



N° d'ordre : 24/2004-M/MT

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE
FACULTE DES MATHÉMATIQUES
ALGER**

MEMOIRE

Présenté

Pour l'obtention du diplôme de : **Magister**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**
(Mathématique de gestion)

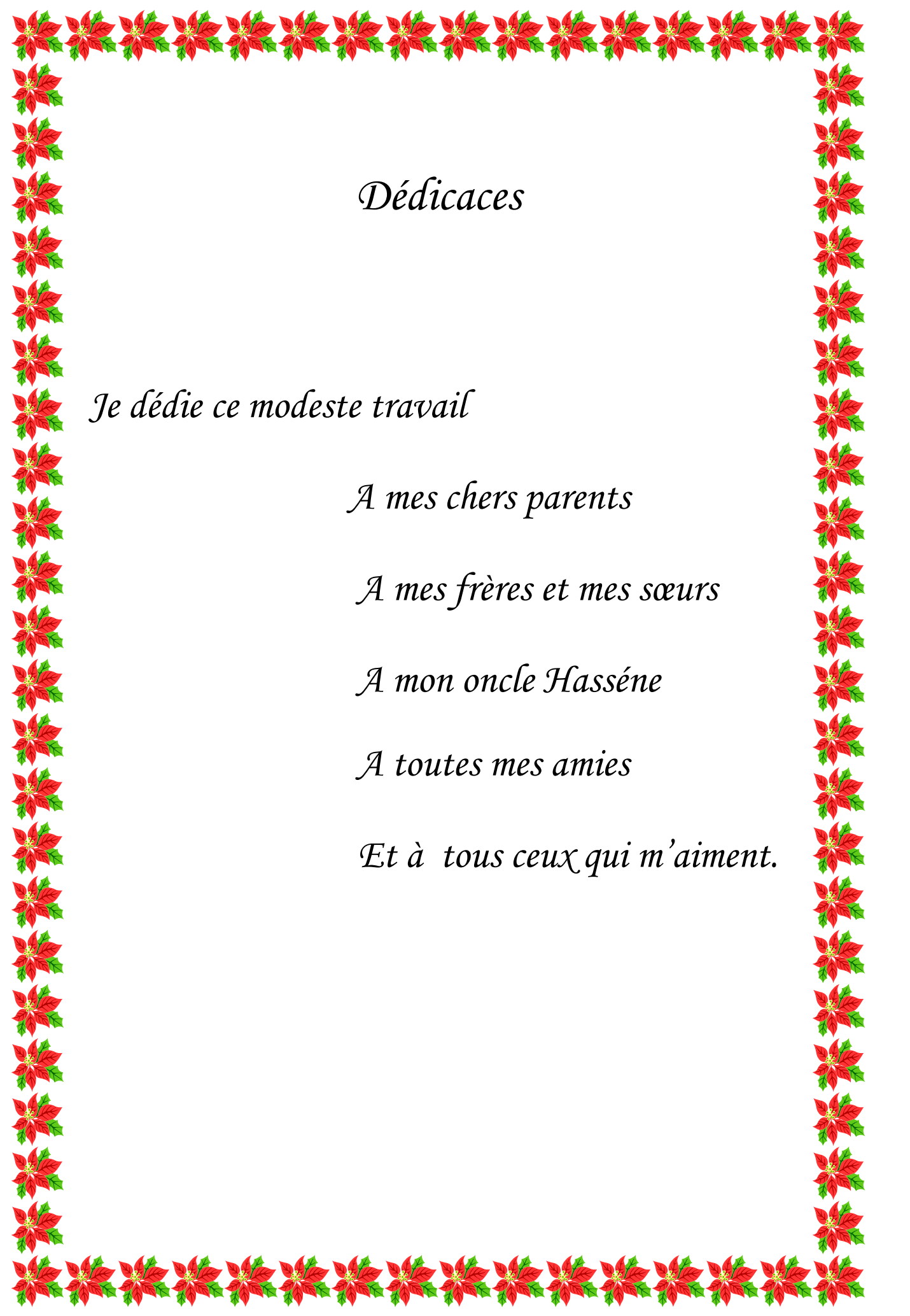
Par *KACI FATMA*

Thème

Propriétés de König et duale de König dans
l'hypergraphe des intervalles de quelques classes
de posets

Soutenu le : 2 / 10 / 2004 à 9h :30 . Devant le jury composé de :

Mr .M. AIDER	Maître de Conférence, USTHB	Président
Mlle.I. BOUCHEMAKH	Maître de Conférence, USTHB	Dtrice de thèse
Mr.H. AÏT HADDADENE	Maître de Conférence, USTHB	Examineur
Mr. A. BERRACHEDI	Maître de Conférence, USTHB	Examineur
Mr. S. BOUROUBI	Chargé de Recherche, USTHB	Examineur



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents

A mes frères et mes sœurs

A mon oncle Hasséne

A toutes mes amies

Et à tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

Je tiens à exprimer mon entière gratitude à Madame I. BOUCHEMAKH pour le projet qu'elle m'a proposé et pour tous les conseils et les encouragements qu'elle n'a pas cessé de me donner durant l'élaboration de cette Thèse.

Je remercie Monsieur M. AIDER pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury auquel ce travail est soumis.

Je remercie Messieurs H. AIT HADDADENE, A. BERRACHEDI et S. BOUROUBI pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer au jury.

Merci à toutes mes amies et tous ceux qui de près ou de loin m'ont supporté et soutenu.

Sommaire

Introduction	3
1 Définitions et notations principales	
1.1 Introduction	5
1.2 Concept de poset et notation	5
1.3 Quelques exemples de posets classiques	
1.3.1 Treillis Booléen	9
1.3.2 Treillis $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$	10
1.3.3 Treillis des faces du n -cube	10
1.3.4 Ordres d'intervalles	11
1.3.5 Treillis des partitions	12
1.4 Quelques opérations sur les posets	
1.4.1 Somme directe	13
1.4.2 Construction quasi-série	14
1.4.3 Construction de gluing	15
1.5 Concepts généraux sur les hypergraphes	16
1.6 Hypergraphe des intervalles d'un poset	
1.6.1 Définitions	19
1.6.2 Propriétés forte IS et forte IC	20
2 Hypergraphe des intervalles de la classe des ordres sans N	
2.1 Introduction	21
2.2 Construction et quelques caractérisations	22
2.3 Complexité algorithmique	25
2.3.1 Problème de reconnaissance des posets sans N	26
2.3.2 Problème d'isomorphisme	26
2.3.3 Problème de dimension	27

2.4	Quelques applications.....	27
2.5	Propriété de König.....	28
2.6	Propriété duale de König.....	29
3	Propriété duale de König pour une extension des ordres série-parallèles	
3.1	Introduction.....	34
3.2	Définition.....	34
3.3	Propriété duale de König.....	35
4	Propriété duale de König de l'hypergraphe $\mathcal{H}(\Pi_n)$	
4.1	Introduction.....	45
4.2	Classe des ordres SSSC et SSC	
4.2.1	Classe des ordres SSSC.....	45
4.2.2	Classe des ordres SSC	46
4.2.3	Exemples d'ordres SSSC et SSC.....	48
4.3	Décomposition de Bruijn	49
4.4	Codage d'un ensemble	51
4.5	Type d'une partition	51
4.6	Décomposition en chaînes semi-symétriques très spéciales du treillis des partitions..	52
	Conclusion	61
	Perspectives.....	62
	Bibliographie.....	63

Introduction

La Théorie de Sperner est l'étude des structures discrètes ordonnées. Elle représente un outil puissant dans la modélisation et on les trouve dans des domaines variés tels que l'ordonnancement, l'intelligence artificielle, les sciences sociales,...

Elle a pris ses origines par le fameux Théorème de Sperner [35]. En 1928, il prouva si $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ est une famille de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$, tels que F_i n'est pas un sous-ensemble de F_j si $i \neq j$, alors $n \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Cette borne est atteinte pour toute n .

Bien que ce résultat paraît anodin, il permet de résoudre d'autres problèmes. Citons-en par exemple le problème suivant : Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels où $|x_i| \geq 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. En formant toutes les 2^n sommes de la forme $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_t}$, d'après le Théorème de Sperner, il existe au plus $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ de ces sommes dont la différence de deux d'entre-elles est strictement plus petite que 1.

Le Théorème de Sperner a été généralisé à un ensemble ordonné et rangé quelconque. Sous l'impulsion de R.P DILWORTH, I. RIVAL, D.J KLEITMAN, W.T TROTTER, N. ALON et tant d'autres chercheurs, cette théorie a connu un essor considérable. Dans [13], on trouve un bon livre de références.

Notre intérêt se focalise autour d'une relation min-max semblable à celle du Théorème de R.P DILWORTH qui stipule que le nombre minimum de chaînes qui partitionnent un poset P est égal à la taille maximale d'une antichaîne. Nous remplacerons chaîne par intervalle et antichaîne par stable. Le problème dual est tout aussi intéressant et de ce fait, il est étudié.

Dans cette Thèse, nous nous intéressons à trois classes de posets, la classe des ordres sans N , une nouvelle classe de posets qui contient les posets séries-parallèles ainsi que le treillis des partitions. La classe des ordres sans N a été considérée indépendamment dans différentes applications, leur domaine principal d'application est l'utilisation dans l'analyse de projets, en particulier dans les techniques CPM ou PERT, voir [26]. Quant au treillis des partitions Π_n , il joue un rôle important dans la théorie : La conjecture de WHITMAN, prouvée par PUDLAK et P. TUMA [30], montre que tout treillis fini peut être considéré comme un sous-treillis de Π_n .

La Thèse s'articule autour de quatre Chapitres

Le Premier Chapitre est constitué de définitions et de notations de base sur les posets et les hypergraphes, afin que le lecteur non habitué puisse s'y retrouver.

Le Second Chapitre est consacré aux hypergraphes des intervalles d'un poset sans N. Cette classe de posets n'est qu'une extension des posets séries-parallèles. Nous donnons les différents problèmes posés sur cette classe, ainsi ses applications, et nous terminons le Chapitre par l'étude de la propriété de König et duale de König.

Dans le Troisième Chapitre, nous avons défini une nouvelle classe de posets, qui généralise aussi la classe des posets séries-parallèles. Nous prouvons que l'hypergraphe des intervalles d'un poset de cette classe a la propriété duale de König.

Au dernier Chapitre, nous prouvons que la décomposition en chaînes semi-symétriques de D. LOEB [27] permet de prouver que l'hypergraphe des intervalles de tout sous-poset induit par l'union consécutive des niveaux $N_l \cup \dots \cup N_u$ du treillis Π_n a la propriété duale de König pour tout l, u tels que $0 \leq l \leq u \leq n$, $l+u \leq n$.

Chapitre 1

Définitions et notations principales

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions fondamentales sur les posets et les hypergraphes et en particulier les hypergraphes des intervalles d'un poset.

1.2 Concepts de poset et notations

Un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq)$, en abrégé *poset*, est un ensemble P où la relation « $\leq$ » est réflexive, antisymétrique et transitive.

Dans tout ce qui suit, les posets sont supposés finis, et nous notons brièvement P au lieu de $(P, \leq)$ si aucun risque de confusion ne se pose.

Soient $x, y \in P$. On dit que y *couvre* x et nous notons $y \succ x$ ou $x \prec y$ si $y > x$ et si $y \geq z > x$ alors $y = z$. Cette notation de *couverture* permet d'illustrer chaque poset par un diagramme, appelé *diagramme de Hasse*. Par convention est un graphe orienté de bas en haut dont l'ensemble des sommets représente les éléments de P et l'ensemble des arcs est formé par les paires (x, y) avec $x \prec y$.

Nous constatons ainsi que deux éléments sont comparables si et seulement s'ils sont reliés par une ligne brisée ascendante. Lorsque x et y sont incomparables, on utilise la notation $x \parallel y$.

Un poset est appelé *treillis* si tout sous ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ de P possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Une *fonction de rang* est une fonction r de P dans $\mathbb{N}$ vérifiant $r(x) = 0$ si x est un élément minimal et $r(y) = r(x) + 1$ si $x \prec y$. Nous notons par $r(P) = \max_{x \in P} r(x)$ le *rang* du poset P .

Bien entendu, un poset ne possède pas toujours une fonction de rang. A titre d'exemple, le poset illustré dans la Figure 1 suivante :

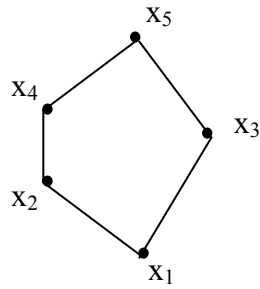


Figure 1

Si ce poset possédait une fonction de rang alors nous aurons d'une part, $r(x_1) = 0$, $r(x_5) = r(x_4) + 1 = r(x_2) + 2 = r(x_1) + 3 = 3$, et d'autre part $r(x_5) = r(x_3) + 1 = r(x_1) + 2 = 2$, ce qui est absurde.

Si P est un poset rangé. Nous définissons son niveau i par $N_i(P) = \{x \in P, r(x) = i\}$ pour $i = 1, \dots, r(P)$. Le nombre $W_i(P) = |N_i(P)|$ est appelé $i^{\text{ème}}$ nombre de Whitney du poset P .

Il est facile de vérifier que ces niveaux forment une partition de P , voir la figure 2

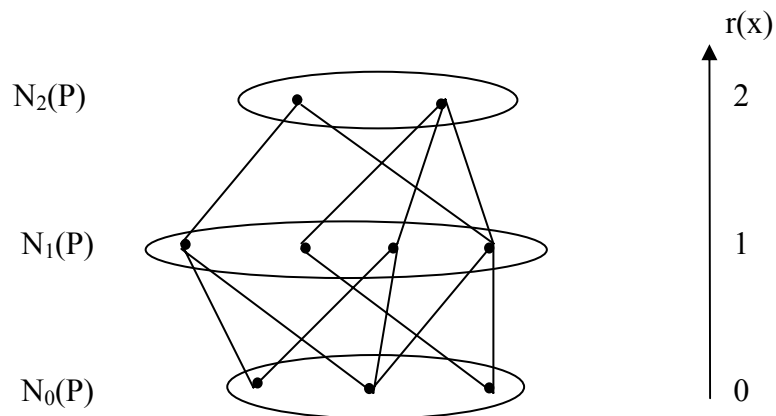


Figure 2

Les nombres de Whitney sont dits *unimodaux* s'il existe un entier positif h tel que :

$W_i(P) \leq W_{i+1}(P)$ pour $i \leq h$ et $W_i(P) \geq W_{i+1}(P)$ pour $i > h$. Ils sont *symétriques* si $W_i(P) = W_{r(P)-i}(P)$ pour tout i . Dans ce cas P est dit de *rang unimodal* et de *rang symétrique* respectivement

Une *chaîne* C est un sous ensemble d'éléments de P , comparables deux à deux, c'est à dire pour toute paire d'éléments c_i et c_j de C , nous avons $c_i \leq c_j$ ou $c_j \leq c_i$. Une chaîne à $k+1$ éléments est notée par $C = (c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_k)$ et k représente sa longueur.

C est *symétrique* si $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$, et *semi-symétrique* si $r(c_0) + r(c_k) \geq r(P)$.

Une famille de chaînes de P , $\zeta = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ (resp. $\xi = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_r\}$) est une *partition de P en chaînes symétriques* (resp. *chaînes semi-symétriques*) si toute chaîne de ζ (resp. de ξ) est symétrique (resp. semi-symétrique) et chaque élément de P appartient à une unique chaîne de ζ (resp. de ξ), nous écrirons $\zeta = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$ (resp. $\xi = C'_1 \cup C'_2 \cup \dots \cup C'_r$).

A titre d'exemple, considérons les posets P et Q illustrés dans la Figure 3. Les chaînes représentées en trait gras forment respectivement une partition en chaînes symétriques et semi-symétriques de P et Q respectivement.



Figure 3

Une *antichaîne* A est un sous-ensemble d'éléments de P incomparables deux à deux. La *largeur* de P notée par $\omega(P)$ c'est la taille maximum d'une antichaîne.

Une *k-famille* est une famille d'éléments de P ne contenant pas une chaîne de longueur k . Une 1- famille est une antichaîne.

La relation entre chaînes et antichaînes est donnée à travers le Théorème de R.P DILWORTH suivant :

Théorème 1.1 [11]

Soit P un poset. On a

$$\text{Max } \{ |A|, A \text{ est une antichaîne} \} = \text{Min } \{ |\zeta|, \zeta \text{ est une partition de } P \text{ en chaînes} \}.$$

On dit que P a la *propriété de Sperner* si pour tout k , la taille maximale d'une k -famille est égale à la plus grande somme de k nombres de Whitney.

