambda_n} c_4 = 0 \quad - - - (2) \\
 \nu_2 \lambda_n \left(c_5 + \left(h - \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \exp(-\lambda_n h) - \left(c_7 + \left(h + \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h) \\
 + (1 - \nu_2) (c_7 \exp(-\lambda_n h) - (c_5 + c_6 h) \exp(-\lambda_n h) + c_8 \exp(\lambda_n h) + (c_7 + c_8 h) \exp(\lambda_n h)) \\
 = - (1 - 2\nu_2) P_n \quad - - - - - (3) \\
 c_6 \exp(-\lambda_n h) - \left(c_5 + \left(h - \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n h) + c_8 \exp(\lambda_n h) - \\
 \left(c_7 + \left(h + \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h) - (c_5 + c_6 h) \exp(-\lambda_n h) + (c_7 + c_8 h) \exp(\lambda_n h) = 0 \quad - - (4) \\
 c_2 \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_1 + \left(z - \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_2 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n h_*) - c_4 \exp(\lambda_n h_*) - \\
 \left(c_3 + \left(z - \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_4 \right) \lambda_n \exp(\lambda_n h_*) - (c_1 + c_2 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + \\
 (c_3 + c_4 h_*) \exp(\lambda_n h_*) = c_6 \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_5 + \left(h_* - \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \lambda_n \exp(-\lambda_n h_*) - \\
 c_8 \exp(\lambda_n h_*) - \left(c_7 + \left(h_* + \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \lambda_n \exp(\lambda_n h_*) - \\
 \lambda_n (c_5 + c_6 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) (c_7 + c_8 h_*) \exp(\lambda_n h_*) \quad - - - - - (5) \\
 (\nu_1 \lambda_n \left((c_1 + \left(h_* - \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_2) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_3 + \left(h_* + \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_4 \right) \exp(\lambda_n h_*) \right) \\
 + (1 - \nu_1) [(c_2 \exp(-\lambda_n h_*) - (c_1 + c_2 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + \\
 c_4 \exp(\lambda_n h_*) + (c_3 + c_4 h_*) \exp(\lambda_n h_*))]) (1 - 2\nu_2) = \\
 (1 - 2\nu_1) \nu_2 \lambda_n \left[\left(c_5 + \left(h_* - \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_7 + \left(h_* + \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h_*) \right] + \\
 (1 - \nu_2) (c_6 \exp(-\lambda_n h_*) - (c_5 + c_6 h_*) \lambda_n \exp(-\lambda_n h_*) + c_8 \exp(\lambda_n h_*) \\
 + (c_7 + c_8 h_*) \lambda_n \exp(\lambda_n h_*)) \quad - - - (6) \\
 \left((c_1 + \left(h_* - \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_2) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_3 + \left(h_* + \frac{\kappa_1}{\lambda_n} \right) c_4 \right) \exp(\lambda_n h_*) = \right. \\
 \left. G \left(\left(c_5 + \left(h_* - \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_6 \right) \exp(-\lambda_n h_*) - \left(c_7 + \left(h_* + \frac{\kappa_2}{\lambda_n} \right) c_8 \right) \exp(\lambda_n h_*) \right) \right) \quad - - - (7) \\
 (c_1 + c_2 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + (c_3 + c_4 h_*) \exp(\lambda_n h_*) = \\
 G ((c_5 + c_6 h_*) \exp(-\lambda_n h_*) + (c_7 + c_8 h_*) \exp(\lambda_n h_*)) \quad - - - - - (8)
 \end{array} \right.$$

Remarque 3.11. On donnera la solution sous forme des graphes correspondants aux différents types des contraintes de compression.

A) Contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale

A) a) Contrainte de compression de 1er type

1) Si la contrainte appliquée est linéaire $P(r) = C(R - r)$, [Figure 3.7], alors les résultats sont regroupés dans le Tableau 3.10.

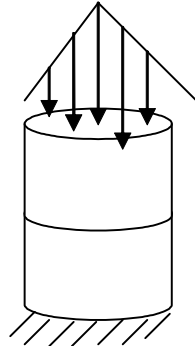


Figure 3.7:
Fixation
rigide de la
base $P(r) =$
 $C(R - r)$

2) Si la contrainte appliquée est parabolique $P(r) = C(R^2 - r^2)$, [Figure 3.8], alors les résultats sont présentés dans le Tableau 3.11.

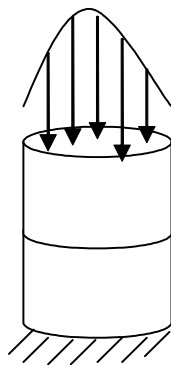


Figure 3.8:
Fixation
rigide de la
base $P(r) =$
 $C(R^2 - r^2)$

A) b) Contrainte de compression de 2ème type

1) Si la contrainte appliquée est linéaire $P(r) = Cr$, [Figure 3.9], alors les résultats sont exposés dans le Tableau 3.12.

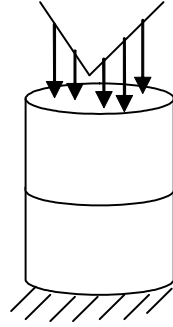


Figure 3.9:
 $P(r) = Cr$

2) Si la contrainte appliquée est parabolique $P(r) = C(r^2 + R^2)$ [Figure 3.10], alors les résultats sont affichés dans le Tableau 3.13

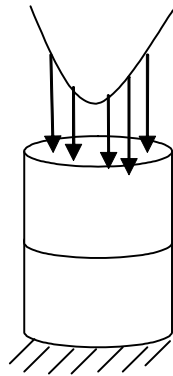


Figure 3.10:
 $P(r) =$
 $C(r^2 + R^2)$

B) Contrainte axiale σ_z

Les différentes cas possibles de la contrainte de compression et leurs graphes correspondants sont indiqués dans le Tableau 3.14.

Tableau 3.10: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = C(R - r)$.

