

N° d'ordre : 40/2023-D/MAT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des mathématiques



Thèse de Doctorat en Sciences

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités-Statistiques

Par : KHEFFACHE Djedjiga

Thème

Sur l'Optimisation Multicritère Floue

Soutenue publiquement, le 14/11/2023, devant le jury composé de :

M. Abbas Moncef	Professeur	À l'USTHB	Président
M. Chaabane Djamel	Professeur	À l'USTHB	Directeur de thèse
Mme. El Saadi Nadjia	Professeur	À l'ENSSEA	Examinatrice
Mme. Saidi Ghania	Professeur	À l'ENSSEA	Examinatrice
M. Bouroubi Sadek	Professeur	À l'USTHB	Examinateur
M. Bouzid Cherif Mouaouia	Maitre de conférence / A	À l'ENSTA	Examinateur

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de mathématiques



Thèse de Doctorat en Sciences

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTEUR**

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités-Statistiques

Par :KHEFFACHE Djedjiga

Thème

Sur l'Optimisation Multicritère Floue

Soutenue publiquement, le 14/11/2023, devant le jury composé de :

M. Abbas Moncef	Professeur	À l'USTHB	Président
M. Chaabane Djamel	Professeur	À l'USTHB	Directeur de thèse
Mme. El Saadi Nadjia	Professeur	À l'ENSSEA	Examinatrice
Mme. Saidi Ghania	Professeur	À l'ENSSEA	Examinatrice
M. Bouroubi Sadek	Professeur	À l'USTHB	Examinateur
M. Bouzid Cherif Mouaouia	Maitre de conférence / A	À l'ENSTA	Examinateur

Remerciements

Je souhaite exprimer ma sincère gratitude et ma profonde reconnaissance envers mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur **Chaabane Djamal**, pour ses conseils avisés, son encadrement précieux et son expertise inestimable. Ses orientations éclairées et son soutien constant ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude sincère envers Monsieur le Professeur **Abbas Moncef** pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance. Sa présence et son expertise ont apporté une valeur inestimable à cette étape cruciale de mon parcours académique.

J'adresse mes sincères remerciements à Mesdames **Saidi Ghania** et **El Saadi Nadjia** ainsi qu'à Messieurs **Bouroubi Sadek** et **Bouzid Cherif Mouaouia**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'examiner mon travail. Leurs commentaires et suggestions constructives ont grandement contribué à l'amélioration de la qualité de cette thèse. Je suis reconnaissante de leur expertise et du temps qu'ils ont consacré à évaluer mes travaux.

Je suis également reconnaissante envers mes collègues et amis de la coordination SM-ST, pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements qui ont été d'une grande aide dans les moments difficiles.

Je suis profondément reconnaissante envers toutes mes sœurs, et plus particulièrement envers ma sœur, **Ghanima**, pour son soutien perpétuel et son amour inconditionnel. Cette thèse est également la sienne.

Je remercie infiniment mon époux, **Slimane Fellak**, pour son soutien précieux, sa compréhension des contraintes liées à ce travail et ses encouragements constants. Sa contribution et son appui ont été d'une aide inestimable tout au long de cette thèse.

Dédicaces

À la mémoire bienveillante et aimante de mes chers parents

Résumé

L'objectif de cette thèse consiste à explorer l'apport des mesures de l'information floue dans l'analyse décisionnelle multicritère, dans le but de proposer des outils permettant d'améliorer la précision et la fiabilité de la prise de décision dans un environnement flou. En effet, la prise de décision est un processus complexe et subjectif qui peut être confronté à des informations imprécises ou ambiguës, difficiles à quantifier. La logique floue fournit une approche mathématique qui permet de modéliser ces aspects en se basant sur des outils issus de la théorie de l'information.

Dans cette thèse, une nouvelle mesure de divergence généralisée pour les ensembles flous est développée et validée, et ce, en se basant sur la structure mathématique de la f -divergence de Csiszár. Certaines de ses propriétés mathématiques ainsi qu'une étude comparative avec d'autres mesures existantes sont discutées. De plus, en s'appuyant sur l'idée de la f -divergence de Csiszár, une classe de mesures de connaissances floues a également été établie. La divergence généralisée floue proposée est ensuite utilisée pour dériver une nouvelle mesure généralisée de connaissances floues. Son efficacité à capturer la quantité d'informations utiles dans les ensembles flous a été démontrée en la comparant à certaines mesures d'informations stratégiques. Dans les situations de prise de décision multicritère floue, l'entropie floue est généralement utilisée pour calculer les poids objectifs des critères. Cependant, cette méthode traditionnelle ne permet pas toujours d'obtenir des résultats satisfaisants. Par conséquent, de nouveaux modèles d'optimisation ont été développés pour générer des poids objectifs basés sur les deux mesures proposées. Cette thèse propose également une nouvelle approche basée sur un point idéal unique pour intégrer l'analyse relationnelle grise (GRA) avec la méthode VIKOR (Optimisation multicritère et solution de compromis) en contexte flou. Cette technique se concentre, d'une part, sur l'identification de l'alternative la plus avantageuse qui satisfait presque tous les critères de bénéfice de façon forte et, de façon faible, les critères de coût. D'autre part, elle met l'accent sur l'identification des critères qui rendent une alternative moins efficace. Afin de démontrer la pertinence et la rationalité de l'approche proposée, une étude expérimentale a été menée sur des données concrètes. Cette étude a permis d'effectuer une analyse de sensibilité et une étude comparative approfondie incluant tous les paramètres de notre approche.

Mots-clés : Ensemble flou, optimisation multicritère floue, Mesure de divergence floue, Mesure de connaissances floues, VIKOR, GRA.

ملخص

هدف هذه الرسالة هو استكشاف قياسات المعلومات الضبابية في تحليل القرارات متعددة المعايير، بهدف اقتراح أدوات تعزز دقة وموثوقية عمليات اتخاذ القرار في بيئة ضبابية. إن اتخاذ القرار عملية معقدة وذات طابع شخصي يمكن أن تواجه معلومات غير دقيقة أو غامضة يصعب تقديرها. في هذا الصدد، يقدم المنطق الضبابي نهجا رياضيا يسمح من تمثيل هذه الجوانب باستخدام أدوات تستمد من نظرية المعلومات.

في هذه الرسالة تم تطوير وتحقيق مقياس جديد للتفرقة بين المجموعات الضبابية، استنادا إلى الهيكل الرياضي لقياسات التفرقة التي عرفها Csiszàr والمعروفة باسم (f-divergence). كما تم مناقشة بعض الخصائص الرياضية لهذا المقياس وإجراء دراسة لمقارنتها مع مقاييس أخرى شهيرة. إضافة إلى ذلك، واستنادا إلى فكرة التفرقة ل-Csiszàr تم إنشاء فئة من مقاييس المعرفة. لاحقا يتم استخدام التفرقة الضبابية المقترحة لاستخلاص مقياس جديد للمعرفة الضبابية، حيث تظهر فعاليته في التقاط كمية المعلومات المفيدة في المجموعات الضبابية من خلال مقارنتها ببعض مقاييس المعلومات الاستراتيجية.

في حالات اتخاذ القرارات متعددة المعايير الضبابية، يتم استخدام الانتروبيا الضبابية عادة لحساب أوزان المعايير. ومع ذلك قد لا تؤدي هذه الطريقة التقليدية إلى نتائج مرضية. وبناء على ذلك تم تطوير نماذج جديدة لحساب أوزان المعايير باستعمال القياسين المقترحين.

تقدم هذه الرسالة أيضا نهجا جديدا يدمج بين VIKOR و GRA يعتمد على نقطة مثالية واحدة في سياق ضبابي. يركز على تحديد البديل لأكثر فعالية، الذي يرضى بشكل قوي تقريبا جميع معايير الفائدة، فضلا عن تحديد المعايير التي تجعل بعض البدائل أقل فعالية. ولدعم جدوى ومنطقية النهج المقترح، تم إجراء دراسة تجريبية باستخدام بيانات حقيقية. تشمل هذه الدراسة تحليل الحساسية ودراسة مقارنة شاملة لجميع الوسائط التي تدخل في تعريف الطريقة المقترحة.

كلمات البحث: مجموعة ضبابية، قياس التباين الضبابي، قياس المعرفة الضبابية، GRA , VIKOR.

Abstract

The aim of this thesis is to explore the potential of fuzzy information measures within the framework of multi-criteria decision analysis. The goal is to propose tools that enhance the accuracy and reliability of decision-making in fuzzy environments. Decision-making is a complex and subjective process that frequently involves dealing with imprecise or ambiguous information, making its quantification a challenging task. Fuzzy logic presents a mathematical framework to effectively represent and model these aspects, leveraging concepts derived from information theory.

This thesis introduces a novel measure of generalized divergence for fuzzy sets, which is developed and validated by leveraging the mathematical framework of Csiszár's f -divergence. The study examines the mathematical properties of this measure and conducts a comparative analysis with existing measures. Additionally, inspired by Csiszár's f -divergence, a class of fuzzy knowledge measures is established. The proposed fuzzy generalized divergence is then utilized to derive a new measure of fuzzy knowledge, showcasing its effectiveness in capturing valuable information within fuzzy sets through comparisons with strategic information measures. In the realm of fuzzy multi-criteria decision-making, fuzzy entropy is commonly employed to determine objective weights for criteria. However, this traditional method does not consistently yield satisfactory results. Consequently, new optimization models are developed to generate objective weights based on the aforementioned measures. Furthermore, the thesis introduces a fresh approach that integrates grey relational analysis (GRA) with the VIKOR (Multi-criteria Optimization and Compromise Solution) method in a fuzzy context. This technique focuses on identifying the most advantageous alternative, which strongly satisfies nearly all benefit criteria while weakly satisfying cost criteria. Additionally, it aims to identify the criteria that render an alternative less effective. To substantiate the relevance and rationality of the proposed approach, an experimental study is conducted employing real-world data. This study encompasses sensitivity analysis and an extensive comparative investigation, encompassing all parameters of the proposed approach.

Keywords: Fuzzy set, Fuzzy multicriteria optimization, Fuzzy divergence measure, Fuzzy knowledge measure, VIKOR, GRA.

Sommaire

Remerciements	ii
Dédicaces	iii
Résumé	vii
Sommaire	xiv
Table des figures	xvi
Liste des tableaux	xviii
Liste des algorithmes	xix
I Les abécédaires de l'analyse multicritère de la décision	7
1 Considérations théoriques de l'aide multicritère à la décision	8
1.1 L'approche de l'analyse multicritère	8
1.2 Les décisions sont souvent prises en contexte multicritère	9
1.3 Termes relatifs à l'environnement MCDM	10
1.4 Les différentes orientations de résolution en MCDM	13
1.4.1 Formulation d'un Problème Multicritère de Décision	14
1.5 Système d'évaluation des préférences	14
1.6 Stratégies d'agrégation multicritère	16

1.7	Modèle compensatoire et non-compensatoire	18
1.7.1	Modèles non compensatoires	18
1.7.2	Modèles compensatoires	18
2	Méthodologies de l'analyse multicritère	20
2.1	Définition de l'aide multicritère à la décision	20
2.2	Typologie des approches multicritère d'aide à la décision	21
2.3	L'optimisation multi-objectif comme méthode de MODM	22
2.3.1	Problème d'optimisation multi-objectif	22
2.3.2	Relation de dominance de Pareto	23
2.3.3	Points caractéristiques dans l'espace des critères	25
2.4	Techniques d'optimisation multi-objectif	26
2.4.1	Les méthodes avec implémentation des préférences à priori	26
2.4.1.1	Méthode de Keeney-Raiffa	27
2.4.1.2	Méthode lexicographique	27
2.4.1.3	Méthode du but programmé (goal programming)	28
2.4.2	Les méthodes sans implémentation des préférences	30
2.4.2.1	Méthode du critère global (Method of Global Criterion)	30
2.4.2.2	Solution de compromis neutre (Neutral compromise solution)	31
2.4.3	Méthodes avec implémentation des préférences à postériori	31
2.4.3.1	Méthode de la somme pondérée (weigthed sum method WSM)	31
2.4.3.2	La méthode de la contrainte- ϵ	32
2.4.3.3	Méthode de la métrique pondérée	34
2.4.4	Méthodes interactives pour l'implémentation des préférences	35
2.5	Approches de l'aide multicritère à la décision	36
2.5.1	Méthode du critère unique de synthèse	36
2.5.1.1	Méthode MAUT (Multiple Attribute Utility Theory)	36
2.5.1.2	Méthode de la somme pondérée (Weighted Sum Method (WSM)	37
2.5.1.3	La méthode Analytic Hierachy Process AHP	38
2.5.1.4	Technique pour l'ordre de préférence par similarité à la solution idéale (TOPSIS)	40
2.5.1.5	La méthode relationnelles grises (GRA Gray relational analysis)	42
2.5.1.6	Méthode du produit pondéré	43
2.5.1.7	La procédure VIKOR	43
2.5.2	Méthodes de surclassement	45
2.5.2.1	Méthode d'ÉLimination Et Choix Traduisant la REalité (ELECTRE)	46