Un poset P est dit de *Peck*, si P est de rang symétrique et a la propriété forte de Sperner. Si P possède une décomposition en chaînes symétriques alors P est de Peck, mais la réciproque est fausse [14].

Un sous ensemble I de P , de la forme $I = \{v \in P, p \leq v \leq q\}$ et noté par $[p,q]$, est appelé *intervalle*. Si en plus, p est un élément minimal et q est un élément maximal alors I est appelé *intervalle maximal*.

Le *dual* du poset P , noté par P^* , est un poset ayant les mêmes éléments que P et ordonné par la relation définie par : $x \leq_{P^*} y$ ssi $x \geq_P y$.

Deux posets P et Q sont dits *isomorphes*, et nous notons $P \simeq Q$ s'il existe une application bijective φ de P dans Q vérifiant $x \leq_P y$ si et seulement si $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.

1.3 Quelques exemples de posets classiques

Nous proposons ici quelques exemples de posets qui ont un intérêt relativement grand dans la théorie de Sperner.

1.3.1 Le treillis Booléen

Soit B_n le poset défini par $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$ où la relation d'ordre est définie par :

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ ssi } a_i \leq b_i \text{ pour tout } i$$

B_n est appelé le treillis *Booléen*. Par exemple le poset illustré dans la figure 4 est un B_3

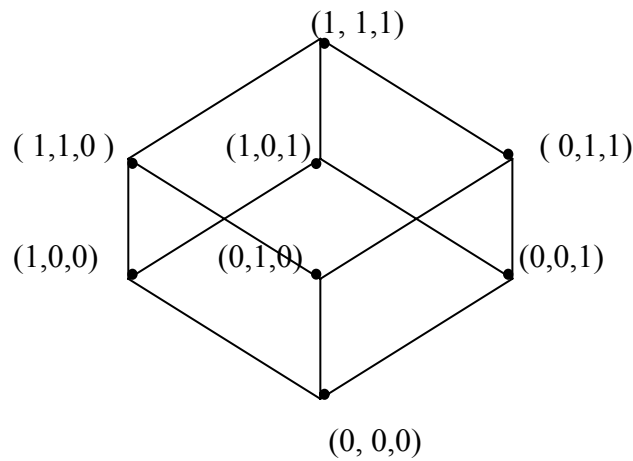


Figure 4

Nous remarquons que B_n et $(P(\{1, \dots, n\}, \subseteq)$ sont isomorphes : il suffit de considérer l'application $\varphi(\underline{a}) = \{i; a_i = 1\}$. Ainsi B_n peut être considéré comme l'ensemble de toutes les parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ ordonné par l'inclusion. La fonction de rang de B_n est l'application qui à un élément de B_n associe sa cardinalité. Par suite pour tout i , $W_i = \binom{n}{i}$.

Soient X et Y deux éléments de B_n de cardinalités respectives l et u avec $l \leq u$. En supprimant tous les éléments de X dans chaque sous-ensemble qui se présente dans l'intervalle $[X, Y]$, nous obtenons l'isomorphe entre l'intervalle $[X, Y]$ et le treillis B_{u-l} .

1.3.2 Le treillis $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$

Le treillis $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est l'ensemble de tous les n -uplets $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $0 \leq a_i \leq k_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. La relation d'ordre est définie par :

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ si et seulement si } a_i \leq b_i \text{ pour tout } i.$$

Le cas particulier où $k_1 = \dots = k_n = 1$, nous obtenons l'isomorphisme entre $S(1, 1, \dots, 1)$ et B_n .

La fonction de rang de $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est définie par $r(\underline{a}) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ et son rang est égal à $r = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Le nombre de Whitney W_i est le coefficient relatif à t^i dans le produit

$$(1 + t + t^2 + \dots + t^{k_1}) (1 + t + t^2 + \dots + t^{k_2}) \dots (1 + t + t^2 + \dots + t^{k_n}) = \sum_{i=0}^r W_i t^i$$

1.3.3 Le treillis des faces du n -cube

Soit le n -cube suivant $Q_n = \{ \underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 0 \leq x_i \leq 1 \}$.

Une *face* de Q_n est un sous ensemble F de la forme suivante

$$F = \{ \underline{X} \in Q_n : x_i = 0 \text{ pour } i \text{ dans } I, x_i = 1 \text{ pour } i \text{ dans } J \text{ et } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ sinon } \}$$

où I et J sont des sous ensembles de $[n]$, vérifiant $I \cap J = \emptyset$. Le treillis C_n est l'ensemble de toutes les faces de Q_n ordonné par inclusion auquel on rajoute un élément qui soit inférieur à tous les éléments du niveau N_0 . La fonction de rang est la fonction qui associe à une face F de Q_n , le nombre de ses composantes libres (celles dont l'indice n n'appartient pas à $[n]$). Par suite, le $i^{\text{ème}}$ nombre de Whitney W_i est égal à $2^{n-i} \binom{n}{i}$.

Soient $F, F' \in C_n$ telles que $F \leq F'$. Si le rang de F (resp. de F') est l (resp. u) alors l'intervalle $[F, F']$ est isomorphe au treillis Booléen B_{u-l} [8].

1.3.4 L'ordre d'intervalles

Un poset P est dit un *ordre d'intervalles* s'il existe une application φ de P dans l'ensemble des intervalles fermés de la droite réelle $\mathbb{R}$ telle que :

$$p < q \text{ dans } P \text{ si et seulement si } \text{Sup } \varphi(p) < \text{Inf } \varphi(q) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

L'ordre d'intervalles n'est pas forcément rangé, et tout intervalle d'un ordre d'intervalles est un ordre d'intervalles.

Par exemple le poset illustré dans la Figure 5 est un ordre d'intervalles non rangé.

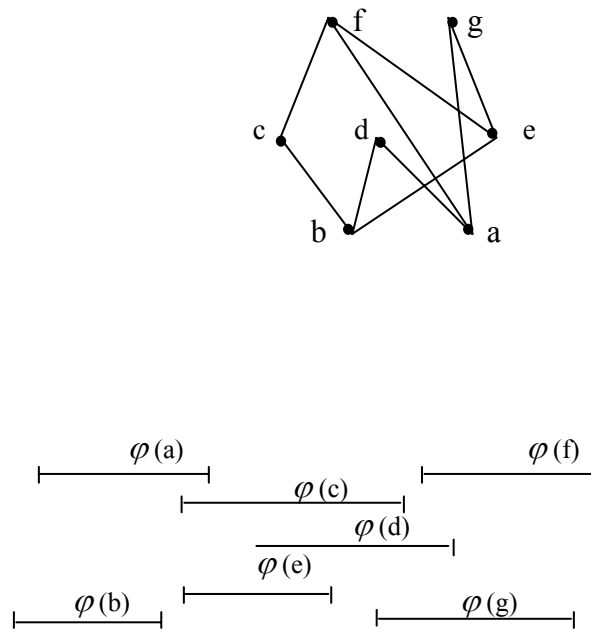


Figure 5

1.3.5 Le treillis des partitions

Soit $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On appelle *partition de N_n* , toute famille de parties non vides, (nommées *blocs* de la partition) de N_n , telle que chaque élément de N_n appartient à une seule de ces parties.

Le treillis des partitions Π_n est l'ensemble de toutes les partitions de N_n où la relation d'ordre « $\leq$ » est définie comme suit:

$\pi_i \leq \pi_j$ si $\pi_i = \pi_j$ ou π_i est obtenue à partir d'une subdivision d'un ou de plusieurs blocs de π_j .

En particulier, $\pi_i < \pi_j$ si π_i est obtenue à partir d'une subdivision d'un seul bloc de π_j . On dit que Π_n est ordonné par raffinement.

Soit $\pi \in \Pi_n$. La fonction de rang de Π_n est définie par:

$$r(\pi) = n - \text{nombre de blocs de } \pi.$$

Π_n est rangé et sa fonction de rang est égale à $n - 1$.

Le nombre $S(n, k)$ de partitions de N_n en k blocs, nommé *nombre de Stirling du second espèce* représente le $(n-k)^{\text{ème}}$ nombre de Whitney. L'expression de ce nombre est donnée par la formule suivante [9]:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Le treillis illustré dans la Figure 6 représente Π_4 .

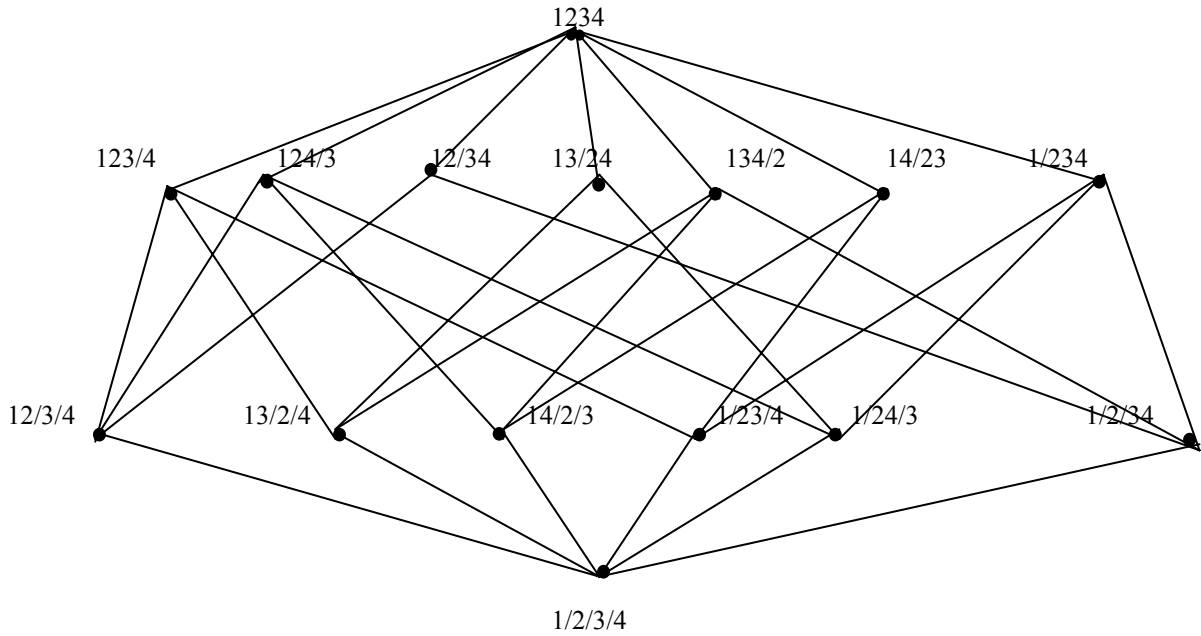


Figure 6

Dans le chapitre 4, nous étudions plus en détails ce treillis.

1.4 Quelques opérations sur les posets

Nous citons ici quelques opérations sur les posets qui seront utilisés dans le second chapitre.

1.4.1 La somme directe

La *somme directe* ou *union disjointe* de deux posets P et Q est le poset $P + Q$ sur l'ensemble $P \cup Q$. La relation d'ordre est définie par :

$$x \leq_{P+Q} y \quad \text{si } x, y \in P \text{ et } x \leq_P y \quad \text{ou} \quad x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y$$



Figure 7

A titre d'exemple, le poset illustré dans la figure 8 est la somme directe des posets de la Figure 7.

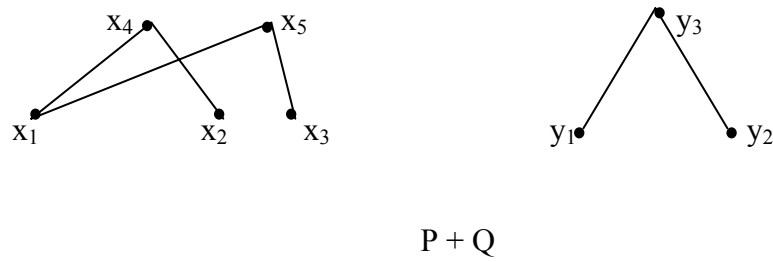


Figure 8

1.4.2 La construction quasi-série

Soient P et Q deux posets, $A \subseteq \text{Max}(P)$ et $B \subseteq \text{Min}(Q)$ avec $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$. La composition quasi-série de P et Q est le poset $P \circledast Q$ sur l'union $P \cup Q$. La relation d'ordre est définie par :

$$x \leq^{\circledast} y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in P \text{ et } x \leq_P y \\ \text{ou} \\ x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y \\ \text{ou} \\ x \in P, y \in Q \text{ et il existe } a \in A \text{ et } b \in B \text{ tel que} \\ x \leq_P a \text{ et } b \leq_Q y \end{array} \right.$$

Si $A = \text{Max}(P)$ et $B = \text{Min}(Q)$, cette construction sera appelé *la somme linéaire* de P et Q , et est notée par $P \oplus Q$.

Soient P et Q les posets illustrés dans la Figure 7. La Figure 9 représente le diagramme de Hasse de $P \oplus Q$ et de $P \otimes Q$ respectivement, en prenant $A = \{x_4, x_5\}$ et $B = \{y_1\}$.



Figure 9

Les posets construits seulement à partir de la somme directe et de la somme linéaire sont appelés posets *séries-parallèles*. Dans le chapitre suivant nous étudierons une classe de posets qui généralise les posets séries-parallèles.

1.4.3 La construction de « gluig » :

Soient P_1 et P_2 deux posets.

Considérons le sous-ensemble $Q_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ de $\text{Max } P_1$ et $Q_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ de $\text{Min } P_2$.

Nous notons par $P_1 * P_2 (Q_1, Q_2)$ le poset obtenu à partir de P_1 et P_2 , en identifiant les couples (x_i, y_i) , $i=1, \dots, r$. Cette construction [32] est appelée *la construction de gluig*.

Si $Q_1 = Q_2 = \emptyset$ alors $P_1 * P_2 (Q_1, Q_2) = P_1 + P_2$.

La Figure 10 représente le diagramme de Hasse d'une construction de gluig de deux posets .

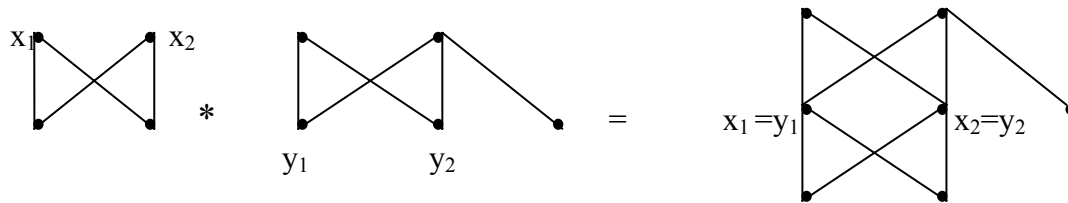


Figure 10

1.5 Concepts généraux sur les hypergraphes

La théorie des hypergraphes est vaste (voir par exemple [2]). Nous nous limiterons ici qu'aux définitions qui nous seront utiles.

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini et $\mathfrak{E} = \{E_i, i \in I\}$ une famille de parties de X ,

vérifiant pour tout $i \in I$, $E_i \neq \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} E_i = X$.

Le couple $\mathcal{H} = (X, \mathfrak{E})$ est appelle *hypergraphe* de sommets $x_1, \dots, x_n$, et d'arêtes $E_1, \dots, E_m$. Deux sommets sont *adjacents* s'il existe une arête de $\mathcal{H}$ qui les contienne, et deux arêtes sont adjacentes si leur intersection est non vide.

Un hypergraphe est appelé *graphe* si tout arête de l'hypergraphe a au plus 2 éléments.

Le *dual* de $\mathcal{H}$ est l'hypergraphe $\mathcal{H}^*$, dont les sommets sont les points $e_1, \dots, e_m$ qui correspondent respectivement aux arêtes $E_1, \dots, E_m$ de $\mathcal{H}$, et dont les arêtes sont les sous ensembles $X_1, \dots, X_n$ qui correspondent respectivement aux sommets $x_1, \dots, x_n$ de $\mathcal{H}$ où pour tout j on a $X_j = \{e_i : E_i \ni x_j\}$.

On appelle *hypergraphe partiel* de $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ engendré par un ensemble $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ la famille $\mathcal{H}' = (E_j / j \in J)$. Le *sous hypergraphe* de $\mathcal{H}$ induit par un ensemble $A \subset X$ la famille $\mathcal{H}_A = (E_j \cap A / 1 \leq j \leq m, E_j \cap A \neq \emptyset)$. Il est facile de vérifier que le dual d'un sous hypergraphe de $\mathcal{H}$ est un hypergraphe partiel de $\mathcal{H}^*$.