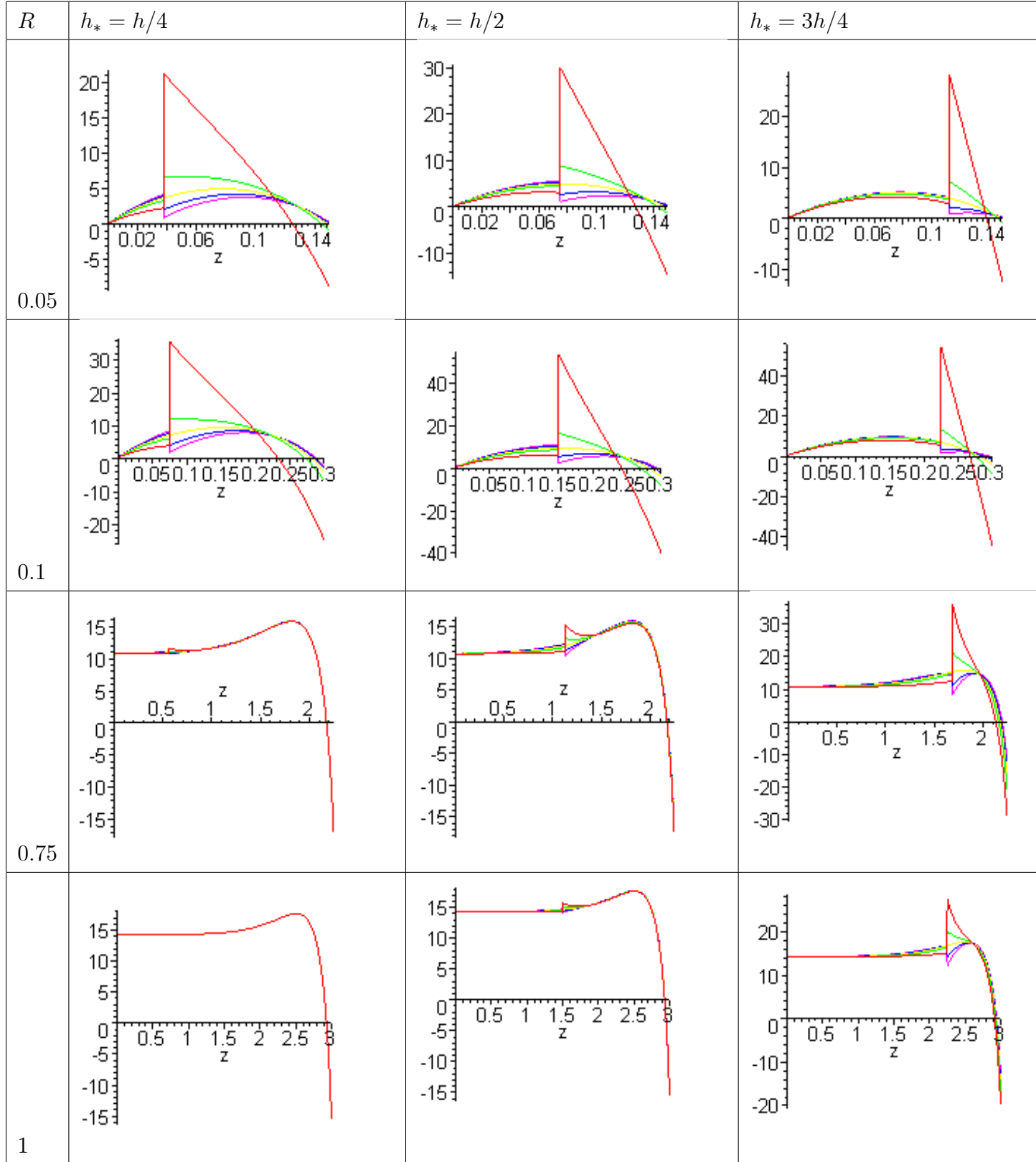


Tableau 3.11: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = C(R^2 - r^2)$.

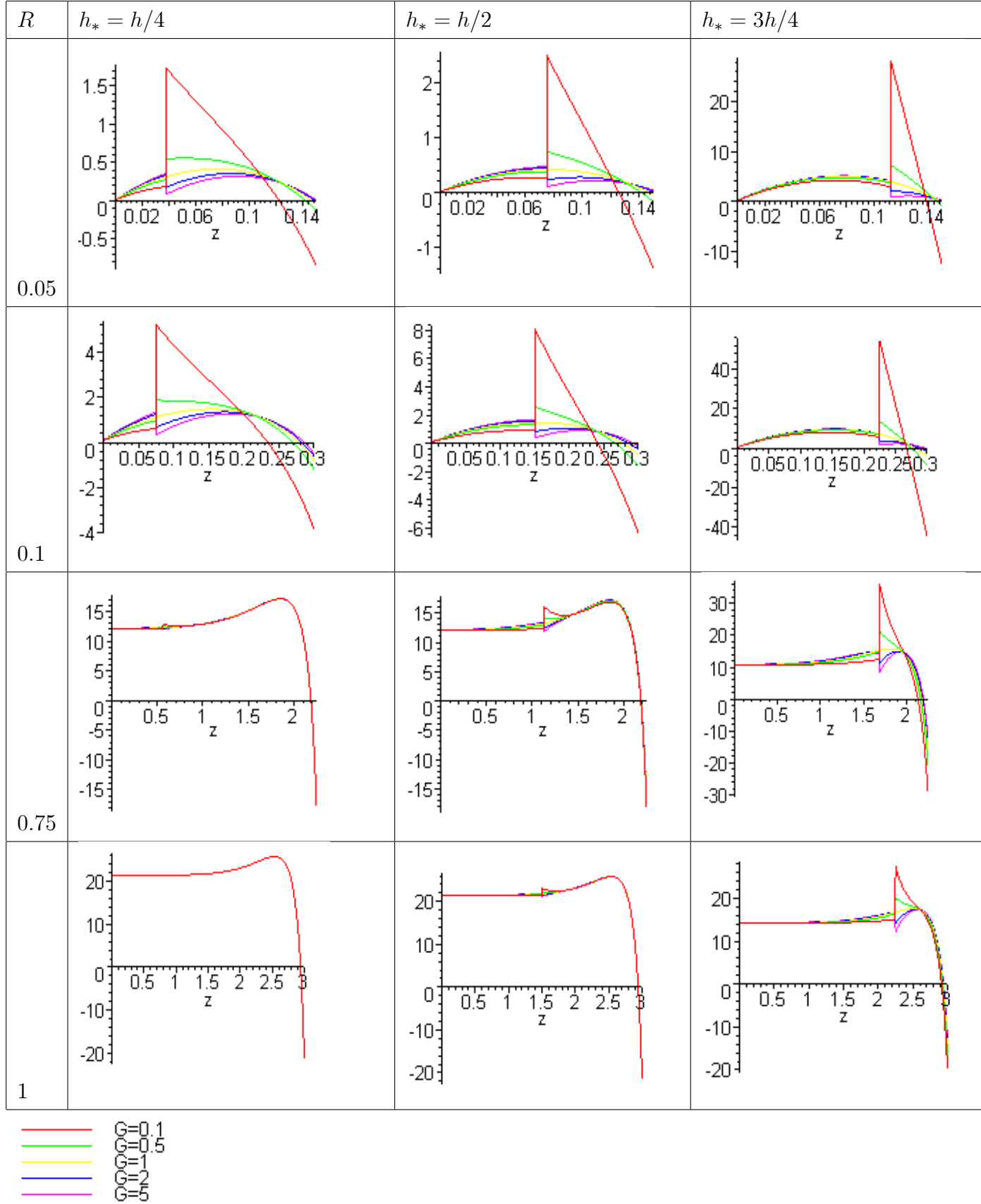


Tableau 3.12: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = Cr$.

