

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées



**MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU
GRADE DE MAGISTER**

En : Mathématiques

Spécialité: Recherche Opérationnelle (Méthodes Stochastiques)
par : M^r **Rabah SMAIL**

Thème

**Problèmes d'Attente
et Méthode du Maximum
d'Entropie**

Soutenue publiquement le : 06 novembre 2003,

Devant le jury composé de :

M ^r M. BENTARZI	Professeur	U.S.T.H.B	Président
M ^r A. AISSANI	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M ^r K. BOUKHETALA	Maître de conférence	U.S.T.H.B	Examineur
M ^r N. BADACHE	Maître de conférence	U.S.T.H.B	Examineur
M ^r T. LARDJANE	Chargé de cours	U.S.T.H.B	Examineur

Table des matières

0.1	Introduction générale	3
1	Systèmes d'attente avec rappels et pannes	6
1.1	Introduction	6
1.2	Systèmes d'attente avec rappels	7
1.2.1	Description du modèle	7
1.2.2	Exemples de systèmes modélisés par les files d'attente avec rappels	9
1.2.3	Modèles markoviens avec rappels	9
1.2.4	Modèles semi-markoviens	11
1.3	Modèle de files d'attente avec rappels et pannes	16
1.3.1	Description du modèle	16
1.3.2	Période de service fondamentale	16
1.3.3	Modèle avec option pour quitter le système	17
1.3.4	Calcul des probabilités limites	19
1.3.5	Décomposition stochastique	22
1.3.6	Autres modèles avec pannes	24
1.4	Conclusion	25
2	Analyse par maximum d'entropie des systèmes de files d'attente	26
2.1	Introduction	26
2.2	Formalisme du maximum d'entropie	27
2.3	Maximum d'entropie et systèmes de files d'attente	29
2.3.1	Solution de système par la méthode ME	29
2.3.2	Détermination de la distribution de la longueur de la file G/G/1 par Maximisation d'Entropie	30
2.3.3	Détermination de la fonction de densité de probabilité de la file G/G/1 par maximisation d'entropie	32
2.4	Applications	34
2.4.1	Processus de naissance et de mort	34
2.4.2	La file M/G/1	34
2.4.3	La file G/M/1	35
2.4.4	La file G/GE/1	35
2.4.5	La file GE/G/1	36

2.5	Conclusion	37
3	Approximation par la théorie de l'information d'une file M/G/1 avec rappels soumise à des pannes	38
3.1	Introduction	38
3.2	Approximations d'une file M/G/1 avec rappels	39
3.2.1	Description du modèle	39
3.2.2	Approximation de premier ordre	40
3.2.3	Approximation de second ordre	43
3.3	Approximation d'une file M/G/1 avec rappels soumise à des pannes .	46
3.3.1	Description du modèle	46
3.3.2	Approximation de premier ordre	48
3.3.3	Approximation de second ordre	50
3.4	Conclusion	52
4	Validation des approximations	53
4.1	Introduction	53
4.2	Système M/G/1 avec rappels	53
4.2.1	Service de loi exponentielle	54
4.2.2	Service de loi gamma	56
4.2.3	Service de loi hyper-exponentielle	58
4.3	Système M/G/1 avec rappels et serveur non fiable	59
4.3.1	Service de loi exponentielle	59
4.3.2	Service de loi gamma	64
4.3.3	Service de loi hyper-exponentielle	67
4.4	Liste des graphes	70
5	Conclusion	77

0.1 Introduction générale

Les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outil puissant pour l'analyse et l'optimisation de performances des systèmes à flux discret, tels que les systèmes informatiques et les réseaux de communication. L'analyse stochastique (théorie des files d'attente exactes [24,27], méthodes d'approximation [74],) et plus récemment, l'analyse opérationnelle [34], donnent une structure conventionnelle de formulation et résolution des modèles de files d'attente.

Cependant, malgré les essais persistants de généralisation, quelques problèmes demeurent sans solutions satisfaisantes. De plus, la précision des solutions approximatives peut-être affectée, soit lorsqu'elles sont basées sur des heuristiques intuitives [29,51], ou encore développées formellement, ce qui peut compliquer l'applicabilité et la compréhension de celles ci en pratique. En particulier, l'approximation de diffusion [74] a été un succès dans ses applications aux réseaux de files d'attente ouverts et à grand trafic, mais ceci n'a pas été généralement le cas dans l'analyse des réseaux fermés.

L'une des exigences les plus fondamentales dans l'analyse des systèmes de files d'attente sera la provision d'une interprétation convaincante pour une probabilité assignée, indépendante des hypothèses arbitraires. Dans un contexte plus général, ce critère été la motivation derrière le principe de "raison insuffisante" donnée par Bernoulli en 1713, qui dit :

- 1- Une probabilité assignée est un état d'information,
- 2- Les résultats d'un événement seront considérés initialement équiprobables à moins qu'il y'ait une évidence de penser autrement.

Jaynes [47,48] étend ce principe en utilisant le concept de l'entropie fonctionnelle, comme une mesure de la quantité d'incertitude introduite auparavant dans la théorie de l'information par Shannon [76]. Ce type d'approches est aujourd'hui très étudié en relation avec divers problèmes d'intelligence artificielle (Modèle d'incertitude), mais également dans les problèmes d'évaluation de performances des systèmes informatiques, de communication, de production...

Dans cette dernière décennie, il y'avait un intérêt croissant dans l'application du Principe du Maximum d'Entropie (PME) sur les systèmes de files d'attente. Ce Principe [78] est l'unique méthodes d'inférence correcte, pour l'estimation des distributions de probabilités étant donnée une information en terme de valeurs moyennes connues. L'utilisation de ce principe dans les systèmes de modélisation a été appliqué par plusieurs auteurs [82,79,37,48]. Plus récemment le principe a été utilisé pour l'analyse des files à capacité finie [62] et réseaux de files d'attente générales [61,62], comme il a été étendu aux files plus spécifiques G/G/1 avec classe de priorités,...etc (voir [67]).

L'étude des modèles de files d'attente avec rappels remonte déjà aux travaux de Kosten [60] et Clos [32]. Il faut attendre 1957 pour voir publier l'article de Cohen [33], lors de la modélisation d'un central téléphonique. Cet article contient une analyse systématique du modèle markovien M/M/m. Ce n'est que vers les années

1970-1980 qu'on peut constater un regain d'intérêt pour cette catégorie de modèle. Ceci en raison de nouveaux développements technologiques des systèmes de télécommunication et l'utilisation intensive des réseaux locaux. Les systèmes avec rappels permettent en effet de mieux modéliser des protocoles spécifiques de communication, par exemple [CSMA, Ring-back-when-free, Repeat-last-number, Auto repeat]. Récemment, deux articles de synthèse sur les systèmes avec rappels, Yang et Templeton [86], Falin [42] ont été publiés dans la revue "Queueing Systems, Theory & Applications". Nous renvoyons également à la synthèse présentée par A.Aissani en conférence plénière aux journées de statistiques appliquées, Alger, 16-18 Avril 1994 [7].

Parmi les travaux sur le sujet, très peu de modèles prennent en compte la fiabilité du serveur, Aissani [2-8], Kulkarni et Choi [70], Yang et Li [87], Artalejo [16]. Ces modèles sont d'ailleurs étudiés sous des hypothèses très restrictives. (exponentialité de certaines distributions paramétriques, pas de contraintes sur la capacité d'orbite). Ces dernières décennies, il est apparu dans la littérature des files d'attente des méthodes d'approximation ayant permis d'avoir des estimations quantitatives et qualitatives des caractéristiques des modèles étudiés. Les méthodes de comparaisons stochastiques qui conduisent à des inégalités stochastiques en terme de majoration ou de minoration sont développées dans le but d'avoir des estimations qualitatives. L'utilisation de ces méthodes permet d'étudier le comportement des estimations fournies d'un modèle complexe en les comparant aux caractéristiques d'un modèle plus simple dont les caractéristiques sont déterminées.

D'autres méthodes d'approximation pour ce type de modèle ont été développées ces dernières années. Dans [14,15], on utilise les méthodes de diffusion qui permettent d'analyser le régime chargé. Dans [8,73], il est obtenu des inégalités et bornes pour certaines caractéristiques du système moyennant les techniques de comparaisons stochastiques.

L'approche par maximisation d'entropie, permet d'obtenir des estimations des distributions de probabilités de modèles plus généraux. Ce type de formalisme fournit des formules simples à implémenter pour des cas relativement complexes, là où la seule alternative seraient des méthodes numériques laborieuses ou des expériences de simulations coûteuses. Cette approche a été utilisée ces dernières années pour les systèmes avec rappels. Citons dans ce sens les travaux de Falin, Martin Diaz et Artalejo [45], Artalejo et Gomez-Corral [18]. Dans tous ces travaux, le serveur est supposé absolument fiable.

Dans cette thèse, nous étudions l'application du formalisme du Maximum d'Entropie (ME), à l'étude de problèmes d'attente avec rappels lorsque le serveur est sujet à des pannes ou interruptions de service. Elle est organisée autour de quatre chapitres.

- Le premier chapitre comporte une synthèse sur les modèles d'attente avec rappels, y compris le cas des modèles où le serveur n'est pas fiable, et actualisant celles de Falin [42], Artalejo [20], Templeton [81] et aussi une monographie de Falin et Templeton [46].

- Dans le second chapitre, nous présentons une description du formalisme du maximum d'entropie et une analyse sur l'application de cette méthode dans les systèmes de files d'attente générales.
- Le troisième chapitre est consacré à l'approximation par la théorie de l'information des distributions stationnaires des états d'une file M/G/1 avec rappels soumise à des pannes. Nous commençons par approximer le système M/G/1 avec rappels, sans interruptions, ce qui nous ramène aux résultats de Falin, Martin et Artalejo [45]. Nous étudions les cas où il est possible d'obtenir une solution explicite des multiplicateurs de Lagrange. Ensuite, en supposant que les moments de second ordre de la distribution stationnaire des états sont donnés, nous allons nous référer à une solution numérique. Enfin, de la même manière nous considérons le cas plus général de files M/G/1 avec rappels et pannes.
- Le quatrième chapitre enfin est consacré aux résultats de simulations de l'approximation, en établissant une comparaison entre les résultats exacts et les approximations par maximisation d'entropie de premier et de second ordre.

Chapitre 1

Systèmes d'attente avec rappels et pannes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue certains résultats consacrés aux modèles de files d'attente avec rappels ; markoviens et semi-markoviens, afin de mieux souligner l'intérêt des méthodes d'approximation utilisées dans ce mémoire. Cette synthèse actualise celles de Falin [42], Artalejo [20], Templeton [81].

La théorie classique des files d'attente envisage deux manières de résoudre le conflit qui se produit lorsqu'un client arrivant dans le système, trouve le serveur occupé :

- le client arrivé se place dans la file d'attente et attend son tour selon l'une des disciplines : FIFO, LIFO ou Random.
- le client peut quitter le système définitivement. C'est le système classique d'Erlang (avec refus ou avec perte).

Une situation intermédiaire envisage la possibilité pour le client bloqué de pouvoir rappeler ultérieurement à des intervalles de temps aléatoires, ce qu'on appelle systèmes avec rappels ou encore avec répétition d'appels. Les premières tentatives rigoureuses sur les systèmes avec rappels remontent aux travaux de Kosten[60], Clos[32], Wilkinson[85], et Cohen[33], lors de la modélisation du service d'abonnés dans un central téléphonique. Ce type de système peut également modéliser le service des avions à l'atterrissage dans un aéroport (d'où l'origine du terme "entrer en orbite"), ou le comportement des processus (tâches, programmes,...), dans un réseau informatique constitué d'un ordinateur central et d'un ensemble de périphériques (terminaux), ou aussi le protocole CSMA (Carrier Sense Multiple Access)[31], d'autres exemples sont cités dans [50] et [55].

Dans la première section de ce chapitre on donne une description mathématique d'un modèle de files d'attente avec rappels. Des exemples pratiques modélisés par ce type de système d'attente sont donnés dans cette section et on trouve aussi les

définitions des modèles markoviens et semi-markoviens, avec rappels. Une description sur les modèles d'attente avec rappels et pannes est donnée dans la deuxième section.

1.2 Systèmes d'attente avec rappels

1.2.1 Description du modèle

Un système de files d'attente avec rappels est un système composé de m serveurs identiques et indépendants ($m \geq 1$), et de $s - m$ positions d'attentes ($s \geq m$), et d'une orbite de capacité finie ou infinie.

S'il y a un ou plusieurs serveurs libres, un client qui arrive est immédiatement pris en charge par l'un de ces serveurs. Sinon il rejoint la file d'attente, s'il y a une position d'attente libre. Par ailleurs si tous les serveurs et toutes les positions d'attente sont occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 . Il devient alors une source d'appels secondaires et il retentera sa chance après une durée aléatoire. Les clients qui reviennent et rappellent pour service sont dits "en orbite". Si l'orbite est à capacité finie et saturée, le client qui trouve tous les serveurs et positions d'attente occupés, à son arrivée, sera contraint de quitter le système sans être servi. Tout client de l'orbite, appelé client secondaire, est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps aléatoires, ces clients secondaires sont traités comme des clients primaires. C'est à dire si un client de l'orbite (secondaire) rappelle pour le service et trouve un serveur ou une position d'attente libre, il occupe le service ou bien une position dans la file s'il n'y a aucun serveur libre. Par contre si tous les serveurs et toutes les positions d'attente sont occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - H_k$ (où k représente la $k^{\text{ème}}$ tentative infructueuse) ou bien il rejoint l'orbite (si elle n'est pas saturée) avec une probabilité H_k .

Le schéma général d'un système avec rappels est donné par la figure (fig 1.1).

Remarque : Le modèle décrit ci-dessus, est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être considérés comme des cas particuliers, tels que : les systèmes sans positions d'attente et les systèmes à un seul serveur.

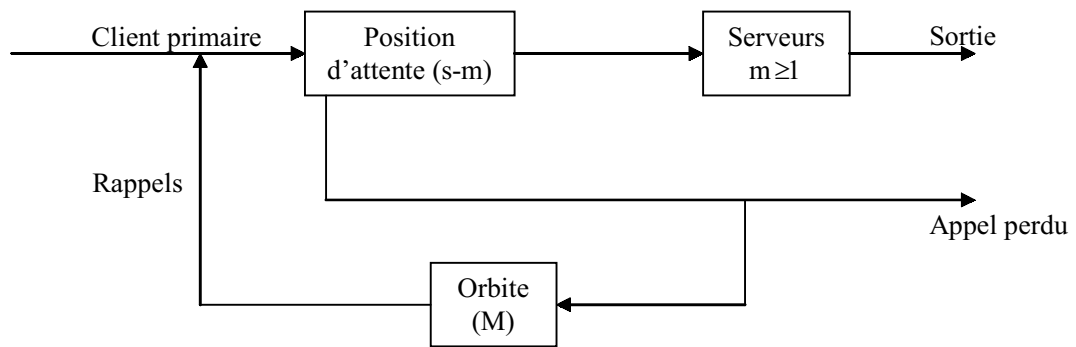


fig. 1.1 : Modèle de files d'attente avec rappels.

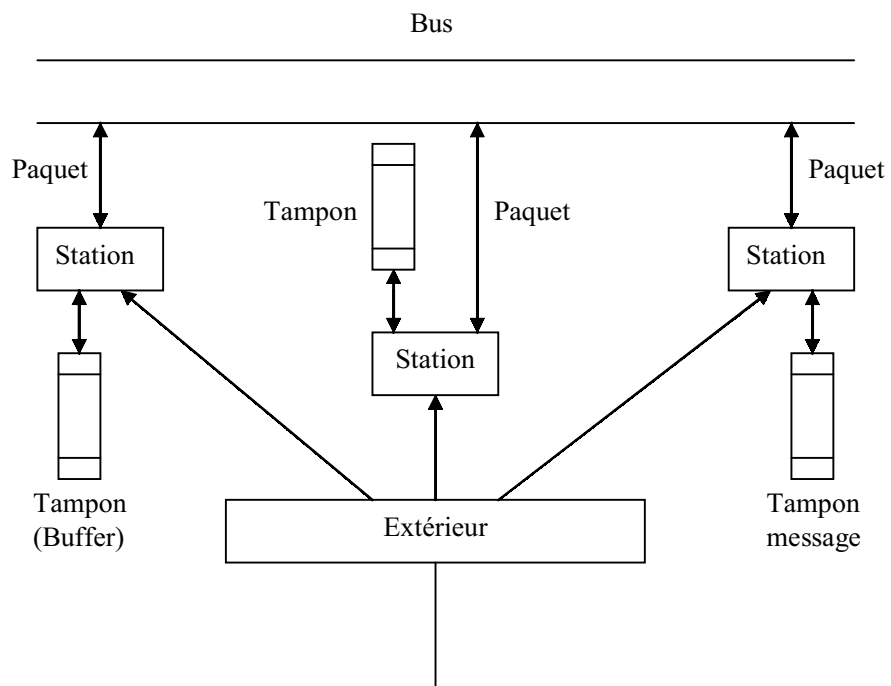


fig. 1.2 :Schéma d'un réseau local.

1.2.2 Exemples de systèmes modélisés par les files d'attente avec rappels

Les systèmes informatiques à temps réel

Considérons un système informatique à temps réel dans lequel il y a m ports et s terminaux ($s \geq m$).

Pour la connexion d'un terminal à l'ordinateur central, un seul port doit être utilisé uniquement. Les étudiants arrivent au centre de calcul pour utiliser l'ordinateur central pendant une durée de temps aléatoire. Un étudiant qui arrive doit d'abord trouver un terminal libre pour se connecter, s'il n'en existe aucun, l'étudiant tentera sa chance après un intervalle de temps, par contre s'il trouve un terminal libre, il doit envoyer des commandes pour demander la connexion à l'ordinateur. S'il y a un port libre, le terminal est connecté à l'ordinateur, autrement, la requête sera mise dans la file d'attente et l'étudiant doit attendre jusqu'à ce qu'il y ait un port libre pour lui.

Ce système peut-être modélisé par une file d'attente avec rappels à plusieurs serveurs, à s positions d'attente et à une orbite de taille infinie. Les ports correspondent aux serveurs et les terminaux aux positions d'attente.

Le protocole de communication CSMA [56]

Dans les terminaux locaux se partageant un bus unique, l'un des protocoles de communication le plus généralement utilisé est appelé non-persistant CSMA (Carrier Sense Multiple Access), c'est une méthode d'accès à un réseau local.

Un réseau local simple est composé de stations ou de terminaux interconnectés par un bus unique, qui est le canal de communication. Ainsi, les stations communiquent les une avec les autres via le bus qui est peut-être utilisé par une seule station à la fois. Une telle architecture de réseau d'ordinateur local est appelée architecture en bus.

Des messages de longueurs variables arrivent aux stations du monde extérieur. En recevant le message, la station le découpe en un nombre fini de paquets de longueur fixe, et consulte immédiatement le bus pour voir s'il est occupé ou bien libre. Si le bus est libre, l'un de ces paquets est transmis via ce bus à la station de destination et les autres paquets sont stockés dans le tampon (position d'attente) et la station peut reconsulter le bus après une certaine période aléatoire.

Ce problème peut-être modélisé comme un système d'attente avec rappels à un seul serveur, qui est le bus, et les tampons des stations représentent l'orbite. Ce système est décrit dans le schéma de la figure (fig 1.2).

1.2.3 Modèles markoviens avec rappels

Soit un système à m serveurs ($m \geq 1$). Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . Si un appel primaire trouve au moins un serveur libre, il est

immédiatement pris en charge et quitte le système après avoir achevé son service. Sinon, c'est-à-dire s'il trouve tous les serveurs occupés, il rejoint l'orbite et devient source d'appels secondaires [33]. Le temps de service est exponentiel de taux ν . La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de taux θ .

L'état du système peut-être décrit par le processus markovien homogène $X(t) = \{C(t), N(t)\}$, sur $E = \{0, 1, \dots, m\} \otimes \mathbb{N}$, où

$C(t)$ = nombre de clients en cours de service à la date t ,

$N(t)$ = nombre de clients en orbite à la date t .

Soit $P_{ij}(t) = p(C(t) = i, N(t) = j)$, avec $i = 0, 1, \dots, m$ et $j \geq 0$.

Les conditions d'existence d'un régime stationnaire ont été établies par Falin [39]. Dans ce cas, les limites $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = P_{ij}$, existent, et on montre qu'alors la distribution limite $\{P_{ij}\}$ lorsque $\theta \rightarrow \infty$ est un système avec appels instantanés (classique avec attente), et lorsque $\theta \rightarrow 0$, est un système d'Erlang (avec refus).

Les taux de transitions du processus $X(t)$ de l'état (i, j) vers l'état (k, l) sont données par :

Pour $0 \leq i \leq m - 1$

$$P_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j), \\ i\nu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j), \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1), \\ -(\lambda + i\nu + j\theta) & \text{si } (k, l) = (i, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i = m$,

$$P_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (m, j + 1), \\ m\nu & \text{si } (k, l) = (m - 1, j), \\ -(\lambda + m\nu) & \text{si } (k, l) = (m, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $m = 1$, on montre que la condition d'ergodicité est $\rho = \frac{\lambda}{\nu} < 1$, alors les probabilités stationnaires P_{ij} existent et on montre qu'elles suivent une loi binomiale négative [42].

$$P_{0j} = \frac{\rho^j}{j!\theta^j} \prod_{i=0}^{j-1} (\lambda + i\theta) (1 - \rho)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1},$$

$$P_{1j} = \frac{\rho^{j+1}}{j!\theta^j} \prod_{i=1}^j (\lambda + i\theta) (1 - \rho)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}.$$

Toutes les mesures de performance s'obtiennent alors soit de manière directe, soit à partir des fonctions génératrices [33]. Par ailleurs, Falin [40,41] a étudié le modèle markovien avec rappels et positions d'attente, et a obtenu des résultats

explicitement uniquement pour le cas d'un seul serveur. Le modèle M/M/2/2 a fait l'objet de l'étude de Hanschke [49], qui a montré que les fonctions génératrices partielles des probabilités d'états stationnaires peuvent être exprimées en termes de fonctions hypergéométriques généralisées. Il a obtenu également des algorithmes pour le calcul des deux premiers moments.

Dans le cas où $m \geq 2$, les équations de Kolmogorov sont complexes à résoudre analytiquement, les résultats disponibles qui sont établis dans [33] et [49], sont difficilement exploitables dans les cas pratiques. Pour cela, en vue d'avoir des résultats interprétables, de nombreuses approches ont été proposées, entre autres :

Méthodes itératives [50].

Méthodes numériques [41],[72].

Méthodes asymptotiques [42],[44].

1.2.4 Modèles semi-markoviens

Le modèle M/G/1 avec rappels est le modèle le mieux connu, et il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés [42,43,19].

Dans ce système, le flux des arrivées primaires est poissonien de taux λ . Le temps de service est de loi générale de distribution $F(\cdot)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $\tilde{F}(s)$, $Re(s) > 0$. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de taux θ . Les interarrivées des clients primaires, les intervalles entre les rappels répétés des clients secondaires et le temps de service sont supposés mutuellement indépendants.

Ce système semi-markovien, peut être analysé grâce aux méthodes d'analyse suivantes :

a) Méthode des étapes d'Erlang

Elle a pour principe d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox qui possède la propriété d'absence de mémoire.

b) Méthode de la chaîne de Markov induite

Cette méthode, élaborée par Kendall, consiste à choisir une séquence d'instantanés $t_1, t_2, \dots, t_n$ (déterministes ou aléatoires) tel que le processus induit $\{X_n, n \geq 0\}$, $X_n = X(t_n)$, soit markovien et homogène.

c) Méthode des variables auxiliaires

Elle consiste à compléter l'information sur le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ de telle manière à lui donner un caractère markovien. Ainsi on aura à étudier le processus :

$$(X(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t))_{t \geq 0},$$

où $\xi_k(t)$, ($k = 1, 2, \dots, n$), sont des variables aléatoires dites auxiliaires.

d) Méthode des événements fictifs

L'idée de la méthode est d'introduire des événements fictifs, qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

e) Méthode d'approximations

On distingue entre autres :

Des méthodes asymptotiques.

L'estimation par bornes de certaines de ses caractéristiques.

f) Simulation

La simulation est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel sur ordinateur. A l'aide de cette imitation, nous obtenons des données sur le système qui nous permettent de mesurer sa performance. Plusieurs modèles de simulation existent qu'ils soient statiques ou dynamiques, déterministes ou aléatoires.

Chaîne de Markov induite du modèle M/G/1

Nous nous limiterons dans la suite à la méthode de la chaîne de Markov induite. Cette méthode ramène l'étude du processus M/G/1 avec rappels au cas discret.

L'état du système peut-être décrit [12,55], par le processus :

$$X(t) = \begin{cases} N(t) & \text{si } C(t) = 0, \\ \{C(t), N(t), \xi(t)\} & \text{si } C(t) > 0, \end{cases}$$

où $\xi(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et désignant :

La durée de service écoulée à la date t [55].

La durée de service résiduelle à la date t [12].

En effet, en considérant les instants (t_n^+) de départ du $n^{\text{ème}}$ client, le processus $X(t_n^+) = X_n$ sera réduit à $\{C(t_n^+), N(t_n^+)\}$, puisque $\xi(t_n^+) = 0$.

La variable aléatoire X_n , qui représente le nombre de clients dans le système juste après l'instant (t_n^+) , est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$, représentant le nombre d'arrivées primaires durant le service du $n^{\text{ème}}$ client, les variables Δ_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$P(\Delta_n = k) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dF(x).$$

On a l'équation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + \Delta_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

avec δ_n la variable de Bernoulli :

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si le client qui quitte le système à l'instant } t_{n+1} \text{ provient de l'orbite,} \\ 0 & \text{si le client qui quitte le système à l'instant } t_{n+1} \text{ provient de l'extérieur.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(\delta_n = 1/X_n = k) &= \frac{k\theta}{\lambda + k\theta}, \\ P(\delta_n = 0/X_n = k) &= \frac{\lambda}{\lambda + k\theta}. \end{aligned}$$

où θ est le taux de rappels.

