

N° d'ordre : 26/2011-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIEN,
FACULTE DE MATHÉMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité: Modélisation et Calcul Scientifique en Systèmes Dynamiques

Par: AMIR Malika

SUJET

ETUDE ET APPROXIMATION DE PROBLEMES DE CONTACT UNILATERAL

Soutenu publiquement, le 15/06/2011, devant le jury composé de:

Mr. R. BEBBOUCHI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. A. TOUZALINE	Maître de Conférences/A	U.S.T.H.B.	Directeur de Mémoire.
Mr. M. MEDJDEN	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. A. KHEMMOUDJ	Maître de Conférences/A	U.S.T.H.B.	Examineur.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à la mémoire de *mon père Mohamed* et *ma petite soeur Yamina* que la miséricorde et la grâce de Dieu leurs soient attribués et je souhaite une longue vie à *ma Mère* qui a été toujours là pour me soutenir.

Remerciements

*J'exprime ma reconnaissance à Monsieur **A. Touzaline**, mon directeur de thèse, interlocuteur disponible et attentif que je remercie pour tous les conseils et suggestions qu'il m'a apporté lors de l'encadrement de ma thèse.*

*Je remercie Monsieur **R. Bebbouchi**, Professeur à l'U.S.T.H.B, d'avoir présidé mon jury de thèse, se fut un grand honneur pour moi.*

*Je remercie aussi messieurs **M. Medjden**, Professeur à l'U.S.T.H.B et **A. Khem-moudj**, Maîtres de conférences à l'U.S.T.H.B d'avoir été membres de jury et d'avoir examiné ce travail.*

Mes profonds remerciements vont à mes chers parents, qui sont graine de mon existence, pour leurs encouragements et leurs sacrifices.

Je rends hommage à tous mes maîtres et professeurs à partir du primaire, celles et ceux qui m'ont donné goût aux études et en particulier pour les Mathématiques, je leur dis du fond du coeur merci et j'espère que ce travail leur soit aussi dédié comme fruit de leur travail.

Etude et approximation de problèmes de contact unilatéral

Résumé

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps déformable et une fondation abondent en industrie et dans la vie de tous les jours.

Devant les besoins accrus des industriels, confrontés aux problèmes de contact en systèmes mécaniques, le contact entre solides rigides ou déformables a fait l'objet d'un investissement scientifique très important ces dernières années.

Dans ce travail, on s'intéresse aux problèmes de contact unilatéral dans le cas de petites déformations d'un corps élastique avec une fondation déformable.

Le but de ce mémoire est l'étude fonctionnelle et numérique de deux problèmes de contact unilatéral avec compliance normale pour des matériaux élastiques linéaires. L'existence et l'unicité de la solution de ces deux problèmes sera justifiée en utilisant les arguments des inéquations variationnelles et le théorème du point fixe de Banach. Pour l'approximation numérique par des éléments finis linéaires, en supposant une certaine régularité de la solution du problème continu, on obtient une estimation d'erreur en $O\left(h^{\frac{3}{4}}\right)$ pour les deux problèmes.

Mots-clés : *matériau élastique, contact, compliance normale, inéquations variationnelles, solution faible, éléments finis, estimation d'erreur.*

Table des matières

Notations

$D(\Omega)$: l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables à support compact contenu dans Ω .

$D'(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω .

$D = [D(\Omega)]^d$.

$D' = [D'(\Omega)]^d$.

$\mathcal{D} = [D(\Omega)]_s^{d \times d}$.

$\mathcal{D}' = [D'(\Omega)]_s^{d \times d}$.

$Q = [L^2(\Omega)]_s^{d \times d}$.

$H_1 = [H^1(\Omega)]^d$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .

$H_\Gamma = [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d$.

$H_\tau = \{\xi \in H_\Gamma / \xi_\nu = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}$.

γ : l'application trace pour les fonctions vectorielles.

$\partial_i \sigma$: la dérivée partielle de σ par rapport à la variable x_i .

$\text{div } \sigma$: la divergence de σ

$(\cdot, \cdot)_V$: le produit scalaire de V .

$\|\cdot\|_V$: la norme de V .

V' : l'espace dual de V .

$(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$: le produit de dualité entre V' et V .

V^d : l'espace défini par $V^d = \{v = (v_i) / v_i \in V, i = \overline{1, d}\}$

$\text{mes}(\Gamma_1)$: la mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_1 .

ν : la normale unitaire sortante à Γ .

v_ν, v_τ : les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.

$C^1(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.

S_d : l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ c'est-à-dire $S_d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$.

$\mathbb{P}_1$: l'espace des polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

δ_{ij} : le symbole de Kronecher.

Π_h : opérateur d'interpolation de Lagrange.

Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps ou bien avec une fondation déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces.

Il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure: sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc...En dépit du rôle fondamental dans les mécanismes des solides, les efforts de contact sont rarement pris en considération dans l'analyse des structures. La raison est que modéliser des phénomènes de contact pose de sérieuses difficultés: conceptuelles, mathématiques et informatiques qui sont bien plus compliquées que celles qui proviennent de la mécanique des structures linéaires.

Avant l'application de forces à un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue. Les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes d'inéquations et des équations non linéaires.

Dans ce travail, on s'intéresse aux problèmes de contact unilatéral dans le cas de petites déformations d'un corps élastique avec ou sans frottement avec une fondation déformable. Notre modèle de contact utilisé est étudié pour la première fois dans [22].

Dans cette thèse, nous allons étudier deux problèmes. Le premier concerne un problème de contact unilatéral sans frottement avec compliance normale et le deuxième, concerne un problème de contact unilatéral avec frottement et compliance normale.

Le problème de contact unilatéral (dit de Signorini) est issu de la mécanique des structures et où les informations portent sur la frontière. La condition de contact a été formulée par Signorini en 1919. La formulation variationnelle associée à ce type de conditions a été étudiée mathématiquement par Fichera [16] en 1964. Ensuite, viennent les travaux de G. Duvaut et J.L. Lions [13] qui ont rajouté le frottement aux problèmes de contact et ils ont pu écrire ce problème sous forme de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas de frottement de Tresca (i.e avec un seuil de frottement fixe qui ne dépend pas de la contrainte normale). On peut trouver aussi des résultats d'existence et d'unicité en utilisant

des résultats standards des inéquations quasi-variationnelles . La théorie de cette dernière a été introduite par Bensoussan et Lions pour l'étude des problèmes de contrôle impulsif (voir [5]). Ensuite, les inéquations variationnelles ont été utilisées par plusieurs auteurs comme Drabla [12] et Touzaline [29], [30]...etc, pour des problèmes de contact non linéaires.

Le but de ce mémoire est l'étude fonctionnelle et numérique de deux problèmes de contact unilatéral avec compliance normale pour des matériaux élastiques linéaires. L'existence et l'unicité de la solution de ces deux problèmes sera justifiée en utilisant les arguments standards des inéquations quasi-variationnelles et l'argument du point fixe de Banach.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle certaines notions de la mécanique des milieux continus et certaines notions mathématiques nécessaires pour l'appréhension de ce travail. On rappelle aussi les différentes équations et conditions aux limites concernant le champ des déplacements. On établit la formulation variationnelle des deux problèmes mécaniques qui seront traités par la suite ainsi que les notions d'analyse fonctionnelle indispensable.

Dans le deuxième chapitre, on considère une inéquation quasi-variationnelle abstraite pour laquelle on démontre l'existence et l'unicité. La démonstration de ce théorème nous conduit à un algorithme itératif, qu'on utilise pour l'approximation numérique du problème de contact avec ou sans frottement.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème statique de contact unilatéral sans frottement avec compliance normale (voir [22]). On établit la formulation variationnelle du problème qui est sous forme d'inéquation quasi-variationnelle de deuxième espèce dont on montre l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant des arguments sur les inéquations quasi-variationnelles elliptiques suivi d'une technique du théorème de point fixe de Banach. D'autre part, on étudie quelques propriétés de la fonction de compliance normale ainsi que sa dépendance continue par rapport aux données et pour la convergence, on considère une approximation des inéquations quasi-variationnelles en utilisant un algorithme itératif.

Finalement, le quatrième chapitre est consacré à l'étude d'un problème statique de contact unilatéral avec frottement et compliance normale; on établit la formulation variationnelle dont on montre l'existence et l'unicité de la solution et on termine par une approximation par des éléments finis linéaires conformes de ce problème. On suppose que le champ des déplacements est de classe H^2 et on déduit une estimation d'erreur en $O\left(h^{\frac{3}{4}}\right)$.

Chapitre 1

Formulation des problèmes.

Preliminaires

Sommaire

1.1	Rappels de la mécanique des milieux continus	5
1.1.1	Contraintes et déformations	5
1.1.2	Lois de comportement	6
1.1.3	Lois de frottement	6
1.1.4	Formulation mathématique du problème	9
1.2	Preliminaires	11
1.2.1	Espaces fonctionnels	11
1.2.2	Inéquations variationnelles elliptiques	17

Dans cette partie, après quelques rappels de la mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement élastiques. Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui sera l'objet de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact.

1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus

1.1.1 Contraintes et déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), ayant une frontière Γ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude de l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extérieures sur l'intérieur du corps et sur sa frontière. Cette évolution est décrite par l'équation de mouvement:

$$\operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1.1)$$

où les inconnus du problème sont:

- Le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$,
- Le champ des contraintes $\sigma : \Omega \longrightarrow S_d$,

où:

$\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la densité de masse,

- $\varphi_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est la densité des forces volumiques.
- S_d est l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur $\mathbb{R}^d$; $\operatorname{div} \sigma$ représente la divergence du champ des contraintes σ .

Les processus d'évolution modélisés par l'équation (1.1.1) s'appellent processus dynamiques.

Dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\sigma \ddot{u}$ devient négligeable, Il s'agit alors d'un processus quasi-statique. Dans ce cas l'équation

(1.1.1) s'écrit:

$$\operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1.2)$$

Dans ce cas, l'équation (1.1.2) s'appelle équation d'équilibre.

Dans la suite, on va considérer des solides élastiques linéaires dans l'hypothèse des petites déformations. Dans ce cas, on a besoin du tenseur des déformations $\varepsilon : \Omega \longrightarrow S_d$ défini par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) \quad , \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1.3)$$

où ∂_i représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_i . On adopte la convention de sommation d'indice muet, souvent pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u , on va le noter $\varepsilon(u)$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour d'écrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau; ce sont les lois de comportement que nous décrivons dans la suite.

1.1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque milieu continu. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement élastique traitée dans cette thèse.

Loi de comportement des matériaux élastiques

Pour les matériaux élastiques linéaires, la loi de comportement est de la forme:

$$\sigma = \mathcal{E}(\varepsilon) \tag{1.1.4}$$

Où $\mathcal{E}$ est une application linéaire. Cette loi peut modéliser quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone: linéarité de la courbe $\sigma = \mathcal{E}(\varepsilon)$, durcissement ou adoucissement (suivant que σ soit monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.1.4).

1.1.3 Lois de frottement

On considère un corps déformable (voir Fig.1.1) occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ assez régulière et constituée de trois parties $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$ tels que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont des ouverts disjoints.

Soit ν le vecteur normal extérieur unitaire sortant à Γ . On considère les conditions aux limites suivantes:

$$u = u_0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (1.1.5)$$

$$\sigma \nu = \varphi_2 \text{ sur } \Gamma_2 \quad (1.1.6)$$

La condition (1.1.5) s'appelle condition aux limites de déplacement. Elle signifie que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ , le déplacement étant une donnée du problème (si $u_0 = 0$ le solide est encastré en Γ_1 de sa frontière dans une structure fixe).

La condition (1.1.6) est appelée condition aux limites de traction, elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma \nu = (\sigma_{ij} \nu_j), i = 1, \dots, d$ est imposé sur la partie Γ_2 , φ_2 représente la densité des forces surfaciques appliquées.

Si $\Gamma_1 = \emptyset$, le problème aux limites est un problème de traction pur et si $\Gamma_2 = \emptyset$, le problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties Γ_1, Γ_2 sont toutes les deux de mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnel, strictement positive, le problème considéré est un problème mixte déplacement-traction.

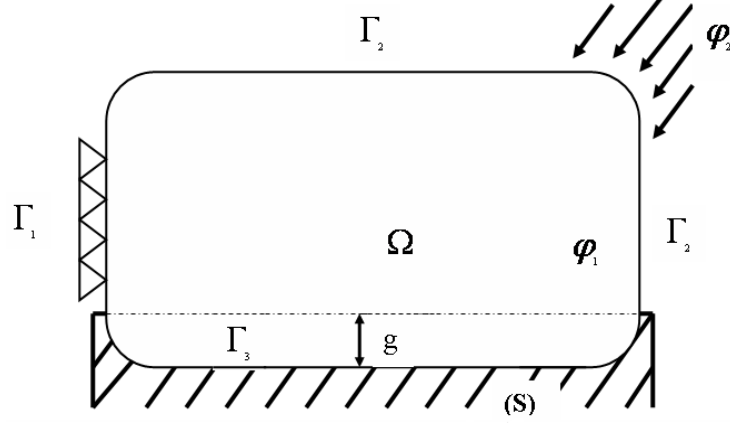


Figure 1.1: Contact d'un corps élastique avec une fondation déformable

Les conditions aux limites de frottement font intervenir les composantes normales et tangentielle du vecteur de déplacement u et du vecteur de contrainte de Cauchy $\sigma\nu$. Il vient que:

$u_\nu = u\nu = u_i\nu_i$: le déplacement normal.