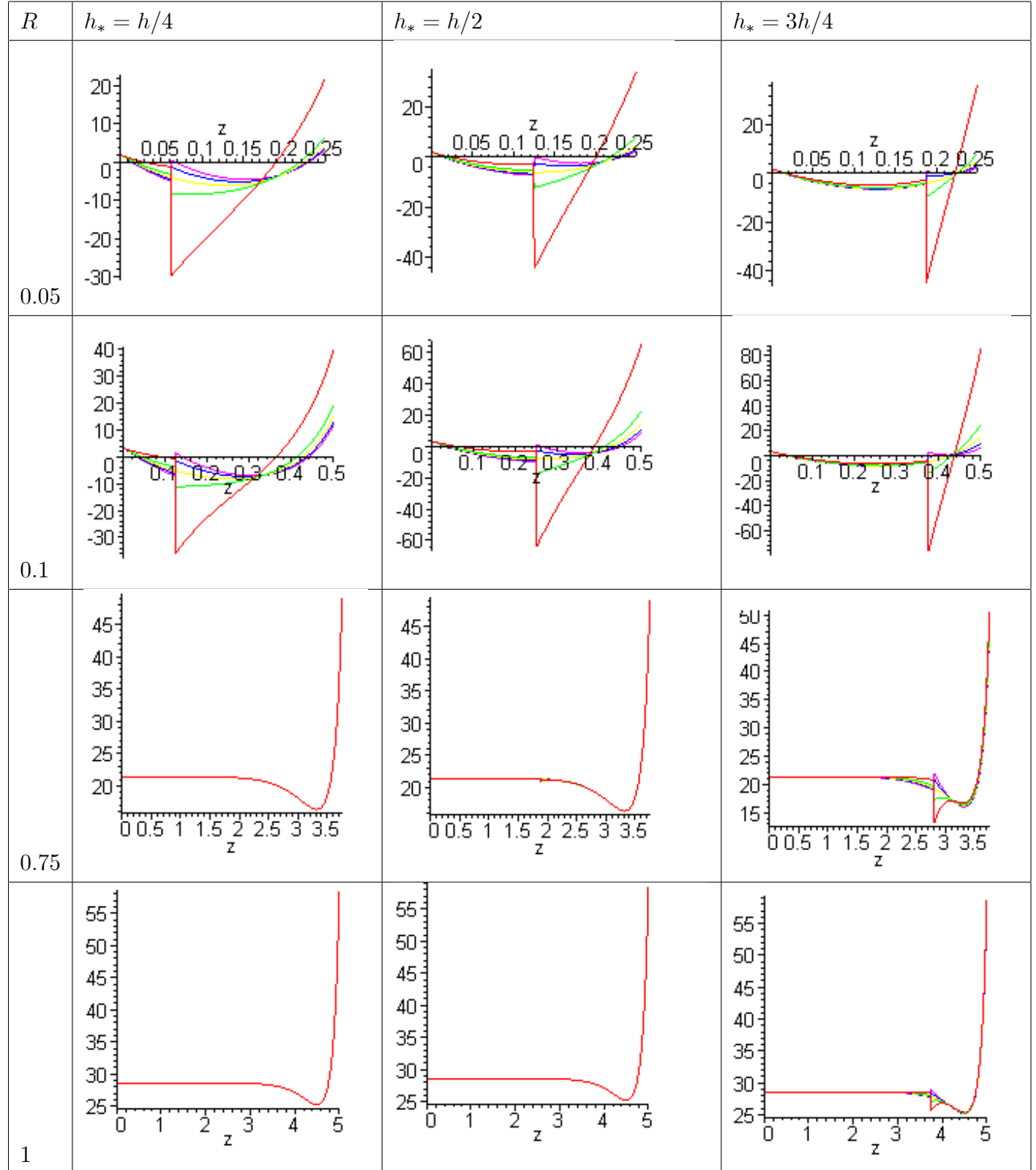


Tableau 3.13: Les graphes de la contrainte radiale σ_r le long de la surface latérale pour $P(r) = 1/2(r^2 + Rr)$.