Régime transitoire

Les probabilités de transitions en un pas de la chaîne de Markov X_n sont données par :

$$P_{nm} = P(X_{k+1} = m/X_k = n) = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} K_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} K_{m-n+1},$$

avec

$$K_l = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^l}{l!} dF(x), \quad \forall l \geq 0.$$

Régime stationnaire

Lorsque $\rho = \lambda \int_0^{+\infty} [1 - F(x)] dx < 1$, alors la chaîne de Markov, X_n admet une distribution stationnaire π_k et on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X(t_n^+) = k] = \pi_k,$$

ainsi la solution ergodique de X_n est la même pour $X(t)$, t quelconque.

Le noyau de transition du système M/G/1 avec rappels s'écrit alors :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} dF(x) & \text{si } i = 0, \\ \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) dF(x) & \text{si } i = j + 1, \\ \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dF(x) + \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dF(x) & \text{si } j \geq i \geq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction génératrice de la distribution de probabilité du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{(1-\rho)(1-z)F^*(\lambda-\lambda z)}{F^*(\lambda-\lambda z)-z} \cdot \frac{\phi(z)}{\phi(1)} \\ &= \Pi(z) \cdot \frac{\phi(z)}{\phi(1)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

et

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)F^*(\lambda-\lambda z)}{F^*(\lambda-\lambda z)-z}. \quad (1.2)$$

La formule (1.1) est appelée “décomposition stochastique” du système M/G/1 avec rappels.

Si on note par n_s le nombre moyen de clients dans le système, alors $n_s = n_\infty + B$, où B est la variable aléatoire de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$, et n_∞ est le nombre moyen de clients dans le système M/G/1 classique FIFO. La validité de cette décomposition a été prouvée pour certaines classes de modèles avec rappels, à titre d’exemple : Yang et Templeton [86] ont montré que cette décomposition est valable pour un système dont la loi des arrivées est générale, Artalejo et Falin [17] ont donné diverses applications de cette propriété de décomposition pour un système d’attente avec rappels, en particulier, ils ont obtenu :

a) Des expressions explicites des moments factoriels de la taille de l’orbite et du nombre de clients dans le système.

b) La vitesse de convergence du système M/G/1 avec rappels vers le système M/G/1 classique, quand le taux de rappels tend vers l’infini.

c) Une mesure de la “proximité” entre ces deux systèmes.

On doit noter que la formule explicite de la transformée de Laplace du temps virtuel d’attente dans le système M/G/1 avec rappels est très complexe et cela rend difficile la preuve de la propriété de décomposition. Donc, la validité de la propriété de décomposition pour le temps d’attente virtuel est une conjecture. Artalejo [19] a obtenu la décomposition de la distribution stationnaire en trois composantes liées à la discipline de vacance, les rappels et la distribution de la taille du système M/G/1 ordinaire. Falin, Artalejo et Martin [44], ont obtenu la décomposition stochastique pour les systèmes avec rappels et priorités, les systèmes avec rappels et pannes, les systèmes avec rappels et vacances et arrivées par groupes et aussi dans le cas de rappels non exponentiels.

Les caractéristiques du système M/G/1 avec rappels sont données dans [86] :

Nombre moyen de clients dans le système

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)}.$$

Nombre moyen de clients dans l'orbite

$$\bar{n}_0 = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)}.$$

Temps d'attente et nombre de rappels

Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps de son entrée dans le système jusqu'au temps du commencement de son service. Pour trouver le temps moyen d'attente $\bar{W}$, on utilise la formule de Little $\bar{n}_0 = \lambda\bar{W}$, pour avoir l'expression suivante :

$$\bar{W} = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)}.$$

Une fois le temps moyen d'attente $\bar{W}$, connu, il est aisé de déduire $\bar{\eta}$, le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{\eta} = \theta\bar{W} = \frac{\lambda\theta E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Probabilités limites

Notons que la distribution limite $\{\pi_n, n \geq 0\}$, de la chaîne de Markov induite peut-être trouvée à l'aide de l'équation récursive suivante :

$$\pi_n = \sum_{m=0}^n \pi_m \frac{\lambda}{\lambda + m\theta} k_{n-m} + \sum_{m=1}^{n+1} \pi_m \frac{m\theta}{\lambda + m\theta} k_{n-m+1}, \quad (1.2)$$

avec

$$\pi_0 = (1-\rho) \left(\exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_0^1 \frac{1 - \tilde{F}(\lambda - \lambda u)}{\tilde{F}(\lambda - \lambda u) - u} du \right\} \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Le résultat principal concernant les probabilités limites est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.1 :

Si $\rho < 1$, alors les probabilités limites P_{ij} sont données par :

$$\begin{aligned} P_{0j} &= \frac{\lambda\pi_j}{\lambda + j\theta}, & j \geq 0, \\ P_{1j} &= \frac{(j+1)\theta\pi_{j+1}}{(\lambda + (j+1)\theta)}, & j \geq 0. \end{aligned}$$

Preuve :(voir Falin[32]).

□

1.3 Modèle de files d'attente avec rappels et pannes

1.3.1 Description du modèle

Dans ce qui suit, on prend en considération la fiabilité du système lorsque le serveur est soumis à des pannes. Une bibliographie accessible sur ce sujet peut-être trouvée dans [22].

Les files avec rappels qui prennent en compte les pannes et les réparations du serveur ont été introduites par Aissani [2-5,8] et [9] et Kulkarni et Choi [70], voir aussi [14,15]. Un bref aperçu de la littérature sur le sujet est donné dans la section (1.3.6). Le principe d'une file avec rappels à un seul serveur avec pannes et réparations peut-être décrit comme suit :

Supposons que les clients primaires arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ , et un client quelconque qui arrive et trouve le serveur occupé doit rejoindre un groupe de rappels et répète sa demande après un temps aléatoire distribué exponentiellement avec un taux θ . Le temps de service est distribué suivant une loi arbitraire, avec une distribution, $F(x)$, ($F(0) = 0$) et transformée de Laplace-Stieltjes $\tilde{F}(s)$. Le flux d'entrée des arrivées primaires, les temps de service et les intervalles entre les essais répétés sont supposés mutuellement indépendants. En plus, le système est soumis à deux types d'interruptions poissonniennes. Des pannes indépendantes et actives peuvent-arriver lorsque le serveur est inactif ou actif avec un taux η ou bien μ respectivement. Les temps d'interruptions indépendantes et actives sont des variables aléatoires D_i et D_b de distributions $G(x)$ et $H(x)$, et transformées de Laplace-Stieltjes $\tilde{G}(s)$ et $\tilde{H}(s)$, respectivement. Ces nouvelles variables aléatoires vérifient l'hypothèse d'indépendance mutuelle. Dans ce modèle, les clients primaires qui trouvent le serveur en panne doivent rejoindre le groupe de rappels. Finalement, on suppose aussi que les clients dont leur service est interrompu par une panne active sont obligés de quitter la zone de service. Le client interrompu doit décider, soit de rejoindre le groupe de rappels (avec une probabilité c) ou quitter le système après interruption (avec une probabilité $1 - c$). Dans [2,5,70], on considère les cas classiques de pannes.

1.3.2 Période de service fondamentale

L'analyse de la file M/G/1 avec interruptions poissonniennes a été traitée par Gaver [47] pour une variété de politiques d'interruption de service. L'analyse a été basée sur la définition du temps de completion de service défini comme l'intervalle aléatoire du temps entre l'époque du début de service du client et l'instant du début de service du client suivant. Cette période est simplement un temps de service (s'il n'y a pas de pannes) ou le service effectif utilisé par le système en servant un client (en incluant les répétitions qui sont dûes aux interruptions) plus la durée aléatoire nécessaire pour réparer le serveur. On montre que le temps de completion peut-être vu comme un temps de service généralisé. D'autres auteurs utilisent le terme de

temps de blocage du client, temps de séjour du client auprès du serveur ou temps de résidence d'un client pour désigner le même concept, et le distinguer du temps de séjour dans le système.

Dans les files d'attente classiques, il est supposé que le client dont le service est interrompu sera capable de compléter son service (selon différentes politiques) lorsque l'interruption est dégagée. Par contre, le comportement d'un client dont le service est interrompu dans une file avec rappels est plus complexe. A l'arrivée d'une panne active le client doit décider soit de quitter le système ou de rejoindre le groupe de rappels. Mais aucun ordre n'est assigné aux clients, dans le groupe de rappels, alors le nouveau service indépendant du client interrompu sera commencé lorsque le client retourne une nouvelle fois auprès du serveur. De ce fait, il est clair que le concept du temps de completion perd son applicabilité dans le contexte d'une file avec rappels. En parallèle, on définit une période fondamentale de service comme le temps du début de service d'un client jusqu'à l'époque où le serveur est capable de commencer un nouveau temps de service (qui peut éventuellement correspondre au même client). Dans ce qui suit, on notera cette variable aléatoire par $\mathcal{F}$ et sa transformée de Laplace-Stieltjes est $f(s)$. La durée de $\mathcal{F}$ est déterminée par la compétition entre le temps de service et l'arrivée d'une interruption active. Alors nous avons :

$$f(s) = \tilde{F}(s + \mu) + \frac{\mu \tilde{H}(s)(1 - \tilde{F}(s + \mu))}{s + \mu}.$$

Soit $\mathcal{N}$ le nombre de clients qui rejoignent le groupe de rappels durant $(0, \mathcal{F}]$. La distribution de $\mathcal{N}$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2 :

La fonction génératrice de $\mathcal{N}$ est :

$$\mathcal{N}(z) = E(z^{\mathcal{N}}) = \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu) + (1 - c + cz)\mu \tilde{H}(\lambda - \lambda z) \cdot \frac{1 - \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu)}{\lambda - \lambda z + \mu}. \quad (1.4)$$

Preuve : voir Aissani et Artalejo [9].

1.3.3 Modèle avec option pour quitter le système

On introduit dans ce modèle un système de files d'attente auxiliaire à capacité infinie et pannes qui sera utile dans la section suivante.

On néglige le groupe de rappels et on suppose que les clients arrivent et se font servir selon une quelconque discipline (par exemple FCFS). La différence principale entre notre système auxiliaire et les files d'attente classiques soumises aux pannes est l'option de quitter le système après une interruption. Si un client interrompu, décide de rester dans le système alors il quitte la zone de service et son service est complété selon la politique de rappels après le renouvellement.

Dans le reste de cette partie, on résumera les résultats principaux de notre système de file d'attente auxiliaire soumis à des pannes indépendantes et actives avec l'option de quitter le système. On négligera les preuves qui sont basées sur les résultats standards de la théorie de renouvellement de Markov. En fait, on a simplifié le modèle principal en négligeant les essais répétés, alors les preuves sont analogues mais plus simples que ceux données par Kulkarni et Choi [70].

D'abord, nous étudions la chaîne de Markov induite à l'époque d'oisiveté, i.e., le serveur est opérationnel et libre. Notons que le serveur atteint cet état, soit à l'époque de completion de service, ou juste après un temps de réparation.

On aura besoin des notations suivantes :

$$\rho = \lambda \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{\mu} \left(1 + \mu \left(E(D_i) + \frac{c}{\mu} \right) \right), \quad (1.9)$$

$$K = \frac{1 - \rho}{\lambda(1 + \eta E(D_i)) + \eta(1 - \rho)}, \quad (1.9)$$

$$A = K(1 + \eta E(D_i)) + \left(1 + \tilde{F}(\mu) \right) (1 - \eta K) \left(E(D_b) + \frac{1}{\mu} \right). \quad (1.9)$$

Une caractéristique commune des systèmes de files d'attente avec essais répétés individuels est que la condition d'ergodicité est indépendante du paramètre de rappels θ . Alors, on a de [2] et [70] la condition pour que le système soit stable est $\rho < 1$.

Théorème 1.3 :

La fonction génératrice de la distribution limite de la chaîne de Markov induite à l'époque d'oisiveté est donnée par :

$$\bar{\phi}(z) = K \frac{\eta z \tilde{G}(\lambda - \lambda z) - (\lambda - \lambda z + \eta) \mathcal{N}(z)}{z - \mathcal{N}(z)}, \quad (1.10)$$

où $\mathcal{N}(z)$ et K sont donnés dans (1.4) et (1.9), respectivement.

Soit $\bar{Y}(t)$ le nombre de clients dans le système au temps t et $\bar{X}(t)$ l'état du serveur au temps t comme défini ci-dessous :

$$\bar{X}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur est opérationnel,} \\ 2 & \text{si le serveur est soumis à une panne indépendante,} \\ 3 & \text{si le serveur est soumis à une panne active.} \end{cases}$$

Les fonctions génératrices partielles $\bar{P}_i(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} z^j \bar{P}_{ij}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, des probabilités limites $\bar{P}_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{(\bar{X}(t), \bar{Y}(t)) = (i, j)\}$ sont données dans le théorème suivant :

Théorème 1.4 :

Les fonctions génératrices partielles $\overline{P}_i(z), i \in \{1, 2, 3\}$, sont données par :

$$\begin{aligned}\overline{P}_1(z) &= \frac{K}{A} \left(1 + z \frac{1 - \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu)}{\lambda - \lambda z + \mu} \cdot \frac{\lambda - \lambda z + \eta - \eta \tilde{G}(\lambda - \lambda z)}{\mathcal{N}(z) - z} \right), \quad (1.11) \\ \overline{P}_2(z) &= \frac{K}{A} \eta \frac{1 - \tilde{G}(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z}, \\ \overline{P}_3(z) &= \frac{K}{A} (1 - c + cz) \mu \frac{1 - \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu)}{\lambda - \lambda z + \mu} \cdot \frac{1 - \tilde{H}(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \\ &\quad \cdot \frac{\lambda - \lambda z + \eta - \eta \tilde{G}(\lambda - \lambda z)}{\mathcal{N}(z) - z}.\end{aligned}$$

1.3.4 Calcul des probabilités limites

Dans cette partie supposons que $\rho < 1$ et discutons sur le développement à la limite du modèle principal.

Soit le processus $(X, Q) = \{(X(t), Q(t)), t \geq 0\}$, où $Q(t)$ représente le nombre de clients dans le groupe de rappels au temps t et $X(t)$ est l'état du serveur qui est décrit comme suit :

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est opérationnel et libre,} \\ 1 & \text{si le serveur est opérationnel et occupé,} \\ 2 & \text{si le serveur est soumis à une panne indépendante,} \\ 3 & \text{si le serveur est soumis à une panne active.} \end{cases}$$

D'abord, notons que la distribution limite $\{\pi_n; n \geq 0\}$ de la chaîne de Markov induite à l'époque d'oisiveté peut-être trouvée à l'aide de l'équation récursive suivante :

$$\begin{aligned}
\pi_i = & \sum_{j=0}^i \pi_j \frac{\eta}{\lambda + j\theta + \eta} g_{i-j} + \sum_{j=0}^i \pi_j \frac{\lambda}{\lambda + j\theta + \eta} \tilde{F}(\mu) f_{i-j}^1 \\
& + \sum_{j=1}^{i+1} \pi_j \frac{j\theta}{\lambda + j\theta + \eta} \tilde{F}(\mu) f_{i-j+1}^1 \\
& + \sum_{j=0}^i \pi_j \frac{\lambda}{\lambda + j\theta + \eta} (1 - \tilde{F}(\mu)) (1 - c) \sum_{n=0}^{i-j} f_n^2 h_{i-j-n} \\
& + (1 - \delta_{i0}) \sum_{j=0}^{i-1} \pi_j \frac{\lambda}{\lambda + j\theta + \eta} (1 - \tilde{F}(\mu)) c \sum_{n=0}^{i-j-1} f_n^2 h_{i-j-1-n} \\
& + \sum_{j=1}^{i+1} \pi_j \frac{j\theta}{\lambda + j\theta + \eta} (1 - \tilde{F}(\mu)) (1 - c) \sum_{n=0}^{i-j+1} f_n^2 h_{i-j+1-n} \\
& + (1 - \delta_{i0}) \sum_{j=1}^i \pi_j \frac{j\theta}{\lambda + j\theta + \eta} (1 - \tilde{F}(\mu)) c \sum_{n=0}^{i-j} f_n^2 h_{i-j-n}, \quad (1.12)
\end{aligned}$$

pour $i \geq 0$, où δ_{i0} dénote la fonction de Kronecker et

$$\begin{aligned}
g_k &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dG(x), \quad h_k = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x), \quad k \geq 0, \\
f_k^1 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu x}}{\tilde{F}(\mu)} dF(x), \quad k \geq 0, \\
f_k^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot \frac{\mu e^{-\mu x} (1 - F(x))}{1 - \tilde{F}(\mu)} dx, \quad k \geq 0.
\end{aligned}$$

L'expression (1.12) produit un algorithme récursif pour calculer π_{i+1} en fonction de $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_i)$. Le calcul des intégrales g_k, h_k, f_k^1 et f_k^2 se réduit à des sommes finies pour le cas de diverses distributions de temps de service et de renouvellement usuelles. La probabilité initiale π_0 est donnée par :

$$\pi_0 = K(\lambda + \eta) \left(\exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_0^1 \frac{1 - \mathcal{N}(u)}{\mathcal{N}(u) - u} du + \frac{\eta}{\theta} \int_0^1 \frac{1 - \tilde{G}(\lambda - \lambda u)}{\mathcal{N}(u) - u} du \right\} \right)^{-1}. \quad (1.13)$$

Preuve :

Pour prouver (1.12), supposons qu'à la $n^{\text{ème}}$ époque d'inactivité il y'a j clients dans le groupe de rappels. Le prochain événement peut-être l'arrivée d'un client

primaire, l'arrivée d'une interruption indépendante ou bien un rappel. On choisit la dernière possibilité qui a une probabilité $j\theta/(\lambda + j\theta + \eta)$. Supposons maintenant qu'une panne active arrive avant que le client provenant du groupe de rappels achève son service. Le client décide de quitter le système donc cet événement est de probabilité $(1 - \tilde{F}(\mu))(1 - c)$. Pour avoir i clients dans le groupe de rappels à la $(n+1)^{\text{ème}}$ époque d'oisiveté, on doit supposer que, (a) $1 \leq j \leq i + 1$, et (b) $i - j + 1$ clients primaires doivent arrivés durant le temps de service interrompu et le temps de réparation suivant. Alors, on a la convolution $\sum_{n=0}^{i-j+1} f_n^2 h_{i-j+1-n}$.

Ces arguments mène au sixième terme à droite de (1.12). Le même schéma peut-être utilisé pour trouver l'expression entière. $\square$

Avec ces préliminaires, on est près d'énoncer le résultat principal concernant les probabilités limites

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} p\{(X(t), Q(t)) = (i, j)\}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, j \geq 0.$$

Théorème 1.5 :

Si $\rho < 1$, alors les probabilités limites P_{ij} sont données par :

$$P_{0j} = \frac{1}{A} \frac{\pi_j}{\lambda + j\theta + \eta}, \quad j \geq 0, \quad (1.14)$$

$$P_{1j} = \frac{\tilde{F}(\mu)}{A} \left(\lambda \sum_{i=0}^j \frac{\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \hat{f}_{j-i} + \theta \sum_{i=0}^{j+1} \frac{i\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \hat{f}_{j-i+1} \right), \quad j \geq 0, \quad (1.15)$$

$$P_{2j} = \frac{\eta}{A} \sum_{i=0}^j \frac{\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \hat{g}_{j-i}, \quad j \geq 0, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} P_{3j} = & \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{A} \left(\lambda(1 - c) \sum_{i=0}^j \frac{\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \sum_{n=0}^{j-i} f_n^2 \hat{h}_{j-i-n} \right. \\ & + (1 - \delta_{j0}) \lambda c \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \sum_{n=0}^{j-i-1} f_n^2 \hat{h}_{j-i-n-1} \\ & + \theta(1 - c) \sum_{i=0}^{j+1} \frac{i\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \sum_{n=0}^{j-i+1} f_n^2 \hat{h}_{j-i-n+1} \\ & \left. + \theta c \sum_{i=0}^j \frac{i\pi_i}{\lambda + i\theta + \eta} \sum_{n=0}^{j-i} f_n^2 \hat{h}_{j-i-n} \right), \quad j \geq 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

où

$$\begin{aligned}\widehat{f}_k &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu x}(1-F(x))}{\widetilde{F}(\mu)} dx, \quad k \geq 0, \\ \widehat{g}_k &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} (1-G(x)) dx, \quad k \geq 0, \\ \widehat{h}_k &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} (1-H(x)) dx, \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

Preuve :(voir [9]).

Théorème 1.6 :

Si $\rho < 1$, alors les fonctions génératrices $P_i(z)$ sont données par :

$$P_0(z) = \frac{K}{A} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_0^z \frac{1-\mathcal{N}(u)}{\mathcal{N}(u)-u} d\tilde{u} + \frac{\eta}{\theta} \int_0^z \frac{1-\widetilde{G}(\lambda-\lambda u)}{\mathcal{N}(u)-u} du \right\}, \quad (1.18)$$

$$P_1(z) = \frac{1-\widetilde{F}(\lambda-\lambda z+\mu)}{\lambda-\lambda z+\mu} \cdot \frac{\lambda-\lambda z+\eta-\eta\widetilde{G}(\lambda-\lambda z)}{\mathcal{N}(z)-z} P_0(z), \quad (1.19)$$

$$P_2(z) = \eta \frac{1-\widetilde{G}(\lambda-\lambda z)}{\lambda-\lambda z} P_0(z), \quad (1.20)$$

$$P_3(z) = (1-c+cz) \mu \frac{1-\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}{\lambda-\lambda z} P_1(z). \quad (1.21)$$

Preuve :

La preuve du théorème 1.6 s'obtient après quelques manipulations algébriques des équations (1.14)-(1.17). Il est facile de vérifier que (1.18)-(1.21) s'accordent avec les expressions données dans [2] et [70]. Cependant, l'utilisation de $\mathcal{N}(z)$ nous permet de réduire la complexité des fonctions génératrices. $\square$

Notons les moments partiels des probabilités limites par $M_i^k = \sum_{j=0}^{+\infty} j^k P_{ij}$,

$i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Le calcul de ces moments s'obtient après des manipulations algébriques un peu dures en utilisant les transformées $P_i(z)$ données dans le théorème 1.6. Nous allons montrer que la connaissance des seconds moments partiels est essentielle pour l'étude de problèmes d'inférence ou le développement d'approximations adéquates de l'état du système basé sur le principe du maximum d'entropie (voir [45],[68]).

1.3.5 Décomposition stochastique

Nous présentons quelques résultats concernant la décomposition de la chaîne de Markov induite et le processus (X, Q) .

Dabord, on définit quelques fonctions génératrices :

(a) La chaîne de Markov induite à l'époque d'oisiveté.

$$\phi(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j z^j.$$

(b) Nombre de clients dans le groupe de rappels.

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} (P_{0j} + P_{1j} + P_{2j} + P_{3j}) z^j.$$

(c) Nombre de clients dans le système.

$$P(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} (P_{0j} + (1 - \delta_{j0}) P_{1j-1} + P_{2j} + P_{3j}) z^j.$$

Théorème 1.7 :

(i) *Décomposition stochastique de la chaîne de Markov induite à l'époque d'oisiveté.*

$$\phi(z) = \bar{\phi}(z) \frac{P_0(z)}{M_0^0}. \quad (1.22)$$

(ii) *Décomposition stochastique du nombre de clients dans le groupe de rappels.*

$$\psi(z) = (\bar{P}_{10} + z^{-1} (\bar{P}_1(z) - \bar{P}_{10}) + \bar{P}_2(z) + \bar{P}_3(z)) \frac{P_0(z)}{M_0^0}. \quad (1.23)$$

(iii) *Décomposition stochastique du nombre total de clients dans le système.*

$$P(z) = (\bar{P}_1(z) + \bar{P}_2(z) + \bar{P}_3(z)) \frac{P_0(z)}{M_0^0}. \quad (1.24)$$

Preuve :

Pour prouver le théorème, on peut exprimer de nouveau les formules de $\phi(z)$ et $\psi(z)$ données par [2] et [70], pour avoir des expressions plus simples en fonction de $\mathcal{N}(z)$.

Alors en combinant ces résultats avec les théorèmes 1.3, 1.4, et 1.6, on obtient, après quelques calculs algébriques, les décompositions (1.22), (1.23) et (1.24).

□

En fait, on peut prouver les résultats de décompositions partielles suivants :

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \bar{P}_{10} \frac{P_0(z)}{M_0^0}, & P_1(z) &= z^{-1} (\bar{P}_1(z) - \bar{P}_{10}) \frac{P_0(z)}{M_0^0}, \\ P_2(z) &= \bar{P}_2(z) \frac{P_0(z)}{M_0^0}, & P_3(z) &= \bar{P}_3(z) \frac{P_0(z)}{M_0^0}. \end{aligned}$$

Pour comprendre le déphasage dans la relation entre $P_1(z)$ et $\bar{P}_1(z)$, on doit prendre en compte le fait que la probabilité P_{1j} signifie qu'il y'a $j + 1$ clients dans le système (serveur+groupe de rappels), par contre $\bar{P}_{1j}$, implique j clients.