$u_\tau = u_{\tau i}$: le déplacement tangentiel, avec $u_{\tau i} = u_i - u_\nu\nu_i$, $i = 1, \dots, d$.

$\sigma_\nu = \sigma\nu \cdot \nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j$: la contrainte normale.

$\sigma_\tau = (\sigma_{\tau i})$: la contrainte tangentielle, avec $\sigma_{\tau i} = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_\nu\nu_i$, $i, j = 1, \dots, d$.

Loi de contact avec compliance normale et frottement

La loi de contact avec compliance normale et frottement a été considérée la première fois dans [24] pour l'étude des problèmes dynamiques en élasticité linéaire et en viscoélasticité. Elle modélise l'*interpénétration* de la surface de contact dans la fondation et elle tient compte de la déformation des aspérités de surface. La loi de contact s'énonce comme suit:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_\nu &= p(u_\nu - g) && \text{sur } \Gamma_3 \\ |\sigma_\tau| &\leq \mu p(u_\nu - g) \\ |\sigma_\tau| &< \mu p(u_\nu - g) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| &= \mu p(u_\nu - g) \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_3$$

où p est une fonction positive et g est le saut, mesuré dans la direction de la normale à la surface de contact.

1.1.4 Formulation mathématique du problème

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement (ou d'équilibre) du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. La nouveauté dans ce travail par rapport à ce qui a été fait dans [24] est l'étude de deux modèles couplés Signorini-Compliance normale avec ou sans frottement. Plus précisément, les problèmes mécaniques qu'on va étudier sont les suivants:

Problème(P₁) contact unilatéral sans frottement avec compliance normale.

Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{E}\varepsilon(u) && \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma\nu &= \varphi_2 && \text{sur } \Gamma_2, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u_\nu &\leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \quad (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (u_\nu - g) = 0 \\ \sigma_\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_3, (*)$$

Explication du modèle:

p est la fonction de compliance normale, elle est supposée positive ou nulle.

$g \geq 0$ est la valeur maximale de la pénétration.

- Quand $u_\nu < 0$, il y a séparation entre le corps élastique et la fondation, et la réaction de la fondation est nulle ($\sigma_\nu = 0$).

- Quand $0 \leq u_\nu < g$, alors $-\sigma_\nu = p(u_\nu)$, ceci signifie que la réaction de la fondation est déterminée de manière unique en fonction du déplacement normal.

- Quand $u_\nu = g$, alors $-\sigma_\nu \geq p(g)$ et σ_ν n'est pas déterminée de manière unique.

- On note que, quand $g = 0$, la condition (*) devient la condition de contact de Signorini classique sans saut;

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad u_\nu \sigma_\nu \leq 0.$$

• Quand $g > 0$ et $p = 0$, la condition (*) devient la condition de contact de Signorini classique avec saut;

$$u_\nu \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, u_\nu \sigma_\nu (u_\nu - g) = 0,$$

$\sigma_\tau = 0$ signifie que le contact est sans frottement.

Problème(P₂) contact unilatéral avec frottement et compliance normale. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{E}\varepsilon(u) && \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 &= 0 && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_\nu &= \varphi_2 && \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

$$u_\nu \leq g, \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, (\sigma_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3$$

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq \mu p(u_\nu) \\ |\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu) &\implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu) &\implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_3$$

Explication du modèle:

• Dans le cas où $|\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu)$, la contrainte tangentielle ne peut pas dépasser le seuil $\mu p(u_\nu)$. La surface est adhérente à la fondation, c'est ce qu'on appelle *la phase de collement*.

• Quand $|\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu)$, c'est *la phase de glissement*.

Donc la surface de contact Γ_3 est divisée en trois zones:

le collement, le glissement et la zone séparative où $u_\nu < g$, où il n'y a pas de contact.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans ce paragraphe les espaces de type Sobolev et les espaces fonctionnels utilisés en mécanique. On présente leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de traces.

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoie par exemple à [5] et [6].

Espaces des distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). On note par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles définies sur Ω , indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

Nous introduisons également les espaces suivants:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \varphi = (\varphi_i) \mid \varphi_i \in D(\Omega), i = \overline{1, d} \right\} = D(\Omega)^d \\ \mathfrak{D} &= \left\{ \phi = (\phi_{ij}) \mid \phi_{ij} = \phi_{ji}, i, j = \overline{1, d} \right\} = D(\Omega)_s^{d \times d} \\ D' &= \left\{ u = (u_i) \mid u_i \in D'(\Omega), i = \overline{1, d} \right\} = D'(\Omega)^d \\ \mathfrak{D}' &= \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in D'(\Omega), i, j = \overline{1, d} \right\} = D'(\Omega)_s^{d \times d} \end{aligned}$$

Les dualités entre D et D' , $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ seront notées respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)}$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega)}$.

Plus précisément on a:

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle_{D' \times D} &= \langle u_i, \varphi_i \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \\ \langle \sigma, \phi \rangle_{\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}} &= \langle \sigma_{ij}, \phi_{ij} \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega)} \end{aligned}$$

pour tout $u \in D', \varphi \in D, \sigma \in \mathfrak{D}', \phi \in \mathfrak{D}$ avec la même convention de l'indice muet.

Considérons maintenant l'opérateur de dérivation partielle défini pour les fonctions et pour les distributions

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1, d}$, on a:

$$\langle \partial_i \theta, \varphi \rangle = - \langle \theta, \partial_i \varphi \rangle \quad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in D(\Omega). \quad (1.2.1)$$

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par:

$$\varepsilon : D \longrightarrow \mathcal{D}, \varepsilon(\phi) = (\varepsilon_{ij}(\phi)), \varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_j \phi_i + \partial_i \phi_j) \quad \forall i, j = \overline{1, d}, \phi \in D \quad (1.2.2)$$

$$\text{div} : \mathcal{D} \longrightarrow D, \text{div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}), i = \overline{1, d}, \sigma \in \mathcal{D}' \quad (1.2.3)$$

En utilisant (1.1.2), on obtient:

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle u, \text{div} \phi \rangle_{D' \times D} \quad \forall u \in D', \phi \in \mathcal{D} \quad (1.2.4)$$

$$\langle \text{div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in D \quad (1.2.5)$$

L'opérateur ε défini par (1.2.2) pour les fonctions et par (1.2.4) pour les distributions s'appelle *opérateur déformation*.

L'opérateur div défini par (1.2.3) pour les fonctions et par (1.2.5) pour les distributions, s'appelle *opérateur divergence*.

On introduit aussi les espaces suivants:

$$H = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)^d \quad (1.2.6)$$

$$Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\} = L^2(\Omega)_s^{d \times d} \quad (1.2.7)$$

Les espaces H et Q sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires respectifs:

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in Q$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_Q$.

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous espace de distributions sur Ω , on peut considérer que $H \subset D'$ et $Q \subset \mathcal{D}'$.

Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les espaces H et Q .

On rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, 2}\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

La norme associée est notée par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est notée par $H_0^1(\Omega)$, avec $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (1.2.4) il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in Q\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u, v \in H_1$$

et de la norme associée $\|\cdot\|_{H_1}$.

On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \longrightarrow Q$ sont continus.

De même, compte tenu de l'identification de H et Q à des sous-espaces de D' et $\mathcal{D}'$, en utilisant (1.2.6) il résulte

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle u, \operatorname{div} \phi \rangle_H &= 0 \quad \forall u \in H, \phi \in D \\ (\varepsilon(u), \phi)_Q + \langle u, \operatorname{div} \phi \rangle_H &= 0 \quad \forall u \in H_1, \phi \in D \end{aligned}$$

Théorème 1.1 [15] *Muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}$, H_1 est un espace de Hilbert réel.*

On munit maintenant l'espace produit $H^1(\Omega)^d$ du produit scalaire canonique et de la norme associée qu'on note respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)^d}$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d}$. On a alors le résultat suivant:

Théorème 1.2 [15] *On a l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^d$ et $\|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d}$ sont deux normes équivalentes sur H_1 .*

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontière Γ de Ω est de classe C^1 .

Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur l'espace H_1 par passage aux espaces produits. Plus précisément, on a

les résultats suivants:

1. $C^1(\overline{\Omega})^d$ est dense dans H_1 .
2. $H_1 \subset H$ avec injection compacte (théorème de Rellich).
3. Il existe une application linéaire et continue appelée trace;

$$\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^d$$

vérifiant l'égalité $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})^d$.

Elle est définie comme le prolongement par densité de l'application;

$$u \longrightarrow u|_{\Gamma}$$

définie pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})^d$.

- L'application trace n'est pas surjective.
- L'image de H_1 par cette application est un sous-espace de $L^2(\Gamma)^d$ notée H_{Γ} qui est de Hilbert, on a en outre:

- L'injection $H_\Gamma \subset L^2(\Gamma)^d$ est continue.

★ Il existe une application linéaire et continue $Z : H_\Gamma \longrightarrow H_1$ vérifiant l'égalité:

$$\gamma(Z(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in H_\Gamma$$

★ Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)^d$.

c'est à dire;

$$H_0^1(\Omega)^d = \{u \in H_1 / \gamma u = 0\}$$

Soit maintenant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ tel que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.

Soit V l'espace défini par:

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1\} \quad (1.2.8)$$

Théorème 1.3 *L'espace V est un sous-espace fermé de H_1 .*

Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, alors l'inégalité de Korn

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq C \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V \quad (1.2.9)$$

est vérifiée sur le sous-espace V .

En utilisant ce résultat, on trouve que:

Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, alors $v \longrightarrow \|\varepsilon(v)\|_Q$ est une norme sur le sous-espace V défini par (1.2.8) équivalente à la norme canonique $\|\cdot\|_{H_1}$, et grâce à un théorème de trace de Sobolev, il existe $d_\Omega > 0$ tel que:

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \leq d_\Omega \|v\|_V \quad (1.2.10)$$

Nous considérons le produit scalaire défini par:

$$\langle u, v \rangle_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u, v \in V \quad (1.2.11)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, c'est à dire:

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \quad \forall v \in V \quad (1.2.12)$$

Espaces liés à l'opérateur divergence

Pour l'opérateur défini par (1.2.5), on va introduire l'espace Q_1 défini par:

$$Q_1 = \{ \sigma \in Q \mid \operatorname{div} \sigma \in H \} \quad (1.2.13)$$

muni du produit scalaire:

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{Q_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_Q + \langle \operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau \rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in Q_1. \quad (1.2.14)$$

et de norme associée par $|\cdot|_{Q_1}$.

On obtient que l'injection $Q_1 \subset Q$ et l'opérateur divergence $\operatorname{div} : Q_1 \longrightarrow H$ sont deux opérateurs continus. De plus, en utilisant (1.2.5) et le fait qu'on peut identifier H et Q à des sous espaces de D' et $\mathcal{D}'$, on obtient:

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_Q = 0 \quad \forall \sigma \in Q, \varphi \in D. \quad (1.2.15)$$

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_Q = 0 \quad \forall \sigma \in Q_1, \varphi \in D \quad (1.2.16)$$

Maintenant, on considère l'espace $C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$ défini par:

$$C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d} = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}); i, j = \overline{1, d} \}$$

$C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$ est dense dans Q . De plus, on peut définir l'*application trace* pour l'espace Q_1 en utilisant le résultat suivant:

Théorème 1.4 *Il existe une application linéaire, continue et surjective $\overline{\gamma} : Q_1 \longrightarrow H'_\Gamma$ telle que:*

$$\langle \overline{\gamma} \sigma, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma \nu \cdot \xi da \quad \text{pour tout } \xi \in H_\Gamma \text{ et } \sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d} \quad (1.2.17)$$

avec $\sigma \nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij} \nu_j); i = \overline{1, d}$. Pour tout $\sigma \in Q_1$, l'image $\overline{\gamma} \sigma \in H'_\Gamma$ est l'élément de H'_Γ vérifiant l'égalité:

$$\langle \bar{\gamma}\sigma, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_H + \langle \operatorname{div} \sigma, u \rangle_H, \quad \forall u \in H_1 \quad (1.2.18)$$

De plus, il existe une application linéaire et continue; $\bar{Z} : H'_\Gamma \longrightarrow Q_1$ telle que:

$$\bar{\gamma}(\bar{Z}(\Sigma)) = \Sigma, \quad \forall \Sigma \in H'_\Gamma$$

pour simplifier les notations (1.2.18), on prend $\bar{\gamma}\sigma = \sigma\nu$; qu'on appelle formule de Green:

Si σ est régulière, alors:

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma \nu v \, da \quad \forall u \in H_1 \quad (1.2.19)$$

1.2.2 Inéquations variationnelles elliptiques

Soit V un espace de Banach réflexif muni d'un produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|_V$.