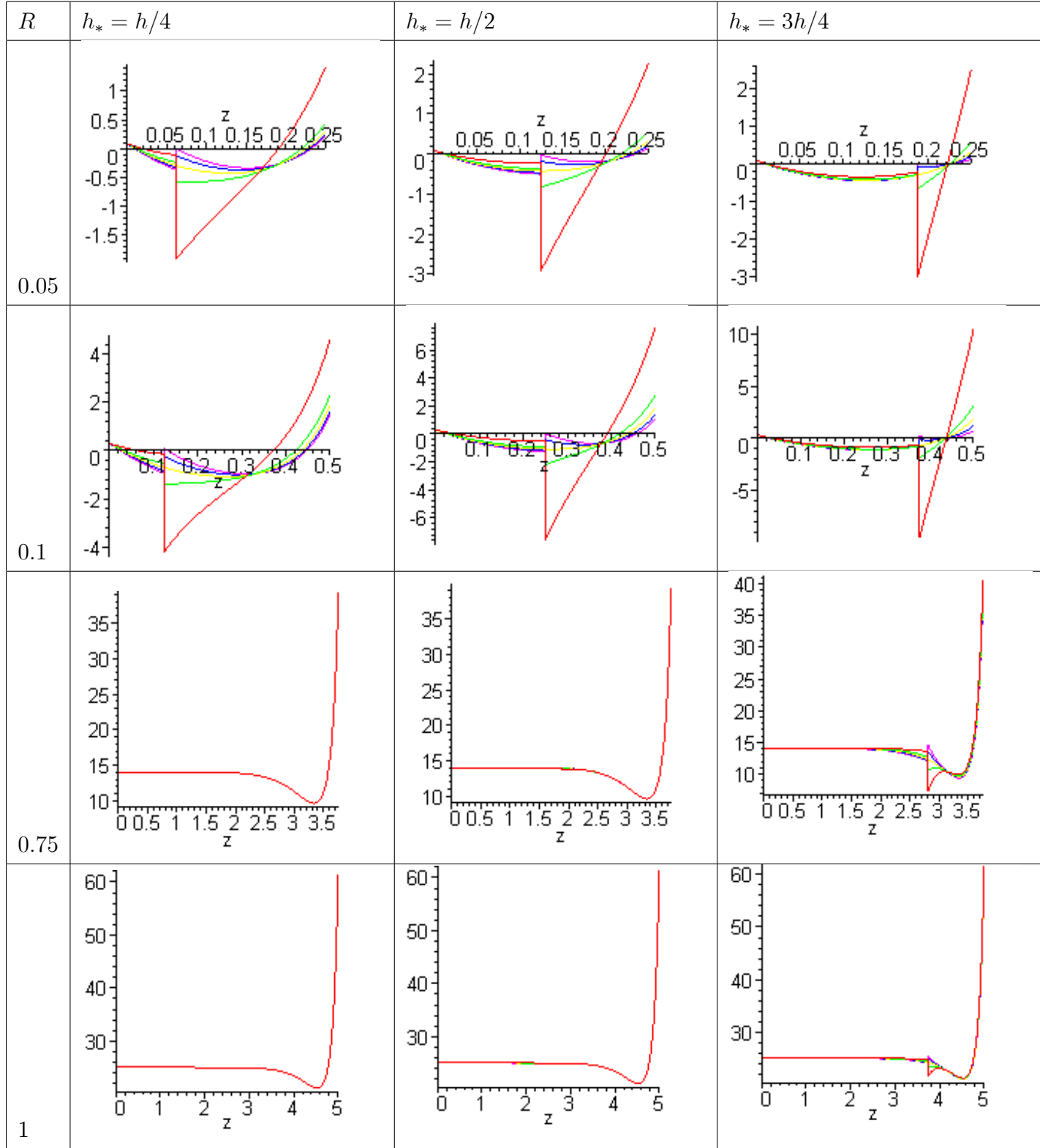
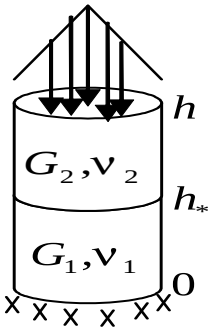
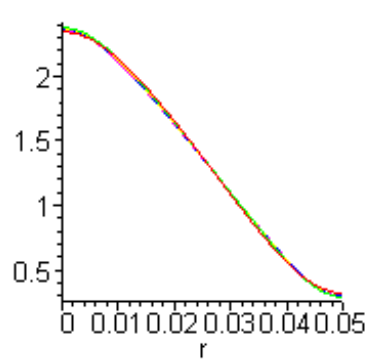
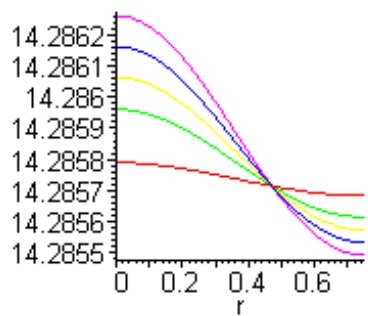
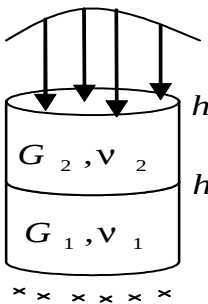
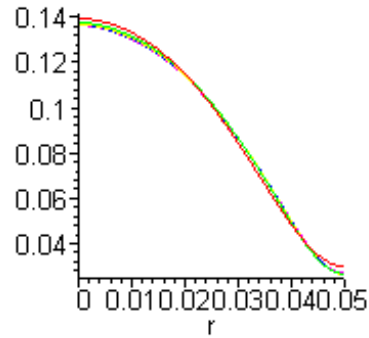
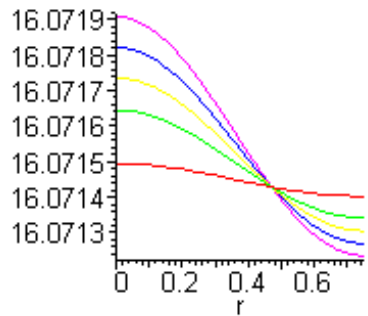
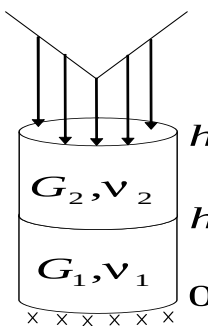
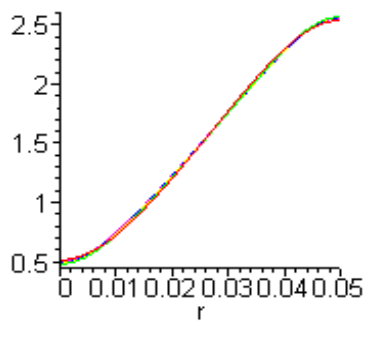
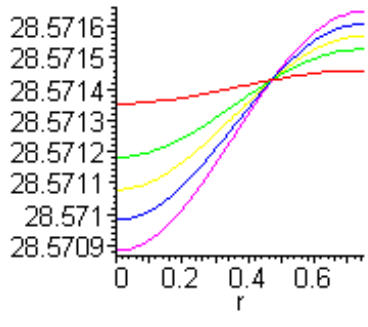
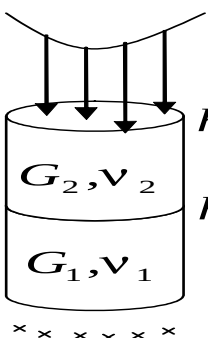
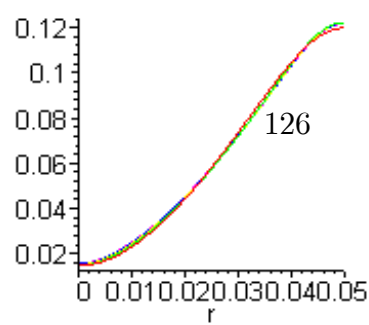
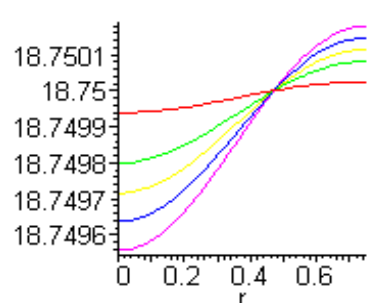


Tableau 3.14: Les graphes de la contrainte axiale σ_z

Contrainte P	$R = 0.05$	$R = 0.75$
 $P(r) = C(R - r)$		
 $P(r) = C(r^2 + Rr)$		
 $P(r) = Cr$		
 $P(r) = C(R^2 - r^2)$		

3.3.3 Conclusion (2)

Contraintes radiales le long de la surface latérale

Si $R \geq 0.75$ et $h_* \leq h/4$ les contraintes sont presque les mêmes que celles apparaissant dans un cylindre d'une seule couche, alors que si $h_* > h/4$ la similitude est valable uniquement en dehors d'un certain voisinage de h_* .

a) Compression de 1er type

En $z = 0$ la contrainte est nulle pour $R \leq 0.1$.