1.3.6 Autres modèles avec pannes

Les modèles avec rappels qui prennent en considération les pannes et les réparations ont été introduits indépendamment dans [2] et [70] où il est obtenu les fonctions génératrices des processus représentant le nombre de clients en orbite et dans le système en régime stable (équivalent de la formule de Pollaczek-Khintchine). Ces travaux utilisent toutefois pour le même modèle des méthodes différentes : le premier utilise la méthode de la variable supplémentaire “avant” (temps résiduel), alors que le second utilise la méthode de la chaîne de Markov incluse. Un article plus récent [83] utilise la méthode de la variable supplémentaire “arrière” (temps écoulé). Une simplification des formules obtenues est donnée ultérieurement dans [9] où on obtient également un calcul explicite des différents moments de premier et second ordres. Ces expressions serviront d’information de base à notre méthode (cf. chapitre 3 et 4) pour fournir une approximation plus simple et explicite de la distribution des états du système étudié. Ce travail présente également un schéma algorithmique pour une évaluation exacte des probabilités limites. Notons enfin que l’article fournit une autre possibilité de simplification en prouvant que la décomposition stochastique de cette distribution reste vraie pour le modèle considéré. Cette propriété a été récemment utilisée dans [35] pour obtenir une approximation (sous une forte intensité de rappels) de ce modèle avec une loi de rappels arbitraire. En effet, on ne connaît que très peu de résultats explicites pour ce cas, même en l’absence de pannes, à l’exception peut-être du cas de rappels constants [11,22].

D’autres méthodes d’approximation pour ce type de modèle ont été développées ces dernières années. Dans [14,15], on utilise les méthodes de diffusion qui permettent d’analyser le régime chargé. Dans [8,73], il est obtenu des inégalités et bornes pour certaines caractéristiques du système moyennant les techniques de comparaisons stochastiques.

L’article [87] considère un modèle avec défaillances précoces (starting failures). Si le serveur débute son service avec succès (avec une certaine probabilité), le client est immédiatement servi. Sinon, le serveur va en réparation et le client quitte la zone de service pour rappeler ultérieurement. Ce type de modèle est en fait une variante du modèle avec rappels et vacances étudié introduit dans [19]. La période de vacances est en général introduite pour une meilleure exploitation du temps d’oisiveté du serveur (par exemple pour maintenance préventive, contrôle de qualité ou tout autre tâche prioritaire). Dans [10] ce type de modèle est étudié dans le cas d’arrivées par groupes et un service généralisé. Ces deux études concernent le cas de rappels constants, et l’objectif est le contrôle (optimisation) de la politique de rappels ou de vacances. Une analyse par comparaison stochastique pour ce type de modèle est effectuée dans [25].

Le modèle introduit dans [11] combine phénomènes de rappels, de pannes, de vacances dans le cas d’arrivées par groupes. La majorité des modèles évoqués supposent des lois de pannes exponentielles. Le cas de lois de pannes arbitraires est étudié dans [5].

Dans [6] il est considéré une autre approche où le serveur est sujet à des pannes partielles et l'évolution de ses états est décrit par une chaîne de Markov. Ce modèle comprend comme cas particulier le cas où le serveur est supporté par des éléments redondants : un moyen technique d'améliorer la fiabilité. Une approche similaire [36] considère une évolution semi-markovienne du régime de service. Enfin, dans [69] on étudie la fiabilité du type de redondance majoritaire k -sur- n .

Le modèle $M/M/m$ avec rappels et pannes est étudié dans [24]. Cet article étudie également la période d'activité du modèle $M/M/1$, et certains résultats asymptotiques. Cependant tous ces résultats ne concernent que le cas de pannes actives. Dans [23], une approche algorithmique est proposée pour le calcul de la distribution limite d'un modèle avec rappels et "désastres" : ce type d'événement peut décrire par exemple l'infection d'un système informatique par un virus et la réinitialisation subséquente de tous le système. L'occurrence d'un désastre ramène l'état du système à l'état " 0 ", et par conséquent ce type de modèles présente moins de difficultés d'ordre mathématique que les précédents. Enfin notons, une variante de modèle avec interruption de service étudié dans [21], et qui peut être vu comme un cas particulier du modèle avec pannes décrit au début.

1.4 Conclusion

Cette revue montre les difficultés d'analyse des modèles d'attente avec rappels et/ou serveur non fiable. Compte tenu de ces difficultés, différents auteurs ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse. Parmi les principales approches développées dans ce but, on trouve la méthode de maximisation d'entropie qui conduit à des estimations en maximisant la fonction d'entropie des états du système. Cette méthode, qui sera utilisée dans la suite, donne une nouvelle structure hybride pour l'analyse de performances des systèmes de files d'attente dans un contexte opérationnel ou stochastique.

Chapitre 2

Analyse par maximum d'entropie des systèmes de files d'attente

2.1 Introduction

La modélisation et l'analyse de performances des systèmes informatiques ont rencontré d'importants problèmes pendant plusieurs années. Bien que, la théorie des files d'attente ait fourni des résultats remarquables dans la résolution de ces problèmes [30,58,71], ce succès a été sujet à critique vu que souvent les systèmes informatiques ne satisfont pas les hypothèses formées par les modèles de processus stochastiques utilisés. Il apparaît que les équations de la théorie des files d'attente ont une applicabilité plus vaste que suggérée par ces résultats classiques. Des explications sont données par l'analyse opérationnelle [34]. Une autre explication est basée sur les techniques de modélisation par la théorie de l'information qui exploite le principe du maximum d'entropie et du minimum d'entropie croisée (une généralisation) voir Shore et Johnson [78]. Ces principes donnent une méthode d'estimation des distributions de probabilités, étant donnée une information en terme de contraintes de valeurs moyennes .

Jaynes [52,53] utilise le concept de l'entropie fonctionnelle, comme une mesure de la quantité d'incertitude, introduite auparavant dans la théorie de l'information par Shannon [76]. L'entropie d'une probabilité assignée peut-être interprétée comme la quantité espérée d'incertitude qui existe apriori pour la réalisation du résultat d'un événement, ou de même, comme la quantité d'information espérée qui sera obtenue lorsque le résultat d'un événement est observé actuellement [56,76]. L'entropie atteint son minimum ($= 0$) lorsque l'arrivée d'un résultat particulier est certain et atteint son maximum lorsque tous les résultats d'un événement sont équiprobables i.e. apriori, l'exécution d'une expérience est soumise à une incertitude maximum pour laquelle le résultat sera réalisé. Par conséquent le principe de raison insuffisante implique que, dans la détermination des probabilités d'un événement, on devra initialement commencer avec une distribution uniforme (si elle existe), ensuite "ajuster" cette distribution en maximisant l'entropie, si l'information apriori

est disponible. Enfin, le Principe du Maximum d'Entropie (PME) peut-être présenté comme suit : Etant données les propositions d'un événement, le meilleur estimateur des probabilités correspondantes est la distribution qui maximise la fonction d'entropie soumise à l'information disponible.

Ce chapitre présente les résultats obtenus dans l'analyse par maximisation d'entropie des systèmes de files d'attente classiques (à discipline FIFO ou FCFS) de type G/G/1.

2.2 Formalisme du maximum d'entropie

Soit un système Q, ayant un ensemble X fini ou dénombrable d'états possibles $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'information disponible sur Q impose un nombre de contraintes sur $p(x_n)$, où $p(x_n)$ est la distribution de probabilité que le système Q soit à l'état x_n . On suppose que ces contraintes prennent la forme de valeurs moyennes de m fonctions $\{f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_m(x_n)\}$. En général, le nombre de ces fonctions est plus petit que le nombre d'états possible, alors on se trouve devant un nombre infini de distributions $\{p(x_n)\}$, satisfaisant ces contraintes. La question est laquelle choisir. Le Principe du Maximum d'Entropie (PME) [52], stipule que, parmi toutes les distributions satisfaisant les contraintes fournies par l'information donnée, la distribution la moins préjudiciable préconçue minimalement $p(x_n)$, est celle qui maximise la fonction d'entropie du système :

$$H(p) = - \sum_{x_n \in X} p(x_n) \log\{p(x_n)\}, \quad (2.1)$$

soumise aux contraintes :

$$\sum_{x_n \in X} p(x_n) = 1, \quad (2.2)$$

$$\sum_{x_n \in X} f_k(x_n) p(x_n) = \langle f_k \rangle, k = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

où $\{\langle f_k \rangle\}$ sont les valeurs moyennes prescrites, définies sur l'ensemble des fonctions $\{f_k(x_n)\}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Le problème de maximisation d'entropie (2.1) soumise aux contraintes (2.2) et (2.3) peut-être résolu en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui conduit à la solution :

$$p(x_n) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m f_k(x_n) \beta_k \right\} \quad (2.4)$$

où $\{\beta_k\}$, $k = 1, 2, \dots, m$, sont les multiplicateurs de Lagrange déterminés à partir de l'ensemble des contraintes (2,3). La fonction Z est connue en physique statistique

sous le nom de “fonction de partition”, et est donnée par :

$$Z = \exp \{\beta_0\} = \sum_{x_n \in X} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m f_k(x_n) \beta_k \right\} \quad (2.5)$$

où β_0 est le multiplicateur de Lagrange correspondant à la contrainte de normalisation (2.2).

Notons que, puisque la fonctionnelle d’entropie atteint son maximum lorsque tous les états sont équiprobables (X ensemble fini), alors la solution du Maximum d’Entropie (ME), (2.4) est celle qui est la plus proche d’une distribution de type uniforme, satisfaisant l’information apriori disponible (2.2) et (2.3).

Bien sûr, il n’est pas toujours possible de connaître apriori les valeurs numériques de $\langle f_k \rangle$. Mais on peut savoir que de telles valeurs moyennes existent. Cette information peut donc être incorporée dans le formalisme pour déterminer la forme de la solution du ME $\{p(x_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

La distribution de probabilité du ME définie par (2.4) possède plusieurs propriétés intéressantes, qui ont été étudiées par Jaynes [52,53]. Par exemple, on peut facilement voir [82], que les multiplicateurs de Lagrange $\{\beta_k\}$ satisfont les relations suivantes :

$$-\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_k} = \langle f_k \rangle. \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

et que le maximum d’entropie est exprimé par :

$$\max_p H(p) = \beta_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k \langle f_k \rangle. \quad (2.7)$$

En général, il est impossible de résoudre (2.6) explicitement. Cependant des techniques numériques pour obtenir des solutions approchées sont disponibles [54].

Si l’ensemble des états du système X est dénombrable, la fonction d’entropie $H(p)$ est une série infinie sans limite supérieure, même sous la contrainte de normalisation (2.2). Cependant les valeurs moyennes supplémentaires $\langle f_k \rangle$ de (2.3) introduisent une borne supérieure (donnée par (2.7)), et la solution du maximum d’entropie $\{p(x_n)\}$, existe.

Dans le cas où X prend ses valeurs dans un ensemble continu d’états du système, le PME peut-être appliqué en remplaçant les distributions d’état discrètes par des densités de probabilités et les sommes par des intégrales de la manière usuelle. Il en est de même, si X est un ensemble d’états mixtes, (continu/discrets). Notons que dans tous les cas, la maximisation d’entropie est équivalente à la minimisation d’entropie relative avec une distribution relative apriori uniforme (si elle existe), comme un estimateur initial de la distribution concernée en plus des contraintes [80].

Dans un contexte de la théorie de l’information, la solution du maximum d’entropie (ME) correspond au désordre maximal des états du système et peut-être

considérée comme la distribution estimée la moins biaisée parmi toutes les solutions qui satisfont les contraintes [52]. En terme d'échantillonnage étant données les contraintes imposées, Jaynes [52,53] a montré que, la solution du ME peut-être obtenue expérimentalement.

Le principe du maximum d'entropie (PME) est particulièrement intéressant pour l'analyse de performances des systèmes de files d'attente. En effet, les mesures de performance (e.g, longueur moyenne de la file) ne sont souvent connues qu'en fonction de quelques premiers moments des distributions du temps d'interarrivées et temps de service, qui doivent être connues généralement, analytiquement ou obtenues par un système de mesure. Plus de détails sur le PME et ses généralisations peuvent-être trouvés dans [53,78,79,80 et 82].

2.3 Maximum d'entropie et systèmes de files d'attente

Dans ce paragraphe, nous présentons le formalisme de la méthode ME appliqué pour un modèle abstrait de système (2.3.1), nous discuterons ensuite le cas de système de file d'attente G/G/1.

2.3.1 Solution de système par la méthode ME

Soit un modèle de système abstrait où les états sont classifiés dans un ensemble exhaustif de possibilités mutuellement exhaustives $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, et soit $p(x_n)$ la probabilité que le système soit à l'état n . Supposons que tout ce qu'on connaît a priori sur les probabilités d'état $p(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sont les contraintes de valeurs moyennes suivantes :

(i) La normalisation ,

$$\sum_n p(x_n) = 1, \quad (2.8)$$

(ii) La probabilité d'état, $p(x_0)$,

$$p(x_0) = 1 - c, \quad (2.9)$$

où c est une constante positive telle que $c \in [0, 1]$,

(iii) La valeur moyenne $\langle t \rangle$, d'une fonction $t(x_n)$, $0 < \langle t \rangle < +\infty$,

$$\sum_n p(x_n) t(x_n) = \langle t \rangle. \quad (2.10)$$

Une solution générale du maximum d'entropie $p(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, peut-être spécifiée complètement en maximisant la fonction d'entropie du système soumise à

l'information apriori exprimée par les contraintes (2.8),(2.9) et (2.10). La solution du ME compatible avec ces conditions est donnée clairement par

$$p(x_n) = \exp \{-\beta_0 - \beta_1 f(x_n) - \beta_2 t(x_n)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

où $f(x_n)$ est une fonction auxiliaire donnée par

$$f(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

β_0, β_1 et β_2 sont les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes (2.8),(2.9) et (2.10) respectivement. Il s'ensuit de (2.8) et (2.11) que β_0 est exprimé par

$$\beta_0 = \log \left\{ \sum_n \exp \{-\beta_1 f(x_n) - \beta_2 t(x_n)\} \right\}, \quad (2.13)$$

et en raison des contraintes (2.9) et (2.10), la relation (2.6) est réduite à

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_1} = -c, \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_2} = -\langle t \rangle. \quad (2.14)$$

Notons que la distribution $\{p(x_n)\}$ est incorrecte lorsque $c > 1$ [66]. La nature exacte de la distribution de probabilité d'état $\{p(x_n)\}, n = 0, 1, 2, \dots$, peut-être déterminée en spécifiant

- (i) les valeurs possibles de x_n ,
- (ii) les formes de $t(x_n)$ et c , et
- (iii) les valeurs de β_1 et β_2 ,

dans le contexte de l'analyse d'une file stable G/G/1. Deux cas qui nous intéressent sont traités ci-dessous.

2.3.2 Détermination de la distribution de la longueur de la file G/G/1 par Maximisation d'Entropie

Considérons une file stable G/G/1 de discipline FCFS, avec distributions du temps d'interarrivées et temps de service générales (de type G). Soit λ et μ les taux d'arrivée et de service, C_a^2 et C_s^2 sont les carrés du coefficient de variation du temps d'interarrivées et temps de service respectivement. L'analyse de cette partie et de celles qui suivent suppose que les paramètres λ, μ, C_a^2 et C_s^2 forment un ensemble fondamental d'informations apriori, pour l'estimation des distributions de la file G/G/1 soumise à une information supplémentaire.

Supposons que les fonctions $t(x_n)$ et x_n sont de la forme

$$t(x_n) = x_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Dans ce cas, les contraintes (2.9) et (2.10) coïncident avec deux métriques fondamentales relatives à l'analyse d'une file G/G/1 stable, à savoir :

(i) la probabilité d'un système vide , i.e.

$$p(0) = 1 - \rho, \quad \rho = \lambda/\mu, \quad 0 < \rho < 1, \quad (2.16)$$

où ρ est l'utilisation du système (i.e. $c = \rho$), et

(ii) la longueur moyenne de la file $\langle n \rangle$, $\rho \leq \langle n \rangle \leq \langle n \rangle_{ub}$, i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} np(n) = \langle n \rangle, \quad (2.17)$$

où $\langle n \rangle_{ub}$ est une borne supérieure de $\langle n \rangle$ (i.e. $\langle t \rangle = \langle n \rangle$).

La contrainte (2.16) peut-être interprétée comme la condition “d'équilibre des flux ” [i.e. le taux du flux moyen d'entrée λ , est égal au taux du flux de service, $\mu(1 - p(0))$]. De plus, $\langle n \rangle$ est souvent exprimé analytiquement en fonction des paramètres λ, μ, C_a^2 et C_s^2 qui peuvent-être obtenus par un système de mesures.

Ainsi, l'approximation de la distribution de la longueur de la file par ME $\{p(n)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, soumise aux contraintes (2.16),(2.17) et la normalisation (2.8), est donnée par :

$$p(n) = \frac{1}{Z_p} \alpha^{f(n)} \gamma^n, \quad (2.18)$$

où

$$Z_p = \exp \{ \beta_0 \} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{f(n)} \gamma^n, \quad (2.19)$$

$\alpha = \exp \{ -\beta_1 \}$, $\gamma = \exp \{ -\beta_2 \}$, β_0, β_1 et β_2 sont les coefficients de Lagrange correspondants aux contraintes (2.8),(2.16) et (2.17), respectivement. Pour l'état d'inactivité $\{n = 0\}$, (2.18) est réduite à :

$$p(0) = \frac{1}{Z_p} = 1 - \rho. \quad (2.20)$$

A partir des solutions (2.18),(2.19) et (2.20), nous pouvons énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.1 :

L'approximation de la distribution de la longueur de la file par ME, $p(n)$, d'une file G/G/1 stable, soumise aux contraintes (2.8),(2.16) et (2.17), est donnée par l'algorithme récursif suivant :

$$p(n) = \begin{cases} \alpha \gamma p(0), & n = 1, \\ \gamma p(n-1), & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.21)$$

La récurrence (2.21) permet à l'analyste d'étudier des files G/G/1 de type plus général. En utilisant les relations (2.13) et (2.14), ou directement (2.16)-(2.20), nous aurons le théorème suivant :

Théorème 2.1 :[66]

La distribution de la longueur de la file G/G/1 stable par ME $\{p(n)\}$, $n = 1, 2, \dots$, soumise aux contraintes (2.8),(2.16) et (2.17), est donnée par :

$$p(n) = \begin{cases} 1 - \rho, & n = 0, \\ \frac{\rho^2}{\langle n \rangle} \left(\frac{\langle n \rangle - \rho}{\langle n \rangle} \right)^{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.22)$$

où les coefficients de Lagrange α et γ sont spécifiés par :

$$\alpha = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)(\langle n \rangle - \rho)}, \quad (2.23)$$

$$\gamma = \frac{\langle n \rangle - \rho}{\langle n \rangle}, \quad (2.24)$$

respectivement.

Notons que l'expression (2.22) peut-être aussi obtenue indirectement comme un cas limite d'une solution de l'entropie maximum d'une file G/G/1/N à capacité finie N, où α et γ sont supposés indépendants de N [63]. Il est aussi intéressant d'observer que la forme de la distribution (2.22) est identique à la solution heuristique de la file G/G/1 proposée dans [77] dans le contexte de l'approximation de diffusion [59,74]. De plus, la solution de l'entropie maximum (2.22) est réduite à celle présentée dans [79] ou [48] lorsque la contrainte de l'équilibre du flux (2.16) est supprimée. Enfin, bien que l'approximation par ME $\{p(x_n)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ne peut pas être exprimée analytiquement en fonction des contraintes sur les moments d'ordre supérieur de la longueur de la file [79], elle peut toutefois être déterminée en utilisant des méthodes numériques [54].

2.3.3 Détermination de la fonction de densité de probabilité de la file G/G/1 par maximisation d'entropie

Une fonction de densité de probabilité analogue à la solution discrète (2.22) peut-être établie de la solution générale (2.11) en posant

$$t(x_n) = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

et l'intervalle Δt , est infiniment petit. En utilisant l'expression (2.13), après quelques manipulations, on peut vérifier (pour Δt petit) que :

$$\beta_0 = \log \left\{ \frac{\beta_2 \Delta t + \exp \{-\beta_1\}}{\beta_2 \Delta t} \right\}. \quad (2.26)$$

De la relation (2.14) et l'expression (2.26), après quelques manipulations, à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$), on a le théorème suivant :

Théorème 2.2 :

A la limite ($\Delta t \rightarrow 0$), la densité de probabilité $f(t), t \geq 0$, analogue à la distribution de la longueur de la file $\{p(n)\}, n = 0, 1, 2, \dots$, soumise aux contraintes (2.8), (2.9) et (2.10), est généralement de la forme mixte

$$f(t) = (1 - c) u_0(t) + \frac{c^2}{\langle t \rangle} \exp \left\{ \frac{-ct}{\langle t \rangle} \right\}, \quad (2.27)$$

où $u_0(t)$ est la fonction d'impulsion unité [55] définie par

$$u_0(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases},$$

tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t) dt = 1.$$

et les multiplicateurs de Lagrange sont spécifiés par :

$$\beta_0 = -\log \{1 - c\}, \quad (2.28)$$

$$\beta_1 = \log \left\{ \frac{(1 - c) \langle t \rangle}{c^2} \right\}, \quad (2.29)$$

$$\beta_2 = \frac{c}{\langle t \rangle}. \quad (2.30)$$

En général les paramètres c et $\langle t \rangle$ peuvent aussi être exprimés en fonction de λ, μ, C_a^2 et C_s^2 (e.g. temps d'attente moyen de la file M/M/1).

Notons qu'à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$), les contraintes (2.8), (2.9) et (2.10), peuvent-être de nouveau interprétées par :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1, \quad (2.31)$$

$$\int_0^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = c, \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1 & \text{si } t > 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \langle t \rangle, \quad (2.33)$$

respectivement. Pour cela, la solution du ME (2.27)-(2.30) peut-être obtenue autrement en appliquant directement la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour maximiser à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$) l'entropie fonctionnelle (2.1), donnée par :

$$H(f) = - \int_0^{+\infty} f(t) \log \{f(t)\} dt,$$

soumise aux informations apriori (2.31)-(2.33).

2.4 Applications

Dans cette partie nous allons appliquer les théorèmes 1 et 2 pour analyser des types particuliers de files G/G/1 stables, et établir un lien avec les résultats stochastiques [57] et opérationnels [29].

2.4.1 Processus de naissance et de mort

Si la longueur moyenne de la file, $\langle n \rangle$, est donnée apriori par $\rho / (1 - \rho)$, alors $\alpha = 1$ et $\gamma = \rho$; i.e. l'algorithme récursif (2.21) est réduit aux transitions homogènes de naissance et de mort opérationnelles [29], et la distribution du ME de la longueur de la file (2.22) est réduite à la solution de la file M/M/1 à l'équilibre. Lorsque $c = 1$ et $\langle t \rangle = 1/\lambda$ ou $1/\mu$, alors la fonction de densité de probabilité du ME (2.27) est réduite à une fonction de densité de probabilité de temps d'interarrivées ou temps de service distribué exponentiellement de paramètres λ ou μ respectivement. En d'autre terme, si $c = 1$ et $\langle t \rangle = \rho / [\mu(1 - \rho)]$, alors la densité de probabilité du ME (2.27) est identique à la densité de probabilité du temps d'attente d'une file M/M/1 à l'équilibre.

2.4.2 La file M/G/1

Pour une file M/G/1 stable, les contraintes (2.8) et (2.17) ont été utilisées indépendamment dans [79] et [48] pour obtenir une approximation par ME de la longueur moyenne de la file qui est exacte lorsque G=M. Lorsque les trois contraintes (2.8), (2.16) et (2.17) sont utilisées, il a été établi [37], que la solution du ME $\{p(n)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, devient exacte, quand la fonction de densité de probabilité du temps de service est caractérisée par le modèle Exponentiel Généralisé (GE), de la forme :

$$f_s(t) = \left(\frac{C_s^2 - 1}{1 + C_s^2} \right) u_0(t) + \frac{4\mu}{(1 + C_s^2)^2} \exp \left\{ -\frac{2\mu t}{1 + C_s^2} \right\}, \quad t \geq 0. \quad (2.34)$$

On peut voir facilement, que le modèle GE, (qui n'est pas vérifié pour $C_s^2 < 1$) [voir 22] est une fonction de densité de probabilité du ME, de la forme mixte (2.27),

avec $c = 2/(C_s^2 + 1)$ et $\langle t \rangle = 1/\mu$. Il est intéressant de voir que l'inclusion explicite de la contrainte de second moment du temps de service dans le formalisme du ME est inutile.

Notons que la densité de probabilité de GE peut-être interprétée par :

(i) un cas extrême d'une famille de mélange de distributions à deux phases, avec le même taux moyen μ , et coefficient de variation C_s^2 ($C_s^2 > 1$), où l'une des deux phases a un temps de service nul, ou bien :

(ii) Comme un processus de service avec un processus de comptage sous-jacent équivalent à un processus de Poisson composé (M^B) (service par groupe) de paramètre $2\mu/(1 + C_s^2)$ et taille du groupe distribuée géométriquement de moyenne égale à $(1 + C_s^2)/2$ et carré du coefficient de variation $(C_s^2 - 1)/(C_s^2 + 1)$. L'intérêt de la distribution GE en tant que modèle universel pour l'approximation des distributions de type G (Général) (lorsque seulement les deux premiers moments sont connus) est motivé aussi par sa propriété de pseudo-absence de mémoire, qui la rend particulièrement utile pour l'analyse des files à plusieurs serveurs [65] et les réseaux de files d'attente généraux [62],[63].