Soient $x, y \in X$. Le *degré* de x noté par $\deg_{\mathcal{H}}(x)$ c'est le nombre d'arêtes de $\mathcal{H}$ contenant x . Le degré maximum de $\mathcal{H}$ est noté par $\Delta(\mathcal{H})$.

Le nombre minimum $\chi(\mathcal{H})$ de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de $\mathcal{H}$ de tel sorte que deux arêtes qui s'intersectent ont des couleurs différentes est appelé l'*indice chromatique*.

Un hypergraphe $\mathcal{H}$ a la *propriété des arêtes colorées* si $\chi(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$. Si chaque hypergraphe partiel d'un hypergraphe $\mathcal{H}$ vérifie cette propriété, nous dirons alors que $\mathcal{H}$ est *normal*.

On dira que l'hypergraphe $\mathcal{H}$ a la *propriété de Helly* si pour tout $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, nous avons :

$$E_i \cap E_k \neq \emptyset \text{ où } i, k \in J \text{ alors } \bigcap_{i \in J} E_i \neq \emptyset.$$

Soit $\mathcal{F} = \{F_i, i \in I\}$ une famille de parties de l'ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ vérifiant pour tout

$$i \in I, F_i \neq \emptyset \text{ et } \bigcup_{i \in I} F_i = X.$$

On dit que $\mathcal{F}$ a la propriété de Helly si pour tout $J \subset I$, nous avons $F_i \cap F_k \neq \emptyset$ où $i, k \in J$ alors $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$.

Le *graphe représentatif des arêtes* de l'hypergraphe $\mathcal{H}$ est un graphe simple $L(\mathcal{H})$, dont les sommets $e_1, e_2, \dots, e_m$ représentent respectivement les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_m$ et deux sommets e_i et e_j sont reliés par une arête ssi $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, pour $i \neq j$.

Les graphes *parfaits*, introduits par Berge [3] sont les graphes G pour lesquels $\alpha(G') = \theta(G')$ pour tous les sous graphes induits G' de G où $\alpha(G')$ représente la cardinalité maximum d'un ensemble stable de G' (c.à.d un ensemble de sommets qui engendre un graphe sans arêtes) et $\theta(G')$ est la cardinalité minimum d'un recouvrement de G' par des cliques (une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents).

Nous mentionnons ici une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergraphe soit normal.

Théorème 1.2 [2]

Un hypergraphe $\mathcal{H}$ est normal si et seulement si $\mathcal{H}$ satisfait la propriété de Helly et $L(\mathcal{H})$ est un graphe parfait.

Soit $\mathcal{H} = (X, \mathfrak{E})$. Un sous ensemble A (resp. T) de X est appelé *ensemble stable* ou *ensemble indépendant* (resp. *recouvrement par sommets* ou *ensemble transversal*) de $\mathcal{H}$ si chaque arête de $\mathcal{H}$ contient au plus un sommet de A (resp. au moins un sommet de T).

Un sous ensemble $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{R}$) de $\mathfrak{E}$ est appelé un *couplage* (resp. un *recouvrement par arêtes* de $\mathcal{H}$) si chaque sommet de X est contenu dans au plus un membre de $\mathcal{M}$ (resp. au moins un membre de $\mathcal{R}$). Notons par :

$$\alpha(\mathcal{H}) = \text{Max} \{ |A| : A \text{ est un ensemble stable de } \mathcal{H} \}.$$

$$\tau(\mathcal{H}) = \text{Min} \{ |T| : T \text{ est un recouvrement par sommets de } \mathcal{H} \}.$$

$$\nu(\mathcal{H}) = \text{Max} \{ |\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ est un couplage de } \mathcal{H} \}.$$

$$\rho(\mathcal{H}) = \text{Min} \{ |\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H} \}.$$

Les nombres $\alpha(\mathcal{H})$, $\tau(\mathcal{H})$, $\nu(\mathcal{H})$ et $\rho(\mathcal{H})$ sont appelés *nombre de stabilité*, *nombre de recouvrement par sommets*, *nombre de couplage* et *nombre de recouvrement par arêtes* respectivement de l'hypergraphe $\mathcal{H}$.

Dans un hypergraphe $\mathcal{H}$, chaque arête d'un recouvrement par arête contient au maximum un élément d'un stable et chaque sommets d'un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête d'un couplage, ce qui produit les inégalités suivantes

$$\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad \nu(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}).$$

Un hypergraphe $\mathcal{H}$ a la propriété de König si :

$$\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}).$$

Et a la propriété duale de König si :

$$\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H})$$

puisque

$$\alpha(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}^*) \text{ et } \rho(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}^*).$$

Théorème 1.3 [2]

Tout hypergraphe normal a la propriété de König.

1.6 Hypergraphe des intervalles d'un poset

1.6.1 Définitions

Soit P un poset et $\mathcal{I}$ l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe $\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$ est appelé *hypergraphe des intervalles* de poset P , ses sommets sont les éléments de P et ses arêtes sont les intervalles maximaux de P .

Brièvement, nous écrirons dans toute la suite $\mathcal{H} = (P, \mathcal{I})$ si aucun risque de confusion ne se pose. Soit P un poset rangé et l, u deux entiers tels que $0 \leq l \leq u \leq r(P)$. Notons par $P_{l,u}$ le sous poset induit par $\bigcup_{i=l}^u N_i$ et par $\mathcal{H}_{l,u}$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de $P_{l,u}$.

Dans notre travail, nous nous intéressons plus particulièrement aux propriétés de König et dual de König pour ces hypergraphes. Ces propriétés ne sont pas toujours vérifiées, pour des contre exemples, voir [8]. Par contre si nous remplaçons les intervalles maximaux par des chaînes maximales, dans ce cas les deux propriétés sont toujours vérifiées (voir par exemple [13]).

1.6.2 Les propriétés forte IS et forte IC

Nous disons que l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ a la propriété (l,u) -stable (brièvement (l,u) - IS) si $\alpha(\mathcal{H}_{l,u}) = \max \{ |N_l|, |N_u| \}$. De même nous disons que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété du (l,u) -recouvrement par arêtes (brièvement (l,u) - IC) si $\rho(\mathcal{H}_{l,u}) = \max \{ |N_l|, |N_u| \}$.

La propriété (l,u) - IC implique la propriété (l,u) - IS , puisque les niveaux N_l et N_u sont des ensembles stables dans $\mathcal{H}_{l,u}$ et donc $\max \{ |N_l|, |N_u| \} \leq \alpha(\mathcal{H}_{l,u}) \leq \rho(\mathcal{H}_{l,u})$.

Nous dirons que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IS (resp. propriété forte IC) si $\mathcal{H}(P)$ a la propriété (l, u) - IS (resp. la propriété (l, u) - IC) pour tous l, u . La propriété forte IC implique la propriété forte IS .

Chapitre 2

*Hypergraphe des intervalles de la classe des
ordres sans $\mathcal{N}$*

2.1 Introduction

La classe de posets sans N a été introduite par P.A GRILLET en 1969 [17]. Il l'a défini comme une classe de posets satisfaisant la propriété C.A.C (chaîne – Antichaîne - Complete) c'est à dire toute chaîne maximale rencontre toute antichaîne maximale. Il montre qu'un poset satisfait cette propriété si et seulement s'il ne contient pas un sous poset à 4 éléments a, b, c et d avec les relations $a < b$, $c < b$, $c < d$ et $a \parallel c$, $a \parallel d$, $b \parallel d$. En 1973, B. LECLERC et B. MONJARDE [24] ont amélioré cette caractérisation en prouvant qu'un poset P possède la propriété C.A.C si et seulement si P n'a pas de sous poset à 4 éléments avec a, b, c et d avec les relations $a < b$, $c < b$, $c < d$ et $a \parallel c$, $a \parallel d$, $b \parallel d$. Comme ce poset à 4 éléments représente la lettre N, I. RIVAL en 1983 [31] a nommé les posets qui ayant la propriété C.A.C des posets sans N. En d'autres termes un poset a la propriété C.A.C si et seulement si P ne possède pas N dans son diagramme de Hasse comme sous-poset induit. Le poset illustré dans la Figure 1 représente le poset N.

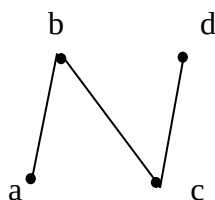


Figure 1

Dans ce Chapitre, nous mentionnerons quelques résultats sur cette classe de posets tels que les caractérisations, la complexité algorithmique ainsi que des applications. Nous étudrons par la suite la propriété de König et duale de König de l'hypergraphe des intervalles d'un poset de cette classe.

2.2 Constructions et quelques caractérisations

Une construction récursive des posets sans N a été donnée par M. HABIB et R. JEGOU dans [19]. Ils prouvèrent que la classe des posets sans N est la plus petite classe de posets qui contient le poset à un seul élément et fermé sous les deux opérations : la somme directe et la construction quasi-série.

La classe des posets sans N peut être vu comme une généralisation des posets série-parallèles. Un poset est dit *série-parallèle* s'il peut être construit à partir des singletons en utilisant seulement la somme directe et la somme linéaire.

Le poset P illustré dans la Figure 2 représente un poset série-parallèle puisqu'il peut se décomposer comme $1 \oplus ((1 \oplus 1 \oplus 1) + ((1+1) \oplus ((1 \oplus 1) + (1 \oplus 1))))$.

Par contre le poset Q illustré dans la Figure 2 est un ordre sans N mais n'est pas série-parallèle.



Figure 2

I. RIVAL [33] caractérise les posets série-parallèles par la non-existence de N comme sous-poset induit.

Plus tard, en 1986 une autre construction des posets sans N est donné par I. RIVAL et N. ZAGUIA [32], utilisant la somme directe et la construction de gluig.

Soit N' le poset de 5 éléments $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tels que les seules relations de couvertures sont:

$$2 \prec 5 \succ 3 \succ 1 \prec 4.$$

Les posets illustrés dans la Figure 3 représentent les posets N et N' respectivement.



Figure 3

La classe des posets sans N contient les posets série-parallèles :

Théorème 2.1 [28]

Soit P un poset. Les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1) *P est un poset série-parallèle*
- 2) *P est sans N et ne contient pas le poset N' comme sous-poset induit.*

Chaque poset peut être représenté par un diagramme, appelé *diagramme des arcs* : Les éléments de P sont représentés par des arcs d'un graphe orienté D avec exactement une source et $a \prec_P b$ implique l'existence d'un chemin reliant a et b dans D .

En général, nous avons besoin de plus d'arcs que d'éléments de P pour le représenter correctement. Les arcs ajoutés sont appelés *les simulacres* de la représentation. Si P a une représentation D sans des simulacres, alors P est dit *sans simulacre*.

La Figure 4 représente deux diagrammes des arcs, le premier D est celui de N et le deuxième D' est celui de N' .



Figure 4

Nous remarquons que D' est sans simulacre, mais pas D .

Soit $G = (E, V)$ un digraphe (un graphe orienté). On appelle le *line-digraphe* de G est le graphe $L(G)$ l'ensemble de ses sommets est $E(G)$ et $(u, v) \in E(L(G))$ si et seulement si $u = (x, y)$ et $v = (y, z)$ pour tout $x, y, z \in V(G)$.

Théorème 2.2 [22]

Soit P un poset, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) P est sans N .
- 2) Le diagramme de Hasse de P est line-digraphe .

Remarque 2.1

Il est facile de voir que dans un poset P sans N , si $N(x)$ est l'ensemble des éléments qui couvrent x (qui sont couverts par x) pour tout $x \in P$ alors $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$ implique $N(x) = N(y)$ pour tout $x, y \in P$.

R.L. HEMMINGER et L.W BEINEKE [21] prouvèrent que si un diagramme des arcs d'un poset donné est sans simulacre alors son diagramme de Hasse est line-digraphe, pour plus de détail voir [37]. Par conséquent, un poset est sans N si son diagramme des arcs est sans simulacre.

2.3 Complexité algorithmique

Un *algorithme* de résolution d'un problème (P) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème (P) en une chaîne de caractères représentant les résultats de (P). Il est nécessaire d'établir une relation entre la durée d'exécution de l'algorithme et la taille de l'exemple traité.

Etant données deux fonctions f et g de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N}$, on dit que f est un $O(g)$ s'il existe une constante c telle que $|f(n)| \leq c |g(n)|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. f est dite *polynomiale* si elle est un $O(g)$ et si g est un polynôme en n .

Un algorithme est dit *efficace* ou *polynomiale* si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille n est une fonction polynomiale en n . On dit qu'un tel algorithme a une complexité en $O(n^k)$ ou opère en temps polynomiale.

Un problème est dit *polynomial* ou appartient à la *classe P* s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre.

Un problème de *reconnaissance* est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs VRAI ou FAUX.

Un problème appartient à la *classe NP* s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.

Soient (P_1) et (P_2) deux problèmes de reconnaissance. On dit que le problème (P_1) se réduit (en temps polynomial) à (P_2) s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel (comme un sous programme) à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Le problème de reconnaissance est dit *NP-complet* s'il est dans NP et si pour tout problème de la classe NP peut se réduire polynomialement à lui.

2.3.1 Problème de reconnaissance des posets sans N

Soit P un poset sans N . Un bloc de P est le graphe biparti complet maximal dans le diagramme de Hasse de P . Plus précisément, un bloc de P de la forme (A, B) avec $A, B \subseteq P$ tels que A représente l'ensemble de tous les éléments qui couvrent chaque $y \in B$ et B représente l'ensemble de tous les éléments couverts par chaque $x \in A$.

Soient $(A_1, B_1), \dots, (A_k, B_k)$ les k blocs de P ordonnés comme suit :

Pour tout $x \in P$, si $x \in A_i$ et $x \in B_j$ alors $i < j$

La matrice $M(P)$ définie par $M(P) = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = |A_i \cap B_j|$ est appelée *matrice représentative de P* .

Deux matrices M et M' sont dite *similaires* s'il existe une permutation σ qui s'applique identiquement sur les lignes et les colonnes de M pour obtenir M' .

Reconnaître si un poset P donné est sans N ou ne l'est pas se fait en temps polynomial $O(n+m)$ où n est le nombre de sommets de P et m est le nombre d'arcs de son diagramme de Hasse.

Le premier algorithme polynomial de reconnaissance des posets sans N est apparu en 1982 par M. SYSLO [37]. Il est basé sur la propriété 5 du Théorème précédent pour construire le diagramme des arcs. Un autre algorithme est proposé par M. HABIB et R. JEGOU dans [19] basé également sur la propriété 5 mais il construit l'arbre de décomposition de QSP (pour la définition voir par exemple [19,20]) au lieu du diagramme des arcs.

L'algorithme le plus récent est celui de B.I BAYOUMI et S.M KHAMIS [1]. Pour un poset donné, cet algorithme construit ses blocs ainsi que sa matrice représentative.

Cette méthode est implicitement contenue dans l'algorithme de reconnaissance des posets série-parallèles [39].

2.3.2 Problème d'isomorphisme

Un poset P' sans N est un poset dérivé du poset P s'il est obtenu en subdivisant chaque arc du diagramme de Hasse de P au moyen d'un nouveau sommet.

En 1987, M. HABIB et R. MÖHRING dans [20] prouvèrent que deux posets sont isomorphes si et seulement si leurs posets dérivés sans N sont isomorphes.

Se basant sur le fait que deux posets sans N sont isomorphes si leurs matrices représentatives sont similaires, B.I BAYOUMI et S.M KHAMIS [1] ont élaboré un algorithme en $O(k^2 k!)$ où k représente le nombre de blocs, ce qui permis d'affirmer qu'il existe un algorithme en $O(k^2 k!)$ pour l'isomorphisme de deux posets.

Le problème d'isomorphisme est un problème polynomiale pour quelques classes de posets telles que les posets série-parallèles et les posets d'intervalles [28].

2.3.3 Problème de dimension

La dimension d'un poset P noté par $\dim(P)$, est le plus petit entier positif d pour lequel il existe d extensions linéaire de P dont leur intersection vaut exactement P où une extension linéaire de P est une chaîne linéaire formée des éléments de P préservant l'ordre dans P .

Le problème de déterminer si un poset sans N a une dimension au plus égale à 3 est un problème NP-complet [23].