2.6	Techniques de pondération des critères	47
2.6.1	Évaluation des pondérations par l'entropie	48
2.7	Panorama chronologique des méthodes MADM	48

II Théorie de l'information et aide multicritère à la décision dans un environnement flou 51

3 Théorie des sous-ensembles flous 52

3.1	Généralités	53
3.2	Caractéristiques d'un sous-ensemble flou	54
3.3	Typologie des opérations sur les sous-ensembles flous d'un point de vue décisionnel	58
3.3.1	Opérateur de non compensation	58
3.3.2	Opérateur de compensation complète	58
3.3.3	Opérateurs de compensation-min	60
3.3.4	Opérateurs de compensation- max	60
3.3.5	Opérateurs de compensation généralisés	62
3.3.5.1	Opérateur de Zimmermann and Zysno	62
3.4	Les types de fonctions d'appartenances	62
3.5	Variables et modificateurs linguistiques	64
3.5.1	Modificateurs linguistiques	65
3.6	Relation floue et matrice floue	66
3.6.1	Propriétés des relations floues	68
3.7	Construction de fonctions d'appartenance	69
3.7.1	Les approches statistiques et probabilistes	69
3.7.2	Méthodes de psychométrie	70
3.7.3	Méthode de l'ajustement de la courbe par la méthode des moindres carrés	71
3.8	Les Nombres flous	72
3.8.1	Opérations arithmétiques sur les nombres flous triangulaires	72
3.8.2	Comparaison des nombres flous	73
3.8.3	La représentation intégrée moyenne graduée (The graded mean integration representation)	74

4 Analyse décisionnelle dans un environnement flou 76

4.1	Introduction	76
4.2	Revue de littérature	76

4.3	Procédures d'analyse décisionnelle dans un contexte flou	78
4.3.1	Approche conventionnelle	78
4.3.2	L'approche floue	79
4.4	Méthodologie multicritère de la décision en contexte floue	80
4.4.1	Procédure des méthodes de MCDM floues	80
4.4.2	Procédure des méthodes de classement flou	81
4.5	Exemple de méthodes MCDM floue : Somme pondérée floue	81
4.5.1	Illustration numérique pour F-WSM	82
5	État de l'art sur les mesures de l'information floue	84
5.1	Entropie comme mesure d'information	85
5.2	Mesure d'entropie floue	86
5.3	Mesure de divergence floue	88
5.4	Mesure de connaissances floues (fuzzy knowledge measure)	92
III	Contributions	95
6	Construction de mesures de divergence et de connaissances floues	96
6.1	Introduction et contexte	96
6.2	Nouvelle mesure généralisée de divergence floue	97
6.2.1	Analyse comparative pour D_m	100
6.3	Nouvelle classe de mesures de connaissances floues	102
6.3.1	Mesure de connaissances floues dérivée de D_m	104
6.3.2	Étude comparative pour K_m	107
7	Optimisation multicritère floue basée sur les mesures proposées de l'information floue	112
7.1	Introduction	112
7.2	Modèles pour la génération des pondérations	113
7.2.1	Environnement global de la procédure	113
7.2.2	Génération des pondérations des critères	114
7.3	Nouvelle combinaison de GRA et VIKOR en contexte flou	117
7.3.1	Principales motivations	117
7.3.2	Procédure de combinaison de GRA et VIKOR	118
7.4	Expérimentation de la méthode sur des données concrètes	120
7.4.1	Analyse de sensibilité et étude comparative	125
7.4.2	Comparaison de notre méthode à celle de Kuo and Liang (2011)	126

7.4.3	Avantages et inconvénients de notre méthode	127
7.5	Conclusion	128
	Conclusion générale et perspectives	129
A	Annexe A	133
A.1	Relations binaires et relations d'ordre	133
A.2	Enveloppe convexe	134
B	Annexe B	135
B.1	Preuve du Théorème 6.2.2	135
	Bibliographie	154

Table des figures

2.1	Illustration de l'optimalité de Pareto et front de Pareto	24
2.2	Front de Pareto d'un problème à deux critères	25
3.1	Sous-ensemble flou « presque 20 mm »	54
3.2	Sous-ensemble flou « presque 20 mm de diamètre »	55
3.3	Support, noyau, hauteur et α -coupe d'un sous-ensemble flou	56
3.4	Fonction d'appartenance du complémentaire d'un ensemble flou	57
3.5	Intersection et union de deux ensemble flous	59
3.6	Fonction d'appartenance de $A \cap B$	60
3.7	Sou-ensemble flou discret	63
3.8	Fonction d'appartenance triangulaire et trapézoïdale	63
3.9	Fonction d'appartenance exponentielle	64
3.10	Fonction d'appartenance Gaussienne	64
3.11	Variable linguistique « intensité lumineuse »	65
3.12	Exemple de modificateurs linguistiques	66
3.13	Modificateur « très » appliqué à forte luminosité	67
3.14	Méthode d'estimation d'ensemble (Aladenise and Bouchon-Meunier, 1997)	70
3.15	Fonction d'appartenance avec quatre paramètres	71
3.16	Comparaison de nombres flous	74
4.1	Fonctions d'appartenance des performances des alternatives A_1, A_2 et A_3	82
6.1	Comparaison de D_m avec h_m, L_m et dm relativement à m	102

6.2	Fonction $K_1(\cdot)$	110
6.3	Fonction $S(\cdot)$	110
6.4	Étendue de la séquence d'ordre pour $K_1(\cdot)$ et $S(\cdot)$	110
6.5	Fonction $K_2(\cdot)$ et l'étendue de sa séquence d'ordre	111
7.1	Analyse de sensibilité pour ρ	126

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques du contexte MADM et MODM	22
2.2	Échelle de Saaty de la méthode AHP	39
2.3	Indice de cohérence moyen	40
2.4	Panorama chronologique des méthodes MADM les plus influentes	49
3.1	Opérateurs de compensation-min	61
3.2	Opérateurs de compensation-max	61
3.3	Matrice de la relation « est préféré à »	68
3.4	Exemple d'estimations floues pour les alternatives	73
4.1	Références sur l'aide multicritère à la décision floue	79
4.2	Matrice de décision floue	82
6.1	Résultats de l'analyse comparative de D_m	102
6.2	Valeurs comparatives résultantes	109
6.3	Valeur de $K_m(A)$ pour $m = 1, 2, 3$	109
6.4	Valeurs comparatives obtenues	110
7.1	Matrice de décision floue (Joshi and Kumar, 2014)	121
7.2	Matrice de décision floue normalisée	121
7.3	Calcul du vecteur de pondérations pour $m = 1$	121
7.4	Calcul du vecteur de pondérations pour $m = 2$	122
7.5	Matrice de décision flou normalisée et pondérée	122
7.6	Coefficients relationnels gris pour chaque alternative (cas 1)	123

7.7	Résultats du classement obtenus en utilisant notre méthode (cas1)	123
7.8	Résultats de classement obtenus en utilisant notre méthode (cas2)	124
7.9	Valeurs de Q_i pour différentes valeurs du coefficient de résolution ρ	125
7.10	Comparaison de l'ordre de classement des options provenant de différentes procédures.	127
7.11	Résultats de classement obtenus en utilisant notre approche sur l'exemple de Kuo et Liang pour $\rho = 0.5$	127

Liste des Algorithmes

1	Méthode lexicographique	28
2	Méthode Goal Programming	29
3	Algorithme de la méthode de la somme pondérée (WSM)	32
4	Méthode de la contrainte $-\varepsilon$	33
5	Méthode métrique pondérée	35
6	Méthode MAUT dans MADAM	37
7	Algorithme TOPSIS pour le classement des alternatives	41
8	Algorithme de la méthode analyse relationnelle grise (GRA)	42
9	Algorithme de VIKOR pour la sélection des alternatives	44
10	Méthode ELECTRE I	46
11	Algorithme de la méthode de l'entropie pour calculer les poids des critères	48

Introduction générale

Contexte et objectif de la thèse

Face à la croissance des quantités d'informations complexes dans divers domaines d'industries clés tels que la santé, l'économie, les transports, et bien d'autres, il devient impératif d'adopter des processus décisionnels mieux adaptés et plus appropriés. Pour répondre à cette exigence, il est essentiel de disposer d'outils pertinents pour le traitement et la modélisation de ces informations, afin d'aboutir à une prise de décision plus fiable. L'information peut être définie comme une collection de symboles ou de signes produits soit par l'observation de phénomènes naturels ou artificiels, soit par l'activité cognitive humaine. Elle est destinée à comprendre le monde qui nous entoure, aider à la prise de décision ou communiquer avec les individus (Dubois, 1983). L'information est le nerf de la prise de décision, mais elle dépend très étroitement du processus de son acquisition. En effet, lors d'un processus décisionnel, les schémas cognitifs humains tels que l'inconscient, les croyances profondes, les expériences et les représentations du monde confèrent un aspect subjectif aux jugements et opinions des décideurs. Cela peut engendrer des situations ambiguës ou imprécises que les valeurs numériques ne peuvent plus décrire de manière fiable.

La présente thèse a pour objectif d'explorer l'apport des mesures de l'information floue à l'analyse multicritère de la décision. Étant donné que la prise de décision peut être complexe et subjective, il est souvent difficile d'évaluer les options et de parvenir à une décision optimale, en particulier lorsque les informations sont ambiguës ou imprécises. Dans cette optique, cette thèse propose de nouvelles mesures de l'information floue visant à améliorer la précision et la fiabilité des décisions prises dans des environnements flous. L'utilisation de mesures de l'information floue se révèle particulièrement pertinente pour prendre en compte l'ambiguïté et la subjectivité inhérentes à la prise de décision. Ces mesures fournissent une représentation mathématique permettant de considérer les variations

d'interprétation de l'information et d'assister efficacement la prise de décision.

Comment bien représenter les préférences des décideurs

Les problèmes de prise de décision dans le monde réel sont souvent très complexes et mal structurés, ce qui rend difficile leur traitement par les techniques de prise de décision traditionnelles. En effet, lors de la prise de décision, les décideurs doivent choisir la meilleure action à prendre parmi un ensemble d'actions sur la base d'observations. Cependant, ces observations peuvent être imprécises, ou que les décideurs peuvent être incapables d'attribuer des valeurs numériques précises à leurs évaluations. Cela peut être dû au fait que les critères sont qualitatifs par nature ou que les décideurs expriment leurs préférences en utilisant le langage naturel, comme par exemple "plus ou moins bon", "bon", "mauvais", "environ" et "à peu près", entre autres. Dans de tels cas, ils font intervenir des connaissances mal définies, mal décrites et imparfaitement connues, ce qui peut entraîner des contradictions dans la décision finale.

Face à cette complexité, la logique floue, introduite par (Zadeh, 1965), offre un cadre permettant de gérer l'ambiguïté inhérente aux problèmes de prise de décision. Cette approche repose sur l'utilisation de variables linguistiques pour modéliser la perception humaine, offrant ainsi une représentation plus adaptée du raisonnement dans des situations où la réalité ne peut être réduite à des valeurs de vérité binaire, mais présente des transitions graduelles. Par conséquent, les décideurs peuvent utiliser des informations qualitatives et incertaines pour prendre des décisions en tenant compte des nuances du monde réel.

La prise de décision dans un environnement multicritère floue

Dans leur travail, Bellman and Zadeh (1970) ont étendu la théorie des sous-ensembles flous à l'aide multicritère à la décision. Par conséquent, les concepts linguistiques qui produisent des valeurs floues ou des sous-ensembles flous sont employés pour décrire de façon plus réaliste les performances des alternatives en fonction des critères selon la perception du décideur.