Soit $K \subset V$ un sous ensemble convexe, fermé et non vide de V .

Soit $A : V \longrightarrow V$ un opérateur, $j : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre et $f \in V$.

On considère le problème suivant:

Problème (P): Trouver $u \in K$ tel que:

$$(Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in K \quad (1.2.20)$$

Le problème (P) est appelé *inéquation variationnelle de seconde espèce* sur K .

Théorème 1.5 *Si A est un opérateur, fortement monotone et de Lipschitz et j est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement, alors l'inéquation variationnelle elliptique (1.2.20) admet une solution unique.*

Chapitre 2

Approximation interne des inéquations quasi-variationnelles

Sommaire

2.1	Inéquations quasi-variationnelles	19
2.2	Existence et unicité	20
2.3	Approximation interne et résultats de convergence	22

Ce chapitre est consacré à l'approximation numérique d'une classe importante d'inéquations quasi-variationnelles qui ont été introduites dans [4] par Benssousan et Lions pour l'étude des problèmes de contrôle impulsionnel. Ensuite, elles ont été utilisées par plusieurs auteurs pour l'étude des problèmes non linéaires en mécanique (problème de contact unilatéral,...etc).

2.1 Inéquations quasi-variationnelles

Soit V un espace de Banach réflexif muni d'un produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|_V$.

Soit $K \subset V$ un sous ensemble convexe, fermé et non vide de V .

Soit $A : V \longrightarrow V$ un opérateur, $j : V \times V \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle et $f \in V$.

On considère le problème suivant:

Problème (P₁): Trouver $u \in K$ tel que:

$$(Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in K$$

Pour résoudre ce problème on suppose que A est fortement monotone et de Lipschitz, c'est à dire vérifiant les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ (Au - Av, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \\ (b) \text{ Il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ \|Au - Av\|_V \leq M \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

La fonctionnelle j vérifie la propriété suivante:

Pour tout $u \in V$:

$$j(u, \cdot) : V \longrightarrow]-\infty, +\infty] \text{ est convexe, propre et semi-continue inférieurement sur } V, \quad (2.1.2)$$

et satisfait:

$$|j(u_1, v_2) + j(u_2, v_1) - j(u_1, v_1) - j(u_2, v_2)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K \quad (2.1.3)$$

où c est une constante positive telle que $c < m$.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

2.2 Existence et unicité

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (2.1.1) – (2.1.3), le problème (P_1) admet une solution unique.*

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes. Dans la première étape, on introduit un problème intermédiaire:

Pour $\omega \in K$, on définit le problème (P_ω) suivant:

Problème (P_ω) : Trouver $u_\omega \in K$ tel que:

$$(Au_\omega, v - u_\omega) + j(\omega, v) - j(\omega, u_\omega) \geq (f, v - u_\omega)_V \quad \forall v \in K.$$

Lemme 2.1 *Le problème (P_ω) admet une unique solution u_ω .*

Preuve. A est un opérateur Lipschitzien et fortement monotone, la fonction $j(\omega, \cdot)$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement, donc le problème (P_ω) admet une solution unique u_ω . ■

Dans la deuxième étape, On définit l'application suivante:

$$\begin{aligned} S & : K \longrightarrow K \\ w & \longmapsto S(w) = u_w \end{aligned}$$

On a:

Proposition 2.2 *S admet un unique point fixe $\omega^* \in K$ et u_{ω^*} est l'unique solution du problème (P_1) .*

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Banach. En effet, soient $\omega_1, \omega_2 \in K$ et $u_{\omega_1}, u_{\omega_2}$ les solutions correspondantes du lemme 2.1.

Alors on a: $u_{\omega_i} \in K, i = 1, 2$ et vérifie l'inéquation quasi-variationnelle suivante:

$$(Au_{\omega_i}, v - u_{\omega_i})_V + j(\omega_i, v) - j(\omega_i, u_{\omega_i}) \geq (f, v - u_{\omega_i})_V \quad \forall v \in K$$

On prend $v = u_{\omega_2}$ dans l'inéquation vérifiée par u_{ω_1} et $v = u_{\omega_1}$ dans l'inéquation vérifiée par u_{ω_2} , on obtient les inégalités suivantes:

$$(Au_{\omega_1}, u_{\omega_2} - u_{\omega_1})_V + j(\omega_1, u_{\omega_2}) - j(\omega_1, u_{\omega_1}) \geq (f, u_{\omega_2} - u_{\omega_1})_V, \quad (2.2.1)$$

$$(Au_{\omega_2}, u_{\omega_1} - u_{\omega_2})_V + j(\omega_2, u_{\omega_1}) - j(\omega_2, u_{\omega_2}) \geq (f, u_{\omega_1} - u_{\omega_2})_V. \quad (2.2.2)$$

En additionnant (2.2.1) et (2.2.2), on obtient l'inégalité:

$$(Au_{\omega_1} - Au_{\omega_2}, u_{\omega_1} - u_{\omega_2})_V \leq |j(\omega_1, u_{\omega_2}) - j(\omega_1, u_{\omega_1}) + j(\omega_2, u_{\omega_1}) - j(\omega_2, u_{\omega_2})|$$

$$\stackrel{(2.1.3)}{\leq} c \|\omega_1 - \omega_2\|_V \|u_{\omega_1} - u_{\omega_2}\|_V; \forall \omega_1, \omega_2 \in K$$

où c est une constante positive. En utilisant (2.1.1) (a), on déduit que:

$$m \|u_{\omega_1} - u_{\omega_2}\|_V^2 \leq c \|\omega_1 - \omega_2\|_V \|u_{\omega_1} - u_{\omega_2}\|_V$$

et donc:

$$\|u_{\omega_1} - u_{\omega_2}\|_V \leq \frac{c}{m} \|\omega_1 - \omega_2\|_V$$

Puisque $c/m < 1$, S est une application contractante, donc elle admet un point fixe unique ω^* et u_{ω^*} est la solution unique du problème (P_1) . ■

Remarque 2.1. Le problème (P_1) peut être résolu par la méthode itérative:

Problème (P^1) : Pour $u^0 \in K$, trouver $u^1 \in K$ tel que:

$$(Au^1, v - u^1) + j(u^0, v) - j(u^0, u^1) \geq (f, v - u^1)_V \quad \forall v \in K.$$

A la $n^{\text{ème}}$ étape connaissant u^{n-1} , on définit le problème itératif (P^n) suivant:

Problème (P^n) : Trouver $u^n \in K$ tel que:

$$(Au^n, v - u^n) + j(u^{n-1}, v) - j(u^{n-1}, u^n) \geq (f, v - u^n)_V \quad \forall v \in K.$$

De même, le problème (P^n) admet une solution unique u^n et:

$$\begin{aligned} \|u^n - u\|_V &\leq k^n \|u^0 - u\|_V \\ &\leq Ck^n, \quad \text{où } k = \frac{c}{m} < 1. \end{aligned}$$

2.3 Approximation interne et résultats de convergence

Etant donné $(V_h)_h$ une famille de sous-espaces de V de dimension finie, indexée par h provenant de la discrétisation régulière par élément finis du domaine Ω .

Soit $(K_h) \subset V_h$ une famille de convexes fermés non vides inclus dans V_h approchant le convexe K au sens suivant:

- (i) $\forall v \in K, \exists r_h v \in K_h$ tel que $r_h v \longrightarrow v$ fortement dans V ,
- (ii) $\forall v_h \in K_h$ avec $v_h \rightharpoonup v$ dans V , Alors $v \in K$. (voir [1]).

On approche la fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$ par une famille de fonctionnelles $(j_h)_h$ tel que pour tout $u \in V$, $(j_h)_h$ satisfait les conditions suivantes:

$$\forall h, j_h(u, \cdot) : V_h \longrightarrow]-\infty, +\infty] \text{ est convexe, semi-continue inférieurement,} \quad (2.3.1)$$

la famille $(j_h)_h$ est uniformément propre en h , c'est-à-dire:

$$\exists \lambda = \lambda(u) \in V, \exists \mu = \mu(u) \in \mathbb{R} \text{ telle que } j_h(u, v_h) \geq \lambda(v_h) + \mu \quad \forall v_h \in V, \forall h \quad (2.3.2)$$

$\forall v_h \in V$ avec $v_h \longrightarrow v$ faiblement dans V , on a:

$$\liminf_{h \rightarrow 0} j_h(u, r_h v) = j(u, v) \quad \forall v \in K. \quad (2.3.3)$$

De plus, on suppose que pour tout h , nous avons:

$$\begin{aligned} & |j_h(u_h^1, v_h^2) + j_h(u_h^2, v_h^1) - j_h(u_h^1, v_h^1) - j_h(u_h^2, v_h^2)| \\ & \leq c \|u_h^1 - u_h^2\|_V \|v_h^1 - v_h^2\|_V \quad \forall u_h^1, u_h^2, v_h^1, v_h^2 \in K_h \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

On définit alors le problème approché (P_h) par le problème suivant:

Problème (P_h) : Trouver $u_h \in K_h$ tel que:

$$(Au_h, v_h - u_h)_V + j_h(u_h, v_h) - j_h(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V \quad \forall v_h \in K_h.$$

Proposition 2.3 *Le problème approché (P_h) admet une solution unique.*

Preuve. Soit l'application S_h définie par:

$$\begin{aligned} S_h : K_h &\longrightarrow K_h \\ w_h &\longrightarrow S_h w_h \end{aligned}$$

■

Preuve. où $S_h w_h$ est solution de l'inéquation variationnelle (P_{S_h}) :

$$(A(S_h \omega_h), v_h - S_h \omega_h)_V + j_h(\omega_h, v_h) - j_h(\omega_h, S_h \omega_h) \geq (f, v_h - S_h \omega_h)_V \quad \forall v_h \in K_h,$$

■

Preuve. est une contraction, donc elle admet un point fixe u_h et u_h est l'unique solution du problème (P_h) . ■

On a le résultat suivant:

Théorème 2.4 Soit u la solution du problème (P_1) et u_h la solution du problème (P_h)

Alors $u_h \longrightarrow u$ fortement dans V , quand $h \longrightarrow 0$.

Preuve. La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes; ■

1^{ère} étape : Soit $(u_h^0)_h$ une suite uniformément bornée telle que $u_h^0 \in K_h$. De l'inéquation variationnelle (P_{S_h}) , on peut définir une suite u_h^n par:

$$u_h^n = S_h u_h^{n-1}, n \geq 1 \tag{2.3.5}$$

Ainsi on a:

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq k^n \|u_h^0 - u_h\|_V \leq C k^n, \quad \left(k = \frac{c}{m} < 1\right). \tag{2.3.6}$$

d'où $u_h^n \longrightarrow u_h$ fortement dans V , quand $n \longrightarrow \infty$.

2^{ème} étape Pour obtenir la convergence de $(u_h)_n$ vers u , on définit une suite de problèmes auxiliaires comme suit:

Problème (P_h^n) : Trouver $w_h^n \in K_h$ tel que:

$$(A\omega_h^n, v_h - \omega_h^n)_V + j_h(u^{n-1}, v_h) - j(u^{n-1}, \omega_h^n) \geq (f, v_h - w_h^n)_V \quad \forall v_h \in K_h \tag{2.3.7}$$

où $u^{n-1} \in K$ (voir [18]).

On a le résultat de convergence suivant (voir [18]).