2.4.3 La file G/M/1

Pour une file G/M/1 stable, on peut vérifier que la distribution du ME (2.22), est identique à la solution exacte, basée sur une chaîne de Markov incluse aux instants d'arrivées, avec coefficient de Lagrange $\gamma = \sigma$, qui est la probabilité qu'une arrivée trouve le serveur occupé. Il est intéressant de voir que seulement le premier moment de la distribution de la longueur de la file, $\langle n \rangle = \rho/(1 - \sigma)$ est suffisant avec ρ , pour établir une solution exacte du ME pour une distribution quelconque du temps d'interarrivées de type G. Pour une file GE/M/1 stable, il a été montré [37] que

$$\gamma = \sigma = \frac{(C_a^2 - 1 + 2\rho)}{(1 + C_a^2)}, \quad \rho \geq \frac{1 - C_a^2}{2}. \quad (2.35)$$

Les densités de probabilités du temps d'attente par ME des files M/G/1 et G/M/1 peuvent-être approximées par (2.27), lorsque $c = \rho$ (notons que $\sigma = 1 - p(0) = \rho$ pour une file M/G/1) et $\langle t \rangle = w$, le temps d'attente moyen, [cf.[79]]. Lorsque la distribution de type G est représentée par le modèle de GE, ces solutions de l'entropie maximum deviennent exactes. Notons que pour $C_a^2 < 1$, la densité de probabilité du temps d'attente dans la file GE/M/1 est singulière et le résultat correspondant doit satisfaire la condition $\rho \geq (1 - C_a^2)/2$.

2.4.4 La file G/GE/1

Pour une file G/GE/1 stable, on peut montrer [61], en utilisant la formule de factorisation de l'équation intégrale de Lindley [57], et en appliquant une approche similaire à celle employée dans la solution spectrale de la file G/M/1 [57], que la

densité de probabilité exacte du temps d'attente $w(t)$, est donnée par :

$$w(t) = (1 - v_w)u_0(t) + v_w\theta_t \exp\{-\theta_t t\}, t \geq 0. \quad (2.36)$$

$$v_w = 1 - \frac{\theta_t(1 + C_s^2)}{2\mu}, \quad (2.37)$$

et $\theta = -\theta_t$ est la seule racine de l'équation polynomiale

$$2\mu + (1 + C_s^2)\theta - [(C_s^2 - 1)\theta + 2\mu]A^*(-\theta) = 0, \quad (2.38)$$

dans le domaine $\text{Re}(\theta) < 0$, où $A^*(\theta)$ est la transformée de Laplace de la distribution du temps d'interarrivées. Le temps d'attente moyen est :

$$W(G/GE/1) = \frac{v_w}{\theta_t}, \quad \theta_t \leq \frac{2\mu}{1 + C_s^2}, \quad (2.39)$$

et, d'après la loi de Little, la longueur moyenne de la file est

$$\langle n \rangle (G/GE/1) = \frac{\lambda}{\theta_t} - \frac{\rho(C_s^2 - 1)}{2}. \quad (2.40)$$

On peut voir facilement que la densité de probabilité du temps d'attente (2.37) est identique à la densité de probabilité du ME (2.27) en posant

$$c = v_w \quad \text{et} \quad \langle t \rangle = W(G/GE/1).$$

2.4.5 La file GE/G/1

Pour une file GE/G/1 stable, on peut montrer [84] que la densité de probabilité de GE correspond à un processus de Poisson composé (M^B) avec une taille de groupe distribuée géométriquement, où le taux d'arrivées moyen du groupe $\langle b \rangle$, est donné par, $\lambda_b = \frac{2\lambda}{1 + C_a^2}$.

Il sera intéressant à cette étape, d'établir la distribution du temps de service qui rend la solution du ME (2.22) exacte. Ceci peut-être atteint au moyen du théorème suivant

Théorème 2.3 :

la solution du ME (2.22) de la file GE/G/1, soumise aux contraintes (2.8),(2.16) et (2.17), est identique à la distribution exacte de la longueur de la file GE/G/1 à l'équilibre lorsque la distribution du temps de service est représentée par le modèle exponentiel généralisé (GE) de la forme (2.35) (la réciproque est valable).

Preuve : voir Kouvatso [66].

Notons que le théorème ci-dessus est une généralisation de celui donné dans [37] pour la solution du ME de la file M/G/1 stable. De plus, le résultat du théorème 2.3 est une nouvelle interprétation dans un contexte stochastique de l'approximation par ME de l'analyse de la fonction de densité de probabilité du temps de service (2.27), de l'approximation par ME de la distribution de la longueur de la file (2.22), avec $c = 2/(1 + C_s^2)$ et $\langle t \rangle = 1/\mu$ (cf. théorème 2.2).

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment le Principe du Maximum d'Entropie (P.M.E) a pu être utilisé pour l'analyse approximative d'une file G/G/1 à l'équilibre, lorsque les contraintes concernent uniquement les deux premiers moments des distributions du temps d'interarrivées et du temps de service. Il a été obtenu des relations récursives robustes pour la distribution de la longueur de la file, ainsi qu'une caractérisation d'une fonction de densité de probabilité mixte analogue par Kouvatso [66]. Ces solutions du maximum d'entropie ont été expérimentées, conjointement avec l'analyse exacte, pour l'approximation de la file G/G/1, et des rapports intéressants ont été établis avec les résultats de la théorie classique des files d'attente et l'analyse opérationnelle. En particulier, il a été montré que la distribution de la longueur de la file par ME dans un système GE/G/1 stable, soumis à la contrainte du coefficient d'utilisation ρ , et celle de la longueur moyenne de la file, $\langle n \rangle$, est identique à la solution exacte correspondante, lorsque la distribution du temps de service est représentée par le modèle de distribution GE (Théorème 2.3).

La forme universelle du modèle de distribution GE a une signification plus large dans l'analyse approximative de systèmes de files d'attente plus complexes. En particulier, la formule du flux de configuration de fusion et de division de type GE, peut-être utilisée avec la longueur moyenne $\langle n \rangle$ de la file GE/GE/1, pour implémenter la solution du maximum d'entropie de forme produit dans les réseaux FCFS ouverts et fermés de files d'attente générales.

Chapitre 3

Approximation par la théorie de l'information d'une file M/G/1 avec rappels soumise à des pannes

3.1 Introduction

Le formalisme du maximum d'entropie appliqué aux systèmes avec rappels et pannes pour estimer l'unique estimateur d'une distribution de probabilité inconnue, $\{P_{ij}\}_{j=0}^{\infty}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, basée sur l'information exprimée en terme de contraintes des moments partiels de la forme :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = M_i^0, \quad \sum_{j=0}^{+\infty} n^k P_{ij} = M_i^k, \quad 1 \leq k \leq m < \infty$$

Si l'approximation de l'entropie maximum existe, elle peut-être obtenue en appliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, alors la maximisation d'entropie de Shannon mène à la solution :

$$P_{ij} = \exp \left\{ -\beta_0 - \sum_{k=1}^m n^k \beta_k^i \right\},$$
$$\exp \{\beta_0\} = \frac{1}{M_i^0} \sum_{j=0}^{+\infty} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m n^k \beta_k^i \right\},$$

où les β_k^i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Dans ce chapitre, on obtient l'approximation par la théorie de l'information de la distribution d'états stables d'une file M/G/1 avec rappels soumise à des pannes. Ce système de files d'attente est caractérisé par le fait que, les clients primaires arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ , et un client quelconque qui arrive et trouve le serveur occupé ou en panne doit rejoindre un groupe de rappels et répète sa demande après un temps aléatoire distribué exponentiellement avec un

taux θ . Le temps de service est distribué suivant une loi arbitraire S , avec une distribution $F(x)$, ($F(0) = 0$) et transformée de Laplace-Stieltjes $\tilde{F}(s)$. En plus, le système est soumis à deux types d'interruptions poissonniennes. Des pannes indépendantes ou actives peuvent arriver lorsque le serveur est inactif ou actif avec un taux η ou μ respectivement. Les temps d'interruptions indépendantes et actives sont pris comme variables aléatoires D_i et D_b de distributions $G(x)$ et $H(x)$, et transformées de Laplace-Stieltjes $\tilde{G}(s)$ et $\tilde{H}(s)$, respectivement. Le flux d'entrée des arrivées primaires, les temps de service, les intervalles entre les essais répétés et les intervalles entre pannes et durées de réparation sont supposés mutuellement indépendants. Finalement, on suppose aussi que les clients dont le service est interrompu par une panne active sont obligés de quitter la zone de service. Le client interrompu doit décider, soit de rejoindre le groupe de rappels (avec une probabilité c) ou quitter le système après interruption (avec une probabilité $1 - c$). Pour obtenir l'approximation par la théorie de l'information, on utilise uniquement des premiers moments de la distribution, et le P.M.E nous permet d'avoir une approximation du processus.

L'organisation de ce chapitre est comme suit. Dans la partie 2, nous allons approximer le système M/G/1 avec rappels, sans interruptions et nous allons étudier les cas où il est possible d'obtenir une solution explicite des multiplicateurs de Lagrange. Ensuite, en supposant que les moments de second ordre de la distribution de l'état stable sont donnés, nous allons nous référer à une solution numérique. Dans la partie 3, de la même manière nous considérons le cas plus général d'un système M/G/1 avec rappels et pannes.

3.2 Approximations d'une file M/G/1 avec rappels

3.2.1 Description du modèle

Le système de files d'attente M/G/1 avec rappels est un système particulier de ceux avec rappels et pannes, et est caractérisé par le fait que les clients arrivent suivant un processus de Poisson, de taux λ ($\lambda > 0$). Les temps de service S_i , sont supposés mutuellement indépendants avec une distribution de probabilité $F(x)$, ($F(0) = 0$) et transformée de Laplace Stieltjes $\tilde{F}(s)$. Un client qui trouve le serveur occupé quitte la zone de service, mais après un temps distribué exponentiellement d'intensité θ ($\theta > 0$), il cherche de nouveau le service. Soit $\rho = \lambda E(S)$ le facteur d'utilisation. On suppose que $\rho < 1$ et que le système est en état stable.

3.2.2 Approximation de premier ordre

Soit le processus bidimensionnels $(C(t), N(t))$, sur lequel on définit les probabilités stationnaires $\{P_{in}\}$, tel que :

$$P_{in} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P[C(t) = i, N(t) = n], \quad i \in \{0, 1\}, \quad n \in \{0, 1, \dots\},$$

alors les fonctions génératrices correspondantes $P_i(z)$ sont données comme suit : [45]

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{0n} z^n = (1 - \rho) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - K(u)}{K(u) - u} du \right\}, \\ P_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n} z^n = \frac{1 - K(z)}{K(z) - z} P_0(z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $K(z) = \tilde{F}(\lambda - \lambda z)$ et $\tilde{F}(s)$ est la transformée de Laplace-Stieltjes de la distribution du temps de service. Ces expressions ont été obtenues par divers auteurs à l'aide de différentes méthodes [12, 42, 55].

De la formule (3.1), on peut déterminer les moments partiels M_i^k , ($M_i^k = \sum_{n=0}^{\infty} n^k P_{in}$, $i \in \{0, 1\}$, $k \in \{0, 1\}$), par les relations suivantes :

$$M_0^0 = 1 - \rho, \quad M_1^0 = \rho, \quad (3.2)$$

$$M_0^1 = \frac{\lambda \rho}{\theta}, \quad M_1^1 = \frac{\lambda \rho^2}{\theta(1 - \rho)} + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(2 - \rho)}. \quad (3.3)$$

Ces expressions joueront le rôle de contraintes de valeurs moyennes. Supposons que nous n'ayons aucune information apriori sur la distribution du temps de service, alors le P.M.E nous permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.1 :

Si l'unique information disponible est donnée par M_0^0, M_1^0, M_0^1 et M_1^1 alors l'approximation ME de la distribution de probabilité de l'état du système est de la forme :

$$\hat{P}_{0n} = \frac{(1 - \rho)^2}{M_0^1 + 1 - \rho} \left(\frac{M_0^1}{M_0^1 + 1 - \rho} \right)^n, \quad \hat{P}_{1n} = \frac{\rho^2}{M_1^1 + \rho} \left(\frac{M_1^1}{M_1^1 + \rho} \right)^n. \quad (3.4)$$

$n = 0, 1, \dots$

Preuve :

Soit la fonctionnelle d'entropie du système suivante :

$$H(P_i) = - \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \log(P_{in}), \quad i = 0, 1. \quad (3.5)$$

Selon le principe de la méthode ME, il s'agit de maximiser la fonctionnelle (3.5), soumise aux contraintes de valeurs moyennes suivantes :

$$M_0^0 = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0n} = 1 - \rho, \quad M_1^0 = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n} = \rho, \quad (3.6)$$

$$M_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{0n} = \frac{\lambda \rho}{\theta}, \quad M_1^1 = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{1n} = \frac{\lambda \rho^2}{\theta(1 - \rho)} + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(2 - \rho)}. \quad (3.7)$$

Pour maximiser la fonctionnelle d'entropie H , nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction de Lagrange s'écrit :

$$L(H(P)) = - \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \log(P_{in}) - \alpha_i \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} - \beta_i \sum_{n=0}^{\infty} n P_{in}, \quad i \in \{0, 1\},$$

où α_i et β_i , $i \in \{0, 1\}$, sont les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes (3.6) et (3.7) respectivement.

Le maximum est atteint si

$$\frac{\partial}{\partial P}(L(H(P))) = 0,$$

alors

$$-\log(P_{in}) - 1 - \alpha_i - \beta_i n = 0,$$

ce qui donne l'approximation :

$$\hat{P}_{in} = \exp(-(\alpha_i + 1) - \beta_i n) = Z_i^{-1} \exp(-\beta_i n), \quad (3.8)$$

avec

$$Z_i = \exp(-(\alpha_i + 1)) = \frac{1}{M_i^0} \sum_{n \geq 0} \exp(-n \beta_i), \quad i \in \{0, 1\}.$$

Pour $n = 0$, on a

$$\hat{P}_{i0} = Z_i^{-1} \quad (3.9)$$

On définit $x_i = \exp(-\beta_i)$ et en utilisant (3.8) et (3.9) nous aurons :

$$\hat{P}_{in} = x_i^n \hat{P}_{i0} \quad (3.10)$$

donc nous avons :

$$M_i^0 = \sum_{n \geq 0} \hat{P}_{in} = \hat{P}_{i0} \sum_{n \geq 0} x_i^n = \frac{\hat{P}_{i0}}{1 - x_i}, \quad (3.11)$$

et

$$M_i^1 = \sum_{n \geq 0} n \hat{P}_{in} = \hat{P}_{i0} \sum_{n \geq 0} n x_i^n = \frac{x_i}{(1 - x_i)^2} \hat{P}_{i0}. \quad (3.12)$$

En divisant (3.12) par (3.11) nous aurons :

$$\frac{M_i^1}{M_i^0} = \frac{x_i}{1 - x_i},$$

Ce qui donne

$$x_i = \frac{M_i^1}{M_i^0 + M_i^1},$$

En remplaçant x_i dans (3.11), on aura,

$$\hat{P}_{i0} = M_i^0(1 - x_i) = \frac{(M_i^0)^2}{M_i^0 + M_i^1},$$

et le remplacement de x_i et P_{i0} dans (3.10), nous mène à la solution suivante :

$$\hat{P}_{in} = \frac{(M_i^0)^2}{M_i^1 + M_i^0} \left(\frac{M_i^1}{M_i^1 + M_i^0} \right)^n, \quad \text{avec } i \in \{0, 1\}.$$

On en déduit les formules du théorème,

$$\hat{P}_{0n} = \frac{(1 - \rho)^2}{M_0^1 + 1 - \rho} \left(\frac{M_0^1}{M_0^1 + 1 - \rho} \right)^n, \quad \hat{P}_{1n} = \frac{\rho^2}{M_1^1 + \rho} \left(\frac{M_1^1}{M_1^1 + \rho} \right)^n. \quad \square$$

Remarquons que l'approximation à un moment est décroissante. Néanmoins, la distribution d'état stable d'une file M/G/1 avec rappels peut avoir un mode pour un entier n ($n \in \mathbb{N}$), arbitraire. En particulier, il est facile de voir que les séquences $\{P_{in}\}_{n=0}^{\infty}, i = 0, 1$, dans une file M/M/1 avec rappels possède un mode unique. Si on note n_i^* le mode i.e. qui possède la probabilité la plus élevée P_{in} alors on a :

$$\begin{aligned} n_0^* &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda\rho < \theta, \\ \left\lceil \frac{(\lambda - \theta)\rho}{\theta(1 - \rho)} \right\rceil & \text{si } \lambda\rho \geq \theta. \end{cases}, \\ n_1^* &= \left\lceil \frac{\lambda\rho}{\theta(1 - \rho)} \right\rceil, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière .

Notons que si $(\lambda - \theta)\rho/\theta(1 - \rho)$ (respectivement $\lambda\rho/\theta(1 - \rho)$) est un entier alors $n_0^* - 1$ (respectivement $n_1^* - 1$) est aussi un mode. Ainsi l'approximation de premier ordre ne doit être appliquée que lorsque $n_0^* = n_1^* = 0$, ce qui est équivalent à l'inégalité $\theta > \lambda\rho/(1 - \rho)$.

Pour les files dont le temps de service est distribué arbitrairement, nous n'avons aucune information théorique sur les modes de $\{P_{in}\}$, mais les investigations numériques de Falin, Martin et Artalejo [45] montre que les distributions les plus usuelles conduisent à des distributions de probabilités d'état stable unimodales.

Evidemment les arguments précédents indiquent qu'il est souhaitable d'étudier de nouvelles approximations plus fiables.

3.2.3 Approximation de second ordre

Arguments et justifications

Deux motivations principales justifient l'usage d'approximations à deux moments. D'abord, Falin [42] a montré que lorsque θ tend vers 0, $N(t)$ est asymptotiquement Gaussien. Ce fait, s'accorde avec la forme analytique de la distribution du maximum d'entropie.

De plus, si on considère n , comme une variable continue alors, il est facile de prouver que l'approximation à k moments a au plus $k - 1$ extremums relatifs. Du moment que l'expression (3.13) indique que $\{P_{in}\}_{n=0}^{\infty}, i \in \{0, 1\}$, possède au plus un mode, on suggère qu'une approximation à deux moments peut-être assez bonne en général, pour avoir la forme fondamentale de la distribution d'état stable.

Plusieurs arguments peuvent être en faveur d'une approximation à deux moments, en général ces arguments sont basés sur des cas où les distributions de performance exactes sont connues numériquement. Dans chaque cas, l'approximation peut-être souvent améliorée en prenant en compte plusieurs moments.

Approximation par maximisation d'entropie

Considérons les probabilités d'états stables

$$P_{in} = \lim_{t \rightarrow \infty} p(C(t) = i, N(t) = n), \quad i \in \{0, 1\}, \quad n \in \{0, 1, \dots\}.$$

En utilisant (3.1), on peut déterminer les moments partiels de second ordre de $\{P_{in}\}_{n=0}^{\infty}$ par ;

$$\begin{aligned} M_0^2 &= M_0^1 + \frac{\lambda}{\theta} M_1^1, \\ M_1^2 &= \frac{\lambda^3 E(S^3)}{3(1 - \rho)} + \frac{\lambda^3 E(S^2)}{2\theta(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda^4 E(S^2)}{4(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1 - \rho)} + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1 - \rho)} \\ &\quad + \frac{\lambda^4}{(1 - \rho)^2} \left(\frac{E(S)}{\theta} + \frac{E(S^2)}{2} \right)^2 - M_0^2. \end{aligned}$$

La maximisation de la fonctionnelle d'entropie du système

$$H(P_i) = - \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \log(P_{in}), \quad i = 0, 1 \quad (3.14)$$

soumise aux contraintes des moments partiels, M_i^j , $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, mène à la solution suivante :

$$P_{in} = \exp(-\beta_0^i - \beta_1^i n - \beta_2^i n^2), \quad i \in \{0, 1\}, \quad n \in \{0, 1, \dots\},$$

où β_0^i, β_1^i et β_2^i sont les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes M_i^0, M_i^1 et M_i^2 respectivement.

On peut écrire :

$$P_{in} = Z_i^{-1} \exp(-\beta_1^i n - \beta_2^i n^2), \quad (3.15)$$

avec

$$Z_i = \frac{1}{M_i^0} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta_1^i n - \beta_2^i n^2). \quad (3.15)$$

Il est impossible d'obtenir une expression de forme analytique des paramètres de Lagrange β_1^i et β_2^i . Des méthodes numériques sont disponibles pour calculer ces multiplicateurs de Lagrange. On a choisit pour cette tâche la méthode proposée dans [1 et 13]. Suivant cette méthode, le calcul des β_k^i , $i \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, 2\}$, est réduit à trouver le minimum d'une fonction potentielle, qui est la suivante :

$$F_i(\beta_1^i, \beta_2^i) = \log \sum_{k=0}^N \exp \left\{ - \sum_{j=1}^2 \beta_j^i \left(k^j - \frac{M_i^j}{M_i^0} \right) \right\}, i \in \{0, 1\}, \quad (3.16)$$

où N est la taille tronquée de l'orbite.

Pour calculer le minimum de (3.16), on a employé la méthode de recherche directe de Nelder et Mead décrite ci après (voir [26]). Cette méthode n'a pas employé les dérivées, ce qui la rend utile, car la matrice hessienne de $F_i(\beta_1^i, \beta_2^i)$ est parfois algorithmiquement singulière. Une discussion complète sur ce problème technique peut-être trouvée dans [1].

Méthode du polytope de Nelder-Mead

C'est une méthode d'optimisation locale qui est fréquemment utilisée. Cette méthode déterministe est dite "directe" : elle tente de résoudre le problème en utilisant directement la valeur de la fonction objectif, sans faire appel à ses dérivées. Cette méthode est surtout appréciée pour sa robustesse, sa simplicité de programmation, sa faible consommation de mémoire (peu de variables) et son faible temps de calcul. Cet algorithme est robuste car il est très tolérant aux bruits dans les valeurs

de la fonction objectif. En conséquence, la fonction n'a pas besoin d'être calculée exactement et il est possible d'avoir recours à une approximation de la valeur de la fonction.

Contrairement aux autres méthodes qui démarrent à partir d'un point initial, la méthode de Nelder-Mead utilise un "polytope" de départ. Un polytope est une figure géométrique de $(n + 1)$ points, n étant la dimension du problème. Le polytope de départ est obtenu par le tirage aléatoire d'un point x_1 dans l'espace solution, les autres points x_i sont choisis de manière à former une base, généralement une base orthogonale :

$$x_i = x_1 + \lambda e_i,$$

où e_i , $i = 2, \dots, n + 1$ sont des vecteurs unitaires linéairement indépendants, et λ est généralement une constante, adaptée à la caractéristique du problème (domaine de variation des différentes composantes). On peut choisir des λ_i différents pour chaque vecteur de direction. Mais généralement, pour définir une base orthonormée, on prend un seul λ_i égal à l'unité, et le produit scalaire entre deux vecteurs unitaires e_i est nul. Le polytope P_0 défini par les sommets $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, est noté $P_0 = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \rangle$.

A chaque itération de l'algorithme du polytope, $n + 1$ points sont utilisés pour déterminer un pas d'essai. Les points x_i sont ordonnés de manière à avoir $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$.

Des points de test sont obtenus en utilisant de très simples opérations algébriques, qui se traduisent par des transformations géométriques élémentaires (réflexion, contraction, expansion, et multicontraction appelée aussi rétrécissement), et ces points sont acceptés ou rejetés en fonction de la valeur de la fonction objectif. Le polytope se transforme, il s'étend, se contracte, à chaque mouvement. Ainsi il s'adapte à l'allure de la fonction, jusqu'à ce qu'il s'approche de l'optimum. Pour déterminer la transformation adéquate, la méthode utilise uniquement la valeur de la fonction objectif aux points considérés. A chaque transformation, le plus mauvais point courant x_h est remplacé par le nouveau point déterminé.

Les conditions d'arrêt de l'algorithme dépendent de la différence de valeur de la fonction objectif entre le meilleur et le plus mauvais point : aussitôt que cette différence est inférieure à un certain seuil, l'algorithme est interrompu. Un pseudocode de cette méthode est décrit comme suit :

Pseudocode de la méthode du polytope de Nelder-Mead

- POLYT tableaux de taille $n + 1$
- POLYT:=initialiser polytope
- α, β, γ :=initialiser
- SIMPL:=ordonner polytope pour obtenir $P_0 = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \rangle$

REPETER

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

réflexion ($x_r = (1 + \alpha)\bar{x} - \alpha x_{n+1}$)

$$x^k := x_r$$

SI réflexion acceptée ($f(x_r) < f(x_n)$) alors

SI ($f(x_r) < f(x_1)$)

expansion($x_e = \gamma x_r + (1 - \gamma)\bar{x}$)

SI expansion acceptée ($f(x_e) < f(x_r)$) alors $x^k := x_e$

SINON $x^t := x_{n+1}$ (pour contraction interne)

SI ($f(x_r) \leq f(x^t)$) alors $x^t := x_r$ (pour contraction externe)

contraction ($x_c = \beta x^t + (1 - \beta)\bar{x}$)

SI contraction acceptée ($f(x_c) \leq f(x_n)$) alors $x^k := x_c$

SINON rétrécissement du simplexe

$$x_j := \frac{(x_j + x_1)}{2} \quad \text{pour } j = 2, \dots, n$$

$$x^k := \frac{(x_{n+1} + x_1)}{2}$$

Trier $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x^k)$ pour obtenir $P_k = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \rangle$

JUSQU'A conditions d'arrêt satisfaites.