En effet, l'aide multicritère à la décision floue (Fuzzy Multicriteria Decision Making (FMCDM)) peut aider à comprendre comment les décideurs analysent les alternatives et sélectionnent la meilleure. De nombreuses méthodes conventionnelles pour le traitement de problèmes multicritères ont été étendues aux atmosphères floues, comme les méthodes basées sur des mesures de distances, dites de programmation de compromis (compromise programming) telles que : la méthode Fuzzy TOPSIS (technique d'ordre de préférence par similarité avec la solution idéale) (Chen, 2000), la méthode VIKOR flou (optimisation multicritère et solution de compromis) (Wang and Chang, 2005), MOORA flou (Multi-objective Optimization Based on Ratio Analysis) (Brauers and Zavadskas, 2006), AHP flou (Analytic Hierarchy Process) (Lazarevic, 2001), et GRA (Gray Relational Analysis) (Ju-Long, 1982). Depuis, plusieurs autres méthodes de FMCDM ont été largement étudiées par exemple dans,

([Shahhosseini and Sebt, 2011](#); [Zeng et al., 2010](#); [Chen et al., 2019](#)), etc.

Intégration des mesures de l'information floues dans FMCDM

L'article de [Zadeh \(1968\)](#) a marqué un tournant majeur dans la modélisation de l'ambiguïté en proposant la première mesure d'entropie pour les sous-ensembles flous. Depuis lors, l'entropie floue a connu une large utilisation dans le domaine de la décision, notamment pour déterminer les poids des critères ([Wang and Lee, 2009](#); [Chen and Lee, 2010](#); [Xia and Xu, 2012](#); [Garg et al., 2015](#)). D'autre part, [Bhandari and Pal \(1993\)](#) ont proposé une mesure de discrimination floue équivalente à la discrimination probabiliste introduite par [Kullback and Leibler \(1951\)](#). Cette mesure permet de quantifier l'information de discrimination entre des sous-ensembles flous. La divergence floue ainsi obtenue est devenue un outil puissant pour extraire des informations discriminantes dans de nombreux domaines, apportant aux experts une meilleure compréhension des situations incertaines ou floues. Récemment, des chercheurs ont développé de nouvelles mesures de divergence floue spécifiquement conçues pour être utilisées dans des méthodes de résolution de problèmes de prise de décision floue.

Par ailleurs, selon [Arya and Kumar \(2020\)](#), une mesure de connaissances floues peut capturer certaines informations essentielles qui renseigne sur la quantité de certitude ou de netteté dans un sous-ensemble flou. En d'autres termes, elle évalue le degré moyen de discrimination entre un sous-ensemble flou et le sous-ensemble le plus flou. Plusieurs études antérieures sur les mesures de connaissances floues ont été entreprises en utilisant les ensembles flous intuitionnistes (intuitionistic fuzzy sets) qui sont caractérisés par une fonction d'appartenance, une fonction de non-appartenance et une marge d'hésitation.

Dans une étude récente, [Singh et al. \(2019\)](#) ont introduit le concept de mesure de connaissances pour les sous-ensembles flous ordinaires, mettant en évidence la dualité entre l'entropie et la mesure de connaissances floues. D'autres chercheurs ont également proposé différentes formulations de cette mesure de connaissances, notamment ([Singh et al., 2020](#); [Singh and Ganie, 2021](#); [Joshi, 2022](#)) qui ont exploré son utilisation dans la résolution de problèmes de prise de décision en contexte multicritère flou.

Les principales motivations et contributions à l'introduction de cette thèse

1. Les approches de la programmation de compromis, sont couramment utilisées en FMCDM. L'objectif de ces approches est d'identifier une solution efficace qui soit aussi proche que possible du point idéal, en utilisant une fonction de distance. Il est important de souligner que le concept de distance est utilisé comme une mesure approximative des préférences humaines. Pour que la technique de la programmation de compromis puisse fonctionner efficacement, il est essentiel de développer une mesure de divergence (distance) ou une famille de fonctions de distance adaptée à un large éventail d'applications. Dans ce contexte, nous proposons une

nouvelle mesure généralisée de divergence pour les ensembles flous, basée sur la construction mathématique des mesures de divergence entre deux distributions de probabilités établies par Csiszár. Nous démontrons que cette mesure est une mesure de distance pour les ensembles flous. Ainsi, cette nouvelle mesure de divergence est un outil efficace pour l'analyse décisionnelle. Aussi, nous soumettons la divergence proposée à une étude comparative des performances, afin d'évaluer son efficacité pour mesurer la distance entre les alternatives et un point idéal.

2. Une mesure de connaissances floues est également un sujet important de la théorie de l'information floue et joue un rôle essentiel dans une variété de domaines d'étude. Comme il s'agit d'une mesure duale de l'entropie floue, elle peut fournir des informations précises sur un ensemble flou. Conformément à sa définition axiomatique, une mesure de connaissances évalue dans quelle mesure un ensemble flou s'écarte de l'ensemble le plus flou. Dans cette optique, nous suggérons de développer une nouvelle classe de mesures de connaissances basée sur la divergence de Csiszár. Par la suite, à partir de la divergence proposée, une nouvelle mesure généralisée de connaissances floues est générée.
3. La technique basée sur l'entropie de [Shannon \(1948\)](#) est la stratégie la plus répandue. Elle a été introduite en analyse multicritère comme une mesure de diversité ([Belton and Stewart, 2002](#)). Elle est destinée à mesurer la variabilité dans les valeurs des critères entre les alternatives et d'estimer l'importance relative de chaque critère. Cependant, cette méthode peut donner des poids insatisfaisants dans certaines situations. Cela se produit lorsque tous les critères sont très similaires ou interdépendants, c'est-à-dire lorsque les performances des alternatives pour ces critères sont très corrélées ou très similaires. Dans ce cas, la méthode basée sur l'entropie aura du mal à différencier l'importance relative de chaque critère. De plus, cette difficulté peut être accentuée par la subjectivité des décideurs en contexte flou. En effet, les décideurs peuvent avoir des opinions différentes sur l'importance de chaque critère et sur la manière dont les critères interagissent entre eux. Cela peut rendre la détermination des pondérations plus complexe et subjective.

Afin de pallier ce problème, nous proposons une nouvelle méthode objective qui utilise à la fois la divergence floue et la mesure de connaissances. Cette méthode permet de recueillir autant d'informations que possible sur l'importance des critères, car la divergence floue peut indiquer dans quelle mesure un critère permet de différencier les alternatives, tandis que la mesure de connaissances peut aider les experts à mieux comprendre la performance des alternatives en fonction des critères. En combinant ces deux approches, notre méthode permet ainsi d'obtenir des poids objectifs plus précis et représentatifs des critères, ce qui est essentiel pour une prise de décision efficace en FMCDM.

4. Ce travail propose une nouvelle stratégie de MCDM dans un contexte flou en utilisant une approche de compromis. Cette stratégie combine les méthodes GRA et VIKOR en se basant sur une divergence généralisée floue et un point idéal unique. Tout d'abord, une normalisation vectorielle est effectuée pour diminuer l'impact des valeurs extrêmes des critères de désavantage et mettre l'accent sur les valeurs de satisfaction forte pour les critères d'avantage. Ensuite, la séquence de référence est déterminée en tant que point idéal. La méthode GRA est ensuite appliquée pour obtenir des coefficients relationnels gris qui expriment la proximité entre la performance de chaque alternative et celle de la solution idéale sous chaque critère. Enfin, la méthode VIKOR est utilisée pour obtenir l'alternative optimale dont la performance sous les critères est la plus proche de celle de la séquence de référence qui présente des valeurs fortes pour les critères de bénéfice. Cette nouvelle approche combinant GRA et VIKOR présente l'avantage d'exiger moins de calculs que celle proposée précédemment par [Kuo and Liang \(2011\)](#). Pour vérifier sa fiabilité, une étude de cas basée sur des données réelles a été réalisée, accompagnée d'une analyse de sensibilité impliquant différentes valeurs des coefficients des méthodes GRA et VIKOR.

Structure de la thèse

La thèse présentée est constituée de sept chapitres, répartis en trois parties, avec une introduction générale et une conclusion globale.

La première partie, intitulée "Les abécédaires de l'analyse multicritère", est constituée de deux chapitres introductifs sur la décision multicritère, où ont été passées en revue les considérations théoriques ainsi que les différentes méthodologies de l'analyse multicritère.

La deuxième partie, intitulée "Théorie de l'information et décision multicritère dans un environnement flou", est constituée de trois chapitres définissant le cadre général et les outils nécessaires à l'introduction des contributions de cette thèse. Dans cette partie, nous avons introduit un chapitre sur les fondements mathématiques de la théorie des sous-ensembles flous et leur utilisation dans un contexte décisionnel. Le chapitre suivant présente le contexte global de l'analyse décisionnelle dans un environnement flou. Le dernier chapitre de cette partie est consacré à un état de l'art sur les mesures d'information floues, afin d'introduire les notions nécessaires pour l'introduction d'une partie de notre contribution sur les mesures d'information floues.

Enfin, la troisième et dernière partie comporte deux chapitres où sont exposées les différentes contributions de cette thèse. Nous avons d'abord suggérées deux nouvelles mesures d'information floues que nous avons intégrées dans deux modèles de programmation mathématique pour la détermination des poids des critères. Par la suite, nous avançons l'idée d'une combinaison des méthodes GRA et VIKOR en utilisant la mesure de divergence floue que nous avons proposée, comme mesure de déviation (distance).

Cette thèse se clôture par une conclusion générale qui résume les apports théoriques et pratiques exposés dans ce travail et présente quelques perspectives pour des recherches futures.

Première partie

Les abécédaires de l'analyse multicritère de la décision

Considérations théoriques de l'aide multicritère à la décision

Introduction

Prendre une décision est un acte déterminant sur tous les plans de la vie quotidienne. Une décision peu avoir une conséquence positive comme elle peut être préjudiciable. A cet effet, il est primordial de mettre en œuvre les meilleures stratégies afin d'éviter les lourdes conséquences d'un mauvais choix ou d'une décision regrettable. Un nombre important de chercheurs, mathématiciens et économistes ont réuni leurs efforts pour établir un formalisme mathématique adéquat et construire les outils nécessaires, afin d'aider le décideur à prendre la meilleure décision sur la base de ses préférences. C'est dans cette optique que s'inscrit l'aide multicritère à la décision.

1.1 L'approche de l'analyse multicritère

L'approche de l'aide multicritère à la décision consiste en la modélisation et la résolution de problèmes de décision qui impliquent plusieurs critères ou attributs (Roy, 1996; Belton and Stewart, 2002; Figueira et al., 2005). Elle vise à fournir des outils pour aider à avancer dans la résolution d'un dilemme de choix où de nombreux points de vue, généralement contradictoires, doivent être pris en compte. Par exemple, lorsqu'il s'agit de porter des jugements sur nos activités quotidiennes, le gouvernement, les entreprises ou l'industrie, ou encore lors du développement d'un vaccin contre une maladie. Certaines parties prenantes, tels que les décideurs ou les experts, peuvent accorder une grande importance à des critères tels que l'efficacité et la sécurité, tandis que d'autres peuvent privilégier des critères tels que le coût, la voie d'administration, la durée de conservation ou la stabilité thermique, et ainsi de suite. Par conséquent, la prise de décision dans un cadre multicritères est com-

plexe et difficile. La solution consiste à atteindre chaque objectif à un niveau spécifique.

Dans son article [Grabisch \(2005\)](#) définit la décision multicritère comme étant l'action de synthétiser des informations relatives à différents points de vue ou aspects concernant un ensemble d'objets, et choisir un ou plusieurs objets de cet ensemble. Toutefois, l'aspect conflictuel des critères, l'indétermination et le manque d'information liés au problème sont souvent désignés comme les sources de sa complexité ([Bouyssou, 1984](#)). L'analyse multicritère de la décision (Multicriteria Decision Making (MCDM)) diffère des approches traditionnelles de la Recherche Opérationnelle, principalement par la présence de plusieurs points de vue d'un ou plusieurs décideurs ayant des préférences et des aspirations concernant la circonstance problématique. Selon la méthode utilisée, la structure des préférences des décideurs, peut être modélisée de diverses manières. Dans le cas où les préférences sont imprécises, la prise de décision multicritère floue peut gérer ce type de circonstances difficiles ([Pedrycz et al., 2011](#)).