Le maximum de la contrainte radiale est proportionnel au rayon du cylindre.

Si $R \leq 0.1$ le maximum est atteint en $z = h_*$

b) Compression de 2ème type

Le maximum en valeur absolue atteint au point $z = h_*$ si $R \leq 0.1$ et en $z = h$ si $R \geq 0.75$.

Contraintes axiales

Si $R = 0.05$, les contraintes sont les mêmes que celles apparaissant dans un cylindre d'une seule couche.

a) Compression de 1er type

Le maximum est atteint en $r = 0$.

b) Compression de 2ème type

Le maximum est atteint en $r = R$.

3.3.4 Conclusion générale

Dans les deux problèmes on a

Pour $R \geq 0.75$ et $h_* \leq h/2$, les contraintes sont presque les mêmes à celle apparaissant dans un cylindre d'une seule couche.

Pour $R \leq 0.1$ le maximum de la contrainte est atteint en $z = h_*$

3.3.5 Généralisation du problème de deux couches à un problème de N -couches

Etant donné un cylindre élastique multicouches de rayon R et de hauteur h , formé par N couches superposées⁽⁹⁾ $D_1, D_2, \dots$ et D_N telles que D_1 définit le premier matériau et D_N

⁽⁹⁾Contacte parfait.

définie le N -ème. Ce cylindre est paramétré en coordonné cylindrique comme suit

$$\cup_{k=1}^{k=N} D_k \text{ où}$$

$$D_1 = \{(r, \theta, z) \text{ tels que: } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h_1\}$$

$$D_k = \{(r, \theta, z) \text{ tels que: } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, h_{k-1} \leq z \leq h_k\}$$

$$D_N = \{(r, \theta, z) \text{ tels que: } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, h_{N-1} \leq z \leq h\}$$

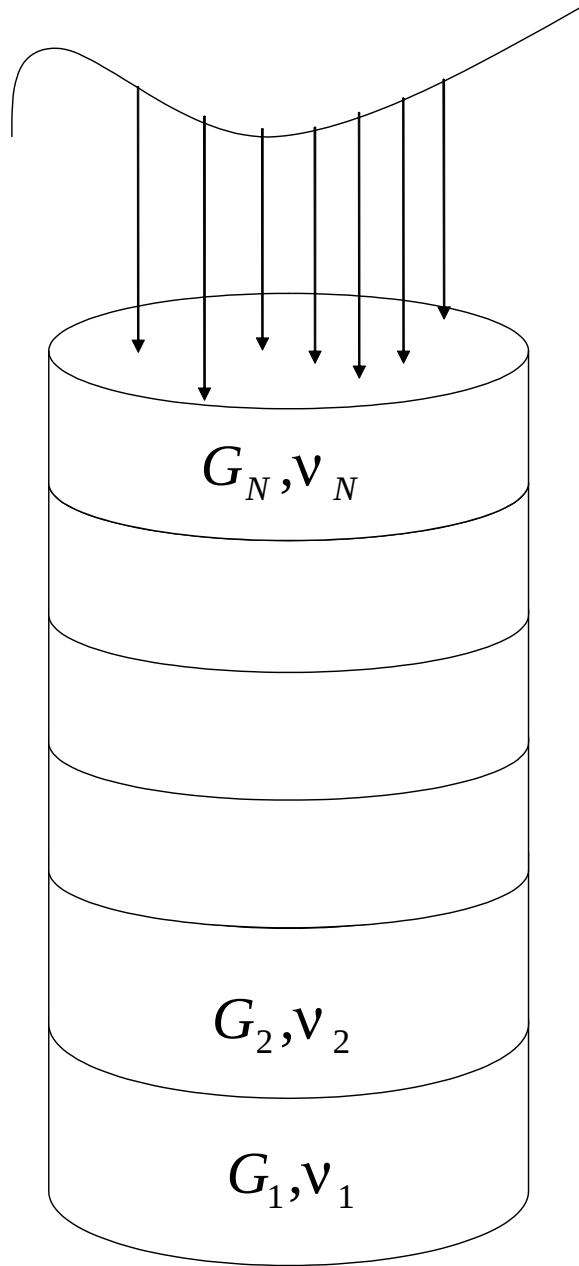


Figure 3.11: Probleme de N couches

Supposons que ce cylindre est placé dans une cavité rigide, de même rayon et de même hauteur.

Les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement des N matériaux sont respectivement $\nu_1, \dots, \nu_N$, $G_1, \dots$, et G_N [Figure 3.11].

A l'extrémité $z = h$, agit une contrainte de compression $-P(r)$.

La contrainte de frottement des matériaux avec la cavité sur la surface latéral $r = R$ est négligeable, ainsi que celles du premier matériaux avec la base de la cavité. On suppose aussi que les contraintes de frottement entre chaque deux matériaux successifs sont négligeables.

La déformation élastique du cylindre est alors axisymétrique, c'est-à-dire le déplacement angulaire est nul $u_{k\theta} = 0$, alors que les déplacements u_{kr}, u_{kz} sont indépendants de l'angle polaire θ où u_{kr} et u_{kz} sont respectivement les composantes radiale et axiale du vecteur déplacement.

On cherche à trouver la contrainte normale radiale σ_r le long de la surface latérale du cylindre

3.3.6 Formulation mathématique du problème

Effectuons le changement de variable suivant:

$$(u_k, w_k) = 2G_k(u_{kr}, u_{kz}), k = 1, \dots, N$$

Le système de d'équilibre de Lamé correspond à ce problème est donné par

$$\begin{cases} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u_k \right) + \frac{1}{b_k} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} - \frac{u_k}{r^2} + \frac{a_k}{b_k} \frac{\partial^2 w_k}{\partial r \partial z} = 0 \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} w_k \right) + b_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} + a_k r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial z} u_k \right) = 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, N$$

Où

$$a_k = (1 - 2\nu_k)^{-1}, \quad b_k = 1 + a_k, \quad k = 1, \dots, N$$

Remarque 3.12. Le système de Lamé dans ce cas, est formé par $2N$ équations.