3.3 Approximation d'une file M/G/1 avec rappels soumise à des pannes

3.3.1 Description du modèle

Soit le processus $(X, Q) = \{(X(t), Q(t)); t \geq 0\}$, où $Q(t)$ représente le nombre de clients dans le groupe de rappels au temps t et $X(t)$ est l'état du serveur qui est décrit comme suit :

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est opérationnel et libre,} \\ 1 & \text{si le serveur est opérationnel et occupé,} \\ 2 & \text{si le serveur est tombé en panne durant sa oisiveté,} \\ 3 & \text{si le serveur est tombé en panne durant son activité,} \end{cases}$$

Soit les probabilités limites P_{ij} , tels que :

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{(X(t), Q(t)) = (i, j)\}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad j \in \{0, 1, \dots\}.$$

et notons par M_i^k les moments partiels des probabilités limites tels que :

$$M_i^k = \sum_{j=0}^{\infty} j^k P_{ij}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ces moments sont obtenus par des calculs algébriques un peu durs, à partir des fonctions génératrices $P_i(z)$ données par les formules suivantes en supposant que $\rho < 1$ (voir [9]) :

$$P_0(z) = \frac{K}{A} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \mathcal{N}(u)}{\mathcal{N}(u) - u} du + \frac{\eta}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \tilde{G}(\lambda - \lambda u)}{\mathcal{N}(u) - u} du \right\}, \quad (3.17)$$

$$P_1(z) = \frac{1 - \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu)}{\lambda - \lambda z + \mu} \frac{\lambda - \lambda z + \eta - \eta \tilde{G}(\lambda - \lambda z)}{\mathcal{N}(z) - z} P_0(z), \quad (3.17)$$

$$P_2(z) = \eta \frac{1 - \tilde{G}(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} P_0(z), \quad (3.17)$$

$$P_3(z) = (1 - c + cz) \mu \frac{1 - \tilde{H}(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} P_1(z). \quad (3.17)$$

avec

$$\rho = \lambda \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{\mu} \left(1 + \mu \left(E(D_i) + \frac{c}{\mu} \right) \right), \quad (3.18)$$

$$K = \frac{1 - \rho}{\lambda (1 + \eta E(D_i)) + \eta (1 - \rho)}, \quad (3.18)$$

$$A = K (1 + \eta E(D_i)) + \left(1 + \tilde{F}(\mu) \right) (1 - \eta K) \left(E(D_b) + \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.18)$$

et $\mathcal{N}$ est le nombre de clients qui rejoignent le groupe de rappels durant $(0, \mathcal{F}]$ et la fonction génératrice de $\mathcal{N}$ est :

$$\mathcal{N}(z) = E(z^{\mathcal{N}}) = \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu) + (1 - c + cz) \mu \tilde{H}(\lambda - \lambda z) \frac{1 - \tilde{F}(\lambda - \lambda z + \mu)}{\lambda - \lambda z + \mu}.$$

3.3.2 Approximation de premier ordre

A partir des expressions (3.17), on peut déterminer les moments partiels M_i^k , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $k \in \{0, 1\}$ comme suit :

$$M_0^0 = \frac{K}{A}, \quad M_1^0 = \frac{(1 - \eta K)(1 - \tilde{F}(\mu))}{A\mu}, \quad (3.19)$$

$$M_2^0 = \eta M_0^0 E[D_i], \quad M_3^0 = \mu M_1^0 E[D_b], \quad (3.19)$$

$$M_0^1 = \lambda M_0^0 \frac{\rho + \eta E[D_i]}{\theta(1 - \rho)}, \quad (3.19)$$

$$M_1^1 = \frac{\lambda^2 M_0^0 (1 - \tilde{F}(\mu))}{2\mu(1 - \rho)^2} (\lambda(1 + \eta E[D_i]) \mathcal{N}_2 + \eta(1 - \rho) E[D_i^2]) \\ + \lambda \frac{\lambda(1 + \eta E[D_i])}{1 - \rho} \left(M_0^1 \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{\mu} + \lambda M_0^0 \frac{1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu)}{\mu^2} \right), \quad (3.19)$$

$$M_2^1 = \eta \left(\frac{\lambda}{2} M_0^0 E[D_i^2] + M_0^1 E[D_i] \right), \quad (3.19)$$

$$M_3^1 = \mu \left(M_1^0 \left(c E[D_b] + \frac{\lambda}{2} E[D_b^2] \right) + M_1^1 E[D_b] \right). \quad (3.19)$$

Si nous n'avons aucune information apriori sur la distribution du temps de service, alors le P.M.E nous permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.2 :

Si l'unique information disponible est donnée par $M_0^0, M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_0^1, M_1^1, M_2^1$ et M_3^1 , alors l'approximation M.E, de la distribution de probabilités de l'état du système est :

$$\hat{P}_{0n} = \frac{\theta(1 - \rho) K/A}{\theta(1 - \rho) + \lambda(\rho + \eta E(D_i))} \left(\frac{\lambda(\rho + \eta E(D_i))}{\theta(1 - \rho) + \lambda(\rho + \eta E(D_i))} \right)^n, \\ \hat{P}_{1n} = \frac{\left[(1 - \eta K)(1 - \tilde{F}(\mu)) \right]^2}{\left[(1 - \eta K)(1 - \tilde{F}(\mu)) + A\mu M_1^1 \right] A\mu} \times \\ \left(\frac{A\mu M_1^1}{(1 - \mu K)(1 - \tilde{F}(\mu)) + A\mu M_1^1} \right)^n, \\ \hat{P}_{2n} = \frac{\eta(M_0^0 E(D_i))^2}{(M_0^0 + M_0^1) E(D_i) + \frac{\lambda}{2} M_0^0 E(D_i^2)} \times \\ \left(\frac{\frac{\lambda}{2} M_0^1 E(D_i^2) + M_0^1 E(D_i)}{(M_0^0 + M_0^1) E(D_i) + \frac{\lambda}{2} M_0^0 E(D_i^2)} \right)^n,$$

$$\hat{P}_{3n} = \frac{\mu (M_1^0 E(D_b))^2}{(M_1^0 + M_1^1 + cM_1^0) E(D_b) + \frac{\lambda}{2} M_1^0 E(D_b^2)} \times \left(\frac{M_1^0 (cE(D_b) + \frac{\lambda}{2} E(D_b^2)) + M_1^1 E(D_b)}{(M_1^0 + M_1^1 + cM_1^0) E(D_b) + \frac{\lambda}{2} M_1^0 E(D_b^2)} \right)^n. \quad (3.20)$$

Preuve :

La maximisation de la fonctionnelle d'entropie,

$$H(P_i) = - \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \log(P_{in}), i \in \{0, 1, 2, 3\},$$

soumise aux contraintes des moments partiels (3.19) mène à la solution :

$$\hat{P}_{in} = Z_i^{-1} \exp(-n\beta_i), \quad (3.21)$$

avec

$$Z_i = \frac{1}{M_i^0} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta_i).$$

où β_i sont les mutiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes M_i^1 , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Nous avons pour $n = 0$,

$$\hat{P}_{i0} = Z_i^{-1}. \quad (3.22)$$

En posant $x_i = \exp(-\beta_i)$ et en utilisant (3.21) et (3.22) on trouve

$$\hat{P}_{in} = \hat{P}_{i0} x_i^n, \quad (3.23)$$

nous avons

$$M_i^0 = P_{i0} \sum_{n \geq 0} x_i^n = \frac{\hat{P}_{i0}}{1 - x_i}, \quad (3.24)$$

et

$$M_i^1 = \hat{P}_{i0} \sum_{n \geq 0} n x_i^n = \frac{x_i \hat{P}_{i0}}{(1 - x_i)^2}. \quad (3.25)$$

Donc, en divisant (3.25) par (3.24) on trouve :

$$\frac{M_i^1}{M_i^0} = \frac{x_i}{1 - x_i},$$

ce qui donne

$$x_i = \frac{M_i^1}{M_i^0 + M_i^1},$$

En remplaçant x_i dans (3.24) on trouve

$$P_{i0} = \frac{(M_i^0)^2}{M_i^0 + M_i^1},$$

Le remplacement de x_i et $\hat{P}_{i0}$ dans (3.23) donne :

$$\hat{P}_{in} = \frac{(M_i^0)^2}{M_i^0 + M_i^1} \left(\frac{M_i^1}{M_i^0 + M_i^1} \right)^n. \quad (3.26)$$

Pour chaque état i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ on remplace les moments partiels $M_i^k, k = 0, 1$ dans (3.26), on obtient les résultats du théorème. $\square$

3.3.3 Approximation de second ordre

Soit les probabilités d'états stables

$$P_{in} = \lim_{t \rightarrow \infty} p(X(t) = i, Q(t) = n), \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En supposant que $\rho < 1$, et en utilisant les fonctions génératrices (3.17), on peut déterminer les moments partiels de second ordre de $\{P_{in}\}_{n=0}^{\infty}, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, par les expressions suivantes :

$$M_0^2 = M_0^0 \frac{\lambda^2 (\lambda \mathcal{N}_2 (1 + \eta E[D_i]) + \eta (1 - \rho) E[D_i^2])}{2\theta(1 - \rho)^2} + M_0^1 \left(1 + \frac{A}{K} M_0^1 \right), \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \lambda^2 M_0^0 \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{\mu} \left(\frac{2\eta (1 - \rho)^2 E[D_i^3] + 3\lambda\eta (1 - \rho) \mathcal{N}_2 E[D_i^2]}{6(1 - \rho)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(1 + \eta E[D_i]) (3\lambda \mathcal{N}_2^2 + 2(1 - \rho) \mathcal{N}_3)}{6(1 - \rho)^3} \right) \\ &\quad + M_1^1 + \frac{\lambda^2 (\lambda \mathcal{N}_2 (1 + \eta E[D_i]) + \eta (1 - \rho) E[D_i^2])}{(1 - \rho)^2} \\ &\quad \times \left(M_0^1 \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{\mu} + \lambda M_0^0 \frac{1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu)}{\mu^2} \right) \\ &\quad + \lambda \frac{1 - \tilde{F}(\mu)}{\mu} \cdot \frac{1 + \eta E[D_i]}{1 - \rho} (M_0^2 - M_0^1) \\ &\quad + 2\lambda^2 M_0^1 \frac{1 + \eta E[D_i]}{1 - \rho} \cdot \frac{1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu)}{\mu^2} \\ &\quad + \lambda^3 M_0^0 \frac{1 + \eta E[D_i]}{1 - \rho} \cdot \frac{2 \left(1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu) \right) - \mu^2 \tilde{F}''(\mu)}{\mu^3}, \\ M_2^2 &= M_2^1 + \eta \left(M_0^0 \frac{\lambda^2}{3} E[D_i^3] + \lambda M_0^1 E[D_i^2] + (M_0^2 - M_0^1) E[D_i] \right), \\ M_3^2 &= M_3^1 + \mu \left(M_1^0 \frac{\lambda^2}{3} E[D_b^3] + \lambda (c M_1^0 + M_1^1) E[D_b^2] + ((2c - 1) M_1^1 + M_1^2) E[D_b] \right), \end{aligned}$$

où ρ , K et A sont donnés dans (3.18), et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 &= \frac{\mathcal{N}''(1)}{\lambda^2} = \frac{2c}{\lambda} \left(\tilde{F}'(\mu) + \left(1 - \tilde{F}(\mu) \right) \left(E[D_b] + \frac{1}{\mu} \right) \right) + \left(1 - \tilde{F}(\mu) \right) E[D_b^2] \\ &\quad + \frac{2}{\mu} \left(1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu) \right) \left(E[D_b] + \frac{1}{\mu} \right), \\ \mathcal{N}_3 &= \frac{\mathcal{N}'''(1)}{\lambda^3} = \frac{6}{\mu^3} \left(1 - \tilde{F}(\mu) \right) + \frac{6}{\mu^2} \tilde{F}'(\mu) - \frac{3}{\mu} \tilde{F}''(\mu) + \left(1 - \tilde{F}(\mu) \right) E[D_b^3] \\ &\quad + \frac{3}{\mu} \left(1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu) \right) E[D_b^2] + 3 \left(\frac{2 \left(1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu) \right)}{\mu^2} - \tilde{F}''(\mu) \right) E[D_b] \\ &\quad + \frac{3c}{\lambda} \left(\left(1 - \tilde{F}(\mu) \right) E[D_b^2] - \tilde{F}''(\mu) + \frac{2}{\mu} \left(1 - \tilde{F}(\mu) + \mu \tilde{F}'(\mu) \right) \left(E[D_b] + \frac{1}{\mu} \right) \right). \end{aligned}$$

La maximisation de la fonctionnelle d'entropie du système,

$$H(P_i) = - \sum_{n=0}^{\infty} P_{in} \log(P_{in}), i \in \{0, 1, 2, 3\},$$

soumise aux contraintes des moments partiels $M_i^k, i \in \{0, 1, 2, 3\}, k \in \{0, 1, 2\}$, données dans (3.19) et (3.27), mène à la solution suivante :

$$\hat{P}_{in} = Z_i^{-1} \exp(-\beta_1^i n - \beta_2^i n^2),$$

avec

$$Z_i = \frac{1}{M_i^0} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta_1^i n - \beta_2^i n^2)$$

où β_1^i et β_2^i sont les multiplicateurs de Lagrange correspondants respectivement aux contraintes M_i^1 et $M_i^2, i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Comme nous l'avons constaté pour le cas d'une file M/G/1 avec rappels et serveur fiable, il est impossible d'avoir une expression de forme analytique des paramètres de Lagrange β_1^i et β_2^i . Nous avons de nouveau choisi la méthode proposée dans [13]. Le calcul des $\beta_k^i, i \in \{0, 1, 2, 3\}, k \in \{1, 2\}$, se réduit à trouver le minimum de la fonction potentielle convexe

$$F_i(\beta_1^i, \beta_2^i) = \log \sum_{k=0}^N \exp \left\{ - \sum_{j=1}^2 \beta_j^i \left(k^j - \frac{M_i^j}{M_i^0} \right) \right\}, i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (3.28)$$

où N est la taille tronquée de l'orbite.

Pour calculer le minimum de (3.28), on a employé la méthode de recherche directe de Nelder et Mead (voir [1]).

3.4 Conclusion

Plusieurs raisons nous ont conduit à utiliser la méthode par la théorie de l'information dans les files d'attente. A travers ce chapitre, nous avons présenté deux approximations de l'état du système par la théorie de l'information, d'une file M/G/1 avec rappels et pannes. L'algorithme de Nelder et Mead nous permet d'avoir des solutions approximatives lorsqu'on ne dispose d'aucune expression analytique simple.

Pour les autres distributions de performance, comme le temps d'attente par exemple, l'approche entropique donne aussi une distribution de probabilité simple. La généralisation de notre résultat serait intéressant pour le cas des files avec rappels à loi générale (rappel, arrivées,...) et aux cas de plusieurs serveurs.

Chapitre 4

Validation des approximations

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons tenter de valider les approximations par ME obtenues dans le chapitre précédent pour une file M/G/1 avec rappels et pannes. Dans la première partie nous allons supposer que les taux de pannes (actif et passif) sont nuls, ce qui nous ramène à la file M/G/1 avec rappels et serveur fiable, et nous établirons pour différentes lois de service des exemples illustratifs. Le but de cette partie est de tester nos résultats en comparant avec les résultats numériques de Falin, Martin et Artalejo [45]. En tenant compte des taux de pannes et réparations, nous allons établir dans la deuxième partie des comparaisons entre résultats exacts et approximatifs pour différentes lois de service et de pannes. Notons que les résultats d'optimisation et d'approximation ont été réalisés à l'aide du logiciel Matlab.

4.2 Système M/G/1 avec rappels

Dans cette partie, nous allons voir quelques illustrations de comparaison entre les résultats exacts et approximatifs de la distribution d'état du système M/G/1 avec rappels et serveur absolument fiable. Pour cela, nous avons testé les approximations pour différentes lois de services en faisant varier les différents paramètres (taux d'entrée, de service et de rappels). Nous avons obtenu les résultats présentés dans les tables ci-dessous. Pour l'estimateur du maximum d'entropie basé sur les m premiers moments, on note l'Entropie de Shannon (E.S) par $S^{(m)}$. Notons que l'utilisation de l'approximation à deux moments plutôt que celle à un seul moment diminue notablement l'entropie de Shannon ($S^{(2)} - S^{(1)} < 0$), $S^{(2)}$ est suffisamment proche de l'entropie de Shannon S de la distribution d'état stable.

4.2.1 Service de loi exponentielle

Table 1 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels tels que $\lambda = 2, \nu = 6$ et $\theta = 4$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$
0	0.5443	0.1814	0.5333	0.1905	0.5390	0.1834
1	0.0907	0.0907	0.1067	0.0816	0.0998	0.0873
2	0.0227	0.0378	0.0213	0.0350	0.0209	0.0384
3	0.0063	0.0147	0.0043	0.0150	0.0050	0.0156
4	0.0018	0.0055	0.0009	0.0064	0.0013	0.0058
5	0.0005	0.0020	0.0002	0.0028	0.0004	0.0020
6	0.0001	0.0007	0.0000	0.0012	0.0001	0.0006
7	0.0001	0.0002	0.0000	0.0005	0.0001	0.0002
E.S	1.4478		1.4519		1.4483	

Table 2 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels tels que $\lambda = 1, \nu = 4$ et $\theta = 0.2$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.1780	0.0445	0.2812	0.0833	0.1964	0.0515	0.103
1	0.2225	0.0667	0.1758	0.0556	0.1969	0.0585	0.115
2	0.1668	0.0584	0.1099	0.0370	0.1599	0.0541	0.041
3	0.0973	0.0389	0.0687	0.0247	0.1052	0.0408	0.081
4	0.0487	0.0219	0.0429	0.0165	0.0560	0.0251	0.150
5	0.0219	0.0109	0.0268	0.0110	0.0242	0.0126	0.105
6	0.0091	0.0050	0.0168	0.0073	0.0084	0.0051	0.077
7	0.0036	0.0021	0.0105	0.0049	0.0024	0.0017	0.333
8	0.0013	0.0008	0.0065	0.0032	0.0005	0.0005	0.615
9	0.0005	0.0003	0.0041	0.0022	0.0001	0.0001	0.800
10	0.0001	0.0001	0.0025	0.0014	0.0000	0.0000	1.000
E.S	2.2709		2.3626		2.2783		

Table 3 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels tels que $\lambda = 1, \nu = 4$ et $\theta = 0.05$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.0024	0.0006	0.0978	0.0313	0.0101	0.0028	3.261
1	0.0119	0.0031	0.0851	0.0273	0.0191	0.0054	0.608
2	0.0312	0.0086	0.0740	0.0239	0.0326	0.0094	0.044
3	0.0572	0.0165	0.0643	0.0209	0.0500	0.0147	0.126
4	0.0823	0.0247	0.0559	0.0183	0.0691	0.0208	0.160
5	0.0987	0.0308	0.0486	0.0160	0.0860	0.0265	0.129
6	0.1028	0.0334	0.0423	0.0140	0.0963	0.0306	0.064
7	0.0955	0.0322	0.0368	0.0123	0.0970	0.0319	0.016
8	0.0806	0.0282	0.0320	0.0107	0.0881	0.0301	0.094
9	0.0627	0.0227	0.0278	0.0094	0.0720	0.0257	0.149
10	0.0454	0.0170	0.0242	0.0082	0.0530	0.0198	0.166
11	0.0309	0.0120	0.0210	0.0072	0.0351	0.0138	0.134
12	0.0200	0.0080	0.0183	0.0063	0.0209	0.0087	0.047
13	0.0123	0.0051	0.0159	0.0055	0.0112	0.0050	0.087
14	0.0072	0.0031	0.0138	0.0048	0.0054	0.0026	0.251
E.S	3.0516		3.5374		3.0710		

La comparaison entre la valeur exacte et l'approximation du maximum d'entropie à un seul moment d'une file M/M/1 avec rappels, lorsque l'ensemble des paramètres est $(\lambda, \nu, \theta) = (2, 6, 4)$, (voir $\{P_{in}\}$ et $\{\hat{P}_{in}^1\}$ de la table 1), nous montre que l'approximation de premier ordre est décroissante, c'est-à-dire elle possède un mode en $n_0^* = n_1^* = 0$. Par contre, les distributions d'états stables de la file M/M/1 avec rappels peuvent avoir un mode en un entier n arbitraire. Ceci se voit bien dans la table 2, lorsque l'ensemble des paramètres est $(\lambda, \nu, \theta) = (1, 4, 0.2)$, où on remarque des modes en $n_0^* = n_1^* = 1$. En vertu des arguments précédents, il est nécessaire d'améliorer ces approximations et de tirer de nouvelles approximations d'états du système. L'approximation de second ordre nous permet d'avoir une très bonne amélioration, (voir les résultats de la table 2) du moment que les modes de l'approximation $\{\hat{P}_{in}^2\}$, $i = 0, 1$ et $n \in \mathbb{N}$, sont égaux à ceux de $\{P_{in}\}$. (voir graphe 4.1. pour l'approximation de P_{0n}).

Pour démontrer la performance de l'estimation de second ordre, on introduit dans la dernière colonne de la table 2, l'erreur relative $E_n = \left| \hat{P}_{0n}^2 / P_{0n} - 1 \right|$ en utilisant la séquence $\{\hat{P}_{0n}^2\}$, plutôt que $\{P_{0n}\}$. Remarquons que dans la table 3, le mode diffère d'une unité, et ceci se voit bien dans le graphe 4.2. D'une manière générale, la performance de $\{\hat{P}_{in}^2\}$, se détériore lorsque θ décroît et/ou ρ ($\rho = \lambda E(S)$), augmente.

4.2.2 Service de loi gamma

Table 4 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels tels que $\lambda = 1$, $E(S) = 0.33$ et $\theta = 2$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.5376	0.1999	0.5333	0.2105	0.5365	0.2013	0.002
1	0.0999	0.0900	0.1067	0.0776	0.1024	0.0870	0.025
2	0.0225	0.0307	0.0213	0.0286	0.0213	0.0319	0.053
3	0.0051	0.0092	0.0043	0.0105	0.0048	0.0099	0.059
4	0.0012	0.0026	0.0009	0.0039	0.0012	0.0026	0.023
5	0.0003	0.0007	0.0002	0.0014	0.0003	0.0006	0.081
6	0.0001	0.0002	0.0000	0.0005	0.0001	0.0001	0.001
E.S	1.3982		1.4009		1.3985		

Table 5 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels tels que $\lambda = 2$, $E(S) = 0.25$ et $\theta = 1.2$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.1406	0.0827	0.1875	0.1500	0.1514	0.0982	0.076
1	0.1378	0.1166	0.1172	0.1050	0.1248	0.1027	0.094
2	0.0972	0.1059	0.0732	0.0735	0.0922	0.0948	0.051
3	0.0589	0.0781	0.0458	0.0515	0.0610	0.0772	0.037
4	0.0326	0.0508	0.0286	0.0360	0.0362	0.0555	0.110
5	0.0169	0.0303	0.0179	0.0252	0.0192	0.0353	0.136
6	0.0084	0.0170	0.0112	0.0176	0.0091	0.0198	0.083
7	0.0040	0.0091	0.0070	0.0124	0.0039	0.0098	0.025
8	0.0019	0.0047	0.0044	0.0086	0.0015	0.0043	0.210
9	0.0008	0.0023	0.0027	0.0061	0.0005	0.0016	0.375
10	0.0004	0.0011	0.0017	0.0042	0.0002	0.0006	0.500
11	0.0001	0.0005	0.0011	0.0030	0.0000	0.0002	0.529
E.S	2.5286		2.5932		2.5359		

Table 6 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels tels que $\lambda = 2$, $E(S) = 0.2$ et $\theta = 1$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.2000	0.0912	0.2571	0.1440	0.2107	0.1013	0.053
1	0.1823	0.1130	0.1469	0.0922	0.1661	0.1001	0.089
2	0.1130	0.0876	0.0840	0.0590	0.1112	0.0827	0.016
3	0.0584	0.0540	0.0480	0.0377	0.0631	0.0572	0.080
4	0.0270	0.0290	0.0274	0.0242	0.0304	0.0331	0.126
5	0.0116	0.0141	0.0157	0.0155	0.0124	0.0161	0.069
6	0.0047	0.0064	0.0090	0.0099	0.0043	0.0065	0.085
7	0.0018	0.0027	0.0051	0.0063	0.0013	0.0022	0.278
8	0.0007	0.0011	0.0029	0.0041	0.0003	0.0006	0.571
9	0.0002	0.0004	0.0017	0.0026	0.0001	0.0001	0.500
E.S	2.3002		2.3546		2.3051		

Table 7 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels tels que $\lambda = 2.4$, $E(S) = 0.25$ et $\theta = 1.2$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.0510	0.0372	0.1000	0.1200	0.0644	0.0580	0.262
1	0.0743	0.0742	0.0750	0.0960	0.0669	0.0699	0.099
2	0.0742	0.0933	0.0563	0.0768	0.0643	0.0780	0.133
3	0.0622	0.0939	0.0422	0.0614	0.0573	0.0805	0.078
4	0.0469	0.0826	0.0316	0.0492	0.0473	0.0769	0.008
5	0.0330	0.0663	0.0237	0.0393	0.0361	0.0679	0.094
6	0.0221	0.0497	0.0178	0.0315	0.0256	0.0554	0.158
7	0.0142	0.0355	0.0133	0.0252	0.0168	0.0419	0.183
8	0.0089	0.0243	0.0100	0.0201	0.0102	0.0293	0.146
9	0.0054	0.0161	0.0075	0.0161	0.0057	0.0189	0.055
10	0.0032	0.0104	0.0056	0.0129	0.0030	0.0113	0.062
11	0.0018	0.0065	0.0042	0.0103	0.0014	0.0063	0.222
12	0.0010	0.0040	0.0032	0.0082	0.0006	0.0032	0.400
13	0.0006	0.0024	0.0024	0.0066	0.0003	0.0015	0.500
14	0.0003	0.0014	0.0018	0.0053	0.0001	0.0007	0.667
15	0.0002	0.0008	0.0013	0.0042	0.0000	0.0003	0.840
E.S	2.9420		3.0558		2.9593		

Dans les tables 4, 5, 6 et 7, les temps de service suivent des distributions d'Erlang (E₃). Les paramètres du modèle, ont été choisi pour avoir les différentes situations par rapport aux modes n_i^* , $i = 0, 1$, des distributions d'états de la file M/E₃/1 avec rappels. Remarquons que lorsque θ décroît et/ou ρ , augmente, les modes de $\{\hat{P}_{in}^2\}$,

$n \in \mathbb{N}$, différent d'une unité, autrement ces modes coïncident généralement avec les modes de $\{P_{in}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ceci se voit bien dans le graphe 4.3, pour la distribution $P_{1n}, n \in \mathbb{N}$.