La MCDM trouve ses origines dans les travaux de Vilfredo Pareto, économiste italien du XIX^{ème} siècle, qui a étudié l'agrégation de critères contradictoires en un seul indice composite et introduit le concept d'efficacité (optimalité de Pareto). Ce concept est devenu l'un des fondements de l'économie et de la théorie moderne de la MCDM. Aujourd'hui, cette approche de prise de décision est un domaine de recherche florissant qui s'étend à de nombreuses disciplines scientifiques et bénéficie d'un grand succès grâce à ses avancées théoriques et ses applications pratiques dans des domaines variés tels que l'économie, la gestion, la santé, l'environnement, et d'autres encore.

La MCDM est classiquement divisée en deux types selon le nombre de choix considérés, tels que décrits par ([Zimmermann and Gutsche, 1991](#)) et ([Leake, 2000](#)). Le premier type, appelé prise de décision multi-attributs (MADM), est adapté à l'évaluation d'espaces de décision discrets qui contiennent un nombre fini de choix prédéfinis. Ces choix sont examinés, hiérarchisés et finalement classés ou triés en fonction des critères de décision spécifiés. Le deuxième type, appelé prise de décision multi-objectifs (MODM), s'applique aux problèmes de décision impliquant un très grand nombre de choix, voire un nombre infini, et implique un ensemble de contraintes et un ensemble d'objectifs. Ces deux types sont souvent utilisés conjointement pour aider à la prise de décision multicritère. Dans le cadre de cette thèse, notre contribution porte sur l'aide à la décision multicritère dans le cas de la prise de décision multi-attributs flous.

1.2 Les décisions sont souvent prises en contexte multicritère

L'approche mono-critère a été conçue pour traiter des problèmes de décision présentant un point de vue unique ou un point de vue prédominant ou encore lorsqu'il y a plusieurs points de vue mais non conflictuels. Cependant, lorsqu'un processus de décision s'effectue en présence d'un seul décideur, il est difficile pour celui-ci d'avoir à l'esprit qu'un seul critère bien défini. En outre, si la prise de décision s'effectue dans un contexte où interviennent plusieurs décideurs, il est rare qu'il y ait à priori

un critère unique, bien défini et jugé acceptable par tous pour conclure le processus de décision. Chaque décideur joue un rôle plus ou moins bien défini qui donne la priorité à ses propres objectifs et à son système de valeurs. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en considération différents points de vue portant, par exemple, sur les finances, les ressources humaines, les aspects environnementaux, les délais, la sécurité, la qualité, l'éthique, et d'autres aspects encore.

En considérant chaque point de vue pertinent séparément, indépendamment des autres, il est généralement possible de parvenir à une formulation claire et commune des préférences concernant le seul point de vue considéré. Ceci conduit naturellement à associer un critère spécifique à chaque point de vue pertinent. Chacun de ces critères est utilisé pour évaluer toute action potentielle (les choix possibles) sur une échelle qualitative ou quantitative appropriée. Par conséquent, cette approche permet de délimiter un large spectre de points de vue susceptibles de structurer la prise de décision en fonction des décideurs concernés, aussi faciliter le débat sur le rôle respectif (poids, veto, niveau d'aspiration, niveau de rejet, et d'autres encore) que chaque critère peut être appelé à jouer au cours du processus décisionnel. De ce fait, il est clair que choisir l'approche mono-critère peut conduire à négliger à tort certains aspects du réalisme (Bouyssou, 1984; Meyer, 2003). En effet, le terme décision semble même incorrect dans un contexte mono-critère, puisque prendre une décision ou faire un choix signifie décider ou choisir parmi plusieurs éventualités disponibles et c'est ce type de situations qui se présentent à nous quotidiennement.

Contrairement, à l'approche mono-critère qui recherche un optimum, l'approche multicritère recherche quant à elle un compromis. Selon Schärli (1985), l'optimisation au sens mono-critère n'est plus valable lorsqu'on doit choisir parmi plusieurs options. En effet, pour définir un optimum, il est nécessaire que certaines hypothèses soient vérifiées, comme la présence d'une relation de préférence et d'indifférence entre les actions potentielles. C'est précisément là que l'aide multicritère à la décision entre en jeu.

1.3 Termes relatifs à l'environnement MCDM

Dans ce qui suit nous passons en revue quelques concepts essentiels qui composent tout processus de décision multicritère :

1. **Décideur ou acteur** : C'est un individu (ou un groupe d'individus) qui face à une situation de décision, a la responsabilité d'évaluer les différents scénarios possibles et poser la problématique, ainsi que l'évaluation des priorités des critères du problème étudié quand cela est possible.
2. **Alternatives** : Appelées aussi actions, décisions, solutions, plans, options, candidats, ou encore scénarios. Les actions à comparer représentent l'espace de décision du problème décisionnel.

L'identification de cet ensemble est une tâche très importante dans la définition du problème. Cet ensemble peut être déterminé de deux façons :

- ▷ Explicitement par un ensemble fini d'alternatives de cardinal relativement faible.
- ▷ Implicitement par un ensemble de propriétés ou de conditions que les alternatives doivent vérifier (c'est le cas d'un ensemble d'alternatives spécifié par ses variables de décision vérifiant un système de contraintes explicites).

Le terme action potentielle (ou réalisable) désigne aussi bien les « actions réelles », déjà réalisées ou susceptibles de l'être. Nous utiliserons dans la suite de ce document, aussi bien les dénominations alternatives, ou options pour mentionner les actions potentielles à comparer dans un problème d'aide multicritère à la décision.

3. **Critères** : Ce sont des expressions quantitatives ou qualitatives représentant des points de vues, des objectifs, des attributs, qui permettent d'évaluer des alternatives, c'est donc l'association d'un point de vue et d'une préférence : le décideur exprime ses préférences sur les différentes valeurs possibles de l'attribut. Par exemple : pour l'achat d'un PC portable l'ensemble des alternatives sera constitué de toutes les marques commercialisées et chaque marque possède ses propres caractéristiques à savoir : La gamme de prix, l'autonomie, la taille du disque dur, la taille de la mémoire vive, et d'autres encore.

Dans le cadre d'un problème d'aide multicritère à la décision, les critères doivent vérifier les axiomes suivants :

- ▷ Axiome d'exhaustivité : si deux actions ont les mêmes vecteurs performances (mêmes valeurs pour tous les critères) alors il faut être sûr que les décideurs sont bien indifférents entre les deux actions.
- ▷ Axiome de cohésion : en partant de deux actions qui sont jugées équivalentes, si l'on accroît la performance de la première sur un critère quelconque, alors elle apparaît « comme au moins aussi bonne » que la seconde action inchangée.
- ▷ Axiome de non-redondance : les critères doivent être indépendants pour éviter la redondance. Un critère est redondant si son retrait de l'ensemble des critères n'altère pas leur exhaustivité ni leur cohésion.

Il existe trois types de critères :

- ▷ **Vrai critère** : Ce type de critère permet d'introduire une situation de préférence ou d'indifférence lorsque l'on obtient respectivement une relation de supériorité ou d'égalité entre l'évaluation de deux actions sur ce critère ;

- ▷ **Quasi-critère** : Ce type de critère permet d'introduire une plage d'indifférence $[-q, q]$, et on dit qu'il y a indifférence entre deux alternatives quand l'écart de leurs évaluations pour ce critère appartient à $[-q, q]$.
- ▷ **Pré-critère** : Un pré-critère est un vrai critère auquel on a introduit une plage de préférence faible (les écarts des évaluations pour ce critère sont proches de la plage d'indifférence).

4. **Famille cohérente de critères** : On dit qu'une famille de critères pour un problème de décision est cohérente si elle représente toutes les facettes du problème sans introduire de redondance.
5. **Problème de décision** : Un problème de décision peut être défini comme une situation où un ensemble d'actions **A** est accompagné d'une famille de critères cohérente applicable à **A**. L'objectif sous-jacent est de résoudre l'un des trois problèmes suivants : choix, classement ou tri¹.

Remarque 1. *Dans la littérature MCDM, il n'y a pas de définitions universelles pour les termes : critères, attributs et objectifs (Keeney, 1976). Cependant, beaucoup d'auteurs les utilisent indifféremment et nous ferons de même.*

6. **Sens d'optimisation des critères** : En optimisation multicritère, quelle que soit la technique d'analyse, employée, il est nécessaire de spécifier le sens d'optimisation pour chaque critère. Comme le souligne [Maystre et al. \(1994\)](#), les décideurs doivent tous être d'accord sur la direction des préférences. Les décideurs peuvent être d'accord avec la maximisation de certains critères et la minimisation d'autres. Les critères financiers favorisent généralement la minimisation, c'est-à-dire le désir d'obtenir les coûts unitaires les plus bas possibles. En revanche, si un critère qui tient compte d'un profit ou d'un bénéfice de n'importe quelle nature est inclus dans l'analyse, alors les décideurs dans ce cas abondent dans le sens d'une maximisation pour pouvoir profiter des avantages qu'il présente. Dans ce sens, et dans une approche d'optimisation multicritère les termes "critère de profit" et "critère de coût" sont très souvent utilisés.
7. **Importance des critères** : Un élément clé du processus de prise de décision multicritère concerne l'importance accordée aux différents critères pris en compte. Ces importances sont représentées par des termes quantitatifs, souvent appelés poids, ou par des termes ordinaux, appelés priorités. Dans la plupart des processus décisionnels, la description de la structure de préférence du décideur entre les différentes alternatives se réduit principalement à l'évaluation des poids ou priorités ([Teclé and Duckstein, 1994](#); [Vansnick, 1986](#); [Ma et al., 1999](#)).

¹voir 1.4

Les poids attribués reflètent le point de vue des décideurs qui expriment leurs préférences (systèmes de valeurs, convictions, opinions). Diverses méthodes de pondération de critères existent et leurs résultats peuvent grandement influencer le résultat final d'une analyse (Wang and Lee, 2009; Hwang and Yoon, 1981). Dans ce contexte, les procédures subjectives et objectives sont les deux principales méthodes de calcul de pondération des critères.

- ▷ **Les méthodes subjectives** déterminent les pondérations des critères en fonction des systèmes d'information recueillis sur la base des compétences et des jugements personnels des décideurs. Une des principales méthodes conçues à cet effet est la méthode AHP (Analytic Hierarchy Process) (Saaty, 1980).

- ▷ **Les méthodes objectives** (Zeleny, 1982) sont établies pour calculer les coefficients de pondération des critères à partir des informations intégrées dans la matrice de décision à l'aide de modèles mathématiques sans tenir compte de l'opinion des décideurs. Ces méthodes comprennent les méthodes d'entropie (Xia and Xu, 2012; Garg et al., 2015), les méthodes de maximisation des écarts (Xu and Da, 2005; Wei, 2008), etc.

1.4 Les différentes orientations de résolution en MCDM

Dans un contexte multicritère de décision, le décideur doit bien poser sa démarche pour établir le processus de résolution. Dans ce contexte, le terme "orientations de la résolution" fait référence à la façon dont l'aide à la prise de décision est formalisée, et dans quelle direction doit-on orienter la recherche d'une solution au gré du décideur. Autrement dit, il indique que la résolution doit trouver des réponses à des questions telles que : "Comment devrions-nous formuler le problème?" "Quel type de résultats devrions-nous viser?" "Comment le décideur doit-il s'insérer dans le processus de décision pour l'aider à atteindre ses conclusions (objectifs)?" "Quel type de procédure semble le plus approprié pour guider son enquête?" A cet égard, Roy et al. (1985) distinguent quatre orientations essentielles qu'ils appellent problématiques.

1. **Choix** : Dans ce cas le processus de résolution est orienté vers l'identification d'un ensemble aussi réduit que possible d'alternatives (éventuellement une alternative) meilleures que les autres, ou, à défaut, les « plus satisfaisantes » qui optimisent au mieux les différents critères.
2. **Tri** : Consiste à poser le problème en termes de tri des actions par catégories pré-définies ordonnées (bonnes, acceptables, à rejeter, et autres). En d'autres termes il s'agit de l'affectation d'une alternative à une catégorie, et ce, en comparant son profil à des normes prédéfinies (profils de référence), qui représentent des alternatives fictives, caractérisant, selon le cas des prototypes ou des frontières définissant les catégories (Perny, 1998).

3. **Rangement** : Dans ce cas on oriente la résolution de façon à obtenir des actions regroupées en classes d'équivalence ordonnées conformément aux préférences des personnes qui participent à la décision (hiérarchisation des actions). Les actions sont ainsi classées de la meilleure à la moins bonne, ce qui permet par la suite de former un sous-groupe de n actions parmi les meilleures.
4. **Description** : Selon [Giard and Roy \(1985\)](#), la description consiste juste à établir une liste descriptive des actions et leurs conséquences et non pas à les comparer.