Condition aux limites du problème

Sur la surface latérale ($r = R$) Comme la paroi de la cavité est rigide donc le déplacement radiale pour u_{kr} est nul ainsi que la contrainte tangentielle τ_{krz} qui se traduit par

$$u_{kr}(r, z)|_{r=R} = \tau_{krz}(r, z)|_{r=R} = 0, k = 1, \dots, N.$$

Extrémités ($z = 0$ et $z = h$) La rigidité de la paroi de la cavité implique " pas de déplacement vers le bas" c'est-à-dire le déplacement axiale u_{1z} en $z = 0$ est nul, ce qui se traduit par

$$\text{pour } z = 0 \text{ on a } u_{1z}(r, z)|_{z=0} = \tau_{1zr}(r, z)|_{z=0} = 0.$$

En $z = h$ la contrainte axiale et la contrainte tangentielle radiale sont données comme suit

$$\text{pour } z = h \text{ on a } \sigma_{Nz}(r, z)|_{z=h} = -P(r) \text{ et } \tau_{Nzr}(r, z)|_{z=h} = 0.$$

Surfaces des séparations des deux matériaux successifs ($z = h_k, 1, \dots, N-1$) On a la continuité des déplacements et des contraintes, c'est à dire

$$\begin{aligned} u_{kr}(r, h_k - 0) &= u_{(k+1)r}(r, h_k + 0), \\ u_{kz}(r, h_k - 0) &= u_{(k+1)z}(r, h_k + 0), \\ \sigma_{kz}(r, h_k - 0) &= \sigma_{(k+1)z}(r, h_k + 0), \\ \tau_{krz}(r, h_k - 0) &= \tau_{(k+1)rz}(r, h_k + 0). \end{aligned}$$

Transformation intégrale du problème (système de Lamé)

Avant tous; on pose

$$(u_k, w_k) = 2G_k(u_{kr}, u_{kz}), k = 1, \dots, N.$$

La transformation du problème fait appel à la transformation intégrale de Hankel suivante:

$$\begin{cases} u_{kn}(z) = \int_0^R r u_k(r, z) J_1(r \lambda_n) dr \\ w_{kn}(z) = \int_0^R r w_k(r, z) J_0(r \lambda_n) dr, \end{cases} \quad k = 1, \dots, N, \quad n \in \mathbb{N}$$

où les λ_n vérifient l'équation transcendante $J_1(R \lambda_n) = 0$, et $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$

Et les transformations inverses sont données par

$$\begin{cases} u_{kn}(z) = \int_0^R r u_k(r, z) J_1(r \lambda_n) dr \\ w_{kn}(z) = \int_0^R r w_k(r, z) J_0(r \lambda_n) dr, \end{cases} \quad k = 1, \dots, N$$

En multipliant la $(2k-1)$ ème équation par $rJ_1(r\lambda_n)$ et la $(2k)$ ème équation par $rJ_0(r\lambda_n)$, en intégrant ensuite les équations obtenues de 0 à R suivant la variable r , on trouve

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_{kn}(z) + \frac{1}{a_k} u_{kn}''(z) - \frac{a_k}{b_k} \lambda_n u_{kn}'(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{kn}(z) + b_k w_{kn}''(z) + a_k \lambda_n u_{kn}'(z) = 0 \end{cases}, \quad k = 1, \dots, N$$

Transformation intégrale des conditions aux limites

La transformation de la condition sur la base inférieure du cylindre est

$$w_{1n}(0) = 0,$$

et on a aussi d'après la transformation des conditions du problème précédant

$$u_{1n}'(0) + w_{1n}(0) = 0.$$

La condition sur la base supérieure du cylindre ($z = h$) est

$$\sigma_{Nz}|_{z=h} = -P(r) \quad \text{et} \quad \tau_{Nzr}|_{z=h} = 0$$

Comme $u_N|_R = 0$,

alors la transformation intégrale cette condition est

$$\left(\nu_N u_{Nn}(h) + (1 - \nu_N) w_{Nn}'(h) \right) = -a_N^{-1} P_n,$$

où

$$P_n = \int_0^R r P(r) J_0(r\lambda_n) dr.$$

La transformation de la condition $\tau_{Nzr}|_{z=h} = 0$, donne

$$\left(u_{Nn}'(h) + \lambda_n w_{Nn}(h) \right) = 0.$$

La condition sur la surface de séparation de chaque deux matériaux successifs ($z = h_k, k = 1, \dots, N-1$)

$$u_{kr}(r, h_k - 0) = u_{kr}(r, h_k + 0),$$

c'est-à-dire⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_k} u_k(r, h_k - 0) &= \frac{1}{2G_{k+1}} u_{k+1}(r, h_k + 0) \\ \Rightarrow u_k(r, h_k - 0) &= \frac{G_k}{G_{k+1}} u_{k+1}(r, h_k + 0). \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾En tenant compte de changement de variable $(u_k, w_k) = 2G_k(u_{kr}, u_{kz})$, $k = 1, \dots, N$.

On pos $\mathbf{G}_k = \frac{G_k}{G_{k+1}}$, alors on obtient

$$u_k(r, h_k - 0) = \mathbf{G}_k u_{k+1}(r, h_k + 0), k = 1, \dots, N - 1.$$

La transformation intégrale de cette égalité donne

$$u_{kn}(h_k) = G u_{(k+1)n}(h_k).$$

La deuxième condition sur la surface de séparation de deux matériaux successifs

$$u_{kz}(r, h_k - 0) = u_{(k+1)z}(r, h_k + 0),$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_k} w_k(r, h_k - 0) &= \frac{1}{2G_{k+1}} w_{k+1}(r, h_k + 0) \\ \Rightarrow w_k(r, h_k - 0) &= \frac{G_k}{G_{k+1}} w_{k+1}(r, h_k + 0). \end{aligned}$$

La transformation intégrale de cette égalité donne

$$w_{kn}(h_k) = \mathbf{G}_k w_{(k+1)n}(h_k).$$

La troisième condition sur la surface de séparation des deux matériaux successifs

$$\sigma_{kz}(r, h_k - 0) = \sigma_{(k+1)z}(r, h_k + 0), k = 1 \dots N - 1,$$

où

$$\sigma_{kz} = a_1 \left[\nu_k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_k) + (1 - \nu_k) \frac{\partial w_k}{\partial z} \right].$$

La transformation intégrale de cette condition permet de trouver

$$a_k \left[\nu_k \lambda_n u_{kn}(h_k) + (1 - \nu_k) w'_{kn}(h_k) \right] = a_{k+1} \left[\nu_{k+1} \lambda_n u_{(k+1)n}(h_k) + (1 - \nu_{k+1}) w'_{(k+1)n}(h_k) \right].$$

Maintenant, on prend la quatrième condition sur la surface de séparation des deux matériaux successifs

$$\tau_{krz}(r, h_k - 0) = \tau_{(k+1)rz}(r, h_k + 0), k = 1 \dots, N - 1,$$

où

$$\tau_{krz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial r} \right), k = 1 \dots, N - 1.$$

La transformation intégrale de cette condition est traduite par

$$u'_{kn}(h_k) - \lambda_n w_{kn}(h_k) = u'_{(k+1)n}(h_k) - \lambda_n w_{(k+1)n}(h_k).$$