4.2.3 Service de loi hyper-exponentielle

Table 8 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/H₂/1 avec rappels tels que $\lambda = 2$, $E(S) = 0.2$ et $\theta = 1$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.5300	0.1247	0.5294	0.1343	0.5309	0.1273	0.061
1	0.1559	0.0715	0.1557	0.0622	0.1541	0.0671	0.011
2	0.0447	0.0319	0.0458	0.0288	0.0454	0.0324	0.015
3	0.0133	0.0132	0.0135	0.0133	0.0136	0.0143	0.022
4	0.0041	0.0053	0.0040	0.0062	0.0041	0.0058	0.002
5	0.0013	0.0021	0.0012	0.0028	0.0013	0.0021	0.015
6	0.0004	0.0008	0.0003	0.0013	0.0004	0.0007	0.069
7	0.0001	0.0003	0.0001	0.0006	0.0001	0.0002	0.071
E.S	1.5254		1.5272		1.5258		

Table 9 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/H₂/1 avec rappels tels que $\lambda = 1.6$, $E(S) = 0.25$ et $\theta = 0.3$.

n	P_{0n}	P_{1n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	E_n
0	0.0453	0.0167	0.1317	0.0735	0.0688	0.0309	0.518
1	0.0889	0.0397	0.1028	0.0600	0.0810	0.0393	0.088
2	0.1059	0.0559	0.0802	0.0490	0.0873	0.0462	0.175
3	0.0995	0.0609	0.0626	0.0400	0.0864	0.0502	0.131
4	0.0813	0.0568	0.0489	0.0326	0.0783	0.0506	0.037
5	0.0606	0.0477	0.0381	0.0266	0.0651	0.0471	0.074
6	0.0425	0.0373	0.0298	0.0217	0.0497	0.0406	0.169
7	0.0284	0.0273	0.0232	0.0177	0.0347	0.0324	0.221
8	0.0183	0.0195	0.0181	0.0145	0.0223	0.0239	0.218
9	0.0115	0.0133	0.0142	0.0118	0.0131	0.0163	0.139
10	0.0071	0.0089	0.0110	0.0097	0.0071	0.0103	0.001
11	0.0043	0.0058	0.0086	0.0079	0.0035	0.0060	0.186
12	0.0025	0.0037	0.0067	0.0064	0.0016	0.0033	0.360
13	0.0015	0.0023	0.0053	0.0053	0.0007	0.0016	0.533
14	0.0009	0.0014	0.0041	0.0043	0.0003	0.0008	0.666
E.S	2.9829		3.0796		3.0067		

Dans les tables 8 et 9 on a considéré une file M/H₂/1 avec rappels, telle que la distribution de service est hyper-exponentielle de densité

$f(x) = 0.5\exp(-2x) + 4.5\exp(-6x)$. La performance de $\{\hat{P}_{in}^2\}$ est très bonne. Néanmoins, lorsque θ décroît et/ou ρ , augmente, les modes de $\{\hat{P}_{in}^2\}$, $n \in \mathbb{N}$, diffèrent d'une unité, autrement ces modes coïncident généralement avec les modes de $\{P_{in}\}$, $n \in \mathbb{N}$. (voir graphe 4.4).

4.3 Système M/G/1 avec rappels et serveur non fiable

Dans cette partie nous allons voir quelques exemples de comparaison entre les résultats exacts et approximatifs de la distribution d'états du système M/G/1 avec rappels et pannes du serveur. Pour cela, nous avons testé pour différentes lois de services et lois de pannes, la performance de l'approximation par maximisation d'entropie du système. En faisant varier les différents paramètres du modèle, nous avons obtenu les résultats illustrés dans les tables ci-après.

4.3.1 Service de loi exponentielle

Pannes de loi exponentielle

Notons par η_1 et μ_1 , les taux de réparations passive et active respectivement.

Table 1 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/M/1 avec rappels et pannes tels que
 $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 4, \eta = 2, \mu = 16, \eta_1 = 2, \mu_1 = 12$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.2692	0.0291	0.1794	0.0179	0.3420	0.0255	0.2479	0.0252	0.3446	0.0252	0.2364	0.0182
1	0.1149	0.0194	0.1364	0.0313	0.0823	0.0102	0.1114	0.0140	0.0793	0.0105	0.1199	0.0178
2	0.0429	0.0098	0.0740	0.0204	0.0198	0.0041	0.0501	0.0078	0.0194	0.0042	0.0558	0.0122
3	0.0152	0.0043	0.0348	0.0103	0.0048	0.0016	0.0225	0.0043	0.0050	0.0016	0.0239	0.0059
4	0.0052	0.0018	0.0151	0.0046	0.0011	0.0007	0.0101	0.0024	0.0014	0.0006	0.0094	0.0020
5	0.0018	0.0007	0.0062	0.0019	0.0003	0.0003	0.0046	0.0013	0.0004	0.0002	0.0034	0.0005
6	0.0006	0.0002	0.0024	0.0007	0.0001	0.0001	0.0020	0.0007	0.0001	0.0001	0.0011	0.0001
E.S	2.0036				2.0412				2.0336			

Table 2 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/M/1 avec rappels et pannes tels que
 $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 4, \eta = 4, \mu = 10, \eta_1 = 6, \mu_1 = 6$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.3371	0.0431	0.1926	0.0308	0.4050	0.0386	0.2384	0.0443	0.4070	0.0378	0.2340	0.0302
1	0.1205	0.0240	0.0964	0.0523	0.0825	0.0125	0.0708	0.0237	0.0798	0.0134	0.0760	0.0333
2	0.0366	0.0097	0.0347	0.0316	0.0168	0.0041	0.0210	0.0127	0.0167	0.0043	0.0219	0.0215
3	0.0104	0.0034	0.0109	0.0139	0.0034	0.0013	0.0062	0.0068	0.0038	0.0012	0.0056	0.0082
4	0.0028	0.0011	0.0032	0.0052	0.0007	0.0004	0.0019	0.0036	0.0009	0.0003	0.0013	0.0018
5	0.0007	0.0003	0.0009	0.0018	0.0001	0.0001	0.0006	0.0019	0.0002	0.0001	0.0003	0.0002
E.S	1.8895				1.9087				1.8970			

Table 3 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/M/1 avec rappels et pannes tels que
 $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 0.5, \eta = 4, \mu = 6, \eta_1 = 6, \mu_1 = 8$ et $c = 0.4$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.1288	0.0148	0.0368	0.0059	0.1779	0.0235	0.1123	0.0151	0.1068	0.0130	0.0627	0.0061
1	0.1860	0.0235	0.0584	0.0140	0.1174	0.0160	0.0761	0.0110	0.1262	0.0164	0.0786	0.0095
2	0.1525	0.0210	0.0519	0.0162	0.0774	0.0109	0.0516	0.0080	0.1177	0.0164	0.0781	0.0116
3	0.0932	0.0139	0.0340	0.0129	0.0511	0.0074	0.0350	0.0058	0.0868	0.0130	0.0614	0.0112
4	0.0471	0.0075	0.0183	0.0081	0.0337	0.0050	0.0237	0.0042	0.0505	0.0082	0.0383	0.0084
5	0.0209	0.0036	0.0086	0.0043	0.0222	0.0034	0.0161	0.0031	0.0232	0.0041	0.0190	0.0050
6	0.0083	0.0015	0.0036	0.0020	0.0147	0.0023	0.0109	0.0022	0.0084	0.0017	0.0074	0.0023
7	0.0030	0.0006	0.0014	0.0008	0.0097	0.0016	0.0074	0.0016	0.0024	0.0005	0.0023	0.0008
8	0.0010	0.0002	0.0005	0.0003	0.0064	0.0011	0.0050	0.0012	0.0005	0.0001	0.0006	0.0002
E.S	2.7504				2.9682				2.8547			

Table 4 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/M/1 avec rappels et pannes tels que
 $\lambda = 2, \nu = 8, \theta = 12, \eta = 2, \mu = 4, \eta_1 = 3, \mu_1 = 6$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.3290	0.0969	0.1316	0.0242	0.3298	0.0927	0.1441	0.0434	0.3325	0.0909	0.1396	0.0294
1	0.0583	0.0550	0.0759	0.0440	0.0697	0.0454	0.0696	0.0278	0.0668	0.0464	0.0723	0.0304
2	0.0191	0.0288	0.0380	0.0319	0.0147	0.0223	0.0336	0.0179	0.0144	0.0232	0.0360	0.0258
3	0.0070	0.0145	0.0180	0.0188	0.0031	0.0109	0.0163	0.0115	0.0033	0.0113	0.0172	0.0179
4	0.0027	0.0071	0.0083	0.0101	0.0007	0.0054	0.0079	0.0074	0.0008	0.0054	0.0079	0.0103
5	0.0010	0.0034	0.0037	0.0051	0.0001	0.0026	0.0038	0.0047	0.0002	0.0025	0.0035	0.0048
6	0.0004	0.0016	0.0017	0.0025	0.0000	0.0013	0.0018	0.0030	0.0001	0.0012	0.0015	0.0019
7	0.0001	0.0007	0.0007	0.0012	0.0000	0.0006	0.0009	0.0020	0.0000	0.0005	0.0006	0.0006
8	0.0000	0.0003	0.0003	0.0005	0.0000	0.0003	0.0004	0.0013	0.0000	0.0002	0.0002	0.0002
E.S	2.3589				2.4016				2.3885			

Table 5 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/M/1 avec rappels et pannes tels que
 $\lambda = 2, \nu = 8, \theta = 2, \eta = 2, \mu = 4, \eta_1 = 3, \mu_1 = 6$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.0992	0.0292	0.0396	0.0073	0.1603	0.0550	0.0851	0.0293	0.1393	0.0399	0.0612	0.0143
1	0.1054	0.0425	0.0580	0.0197	0.0989	0.0384	0.0591	0.0222	0.1034	0.0378	0.0584	0.0181
2	0.0814	0.0411	0.0557	0.0258	0.0610	0.0268	0.0411	0.0168	0.0715	0.0326	0.0507	0.0203
3	0.0546	0.0329	0.0441	0.0249	0.0376	0.0187	0.0285	0.0128	0.0461	0.0258	0.0399	0.0199
4	0.0337	0.0236	0.0311	0.0204	0.0232	0.0130	0.0198	0.0097	0.0276	0.0186	0.0285	0.0172
5	0.0197	0.0157	0.0203	0.0149	0.0143	0.0091	0.0138	0.0073	0.0154	0.0122	0.0185	0.0131
6	0.0111	0.0099	0.0126	0.0101	0.0088	0.0063	0.0096	0.0056	0.0080	0.0073	0.0109	0.0087
7	0.0060	0.0060	0.0074	0.0065	0.0054	0.0044	0.0066	0.0042	0.0039	0.0040	0.0058	0.0051
8	0.0032	0.0035	0.0042	0.0040	0.0034	0.0031	0.0046	0.0032	0.0017	0.0020	0.0028	0.0026
9	0.0017	0.0019	0.0024	0.0023	0.0021	0.0021	0.0032	0.0024	0.0007	0.0009	0.0012	0.0012
10	0.0008	0.0011	0.0013	0.0013	0.0013	0.0015	0.0022	0.0018	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005
11	0.0004	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0010	0.0015	0.0014	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0011	0.0011	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001
E.S	3.1558				3.2196				3.1692			

La comparaison entre la valeur exacte et l'approximation par maximisation d'entropie à un seul moment d'une file M/M/1 avec rappels et pannes, telles que les lois de pannes passives et actives sont exponentielles de taux respectifs η_1 et μ_1 , nous montre que l'approximation à un seul moment est décroissante (voir $\{P_{in}\}$ et $\{\hat{P}_{in}^1\}$ des tables 1-5), c'est-à-dire elle possède des modes en $n_0^* = n_1^* = n_2^* = n_3^* = 0$.

Cette situation se présente pour certaines distributions d'états exacts (voir graphe 4.5). Tandis que la distribution d'états stables de la file M/M/1 avec rappels et pannes possède des modes en un entier n arbitraire, par exemple dans la table 2, $n_0^* = n_1^* = n_2^* = 0$ et $n_3^* = 1$, (voir $\{P_{in}\}$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, de la table 2). L'approximation de second ordre nous permet d'avoir une très bonne amélioration (voir les résultats des tables 2, 3 et 4), du moment que les modes de l'approximation, $\{\hat{P}_{in}^2\}$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, sont égaux à ceux de $\{P_{in}\}$ (voir graphe 4.6). Remarquons dans la table 5, lorsque θ décroît, les modes de $\{\hat{P}_{in}^2\}$, $n \in \mathbb{N}$, diffèrent d'une ou deux unités par rapport à ceux de la distribution d'états exacts $\{P_{in}\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pannes de loi gamma

Table 6 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels et pannes tels que $\lambda = 1, \nu = 4, \theta = 12, \eta = 2, \mu = 6, \eta_1 = 2, \mu_1 = 8$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.1784	0.0591	0.1982	0.0372	0.1928	0.0501	0.2427	0.0566	0.1946	0.0475	0.2296	0.0381
1	0.0393	0.0436	0.1362	0.0707	0.0414	0.0263	0.1228	0.0363	0.0397	0.0276	0.1300	0.0398
2	0.0158	0.0276	0.0777	0.0563	0.0089	0.0138	0.0621	0.0233	0.0087	0.0152	0.0691	0.0339
3	0.0067	0.0159	0.0406	0.0364	0.0019	0.0072	0.0314	0.0149	0.0020	0.0079	0.0345	0.0235
4	0.0029	0.0086	0.0202	0.0212	0.0004	0.0038	0.0159	0.0096	0.0005	0.0039	0.0162	0.0133
5	0.0012	0.0044	0.0097	0.0116	0.0001	0.0020	0.0080	0.0061	0.0001	0.0018	0.0071	0.0061
6	0.0005	0.0022	0.0045	0.0060	0.0000	0.0010	0.0041	0.0039	0.0000	0.0008	0.0029	0.0023
E.S	2.4818				2.5143				2.4964			

Table 7 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels et pannes tels que $\lambda = 1, \nu = 6, \theta = 2, \eta = 1, \mu = 2, \eta_1 = 2, \mu_1 = 4$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.1694	0.0397	0.0941	0.0143	0.1876	0.0497	0.1356	0.0375	0.1867	0.0427	0.1122	0.0214
1	0.0939	0.0373	0.0961	0.0318	0.0916	0.0312	0.0854	0.0269	0.0921	0.0325	0.0898	0.0251
2	0.0506	0.0274	0.0713	0.0324	0.0447	0.0196	0.0539	0.0194	0.0452	0.0230	0.0656	0.0254
3	0.0264	0.0178	0.0459	0.0254	0.0219	0.0123	0.0339	0.0139	0.0221	0.0152	0.0438	0.0223
4	0.0113	0.0108	0.0271	0.0174	0.0107	0.0077	0.0214	0.0100	0.0107	0.0093	0.0268	0.0169
5	0.0066	0.0062	0.0152	0.0109	0.0052	0.0048	0.0135	0.0072	0.0052	0.0053	0.0149	0.0110
6	0.0032	0.0034	0.0081	0.0064	0.0025	0.0030	0.0085	0.0052	0.0025	0.0028	0.0076	0.0062
7	0.0015	0.0018	0.0042	0.0036	0.0012	0.0019	0.0054	0.0037	0.0012	0.0014	0.0035	0.0031
8	0.0007	0.0009	0.0021	0.0020	0.0006	0.0012	0.0034	0.0027	0.0006	0.0006	0.0015	0.0013
9	0.0003	0.0004	0.0010	0.0010	0.0003	0.0007	0.0021	0.0019	0.0003	0.0003	0.0006	0.0005
10	0.0001	0.0002	0.0005	0.0005	0.0001	0.0005	0.0013	0.0014	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001
E.S	2.9056				2.9390				2.9128			

Table 8 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels et pannes tels que $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 4, \eta = 2, \mu = 16, \eta_1 = 2, \mu_1 = 12$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.1175	0.0167	0.1306	0.0198	0.1697	0.0184	0.2337	0.0387	0.1726	0.0168	0.2041	0.0255
1	0.0752	0.0174	0.1446	0.0427	0.0673	0.0104	0.1366	0.0255	0.0652	0.0111	0.1464	0.0270
2	0.0430	0.0134	0.1130	0.0414	0.0267	0.0059	0.0799	0.0168	0.0255	0.0068	0.0959	0.0239
3	0.0229	0.0089	0.0751	0.0311	0.0106	0.0034	0.0467	0.0111	0.0103	0.0039	0.0574	0.0175
4	0.0116	0.0054	0.0454	0.0204	0.0042	0.0019	0.0273	0.0073	0.0043	0.0021	0.0314	0.0107
5	0.0057	0.0030	0.0257	0.0123	0.0017	0.0011	0.0160	0.0048	0.0019	0.0010	0.0156	0.0054
6	0.0027	0.0016	0.0138	0.0069	0.0007	0.0006	0.0093	0.0032	0.0008	0.0005	0.0071	0.0023
7	0.0012	0.0008	0.0072	0.0037	0.0003	0.0003	0.0055	0.0021	0.0004	0.0002	0.0030	0.0008
8	0.0005	0.0004	0.0036	0.0019	0.0001	0.0002	0.0032	0.0014	0.0002	0.0001	0.0011	0.0002
E.S	2.5404				2.5754				2.5542			

La comparaison entre la valeur exacte et l'approximation par maximisation d'entropie d'une file M/M/1 avec rappels et pannes, telles que les distributions de pannes passives et actives suivent des lois d'Erlang (E_2), de paramètres η_1 et μ_1 respectivement, mène aux résultats illustrés dans les tables 6, 7 et 8. L'approximation de second ordre nous donne une bonne approximation (voir graphe 4.7), et les modes de $\{\hat{P}_{in}^2\}$, coïncident généralement avec ceux de $\{P_{in}\}$ ou diffère d'une unité (voir les tables 7 et 8).

c) Pannes de loi hyper-exponentielle

Table 9 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/M/1 avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 2, \eta = 2, \mu = 4, E(D_i) = E(D_b) = 0.25$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.3286	0.0472	0.1252	0.0180	0.3805	0.0493	0.1546	0.0335	0.3824	0.0476	0.1479	0.0223
1	0.1423	0.0305	0.0825	0.0336	0.1176	0.0214	0.0678	0.0206	0.1157	0.0226	0.0730	0.0240
2	0.0519	0.0147	0.0395	0.0250	0.0364	0.0093	0.0297	0.0127	0.0358	0.0101	0.0330	0.0197
3	0.0181	0.0063	0.0168	0.0140	0.0112	0.0040	0.0130	0.0078	0.0113	0.0042	0.0137	0.0123
4	0.0062	0.0026	0.0068	0.0069	0.0035	0.0017	0.0057	0.0048	0.0037	0.0016	0.0052	0.0059
5	0.0021	0.0010	0.0026	0.0031	0.0011	0.0008	0.0025	0.0029	0.0012	0.0006	0.0018	0.0021
6	0.0007	0.0004	0.0010	0.0014	0.0003	0.0003	0.0011	0.0018	0.0004	0.0002	0.0006	0.0006
7	0.0002	0.0001	0.0004	0.0006	0.0001	0.0001	0.0005	0.0011	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001
E.S	2.1713				2.1925				2.1832			

Nous avons approximé dans la table 9, la file M/M/1 avec rappels soumise à des pannes, et nous avons pris une loi de pannes active et passive hyper-exponentielle de densité $f(x) = 0.5exp(-2x) + 4.5exp(-6x)$. En comparant les modes des distributions $\{\hat{P}_{in}^1\}$ et $\{\hat{P}_{in}^2\}$ par rapport à ceux de $\{P_{in}\}$, nous remarquons que l'approximation de second ordre a apportée une bonne amélioration par rapport à celle de premier ordre, ce qui est bien illustré dans le graphe 4.8, pour la distribution d'états du système P_{3n} .

4.3.2 Service de loi gamma

Pannes de loi exponentielle

Table 10 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 4, \eta = 1, \mu = 4, \eta_1 = 2, \mu_1 = 6$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.2540	0.1047	0.0846	0.0299	0.3336	0.0992	0.1219	0.0492	0.3370	0.0948	0.1173	0.0334
1	0.1071	0.0909	0.0639	0.0601	0.0876	0.0482	0.0562	0.0304	0.0841	0.0509	0.0593	0.0350
2	0.0496	0.0611	0.0378	0.0520	0.0230	0.0234	0.0259	0.0188	0.0222	0.0257	0.0282	0.0285
3	0.0227	0.0367	0.0202	0.0354	0.0060	0.0114	0.0120	0.0116	0.0062	0.0123	0.0127	0.0181
4	0.0103	0.0205	0.0102	0.0214	0.0016	0.0055	0.0055	0.0071	0.0019	0.0055	0.0053	0.0089
5	0.0046	0.0109	0.0049	0.0120	0.0004	0.0027	0.0025	0.0044	0.0006	0.0023	0.0021	0.0034
6	0.0020	0.0056	0.0023	0.0064	0.0001	0.0013	0.0012	0.0027	0.0002	0.0009	0.0008	0.0010
7	0.0009	0.0028	0.0010	0.0033	0.0000	0.0006	0.0005	0.0017	0.0001	0.0003	0.0003	0.0002
E.S	2.3811				2.4017				2.3876			

Table 11 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 10, \eta = 0.5, \mu = 1.2, \eta_1 = 1, \mu_1 = 2$ et $c = 0.6$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.2452	0.1292	0.0613	0.0206	0.2297	0.1267	0.0650	0.0541	0.2330	0.1242	0.0636	0.0352
1	0.0304	0.0867	0.0382	0.0518	0.0534	0.0801	0.0368	0.0399	0.0506	0.0804	0.0372	0.0364
2	0.0119	0.0575	0.0221	0.0472	0.0124	0.0506	0.0208	0.0295	0.0118	0.0516	0.0215	0.0346
3	0.0056	0.0379	0.0124	0.0356	0.0029	0.0320	0.0118	0.0218	0.0029	0.0330	0.0123	0.0302
4	0.0028	0.0247	0.0069	0.0249	0.0007	0.0202	0.0067	0.0161	0.0008	0.0209	0.0069	0.0243
5	0.0014	0.0159	0.0038	0.0169	0.0002	0.0128	0.0038	0.0119	0.0002	0.0131	0.0038	0.0179
6	0.0008	0.0101	0.0021	0.0110	0.0000	0.0081	0.0021	0.0088	0.0001	0.0082	0.0021	0.0121
7	0.0004	0.0064	0.0011	0.0071	0.0000	0.0051	0.0012	0.0065	0.0000	0.0051	0.0011	0.0075
E.S	2.8272				2.8515				2.8349			

Table 12 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, \nu = 10, \theta = 4, \eta = 0.5, \mu = 1.2, \eta_1 = 1, \mu_1 = 2$ et $c = 0.6$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.2508	0.1039	0.0627	0.0166	0.2377	0.1084	0.0722	0.0456	0.2426	0.1041	0.0672	0.0281
1	0.0645	0.0730	0.0474	0.0421	0.0839	0.0665	0.0438	0.0333	0.0803	0.0673	0.0449	0.0306
2	0.0269	0.0471	0.0404	0.0391	0.0296	0.0408	0.0266	0.0243	0.0278	0.0428	0.0290	0.0298
3	0.0125	0.0296	0.0183	0.0290	0.0104	0.0251	0.0161	0.0177	0.0101	0.0267	0.0180	0.0261
4	0.0061	0.0182	0.0107	0.0197	0.0037	0.0154	0.0098	0.0129	0.0038	0.0164	0.0108	0.0205
5	0.0030	0.0110	0.0061	0.0127	0.0013	0.0094	0.0060	0.0094	0.0015	0.0099	0.0063	0.0144
6	0.0015	0.0066	0.0034	0.0079	0.0005	0.0058	0.0036	0.0068	0.0006	0.0058	0.0035	0.0091
7	0.0008	0.0038	0.0019	0.0048	0.0002	0.0036	0.0022	0.0050	0.0003	0.0034	0.0019	0.0052
8	0.0004	0.0022	0.0010	0.0029	0.0001	0.0022	0.0013	0.0036	0.0001	0.0019	0.0010	0.0026
9	0.0002	0.0013	0.0005	0.0017	0.0000	0.0013	0.0008	0.0027	0.0001	0.0011	0.0005	0.0012
10	0.0001	0.0007	0.0003	0.0010	0.0000	0.0008	0.0005	0.0019	0.0000	0.0006	0.0002	0.0005
E.S	2.8354				2.8535				2.8440			

Dans le cas d'une file M/E₃/1 avec rappels et pannes passive et active du serveur, de lois exponentielles de taux η_1 et μ_1 respectivement, nous avons testé la performance des approximations pour différents paramètres. Les résultats des approximations sont illustrés dans les tables 10,11 et 12. On remarque que l'approximation de second ordre est meilleure (voir graphe 4.9 pour la distribution P_{3n}).