Proposition 2.5 $\omega_h^n \longrightarrow u^n$ fortement dans V quand $h \longrightarrow 0$

3^{ème} étape On a:

$$\|u_h - u\|_V \leq \|u_h - u_h^n\|_V + \|u_h^n - u^n\|_V + \|u^n - u\|_V \quad \forall n \geq 0. \quad (2.3.8)$$

D'après les définitions de u_h^n et w_h^n , on a:

$$\begin{aligned} m \|u_h^n - w_h^n\|_V^2 &\leq (Aw_h^n - Au_h^n, w_h^n - u_h^n)_V \\ &\leq j_h(u^{n-1}, u_h^n) + j_h(u_h^{n-1}, \omega_h^n) \\ &\quad - j_h(u^{n-1}, w_h^n) - j_h(u_h^{n-1}, u_h^n) \leq c \|u_h^{n-1} - u^{n-1}\|_V \|u_h^n - w_h^n\|_V \end{aligned}$$

D'où:

$$\|u_h^n - w_h^n\|_V \leq k \|u_h^{n-1} - u^{n-1}\|_V \leq \|u_h^{n-1} - u^{n-1}\|_V \quad (2.3.9)$$

En prenant $w_h^0 = u_h^0$, on montre par récurrence que:

$$\|u_h^n - u^n\|_V \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|w_h^i - u^i\|_V \quad \forall n \geq 0 \quad (2.3.10)$$

En effet:

pour $n = 0$ (vraie)

On suppose que la relation (2.3.10) est vraie pour $(n - 1)$, c'est à dire:

$$\|u_h^{n-1} - u^{n-1}\|_V \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|w_h^i - u^i\|_V$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u^n\|_V &\leq \|u_h^n - w_h^n\|_V + \|w_h^n - u^n\|_V \\ &\leq \|u_h^{n-1} - u^{n-1}\|_V + \|w_h^n - u^n\|_V \\ &\leq \sum_{i=0}^n \|w_h^i - u^i\|_V. \end{aligned}$$

En utilisant (2.3.6), il vient qu'il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que:

$$\|u_h^n - u^n\|_V + \|u^n - u\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon. \quad (2.3.11)$$

En choisissant alors $n = N_\varepsilon$ dans (2.3.11), on aura:

$$\|u_h - u\|_V \leq \|u_h - u_h^{N_\varepsilon}\|_V + \|u_h^{N_\varepsilon} - u^{N_\varepsilon}\|_V + \|u^{N_\varepsilon} - u\|_V.$$

En utilisant (2.3.11) et (2.3.8), on obtient:

$$\|u_h - u\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^n \|w_h^i - u^i\|_V. \quad (2.3.12)$$

D'après la proposition 2.2 et pour tout i , il existe $H_\varepsilon^i > 0$ tel que:

$$\|w_h^i - u^i\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2(N_\varepsilon + 1)} \quad \forall h \leq H_\varepsilon^i. \quad (2.3.13)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. En utilisant (2.3.12) et (2.3.13) on conclue qu'il existe

$H_\varepsilon = \min \{H_\varepsilon^i, i = 0, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que:

$$\|u_h - u\|_V \leq \varepsilon, \quad \forall h < H_\varepsilon.$$

Ainsi

$$u_h \longrightarrow u \text{ fortement dans } V \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

Chapitre 3

Approximation du problème de contact unilatéral sans frottement avec compliance normale

Sommaire

3.1	Formulation variationnelle du problème mécanique	27
3.2	Existence et unicité	32
3.3	La dépendance continue	34
3.4	Approximation par éléments finis	36

Dans cette partie, on va étudier un problème statique de contact unilatéral sans frottement avec compliance normale. Notre but principal est de prouver que le problème variationnel correspondant au problème mécanique ci-dessous a une solution unique en utilisant des arguments standards sur les inéquations variationnelles suivi d'une technique du point fixe de Banach.

D'autre part, on étudie la dépendance continue par rapport à la fonction de contact. Enfin, on étudie l'approximation numérique du problème par des éléments finis conformes. On établit une estimation d'erreur et on montre la convergence d'une méthode itérative.

3.1 Formulation variationnelle du problème mécanique

On considère un corps élastique linéaire occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, supposé ouvert, borné et de frontière Γ assez régulière, constituée de trois parties: $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3}$, tels que Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 des ouverts disjoints et $mes(\Gamma_1) > 0$.

Ce corps est encastré en Γ_1 , soumis à une densité de forces volumiques φ_1 , à des forces surfaciques de densité φ_2 sur Γ_2 et en contact unilatéral sans frottement avec une fondation déformable le long de Γ_3 .

Sous ces conditions, la formulation classique du problème mécanique est donnée par le problème suivant:

Problème (P_1). Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que:

$$\operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.1)$$

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (3.1.3)$$

$$\sigma\nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (3.1.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \quad (\sigma_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0 \\ \sigma_\tau = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.1.5)$$

Pour l'étude du problème (P_1), on aura besoin des hypothèses suivantes:

ν est le vecteur normal extérieur à Γ ; $u = (u_i)$ est le champ des déplacements; $u_\nu = u \cdot \nu$ est le déplacement normal sur Γ . Le tenseur des déformations est donné par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

le tenseur des contraintes est $\sigma = (\sigma_{ij})$; $\sigma\nu$ est le vecteur des contraintes de Cauchy, $\sigma_\nu = \sigma\nu \cdot \nu$ est la contrainte normale, $\sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu$ est la contrainte tangentielle, $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$ est la divergence de σ . On note par S_2 l'espace des tenseurs symétriques de second ordre dans $\mathbb{R}^2$.

Pour établir la formulation variationnelle, on aura besoin des espaces de fonctions suivant:

$$H = (L^2(\Omega))^2, \quad Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_1 = (H^1(\Omega))^2; \quad Q_1 = \{\sigma \in Q \mid \operatorname{div} \sigma \in H\}$$

H, Q sont des espaces de Hilbert munis respectivement des produits scalaires:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_Q &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx.\end{aligned}$$

Soit V le sous espace fermé de H_1 défini par:

$$V = \{v \in H_1 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

et l'ensemble des déplacements admissibles donné par:

$$K = \{v \in V : v_{\nu} \leq g \text{ sur } \Gamma_3\},$$

où $g \geq 0$. Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, on a l'inégalité de Korn suivante [5]:

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_{\Omega} \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V, \quad (3.1.6)$$

où $c_{\Omega} > 0$ est une constante qui dépend seulement de Ω et Γ_1 .

On munit V du produit scalaire donné par:

$$(u, v)_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q$$

et la norme associée $\|\cdot\|_V$. D'après (3.1.6), $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont deux normes équivalentes et $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. D'autre part, d'après un théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $d_{\Omega} > 0$ qui dépend de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que:

$$\|v\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \leq d_{\Omega} \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (3.1.7)$$

Pour l'étude du problème mécanique (P_1) , on suppose que l'opérateur d'élasticité linéaire $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkh}) : \Omega \times S_2 \rightarrow S_2$ vérifie les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \mathcal{E}_{ijkh} \in L^{\infty}(\Gamma_3), 1 \leq i, j, k, h \leq d. \\ (b) \quad \mathcal{E}\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{E}\tau, \forall \sigma, \tau \in S_2, p.p. \text{ dans } \Omega. \\ (c) \quad \text{Il existe } \alpha > 0 \text{ telle que} \\ \tau \mathcal{E} \cdot \tau \geq \alpha |\tau|^2 \quad \forall \tau \in S_2, p.p. \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1.8)$$

On définit la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $V \times V$ par:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{E}\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) dx.$$

D'après (3.1.8), il vient que $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive, c'est à dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \\ (b) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (3.1.9)$$

Les forces volumiques et surfaciques ont la régularité:

$$\varphi_1 \in V, \quad \varphi_2 \in (L^2(\Gamma_2))^2. \quad (3.1.10)$$

D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe $f \in V$ tel que:

$$(f, v)_V = (\varphi_1, v)_H + (\varphi_2, \gamma v)_{(L^2(\Gamma_2))^2}$$

On suppose aussi que la fonction de compliance normale p vérifie les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ p :]-\infty, g] \rightarrow \mathbb{R}_+; \\ (b) \text{ il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ |p(v_1) - p(v_2)| \leq L_p |v_1 - v_2|, \text{ pour tout } v_1, v_2 \leq g; \\ (c) \ p(v) = 0 \text{ pour tout } v < 0. \end{array} \right. \quad (3.1.11)$$

D'autre part, on définit la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j(v, w) = \int_{\Gamma_3} p(v_\nu) w_\nu da \quad \forall v, w \in V. \quad (3.1.12)$$

Maintenant, dans le but d'établir la formulation faible du problème (P_1) , on suppose que u est régulière et vérifiée (3.1.1) – (3.1.5). En effet, on prend $v \in V$ et on multiplie l'équation d'équilibre (3.1.2) par $v - u$. En intégrant et en utilisant la formule de Green, on obtient l'équation suivante:

$$\int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(v) - \varepsilon(u)) dx = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot (v - u) dx + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) da.$$

Tenant compte des conditions aux limites (3.1.3) et $v = 0$ sur Γ_1 , il vient que:

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) da = \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot (v - u) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da.$$

D'autre part, puisque $\sigma_\tau = 0$ sur Γ_3 , on aura:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot (v - u) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da,$$

et

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da = \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - u_\nu) da - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (v_\nu - u_\nu) da.$$

D'où on déduit que la fonction u vérifie l'inéquation:

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V + \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - u_\nu) da \quad \forall v \in V.$$

Par ailleurs, on a:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - u_\nu) da &= \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) ((v_\nu - g) - (u_\nu - g)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - g) da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (u_\nu - g) da. \end{aligned}$$

En utilisant la condition (3.1.5), il vient que

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - g) da \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

et

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (u_\nu - g) da = 0.$$

Ainsi

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - u_\nu) da \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Nous obtenons alors la formulation variationnelle du problème (P_1) donnée par le problème suivant:

Problème (P_2) Trouver le champ des déplacements $u \in K$ tel que:

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in K. \quad (3.1.13)$$

Réciproquement, on a:

Lemme 3.1 *Si u est une solution régulière du problème (P_2) , alors u vérifie les équations et les conditions aux limites du problème (P_1) .*

Preuve. Soit u une solution régulière du problème (P_2) , on montre que u satisfait les conditions (3.1.1) – (3.1.5).

En effet, soit $\varphi \in D(\Omega)^2$, posons $v = u + \varphi$ dans l'inéquation (3.1.13), on a:

$$a(u, \varphi) + j(u, u + \varphi) - j(u, u) \geq (f, \varphi)_V,$$

Où encore

$$\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_Q + j(u, u + \varphi) - j(u, u) \geq (f, \varphi)_V,$$

En appliquant la formule de Green, on obtient:

$$-\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(u + \varphi - u)_\nu da \geq (\varphi_1, \varphi)_H + (\varphi_2, \gamma \varphi)_{L^2(\Gamma_2)^2}. \quad (3.1.14)$$

Soit $\varphi \in D(\Omega)^2$, alors $\varphi = 0$ sur Γ , ainsi

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + \langle \varphi_1, \varphi \rangle_H \leq 0$$

Maintenant pour $v = u - \varphi$ et par la même procédure, on obtient de même:

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + (\varphi_1, \varphi)_H \geq 0,$$

Et donc:

$$\langle \operatorname{div} \sigma + \varphi_1, \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega)^2$$

D'où:

$$\operatorname{div} \sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.15)$$

Maintenant, en appliquant encore la formule de Green et en utilisant l'inéquation (3.1.14), on en déduit:

$$\langle \sigma \nu, \gamma v - \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - (\operatorname{div} \sigma, v) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V.$$

Alors, (3.1.14) et (3.1.15) impliquent l'inégalité suivante:

$$\langle \sigma \nu, \gamma v - \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + j(u, v) - j(u, u) \geq (\varphi_2, \gamma v - \gamma u)_{L^2(\Gamma_2)^2}. \quad (3.1.16)$$

.

Soit $\varphi \in D(\bar{\Omega})^2$, où $\varphi = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ et soit la fonction $v = u \pm \varphi$; d'après (3.1.16), il vient que:

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma \nu - \varphi_2) \gamma \varphi da = 0.$$

comme φ est une fonction arbitraire, alors on déduit que:

$$\sigma \nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (3.1.17)$$

- Choisissons φ une fonction régulière qui s'annule sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ telle que $\varphi_\tau = 0$ sur Γ_3 .

Par le même raisonnement:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \varphi_\tau da = 0,$$

Ainsi, comme la fonction φ est arbitraire, on obtient:

$$\sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3.$$

- Tenant compte de (3.1.16) et (3.1.17), on obtient:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\gamma v - \gamma u) da + j(u, v) - j(u, u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

c'est-à dire, on aura:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - u_\nu) da \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (3.1.18)$$

Puisque $u \in K$, alors on a: $u_\nu \leq g$. En posant $v_\nu = g$ puis $v_\nu = 2u_\nu - g$ dans l'inéquation (3.1.18), on obtient:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (u_\nu - g) da = 0. \quad (3.1.19)$$

Il vient alors:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu + p(u_\nu)) (v_\nu - g) da \geq 0 \quad \forall v \in K$$

qui implique $\sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0$ sur Γ_3 et finalement, en utilisant l'équation (3.1.19), on obtient la relation (3.1.5). ■

3.2 Existence et unicité

Le but principal dans cette partie est d'obtenir l'existence et l'unicité pour le problème variationnel (P_2) .