2.4 Quelques applications

L'une des applications principales et des plus anciennes des posets sans N est leur utilisation dans *l'analyse de projet* en particulier dans les anciennes techniques comme CPM ou PERT [12]

Ces techniques sont représentées par un digraphe dans lequel les arcs correspondent aux activités du projet et les sommets correspondent aux événements. En terme théorique de posets, cette *activité-représentation des arcs* ou *PERT-réseau* est juste le diagramme des arcs d'un poset sans N. Si le poset original P qui décrit les contraintes technologiques de priorité n'est pas sans N, alors des activités fictives sont ajoutées pour le rendre sans N, on obtient un plus grand diagramme des arcs d'un poset sans N qui contient le poset P comme sous poset induit. Beaucoup de techniques ont été proposées pour obtenir ce poset sans N [36,38].

Cette représentation des projets par des diagrammes des arcs a été choisie afin d'appliquer les algorithmes de digraphe qui fonctionnent avec les poids des arcs tels que les algorithmes de plus

long chemin (pour calculer la durée de projet et les chemins critiques) ou les algorithmes de flow (pour calculer les poids des antichaînes).

Dans une partie de ces applications, il est essentiel d'utiliser le diagramme des arcs, par exemple l'algorithme de flow mentionné exige la propriété CAC [27] .

Notre apport dans cette classe des posets sans N est l'étude des propriétés de König et duale de König pour l'hypergraphe des intervalles maximaux d'un poset de cette classe.

Soit P un poset et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P .

2.5 Propriété de König

La propriété de König pour l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ n'est pas en générale vérifiée [8] . Concernant la classe des posets séries-parallèle et des posets d'intervalles, la propriété est satisfaite [5,6] .

Dans le cas général, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 [4]

Soit P un poset rangé et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P .

$\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König si une des conditions suivantes est réalisée

- 1) $W_0 = 1$ ou $W_{r(P)} = 1$.
- 2) $r(P)=1$.
- 3) *le diagramme de Hasse est un arbre.*
- 4) $W_0 = W_{r(P)} = 2$.

Si P est un poset sans N, la propriété de König n'est toujours pas satisfaite. A titre d'exemple, considérons le poset illustré dans la Figure 5. P est sans N mais vérifie:

$$v(\mathcal{H}(P)) = 1 \text{ et } \tau(\mathcal{H}(P)) = 2 .$$

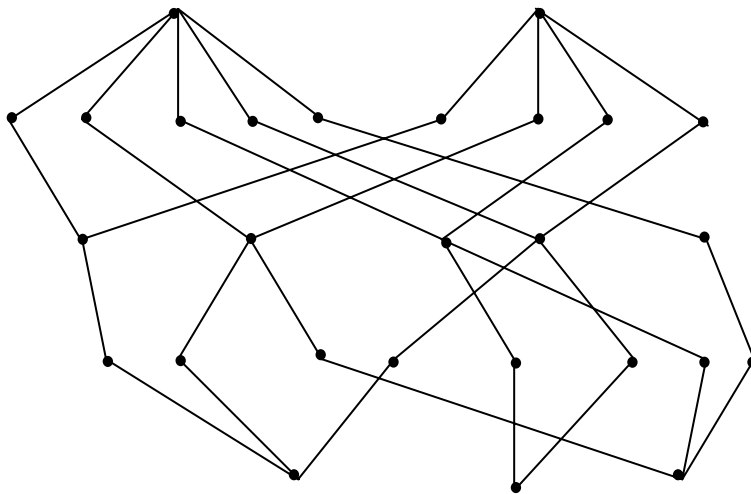


Figure 5

2.6 Propriété duale de König

Le poset P de la Figure 6 [8] montre qu'en général la propriété duale de König n'est pas vérifiée, puisque $\alpha(\mathcal{H}(P)) = 3$ et $\rho(\mathcal{H}(P)) = 4$. Notons que le poset n'est pas sans N.

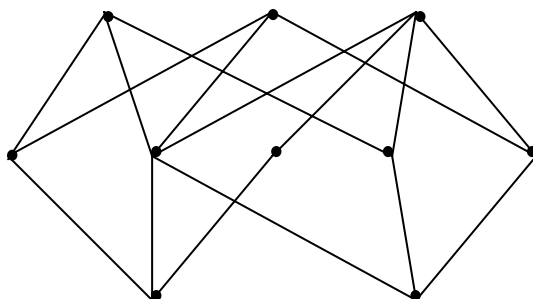


Figure 6

Dans le cas général, on a le Théorème suivant:

Théorème 2.3 [4]

$\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König si l'une des conditions du Corollaire 2.1 est vérifiée.

Il est facile de voir que la propriété (l,u) -IC implique la propriété (l,u) -IS et en particulier la propriété duale de König. Le Théorème suivant prouve la propriété duale de König de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P_{l,u})$ dès que P est un poset de Peck où l et u sont deux entier vérifiant $0 \leq l \leq u \leq r(P)$.

Théorème 2.4 [4]

Soit P un poset de Peck .

a) $\mathcal{H}(P)$ a la propriété (l,u) -IC pour tout l,u avec $0 \leq l \leq u \leq r(P)/2$ ou $r(P)/2 \leq l \leq u \leq r(P)$.

b) Si $\mathcal{H}(P)$ a la propriété $(l, r(P)-l)$ -IC pour tout l avec $0 \leq l \leq r(P)/2$, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IC .

B. VOIGT et I. WEGENER [40] prouvèrent la propriété forte-IC pour l'hypergraphe des intervalles du treillis Booléen B_n . Ainsi la propriété duale de König de $\mathcal{H}((B_n)_{l,u})$ est satisfaite pour tout l,u , $0 \leq l \leq u \leq n$, où $(B_n)_{l,u}$ est le sous-poset induit par l'union des niveaux consécutifs

$$\bigcup_{i=l}^u N_i \text{ de } B_n .$$

La normalité de l'hypergraphe dual $\mathcal{H}^*(P)$ est une condition suffisante pour qu'il ait la propriété de König . Il est connu que si P est un ordre d'intervalles [5] ou série-parallèle [6] alors $\mathcal{H}^*(P)$ est normal.

Concernant les posets sans N, malheureusement $\mathcal{H}^*(P)$ n'est pas normal ; Il suffit de voir le poset illustré dans la Figure 7 où le cycle $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ de graphe représentatif de $\mathcal{H}^*$ est un cycle impair sans corde et par suite le graphe $L(\mathcal{H}^*)$ n'est pas parfait c'est à dire $\mathcal{H}^*(P)$ n'est pas normal .

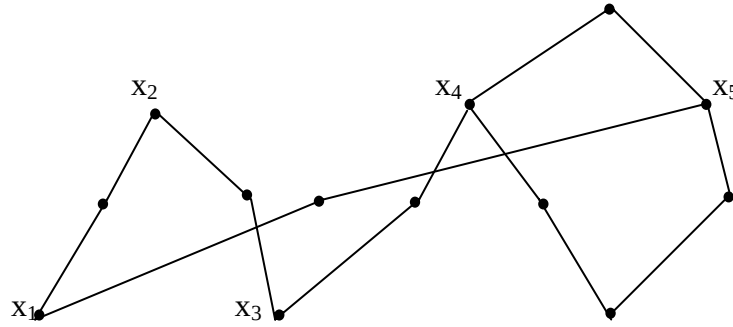


Figure 7

La non normalité de $\mathcal{H}^*(P)$ ne prouve rien quant à la propriété duale de König.

Soit P un poset sans N, P peut être construit à partir de deux posets en utilisant seulement la somme linéaire et la construction de gluing [32]. Considérons un élément minimal a_0 de P , notons par $B(a_0)$ l'ensemble des couvertures supérieures de l'élément a_0 c'est à dire $B(a_0) = \{y \in P : a_0 \prec y\}$.

Soit $A(a_0) = \{x \in P : \exists y \in B(a_0), x < y\}$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $A(a_0)$ est un sous ensemble de $\text{Min } P$. En effet si $A(a_0)$ contient un élément t qui n'est pas minimal, nous considérons l'ensemble $A(a_1)$ pour un élément minimal $a_1 < t$.

Nous avons pour tout $x \in A(a_0)$ et $y \in A(a_1)$, $x \not\leq y$. Ainsi, de cette manière, nous construisons un ordre avec des éléments minimaux $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $x \not\leq y$ pour tout $i < j$ où $x \in A(a_i)$ et $y \in A(a_j)$. Puisque P est fini, le nombre d'étapes est fini.

Il s'ensuit que si P contient un élément minimal a tel que $A(a) \subset \text{Min } P$, P peut être alors décomposé comme suit :

$$P = (A(a) \cup B(a)) * (P - A(a)) \quad (B(a), B(a)).$$

Notons que $A(a) \cup B(a) \simeq A(a) \oplus B(a)$ où $A(a)$ et $B(a)$ sont des antichaînes.

D'où

$$P = (A(a) \oplus B(a)) * (P - A(a)) \quad (B(a), B(a)).$$

Nous avons le Théorème suivant

Théorème 2.5

Soit P un poset sans N , et a un élément minimal de P qui vérifie $A(a) \subset \text{Min } P$.

Si $\text{Min } (P - A(a)) = B(a)$, alors l'hypergraphe des intervalles $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König.

Preuve

Notons par P_1 le poset $A(a) \oplus B(a)$ et par P_2 le poset $P - A(a)$. Dans ce cas P peut être écrit comme :

$$P = A(a) \oplus P_2$$

Notons par k la cardinalité de $A(a)$.

Soit $\mathfrak{I}_2$ la famille des intervalles du recouvrement minimum par arêtes de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P_2)$

c'est à dire $\rho(\mathcal{H}(P_2)) = |\mathfrak{I}_2|$

Qu'on note brièvement ρ_2

Soient $[c_j, d_j]$, $j=1,2,\dots, \rho_2$ les intervalles de la famille $\mathfrak{I}_2$ et $A(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Si $k \leq |\text{Max } P|$, nous considérons la famille d'intervalles:

$$\{[a_i, d_i], i=1,2,\dots, k\} \cup \{[a_k, d_j], j=k+1,\dots, |\text{Max } P_2|\}.$$

Cette famille représente bien un recouvrement par arêtes de l'hypergraphe $\mathcal{H}(A(a) \oplus P_2)$ de cardinalité $|\text{Max } P|$.

Comme l'ensemble des éléments maximaux de P forme un ensemble stable de $\mathcal{H}(P_2)$, nous obtenons

$$\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P)) = |\text{Max } P|$$

Si $|\text{Max } P| < k$, la famille

$$\{[a_i, d_i], i=1,2,\dots, |\text{Max } P|\} \cup \{[a_j, d_{|\text{Max } P|}], j=|\text{Max } P|+1,\dots, k\}.$$

est une famille de recouvrement par arêtes de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ de cardinalité k .

Comme l'ensemble $A(a)$ est un ensemble stable de $\mathcal{H}(P)$, nous déduisons que

$$\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P)) = k$$

Il s'ensuit $\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P)) = \text{Max}\{|\text{Max } P|, k\}$. ◆

Chapitre 3

*Propriété duale de König pour une
extension des ordres série-parallèles*

3.1 Introduction

Nous avons vu dans le Chapitre précédent que pour la classe des ordres sans N qui représente une extension des ordres série-parallèles, $\mathcal{H}$ a la propriété duale de König dans certain cas mais pas de König, ce qui est différent pour les ordres série-parallèles où les deux propriétés sont toujours vérifiées.

Dans ce Chapitre nous définissons une nouvelle classe de posets. Nous verrons qu'elle représente une autre extension des ordres série-parallèles et nous montrons la normalité (voir la définition page 17) du dual de l'hypergraphe des intervalles d'un poset de cette classe. Ainsi la propriété duale de König est réalisée.

3.2 Définition

Un ordre P est dit de la classe $\mathcal{C}$, s'il ne contient pas de sous poset induit isomorphe à P_1, P_2, P_3 de la Figure 1 et à leurs duaux.

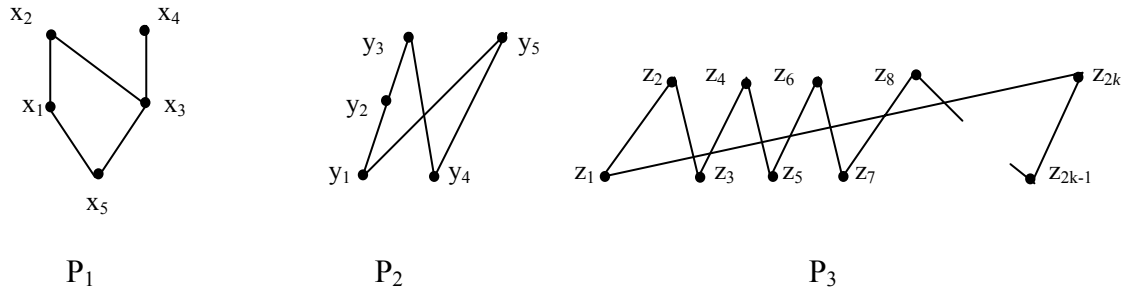


Figure 1

P_1 est le poset induit par l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, où les seules relations de comparabilité sont

$$x_5 < x_1 < x_2 > x_3 > x_5 \quad \text{et} \quad x_3 < x_4$$

P_2 est le poset induit par $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ où les seules relations de comparabilité sont :

$$y_1 < y_2 < y_3 > y_4 < y_5 > y_1.$$

P_3 est le poset induit par $\{z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_{2k-1}, z_{2k}\}$ avec $k > 2$ où les seules relations de comparabilité sont : $z_1 < z_2 > z_3 < z_4 > \dots > z_{2k-1} < z_{2k} > z_1$.

Notons que la classe C contient strictement la classe des ordres série-parallèles. En effet, les posets induits par $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$ et par $\{z_{2i-1}, z_{2i}, z_{2i+1}, z_{2i+2}\}$ pour $i < k$ de la Figure 1 sont isomorphes au poset N . Par ailleurs, N est un poset de la classe C et qui n'est pas un poset série-parallèles.

3.3 Propriété dual de König

Soit P un poset de la classe C et $L(\mathcal{H}^*)$ le graphe représentatif des arêtes du duale $\mathcal{H}^*(P)$ de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$. $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe dont les sommets sont les points de P et deux sommets sont adjacents s'ils appartiennent à un même intervalle de P .

Théorème 3.1

Si P est un poset de classe C , alors $L(\mathcal{H}^)$ est un graphe parfait.*

Preuve

Pour montrer la perfection de $L(\mathcal{H}^*)$, nous utilisons un théorème de Meyniel [29] qui stipule qu'un graphe dont tout cycle impair de longueur supérieur ou égale à 5 contient au moins 2 cordes est un graphe parfait. Ce graphe est appelé graphe de Meyniel.

Supposons le contraire, c'est à dire que $L(\mathcal{H}^*)$ a un cycle $C_k = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ de longueur impaire k , $k \geq 5$ avec au plus une corde. Notons par $I_j = [p_j, q_j]$ l'intervalle contenant x_j et x_{j+1} $j=1, \dots, k-1$, et par $I_k = [p_k, q_k]$ l'intervalle contenant les sommets x_k et x_1 .

La preuve se fera en deux étapes.

1^{ère} étape : C_k n'a aucune corde.

Nous distinguons 3 cas.

Cas1 : $x_1 < x_2$

Cas 1.1 : $x_2 < x_3$

Donc $x_1 < x_3$ et ainsi x_1x_3 est une corde de C_k . Contradiction.

Cas 1.2 : $x_2 \parallel x_3$

Le poset induit par l'ensemble $\{x_1, x_2, p_2, x_3, q_2\}$ est isomorphe à P_1^* .

En effet $x_1 < q_2$ puisque $x_2 < q_2$. Nous avons aussi $x_1 \parallel p_2$ car sinon x_1x_3 serait une corde de C_k .

Cas 1.3 : $x_3 < x_2$

Comme x_2x_4 n'est pas une corde de C_k , alors nous aurons soit $x_3 \parallel x_4$ soit $x_3 < x_4$.

Cas 1.3.1 : $x_3 \parallel x_4$

Le poset induit par l'ensemble $\{x_2, x_3, q_3, x_4, p_3\}$ et P_1 sont isomorphes. Ceci est vrai puisque x_2x_4 ne représente pas une corde de C_k et alors $x_2 \parallel q_3$.

Cas 1.3.2 : $x_3 < x_4$

Comme x_3x_5 n'est pas une corde de C_k alors nous avons soit $x_4 \parallel x_5$ soit $x_5 < x_4$.