Pannes de loi gamma

Table 13 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, \nu = 12, \theta = 16, \eta = 1, \mu = 4, \eta_1 = 1, \mu_1 = 3$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.0991	0.0452	0.0744	0.0395	0.1014	0.0418	0.0983	0.0879	0.1041	0.0377	0.0921	0.0565
1	0.0156	0.0435	0.0612	0.0917	0.0294	0.0306	0.0645	0.0693	0.0276	0.0299	0.0648	0.0580
2	0.0088	0.0414	0.0454	0.1067	0.0085	0.0224	0.0423	0.0547	0.0078	0.0233	0.0447	0.0567
3	0.0057	0.0375	0.0322	0.1061	0.0025	0.0164	0.0278	0.0431	0.0023	0.0179	0.0302	0.0527
4	0.0039	0.0327	0.0223	0.0980	0.0007	0.0120	0.0182	0.0340	0.0007	0.0135	0.0200	0.0467
5	0.0027	0.0276	0.0153	0.0864	0.0002	0.0088	0.0120	0.0268	0.0002	0.0100	0.0130	0.0394
6	0.0019	0.0229	0.0105	0.0738	0.0001	0.0064	0.0078	0.0211	0.0001	0.0073	0.0083	0.0317
7	0.0013	0.0187	0.0072	0.0617	0.0000	0.0047	0.0051	0.0166	0.0000	0.0052	0.0051	0.0242
E.S	3.2531				3.2713				3.2616			

Dans le cas où, les pannes sont distribuées selon une loi d'Erlang (E_2) de taux η_1 , pour les pannes passives et μ_1 pour les pannes actives, nous avons les approximations de premier et de second ordre données dans la table 13.

Pannes de loi hyper-exponentielle

Table 14 : Comparaison entre résultats exacts et approximatifs d'une file M/E₃/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, \nu = 6, \theta = 4, \eta = 0.2, \mu = 1.5, E(D_i) = E(D_b) = 0.25$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.3017	0.1595	0.0115	0.0228	0.3117	0.1629	0.0126	0.0453	0.3165	0.1565	0.0128	0.0310
1	0.0783	0.1223	0.0055	0.0454	0.0927	0.0946	0.0054	0.0312	0.0886	0.0965	0.0053	0.0311
2	0.0331	0.0809	0.0026	0.0395	0.0276	0.0549	0.0023	0.0215	0.0262	0.0581	0.0023	0.0277
3	0.0153	0.0508	0.0012	0.0282	0.0082	0.0319	0.0010	0.0148	0.0082	0.0342	0.0010	0.0218
4	0.0074	0.0311	0.0006	0.0185	0.0024	0.0185	0.0004	0.0102	0.0027	0.0196	0.0004	0.0152
5	0.0036	0.0188	0.0003	0.0117	0.0007	0.0108	0.0002	0.0070	0.0009	0.0110	0.0002	0.0094
6	0.0018	0.0112	0.0001	0.0072	0.0002	0.0062	0.0001	0.0049	0.0003	0.0060	0.0001	0.0052
7	0.0009	0.0066	0.0000	0.0043	0.0001	0.0036	0.0000	0.0033	0.0001	0.0032	0.0000	0.0025
E.S	2.4026				2.4237				2.4093			

Pour une loi de pannes hyper-exponentielle de densité $f(x) = 0.5exp(-2x) + 4.5exp(-6x)$, la performance des deux approximations est bien illustrée dans le graphe 4.10 pour la distribution P_{1n} , qui est décroissante. Cependant, nous remarquons bien dans la table 14 que la performance de l'approximation de second ordre est meilleure que celle de premier ordre.

4.3.3 Service de loi hyper-exponentielle

Pannes de loi exponentielle

Table 15 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/H₂/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, E(S) = 2/3, \theta = 6, \eta = 0.5, \mu = 1.6, \eta_1 = 2, \mu_1 = 6$ et $c = 0.6$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.2956	0.1597	0.0492	0.0146	0.3062	0.1574	0.0557	0.0320	0.3101	0.1491	0.0553	0.0210
1	0.0628	0.1277	0.0268	0.0356	0.0769	0.0932	0.0253	0.0220	0.0733	0.0954	0.0256	0.0220
2	0.0260	0.0890	0.0113	0.0307	0.0193	0.0552	0.0115	0.0152	0.0185	0.0593	0.0117	0.0201
3	0.0121	0.0584	0.0064	0.0219	0.0048	0.0327	0.0053	0.0105	0.0049	0.0357	0.0053	0.0160
4	0.0059	0.0370	0.0031	0.0145	0.0012	0.0194	0.0024	0.0072	0.0014	0.0209	0.0024	0.0111
5	0.0030	0.0229	0.0015	0.0092	0.0003	0.0115	0.0011	0.0050	0.0004	0.0119	0.0011	0.0067
6	0.0015	0.0140	0.0007	0.0057	0.0001	0.0068	0.0005	0.0034	0.0001	0.0066	0.0005	0.0035
7	0.0008	0.0085	0.0003	0.0035	0.0000	0.0040	0.0002	0.0024	0.0000	0.0035	0.0002	0.0016
E.S	2.4314				2.4817				2.4683			

Table 16 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file
M/H₂/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, E(S) = 2/3, \theta = 1, \eta = 0.5, \mu = 1, \eta_1 = 2, \mu_1 = 3$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.0444	0.0262	0.0074	0.0032	0.0655	0.0773	0.0147	0.0227	0.0527	0.0437	0.0102	0.0096
1	0.0500	0.0464	0.0108	0.0099	0.0504	0.0650	0.0117	0.0195	0.0467	0.0469	0.0100	0.0114
2	0.0451	0.0567	0.0111	0.0153	0.0388	0.0545	0.0093	0.0168	0.0403	0.0487	0.0094	0.0130
3	0.0372	0.0588	0.0099	0.0182	0.0299	0.0458	0.0073	0.0144	0.0339	0.0488	0.0085	0.0142
4	0.0291	0.0555	0.0081	0.0188	0.0231	0.0385	0.0058	0.0124	0.0278	0.0474	0.0075	0.0149
5	0.0220	0.0492	0.0063	0.0178	0.0178	0.0323	0.0046	0.0106	0.0222	0.0446	0.0063	0.0151
6	0.0163	0.0418	0.0048	0.0158	0.0137	0.0271	0.0037	0.0091	0.0173	0.0405	0.0052	0.0146
7	0.0119	0.0343	0.0036	0.0135	0.0105	0.0228	0.0029	0.0078	0.0131	0.0357	0.0041	0.0136
8	0.0085	0.0274	0.0026	0.0111	0.0081	0.0191	0.0023	0.0067	0.0097	0.0304	0.0031	0.0122
9	0.0061	0.0215	0.0019	0.0089	0.0063	0.0161	0.0018	0.0058	0.0070	0.0250	0.0023	0.0105
10	0.0043	0.0166	0.0013	0.0070	0.0048	0.0135	0.0015	0.0050	0.0049	0.0200	0.0016	0.0086
11	0.0030	0.0126	0.0009	0.0054	0.0037	0.0113	0.0012	0.0043	0.0034	0.0154	0.0011	0.0069
12	0.0021	0.0095	0.0007	0.0042	0.0029	0.0095	0.0009	0.0037	0.0023	0.0115	0.0007	0.0052
13	0.0014	0.0070	0.0005	0.0031	0.0022	0.0080	0.0007	0.0031	0.0015	0.0083	0.0005	0.0038
14	0.0010	0.0052	0.0003	0.0023	0.0017	0.0067	0.0006	0.0027	0.0009	0.0058	0.0003	0.0027
15	0.0007	0.0038	0.0002	0.0017	0.0013	0.0056	0.0005	0.0023	0.0006	0.0039	0.0002	0.0018
16	0.0004	0.0027	0.0001	0.0012	0.0010	0.0047	0.0004	0.0020	0.0003	0.0026	0.0001	0.0012
17	0.0003	0.0020	0.0001	0.0009	0.0008	0.0040	0.0003	0.0017	0.0002	0.0016	0.0001	0.0007
18	0.0002	0.0014	0.0000	0.0006	0.0006	0.0033	0.0002	0.0015	0.0001	0.0010	0.0000	0.0004
E.S	3.7209				3.7920				3.7474			

Dans les tables 15 et 16, nous avons présenté deux approximations par maximisation d'entropie de la distribution d'états du système M/H₂/1 avec rappels et pannes du serveur, de distribution hyper-exponentielle de densité $f(x) = (1/3)\exp(-x) + (4/3)\exp(-2x)$, et les résultats montrent que l'approximation de second ordre donne une bonne estimation de la distribution d'états du système (voir graphe 4.11).

Pannes de loi gamma

Table 17 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/H₂/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 0.5, E(S) = 2/3, \theta = 14, \eta = 0.5, \mu = 2, \eta_1 = 2, \mu_1 = 4$ et $c = 0.8$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.4141	0.1463	0.1490	0.0245	0.4357	0.0913	0.1606	0.0579	0.4363	0.0910	0.1594	0.0293
1	0.0281	0.0862	0.0532	0.1167	0.0215	0.0379	0.0481	0.0364	0.0208	0.0382	0.0494	0.0445
2	0.0095	0.0498	0.0176	0.0853	0.0011	0.0158	0.0144	0.0229	0.0011	0.0159	0.0147	0.0429
3	0.0037	0.0279	0.0058	0.0518	0.0001	0.0065	0.0043	0.0144	0.0001	0.0066	0.0042	0.0263
4	0.0015	0.0153	0.0020	0.0295	0.0000	0.0027	0.0013	0.0091	0.0000	0.0027	0.0011	0.0102
5	0.0006	0.0083	0.0007	0.0163	0.0000	0.0011	0.0004	0.0057	0.0000	0.0011	0.0003	0.0025
6	0.0003	0.0044	0.0003	0.0089	0.0000	0.0005	0.0001	0.0036	0.0000	0.0004	0.0001	0.0004
E.S	2.0015				2.0280				1.9977			

Table 18 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/H₂/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1.2, E(S) = 0.25, \theta = 8, \eta = 0.8, \mu = 3, \eta_1 = 2, \mu_1 = 4$ et $c = 0.5$.

n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.2311	0.0712	0.0938	0.0363	0.2293	0.0674	0.1107	0.0739	0.2330	0.0648	0.1048	0.0489
1	0.0436	0.0513	0.0664	0.0746	0.0618	0.0413	0.0619	0.0530	0.0588	0.0418	0.0641	0.0503
2	0.0192	0.0362	0.0403	0.0690	0.0167	0.0253	0.0346	0.0380	0.0157	0.0264	0.0377	0.0467
3	0.0095	0.0245	0.0230	0.0530	0.0045	0.0155	0.0194	0.0272	0.0045	0.0165	0.0213	0.0392
4	0.0049	0.0160	0.0126	0.0375	0.0012	0.0095	0.0108	0.0195	0.0014	0.0101	0.0116	0.0297
5	0.0025	0.0102	0.0068	0.0252	0.0003	0.0058	0.0061	0.0140	0.0004	0.0061	0.0060	0.0203
6	0.0013	0.0064	0.0036	0.0164	0.0001	0.0036	0.0034	0.0100	0.0001	0.0036	0.0030	0.0126
7	0.0007	0.0039	0.0019	0.0104	0.0000	0.0022	0.0019	0.0072	0.0001	0.0021	0.0015	0.0070
8	0.0003	0.0024	0.0010	0.0064	0.0000	0.0013	0.0011	0.0051	0.0000	0.0012	0.0007	0.0036
E.S	2.8053				2.8533				2.8309			

Dans les tables 17 et 18, nous avons pris des distributions de service de loi hyper-exponentielle (H₂) de densités respectives $f(x) = (1/3)\exp(-x) + (4/3)\exp(-2x)$ et $f(x) = 0.5\exp(-2x) + 4.5\exp(-6x)$.

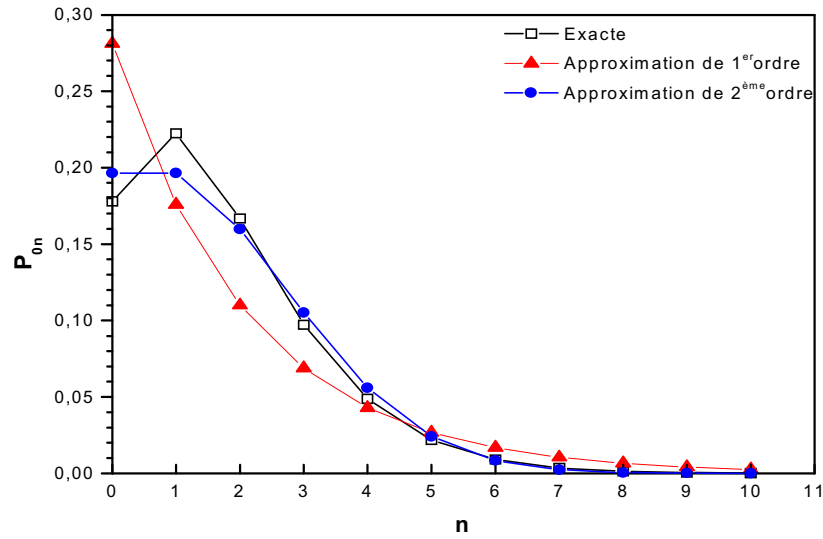
Pannes de loi hyper-exponentielle

Table 19 : Comparaison entre les résultats exacts et approximatifs d'une file M/H₂/1 avec rappels et pannes tels que,
 $\lambda = 1, E(S) = 0.25, \theta = 4, \eta = 0.5, \mu = 2, E(D_i) = E(D_b) = 0.25$ et $c = 0.8$.

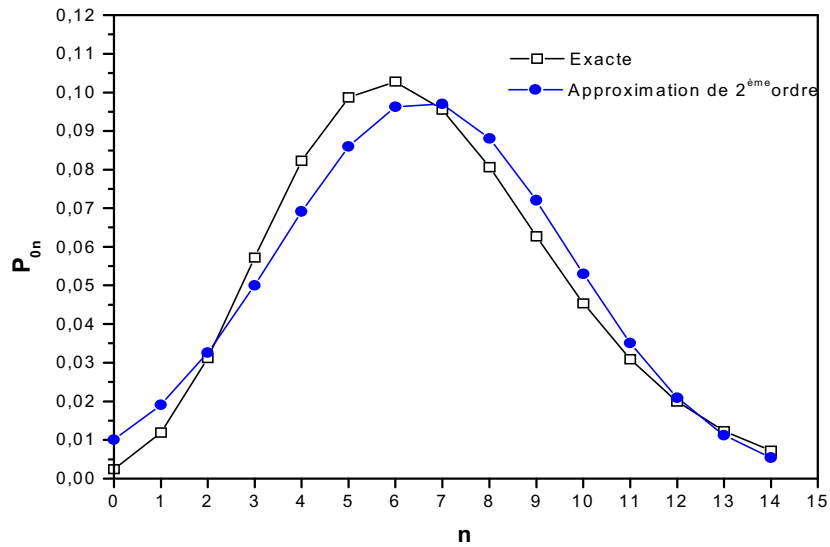
n	P_{0n}	P_{1n}	P_{2n}	P_{3n}	$\hat{P}_{0n}^1$	$\hat{P}_{1n}^1$	$\hat{P}_{2n}^1$	$\hat{P}_{3n}^1$	$\hat{P}_{0n}^2$	$\hat{P}_{1n}^2$	$\hat{P}_{2n}^2$	$\hat{P}_{3n}^2$
0	0.5195	0.1179	0.0494	0.0090	0.5473	0.1068	0.0534	0.0318	0.5502	0.1073	0.0538	0.0165
1	0.0912	0.0574	0.0198	0.0423	0.0870	0.0429	0.0183	0.0205	0.0837	0.0426	0.0180	0.0237
2	0.0264	0.0258	0.0074	0.0291	0.0138	0.0172	0.0063	0.0132	0.0138	0.0170	0.0062	0.0233
3	0.0086	0.0115	0.0027	0.0157	0.0022	0.0069	0.0022	0.0085	0.0025	0.0069	0.0022	0.0157
4	0.0030	0.0050	0.0010	0.0078	0.0003	0.0028	0.0007	0.0055	0.0005	0.0028	0.0008	0.0072
5	0.0011	0.0022	0.0004	0.0037	0.0001	0.0011	0.0003	0.0035	0.0001	0.0012	0.0003	0.0023
6	0.0004	0.0009	0.0001	0.0017	0.0000	0.0004	0.0001	0.0023	0.0000	0.0005	0.0001	0.0005
E.S	1.7558				1.7889				1.7712			

Dans la table 19 nous avons approximé par la méthode du maximum d'entropie, la file M/H₂/1 avec rappels et pannes du serveur, telle que la loi de service et pannes est hyper-exponentielle de densité $f(x) = 0.5\exp(-2x) + 4.5\exp(-6x)$. La performance de l'approximation de second ordre se voit bien dans le graphe 4.13.

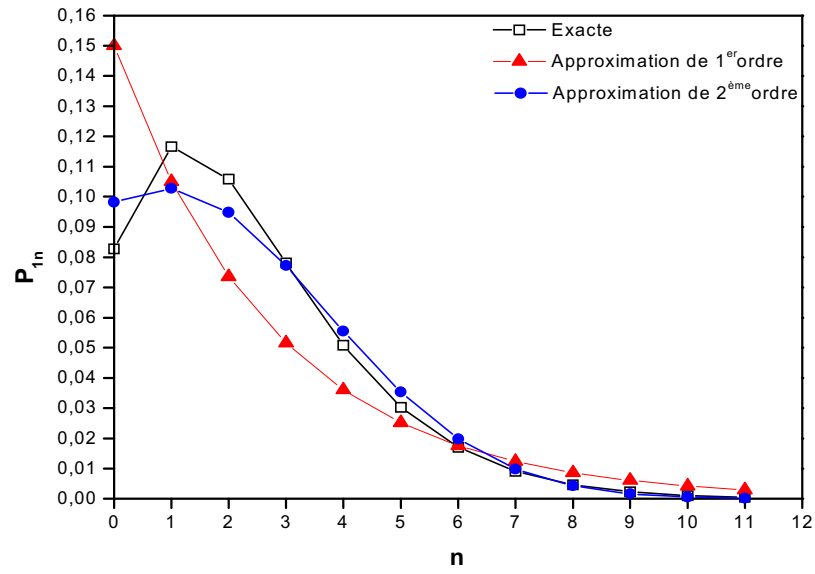
4.4 Liste des graphes



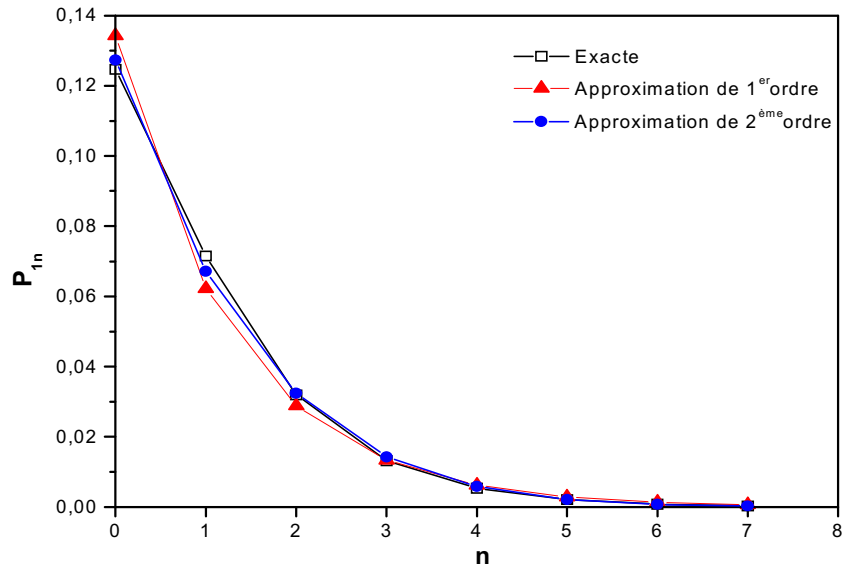
Grphe 4.1. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/M/1$ avec rappels tels que $\lambda = 1, \nu = 4$ et $\theta = 0.2$.*



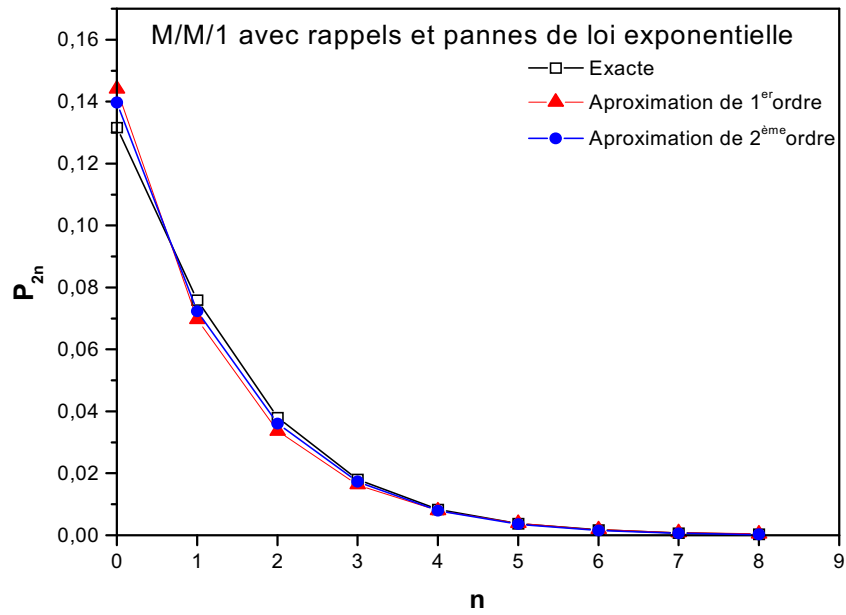
Grphe 4.2. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/M/1$ avec rappels tels que $\lambda = 1, \nu = 4$ et $\theta = 0.05$.*



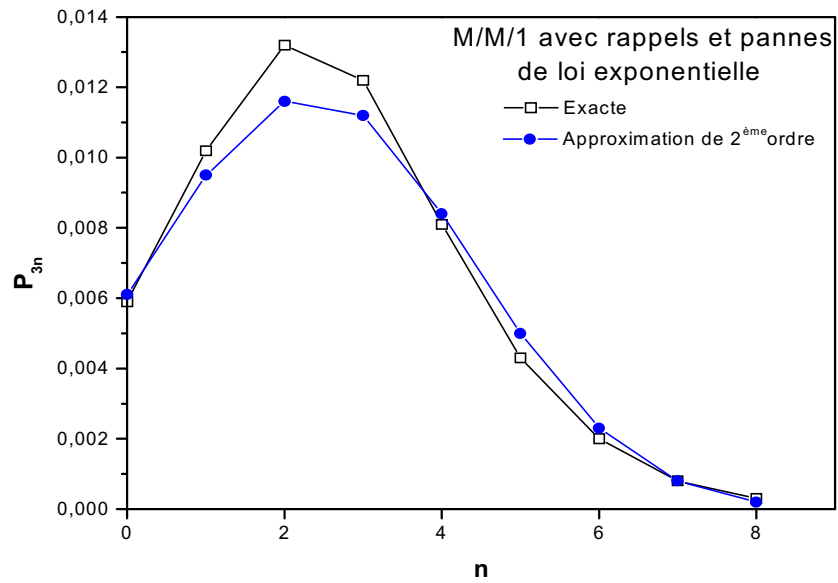
Grphe 4.3. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/E_3/1$ avec rappels tels que $\lambda = 2, \nu = 0.25$ et $\theta = 1.2$.*



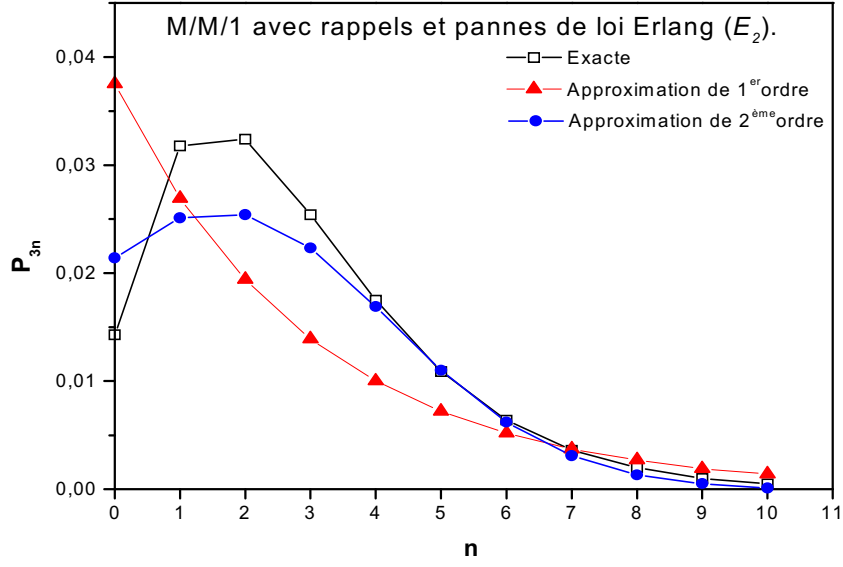
Grphe 4.4. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/H_2/1$ avec rappels tels que $\lambda = 2, E(S) = 0.2$ et $\theta = 1$.*



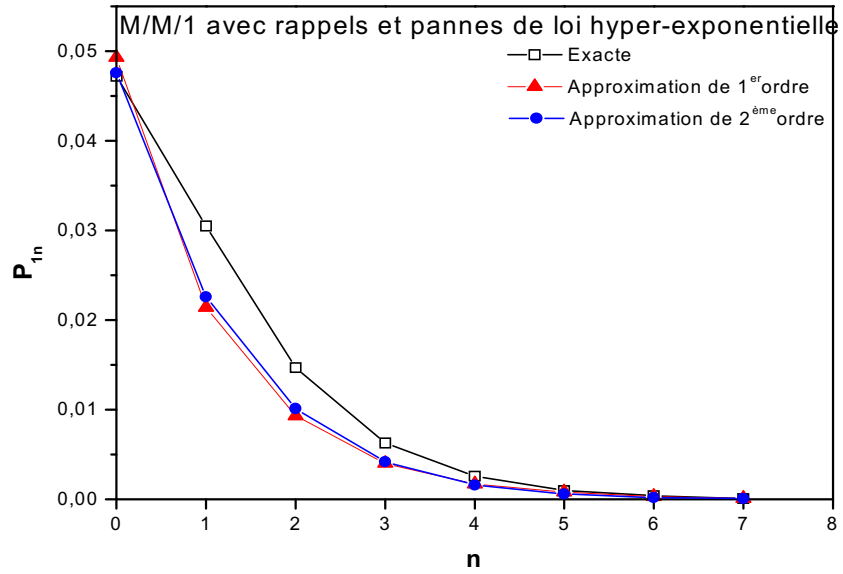
Grphe 4.5. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/M/1$ avec rappels et pannes tels que $\lambda = 2, \nu = 8, \theta = 12, \eta = 2, \mu = 16, \eta_1 = 3, \mu_1 = 6$ et $c = 0.5$.*