On a le résultat suivant:

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.11), le problème (P_2) admet une solution unique si $d_\Omega^2 L_p < m$.*

Preuve. La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments du point fixe de Banach. ■

En effet, soit $\lambda \in K$ et considérons le problème variationnel suivant:

Problème (P_2^λ): Trouver $u_\lambda \in K$ tel que:

$$a(u, v - u) + j(\lambda, v) - j(\lambda, u_\lambda) \geq (f, v - u_\lambda)_V \quad \forall v \in K \quad (3.2.1)$$

on a le lemme suivant:

Lemme 3.2 *Pour chaque $\lambda \in K$, le problème (P_2^λ) admet une unique solution.*

Preuve. Les hypothèses (3.1.9) impliquent que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, continue et coercive. De plus, d'après (3.1.12), $j(\lambda, \cdot)$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement. Alors d'après la théorie des inéquations variationnelles elliptiques [4] et le fait que K est un sous-ensemble convexe, fermé et non- vide de V , l'inéquation (3.2.1) admet une unique solution. ■

Ainsi, le lemme précédent nous permet de considérer l'application $\Phi : K \rightarrow K$ définie par:

$$\Phi(\lambda) = u_\lambda.$$

Lemme 3.3 *Si $d_\Omega^2 L_p < m$, l'application Φ admet un unique point fixe $\lambda^* \in K$ et u_{λ^*} est une solution unique du problème (P_2).*

Preuve. En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

On note par $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}$ les solutions correspondantes du problème (3.1). Alors, on a $u_{\lambda_i} \in K$, $i = 1, 2$ et vérifie l'inéquation variationnelle:

$$a(u_{\lambda_i}, v - u_{\lambda_i}) + j(\lambda_i, v) - j(\lambda_i, u_{\lambda_i}) \geq (f, v - u_{\lambda_i})_V \quad \forall v \in K.$$

On prend $v = u_{\lambda_2}$ dans l'inéquation variationnelle vérifiée par u_{λ_1} , puis $v = u_{\lambda_1}$ dans l'inéquation variationnelle vérifiée par u_{λ_2} , et en additionnant les deux inéquations obtenues, on aura:

$$\begin{aligned} a(u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}, u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}) &\leq j(\lambda_1, u_{\lambda_2}) - j(\lambda_1, u_{\lambda_1}) + j(\lambda_2, u_{\lambda_1}) - j(\lambda_2, u_{\lambda_2}) \\ &= \int_{\Gamma_3} (p(\lambda_{1\nu}) - p(\lambda_{2\nu}))(u_{\lambda_{2\nu}} - u_{\lambda_{1\nu}}) da \end{aligned}$$

En utilisant alors (3.1.10) (b), on déduit que:

$$\begin{aligned} m \|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_V^2 &\leq L_p \int_{\Gamma_3} |\lambda_{1\nu} - \lambda_{2\nu}| |u_{\lambda_{2\nu}} - u_{\lambda_{1\nu}}| da \\ &\leq L_p \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.1.6), il vient alors:

$$m \|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_V^2 \leq L_p d_\Omega^2 \|\lambda_1 - \lambda_2\|_V \|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_V,$$

C'est-à-dire:

$$\|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_V \leq \frac{L_p d_\Omega^2}{m} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_V.$$

D'où:

$$\|\Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2)\|_V \leq \frac{L_p d_\Omega^2}{m} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$$

Alors, si $d_\Omega^2 L_p < m$, on déduit que Φ est une application contractante sur K et donc par le théorème de point fixe de Banach, l'application Φ admet un point fixe unique λ^* et u_{λ^*} est une solution unique de l'inéquation (3.2.1). ■

3.3 La dépendance continue

Dans cette partie, on étudie le comportement de la solution faible du problème (P_1) , en tenant compte des perturbations de la fonction de contact p .

Pour tout $\alpha \geq 0$, on considère une perturbation p^α de la solution p satisfaisant (3.1.2) et (3.1.10) avec L_p^α une constante de Lipschitz. On introduit la fonctionnelle j^α , qui a été obtenue en remplaçant p par p^α dans j . On considère alors le problème suivant:

Problème (P_1^α) : Pour tout $\alpha \geq 0$, trouver un champ des déplacements $u^\alpha \in K$ tel que :

$$a(u^\alpha, v - u^\alpha) + j^\alpha(u^\alpha, v) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \geq (f, v - u^\alpha)_V \quad \forall v \in K. \quad (3.2.2)$$

En utilisant les mêmes arguments que pour la démonstration du théorème 3.1, on déduit que pour tout $\alpha \geq 0$, le problème (P_1^α) admet une unique solution u^α .

Maintenant, on suppose que la fonction p^α vérifie les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \delta > 0 \text{ et } \varphi_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tels que} \\ (a) \quad |p^\alpha(v) - p(v)| \leq \varphi_p(\alpha) |v| \quad \forall v \leq g \\ (b) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_p(\alpha) = 0 \\ (c) \quad L_p^\alpha + \delta < m/d_\Omega^2 \quad \text{pour tout } \alpha \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

On a le résultat de convergence suivant:

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (3.2.3),*

$$u^\alpha \longrightarrow u \text{ fortement dans } V \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0.$$

Preuve. Soit $\alpha \geq 0$. En utilisant (3.1.13) et (3.2.2) on obtient:

$$\begin{aligned} a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) &\leq j(u, u^\alpha) - j(u, u) + j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \\ &= \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p^\alpha(u_\nu^\alpha)) (u_\nu^\alpha - u_\nu) da. \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p^\alpha(u_\nu^\alpha)) (u_\nu^\alpha - u_\nu) da \right| \\ &\leq \|p(u_\nu) - p^\alpha(u_\nu^\alpha)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u^\alpha - u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

En utilisant (3.2.3) (a), il vient que:

$$\|p(u_\nu) - p^\alpha(u_\nu^\alpha)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq L_p^\alpha \|u^\alpha - u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} + \varphi_p(\alpha) \|u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}.$$

Maintenant, en utilisant l'inéquation précédente et (3.2.4), on obtient:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p^\alpha(u_\nu^\alpha)) (u_\nu^\alpha - u_\nu) da \right| \\ &\leq L_p^\alpha \|u^\alpha - u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}^2 + \varphi_p(\alpha) \|u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \|u^\alpha - u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.1.6), (3.1.8) (b) et (3.2.3) (c), on obtient:

$$m \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq d_\Omega^2 \left(\frac{m}{d_\Omega^2} - \delta \right) \|u^\alpha - u\|_V^2 + d_\Omega^2 \varphi_p(\alpha) \|u\|_V \|u^\alpha - u\|_V.$$

D'où:

$$\delta \|u^\alpha - u\|_V \leq \varphi_p(\alpha) \|u\|_V.$$

C'est-à-dire le théorème est démontré. ■

3.4 Approximation par éléments finis

Dans cette partie, on va étudier l'approximation par des éléments finis linéaires conformes du problème variationnel (P_2) . Pour simplifier, on suppose que Ω est un domaine polygonal, et pour tout paramètre $h > 0$, on considère une partition S_h de Ω en triangles de taille maximale h . La triangulation S_h est supposée régulière; $\overline{\Omega} = \bigcup_{1 \leq e \leq E} \overline{\Omega_e}$; $\Omega_e \cap \Omega_l = \emptyset$ si $e \neq l$ (voir [9]). Pour chaque élément $\Omega_e \in S_h$, $\mathbb{P}_1(\Omega_e)$ désigne l'ensemble des polynômes de degré total inférieur ou égal à 1 sur Ω_e . On utilise l'espace de dimension finie $V_h \subset V$ défini par:

$$V_h = \left\{ v_h \in [C^0(\overline{\Omega})]^2, v_h|_{\Omega_e} \in [\mathbb{P}_1(\overline{\Omega_e})]^2, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

Soit $K_h \subset V_h$ défini par:

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_{\nu h} \leq g \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

On remarque qu'on a $K_h \subset K$.

On définit le problème approché (P_h) par:

Problème (P_h) : Trouver $u_h \in K_h$ tel que:

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V \quad \forall v_h \in K_h. \quad (3.3.1)$$

Sous les hypothèses du théorème (3.2) avec la même valeur de c , le problème (P_h) admet une unique solution $u_h \in K_h$. Par la suite, on établit une inégalité de type Céa:

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses du théorème 3.2, il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V \leq c \inf_{v_h \in K_h} \left\{ \|u - v_h\|_V + \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} + \|u - v_h\|_V^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Preuve. En utilisant (3.1.13) avec $v = u_h$ et (3.3.1), on obtient:

$$\begin{aligned} m \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &\leq a(u - u_h, u - v_h) + a(u, v_h - u) \\ &\quad + j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) - (f, v_h - u)_V, \end{aligned}$$

C'est-à-dire:

$$m \|u - u_h\|_V^2 \leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \quad (3.3.3)$$

Où

$$A_1 = a(u - u_h, u - v_h)$$

$$A_2 = a(u, v_h - u) + j(u, v_h) - j(u, u) - (f, v_h - u)_V,$$

$$A_3 = j(u, u_h) - j(u_h, u_h) + j(u_h, u) - j(u, u),$$

$$A_4 = j(u_h, v_h) - j(u, v_h) + j(u, u) - j(u_h, u).$$

En estimant chacun des quatre termes, on obtient:

$$|A_1| \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \quad (3.3.4)$$

$$|A_2| \leq M \|u - v_h\|_V + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}. \quad (3.3.5)$$

Et comme

$$A_3 = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(u_{h\nu})) (u_{h\nu} - u_\nu) da,$$

On obtient:

$$|A_3| \leq \int_{\Gamma_3} L_p |u_\nu - u_{h\nu}|^2 da$$

Et utilisant (3.1.7), on déduit que:

$$|A_3| \leq d_\Omega^2 L_p \|u - u_h\|_V^2 \quad (3.3.6)$$

aussi on a:

$$A_4 = \int_{\Gamma_3} (p(u_{h\nu}) - p(u_\nu)) (v_{h\nu} - u_\nu) da,$$

et

$$\begin{aligned} |A_4| &\leq \int_{\Gamma_3} L_p |u_\nu - u_{h\nu}| |u_\nu - v_{h\nu}| da \\ &\leq L_p \|u - u_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\leq d_\Omega L_p \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}.$$

En utilisant les inégalités (3.3.4) – (3.3.7) dans (3.3.3) et en appliquant l'inégalité de Young suivante:

$$ab \leq \frac{\delta a^2}{2} + \frac{b^2}{2\delta} \quad \forall \delta > 0, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 \leq c \Big\{ & \|u - v_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}^2 + \|u - v_h\|_V \\ & + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \Big\}, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

d'où l'inéquation (3.3.2). ■

Par ailleurs, on rappelle les résultats standards sur l'interpolation (*voir* [9]),

$$\begin{aligned} \|\pi_h v - v\|_V &\leq c_1 h \|v\|_{(H^2(\Omega))^2}, \\ \|\pi_h v - v\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} &\leq c_1 h^{\frac{3}{2}} \|v\|_{(H^2(\Omega))^2}, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

pour tout $v \in (H^2(\Omega))^2 \cap V$, où $\pi_h v$ est l'interpolé de la fonction v . Maintenant, pour obtenir une estimation d'erreur, nous avons besoin des hypothèses supplémentaires sur la régularité de la solution. En effet, supposons que:

$$u \in (H^2(\Omega))^2 \cap K. \quad (3.3.10)$$

Alors on a la proposition suivante:

Proposition 3.4 *Sous l'hypothèse (3.3.10), on a l'estimation d'erreur:*

$$\|u - u_h\|_V \leq c h^{\frac{3}{4}} \left(\|u\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.3.11)$$

où c est une constante strictement positive indépendante de h .

Preuve. En utilisant (3.3.8), on obtient:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V \leq c \Big\{ & \|u - \pi_h u\|_V + \|u - \pi_h u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2} \\ & + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \|u - \pi_h u\|_{(L^2(\Gamma_3))^2}^{\frac{1}{2}} \Big\}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Il suffit d'appliquer (3.3.9) et (3.3.10). ■

Pour résoudre le problème approché (P_h) , nous allons utiliser la méthode itérative du point fixe. Nous choisissons une valeur initiale $u_h^0 \in K_h$ uniformément bornée; à l'étape n , connaissant u_h^n , on cherche u_h^{n+1} solution du problème itératif suivant:

Problème (P_h^n) : Trouver $u_h^{n+1} \in K_h$ tel que:

$$a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + j(u_h^n, v_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \geq (f, v_h - u_h^{n+1})_V \quad \forall v_h \in K_h \quad (3.3.13)$$

On a le résultat de convergence suivant:

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses de la proposition 3.4, le problème (P_h^n) admet une solution unique et*

$$\|u_h^n - u_h\|_V \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

En plus, il existe une constante $\alpha \in]0, 1[$ telle que

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq c \alpha^n \quad (3.3.14)$$

Preuve. Posons $v_h = u_h^{n+1}$ dans (3.3.1), on obtient l'inégalité suivante:

$$a(u_h, u_h^{n+1} - u_h) + j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) \geq (f, u_h^{n+1} - u_h)_V \quad (3.3.15)$$

Et posons $v_h = u_h^{n+1}$ dans (3.3.13), on obtient l'inégalité suivante:

$$a(u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) + j(u_h^n, u_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \geq (f, u_h - u_h^{n+1})_V \quad (3.3.16)$$

En additionnant (3.3.15) et (3.3.16), il vient que:

$$a(u_h - u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) \leq j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) + j(u_h^n, u_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1})$$

■

Preuve. Alors comme dans la preuve du lemme 3.3, on a:

$$\|u_h^{n+1} - u_h\|_V \leq \frac{d_\Omega^2 L_p}{m} \|u_h^n - u_h\|_V$$

■

Preuve. Posons $\alpha = d_\Omega^2 L_p / m$, on a $\alpha \in]0, 1[$, et on en déduit l'estimation (3.3.14). ■

Chapitre 4

Approximation du problème de contact unilatéral avec frottement et compliance normale

Sommaire

4.1	Formulation du problème mécanique	41
4.2	Existence et unicité	48
4.3	La dépendance continue sur les conditions de contact	50
4.4	Approximation par éléments finis	52
4.4.1	Approximation de l'espace V	52
4.4.2	Estimation d'erreur	53
4.4.3	Résultat de convergence	55

On considère un corps élastique linéaire occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, supposé ouvert, borné et de frontière Γ assez régulière, constituée de trois parties: $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3}$, tels que Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 des ouverts disjoints et $mes(\Gamma_1) > 0$.