Si $x_4 \parallel x_5$, le poset induit par $\{x_3, x_4, p_4, x_5, q_4\}$ est isomorphe à P_1^* . En effet, comme $x_3 < x_4 < q_4$ et x_3x_5 n'est pas une corde, alors nécessairement $x_3 \parallel p_4$.

Si $x_5 < x_4$, nous avons deux possibilités :

Pour $k = 5$, le poset induit par $\{p_5, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ est isomorphe à P_2 . En effet, $x_3 \parallel p_5$ car sinon x_1x_3 serait une corde et nous avons aussi $p_5 < x_1 < x_2$ et $p_5 < x_5 < x_4$.

Pour $k > 5$, considérons le « zig zag » $x_1 < x_2 > x_3 < \dots < x_{i-1} > x_i$ reliant x_1 à x_i , où i est un entier impair maximum qui vérifie $5 \leq i \leq k$.

Si $i = k$, alors x_1 et x_k sont dans le même intervalle I_k et ils sont incomparables. En effet, si $x_k < x_1$ alors x_2x_k serait une corde de C_k et si $x_1 < x_k$ alors $x_{k-1}x_1$ serait aussi une corde. D'où le poset induit par $\{x_2, x_1, q_k, x_k, p_k\}$ est isomorphe à P_1 , puisque $x_2 \parallel q_k$ car sinon x_2x_k serait une corde.

Si $i < k$, alors nous avons soit $x_{i+1} < x_i$ ce qui signifie que $x_{i-1}x_{i+1}$ est une corde de C_k , et alors une contradiction, soit $x_{i+1} \parallel x_i$ est donc le poset induit par l'ensemble $\{x_{i-1}, x_i, q_i, x_{i+1}, p_i\}$ est isomorphe à P_1 . Ainsi, nous obtenons nécessairement $x_{i+1} > x_i$.

Maintenant comme l'indice i était maximum dans le « zig zag », nous avons deux possibilités pour la relation entre x_{i+1} et x_{i+2} . Si $x_{i+1} < x_{i+2}$, alors x_ix_{i+2} représente une corde de C_k , ce qui est impossible et si $x_{i+1} \parallel x_{i+2}$ alors le poset induit par $\{x_i, x_{i+1}, p_{i+1}, x_{i+2}, q_{i+1}\}$ est isomorphe à P_1^* , puisque $x_i \parallel p_{i+1}$.

Cas2 : $x_2 < x_1$

Ce cas est similaire au premier cas par dualité.

Cas3 : $x_1 \parallel x_2$

Nous distinguons trois sous cas

Cas 3.1 : $x_2 < x_3$

Nous avons $q_1 \parallel x_3$ car sinon, x_3 serait un élément de I_1 . Ainsi, le poset induit par $\{x_1, q_1, x_2, x_3, p_1\}$ est isomorphe à P_1 .

Cas 3.2 : $x_3 < x_2$

Le poset induit par l'ensemble $\{x_1, p_1, x_2, x_3, q_1\}$ est isomorphe à P_1^* . En effet, $p_1 \parallel x_3$ car sinon x_3 appartiendrait à I_1 et donc x_1x_3 serait une corde.

Cas 3.3 : $x_2 \parallel x_3$

Si $q_1 \neq q_2$, alors le poset induit par $\{x_1, q_1, x_2, q_2, p_1\}$ est isomorphe à P_1 .

Si $q_1 = q_2$ alors nécessairement $p_1 \neq p_2$ car sinon $I_1 = I_2$ c'est à dire l'existence de la corde x_1x_3 , et ainsi le poset induit par $\{x_1, p_1, x_2, p_2, q_1\}$ est isomorphe à P_1^* .

2^{ème} étape : C_k a une seule corde.

Soit x_ix_j la corde du cycle C_k où $i < j$. Notons par C^1 et C^2 les cycles $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_i)$ et $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_k, x_1, \dots, x_i, x_j)$ respectivement.

Si C^1 et C^2 sont de longueur supérieure à 3, alors l'un de ces cycles est de longueur impaire: D'après la première étape, ceci conduit à une contradiction.

Par suite, la corde x_ix_j partage le cycle C_k en deux cycles, l'un est de longueur 3 et l'autre est de longueur paire.

Supposons sans perte de généralité que x_1x_3 est cette corde et $I' = [p', q']$ l'intervalle contenant les sommets x_1 et x_3 .

Nous distinguons trois cas

Cas1 : $x_1 < x_2$
Cas 1.1 : $x_2 < x_3$

$x_3 < x_4$ signifie que x_1x_4 et x_2x_4 sont des cordes de C_k , alors soit $x_4 < x_3$ ou $x_3 \parallel x_4$.

Cas 1.1.1 : $x_3 \parallel x_4$

Comme x_2x_4 n'est pas une corde alors $p_3 \parallel x_2$, par conséquent le poset induit par $\{x_2, x_3, p_3, x_4, q_3\}$ est isomorphe à P_1^* .

Cas 1.1.2 : $x_4 < x_3$

Si $x_5 < x_4$, alors $x_5 < x_3$ ce qui signifie que x_3x_5 est une corde de C_k . Impossible.

Si $x_5 \parallel x_4$, alors le poset induit par l'ensemble $\{x_3, x_4, q_4, x_5, p_4\}$ est isomorphe à P_1 . En effet, $p_4 < x_3$ puisque $p_4 \leq x_4$ et comme x_3x_5 n'est pas une corde de C_k , alors nécessairement $x_3 \parallel q_4$.

Si $x_4 < x_5$, nous avons deux possibilités.

Pour $k = 5$, le poset induit par $\{p_5, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ est isomorphe à P_2 . En effet, nous avons $x_4 \parallel p_5$, car sinon x_1x_4 et x_2x_4 représenteraient des cordes de C_k .

Pour $k > 5$, considérons le « zig zag » $x_1 < x_3 > x_4 < \dots > x_{i-1} < x_i$ reliant x_1 à x_i , où i est un entier impair maximum qui vérifie $5 \leq i \leq k$.

Si $i = k$, alors x_1 et x_k sont dans le même intervalle I_k .

Si $x_k < x_1$ alors x_2x_k et x_3x_k représentent des cordes de C_k . Si $x_1 < x_k$, nous trouvons que le poset induit par $\{x_1, x_3, x_4, \dots, x_k\}$ est isomorphe à P_3 . Et si $x_1 \parallel x_k$, alors le poset induit par $\{x_2, x_1, q_k, x_k, p_k\}$ est isomorphe à P_1 , puisque $x_2 \parallel q_k$ car sinon x_2x_k serait une corde.

Si $i < k$, alors nous avons soit $x_{i+1} > x_i$ c'est-à-dire que $x_{i-1}x_{i+1}$ est une corde de C_k , ce qui est une contradiction, soit $x_{i+1} \parallel x_i$ alors le poset induit par l'ensemble $\{x_{i-1}, x_i, p_i, x_{i+1}, q_i\}$ est isomorphe à P_1^* , puisque $x_{i-1} \parallel p_i$, car sinon $x_{i-1}x_{i+1}$ serait une corde de C_k . Par suite, nous avons $x_{i+1} < x_i$.

Maintenant comme l'indice i était maximum dans le « zig zag », nous avons deux possibilités pour la relation entre x_{i+1} et x_{i+2} . Si $x_{i+2} < x_{i+1}$, alors x_ix_{i+2} représente une corde de C_k , ce qui est impossible et si $x_{i+1} \parallel x_{i+2}$ alors le poset induit par $\{x_i, x_{i+1}, q_{i+1}, x_{i+2}, p_{i+1}\}$ est isomorphe à P_1 puisque $x_i \parallel q_{i+1}$.

Cas 1.2 : $x_3 < x_2$

La relation $x_4 < x_3$ signifie que x_2x_4 est une corde, contradiction

Cas 1.2.1 : $x_3 \parallel x_4$

Alors le poset induit par $\{x_2, x_3, q_3, x_4, p_3\}$ et P_1 sont isomorphes, puisque la relation $x_2 < q_3$ est équivalent à l'existence d'une autre corde x_2x_4 .

Cas 1.2.2 : $x_3 < x_4$

Si $x_1 \parallel x_3$, alors le poset induit par l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, p'\}$ est isomorphe à P_1 .

Si $x_1 < x_3$, nous aurons alors $x_1 < x_4$ c'est à dire x_1x_4 est une corde de C_k .

Si $x_3 < x_1$, nous avons soit $x_5 \parallel x_4$ soit $x_5 < x_4$, car $x_4 < x_5$ produit l'existence de la corde x_3x_5 .

Supposons que $x_5 \parallel x_4$, le poset induit par $\{x_3, x_4, p_4, x_5, q_4\}$ est isomorphe à P_1^* . En effet, $x_3 \parallel p_4$ car sinon x_3 serait un élément de I_4 .

Supposons que $x_5 < x_4$, nous avons deux possibilités

Pour $k = 5$, nous avons $p_5 < x_2$ puisque $p_5 \leq x_1$, de plus $x_3 \parallel p_5$ car sinon x_3x_5 serait une corde. Alors le poset induit par $\{p_5, x_5, x_4, x_3, x_2\}$ est isomorphe à P_2 .

Pour $k > 5$, considérons le « zig zag » $x_1 > x_3 < x_4 > \dots < x_{i-1} > x_i$ reliant x_1 à x_i , où i est un entier impair maximum qui vérifie $5 \leq i \leq k$.

Si $i = k$, alors x_1 et x_k sont dans le même intervalle I_k et ils sont nécessairement incomparables car $x_1 < x_k$ (resp. $x_k < x_1$) implique l'existence de la corde x_1x_{k-1} (resp. x_2x_k). Par suite le poset induit par $\{x_2, x_1, q_k, x_k, p_k\}$ est isomorphe à P_1 puisque $x_2 \parallel q_k$.

Si $i < k$, alors nous avons soit $x_{i+1} \parallel x_i$ et donc le poset induit par l'ensemble $\{x_{i-1}, x_i, q_i, x_{i+1}, p_i\}$ est isomorphe à P_1 , puisque $x_{i-1} \parallel q_i$, car sinon $x_{i-1}x_{i+1}$ serait une corde de C_k , ce qui est une contradiction, soit $x_{i+1} < x_i$ et cela implique que $x_{i-1}x_{i+1}$ est une corde de C_k ce qui est encore une contradiction. Alors la seule relation est $x_{i+1} > x_i$.

Comme l'indice i était maximum dans le « zig zag », nous avons deux possibilités pour la relation entre x_{i+1} et x_{i+2} . Si $x_{i+1} < x_{i+2}$, alors x_ix_{i+2} représente une corde de C_k , ce qui est impossible et si $x_{i+1} \parallel x_{i+2}$ alors le poset induit par $\{x_i, x_{i+1}, p_{i+1}, x_{i+2}, q_{i+1}\}$ est isomorphe à P_1^* .

Cas 1.3 : $x_2 \parallel x_3$

Nous avons les trois possibilités pour les relations de comparabilités entre x_3 et x_4

Cas 1.3.1 : $x_3 < x_4$

L'ensemble $\{x_2, q_2, x_3, x_4, p_2\}$ induit un poset qui est isomorphe à P_1 . En effet $x_4 \parallel q_2$ car sinon x_4 serait un élément de I_2 .

Cas 1.3.2 : $x_4 < x_3$

Le poset induit par $\{x_2, p_2, x_3, x_4, q_2\}$ est isomorphe à P_1^* , puisque $p_2 < x_4$ signifie que $x_2 x_4$ est une corde.

Cas 1.3.3 : $x_3 \parallel x_4$

Comme $q_2 = q_3$ et $p_2 = p_3$ ne peuvent se présenter simultanément car sinon I_2 sera égale à I_3 , alors nous avons une isomorphisme entre P_1 et le poset induit par $\{q_2, x_3, q_3, x_4, p_3\}$ ou entre P_1^* et le poset induit par $\{p_2, x_3, p_3, x_4, q_3\}$.

Cas2 : $x_2 < x_1$

Ce cas est similaire au premier cas par dualité.

Cas3 : $x_1 \parallel x_2$

Cas 3.1 : $x_2 < x_3$

$x_3 < x_4$ signifie que $x_2 x_4$ représente une corde de C_k , donc nous avons soit $x_4 < x_3$, soit $x_3 \parallel x_4$.

Cas 3.1.1 : $x_3 \parallel x_4$

Dans ce cas, le poset induit par $\{x_2, x_3, p_3, x_4, q_3\}$ est isomorphisme à P_1^* , puisque si $x_2 > p_3$ alors $x_2 x_4$ serait une corde de C_k .

Cas 3.1.2 : $x_4 < x_3$

Il est impossible de trouver $x_5 < x_4$ puisque $x_3 x_5$ n'est pas une corde.

Si $x_5 \parallel x_4$, le poset induit par $\{x_3, x_4, q_4, x_5, p_4\}$ et le poset P_1 sont isomorphes, puisque $x_3 \parallel q_4$ sinon x_3 serait un élément de I_4 .

Si $x_4 < x_5$, nous avons deux possibilités :

Pour $k = 5$, nous avons $p_1 \parallel x_4$ et $x_3 \parallel q_5$ car sinon x_2x_4 et x_3x_5 seraient des cordes de C_k . Comme $x_2 < q_5$ et $p_1 < x_5$ ne peuvent se présenter simultanément, nous déduisons que le poset induit par $\{p_1, x_2, x_3, x_4, q_5\}$ ou par $\{x_4, x_5, q_5, p_1, x_3\}$ est isomorphe à P_2 .

Pour $k > 5$, nous avons soit $x_1 \parallel x_3$ soit $x_1 < x_3$ car sinon x_1x_4 serait une corde de C_k .

Supposons que $x_1 \parallel x_3$, alors le poset induit par $\{x_4, x_3, p', x_1, q'\}$ est isomorphe à P_1^* . En effet $x_4 \parallel p'$ car sinon x_1x_4 serait une corde de C_k .

Supposons maintenant que $x_1 < x_3$, considérons le «zig zag» $x_1 < x_3 > x_4 < \dots > x_{i-1} < x_i$ reliant x_1 à x_i , où i est un entier impair maximum qui vérifie $5 \leq i \leq k$.

Si $i = k$, alors x_1 et x_k sont dans le même intervalle I_k . Si $x_k < x_1$ et cela implique l'existence de la corde et x_3x_k ce qui est impossible. Si $x_1 < x_k$, alors le poset induit par $\{x_k, x_1, q_1, x_2, p_1\}$ est isomorphe à P_1 , puisque $q_1 \parallel x_k$ car sinon x_2x_k serait une corde de C_k , et si $x_1 \parallel x_k$, le poset induit par $\{x_3, x_1, q_k, x_k, p_k\}$ est isomorphe à P_1 .

Si $i < k$, la seule relation possible entre x_i et x_{i+1} est $x_{i+1} < x_i$, puisque $x_i < x_{i+1}$ implique l'existence de la corde $x_{i-1}x_{i+1}$ ce qui est une contradiction, et si $x_{i+1} \parallel x_i$ alors le poset induit par l'ensemble $\{x_{i-1}, x_i, p_i, x_{i+1}, q_i\}$ est isomorphe à P_1^* .

Comme l'indice i était maximum dans le «zig zag», nous avons deux possibilités pour la relation entre x_{i+1} et x_{i+2} , soit $x_{i+1} \parallel x_{i+2}$, et donc le poset induit par $\{x_i, x_{i+1}, p_{i+1}, x_{i+2}, q_{i+1}\}$ est isomorphe à P_1^* , soit $x_{i+1} < x_{i+2}$, ce qui nous donne l'existence de la corde x_ix_{i+2} , ce qui est impossible.

Cas 3.2 : $x_3 < x_2$

Similaire au cas 3.1 par dualité.

Cas 3.3 : $x_2 \parallel x_3$

Similaire au cas 1.3.



Théorème 3.2

Si P est un poset sans P_1 et sans P_1^* , alors $\mathcal{H}^*(P)$ satisfait la propriété de Helly.

Preuve

Pour montrer que $\mathcal{H}^*(P)$ a la propriété de Helly, nous utilisons un résultat de GILMORE [2] qui stipule qu'un hypergraphe satisfait la propriété de Helly si et seulement si pour chaque triplet d'arêtes I_1, I_2 et I_3 de $\mathcal{H}$, il existe une arête de $\mathcal{H}$ contenant $(I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3)$.

Dans notre cas, il suffit de montrer que $(I_1 \cap I_2) \subseteq I_3$ ou $(I_1 \cap I_3) \subseteq I_2$ ou $(I_2 \cap I_3) \subseteq I_1$; avec $I_1=[p_1, q_1]$, $I_2=[p_2, q_2]$ et $I_3=[p_3, q_3]$.