La résolution de ce problème revient à résoudre

$$\begin{cases} -\lambda_n^2 u_{kn}(z) + \frac{1}{b_1} u_{kn}''(z) - \frac{a_1}{b_1} \lambda_n w_{kn}'(z) = 0 \\ -\lambda_n^2 w_{kn}(z) + b_k w_{kn}''(z) + a_1 \lambda_n u_{kn}'(z) = 0 \end{cases}, k = 1, \dots, N$$

Alors la résolution de ce système se fait comme suit

Si ($n = 0$), on a pour $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} u_{k0}(z) &= \alpha_k z + \beta_k, \quad (\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \\ w_{(k+1)0}(z) &= \alpha_{(k+1)} z + \beta_{(k+1)}, \quad (\alpha_{(k+1)}, \beta_{(k+1)}) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Et pour déterminer (α_i, β_i) , $i = 1, \dots, 2N$, on doit tenir compte des conditions aux limites données. En effet, ces dernières sont traduites par le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} w_{10}(0) = 0 \\ u_{10}'(0) = 0 \\ \nu_{(k+1)} \lambda_n u_{(k+1)0}(h) + (1 - \nu_{(k+1)}) w_{(k+1)0}'(h) = -a_{(k+1)}^{-1} P_0 \\ u_{(k+1)0}'(h) = 0 \\ u_{k0}(h_k) = \mathbf{G}_k u_{(k+1)0}(h_k) \\ w_{k0}(h_k) = \mathbf{G}_k w_{(k+1)0}(h_k) \\ (1 - \nu_k) w_{k0}'(h_k) = (1 - \nu_{(k+1)}) w_{(k+1)0}'(h_k) \\ u_{k0}'(h_k) = u_{(k+1)0}'(h_k) \end{cases}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

Si ($n \neq 0$),

Posons $\varkappa_k = 3 - 4\nu_k$, on trouve la solution générale du ce système sous la forme :,

$$\begin{cases} w_{kn}(z) = \exp(-\lambda_n z) (c_{k1} + c_{k2} z) + \exp(\lambda_n z) (c_{k3} + c_{k4} z) \\ u_{1n}(z) = (c_{k1} - \varkappa_k \lambda_n^{-1} c_{k2} + c_{k2} z) \exp(-\lambda_n z) + (c_{k3} - \varkappa_{k1} \lambda_n^{-1} c_{k4} + c_{k4} z) \end{cases}, k = 1, \dots, N$$

Pour déterminer $c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}, c_{k4}$, on est conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} w_{1n}(0) = 0 \\ u_{1n}'(0) - \lambda_n w_{1n}(0) = 0 \\ \nu_N \lambda_n u_{Nn}(h) + (1 - \nu_N) w_{Nn}'(h) = -a_N^{-1} P_n \\ u_{Nn}'(h) - \lambda_n w_{Nn}(h) = 0 \\ u_{kn}(h_k) = \mathbf{G}_k u_{(k+1)n}(h_k) \\ w_{kn}(h_k) = \mathbf{G}_k w_{(k+1)n}(h_k) \\ a_k (\nu_k \lambda_n u_{kn}(h_k) + (1 - \nu_k) w_{kn}'(h_k)) = \\ a_{(k+1)} (\nu_{(k+1)} \lambda_n u_{(k+1)n}(h_k) + (1 - \nu_{(k+1)}) w_{(k+1)n}'(h_k)) \\ u_{kn}'(h_k) - \lambda_n w_{kn}(h_k) = u_{(k+1)n}'(h_k) - \lambda_n w_{(k+1)n}(h_k) \end{cases}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

Qui est le système algébrique de $4N$ équations

L'expression de la contrainte radiale $\sigma_{kr}, k = 1, \dots, N$ est donnée par l'expression suivante:

$$\sigma_r = \frac{\partial u_k}{\partial r} + \nu_k a_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{u_k}{r} + \frac{\partial w_k}{\partial z} \right), k = 1, \dots, N.$$

3.3.7 Perspectives

Comme complément logique à cette étude, nous proposons la résolution des problèmes de déformation axisymétrique en compression axiale et radiale d'un cylindre multicouches superposées et coaxiales, respectivement [Figure 3.12 et Figure 3.13].

Dans les deux cas, le contact entre les différentes couches est supposé imparfait et les contraintes de frottement sont prises en compte.

La première perspective

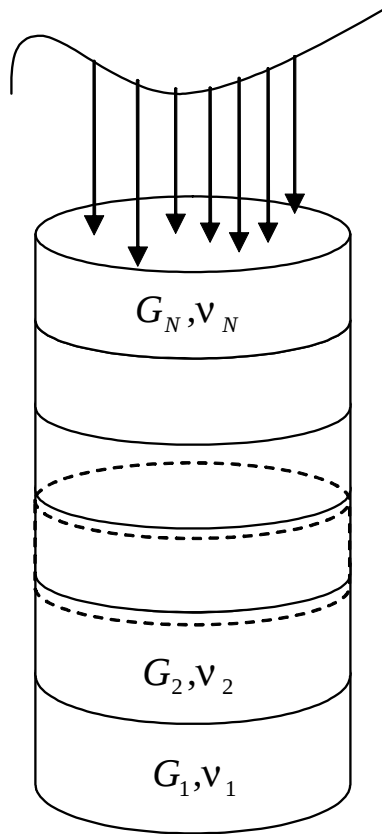


Figure 3.12: Cylindre multicouches "contacte imparfait".

Les conditions limites sur les interfaces sont alors données par:

$$\begin{aligned} [[\sigma_z]]_k &= [[\tau_{zr}]]_k = 0, \\ [[u_r]]_k &= K\tau_{zr}|_{z=h_k}, \quad [[u_z]]_k = K\sigma_z|_{z=h_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

où K : Coefficient de glissement, et $[[\varphi]]_k = \varphi|_{z=h_k+0} - \varphi|_{z=h_k-0}$