Ce corps est encastré en Γ_1 , soumis à une densité de forces volumiques φ_1 , à des forces surfaciques de densité φ_2 sur Γ_2 et en contact unilatéral avec frottement avec une fondation déformable le long de Γ_3 .

4.1 Formulation du problème mécanique

Le problème mécanique qu'on étudie est le problème suivant:

Problème (P): Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que

$$\operatorname{div} \sigma(u) + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.1.1)$$

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (4.1.3)$$

$$\sigma\nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (4.1.4)$$

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \quad (\sigma_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (4.1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq \mu p(u_\nu) \\ |\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu) &\implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu) &\implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_3. \quad (4.1.6)$$

L'équation (4.1.1) représente la loi de comportement élastique, la relation (4.1.2) présente l'équation d'équilibre où φ_1 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω , les conditions (4.1.3) – (4.1.4) sont respectivement, les conditions aux limites de déplacement et traction. Finalement les conditions (4.1.5) – (4.1.6) représentent les conditions de contact unilatéral avec frottement et compliance normale et p une fonction positive.

- Dans le cas où $|\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu)$, la contrainte tangentielle ne peut pas dépasser le seuil $\mu p(u_\nu)$. La surface est adhérente à la fondation, c'est ce qu'on appelle *la phase de collement*.

- Quand $|\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu)$, c'est *la phase de glissement*.

Donc la surface de contact Γ_3 est divisée en trois zones:

le collement, le glissement et la zone séparative où $u_\nu < g$, où il n'y a pas de contact.

On rappelle les espaces utilisés :

S_2 est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^2$, ' $\cdot$ ' et $|\cdot|$ dénotent le produit scalaire et la norme euclidienne dans S_2 et $\mathbb{R}^2$ respectivement, c'est à dire:

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad |v| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S_2, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

On rappelle également les espaces:

$$H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega), \quad i = \overline{1, 2}\} = L^2(\Omega)^2$$

$$Q = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), \ i = \overline{1, 2} \} = L^2(\Omega)_s^{2 \times 2}$$

H et Q sont deux espaces de Hilbert munis des produits scalaires respectifs:

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in Q.$$

et les normes associées $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_Q$.

Pour le champ des déplacements, on utilisera l'espace:

$$H_1 = \{ u \in H \mid \varepsilon(u) \in Q \}.$$

H_1 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = (u, v)_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q \quad \forall u, v \in H_1,$$

et de la norme associée $\|\cdot\|_{H_1}$ et le sous espace fermé V défini par:

$$V = \{ v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \},$$

muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ défini par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

et de la norme associée $\|\cdot\|_V$. Le convexe fermé des champs de déplacements admissibles est défini par

$$K = \{ v \in V \mid v_{\nu} \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

On rappelle la formule bilinéaire symétrique $a(\cdot, \cdot)$ définie au chapitre 3 par:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{E} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) dx$$

vérifiant les conditions de continuité et de coercivité

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \\ (b) \text{ Il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (4.1.7)$$

On rappelle les hypothèses sur la fonction p données par (3.1.11).

Hypothèses sur le coefficient de frottement μ

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } \mu \geq 0 \text{ p.p sur } \Gamma_3 \quad (4.1.8)$$

Hypothèses sur φ_1 et φ_2

$$\varphi_1 \in H \quad (4.1.9)$$

$$\varphi_2 \in L^2(\Gamma_2)^2. \quad (4.1.10)$$

Par ailleurs, en vertu du *théorème de représentation de Riesz-Fréchet*, il existe un élément $f \in V$ tel que:

$$(f, v)_V = (\varphi_1, v)_H + (\varphi_2, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^2} \quad \forall v \in V. \quad (4.1.11)$$

On définit la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) |v_\tau| da \quad \forall (u, v) \in V \times V. \quad (4.1.12)$$

Afin d'établir une formulation variationnelle du problème (P), on donne une forme équivalente des conditions aux limites (4.1.6).

Lemme 4.1 *Si σ_τ et u_τ sont deux fonctions régulières, alors la condition*

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu p(u_\nu) \\ |\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu) \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu) \implies \exists \lambda \geq 0 ; \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_3$$

est équivalente à:

$$|\sigma_\tau| \leq \mu p(u_\nu), \quad \sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau| = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (4.1.13)$$

Preuve. Le résultat est évident si $u_\tau = 0$.

Maintenant si $\sigma_\tau = -\lambda u_\tau$ avec $|\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu)$, il est clair que:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau| = 0.$$

Réciproquement, supposons que:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau| = 0.$$

D'abord, si

$$|\sigma_\tau| = \mu p(u_\nu),$$

alors

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau = -\mu p(u_\nu) |u_\tau| = -|\sigma_\tau| |u_\tau|,$$

donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que: $\sigma_\tau = -\lambda u_\tau$.

Si

$$|\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu),$$

on a:

$$-|\sigma_\tau| |u_\tau| \leq \sigma_\tau \cdot u_\tau \leq |\sigma_\tau| |u_\tau|,$$

d'où

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau| \geq -|\sigma_\tau| |u_\tau| + \mu p(u_\nu) |u_\tau|$$

$$\geq |u_\tau| (-|\sigma_\tau| + \mu p(u_\nu)),$$

or

$$|\sigma_\tau| < \mu p(u_\nu),$$

il vient que $|u_\tau| = 0$ soit $u_\tau = 0$, d'où l'équivalence annoncée. ■

La forme (4.1.13) facilite l'établissement de la formulation variationnelle du problème (P).

On a le résultat suivant:

Lemme 4.2 *Si les fonctions u, σ sont suffisamment régulières et vérifient le problème mécanique (P_1) , alors:*

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in K \quad (4.1.14)$$

Preuve. Soit $v \in K$, en utilisant la formule de Green on a:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_Q + (\operatorname{div} \sigma, (v - u))_H = \int_\Gamma \sigma \nu \cdot (v - u) da \quad \forall v \in K$$

En utilisant (4.1.1) et (4.1.4), on obtient:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_Q &= (\varphi_1, v - u)_H + \int_\Gamma \sigma \nu \cdot (v - u) da. \\ &= (\varphi_1, v - u)_H + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - u) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da, \\ &= (\varphi_1, v - u)_H + \int_{\Gamma_2} \varphi_2 \cdot (v - u) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da \end{aligned}$$

et donc d'après (4.1.12)

$$a(u, v - u) = (f, v - u)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v - u) da$$

D'autre part d'après (4.1.13) et (4.1.6), on a :

$$\begin{aligned} j(u, v) - j(u, u) &= \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) (|v_\tau| - |u_\tau|) da \\ &\leq - \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu p_\tau(u_\nu) |v_\tau - u_\tau| da, \end{aligned}$$

on en déduit en tenant compte du *lemme 2.1* que :

$$\begin{aligned} j(u, v) - j(u, u) &\leq - \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau - u_\tau) da, \\ \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v - u) da &\leq j(u, u) - j(u, v). \end{aligned}$$

En portant la dernière inégalité dans (4.1.14), on obtient

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u)_V + j(u, u) - j(u, v),$$

D'où (4.1.14). ■

Le problème (P) admet alors la formulation variationnelle suivante :

Problème (P_1) Trouver le champ des déplacements $u \in K$, tel que :

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in K. \quad (4.1.15)$$

Réciproquement, on va vérifier que :

Lemme 4.3 Si u est une solution régulière du problème (P_1) , alors u vérifie les équations et les conditions aux limites du problème (P) .

Démonstration. Soit u une solution régulière du problème (P_1) , montrons que u satisfait les conditions (4.1.1) – (4.1.6).

- Soit $\varphi \in D(\Omega)^2$, choisissons $v = u + \varphi$ dans l'inégalité (4.1.15), il vient que :

$$a(u, \varphi) + j(u, u + \varphi) - j(u, u) \geq (f, \varphi)_V,$$

où encore

$$\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_Q + j(u, u + \varphi) - j(u, u) \geq (f, \varphi)_V.$$

Moyennant (4.1.12), (4.1.13) et la formule de Green on a:

$$\begin{aligned} & \langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (u + \varphi - u)_\nu da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) |(u + \varphi)_\tau| - |u_\tau| da \geq (\varphi_1, \varphi)_H + (\varphi_2, \gamma\varphi)_{L^2(\Gamma_2)^2}. \end{aligned}$$

Où encore

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} \sigma\nu \cdot \varphi da - \langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (u + \varphi - u)_\nu da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) |\varphi_\tau| da \geq (\varphi_1, \varphi)_H + (\varphi_2, \gamma\varphi)_{L^2(\Gamma_2)^2} \end{aligned}$$

$\varphi \in D(\Omega)^2$, alors $\varphi = 0$ sur Γ , d'où

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + (\varphi_1, \varphi)_H \geq 0$$

Maintenant pour $v = u - \varphi$ et par les mêmes arguments, on obtient:

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_H + (\varphi_1, \varphi)_H \leq 0.$$

D'où

$$\langle \operatorname{div} \sigma + \varphi_1, \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall \varphi \in D(\Omega)^2$$

implique:

$$\operatorname{div} \sigma + \varphi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.1.16)$$

• La formule de Green et l'inégalité (4.1.15) donnent

$$\langle \sigma\nu, \gamma v - \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle \operatorname{div} \sigma, v \rangle_H + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V,$$

d'où, d'après (4.1.12) et (4.1.16), on a:

$$\langle \sigma\nu, \gamma v - \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + j(u, v) - j(u, u) \geq (\varphi_2, \gamma v - \gamma u)_{L^2(\Gamma_2)^2}. \quad (4.1.17)$$

Pour tout $\varphi \in D(\bar{\Omega})^2$, qui s'annule sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ et $v = u \pm \varphi$, on obtient:

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma\nu - \varphi_2) \gamma\varphi da = 0.$$

et comme φ étant arbitraire, on déduit que

$$\sigma\nu = \varphi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (4.1.18)$$

- En choisissant une fonction régulière φ qui s'annule sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que $\varphi_\tau = 0$ sur Γ_3 , et en utilisant les mêmes arguments qu'auparavant, on obtient la chose suivante:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \mu p(u_\nu)) \varphi_\tau da = 0,$$

la fonction φ est arbitraire, d'où

$$\sigma_\tau + \mu p(u_\nu) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.1.19)$$

- En tenant compte de (4.1.17), (4.1.18) devient:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\gamma v - \gamma u) da + j(u, v) - j(u, u) \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\gamma v - \gamma u) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (\gamma v - \gamma u) da \\ & + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) (|v_\tau| - |u_\tau|) da \geq 0. \end{aligned}$$

Sachant que

$$\sigma_\tau \cdot v = \sigma_\tau \cdot (v_\nu \nu + v_\tau) = \sigma_\tau \cdot v_\tau,$$

et que

$$|v_\tau| \leq |v|$$

on déduit en tenant compte de (4.1.13) que

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot v + \mu p(u_\nu) |v|) da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot u + \mu p(u_\nu) |u_\tau|) da \geq 0$$

Si on pose $v = \pm kv$ avec $k \geq 0$ dans l'inégalité précédente, on aura

$$k \int_{\Gamma_3} (\pm \sigma_\tau \cdot v + \mu p(u_\nu) |v|) da - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot u + \mu p(u_\nu) |u_\tau|) da \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

par conséquent, on a d'une part

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau|) da \leq 0 \quad (4.1.20)$$

Et d'autre part

$$\int_{\Gamma_3} (\pm \sigma_\tau \cdot v + \mu p(u_\nu) |v|) da \geq 0 \quad (4.1.21)$$

par densité, la dernière relation est vraie $\forall v \in L^2(\Gamma_3)$, choisissons alors $v = \beta \sigma_\tau$ p.p. sur Γ_3 où $\beta \in L^2(\Gamma_3)$ et $\beta \geq 0$ p.p. sur Γ_3 , on obtient:

$$\int_{\Gamma_3} (-|\sigma_\tau|^2 + \mu p(u_\nu) |\sigma_\tau|) \beta da \geq 0,$$

ce qui entraîne

$$-|\sigma_\tau|^2 + \mu p(u_\nu) |\sigma_\tau| \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

c'est à dire

$$|\sigma_\tau| \leq \mu p(u_\nu)$$

ce qui permet de déduire que

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau \leq |\sigma_\tau \cdot u_\tau| \leq \mu p(u_\nu) |u_\tau| \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

il s'ensuit

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau| \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.1.22)$$

Il découle immédiatement des inégalités (4.1.19) et (4.1.21) que:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + \mu p(u_\nu) |u_\tau| = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

En utilisant le lemme (précédant) forme équivalente des conditions, on obtient les conditions aux limites de frottement (4.1.6). ■

4.2 Existence et unicité

Le but principal dans cette partie est d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_1) .