Nous supposons le contraire c'est à dire, $(I_1 \cap I_2) \not\subseteq I_3$, $(I_1 \cap I_3) \not\subseteq I_2$ et $(I_2 \cap I_3) \not\subseteq I_1$.

Soient y_1, y_2 et y_3 trois sommets de P , tels que y_1 est un élément de $(I_2 \cap I_3)$ mais pas de I_1 , y_2 est un élément de $(I_1 \cap I_3)$ mais pas de I_2 et y_3 est un élément de $(I_1 \cap I_2)$ mais pas de I_3 , c'est à dire

$$\begin{aligned} y_1, y_2 &\in I_3 \text{ et } y_3 \notin I_3, \\ y_1, y_3 &\in I_2 \text{ et } y_2 \notin I_2, \\ y_2, y_3 &\in I_1 \text{ et } y_1 \notin I_1. \end{aligned}$$

Supposons sans perte de généralité que $p_2 \not\prec y_2$. Nous distinguons trois cas.

Cas 1 : $y_1 \parallel y_2$

Le poset induit par $\{p_2, y_1, p_3, y_2, q_3\}$ est isomorphe à P_1^* . En effet, puisque nous avons $p_2 \not\prec y_2$ et $y_2 > p_3$ alors $p_2 \neq p_3$.

Cas 2 : $y_1 < y_2$

Ce cas est impossible puisque nous avons $p_2 < y_1$ et $p_2 \not\prec y_2$.

Cas 3 : $y_2 < y_1$
Cas 3.1 : $y_1 < y_3$

Nous trouverons une contradiction car $p_1 < y_2 < y_1 < y_3 < q_1$ implique $y_1 \in I_1$.

Cas 3.2 : $y_3 < y_1$

Le poset induit par $\{p_2, y_3, p_1, y_2, y_1\}$ est isomorphe à P_1^* . En effet, $y_3 \parallel y_2$ puisque $y_2 < y_3$ implique $y_3 \in I_3$ et $y_3 < y_2$ implique $y_2 \in I_2$. De plus, $p_1 \neq p_2$ car sinon nous aurons $p_2 < y_2$. Contradiction.

Cas 3.3 : $y_1 \parallel y_3$

Le poset induit par $\{y_1, q_2, y_3, q_1, p_2\}$ est isomorphe à P_1 . En effet, $y_1 \parallel q_1$ car sinon y_1 serait un élément de I_1 et par conséquent $q_1 \neq q_2$ ◆

Corollaire 3.1

L'hypergraphe des intervalles d'un poset de la classe C a la propriété duale de König.

Preuve

Soit P un poset de la classe C et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles de P . Nous avons d'une part, d'après le Théorème 3.2, $\mathcal{H}^*(P)$ satisfait la propriété de Helly, et d'autre part $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe parfait d'après le Théorème 3.1. En vertu de Théorème 1.2 [2], nous déduirons que $\mathcal{H}^*(P)$ est normal et par conséquent $\mathcal{H}^*(P)$ a la propriété de König, ce qui revient à dire que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König.

Chapitre 4

Propriété duale de König de l'hypergraphe

$$\mathcal{H}(\Pi_n)$$

4.1 Introduction

Le treillis des partitions d'un ensemble Π_n a été défini au premier Chapitre. Il a la propriété d'être rangé, de rang $n-1$ et le $k^{\text{ième}}$ nombre de Whitney est égal au nombre de Stirling du second espèce $S(n, n-k)$. Le treillis Π_n n'est pas symétrique, puisqu'il existe $2^{n-1}-1$ partitions en deux blocs d'un ensemble à n éléments, mais seulement $n(n-1)/2$ partitions en $n-1$ blocs du même ensemble. Par conséquent, Π_n n'a pas une décomposition en chaînes symétriques. Cependant, nous pouvons trouver une famille maximale de chaînes symétriques disjointes qui contient toutes les partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$ de rang $\leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

N.G de BRUIJN et al [10] et J.R GRIGGS [18] ont proposé des décompositions en chaînes symétriques de plusieurs treillis dont le treillis Booléen B_n . D. LOEB et al [25] se sont inspirés de la décomposition de N.G.de BRUIJN pour proposer une décomposition partielle maximale de Π_n en chaînes symétriques.

Dans ce Chapitre, nous prouvons la propriété duale de König pour l'hypergraphe des intervalles de $(\Pi_n)_{l,u}$ où $(\Pi_n)_{l,u}$ représente le sous-poset de Π_n induit par l'union des niveaux consécutifs $N_l, \dots, N_u$ de Π_n et l, u sont deux entiers tels que $0 \leq l \leq u \leq n-l$.

4.2. Classes des ordres SSSC et SSC

Dans cette section, nous définissons les classes des ordres SSSC et des ordres SSC, nous donnons aussi des exemples sur ces deux classes et quelques résultats importants.

4.2.1 Classe des ordres SSSC

Soit P un poset rangé de rang n . Nous disons que P est un *ordre à chaînes semi-symétriques spéciales* ou brièvement un *ordre SSSC* s'il existe une décomposition de P en chaînes semi-symétriques avec la propriété supplémentaire $(*)$ suivante:

Si $C = (c_1 \prec \dots \prec c_h)$ est une chaîne de la décomposition où c_h n'est pas un élément maximal de P alors il existe une chaîne D de la décomposition telle que $D = (d_0 \prec \dots \prec d_{h+1})$ avec $d_0 \prec c_1$ et $c_h \prec d_{h+1}$

Dans la Figure 1, le poset P est un ordre SSSC

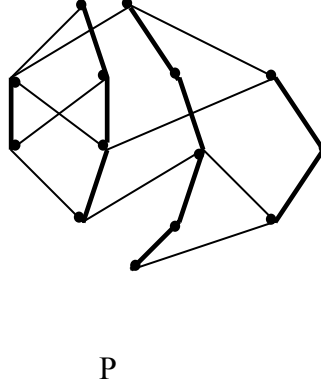


Figure 1

Soit, brièvement $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P .

Théorème 4.1 [8]

Si P est un ordre SSSC alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété (l,u) -IC, c'est-à-dire

$$\alpha(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \max \{|N_l|, |N_u|\} \text{ pour tout } l, u \text{ avec } 0 \leq l \leq u \leq n-l.$$

4.2.2 Classe des ordres SSC

Nous disons que P est un *ordre à chaînes symétriques spéciales* ou brièvement un *ordre SSC* s'il existe une décomposition de P en chaînes symétriques avec la propriété supplémentaire (*) suivante :

Si $C = (c_1 \prec \dots \prec c_h)$ est une chaîne de la décomposition qui n'est pas de longueur maximum alors il existe une chaîne D de la décomposition telle que $D = (d_0 \prec \dots \prec d_{h+1})$ avec $d_0 \prec c_1$ et $c_h \prec d_{h+1}$.

Le poset illustré dans la Figure 2 est un ordre SSC.

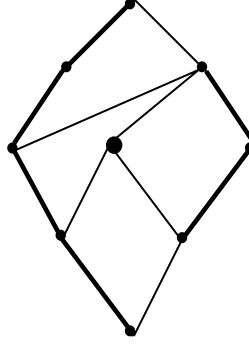


Figure 2

Théorème 4.2 [8]

Si P est un ordre SSC alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IC, c'est-à-dire

$$\alpha(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \text{Max} \{ |N_l|, |N_u| \} \text{ pour tout } l, u \text{ avec } 0 \leq l \leq u \leq n.$$

Remarque 4.1

Notons que le Théorème 4.1 reste valable si on remplace la propriété (*) par la propriété (**) suivante :

Si $C = (c_1 \prec \dots \prec c_h)$ est une chaîne de la décomposition où c_h n'est pas un élément maximal de P alors il existe soit une chaîne D de la décomposition telle que $D = (d_0 \prec \dots \prec d_{i_0} \prec \dots \prec d_{i_0+h+1} \prec \dots \prec d_k)$ avec $d_{i_0} \prec c_1$ et $c_h \prec d_{i_0+h+1}$ soit il existe une chaîne $D' = (d_0 \prec \dots \prec d_{i_0} \prec \dots \prec d_h)$ de la décomposition et un élément s_{h+1} de P avec $d_{i_0} \prec c_1$, $c_h \prec s_{h+1}$ et $d_h \prec s_{h+1}$.

Un tel ordre est appelé *ordre à chaînes semi-symétriques très spéciales* où brièvement *VSSSC*.

Le poset illustré dans la figure 3 est un ordre *VSSSC*.

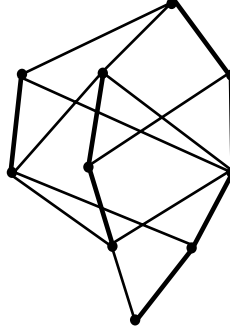


Figure 3

4.2.3 Exemples d'ordres *SSSC* et *SSC*

4.2.3.1 Ordres *SSSC*

- Le treillis C_n des faces du n -cube [8].
- Le treillis $M(k_1, \dots, k_n)$:

Les éléments de ce poset sont les sous-ensembles de $S(k_1, \dots, k_n)$ de la forme

$\{a \in S(k_1, \dots, k_n) : a_i \in A_i, i=1, \dots, n\}$ où les A_i sont des sous-ensembles non vides de $[k_i]$, $i=1, \dots, n$. L'ordre est donné par l'inclusion. $M(k_1, \dots, k_n)$ est un ordre *SSSC* [8].

4.2.3.2 Ordres *SSC*

- La chaîne $C = (c_0 \prec \dots \prec c_n)$.
- Le treillis Booléen B_n [4].
- Le treillis des produits de chaînes $S(k_1, \dots, k_n)$ [15].
- Le treillis des « shuffles » $W_{m,n}$:

C. GREEN dans [15] a défini ce poset comme suit : Soient $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_m$ et $\mathbf{y} = y_1, \dots, y_n$ deux mots formés à partir de $m+n$ lettres distinctes. $W_{m,n}$ est l'ensemble de tous les mots $\mathbf{w}$ formés à partir des lettres de $\mathbf{x}$ et des lettres de $\mathbf{y}$ tels que la restriction de $\mathbf{w}$ aux lettres de $\mathbf{x}$ (resp. de $\mathbf{y}$) est un sous-mot de $\mathbf{x}$ (resp. de $\mathbf{y}$) ordonné par la relation : $\mathbf{w} \leq \mathbf{w}'$ ssi $\mathbf{w}'$ s'obtient à partir de $\mathbf{w}$ en supprimant des lettres de $\mathbf{x}$ et en additionnant des lettres de $\mathbf{y}$. Dans [4] il est prouvé que le treillis des « shuffles » est un ordre *SSC*.

- Le treillis des partitions non intersectantes $NC(n)$ [34]

Une partition de $[n]$ est non intersectante si à chaque fois que $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$ avec a, c sont dans le même bloc et b, d sont dans le même bloc alors les quatre éléments sont dans le même bloc. Le treillis $NC(n)$ est l'ensemble des partitions non intersectantes ordonnées par raffinement. Dans [8], il est prouvé que $NC(n)$ est un ordre SSC.

4.3 Décomposition de Bruijn de $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$

Le treillis $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est isomorphe au produit de n chaînes de longueurs respectives $k_1, k_2, \dots, k_n$ [10], il admet alors une décomposition en chaînes symétriques. L'algorithme de parenthésage introduit par C. GREENE et D. J. KLEITMAN [16] permet d'obtenir une telle décomposition. Celui-ci s'énonce comme suit :

Pour chaque élément $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$, nous associons une séquence de

$\sum_{i=1}^n k_i$ parenthèses gauches et droites de la manière suivante:

On pose

a_1 parenthèses droites et $(k_1 - a_1)$ parenthèses gauches,
 a_2 parenthèses droites et $(k_2 - a_2)$ parenthèses gauches,
 $\vdots$
 a_n parenthèses droites et $(k_n - a_n)$ parenthèses gauches.

Notons que le nombre de parenthèses droites est égal au rang de $\underline{a}$.

Chaque séquence de parenthèses possède un unique parenthésage : Nous fermons toutes les paires de parenthèses gauches et droites qui sont soit adjacentes soit séparées par une telle paire, nous répétons ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus possibilité de coupler les parenthèses.

Les parenthèses non couplées (libres) forment une séquence de parenthèses droites suivies par des parenthèses gauches.

Maintenant nous définissons la partition de $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ en disant que deux éléments sont dans la même chaîne s'ils ont le même parenthésage.

Exemple 4.1

Soit $\underline{a} = (1,2,0,1,3)$ un élément de $S(2,3,1,2,5)$

Nous obtenons la séquence suivante :

$) ()) (() ())) (($

où les parenthèses non couplées sont : $)))(($

Les éléments qui font partie de la même chaîne que $\underline{a}$ sont donnés dans le tableau suivant :

<i>Les parenthèses libres</i>	<i>Les séquences</i>	<i>Les éléments</i>
$((((($ $)((($ $))(($ $)))(($ $))))($ $))))$	$(() ((() ()) ((($ $) () ((() ()) ((($ $) ()) (() ()) ((($ $) ()) (() ())) ((($ $) ()) (() ()))) ($ $) ()) (() ()))))$	$(0,1,0,1,2)$ $(1,1,0,1,2)$ $(1,2,0,1,2)$ $(1,2,0,1,3)$ $(1,2,0,1,4)$ $(1,2,0,1,5)$

Le treillis Booléen B_n représente $S(1,1,\dots,1)$. Comme il est isomorphe au treillis $(P(\{1,2,\dots,n\}), \subseteq)$, on peut dire qu'en termes d'ensembles, on associe à l'ensemble $S \subset \{1,2,\dots,n\}$, une séquence de n parenthèses représentant un mot $\omega(S)$ où à la $i^{\text{ème}}$ position, on a

$$\omega(S)_i = \begin{cases}) & \text{si } i \in S \\ (& \text{si } i \notin S \end{cases}$$

4.4 Codage d'un ensemble

Soit S un sous ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$, nous associons à S un code $c(S) \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $n+1$ de la manière suivante :

$$c(S)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in S \\ i - \sum_{j=1}^{i-1} c(S)_j & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Par exemple , pour $S = \{1, 2, 3, 7, 11, 14, 17, 18\} \subset \{1, 2, \dots, 20\}$, nous obtenons

$$c(S) = (0, 0, 0, 4, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 3, 1, 1)$$

Lemme 4.1 [25]

1- Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ est un vecteur tel que $\alpha_{n+1} \neq 0$, et pour tout $0 \leq i \leq n+1$, on a $\alpha_i = 0$ ou

$\sum_{j=0}^i \alpha_j = i$, alors $\alpha = c(S)$ pour un unique sous ensemble S de $\{1, 2, \dots, n\}$.

2- Le vecteur α défini ci-dessus est déterminé par l'emplacement de ses zéros.

3- Le vecteur α défini ci-dessus est déterminé par la valeur et l'ordre de ses composantes non nulles.

Dans la suite, les blocs des partitions de treillis Π_n seront écrits de la manière usuelle c'est à dire dans l'ordre lexicographique.

4.5 Type d'une partition

Le type $t(\varphi)$ d'une partition φ de Π_n est une séquence ordonnée donnant la longueur de chaque bloc de φ .

Exemple : Soit $\varphi = 134 / 258 / 67 / 9 \ 10 \ 11 \ 12$ une partition de Π_{12} , alors $t(\varphi) = 3324$.

Associons à chaque sous ensemble S de $\{1,2,\dots,n\}$ une collection de partitions $\Pi_S \subset \Pi_{n+1}$ où Π_S représente l'ensemble de toutes les partitions de Π_{n+1} dont le type écrit dans le sens inverse est le code de S sans ses zéros.

Exemple : Soit $S = \{1,3\}$ un élément de B_4 . Son code est $c(S) = (0,2,0,2,1)$ et l'ensemble Π_S des partitions de Π_5 de type 122 est

$$\Pi_S = \{1/23/45, 1/24/35, 1/25/34\}.$$

Lemme 4.2 [25]

L'ensemble des classes $\{\Pi_S, S \in B_n\}$ contient toutes les partitions de Π_{n+1}

4.6 Décomposition en chaînes semi-symétriques très spéciales du treillis des partitions

S'inspirant de la décomposition de C. GREEN et D.J KLEITMAN [16] et D. LOEB (non publiée) du treillis Booléen en chaînes symétriques, D. LOEB, E. DAHMIANI et O. D'ANTONA [25] ont construit une collection maximale de chaînes symétriques disjointes du treillis des partitions d'un ensemble Π_n .