1.4.1 Formulation d'un Problème Multicritère de Décision

L'aide multicritère à la décision se caractérise par la prise en compte explicite de plusieurs objectifs (critères) à optimiser simultanément, la comparaison des solutions et la détermination d'une ou des solutions efficaces. Cependant, ceci est conditionné par la bonne structuration du problème MCDM. Ainsi, pour introduire formellement un problème de décision multicritère, on définit tout d'abord un ensemble \mathbf{A} d'alternatives (actions potentielles, solutions réalisables, candidats) qui peut être donné de manière explicite (par exemple en listant les solutions envisagées) ou de manière implicite (par exemple en spécifiant un ensemble de contraintes ou de propriétés que les solutions doivent satisfaire). Dans tous les cas, l'ensemble \mathbf{A} définit les solutions sur lesquelles on souhaite faire porter l'analyse décisionnelle, soit que l'on juge que ce sont les seules disponibles, ou que c'est les seules réalisables. On introduit ensuite une famille cohérente de critères notée \mathbf{C} , constituée d'un nombre fini de critères prenant la forme de fonctions $C_j, j \in N$ où $N = \{1, \dots, m\}$. Pour tout A_i dans \mathbf{A} et tout $j \in N$ on appelle performance (ou score) de A_i sur le critère C_j la quantité $C_j(A_i) = (A_{ij})$ reflétant la valeur de A_i sur le critère C_j . Les fonctions critères (objectifs) $C_j, j \in N$ sont à valeurs dans un ensemble ordonné $X_j \subset \mathbb{R}$ pour tout $j \in N$. L'ensemble $\mathcal{C} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, qui constitue un nouvel espace de description des alternatives, est appelé *espace des critères*. Un problème de décision multicritère se résume formellement par un triplet de la forme :

$$(\mathbf{A}, \mathbf{C}, Q),$$

où $Q \in \{\text{choix, rangement, tri}\}$. Notons que cette phase de structuration du problème est une phase cruciale, puisqu'elle permet aux décideurs l'identification de différentes opportunités de décision, l'évaluation des actions, ainsi que la construction de nouvelles actions.

1.5 Système d'évaluation des préférences

Principalement, une situation de prise de décision c'est aussi exprimer des préférences, qui sont l'expression de l'attractivité de chaque alternative réalisable, ressentie par un décideur ([Lumet, 2012](#)). Afin que les préférences du décideur puissent être reflétées dans le processus décisionnel, chaque ap-

proche MCDM nécessite un système d'évaluation des préférences. Ces mécanismes servent d'indicateurs par rapport auxquels les décideurs peuvent évaluer les alternatives en fonction de leurs critères. Le système d'évaluation des préférences, peut être défini explicitement (lorsque la valeur de préférence est calculée à partir d'un ensemble de contraintes ou d'une fonction mathématique exprimée sous la forme d'une relation mathématique binaire²), ou implicitement de sorte que l'expérience, l'expertise, la perception et l'intuition du décideur se reflètent dans ses préférence pour les alternatives.

Définition 1.5.1. (*Relation de préférence*)

Soit \mathbf{A} l'ensemble des alternatives. Soient $A', A'' \in \mathbf{A}$, on définit les relations binaires suivantes :

Préférence large : Une relation de préférence large est notée \succsim . L'expression $A' \succsim A''$ signifie que l'alternative A' est au moins aussi bonne que l'alternative A'' . Nous supposons que « \succsim » prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, 1 pour « vrai » et 0 pour « faux ».

Préférence stricte : La relation de préférence stricte \succ est définie : $A' \succ A'' \Leftrightarrow A' \succsim A''$ et non($A'' \succsim A'$). « \succ » est une relation asymétrique et irréflexive³.

Indifférence : La relation d'indifférence notée \sim est définie par : $A' \sim A'' \Leftrightarrow A' \succsim A''$ et $A'' \succsim A'$. L'indifférence est réflexive et symétrique.

Incomparabilité : Soient deux alternatives A' et A'' telles que $A' \neq A''$, nous dirons qu'elles sont incomparables si on a : non($A' \succsim A''$) et non($A'' \succsim A'$). Cette relation est symétrique et irréflexive.

Pour quantifier l'intensité des préférences, on définit la notion de la fonction d'utilité.

Proposition 1.5.1. (*Fonction d'utilité*)

Soit « \succsim » une relation de préférence sur l'ensemble des alternatives \mathbf{A} , telle que « \succsim » soit un préordre complet⁴. Il existe une fonction $u : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A', A'' \in \mathbf{A}, A' \succsim A'' \Leftrightarrow u(A') \geq u(A''). \quad (1.1)$$

u est dite fonction d'utilité de la relation de préférence « \succsim ».

Selon la Proposition 1.5.1, les intensités des préférences sont quantifiées par la fonction d'utilité qui donne l'opportunité au décideur d'exprimer ses préférences en associant à chacune d'entre elles

²voir Définition A.1.1

³voir Définition A.1.2

⁴voir Définition A.1.7

un nombre réel. Ainsi on peut établir ou exprimer une préférence stricte et relation d'indifférence entre deux alternatives par :

$$\forall A', A'' \in \mathbf{A}, A' \succ A'' \Leftrightarrow u(A') > u(A''),$$

$$\forall A', A'' \in \mathbf{A}, A' \sim A'' \Leftrightarrow u(A') = u(A'').$$

1.6 Stratégies d'agrégation multicritère

Dans une situation où plus d'un critère est présent, un défi critique se pose : comment pouvons-nous considérer complètement tous les critères afin de comparer les alternatives entre elles ? Considérons deux actions, A' et A'' , qui se distinguent par leurs performances distinctes sur les m critères considérés. Le plus souvent, A' sera meilleure que A'' pour certains des critères, et A'' meilleure que A' pour d'autres. Dans ce cas, lors de la comparaison entre A' et A'' , sur quelle base pouvons-nous parvenir à un jugement global, c'est-à-dire en prenant en compte, de manière exhaustive, les m performances de A' et les m performances de A'' . Ce problème est généralement appelé **problème d'agrégation**. La connaissance de la performance des deux options sur chacun des critères, et donc de leurs forces et faiblesses, similitudes et différences, doit être agrégée pour évaluer si l'une est globalement préférable à l'autre. En effet, un problème d'agrégation multicritère consiste à exploiter l'information préférentielle (performances, indices d'importance), pour construire un modèle de comparaison globale des alternatives sous la forme d'une relation de préférence \succsim sur \mathbf{A} . Pour cela, on utilise nécessairement une règle d'agrégation permettant de construire la relation \succsim à partir des vecteurs de performances. Formellement on peut l'introduire ainsi :

Définition 1.6.1. *Une règle d'agrégation est une fonction qui, pour toute paire d'alternatives $(A'; A'')$ de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ définit la préférence $A' \succsim A''$ sur la base des vecteurs performances $(A'_1, \dots, A'_m)^T$ et $(A''_1, \dots, A''_m)^T$ de la manière suivante :*

$$A' \succsim A'' \Leftrightarrow h(A'_1, \dots, A'_m, A''_1, \dots, A''_m) \geq 0 \quad (1.2)$$

où h est une fonction à valeurs réelles définie sur \mathbb{R}^{2m} croissante des m premiers arguments et décroissante des m derniers arguments et telle que $h(x; x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. La fonction h qui teste la préférence de A' sur A'' réalise d'une part l'agrégation des performances A'_j et A''_j , $j = 1, \dots, m$ et, d'autre part, la comparaison des solutions A' et A'' au travers de leurs performances. Généralement, ces deux étapes d'agrégation et de comparaison sont clairement distinguées et h est alors définie comme la combinaison de deux fonctions. La première est dite fonction d'agrégation (ou « scalarisante ») notée : $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, qui permet de synthétiser un vecteur de m performances en un scalaire. La seconde, est une fonction de comparaison de performances $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui permet de

comparer deux performances données. Dans ce qui suit nous identifions deux approches différentes de l'agrégation des performances.

L'approche « agréger puis comparer » (AC)

Dans le processus de décision multicritère de type « agréger puis comparer », le problème multicritère est transformé en un problème mono-critère (agrégation complète), en utilisant *une fonction d'agrégation*, afin de bénéficier des méthodes classiques d'optimisation mono-critère. Cette fonction d'agrégation permet au décideur de trouver une bonne solution de compromis selon ses préférences. Cela suppose l'existence d'une fonction d'utilité globale U qui représente la relation de préférence globale \succsim , que tout décideur tente de maximiser

$$\forall A', A'' \in \mathbf{A}, A' \succsim A'' \Leftrightarrow U(A') \geq U(A'').$$

Les préférences du décideur sur (les critères, les actions de référence, ...) sont implicitement ou explicitement traduites en termes de paramètres de la méthode multicritère choisie. Ensuite, la fonction d'agrégation est combinée avec les paramètres acquis pour résoudre le problème et obtenir la solution de meilleur compromis du point de vue du décideur. Les principales méthodes de cette approche on a : la théorie multi-attributs MAUT (Multi-Attribute Utility Theory) (Keeney, 1976), méthode du but programmé (goal programming), méthode de la somme pondérée et la méthode AHP (Analytic Hierarchy Process) (Saaty, 1980). Ces méthodes sont exposées dans le Chapitre 2

L'approche « comparer puis agréger » (CA)

Cette approche exploite les relations de préférence $\succsim^1, \dots, \succsim^m$ pour comparer d'abord deux alternatives sur le même critère, donnant lieu à un indice de préférence partielle (agrégation partielle) $\phi_j(A', A'')$ afin de construire la relation de préférence globale \succsim donnée par :

$$A' \succsim A'' \Leftrightarrow \psi(\phi_1(A', A''), \dots, \phi_m(A', A'')) \geq 0.$$

La fonction ψ permet ici d'agréger les indices de préférences partiels $\phi_j(A', A'')$ et non plus les performances des actions elles-mêmes.

Cette façon de procéder s'applique dans les cas où les critères sont très hétérogènes (non commensurable) ou bien lorsque des seuils de préférences ou de veto doivent être pris en compte. Parmi les méthodes basées sur cette approche, on a la famille de méthode ELECTRE (Élimination Et Choix Traduisant la Réalité) (voir Chapitre 2).

1.7 Modèle compensatoire et non-compensatoire

Toutes les méthodes dédiées à la résolution d'un problème MCDM et plus particulièrement les méthodes MADM (cas discret), décrivent les procédures de traitement des informations sur les critères. il existe deux procédures de base, notamment : les modèles non compensatoires et modèles compensatoires.

1.7.1 Modèles non compensatoires

Ce type de modèles n'autorise pas l'existence de compromis entre les critères. Il n'est pas possible de compenser le désavantage ou la valeur défavorable (faible) d'une performance sur un critère par l'avantage ou la valeur favorable d'une autre performance sur un autre critère. Chaque critère doit être indépendant des autres. Par conséquent, les comparaisons sont effectuées critère par critère. Compte tenu des connaissances et des compétences limitées du décideur, les techniques d'optimisation utilisées dans ce paradigme sont recommandées pour leur simplicité, Parmi les méthodes de ce modèle on retrouve la méthode lexicographique (voir Chapitre 2, page 27)

1.7.2 Modèles compensatoires

Ce sont des modèles qui autorisent la prise en compte de compromis entre les critères. Cela signifie que des variations dans un critère (même mineures) peuvent être compensées par des variations dans n'importe quel autre critère. Dans les modèles compensatoires, chaque attribut multidimensionnel est généralement attribué à un seul nombre qui représente une alternative. Les modèles compensatoires peuvent être classés en trois sous-groupes. :

1. **Scoring model** : Ce modèle cherche à choisir l'option qui a le score le plus élevé (ou l'utilité maximale), en agrégeant les performances des alternatives sur les différents critères selon une fonction d'utilité multi-attribut. L'objectif est de transformer un problème multi-attribut en un problème mono-attribut, en utilisant un ensemble de paramètres tels que des poids ou des contraintes sur les objectifs. Les deux méthodes couramment utilisées pour cela sont la méthode des sommes pondérées et la méthode de contrainte- ϵ .
2. **Modèle de compromis** : Ce modèle sélectionne une alternative qui est la plus proche de la solution idéale. les méthodes telles que TOPSIS (Technique d'Ordre de Préférence par Similarité avec la Solution Ideale) , VIKOR (Vlsekriterijumska Optimizacija I KOMPromisno Resenje) (voir Chapitre 2), font partie de cette catégorie.
3. **Modèle de concordance** : Ce modèle vise à établir un ordre (ou un classement) entre plusieurs alternatives à partir d'un ensemble de classements de préférence (venant de plusieurs experts, par exemple) qui respectent le mieux possible une mesure de concordance donnée. Parmi les

méthodes de ce modèle on retrouve la méthode ELECTRE(ELimination Et Choix Traduisant la REalité) (voir Chapitre 2)

Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de revisiter les concepts fondamentaux de la prise de décision en contexte multicritère, en mettant en avant la hiérarchisation et la résolution de problèmes impliquant plusieurs critères, éléments clés au cœur de l'aide multicritère à la décision. Les considérations théoriques exposées offrent une base solide pour une prise de décision éclairée au sein d'un environnement multicritère. Dans cette perspective, l'importance d'utiliser les préférences du décideur pour distinguer entre plusieurs solutions efficaces a été soulignée, tout en soulignant que le concept de solution optimale, dans un contexte d'optimisation multicritère, est souvent remplacé par une ou plusieurs solutions de compromis.