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses (4.1.7) – (4.1.10), le problème (P_1) admet une solution unique u si $d_\Omega^2 L_p \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) < m$.*

Preuve. La preuve du théorème 4.1 se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur le théorème du point fixe de Banach. On introduit un problème intermédiaire:

Pour chaque $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in L_+^2(\Gamma_3)^2$ tel que:

$$L_+^2(\Gamma_3) = \{\eta \in L^2(\Gamma_3) / \eta \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}$$

on définit la fonctionnelle suivante:

$h_\eta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$h_\eta(v) = \int_{\Gamma_3} \eta_1 v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \eta_2 |v_\tau| da$$

On considère le problème variationnel suivant: ■

Problème (P_1^η) : Trouver $u_\eta \in K$ tel que:

$$a(u_\eta, v - u_\eta) + h_\eta(v) - h_\eta(u_\eta) \geq (f, v - u_\eta)_V \quad \forall v \in K$$

Nous avons donc le résultat suivant:

Lemme 4.4 *Pour chaque $\eta \in L_+^2(\Gamma_3)^2$, le problème (P_1^η) admet une solution unique*

$u_\eta \in K$.

Preuve. La forme $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, continue et coercive; de plus la fonctionnelle h_η est convexe, propre et semi-continue inférieurement, donc le problème (P_1^η) admet une solution unique $u_\eta \in K$. ■

Maintenant, pour démontrer le théorème, on définit l'application suivante:

$$\begin{aligned} \psi : L_+^2(\Gamma_3)^2 &\longrightarrow L_+^2(\Gamma_3)^2 \\ \eta &\longrightarrow \psi(\eta) = (p(u_{\eta\nu}), \mu p(u_{\eta\nu})) \end{aligned}$$

On a:

Lemme 4.5 *ψ admet un point fixe unique η^* et u_{η^*} est la solution unique du problème (P_1) .*

Preuve. Soient $\eta_1, \eta_2 \in K$. On note par u_1, u_2 les deux solutions correspondantes. Alors on a:

$u_1 \in K, u_2 \in K$ vérifient les inéquations variationnelles suivantes:

$$\begin{aligned} a(u_1, v - u_1) + h_{\eta_1}(v) - h_{\eta_1}(u_1) &\geq (f, v - u_1)_V \quad \forall v \in K, \\ a(u_2, v - u_2) + h_{\eta_2}(v) - h_{\eta_2}(u_2) &\geq (f, v - u_2)_V \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

On prend $v = u_2$ dans la première inéquation vérifiée par u_1 puis $v = u_1$ dans la deuxième inéquation vérifiée par u_2 , on obtient:

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2 - u_1) + h_{\eta_1}(u_2) - h_{\eta_1}(u_1) &\geq (f, u_2 - u_1)_V, \\ a(u_2, u_1 - u_2) + h_{\eta_2}(u_1) - h_{\eta_2}(u_2) &\geq (f, u_1 - u_2)_V. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux inégalités, on a:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq h_{\eta_1}(u_2) - h_{\eta_1}(u_1) + h_{\eta_2}(u_1) - h_{\eta_2}(u_2),$$

c'est-à-dire:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq h_{\eta_1}(u_2 - u_1) + h_{\eta_2}(u_1 - u_2),$$

d'où:

$$m \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq h_{\eta_1}(u_2 - u_1) - h_{\eta_2}(u_1 - u_2)$$

$$\leq d_\Omega \|u_1 - u_2\|_V \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

et donc:

$$m \|u_1 - u_2\|_V \leq d_\Omega \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(\Gamma_3)^2}, \quad (4.2.1)$$

D'autre part, on a:

$$\|\psi(\eta_1) - \psi(\eta_2)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq \|(p(u_{\eta_{1\nu}}) - p(u_{\eta_{2\nu}}), \mu p(u_{\eta_{1\nu}}) - \mu p(u_{\eta_{2\nu}}))\|_{L^2(\Gamma_3)^2}.$$

En utilisant l'hypothèse (3.1.12) (chapitre 3) sur la fonction p , on obtient l'inégalité suivante:

$$\|\psi(\eta_1) - \psi(\eta_2)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq L_p d_\Omega^2 \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) \|u_1 - u_2\|_V.$$

d'où:

$$\|\psi(\eta_1) - \psi(\eta_2)\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \leq \frac{L_p d_\Omega^2 \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right)}{m} \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

donc si $L_p d_\Omega^2 \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) < m$, l'application ψ est une contraction; elle admet un point fixe unique η^* et u_{η^*} est une solution unique du problème (P_1) . ■

4.3 La dépendance continue sur les conditions de contact

Dans la suite, on suppose que les conditions (4.1.7) – (4.1.11) sont satisfaites et que

$$d_\Omega^2 L_p \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) < m.$$

Pour chaque $\alpha \geq 0$, soit p^α une perturbation de p qui vérifie les conditions (3.1.11) avec L_p une constante de Lipschitz. On introduit la fonctionnelle j^α obtenue en remplaçant p par p^α dans l'expression (4.1.12).

On considère le problème perturbé suivant:

Problème (P_1^α) : Trouver le champ des déplacements $u^\alpha \in K$ tel que

$$a(u^\alpha, v - u) + j^\alpha(u^\alpha, v) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \geq (f, v - u^\alpha)_V \quad \forall v \in K \quad (4.3.1)$$

Pour tout $\alpha \geq 0$ et sous les hypothèses précédentes, on déduit en vertu du théorème 2.4 que le problème (P_1^α) admet aussi une unique solution $u^\alpha \in K$.

Maintenant, On suppose que la fonction de compliance normale p^α vérifie les propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \delta > 0 \text{ et une fonction } \varphi_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tels que} \\ (a) \quad |p^\alpha(v) - p(v)| \leq \varphi_p(\alpha) |v| \quad \forall v \leq g, \\ (b) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_p(\alpha) = 0, \\ (c) \quad L_p^\alpha \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) + \delta < m / d_\Omega^2. \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

On a le résultat suivant:

Théorème 4.2 *La solution u^α du problème (P_1^α) converge fortement dans V vers la solution unique u du problème (P_1) quand α tend vers 0.*

Preuve. On pose $v = u^\alpha$ dans (4.1.15) et $v = u$ dans (4.3.1). En additionnant les inégalités obtenues, on en déduit

$$a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \leq j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u^\alpha, u) - j(u, u) \quad (4.3.3)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u^\alpha, u) - j(u, u) &\leq \|p^\alpha(u^\alpha) - p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|p^\alpha(u_\nu^\alpha) - p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u^\alpha - u\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Maintenant de (3.1.11), on a

$$\begin{aligned} \|p^\alpha(u^\alpha) - p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} &= \|p^\alpha(u_\nu^\alpha) - p^\alpha(u_\nu) + p^\alpha(u_\nu) - p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq \|p^\alpha(u_\nu^\alpha) - p^\alpha(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p^\alpha(u_\nu) - p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq L_p^\alpha \|u_\nu^\alpha - u_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)^2} + \varphi_p(\alpha) \|u\|_{L^2(\Gamma_3)^2} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

En injectant la dernière inégalité dans (4.3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
 j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u^\alpha, u) - j(u, u) \leq \\
 L_p^\alpha \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) \|u^\alpha - u\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 + \varphi_p(\alpha) \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \|u^\alpha - u\|_{L^2(\Gamma_3)}^2,
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

et de (4.3.2), on déduit que:

$$\begin{aligned}
 j^\alpha(u^\alpha, u) - j^\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + j(u^\alpha, u) - j(u, u) \leq \\
 d_\Omega^2 (L_0 - \delta) \|u^\alpha - u\|_V^2 + d_\Omega^2 \theta_p(\alpha) \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u\|_V \|u^\alpha - u\|_V
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

où $L_0 = m/d_\Omega^2$.

D'où en utilisant (4.3.2), on obtient

$$(m - d_\Omega^2 (L_0 - \delta)) \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq d_\Omega^2 \theta_p(\alpha) \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u\|_V \|u^\alpha - u\|_V$$

et comme

$$m - d_\Omega^2 L_0 = 0,$$

on déduit

$$\delta \|u^\alpha - u\|_V \leq d_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \theta_p(\alpha) \|u\|_V.$$

D'où, quand $\alpha \rightarrow 0$, $\theta_p(\alpha) \rightarrow 0$, donc u^α converge fortement vers u dans V . ■

4.4 Approximation par éléments finis

Dans cette partie, on va étudier l'approximation par des éléments finis conformes du problème variationnel (P_1) .

4.4.1 Approximation de l'espace V

Pour approcher le problème (P_1) par des éléments finis conformes, on reprend les espaces discrets utilisés dans le chapitre 3. Alors la solution approchée u_h vérifie le problème suivant:

Problème (P_h) : Trouver le champ des déplacements $u_h \in K_h$ tel que

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h)_V, \quad \forall v_h \in K_h. \tag{4.4.1}$$

Proposition 4.3 *Le problème (P_h) admet une solution unique $u_h \in K_h$ si*

$$d_{\Omega}^2 L_p \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) < m.$$

Preuve. Même démonstration que dans le cas continu (*Théorème 4.1*). ■

4.4.2 Estimation d'erreur

Maintenant, on s'intéresse à l'estimation d'erreur, on a le résultat suivant:

Théorème 4.4 *Soit $u \in K \cap (H^2(\Omega))^2$ la solution du problème (P_1) et u_h la solution du problème (P_h) , alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que:*

$$\|u - u_h\|_V \leq ch^{\frac{3}{4}} \left(\|u\|_{H^2(\Omega)^2} + \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.4.2)$$

Pour démontrer le *théorème 4.4*, on doit d'abord démontrer le lemme suivant:

Lemme 4.6 *Sous les hypothèses du théorème 4.4, il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq c \inf_{v_h \in K_h} \left(\|u - v_h\|_V + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2} + \|u\|_V^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_V^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + c \inf_{v_h \in K_h} \left(\|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2}^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Preuve. Posons $v = u_h$ dans l'inégalité (4.4.1), il vient

$$a(u, u_h - u) + j(u, u_h) - j(u, u) \geq (f, u_h - u).$$

D'autre part, on a

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) \geq (f, v_h - u_h),$$

en additionnant ces deux inégalités, il vient d'après (3.1.9) (b) du *chapitre 3* que

$$m \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - v_h) + j(u, u_h) - j(u, u) + j(u_h, v_h) - j(u_h, u_h) - (f, v_h - u).$$

Si on rajoute et on soustrait le terme $j(u, v_h) + j(u, u) + j(u_h, u)$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme suivante:

$$m \|u - u_h\|_V^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4. \quad (4.4.3)$$

Où

$$R_1 = a(u - u_h, u - v_h)$$

$$R_2 = a(u, v_h - u) + j(u, v_h) - j(u, u) - (f, v_h - u)_V$$

$$R_3 = j(u, u_h) - j(u, u) - j(u_h, u_h) + j(u_h, u)$$

$$R_4 = j(u_h, v_h) - j(u, v_h) + j(u, u) - j(u_h, u)$$

Maintenant, on va estimer chacun de ces termes, en effet, on a

$$|a(u - u_h), u - v_h| \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V,$$

En appliquant l'inégalité de Young, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que:

$$R_1 \leq \frac{m}{4} \|u - u_h\|_V^2 + c_1 \|u - v_h\|_V^2. \quad (4.4.4)$$

En remplaçant j par son expression donnée par (4.1.14), on déduit que:

$$R_2 \leq a(u, v_h - u) + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(u_{h\nu} - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu)(|u_{h\tau}| - |u_\tau|) da + \|f\|_V \|u - v_h\|_V,$$

et donc il existe une constante $c_2 > 0$ telle que:

$$R_2 \leq c_2 \|u\|_V \|u - v_h\|_V + c_2 \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2}. \quad (4.4.5)$$