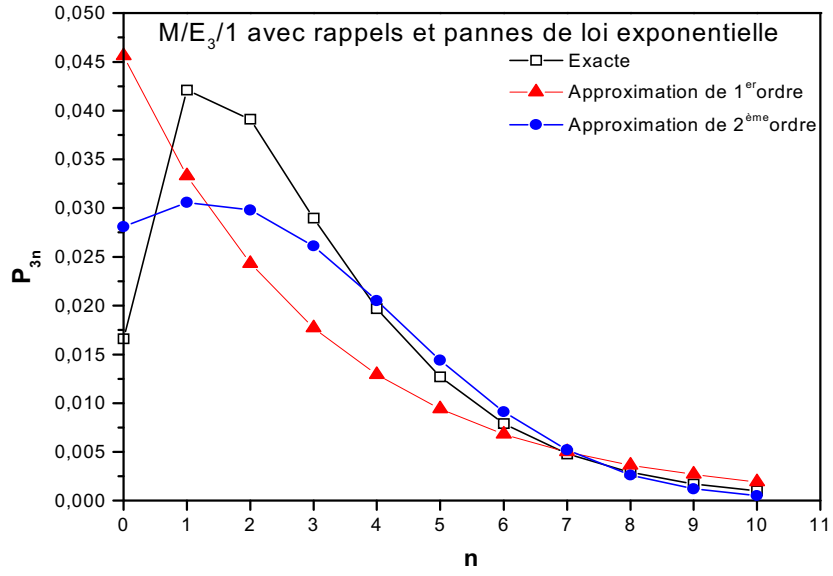
Grphe 4.6. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/M/1$ avec rappels et pannes tels que $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 0.5, \eta = 4, \mu = 6, \eta_1 = 6, \mu_1 = 8$ et $c = 0.4$.*



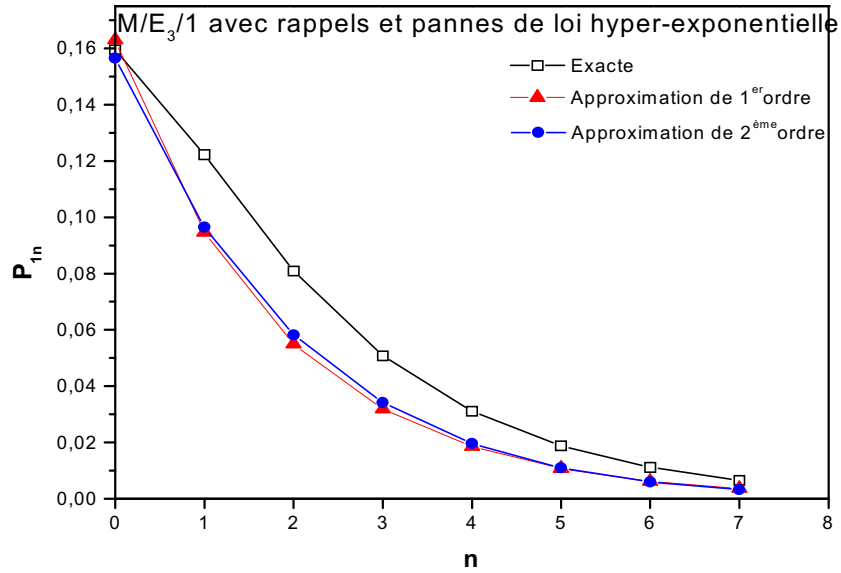
Graphe 4.7. distribution exacte et approximative d'états du système $M/M/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, \nu = 6, \theta = 2, \eta = 1, \mu = 16, \eta_1 = 2, \mu_1 = 4$ et $c = 0.5$.



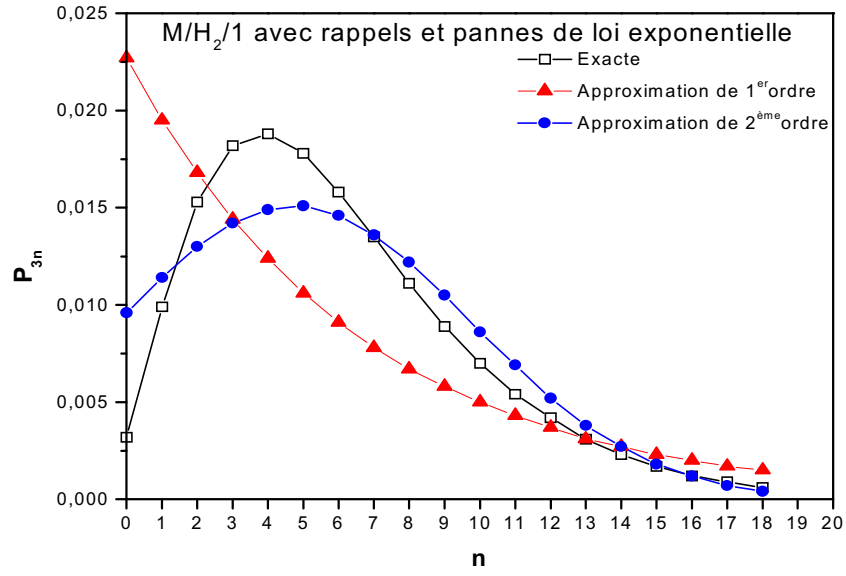
Graphe 4.8. distribution exacte et approximative d'états du système $M/M/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, \nu = 8, \theta = 2, \eta = 2, \mu = 4, E(D_i) = E(D_b) = 0.25$ et $c = 0.5$.



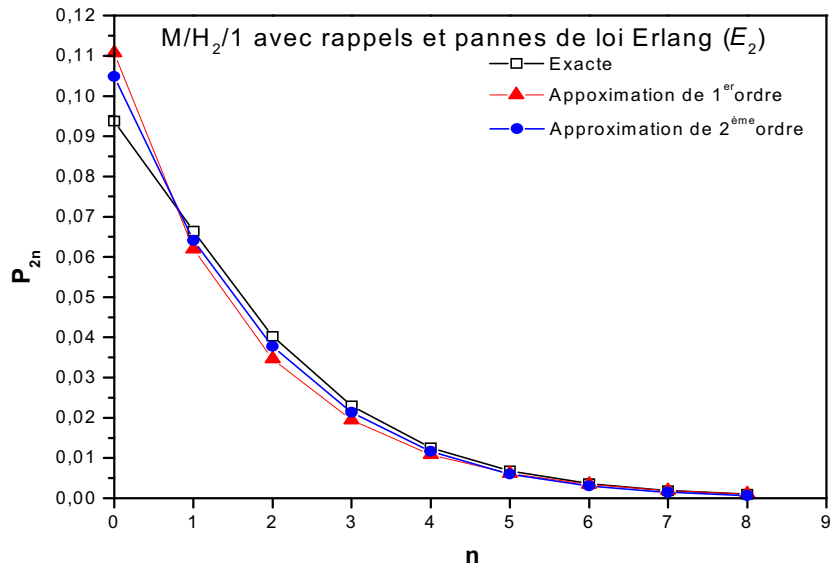
Graphe 4.9. distribution exacte et approximative d'états du système $M/E_3/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, \nu = 10, \theta = 4, \eta = 0.5, \mu = 1.2, \eta_1 = 1, \mu_1 = 2$ et $c = 0.6$.



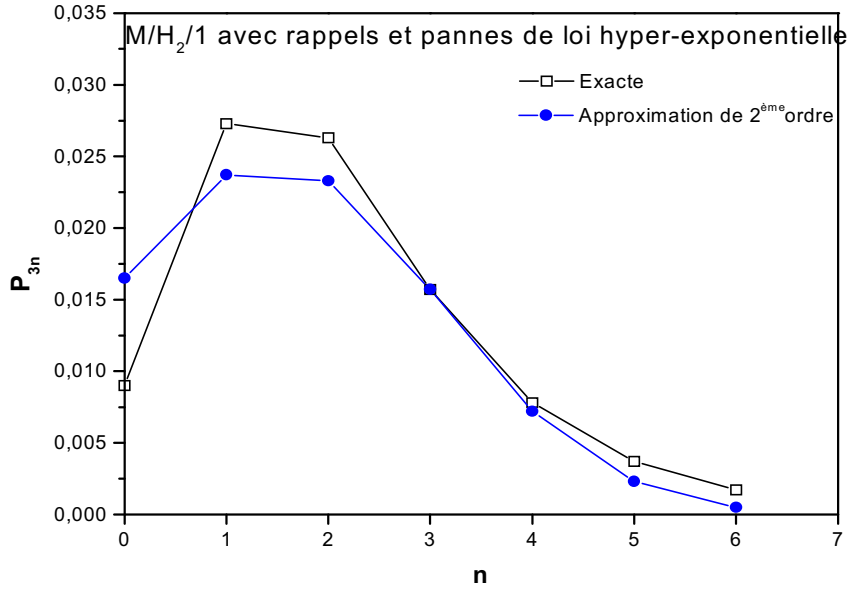
Graphe 4.10. distribution exacte et approximative d'états du système $M/E_3/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, \nu = 6, \theta = 4, \eta = 0.2, \mu = 1.5, E(D_i) = E(D_b) = 0.25$ et $c = 0.5$.



Grphe 4.11. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/H_2/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, E(S) = 2/3, \theta = 1, \eta = 0.5, \mu = 1, \eta_1 = 2, \mu_1 = 3$ et $c = 0.5$.*



Grphe 4.12. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/H_2/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1.2, E(S) = 0.25, \theta = 8, \eta = 0.8, \mu = 3, \eta_1 = 2, \mu_1 = 4$ et $c = 0.5$.*



Graph 4.13. *distribution exacte et approximative d'états du système $M/H_2/1$ avec rappels et pannes tels que, $\lambda = 1, E(S) = 0.25, \theta = 4, \eta = 4, \mu = 2, E(D_i) = E(D_b) = 0.25$ et $c = 0.8$.*

Remarques :

Il est important de remarquer que l'entropie de Shannon est calculée dans les exemples numériques en employant les premiers éléments de la séquence infinie $\{P_{in}, i = 0, 1, 2, 3, n \in \mathbb{N}\}$, alors que, les approximations de second ordre entraînent une séquence finie $\{\hat{P}_{in}^2, i = 0, 1, 2, 3, 0 \leq n \leq N\}$. Cette différence dans le calcul, motivée par la troncation, justifie que, parfois, l'entropie de Shannon associée à l'approximation est un peu plus petite que l'entropie de Shannon exacte.

Les distributions de probabilités d'états exactes ont été calculées en employant la méthode de la chaîne de Markov incluse, et les résultats de simulations ont été obtenus en utilisant le logiciel Maple.

Chapitre 5

Conclusion

A travers cette étude, nous avons présenté deux approximations des distributions d'états du système par la méthode du maximum d'entropie dans une file M/G/1 avec rappels et serveur non fiable.

Du moment que l'entropie maximum correspond au désordre maximum dans le système, alors les solutions obtenues sont les moins biaisées parmi toutes les autres solutions qui satisfont les contraintes du système. Ces résultats généralisent ceux obtenus par Falin, Martin et Artalejo [45], qui ont étudié le système M/G/1 avec rappels. Nous avons présenté une approximation en utilisant le moment d'ordre un, ensuite en utilisant le moment d'ordre deux. Toutefois, si les moments d'ordre supérieurs sont connus, la méthode demeure valable, et ce qui améliorera notre approximation.

Pour les autres distributions de performance, comme le temps d'attente, temps résiduel,...etc., l'approche entropique donne aussi des distributions de probabilités approchées. La généralisation de notre résultat aux files avec rappels plus complexes, présente des difficultés, vu que généralement, on ne connaît pas les moments de la distribution d'états stable. Néanmoins, on espère d'étendre notre étude aux files d'attente avec pannes plus complexes comme le cas de rappels ou d'interarrivées de lois générales [35], cas de plusieurs serveurs et cas de phénomènes particuliers (arrivées négatives,...).

Bibliographie

- [1] Agmon N., Alhassid Y.& Levine R. (1979). An algorithm for finding the distribution of maximal entropy. *J. Comput. Phys.* 30, 250-258.
- [2] Aissani A. (1988). On the M/G/1/1 queueing system with repeated orders and unreliable server. *J. of Tech.*, n°6, 98-123.
- [3] Aissani A. (1991). Influence de la fiabilité des serveurs sur la distribution du nombre de clients en orbite dans un système M/G/1/0 avec rappels. *Technologies Avancées*, vol 2, n°2, 23-28.
- [4] Aissani A. (1991). Modèles d'attente avec rappels : influence de la fiabilité du canal, actes 3^{ème} colloque maghrébin sur les modèles numériques de l'ingénieur, Tunis, 24-26 novembre, *Annales maghrébines de l'ingénieur*, vol.2, pp. 60-68.
- [5] Aissani A. (1993). Unreliable Queueing with repeated orders. *Micro. and Reliab.* vol. 33, n°14, pp. 2093-2106.
- [6] Aissani A. (1994). A retrial queue with redundancy and unreliable server. *Queueing systems.* 17, 431-449.
- [7] Aissani A. (1994). A survey on retrial queueing models. Journées de statistique appliquées, 1-11, Alger, 16-18 Avril.
- [8] Aissani A. & Oukid N. (1994). Bounds for the mean busy and idle periods of some unreliable queues, Journées de Statistiques Appliquées, 76-84, Alger, 16-18 Avril.
- [9] Aissani A. & Artalejo J.R. (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing system.* 30, 309-321.
- [10] Aissani A. (2000). An $M^x/G/1$ retrial queue with exhaustive vacations, *J. of Statistics & Management Systems*, 3, 269-286.
- [11] Aissani A. (2003). An $M^x/G/1$ retrial queue with unreliable server and vacations. Proceedings of the European Simulation Multi Conference, Nottingham (UK), pp. 175-180.
- [12] Alexandrov A.M. (1974), A queueing system with repeated order, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Thekhn. Kibernetika*, n°2, pp. 86-89. (Eng. *Cybernet. Rev.*12, n°3, 1-4).
- [13] Alhassid Y. Agmon N. & Levine R. (1978). An upper bound for the entropy and its applications to the maximal entropy problem. *Chem. Phys. Lett.* 53, 22-26.

- [14] Anisimov V.V. & Atadzhanov K.L. (1992). The diffusion approximation of systems with repeated calls. *Theory Probab. Math. Statist.* 44, 1-5.
- [15] Anisimov V.V. & Atadzhanov K.L. (1994). Diffusion approximation of systems with repeated calls and unreliable server. *J. Math. Sci.* 72, 3032-3034.
- [16] Artalejo J.R. (1994). New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers. *Statistica Neerlandica.* 48, 23-36.
- [17] Artalejo J.R. & Falin G.I.(1994). Stochastic decomposition for retrial queues. *Top*, vol.2, 329-342.
- [18] Artalejo J.R.& Gomez-Corral A. (1995). Information Theoretic Analysis for Queueing Systems with Quasi-Random Input. *Math. Comput. Modelling* Vol 22, n°3, pp. 65-76.
- [19] Artalejo J.R. (1997). Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computers and Operat Research* 24, 493-504.
- [20] Artalejo J.R. (1998). Retrial queues with a finite number of sources. *Journal of the Korean Mathematical Society* 35, 503-525.
- [21] Artalejo J.R., Gomez-Corral A. (1998), Unreliable retrial queues due to service interruptions arising from facsimile networks, vol.38 (1).
- [22] Artalejo J.R. (1999). Accessible bibliography on retrial queues, *Math. Comput. Modell*, 30, 1-6.
- [23] Artalejo J.R., Gomez-Coral, (2000) Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters, *RAIRO-Operations research* , 33, 371-382.
- [24] Baskett F., Chandy K.M., Muntz R. R. & Palacios, F.G.(1975). Open Closed and Mixed Networks with Different Classes of Customers, *JACM* 22, n°2, 248-268.
- [25] Boualem M. (2003). Inégalités pour les systèmes de files d'attente avec rappels. Thèse de Magister en mathématiques appliquées. *Faculté des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. U.S.T.H.B.*
- [26] Bunday B.D. (1984). Basic optimization methods. London. Edward Arnold.
- [27] Buzen J.P. (1973). Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers, *CACM* 16, n°9, 527-531.
- [28] Buzen J.P. & Denning P.J. (1980). Measuring and calculating queue length distributions. *Comput. IEEE.* 13, 33-44.
- [29] Chandy K. M.& Sauer C.H. (1978). Approximate Methods for Analyzing Queueing Network Models of computer systems, *Computing Surveys* 10, n°3, 281-317.
- [30] Chen. P.P. (1975). Queueing Networks Model of Interactive Computing Systems. *Proc. IEEE* 63, 954-957.

- [31] Choi B.D., Shin Y. W. & Ahn W.C. (1992). Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems* 11, 335-356.
- [32] Clos C. (1948). An aspect of the dialling behavior of subscribers and its effect on the trunk plant. *Bell System. Tech. J.* 27, 424-445.
- [33] Cohen W.J. (1957). Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. *Philips Telecomm Rev.* 18, N°2, 49-100.
- [34] Denning P.J. & Buzen F.P. (1978). The Operational Analysis of Queueing Network Model. *Computing Surveys* 10, 225-261.
- [35] Djellab Natalia.V. (2002). On the M/G/1 retrial queue subjected to breakdowns. *RAIRO Operations research.* 36, 299-310.
- [36] Dudin A. , Klimenok, (1999), BMAP/SM/1 model with Markov modulated retrials, *TOP* vol. 7, n°2, 267-278.
- [37] El-Affendi M.A. & Kouvatsos D.D. (1983). A maximum entropy analysis of the M/G/1 and G/M/1 queueing systems at equilibrium. *Acta info.* 19, 339-355.
- [38] Falin G.I. (1976). Aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls. *Ukrainian Math. J.* 28, 437-440.
- [39] Falin G.I. (1984). On sufficient conditions for ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls. *Adv. prob.* 16, pp. 447-448.
- [40] Falin G.I. (1985). Limit Theorems for Queueing systems with repeated calls. 4th Int. Vilnius Conf. On prob. Theory and Math. Stat. Abstracts, Vol.3, 235-237, Vilnius, USSR.
- [41] Falin G.I. (1986). On the waiting time process in a single-line queue with repeated calls. *Journal of Applied Probability* 23, 185-192.
- [42] Falin G.I. (1990). A survey of retrial queues. *Queueing systems* 7, 127-167.
- [43] Falin G.I & Fricker C. (1991). On the virtual waiting time in an M/G/1 retrial queue. *Journal of Applied Probability* 23, 185-192.
- [44] Falin G.I, Artalejo J.R. & Martin M. (1993). On the single server retrial queue with priority customers. *Queueing Systems* 14, 439-455.
- [45] Falin G.I., Martin & Artalejo J. R. (1994). Information theoretic approximations for the M/G/1 retrial queue. *Acta Informatica* 31, 559-571.
- [46] Falin G.I. & J.G.C. Templeton (1997). *Retrial queues*. Chapman and Hall. London.
- [47] Gaver D.P. (1962). A waiting line with interrupted service, including priorities. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 24, 73-90.
- [48] Guiasu S. (1986). Maximum entropy condition in queueing theory. *J. Opl Res. Soc.* 37, 293-301.
- [49] Hanschke. T. (1987). Explicit formulas for the characteristics of the M/M/2/2 queue with repeated attempts, *J. Appl. Prob.* 24, 486-494, n°2.

- [50] Hashida O & Kawashima K. (1979). Buffer behavior with repeated calls. *Electronics and Communication in Japan* 62. B, 3-27.
- [51] Hervas W. (2002). Approximation des systèmes d'attente avec rappels. Thèse de Magister en mathématiques appliquées. *Faculté des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. U.S.T.H.B.*
- [52] Jaynes E.T. (1968). Prior probabilities. *IEEE Trans. Systems Sci. Cybern.* SSC-4, 227-241.
- [53] Jaynes E.T. (1979). Where do we stand on maximum entropy? In Maximum Entropy Formalism (R. D. Leven and M. Tribus, Eds), pp. 17-118. *MIT Press, Cambridge, Mass.*
- [54] Johnson R.W. (1979). Determining probability distributions by maximum entropy and minimum cross-entropy. *Proc APL 79 (ACM 0-89791-005)*, pp. 24-29.
- [55] Keilson J., Kozzolino & Young H. (1968). A service system with unfilled requests repeated. *Opera. Res.* 16, 1126-1137.
- [56] Khinchin A.L. (1957). Mathematical Foundations of Information Theory, Dover.
- [57] Kleinrock L. (1975). Queueing systems. Vol. I. *Computer Application. New York. John Wiley.*
- [58] Kleinrock L. (1976). Queueing systems. Vol. II. *Computer Application. New York. John Wiley.*
- [59] Kobayashi H. (1974). Application of the diffusion approximation to queueing networks. Part 1-Equilibrium distributions. *J. ACM.* 21, 316-328.
- [60] Kosten L. (1947). On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking. *De ingénieur* 59, (dutch).
- [61] Kouvatsos D.D. & El-affendi M. A. (1983). On the analysis of the G/G/1 queue. *Res. Rep. DDK./11.* University of Bradford.
- [62] Kouvatsos D.D. (1985). Maximum entropy methods for general queueing networks. In *modelling techniques and tools for performance analysis (D. Potier, Ed)*, pp. 589-608. North-Holland, Amsterdam.
- [63] Kouvatsos D.D. (1986). A maximum entropy queue length distribution for the G/G/1 finite capacity queue. *Proc. of Perf. 86 and ACM Sigmetrics* pp, 224-236.
- [64] Kouvatsos D.D. (1986). A universal maximum entropy algorithm for the analysis of general closed networks. In *Computer Networking and performance Evaluation (T Hasegawa et al., Eds)*, pp. 113-124. North-Holland, Amsterdam.
- [65] Kouvatsos D.D & Almond J. (1986). Two-stations cyclic queue with multiple servers of GE-type. *Papers of Int. Workshop on computer Perf. Eval.* INRIA. Sophia Antipolis, France.
- [66] Kouvatsos D.D. (1988). A maximum entropy analysis of the G/G/1 queue at equilibrium. *Operat. research Soc. Vol. 39, n°2*, pp. 183-200.

- [67] Kouvatsos D.D. & Tabet-Aouel N. (1989). A maximum entropy priority approximation for a stable G/G/1 queue. *Acta Inf.* 27, 247-286.
- [68] Kouvatsos D.D. (1994). Entropy maximization and queueing network models. *Ann. Oper. Res.* 48, 63-126.
- [69] Krishnamorthy, Ushakumari P.V. (1999), Reliability of a k-out-of-n-system with repair and retrial of failed units, *TOP* 7, 293-301.
- [70] Kulkarni V.G. & Choi B. D. (1990). Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing systems* 7, 191-208.
- [71] Muntz R.R. (1975). Analytic Modeling of Interactive Systems. *Proc. IEEE* 63, 946-953.
- [72] Neuts M.F & Rao B.M..(1990). Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems* 7, 169-190.
- [73] Oukid N. Inequality for retrial queues with breakdowns, To appear.
- [74] Reiser M. & Kobayashi H. (1974). Accuracy of the diffusion approximation for some queueing systems. *IBM J. Res. Dev.* 18, 110-124.
- [75] Reiser M. & Kobayashi H. (1975). Queueing Networks with Multiple Closed Chains : Theory and Computational Algorithm, *IBM J. Res. & Dev.* 19, 283-294.
- [76] Shannon C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bel. Syst. Tech. J.* 27, 379-423, 623-656.
- [77] Shanthikumar J.G. and Buzacott J. A (1980). On the approximations to the single server queue. *Int. J. Prod. Res.* 18, 761-773.
- [78] Shore J.E. & Johnson R. W. (1980). Axiomatic Derivation of the Principal of Maximum Entropy and the Principal of Minimum Cross-Entropy. *IEEE Trans. Information Theory* IT-26, 26-37.
- [79] Shore J.E (1982). Information theoretic approximations for M/G/1 and G/G/1 queueing systems. *Acta info.* 17, 43-61.
- [80] Shore J.E. (1982). Cross-entropy minimization given fully decomposable subset and aggregate constraints. *IEEE. Trans. Info. Theory* 28, 956-961.
- [81] Templeton J.G.C. (1999). Retrial queues. *Top* 7, 351-353.
- [82] Tribus M. (1969). Rational Description, Decisions and designs, New York. Pergamon.
- [83] Wang J., Cao J. (2001), Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs, *Queueing Systems*, 38, 363-380.
- [84] Whitt W. (1982). The Marshall and Stoyan bounds for IMRL/G/1 queue are tight. *Opl Res. Lett.* 1, 209-213.
- [85] Wilkinson R.I. (1956). Theories for toll traffic engineering in the U.S.A. *Bell. System Tech. J.* 35(2), 421-507.

- [86] Yang T. & Templeton J.G.C.(1987). A survey on retrial queues. *Queueing Systems* 2, 201-283.
- [87] Yang T. & Li H. (1994). The M/G/1 retrial queue with the server subject to starting failures. *Queueing System*, 16, 83-96.
- [88] Yang T. & Li H. (1995). A single-server retrial queues with server vacations and a finite number of input sources. *European Journal of Operat. Research* 85, 149-160.