Le domaine de la décision multicritère est un domaine de recherche très actif, ayant de nombreuses croisements avec d'autres domaines scientifiques. L'approche multicritère a le mérite de permettre la représentation de plusieurs domaines d'intérêt ou points de vue, ainsi que les préférences associées, tout en permettant une vision multidimensionnelle favorable à l'établissement d'un terrain d'entente entre toutes les parties prenantes.

Méthodologies de l'analyse multicritère

Introduction

Les méthodologies multicritère ou analyse multicritère de décision (Multicritèria Decision analysis MCDA) est un ensemble d'outils puissants de prise de décision multicritère qui permet aux parties prenantes d'identifier et d'évaluer les solutions les plus appropriées parmi un ensemble d'alternatives. Ces méthodes ont bien évolué au fil des années, en fonction des avancées technologiques. Elles sont largement utilisées pour la résolution de problèmes dans les domaines tels que : la sélection des fournisseurs de services (Chai et al., 2013; Sarkis and Talluri, 2002), service du cloud (Jatoth et al., 2019), dans le domaine de la santé (Khan et al., 2022), etc. Cependant, le choix de la méthode dépend du contexte, des données disponibles et des préférences des décideurs. Dans ce chapitre, nous explorerons les principales méthodologies de l'analyse multicritère, en les comparant et en soulignant leurs avantages et inconvénients.

2.1 Définition de l'aide multicritère à la décision

Maystre et al. (1994) ont défini l'aide multicritère à la décision (MCDA) comme étant une analyse qui cherche à rendre explicite une famille de critères permettant de comprendre les nombreuses conséquences d'une option. Keeney (1982) ajoute que l'aide multicritère à la décision peut être définie comme la formalisation du bon sens à des problèmes trop difficiles à appliquer de manière informelle. De son côté, Roy (1993) considèrent que le décideur est la poutre maîtresse de la décision, et qu'il est doté de pleins pouvoirs, agissant en vertu d'un système de préférences rationnel au sens d'un certain corps d'axiomes excluant l'ambiguïté et l'incomparabilité, que l'aide à la décision n'a pas pour objet

de modifier.

Selon [Vincke \(1992\)](#), l'objectif principal de la MCDA est de créer des outils pour aider à résoudre les problèmes de décision impliquant des critères contradictoires et incommensurables. La méthodologie MCDA vise à développer des procédures d'agrégation des critères pour construire des modèles d'aide à la décision qui prennent en compte les systèmes de préférences et les points de vue des décideurs. Bien que ces processus sophistiqués ne conduisent pas toujours à la solution décisionnelle optimale, ils peuvent conduire à une solution satisfaisante qui répond au mieux aux intentions du décideur.

2.2 Typologie des approches multicritère d'aide à la décision

L'ensemble des approches d'aide multicritère à la décision est constitué de deux familles que l'on peut distinguer selon que l'ensemble des solutions est défini implicitement ou explicitement au préalable du processus :

- ▷ **Aide à la décision multi-objectif** : Les techniques d'aide à la décision multi-objectif (Multi-objective decision making MODM) sont utilisées pour résoudre des problèmes où un grand nombre d'actions sont implicitement définies par des contraintes naturelles et/ou artificielles sur les attributs descriptifs de ces actions. Dans ce contexte, l'objectif est de trouver des solutions qui soient satisfaisantes sur l'ensemble des objectifs considérés, sans qu'il soit nécessairement possible d'atteindre les valeurs optimales pour chacun d'entre eux en même temps. Pour résoudre ces problèmes, plusieurs méthodes multi-objectif ont été développées, telles que l'analyse de Pareto, l'optimisation multi-objectif, la programmation linéaire multicritère, et d'autres. Ces méthodes peuvent aider les décideurs à identifier les solutions possibles et à explorer l'espace de décision, tout en prenant en compte les multiples objectifs ou critères. Par ailleurs, ces méthodes requièrent pour la plupart des informations sur les préférences du décideur.

- ▷ **Aide à la décision multi-attribut** : À l'inverse des méthodes MODM, les systèmes d'aide à la décision multi-attribut (Multi-Attribute Decision Making MADM) ne s'intéressent pas à la recherche de solutions. Ils visent plutôt à agréger les préférences du décideur de manière explicite et transparente pour sélectionner la meilleure solution. Leur processus démarre sur un ensemble fini de bonnes solutions (non dominées) qui se distinguent par leurs performances. Cependant, il devient essentiel de fournir des informations supplémentaires de la part du décideur pour le mécanisme d'agrégation, car à ce stade, la relation de dominance n'est plus pertinente, puisque toutes les solutions proposées sont non dominées. De ce fait, la sélection de la meilleure solution repose essentiellement sur le choix d'un bon mécanisme d'agrégation.

TABLE 2.1 : Caractéristiques du contexte MADM et MODM

	MADM	MODM
Critère (souvent défini par)	Attribut	Objectif
Alternatives	nombre fini définies explicitement	nombre infini , continues, définies implicitement
Contraintes	inactive (incorporées dans les attributs)	actives
Interaction du décideur	pas beaucoup	principalement
Usage	sélection/ évaluation	conception

2.3 L'optimisation multi-objectif comme méthode de MODM

Il existe plusieurs méthodes d'aide à la décision multi-objectif, qui facilitent le processus de choix en présence de plusieurs objectifs contradictoires. Une méthode d'optimisation multi-objectif (MOP) s'inscrit dans le cadre de l'aide à la décision multicritère comme étant un outil de recherche d'un ensemble de solutions optimales réalisant un compromis entre les différents objectifs. Ce même ensemble sera soumis à la fin du processus au décideur pour choisir celle qui convient le mieux à ses préférences.

La section suivante présente quelques méthodes d'optimisation multi-objectif sans prétendre à l'exhaustivité. Pour plus de détails sur le sujet, nous recommandons au lecteur intéressé de se référer à la littérature spécialisée (voir e.g., (Ehrgott, 2005; Charnes et al., 1955; Méndez et al., 2009)).

2.3.1 Problème d'optimisation multi-objectif

Un problème d'optimisation multi-objectif consiste à optimiser simultanément plusieurs fonctions objectifs et chercher une ou plusieurs solutions. Ce qu'on peut formaliser par la donnée de m critères contradictoires où chaque critère est défini pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ par une fonction objectif $C_j : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas d'un problème de minimisation on a :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser} & : F(x) = (C_1(x), \dots, C_m(x))^T \\ \text{s.t.} & g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (2.1)$$

où x est un vecteur de décision de $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^m$ et p est le nombre de contraintes données par $g_j(x)$. On note $\mathbf{X} = \{x, |g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, p\}$ **l'espace réalisable des actions** et $\mathcal{C} = \{C(x) | x \in \mathbf{X}\}$ **l'espace réalisable des critères**. Les problèmes d'optimisation multi-objectifs formulés comme le problème (P) ne possèdent généralement pas de solution unique, mais plutôt un ensemble de solutions qui sont toutes également bonnes. Ces solutions sont appelées des solutions non-dominées,

efficaces, non-inférieures ou Pareto-optimales, ces termes étant généralement considérés comme synonymes dans la littérature de la prise de décision multicritère (MCDM). Le processus de résolution d'un problème (P) nécessite une certaine contribution du décideur, sous forme d'informations de préférences. En général, on suppose que le décideur connaît le problème considéré et peut fournir des informations de préférences par rapport aux objectifs et/ou aux différentes actions (alternatives). En plus du décideur, nous avons généralement besoin d'un analyste pour résoudre un problème d'optimisation multi-objectif. Un analyste est une personne ou un programme informatique responsable de la modélisation mathématique et des aspects informatiques du processus de résolution.

2.3.2 Relation de dominance de Pareto

Les problèmes d'optimisation multicritère sont centrés sur la comparaison de vecteurs représentant les performances des alternatives. Cette comparaison est fondée sur une relation de dominance. Dans la littérature on retrouve plusieurs relations de dominance, mais la dominance au sens de Pareto demeure la plus célèbre et la plus largement utilisée. En outre, elle est la seule relation de préférence naturelle que l'on puisse construire sur un ensemble d'alternatives sans ajouter d'informations préférentielles à la description du problème. En d'autres termes, la relation de dominance au sens de Pareto est une relation de préférence qui peut être définie sans faire appel à des informations sur les préférences du décideur autres que celles qui sont déjà impliquées dans la description des alternatives elles-mêmes. Cela la rend particulièrement utile dans les problèmes où les préférences du décideur ne sont pas clairement définies ou ne peuvent pas être facilement mesurées.

Dans ce qui suit, considérons deux alternatives A' et A'' dont les performances sont données respectivement par (A'_1, \dots, A'_m) et (A''_1, \dots, A''_m) .

Définition 2.3.1. (Dominance faible de Pareto)

Soient A', A'' deux solutions réalisables de \mathbf{X} . La dominance faible de Pareto entre A' et A'' est définie par :

$$A' \succsim_p A'' \Leftrightarrow [\forall j \in \{1, \dots, m\}, A'_j \geq A''_j]. \quad (2.2)$$

La relation « \succsim_p » signifie que A' est au moins aussi bonne que A'' sur tous les critères.

Définition 2.3.2. (Dominance de Pareto)

Soient A', A'' deux solutions réalisables de \mathbf{X} . La relation de dominance de Pareto sur \mathbf{X} , est définie pour par :

$$A' \succ_p A'' \Leftrightarrow \begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, m\}, A'_j \geq A''_j \\ \text{et} \\ \exists k \in \{1, \dots, m\}, A'_k > A''_k \end{cases} \quad (2.3)$$

La relation $A' \succ_p A''$ signifie que A' est au moins aussi bonne que A'' sur tous les critères, tout en étant strictement meilleure sur au moins un critère. Si A' est meilleure que A'' sur tous les critères,

alors on dit que A' domine fortement A'' . Il faut également noter que la dominance de Pareto induit un ordre partiel sur l'ensemble des alternatives \mathbf{X} (relation binaire asymétrique et transitive)⁵ et laisse donc de nombreuses paires de solutions incomparables.