En remplaçant j par son expression donnée par (4.1.14) dans R_3 , on obtient:

$$\begin{aligned} j(u, u_h) - j(u, u) - j(u_h, u_h) + j(u_h, u) &= \int_{\Gamma_3} ((p(u_\nu) - p(u_{\nu h}))(u_{\nu h} - u_\nu)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (\mu(p(u_\nu) - p(u_{\nu h}))(|u_{\tau h}| - |u_\tau|)) da. \end{aligned}$$

En utilisant alors les hypothèses (3.3.2) sur la fonction p , on en déduit que

$$R_3 \leq \int_{\Gamma_3} (L_p |u_\nu - u_{\nu h}|^2 + \mu L_p |u_\nu - u_{\nu h}| |u_\tau - u_{\tau h}|) da.$$

D'où

$$R_3 \leq d_\Omega^2 L_p \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) \|u - u_h\|_V^2 \quad (4.4.6)$$

En remplaçant j par son expression dans R_4 , on obtient:

$$\begin{aligned} j(u_h, v_h) - j(u, v_h) + j(u, u) - j(u_h, u) &= \int_{\Gamma_3} ((p(u_{h\nu}) - p(u_\nu))(u_{\nu h} - u_\nu)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (\mu(p(u_{h\nu}) - p(u_\nu))(|u_{\tau h}| - |u_\tau|)) da. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions sur la fonction de compliance normale, on obtient:

$$R_4 \leq \int_{\Gamma_3} \left(L_p |u_\nu - u_{\nu h}| |u_\nu - v_{\nu h}| + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_p |u_\nu - u_{\nu h}| |u_\tau - v_{\tau h}| \right) da,$$

d'où

$$R_4 \leq d_\Omega L_p \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2}; \quad (4.4.7)$$

et en appliquant l'inégalité de Young, on en déduit qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que:

$$R_4 \leq \frac{m}{4} \|u - u_h\|_V^2 + c_3 \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2}^2. \quad (4.4.8)$$

Alors (4.4.3) – (4.4.8) impliquent puisque $L_p d_\Omega^2 \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \right) < m$

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq c \left(\|u - v_h\|_V^2 + \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2}^2 + \|u\|_V \|u - v_h\|_V \right)$$

$$\|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3)^2}$$

où $c > 0$ est une constante strictement positive indépendante de h . D'où la preuve du lemme. ■

Pour la preuve du théorème 4.4, il suffit d'appliquer le lemme précédent comme dans le cas sans frottement.

4.4.3 Résultat de convergence

Partant d'un élément $u_h^0 \in K_h$ uniformément borné, à l'étape n connaissant $u_h^n \in K_h$, on cherche u_h^{n+1} solution du problème itératif suivant:

Problème (P_h) : Trouver $u_h^{n+1} \in K_h$ tel que

$$a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + j(u_h^n, v_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \geq (f, v_h - u_h^{n+1})_V \quad \forall v_h \in K_h \quad (4.4.9)$$

On a donc le résultat de convergence suivant:

Théorème 4.5 *Sous les hypothèses du théorème 4.1, le problème (P_h^n) admet une unique solution, et*

$$\|u_h^n - u_h\|_V \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

De plus, il existe une constance $\alpha \in]0, 1[$ telle que

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq \alpha^n \|u_h^0 - u_h\|_V \quad (4.4.10)$$

Preuve. On prend $v_h = u_h^{n+1}$ dans l'inéquation (4.4.9), on obtient

$$a(u_h, u_h^{n+1} - u_h) + j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) \geq (f, u_h^{n+1} - u_h)_V. \quad (4.4.11)$$

Et on prend $v_h = u_h^n$ dans (4.4.4), on obtient

$$a(u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) + j(u_h^n, u_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \geq (f, u_h - u_h^{n+1})_V. \quad (4.4.12)$$

En additionnant (4.4.11) et (4.4.12), on obtient

$$a(u_h - u_h^{n+1}, u_h - u_h^{n+1}) \leq j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) + j(u_h^n, u_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}).$$

En utilisant (4.1.2) et (4.1.3), on a

$$\|u_h^{n+1} - u_h\|_V \leq \frac{d_\Omega^2 L_p}{m} \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right) \|u_h^n - u_h\|_V.$$

Posons $\alpha = \frac{d_\Omega^2 L_p}{m} \left(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right)$, on a

$$\|u_h^{n+1} - u_h\|_V \leq \alpha \|u_h^n - u_h\|_V.$$

et donc par récurrence, on obtient

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq \alpha^n \|u_h^0 - u_h\|_V.$$

Puisque $\alpha \in]0, 1[$, on en déduit que

$$\|u_h^n - u_h\|_V \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

■

Remarque 4.1. *Si on remplace l'opérateur d'élasticité linéaire $\mathcal{E}$ par un opérateur d'élasticité non linéaire F vérifiant les hypothèses ci-dessous, les résultats restent valables:*

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ F : \Omega \times S_2 \longrightarrow S_2; \\ (b) \ \exists M > 0 \text{ tel que} \\ \quad |F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_1)| \leq M |\varepsilon_1 - \varepsilon_1| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_1 \in S_2, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ (c) \ \exists m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_1)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_1) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_1|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_1 \in S_2, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ (d) \ L'application \ x \longmapsto F(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue-mesurable, } \forall \varepsilon \in S_2; \\ (e) \ x \longmapsto F(x, 0) \in Q. \end{array} \right.$$

Un exemple de F est:

$$F(\xi) = \mathcal{E}_\xi + \frac{1}{\lambda} (P_U \xi - \xi) \quad \text{où } \lambda > 0.$$

$\mathcal{E}$: est l'opérateur d'élasticité linéaire.

P_U : est un opérateur de projection sur un convexe U non vide, borné et fermé de S_2 .

Conclusion

Ce travail porte sur l'approximation numérique des inéquations quasi-variationnelles et l'application à des problèmes statiques de contact unilatéral et compliance normale avec ou sans frottement.

Sous l'hypothèse de petitesse de la fonction de contact, on a établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème de contact unilatéral sans frottement en utilisant les arguments des inéquations quasi-variationnelles et une technique du point fixe de Banach.

Pour le problème de contact unilatéral avec frottement, on a utilisé les mêmes arguments pour montrer l'existence et l'unicité de la solution faible sous l'hypothèse de petitesse de la fonction de contact et du coefficient de frottement. On a étudié aussi la dépendance continue de la solution par rapport à la fonction de contact, et toujours sous l'hypothèse de petitesse on remarque qu'une petite perturbation de la condition de contact implique une petite perturbation de la solution.

Par ailleurs, on a étudié l'approximation numérique des deux problèmes par des éléments finis triangulaires $\mathbb{P}_1$. On a établi une estimation d'erreur pour chaque problème ainsi que la convergence de la méthode itérative. Il reste à noter que pour un coefficient de frottement assez large, l'étude du problème de contact unilatéral avec frottement reste encore ouvert.

Bibliographie

- [1] **Anca, R., Cocu, M.**, Internal approximation of quasi-variational inequalities, Institute of Mathematics. Bd. Păcii 220. 79622 Bucharest, Romania
- [2] **Belhachemi, Z, Benbelgacem, F**, Quadratic finite element approximation of the Signorini problem, Math. Comput. 72(241), 83-104(2003).
- [3] **Benbelgacem, F, Renard Y**, Hybrid finite element methods for the Signorini problem, Mathematics of computation. 72(243), 1117-1145(2003).
- [4] **Benbelgacem, F**, Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element methods, SIAM, J. Numer. Anal., Vol. 37, N°. 4, 1198-1216, 2000.
- [5] **Bensoussan, A., Lions, J.L.**: Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications. C.R. Acad. Sc. Paris 276, 1189-1192 (1973).
- [6] **Brezis, H**, *Analyse fonctionnelle - Théorie et Applications*, Masson, Paris(1987).
- [7] **Brezis, H**, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.*- Annales Inst.Fourier, 18, (1968), 115-175.
- [8] **Brezis, H, Stampacchia, G**, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptique*, Bulletin de la S.M.F., tome 96, (1968), 153-180.
- [9] **Brezis, H**, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures et App. 51, (1972)1-168.
- [10] **Ciarlet, P.G.**: The finite element method for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland 1978.
- [11] **Ciarlet, P.G**, *Basic error estimates for elliptic problems*, Hand book of numerical analysis, Vol II, Finite Element Methods (Part 1). Elsevier Science Publishers, (North Holland), 1991.
- [12] **Cocou, M**, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, Int. J. Engng. Sci. 22, (1984), 567-581.
- [13] **Drabla, S, Sofonea, M**, *Analysis of a Signorini problem with friction*, IMA Journal of Applied Mathematics, 63, 2, (1999), 113-130.
- [14] **Dumont, G**. La methode des contraintes actives appliquées au contact unilatéral, Note interne EDF n° HI-75/93/016.

-
- [15] **Dumont, G.** Algorithme des contraintes actives et contact unilatéral sans frottement, *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 4 n°1/1995, pp. 55-73.
 - [16] **Duvaut, G.:** Loi de frottement non-local, *J. Méc. Théor. Appl.*, Special issue, 37-78 (1982).
 - [17] **Duvaut, G.**, *Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb*. *Cr Acad. Sci. Paris, Ser A*, 290, (1980), 263-265.
 - [18] **Duvaut, G, Lions, J. L.**, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).
 - [19] **Fichera G.**, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, *Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol VII, Sez. I*, 5, (1964),91-140.
 - [20] **Glowinski, R.**, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).
 - [21] **Glowinski, R, Lions, J. L, Tremolieres, R.**, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*; Vol. 1: *Théorie Générale et Premières Applications*, Dunod-Bordas, Paris (1976).
 - [22] **Glowinski, R, Lions, J. L, Tremolieres, R.**, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*; Vol. 2: *Applications aux Phénomènes Stationnaires et d'Evolution*, Dunod-Bordas, Paris (1976).
 - [23] **Han, W.:** On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance, *Numer. Funct. Optim.* 17, 307-321 (1996).
 - [24] **Han, W, Sofonea, M.**, *Analysis And Numerical Approximation Of An Elastic Frictional Contact Problem With Normal Compliance*, *Applicaciones Mathematicae*, 26, 4 (1999), 415–435.
 - [25] **J.Jarusek and M.Sofonea**, *On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems*, *ZAMM. ZAngew. Math. Mech.* 88 (2008), 3-22.
 - [26] **Kikuchi, N, Song, Y.J.**, *Pnalty/finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity*. *Quart. Appl. Math.* 39, 1-22(1981).
 - [27] **Kikuchi, N, Oden, J.T.**, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, (1988).
 - [28] **Klarbring, A, Miklic, A, Shillor, M.**, *Frictional contact problems with normal compliance*, *Int. J. Engrg. Sci.* 26(1988), 811-832.
 - [29] **Landau, L, Lifchitz, E.**, *Théorie de l'élasticité*, Edition Mir, (1990).

-
- [30] **Lions, J.L**, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthiers-Villars (1969).
 - [31] **Lions, J.L, Magenes, E**, *Problèmes aux limites non homogènes et applications* Dunod (1968).
 - [32] **Motreanu, D, Sofonea, M**, *Evolutionary variational inequalities arising in quasi-static frictional contact problems for elastic materials*, Abstract and Applied Analysis, 4(4), (1999), 255-279.
 - [33] **Motreanu, D, Sofonea, M**, *Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance*, Adv. Math. sci. Appl. 10(1), (2000), 103-118.
 - [34] **Nečas J**, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia Prague (1967).
 - [35] **Necas, J., Hlaváček, I.**: *Mathematical theory of elastic and Elastoplastic bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
 - [36] **Oden, J.T., Pires, E.**: Contact problems in elastostatics with non-local friction laws. TICOM Report, The university of Texas at Austin, pp. 81-12 (1981).
 - [37] **Raviart, P.A, Thomas, J.M**, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris (1983).
 - [38] **Rochdi, M, Shillor, M, Sofonea, M**, *Quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction*. Journal of Elasticity, 53, (1998), 105-126.
 - [39] **Shillor, M., Sofonea, M.**: A quasistatis viscoelastic contact problem with friction, Int. J. Engrg. Sci., to appear.
 - [40] **Sofonea, M**, *Modelisation mathématique en Mécanique du Contact*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, (2005), Pages 67-74.
 - [41] **Sofonea, M, Arhab, R, and Tarraf, R**, *Analysis of electrostatic frictionless contact Pproblems with adhesion*, Journal of Applied Mathematics Volume (2006), Article ID 64217, Pages 1–25.
 - [42] **Touzaline, A.**, *Problème élastiques non linéaires de contact avec frottement*, Thèse de doctorat d'état en mathématiques, USTHB, 2006.
 - [43] **Touzaline, A., Mignot, A**, *Problème statique de contact unilatéral avec frottement non local pour des matériaux élastiques non linéaires*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Lodz, vol XLII, (2003), 99-109.

4.5