La seconde perspective

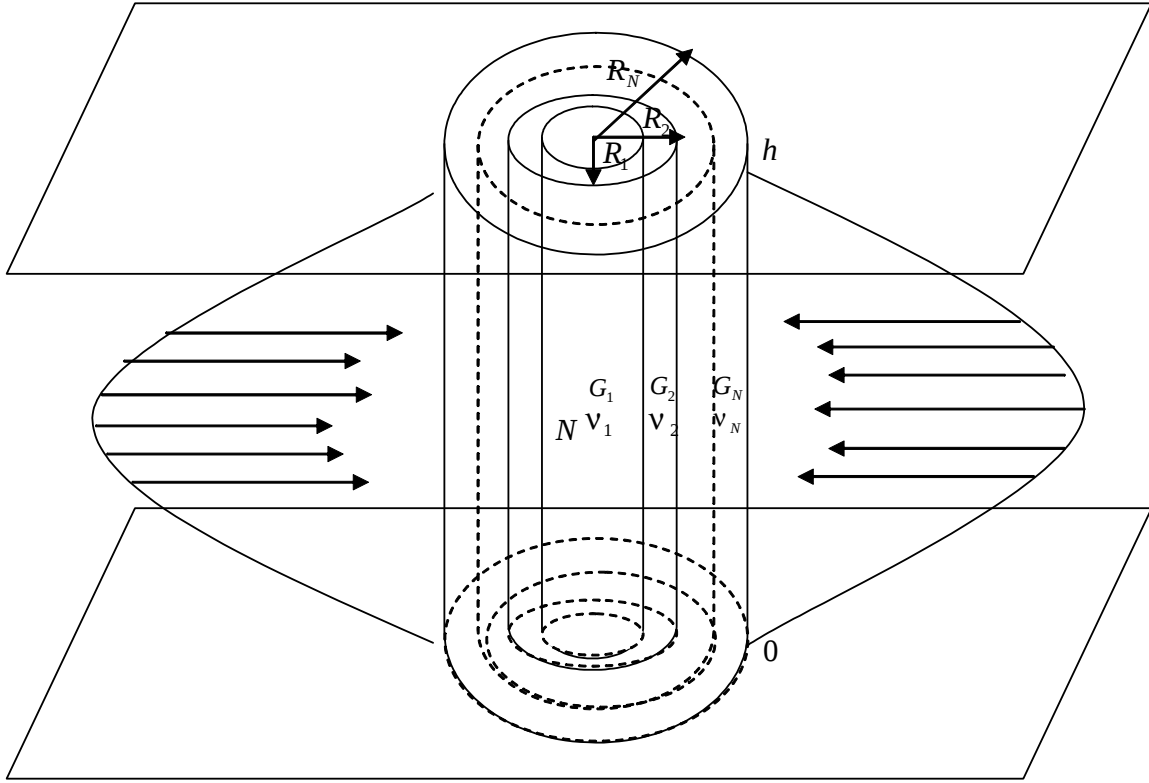


Figure 3.13: Cylindre multicouches coaxiales en compression radiale "contacte imparfait".

Les conditions limites sont alors données par

$$\begin{aligned} [[\sigma_r]]_k &= [[\tau_{rz}]]_k = 0, \\ [[u_r]]_k &= K\sigma_r|_{r=R_k}, \quad [[u_z]]_k = K\tau_{rz}|_{r=R_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \text{où } [[\psi]]_k &= \psi|_{r=R_k+0} - \psi|_{r=R_k-0}. \end{aligned}$$

où K est le coefficient de glissement

Bibliographie

- [1] **Boyce william and Diprima Richard C**, Elementary Differential Equations and Boundary value problems, John Wiley & Sons, 1977.
- [2] **H. S. Carslaw and J.C. Jaeger**, Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, 1959.
- [3] **G. Cineli**, An extension of the finite Hankel Transform and Application, Int.J.Enging Sci. vol 3, 1965.
- [4] **Marc Dahan**, Chargements axisymétriques d'un bicouche transversalement isotrope, C. R. Mecanique 330, 2002.
- [5] **I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik**, Table of integrals, series, and products, Academic Press N.Y, 1965.
- [6] **B. I. Kogan**. Contraintes et déformations de revêtements multicouches, Travaux de l'Institut des Autoroutes de Kharkov. Fascicule 14, 1953.
- [7] **Lebedev N N**, Special functions and ther applications, Dover Publication New york, 1972.
- [8] **Martin H. Sadd**. Theory. Application, and numerices Elsevier Inc, 2005.
- [9] **Murray R. Spiegel**, Analyse de Fourier et Application aux Problèmes aux limites, McGraw-Hill Paris, 1980.
- [10] **N. I. Muskhelishvili**, Some Basic Problems of mathematical theory of elasticity, Groninger, P. Noordhoff, 1953.
- [11] **W. Nowacki**, Elasticity theory, Edition Mir, Moscou, 1975.

- [12] **N Piskonov**, Calcul différentiel et intégral, Edition Mir, Moscou, 1980.
- [13] **V Parton, P Perline**, Méthodes de la Théorie Mathématique de l'élasticité. T 1 et 2, Edition Mir, Moscou, 1984.
- [14] **S. Timoshenko and J.N Goodier**, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1951.
- [15] **Tyn Myint-U**, Ordinary Differential Equation. Elsevier North-Holland, 1978.
- [16] **Wade Ellis, Eugene Johnoson, Ed Lodi et Daniel Schwalbe**, Maple V édition étudiant, International Thomson Publishing, 1996.
- [17] **I N.Sneddon**, Fourier Transforms, McGraw-Hill, New york, 1951.
- [18] **G. N. Watson**, A Treatise on the Theory of Bessel Fonctions, Cambrige University Press, London, 1966.
- [19] **Z. Q Yue**, On generalized Kelvin solutions in multilayered elastic media, J. Elasticity, Vol. 40, N°1, 1995.
- [20] **Z. Q. Yue**, On elastostatics of multilayered solids subjected to general surface traction. Quart. J. Mech. Appl. Math., V.ol. 49, N° 3, 1996.

Résumé

On donne la solution exacte du problème de déformation axisymétrique, en compression axiale d'un cylindre élastique formé de deux couches superposées. Ce dernier occupe une paroi rigide dont les contraintes de frottement sont négligées. En utilisant la méthode de transformation finie de Hankel du vecteur déplacement, on réduira le couplé de système des E D P (de Lamé) à un système d'équations différentielles ordinaires. Les solutions de ce système s'obtiennent alors explicitement. Les contraintes et les déplacements dans le cylindre élastique se calculent à l'aide de la transformation inverse de Hankel et la loi de Hooke. A titre d'application, on illustrera par quelques graphes la contrainte radiale le long de la surface latérale du cylindre.

Mots-clés : Résolution exacte, transformation de Hankel, cylindre élastique.

Abstract

The problem of an axisymmetric deformation of a double-layered isotropic elastic cylinder of finite length is solved. The cylinder whose lateral surface is delimited by rigidly wall is subjected to an axial compression. Using a finite Hankel integral transforms of a displacement vector according to a radial variable we reduce the coupled Lamé equilibrium system to an ordinary differential one. The transformed displacements are calculated by a characteristic polynomial method after extracting a fourth ordinary differential equation of the axial displacement. The stresses and the displacements in the elastic cylinder are then given in a closed form by the Hankel inverse transformation and the Hooke law. Some graphs are also given for different elastic materials.

Key Words: Exact resolution, Hankel transforms , elastic cylinder.