Remarque 2. Dans l'espace des critères \mathcal{C} le point $C(A') = (A'_1, \dots, A'_m)$ domine le point $C(A'') = (A''_1, \dots, A''_m)$ au sens de Pareto (dans le cas d'une minimisation) si et seulement si :

$$A'_j \leq A''_j, \forall j \in \{1, \dots, m\} \text{ et } \exists k \in \{1, \dots, m\}, A'_k < A''_k.$$

Définition 2.3.3. (Optimalité de Pareto)

Une solution $\hat{A} \in \mathbf{X}$ est Pareto-optimale (efficace, non-dominée, non-inférieure) si et seulement s'il n'existe pas une solution $A' \in \mathbf{X}$ telle que A' domine \hat{A} . L'ensemble des solutions Pareto-optimales forment la frontière de Pareto ND_P , définie par :

$$ND_P = \{\hat{A} \in \mathbf{X} \mid \nexists A' \in \mathbf{X}, A' \succ_P \hat{A}\}.$$

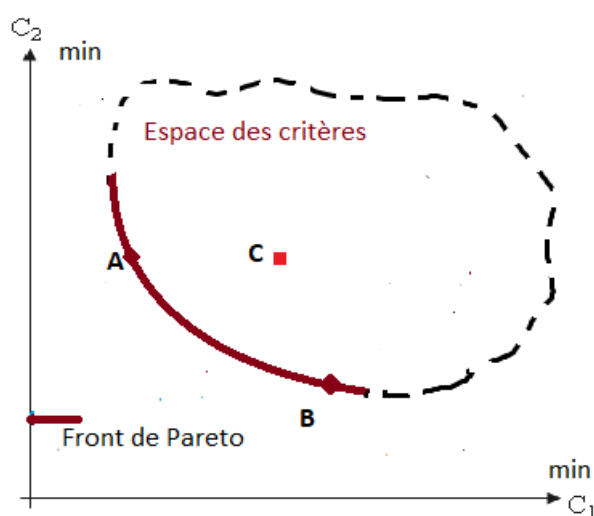


FIGURE 2.1 : Illustration de l'optimalité de Pareto et front de Pareto

La définition de l'optimalité de Pareto stipule que \hat{A} est optimale au sens de Pareto s'il n'existe pas de solution réalisable qui améliorerait un certain objectif sans entraîner une détérioration simultanée d'au moins un autre critère (objectif). Le front de Pareto est l'ensemble défini sur l'espace réalisable des critères par :

$$P^* = \{C(\hat{A}) \mid \hat{A} \in ND_P\}.$$

Le front de paréto est constitué de tous les points $C(\hat{A})$ qui dominent tous les autres points mais ne se dominant pas entre eux. (voir Figure 2.1) c'est donc des solutions non-dominées .

⁵voir Annexe A, Définition A.1.2

Conformément à la Figure 2.1, l'option C est dominée par les options A et B qui sont situées sur le front de Pareto mais qui sont incomparables au sens de la dominance en question.

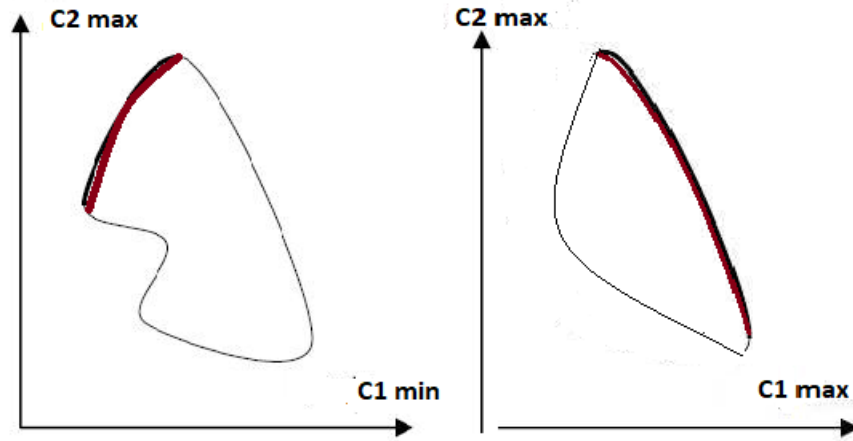


FIGURE 2.2 : Front de Pareto d'un problème à deux critères

La Figure 2.2 montre le front de Pareto pour les deux situations (minimisation ou maximisation) envisageables pour un problème à deux critères. Notons que, le front de Pareto de chaque cas est représenté par la partie en gras de l'ensemble.

Il faut noter que l'on peut distinguer deux types de solutions Pareto-optimales : les solutions supportées et les non-supportées. Les premières ce sont celles qui se situent sur l'enveloppe convexe⁷ de l'ensemble des solutions de l'espace des critères, et on peut les retrouver par optimisation d'une agrégation linéaire des critères, telle que la somme pondérée (Geoffrion, 1968). Quant aux solutions non-supportées sont des solutions non-dominées mais qui n'appartiennent pas à l'enveloppe convexe.

2.3.3 Points caractéristiques dans l'espace des critères

Dans le but de choisir la meilleure option, le décideur se place sur l'espace des critères pour pouvoir établir les comparaisons dont il a besoin pour construire sa conclusion, il se fait aider par certains points de référence que nous présentons ci-après.

Définition 2.3.4. (Point idéal et anti idéal)

▷ Le point idéal est un point de l'espace des critères, de coordonnées $(A_1^*, \dots, A_m^*) \in \mathbb{R}^m$, tel que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ on a :

$$A_j^* = \begin{cases} \max_{\mathbf{x}} C_j(x) & \text{si le critère } C_j \text{ est à maximiser} \\ \min_{\mathbf{x}} C_j(x) & \text{si le critère } C_j \text{ est à minimiser} \end{cases} \quad (2.4)$$

⁷voir Annexe A, Définition A.2.1

▷ Le point anti-idéal est un point de l'espace des critères, de coordonnées $(A_1^-, \dots, A_m^-) \in \mathbb{R}^m$, tel que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ on a :

$$A_j^- = \begin{cases} \min_{\mathbf{X}} C_j(x) & \text{si le critère } C_j \text{ est à maximiser} \\ \max_{\mathbf{X}} C_j(x) & \text{si le critère } C_j \text{ est à minimiser} \end{cases} \quad (2.5)$$

Définition 2.3.5. (Point Nadir)

Dans le cas d'un problème de maximisation, le point Nadir définit la borne inférieure dans l'espace des critères, que les points représentant les solutions non-dominées peuvent atteindre. Analytiquement pour un problème de minimisation, ce point est représenté par :

$$Z_k^{Nadir} = \max_{x \in ND_P} (C_k(x)), \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.6)$$

Il convient de noter que ces points caractéristiques représentent des solutions utopiques, définis comme des points de référence dans les méthodes de la programmation du compromis basées sur des mesures de distance comme nous allons le voir par la suite.

2.4 Techniques d'optimisation multi-objectif

Dans un contexte d'aide à la décision multi-objectif, il existe deux étapes importantes qui sont : la recherche des solutions efficaces (dites Pareto optimales), puis vient l'étape de sélection où le décideur en s'appuyant sur des méthodes d'aide à la décision, va pouvoir enfin prendre sa décision et sélectionner la solution qui convient le mieux à ces préférences. Dans cette section nous présentons quelques approches et techniques de résolution d'un problème d'optimisation multicritère défini comme (P) donné par (2.1). Les approches de résolution des problèmes multi-objectif peuvent être réparties en quatre importantes classes selon l'implémentation des préférences du décideur (Branke et al., 2008). Ainsi nous avons :

- ▷ Les méthodes avec implémentation des préférences à priori.
- ▷ Les méthodes avec implémentation des préférences à posteriori.
- ▷ Les méthodes sans implémentation des préférences.
- ▷ les méthodes interactive pour l'implémentation des préférences.

2.4.1 Les méthodes avec implémentation des préférences à priori

L'ensemble de ces méthodes est constitué des méthodes dites agrégées qui transforment le problème multi-objectif en un problème mono-objectif. Avant d'entamer le processus de résolution, le

décideur doit fournir des informations sur ses préférences, ses aspirations et ses opinions concernant les alternatives, ainsi que l'importance des critères, etc.

2.4.1.1 Méthode de Keeney-Raiffa

La méthode de Keeney-Raiffa est une méthode particulière de la théorie de l'utilité multi-attribut (MAUT) (Fishburn, 1974; Keeney, 1976). Elle vise à agréger les préférences du décideur à partir de plusieurs critères en utilisant une fonction d'utilité. Cette fonction d'utilité combine les évaluations partielles de chaque critère pour produire une évaluation globale de chaque alternative. Le problème à résoudre est alors le suivant

$$\begin{cases} \min U(C(x)), \\ x \in \mathbf{X}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Remarquons que cette méthode est utilisée dans l'approche d'agrégation multicritère « agréger puis comparer ». Notons également, que la fonction U possède plusieurs variantes, comme par exemple

$$U(x) = K \prod_{j=1}^m (k_j u_j(C_j(x)) + 1),$$

où k et K sont des constantes et u_j sont des fonctions unidimensionnelles et strictement croissantes.

2.4.1.2 Méthode lexicographique

Dans la méthode lexicographique (Fishburn, 1974), on optimise les fonctions objectifs de manière séquentielle selon un ordre prédéterminé. Au préalable, on demande au décideur de classer les critères selon leur importance. Ainsi, on note C_1 le critère le plus important et C_m le moins prioritaire parmi les m critères. L'étape suivante de cette méthode consiste à optimiser les objectifs dans l'ordre de leur classement par priorité pour obtenir l'optimum. Ainsi, le premier problème à résoudre est :

$$\text{Étape 1} \begin{cases} \min C_1(x) \\ x \in \mathbf{X} \end{cases}$$

Ensuite, on transforme la première fonction objectif en contrainte d'égalité puis on prend la seconde fonction objectif et on résout le problème suivant :

$$\text{Étape 2} \begin{cases} \min C_2(x) \\ C_1(x) = C_1(x^*) \\ x \in \mathbf{X} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainsi de suite, l'étape i de cette méthode est donnée comme suit :

$$\text{Étape } i \left\{ \begin{array}{l} \min C_i(x) \\ x \in \mathbf{X} \\ C_1(x) = C_1(x^*) \\ C_2(x) = C_2(x_2^*) \\ \vdots \\ C_{i-1}(x) = C_{i-1}(x_{i-1}^*) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Le processus de résolution est décrit dans l'algorithme 1.

Algorithme 1 : Méthode lexicographique

Input : Un ensemble de m fonctions objectifs C_1, \dots, C_m

Output : L'ensemble des solutions Pareto-optimales

Function ParetoOptimal (C_1, \dots, C_m) :

```

    S ← ensemble de toutes les solutions réalisables ; F ← ∅ // ensemble des solutions
    Pareto-optimales
    i ← 1 ; while S n'est pas vide do
        F' ← ∅ // ensemble des solutions Pareto-optimales pour la
        fonction objectif i
        for s ∈ S do
            if s est Pareto-optimal par rapport à F ∪ F' pour C1, ..., Ci-1 then
                Ajouter s à F' ;
            Ajouter toutes les solutions de F' à F ; Mettre à jour S en enlevant toutes les solutions
            dominées par les solutions de F' ; i ← i + 1 ;
    return F ;

```

À chaque étape i , on cherche à minimiser la i -ème fonction objectif C_i sur l'ensemble des contraintes \mathbf{X} , tout en respectant les conditions que les fonctions objectifs C_1, \dots, C_{i-1} soient égales à leurs valeurs optimales respectives $C_1(x^1), \dots, C_{i-1}(x^{i-1})$, où x^1, \dots, x^{i-1} sont les solutions optimales pour les fonctions objectifs C_1, \dots, C_{i-1} . L'algorithme lexicographique itère à travers les fonctions objectifs dans l'ordre C_1, \dots, C_m et trouve la solution optimale pour chaque fonction objectif tout en satisfaisant les conditions précédentes. Cette approche permet de générer des solutions Pareto-optimales en ordre lexicographique, c'est-à-dire que les solutions sont triées en fonction de leur score dans l'ordre lexicographique.

2.4.1.3 Méthode du but programmé (goal programming)

Conçue par [Charnes et al. \(1955\)](#), cette méthode consiste à demander au décideur d'attribuer des niveaux d'aspiration z_j pour chaque fonction objectif C_j avec $j = 1, \dots, m$. Ensuite, on calcule la

déviations de chaque fonction objectif, notée δ_j^+ pour la déviation supérieure et δ_j^- pour la déviation inférieure. Ces variables de déviations doivent vérifier les contraintes suivantes : $\delta_j^+ \geq 0$ et $\delta_j^- \geq 0$, avec $\delta_j^+ \cdot \delta_j^- = 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$. De cette manière, le problème d'optimisation peut être formulé en fonction de l'approche choisie pour se rapprocher des objectifs, par valeurs supérieures ou inférieures. Dans notre cas, nous avons choisi d'approcher les objectifs par des valeurs supérieures, ce qui donne le problème suivant :

$$(P_\delta^+) \left\{ \begin{array}{l} \min(\delta_1^+, \dots, \delta_m^+) \\ \text{avec } C_1(x) = z_1 + \delta_1^+ \\ \quad \vdots \\ C_m(x) = z_m + \delta_m^+ \\ x \in \mathbf{X} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

L'algorithme de cette procédure est le suivant :

Algorithme 2 : Méthode Goal Programming

Entrées : m objectifs à atteindre et leurs poids respectifs $w_j, j = 1, \dots, m$, les niveaux d'aspiration z_j et des bornes supérieures et inférieures pour chaque objectif δ_j^- et δ_j^+ , ainsi qu'un ensemble de contraintes pour les variables de décision.