L'idée consiste à associer à chaque chaîne symétrique de la décomposition de B_n une famille de chaînes symétriques dans Π_{n+1}

Rappelons que le nombre de Stirling de seconde espèce $S_{n,k}$ représente le $(n-k)^{\text{ième}}$ nombre de Whitney de Π_n et obéit aux identités suivantes :

$$S_{n,n} \leq S_{n,n-1} \leq \dots \leq S_{n, \lfloor (n+1)/2 \rfloor}, \text{ pour } n \geq 0,$$

et pour $k \leq n/2$

$$S_{n,k} \geq S_{n,(n-k)}$$

Proposition 4.1 [25]

Soient S et $S' = S \cup \{i\}$ deux éléments du treillis Booléen B_n faisant partie de la même chaîne de la décomposition de N.G de BRUIJN [10] en chaînes symétriques. Il existe une injection de Π_S à $\Pi_{S'}$ préservant l'ordre.

Comme S' couvre et fait partie de la même chaîne que S , le code de S diffère de celui de S' en deux composantes successives, à savoir $k1$ dans $c(S)$ est remplacé par $0(k+1)$ dans $c(S')$.

L'injection considérée dans la Proposition 4.1, associe à une partition φ de Π_S la partition $f(\varphi) = \varphi \cup \{A \cup B\} - \{A, B\}$ où $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ et $B = \{b\}$ représentent respectivement les blocs de φ qui correspondent aux composantes k et 1 transformées par le passage de S à S' . $f(\varphi) \in \Pi_{S'}$ est bien un raffinement de φ . De plus f est injective puisqu'on peut déterminer l'unique φ à partir de $f(\varphi)$ car A et B peuvent être trouvés de $A \cup B$ en tenant compte du fait que $b = \min(A \cup B)$.

En appliquant ce procédé sur tous les éléments de chaque chaîne symétrique de B_n , nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 4.3 [25]

Soient S et S' deux éléments d'une chaîne symétrique de la décomposition de N.G de BRUIJN de B_n tels que $S < S'$. Il existe des relations de comparabilités entre tous les éléments de Π_S et une partie de $\Pi_{S'}$ où chaque chaîne résultante commence au rang i et se termine au rang supérieur ou égal à $n-i$.

Soit $S \in B_n$. Nous dirons dans la suite qu'une composante du code $c(S)$ est couplée si dans le mot $\omega(S)$, elle correspond à une parenthèse couplée.

Remarque 4.2

1. En considérant toutes les chaînes de Π_{n+1} provenant de la construction précédente et en supprimant une partie supérieure de chacune d'elles, c'est à dire si une chaîne commence au

rang i , on enlève de cette chaîne tous les éléments de rang $> n-i$, alors on obtient une décomposition partielle de Π_{n+1} en chaînes symétriques. Cette décomposition est maximale puisqu'elle inclut chaque partition de $\{1,2,\dots,n\}$ ayant plus que $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ blocs, c'est à dire tous les éléments de Π_{n+1} de rang $\leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

2. Pour toute chaîne $C = (S_i \prec S_{i+1} \prec \dots \prec S_{n-i})$ de la décomposition de N.G de BRUIJN de B_n , nous pouvons définir l'application F de Π_{S_i} à $\Pi_{S_{n-i}}$ telle que $F = f_{n-i-1} \circ \dots \circ f_i$ où pour tout $h = i, \dots, n-i-1$, f_h est l'injection de Π_{S_h} à $\Pi_{S_{h+1}}$ considérée dans la Proposition 4.1. F est bien une injection.

Comme le code de S_i diffère de celui de S_{n-i} en $n-2i$ composantes non couplées, c'est-à-dire il existe β tel que les composantes $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_{n-2i}}$ dans $c(S_i)$ sont remplacées par $\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-2i} \beta$

dans $c(S_{n-i})$.

Théorème 4.4

La famille de chaînes de Π_{n+1} obtenue à partir de la décomposition de N.G de BRUIJN de B_n est une décomposition en chaînes semi-symétriques.

Preuve

Notons par ζ la famille de chaînes symétriques de B_n produite par la décomposition de N.G de BRUIJN de B_n en chaînes symétriques et par S_h (resp. ϕ_h) un élément de B_n (resp. de Π_{n+1}) de rang h , pour tout $h = 1, \dots, n$.

A partir du Théorème 4.3, nous pouvons dire qu'une chaîne $C = (S_i \prec S_{i+1} \prec \dots \prec S_{n-i})$, $i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ de ζ correspond à un ensemble de chaînes E_k , $k=1, \dots, |\Pi_{S_{n-i}}|$, où

$$E_k = (\pi_h \prec \pi_{h+1} \prec \dots \prec \pi_{n-i}) \text{ avec } h \geq i \text{ et vérifiant, pour tout } m = h, \dots, n-i, \pi_m \in \Pi_{S_m}.$$

Notons par ξ la famille des chaînes de Π_{n+1} obtenue à partir de la décomposition ζ . Cette famille forme une décomposition complète en chaînes de Π_{n+1} qu'il n'est pas bien sûr une décomposition en chaînes symétriques.

D'après la Proposition 4.1 pour chaque pair d'éléments π_m et π_{m+1} de la même chaîne de ξ où $h \leq m \leq n-i$, il existe une injection f de Π_{S_m} à $\Pi_{S_{m+1}}$ telle que $\pi_{m+1} = f(\pi_m)$, par conséquent $|\Pi_{S_m}| \leq |\Pi_{S_{m+1}}|$.

D'où $|\Pi_{S_i}| \leq |\Pi_{S_{i+1}}| \leq \dots \leq |\Pi_{S_{n-i}}|$.

Si $h = i$, alors E_k est une chaîne symétrique car $r(\pi_i) + r(\pi_{n-i}) = r(S_i) + r(S_{n-i}) = n = r(P_{n+1})$.

Si $h > i$, alors E_k est une chaîne semi-symétrique car: $r(\pi_h) + r(\pi_{n-i}) = r(S_h) + r(S_{n-i}) = h + n - i$, c'est-à-dire $r(\pi_h) + r(\pi_{n-i}) > r(\Pi_{n+1})$.

On fait pour la même chaîne C du treillis Booléen, nous avons exactement $|\Pi_{S_i}|$ chaînes symétriques et $|\Pi_{S_{n-i}}| - |\Pi_{S_i}|$ chaînes semi-symétriques. $\blacklozenge$

Exemple 4.2

Soit $\{C_1, C_2, \dots, C_6\}$ la décomposition de N.G de BRUIJN de B_4 où $C_1 = (\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\})$, $C_2 = (\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\})$, $C_3 = (\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\})$, $C_4 = (\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\})$, $C_5 = (\{2,4\})$ et $C_6 = (\{3,4\})$.

$S \in B_4$	$c(S)$	$\Pi_S^{(*)}$
$\emptyset$ $\{1\}$ $\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,3,4\}$	1111 $\rightarrow$ 1111 0211 $\rightarrow$ 1112 0031 $\rightarrow$ 113 0004 $\rightarrow$ 14 0000 $\rightarrow$ 5	1/2/3/4/5 1/2/3/45 1/2/345 1/2345 12345
$\{2\}$ $\{2,3\}$ $\{2,3,4\}$	1021 $\rightarrow$ 1121 1003 $\rightarrow$ 131 1000 $\rightarrow$ 41	1/2/34/5-1/2/35/4 1/234/5 -1/235/4- 1/245/3 1234/5- 1235/4- 1245/3 - 1345/2
$\{3\}$ $\{1,3\}$ $\{1,3,4\}$	1102 $\rightarrow$ 1211 0202 $\rightarrow$ 122 0200 $\rightarrow$ 32	1/23/4/5-1/24/3/5 -1/25/3/4 1/23/45 -1/24/35 -1/25/34 123/45 -124/35 -125/34 - 134/25 -135/24 -145/23
$\{4\}$ $\{1,4\}$ $\{1,2,4\}$	1110 $\rightarrow$ 2111 0210 $\rightarrow$ 212 0030 $\rightarrow$ 23	12/3/4/5-14/2/3/5 -13/2/4/5 -15/2/3/4 12/3/45 -14/2/35 - 13/2/45 -15/2/34 12/345 -14/235 -13/245 -15/234
$\{2,4\}$	1020 $\rightarrow$ 221	12/35/4-13/25/4-14/25/3-15/24/3-12/34/5-13/24/5 14/23/5-15/23/4.
$\{3,4\}$	1100 $\rightarrow$ 311	123/4/5-124/3/5-125/3/4-134/2/5-135/2/5-135/2/4- 145/2/3.

(*) : Les partitions en gras représentent les éléments des chaînes semi-symétriques de Π_5 .

On obtient la décomposition en chaînes semi-symétriques de Π_5 en reliant de haut en bas les éléments de la dernière colonne. Par exemple pour la chaîne $C_2 = (\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\})$, nous obtenons deux chaînes symétriques qui sont $(1/2/34/5 \prec 1/234/5 \prec 1234/5)$ et $(1/2/35/4 \prec 1/235/4 \prec 1235/4)$ et deux chaînes semi-symétriques qui sont $(1/245/3 \prec 1245/3)$ et $(1345/2)$.

Afin de prouver que le treillis des partitions Π_{n+1} est un ordre *VSSSC*, énonçons les observations suivantes sur le code des éléments de treillis Booléen B_n et sur le type des partitions de Π_{n+1} .

Observations

1. D'après le Lemme 4.1, tout élément π_h de Π_{n+1} représente un unique sous-ensemble S_h de B_n ($\pi_h \in \Pi_{S_h}$).
2. Si $C = (S_i \prec S_{i+1} \prec \dots \prec S_{n-i})$ est une chaîne de la décomposition de N.G de BRUIJN de B_n , alors pour chaque paire d'éléments S_j et S_h de C , $j < h$, nous avons :
 - a) $c(S_j)$ et $c(S_h)$ ont les mêmes composantes couplées.
 - b) $c(S_h)$ est obtenu à partir de $c(S_j)$. Il suffit d'annuler les premiers $(j-h)$ composantes non nulles non couplées de $c(S_j)$.
 - c) Toutes les composantes nulles de $c(S_i)$ et toutes les composantes non nulles de $c(S_{n-i})$ (sauf pour la dernière) sont couplées.
3. Soit $E = (\pi_i \prec \dots \prec \pi_j)$ une chaîne de la décomposition de Π_{n+1} . Notons par F_1 (resp. F_2) l'ensemble des blocs de la partition π_j qui correspondent dans le code de S_j à une composante qui vient après une composante nulle couplée (resp. non couplée). Par exemple, la partition $\pi_4 = 12/356/4/78$ représente une extrémité terminale d'une chaîne de la décomposition de Π_8 , $\pi_4 \in \Pi_{S_4}$ où $c(S_4) = \mathbf{02100302}$ (les composantes écrites en gras sont couplées), alors $F_1 = \{\{1,2\}, \{3,5,6\}\}$ et $F_2 = \{\{7,8\}\}$.
 - a) Un élément de F_1 est un bloc *inchangé* dans la chaîne, ce qui n'est pas le cas forcément pour F_2 , qui peut être un bloc *inchangé* ou un bloc *décomposé* dans la chaîne E .
 - b) Les éléments de F_2 sont des blocs décomposés dans E si E est une chaîne symétrique.

c) Les éléments de F_2 ne sont pas tous des blocs décomposés dans E si E est une chaîne semi-symétrique. Autrement dit, il existe dans la partition π_i un bloc $A_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_s^k\}$ tel que $A_k \subseteq B_m$ où B_m est un élément de F_2 avec $k - m = i - j$. Si nous décomposons A_k en deux blocs $\{a_1^k\}$ et $A_k - \{a_1^k\}$, l'expression de la partition obtenue ne reste pas sous forme lexicographique, c'est-à-dire il existera au moins un bloc $A_h = \{a_1^h, a_2^h, \dots, a_r^h\}$ dans π_i où $h > k$ et $a_2^k > a_1^h$.

Théorème 4.5

Le treillis des partitions Π_n est un ordre à chaînes semi-symétriques très spéciales

Preuve

Soient ζ une décomposition de N.G de BRUIJN de B_n et ξ la décomposition en chaînes semi-symétriques de Π_{n+1} définie par D. LOEB.

Nous devons montrer que ξ vérifie la propriété (*''), c'est à dire :

Si $E = (\pi_i \prec \dots \prec \pi_j)$ est une chaîne de la décomposition où π_j n'est pas un élément maximal de Π_{n+1} alors soit il existe une chaîne $E' = (\varphi_s \prec \dots \prec \varphi_{i-1} \prec \dots \prec \varphi_{j+1})$ de la décomposition avec $\varphi_{i-1} \prec \pi_i$ et $\pi_j \prec \varphi_{j+1}$ soit une chaîne $E'' = (\varphi'_s \prec \dots \prec \varphi'_{i-1} \prec \dots \prec \varphi'_j)$ de la décomposition et une partition ϕ_{j+1} de Π_{n+1} avec $\varphi'_{i-1} \prec \pi_i$, $\pi_j \prec \phi_{j+1}$ et $\varphi'_j \prec \phi_{j+1}$.

Soit $C = (S_i \prec \dots \prec S_j)$ la chaîne de la décomposition de ζ dans B_n qui correspond à E . On

a $\pi_i \in \Pi_{S_i}$ et $\pi_j \in \Pi_{S_j}$. Nous distinguons deux cas:

Cas1 : E est une chaîne symétrique de ξ , donc $j = n-i$.

Comme π_j n'est pas un élément maximal dans Π_{n+1} , alors C est une chaîne symétrique de longueur non maximale de ζ .

Le treillis B_n est un ordre SSC [4]. Montrons tout d'abord que la décomposition de N.G de BRUIJN ζ vérifie la propriété (*'), c'est-à-dire qu'il existe une chaîne $C' = (S'_{i-1} \prec \dots \prec S'_{j+1})$ de ζ avec $S'_{i-1} \prec S_i$ et $S_j \prec S'_{j+1}$.

D'après le Lemme 4.1, pour déterminer les éléments de la chaîne C' , il suffit de déterminer leurs codes : Pour un ensemble S , il existe un unique vecteur qui représente son code $c(S)$.

L'élément S'_{i-1} vérifiant $S'_{i-1} \prec S_i$ doit avoir un code défini à partir de $c(S_i)$ en remplaçant une composante nulle par une composante non nulle, qui bien sûr est couplée car sinon S_i ne sera pas un élément minimal de la chaîne C .

La composante nulle considérée est choisie comme étant la dernière composante nulle dans sa séquence de parenthèses.

En d'autres termes la séquence $c_{h-(k+1)} \mathbf{11} \dots \mathbf{1} \mathbf{0}_h \dots \mathbf{0}_{h+k} \mathbf{0}_{k+2}$ dans $c(S_i)$ est remplacé par la séquence $c_{h-(k+1)} \mathbf{11} \dots \mathbf{1} \mathbf{0}_h \dots \mathbf{0}_{h+k-1} (k+1) \mathbf{1}$ dans $c(S'_{i-1})$, On obtient alors $S'_{i-1} \prec S_i$.

Si nous annulons les premiers $(j-i+2)$ composantes non couplées de $c(S'_{j+1})$ alors nous obtenons nécessairement le code de l'élément S'_{j+1} . Par construction, les ensembles S'_{i-1} et S'_{j+1} ont le même parenthésage.

Par ailleurs, $c(S'_{i-1})$ a les mêmes composantes nulles que $c(S_j)$ avec une composante nulle supplémentaire qui est située à l'indice de l'élément $c_{h-(k+1)}$ de $c(S_j)$. Ainsi $S_j \prec S'_{j+1}$.

Revenons maintenant au treillis des partitions Π_{n+l} . Nous remarquons que les deux composantes successives $(k+1) \mathbf{1}$ (resp. $c_{h-(k+1)} \mathbf{1}$) dans le code de S'_{i-1} (resp. S_j) sont remplacées par $0(k+2)$ (resp. $0(c_{h-(k+1)} + 1)$) dans le code de S_i (resp. S'_{j+1}). Considérons alors l'application g de $\Pi_{S'_{i-1}}$ dans Π_{S_j} qui associe à toute partition ϕ de $\Pi_{S'_{i-1}}$ l'élément $g(\phi) = \phi \cup \{A \cup B\} - \{A, B\}$ où $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ et $B = \{b\}$ sont des blocs de ϕ qui correspondent aux composantes $(k+1) \mathbf{1}$. $g(\phi)$ est bien un raffinement de ϕ .

De plus g est injective puisque nous pouvons déterminer ϕ à partir de $g(\phi)$ car A et B peuvent être trouvés de $A \cup B$. De la même manière, nous définissons l'injection g' de Π_{S_j} à $\Pi_{S'_{j+1}}$.

Nous prenons φ_{i-1} l'élément de $\Pi_{S'_{i-1}}$ qui vérifie $g(\varphi_{i-1}) = \pi_i$ et φ_{j+1} est l'élément de $\Pi_{S'_{j+1}}$ qui vérifie $\varphi_{j+1} = g'(\pi_j)$.

Il est clair que $\varphi_{j+1} = g' \circ F \circ g(\varphi_{i-1})$ où F est l'injection de Π_{S_i} à Π_{S_j} défini par la

Remarque 4.2, puisque les composantes $(k+1)1, \alpha_{h_1}, \alpha_{h_2}, \dots, \alpha_{h_{j-i}}$ dans $c(S_j)$ sont remplacées par $\underbrace{0,0,\dots,0}_{j-i+2} \beta$ dans $c(S_{j+1})$.

Par conséquent, les éléments φ_{i-1} et φ_{j+1} représentent respectivement une extrémité initiale et une extrémité terminale de la chaîne $E' = (\varphi_{i-1} \prec \dots \prec \varphi_{j+1})$ de ξ qui correspond à C' .

Cas 2 : E est une chaîne semi-symétrique de ξ .

Considérons la partition $\pi_i = A_1/A_2/\dots/A_{n+1-i}$. Comme E est semi-symétrique, alors d'après l'Observation 3-c, π_i possède un bloc $A_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_s^k\}$ qui une fois décomposé en deux blocs $\{a_1^k\}$ et $A_k - \{a_1^k\}$, la partition obtenue ne reste pas écrite sous forme lexicographique.

Notons par $A_{h+k} = \{a_1^{h+k}, a_2^{h+k}, \dots, a_r^{h+k}\}$ le dernier bloc de π_i qui vérifie $a_2^k > a_1^{h+k}$.

De plus, si la partition $\pi_j = B_1/B_2/\dots/B_m/\dots/B_{n+1-j}$ alors il existe m entier tel que $k - m = j - i$ et $A_k \subseteq B_m, A_{k+1} = B_{m+1}, \dots, A_{k+h} = B_{m+h}, A_{n+1-i} = B_{n+1-j}$.

Prenons la partition $\varphi'_{i-1} = A_1/\dots/A_{k-1}/a_1^k/A_{k+1}/A_{k+2}/\dots/A_{h+k}/A_k - \{a_1^k\}/A_{h+k+1}/\dots/A_{n+1-i}$. Il est facile de voir que $\varphi'_{i-1} \prec \pi_i$.

Considérons la partition $\varphi'_j = B_1/\dots/B_{m-1}/B'_m/B_{m+2}/\dots/B_{m+h}/B'_{h+m+1}/B_{h+m+1}/\dots/B_{n+1-j}$ tel que $B'_m \supseteq \{a_1^k\} \cup A_{k+1}$ et $B'_{h+m+1} = A_k - \{a_1^k\}$.

Si le type de π_j est différent de $n1$, φ'_j représente un élément maximal d'une chaîne D' de ξ contenant la partition φ'_{i-1} , puisque π_j est un élément maximal de E . Comme $B'_m \cup B'_{m+h+1} = B_m \cup B_{m+1}$, alors la partition $\phi_{j+1} = B_1/\dots/B_m \cup B_{m+1}/\dots/B_{n+1-j}$ de Π_{n+1} vérifie $\phi_{j+1} \succ \varphi_j$ et $\phi_{j+1} \succ \pi_j$.

Si le type de π_j est égal à $n1$ alors le type de φ'_j égale à $1n$, dans ce cas la chaîne D recherché sera la chaîne maximale de Π_{n+1} . ◆

Exemple 4.3

Soit ζ une décomposition de N.G de BRUIJN de B_{12} , ξ la décomposition en chaînes semi-symétriques de Π_{13} définie par D. LOEB précédemment décrite

a) Soit $E = (\pi_3 \prec \dots \prec \pi_9)$ une chaîne symétrique de ζ où

$\pi_3 = 1 / 2 / 3 / 4 / 57 / 6 / 8 / 9(12)(13) / 10 / 11$ et $\pi_9 = 123457 / 689(12)(13) / 10 / 11$. Ainsi $t(\pi_3) = 1111211311$ et $t(\pi_9) = 6511$.

Notons par $C = (S_3 \prec \dots \prec S_9)$ la chaîne de ζ qui correspond à E , $S_3 = \{3, 4, 8\}$ et $c(S_3) = \mathbf{1100311021111}$; $S_9 = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et $c(S_9) = \mathbf{1100005000006}$.

Cherchons la chaîne $E' = (\varphi_2 \prec \dots \prec \varphi_{10})$ de ζ qui vérifie la propriété (*').

D'après la preuve, la chaîne C' de ζ vaut $(S'_2 \prec \dots \prec S'_{10})$ de ζ avec les codes $c(S'_2) = \mathbf{1102111021111}$ et $c(S'_{10}) = \mathbf{0200005000006}$. Elle vérifie $S'_2 \prec S_3$ et $S_9 \prec S'_{10}$.

On choisit l'élément φ_2 de $\Pi_{S'_2}$ qui vérifie $g(\varphi_2) = \pi_3$ et l'élément φ_{10} de $\Pi_{S'_{10}}$ qui vérifie $\varphi_{10} = g'(\pi_9)$, c'est-à-dire $\varphi_2 = 1 / 2 / 3 / 4 / 57 / 6 / 8 / 9 / (12)(13) / 10 / 11$ et $\varphi_{10} = 123457 / 689(12)(13) / (10) (11)$. (g est l'injection de $\Pi_{S'_2}$ à Π_{S_3} associée à toute partition $\phi = A_1/A_2/\dots/A_{11}$ de $\Pi_{S'_2}$ la partition $g(\phi) = A_1/A_2/\dots/A_8 \cup A_9/A_{10}/A_{11}$ et g' est l'injection de Π_{S_9} à $\Pi_{S'_{10}}$ associée à toute partition $\phi' = B_1/B_2/B_3/B_4$ de Π_{S_9} la partition $g'(\phi') = B_1 / B_2 / B_3 \cup B_4$).

b) Soit $E = (\pi_7 \prec \pi_8)$ une chaîne semi-symétrique de ζ avec

$\pi_7 = 1 / 23 / 46(10) / 57(12) / 89(13) / 11$ et $\pi_8 = 123 / 46(10) / 57(12) / 89(13) / 11$.

Cherchons la chaîne $E' = (\varphi_s \prec \dots \prec \varphi_6 \prec \varphi_7 \prec \varphi_8)$ de ζ et la partition ϕ_9 tel que $\varphi_6 \prec \pi_7$, $\pi_8 \prec \phi_9$ et $\varphi_8 \prec \phi_9$. D'après la preuve, nous prenons :

$\varphi_6 = 1/23 / 4 / 57(12) / 6(10) / 89(13) / 11$, $\varphi_8 = 123 / 457(12) / 6(10) / 89(13) / 11$ et $\phi_9 = 123/4567(10) (12) / 89(13) / 11$.

En vertu du Théorèmes 4.1 et 4.5, nous obtenons le corollaire suivant

Corollaire 4.1

L'hypergraphe des intervalles du treillis des partitions a la propriété (l,u)-IC pour toute l,u avec $0 \leq l \leq u \leq n-l$ c'est-à-dire

$$\alpha(\mathcal{H}(\Pi_n)_{l,u}) = \rho(\mathcal{H}(\Pi_n)_{l,u}) = \text{Max} \{ S(n, n-l), S(n, n-u) \} \text{ où } 0 \leq l \leq u \leq n-l$$

Conclusion

Soit P un poset et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles de P . Ses sommets sont les points de P et ses arêtes, les intervalles maximaux de P .

Dans notre Thèse, nous nous sommes intéressés sur deux propriétés essentielles : Il s'agit des propriétés de König et duale de König lorsque P est sans N , ou appartenant à une nouvelle classe généralisant les posets série-parallèles, largement étudiée dans la littérature, ou encore une famille de sous-posets induit sur l'union des niveaux consécutifs $N_l \cup \dots \cup N_u$ de Π_n où $0 \leq l \leq u \leq n-l$. En d'autres termes nous avons étudié les égalités entre le nombre de couplage et le nombre de recouvrement par sommets et entre le nombre de stabilité et le nombre de recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}(P)$. Nous avons divisé notre travail en trois parties.

Dans la première partie nous avons pu trouver un exemple d'un poset P sans N où le nombre de couplage de $\mathcal{H}(P)$ est strictement inférieur au nombre de recouvrement par des sommets. A l'aide de la construction d'un poset sans N à partir de deux posets $A(a) \oplus B(a)$ et $(P - A(a))$, nous avons pu prouver la propriété duale de König de l'hypergraphe des intervalles $\mathcal{H}(P)$ dès que $\text{Min}(P - A(a)) = B(a)$.

Dans la deuxième partie, nous avons considéré la classe de posets définis par trois sous-posets exclus. Celle-ci contient les posets série-parallèles. Nous avons prouvé que le graphe représentatif des arêtes $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe de MEYNIEL et donc parfait lorsque P appartient à cette nouvelle classe. Nous avons pu aussi prouver la propriété de Helly de l'hypergraphe $\mathcal{H}^*$. Ainsi la propriété duale de König est satisfaite pour cette classe.

Dans la troisième partie, nous avons partitionné le treillis des partitions Π_n en chaînes semi-symétriques très spéciales. Nous avons pu vérifier la propriété (l,u) -IC de l'hypergraphe $\mathcal{H}(\Pi_n)$ où l, u sont deux entiers tels que $0 \leq l \leq u \leq n-l$.

Perspectives

1. Prouver ou infirmer la satisfaction de la propriété de König pour la nouvelle classe de posets que nous avons défini.
2. Déterminer des conditions suffisantes pour que l'hypergraphe des intervalles d'un poset sans N ait la propriété duale de König.
3. Examiner la propriété duale de König de $\mathcal{H}(\Pi_n)_{l,u}$ pour tout l et u , $l \leq u \leq n$.
4. Etudier la propriété de König pour $\mathcal{H}(\Pi_n)_{l,u}$.
5. Etudier les deux propriétés de König et de duale de König pour les sous-posets induit par l'union consécutif $N_l \cup \dots \cup N_u$ du treillis des partitions d'un entier où $l \leq u \leq n$.

Bibliographie

[1] B.I. BAYOUMI and S.M.KHAMIS.

Testing isomorphism and recognition of N-free posets .Congressus Numerantium 114 pp,89-96 (1996).

[2] C.BERGE.

Hypergraphs. North-Holland, Amsterdam,Tokyo (1989).

[3] V.BERGE.

Färbung von Graphen deren sämtliche bzw. ungerade krrise starr sind (Zusammenfassung),
Wiss.Z.Martin-Luther-Univ.Hahhe-Wittenberg Math.-Natur.Reihem 114-115(1961).

[4] I.BOUCHEMAKH and K.ENGEL

Interval stability and interval covering property in finite posets .Order 9 :163-175 (1992)

[5] I.BOUCHEMAKH and K.ENGEL

The order-interval hypergraph of a finite poset and König property.Discrete Math., 170 :
51-61 (1997).

[6] I.BOUCHEMAKH

On the König and dual König properties of the order-interval hypergraphs of series-parallel posets .Rostock .Math. Kolloq, 56 : (2001) .

[7] I.BOUCHEMAKH

On the k-independence number in the Boolean lattice. A paraître in Maghreb. Math. Rev.
(2001)

[8] I.BOUCHEMAKH

Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels finis. Thèse de Doctorat d'Etat
(USTHB) (2001).

[9] L.COMTET

Analyse Combinatoire. Presses Universitaires de France (1970).

[10] N.G.de BRUIJN , C.VAN EBBENHORST TENGBERGEN, D.KRUYSWIJK

On the set of divisors of a number . Nieuw Arch . Wisk . (2) 23 191-193 (1952).

[11] R.P.DILWORTH

A decomposition theorem for partially ordered sets. Ann.of Math.,51 :161-166(1950)

[12] S.E.ELMAGHRABY

Activity Networks ,Wiley , New York (1977)

[13] K.ENGEL

Sperner theory .Cambridge University Press, Cambridge (1997)

[14] K.ENGEL and H.D.O.F.GRONAU

Sperner theory in partially ordered sets. BSB B.G Teubner Verlagsgesellschaft ,
Leipzig (1985) .

[15] C.GREEN

Posets of shuffles . J. Combin . Theory m Ser. A , 47 : 191-206 (1988) .

[16] C.GREEN and D.J KLEITMAN

Journal of Combinatorial Theory (A) 20 80-88 (1976) .

[17] P.A.GRILLET

Maximal chains and antichains . Fund . Math .65 157-167 (1969) .

[18] J.R GRIGGS

Sufficient Conditions for symmetric chain order, SIAM J Appl Math , 32, 807-809 (1977).

[19] M.HABIB and R.JEGOU

N-free posets as generalizations of series-parallel posets .Discrete Appl. Math, 12 (3), p 279-291 (1985).

[20] M.HABIB and R.MÖHRING

On some complexity properties of N-free posets and posets with bounded decomposition diameter. Discrete Math .63, p157-182 (1987).

[21] R.L.HEMMINGER and L.W.BEINEKE

Line graphs and line digraphs . In :L.W.Beineke ,R.J.Wilson, eds. Selected Topics in graph Theory (Academic Press, London, 271-305 (1978).

[22] C. HEUCHENNE

Sur une certaines correspondance entre graphes, Bull. Soc. Roy Sci.Liège 33 (1964)743-753.

- [23] H.A.KIERSTED and S.G.PENRICE
Computing the dimension of N -free ordered sets is NP-Complete . Kluwer Academic Publishers .Order6 :133-135, (1989).
- [24] B.LECLERC , B.MONJARDET
Orders C.A.C . Fund. Math. 11 -22 (1973).
- [25] D.LOEB, E.DAMIANI and O.D'ANTONA
Decompositions of B_n and Π_n using symmetric Chains. Département de Math et d'Inf (2002).
- [26] J.J.MORDER and C.R.PHILLIPS
Project management with CPM and PERT . Reinhold , New York (1964) .
- [27] R.H.MÖHRING
Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs. In :I.Rival Graphs and orders , Reidel,Dordrecht (1985).
- [28] R.H.MÖHRING
Computationally tractable classes of ordered sets . In : I.Rival (ed) : Algorithms and Orders , Kluwer. Academic.Publishers. p. 105-193. (1989)
- [29] H. MEYNIEL
on the perfect graphe conjecture . Discrete.Math, 339 – 342 (1978).
- [30] PUDLAK and P.TUMA
Every finite lattice can be embedded in the lattice of all equivalences over a finite set. Comm. Math. Univ. Carol. . 18 (2) , 409- 414 (1977) .
- [31] I.RIVAL
Optimal lineair extensions by interchanging chains . Proc.Amer.Math.Soc.83, 387-394 (1983)
- [32] I.RIVAL and N.ZAGUIA
Constructing N -free , Jump-criticalordered sets . Congressus Numeratium 55. 199-204, (1986).
- [33] I.RIVAL
Stories about the letter N . Contemporary Mathematics 57 (1986).
- [34] R.SYMON and D.ULLMAN
On the structure of the lattice of noncrossing partitions. Discrete Math., 98:193-206 (1991).

[35] E.SPERNER

Ein satz über untermengen einer endlichen menge Math .Z.27, 544 -548 (1928) .

[36] J.SPINRAD

The minimum dummy task problem . Preperint school of ICS, Georgia Inst. of Technology ,
Attanta (1984).

[37] M.M.SYSLO

A labelling algorithm to recognize a line digraph and output its root digraph .Inform .Proc.
Letters 15 (1982) 28-30 .

[38] M.M.SYSLO

A graph theoretic approach to the jump number problem. in: I.Rival. Graphs and orders ,
Reidel, Dordrecht.,185-215 (1985).

[39] J.VALDES, R.E.TARJAN,and E.L.LAWLER.

The recognition of series-parallel digraphs .Siam J.Computing ,11 :298-313 (1982)

[40] B.VOIGT and I.WEGENER

A remark on minimal polynomials of Boolean Functions .In E.Borger ,H.Kleine Buning,and
M.M.Richter,editord,CLS '88 Proc.2nd Workshop Computer ,Science,Logic,Duisburg ,
vol.385 of Lecture Notes in Compu. Sci.,pp.372-383,Springer-Verlag,Berlin,New
York(1988).