Sorties : Solution optimale pour les objectifs spécifiés

Initialiser les valeurs z_j pour chaque objectif j en utilisant les bornes supérieures et inférieures correspondantes δ_j^- et δ_j^+ ;

while Au moins un objectif n'est pas atteint **do**

Choisir un objectif j non atteint; **if** L'objectif j est un objectif de minimisation **then**

Trouver la plus petite valeur de $C_j(x)$ qui satisfait toutes les contraintes et définir $z_j = C_j(x)$;

else

Trouver la plus grande valeur de $C_j(x)$ qui satisfait toutes les contraintes et définir $z_j = C_j(x)$;

Mettre à jour les poids w_j en fonction de l'objectif atteint, c'est-à-dire mettre $w_j = 0$ pour $j \neq i$ et

$w_i = 1$;

Trouver une solution efficace en résolvant le problème d'optimisation multi-objectif pondéré suivant :

$$\min \sum_{j=1}^m w_j (C_j(x) - z_j)^2 \quad \text{sous contraintes } x \in \mathbf{X}$$

où w_j sont les poids mis à jour et z_j sont les niveaux d'aspiration finaux pour chaque objectif;

Retourner la solution efficace obtenue;

La méthode Goal Programming possède effectivement plusieurs variantes, telles que la méthode lexicographique combinée avec le goal programming pour donner la méthode « Lexicographic goal

programming », ou encore la méthode « min-max goal programming », etc. Quant à l'efficacité de la méthode goal programming, elle dépend effectivement des niveaux d'aspiration z_j pour chaque objectif, car cette méthode exige que le décideur communique des informations assez détaillées et claires sur ses niveaux d'aspiration, ses préférences de priorité, et l'importance des critères. Cependant, il peut être difficile pour le décideur de déterminer ces niveaux d'aspiration de manière précise. De plus, l'optimalité de la solution dépend de la méthode utilisée pour optimiser le problème (P_δ^+), et la solution obtenue peut ne pas être la solution efficace en termes des critères de performance.

2.4.2 Les méthodes sans implémentation des préférences

Dans les méthodes non préférentielles, l'opinion du décideur n'est pas prise en compte dans le processus de résolution. Le problème est donc résolu à l'aide d'un certain nombre de méthodes relativement simples. L'idée est de trouver une solution de compromis qui se situe généralement "au milieu" de l'ensemble optimal de Pareto parce qu'aucune information optimale n'est disponible pour mener autrement le processus de résolution (Branke et al., 2008). Ces méthodes conviennent aux situations dans lesquelles un décideur n'est pas disponible ou n'a pas d'attentes particulières en matière de solutions (équivalentes et indifférentes). Ces méthodes peuvent également être utilisées pour créer un point de départ pour les méthodes interactives ⁶.

2.4.2.1 Méthode du critère global (Method of Global Criterion)

La méthode du critère global, appelée aussi programmation du compromis (compromise programming) (Yu, 1973; Zeleny, 1973), transforme le problème multi-objectif (P) dans (2.1), en un problème mono-critère où l'on cherche à minimiser l'écart relatif par rapport à un point de référence A^* fixé par le décideur. Nous pouvons, par exemple, pour mesurer la distance au vecteur cible idéal ou utopique A^* , utiliser la métrique Minkowski L_q ou la métrique de Chebyshev (également appelée métrique L_∞). Nous devons ensuite, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^m |A_j^* - C_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, & q \geq 1, \\ x \in \mathbf{X} \end{cases} \quad (2.11)$$

où les $A_j^*, \forall j \in 1, \dots, m$ sont les composantes du point représentant le but A^* .

Conformément à Miettinen (1999), cette méthode procure une solution qui est faiblement Pareto optimale. Elle est Pareto optimale uniquement si, c'est une solution unique. De plus, le choix de la métrique de distance affecte la solution obtenue. Précisons également que si les fonctions objectifs ont des amplitudes différentes, il est nécessaire de les ramener à une échelle uniforme sans dimension afin de garantir un bon fonctionnement de la méthode. Remarquons que ce type d'approche s'appuie

⁶Pour plus de détails voir (Marler and Arora, 2004)

essentiellement sur le choix judicieux du point de référence.

2.4.2.2 Solution de compromis neutre (Neutral compromise solution)

Une autre façon simple de trouver une solution sans l'intervention du décideur à été proposée par [Wierzbicki \(1999\)](#), appelée "solution neutre de compromis". On peut obtenir une solution de compromis neutre en résolvant le problème (P) transformé de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \max_{0 \leq j \leq m} \left[\frac{C_j(x) - \left(\frac{A_j^* + A_j^{**}}{2}\right)}{A^{nad} - A_j^{**}} \right], \\ x \in \mathbf{X}. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où $A_j^{**} = A_j^* - \varepsilon$ tel que $\varepsilon > 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$ et A^{nad} est le point nadir. Nous générons alors une solution de compromis neutre mais faiblement Pareto optimale.

2.4.3 Méthodes avec implémentation des préférences à postériori

Ces techniques sont aussi désignées par : *Méthodes Pareto*. Dans ces approches, l'intervention du décideur se fait postérieurement au processus de résolution. En effet, il est parfois difficile pour le décideur de donner une estimation claire de ses préférences avant même de commencer le processus d'optimisation. Dans ce cas, on recherche d'abord un ensemble de solutions optimales candidates au sens de Pareto, et de le présenter au décideur, qui choisira la plus satisfaisante d'entre elles comme solution finale. L'inconvénient ici est que le processus de génération est souvent coûteux en calcul. Le problème devient plus complexe avec un plus grand nombre d'objectifs. L'avantage est que les solutions produites par ces méthodes sont indépendantes des points de vue du décideur et restent valables même si les points de vue changent. Il n'est pas nécessaire de redémarrer le processus de résolution pour choisir une autre solution.

2.4.3.1 Méthode de la somme pondérée (weighthed sum method WSM)

C'est l'une des approches scalaires les plus utilisées, appelée aussi « agrégation par pondération » ([Gass and Saaty, 1955](#); [Zadeh, 1963](#)). Elle consiste à transformer un problème multi-objectif en un problème qui combine les différentes fonctions objectifs en une seule fonction. Ainsi on cherche les solutions du problème d'optimisation noté (P_λ) :

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j(x) \\ x \in \mathbf{X} \\ \lambda_j > 0, \forall j = 1, 2, \dots, m \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_j = 1. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Algorithme 3 : Algorithme de la méthode de la somme pondérée (WSM)

Input : Méthode de la somme pondérée (WSM)

Data : Les m fonctions objectif $C_1(x), C_2(x), \dots, C_m(x)$, le vecteur de pondération $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ tels que $\lambda_j > 0$ pour tout j et $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ et l'ensemble des contraintes \mathbf{X}

Result : La solution optimale de l'ensemble P_λ

Initialiser la solution optimale x^* ; **while** La condition d'arrêt n'est pas satisfaite **do**

 Générer une solution $x \in \mathbf{X}$; Calculer la fonction objectif globale $F(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j(x)$; **if**

 | $F(x) < F(x^*)$ **then**

 | Mettre à jour la solution optimale $x^* = x$;

end

end

Renvoyer la solution optimale x^* ;

Théorème 2.4.1. (i) Si la solution optimale du problème (P_λ) est unique, alors elle est efficace pour le problème d'optimisation (P) dans (2.1).

(ii) La solution optimale du problème (P_λ) est efficace pour le problème (P) si $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, m$.

Cette approche est simple à mettre en œuvre. De plus, les solutions identifiées sont nécessairement des solutions non dominées, à condition que les poids de toutes les fonctions objectifs soient positifs. Enfin, pour les problèmes de minimisation où le support du front de Pareto est convexe, cela assure la possibilité d'identifier des solutions efficaces sur tout le front (Deb, 2001), mais la pondération nécessite d'établir une certaine forme d'équivalence (entièrement compensatoire) entre des critères de décision contradictoires, ce qui signifie qu'il est difficile de trouver des poids de pondération qui reflètent l'importance relative des critères de manière satisfaisante. De plus, la méthode de somme pondérée peut rencontrer des difficultés lorsque l'espace réalisable des critères n'est pas convexe. Dans ce cas, le front de Pareto peut comporter des zones non convexes, où il est difficile de trouver des solutions efficaces en utilisant la pondération des critères.

2.4.3.2 La méthode de la contrainte- ϵ

Proposée par Haimes (1971), la méthode de la contrainte- ϵ est probablement la technique la plus connue pour la simplicité de son énoncé. Dans cette méthode il n'y a pas d'agrégation de critères, mais un seul des objectifs initiaux du problème (P) (tel qu'il est défini dans (2.1)) est choisi par le décideur, puis optimisé, tandis que les autres sont transformés en contraintes. Pour chaque vecteur de contraintes considéré, la méthode de la contrainte- ϵ permet d'identifier une seule solution efficace, car elle doit être effectuée avec différents niveaux de contraintes pour décrire l'étendue de la surface

du compromis. A cet effet, le problème d'optimisation multicritère est formulé comme suit :

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \min C_l(x) \\ C_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad j \neq l, \\ x \in \mathbf{X} \end{cases} \quad (2.14)$$

La résolution de ce problème est décrite dans Algorithme 4

Algorithme 4 : Méthode de la contrainte $-\varepsilon$

Input : Fonctions objectifs $C_1(x), \dots, C_m(x)$, espace de décision \mathbf{X} , seuils de contrainte $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$

Output : Ensemble Pareto optimal P_ε

Initialiser l'ensemble des solutions candidates $P_\varepsilon = \emptyset$; **for** $l = 1$ **to** m **do**

Trouver l'ensemble de solutions qui satisfont les contraintes pour l'objectif C_l , c'est-à-dire

$S_l = \{x \in \mathbf{X} : C_l(x) \leq \varepsilon_l\}$; **for** $x \in S_l$ **do**

if $\forall j \neq l, C_j(x) \leq \varepsilon_j$ **then**

Ajouter x à l'ensemble candidat P_ε ;

end

end

end

return P_ε

Proposition 2.4.1. *Soit x^* une solution optimale de (P_ε) pour quelques valeurs de j . Alors x^* est faiblement efficace pour (P) .*

Proposition 2.4.2. *Soit x^* l'unique solution optimale de (P_ε) pour quelques valeurs de j . Alors x^* est fortement efficace pour (P) .*

En d'autres termes, si x^* est la seule solution optimale de (P_ε) pour un sous-ensemble de critères donné, alors elle est fortement efficace pour l'ensemble complet des critères du problème (P) . Autrement dit, x^* est une solution qui est non dominée pour tous les critères du problème (P) .

Théorème 2.4.2. *Une solution réalisable $x^* \in \mathbf{X}$ est efficace pour (P) si et seulement si il existe un $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^m$ telle que x^* est une solution optimale de $(P_{\hat{\varepsilon}})$ pour tout $j = 1, \dots, m$*

Dans le but de décrire globalement la surface du compromis sur son étendue, il est nécessaire de choisir judicieusement les valeurs des contraintes ε_j , $j = 1, \dots, m$ et $j \neq l$, ce qui nécessite une bonne connaissance a priori du problème. Contrairement à la méthode de pondération, cette approche n'est pas sensible à la convexité du front de Pareto.

Le théorème (Chankong and Haimes, 2008) suivant montre le lien entre la méthode de la contrainte $-\varepsilon$ et celle de la somme pondérée.

Théorème 2.4.3. (i) Supposons que x^* est une solution optimale du problème (P_λ) dans (2.13). Si $\lambda_j \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^m$ telle que x^* est aussi une solution optimale du problème $(P_{\hat{\varepsilon}})$.

(ii) Supposons que \mathbf{X} est convexe et les $C_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes. Si x^* est optimale pour (P_ε) pour quelques valeurs de j , alors il existe $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ telle que x^* est optimale pour $(P_{\hat{\lambda}})$.

2.4.3.3 Méthode de la métrique pondérée

L'idée de base de cette méthode est de choisir une mesure de distance (ou une norme) définie sur l'espace des critères \mathbb{R}^m afin de minimiser l'écart (déviation) existant entre les valeurs des fonctions objectifs et les valeurs d'un point de référence ou point idéal. Cette méthode est communément connue sous le nom de *programmation de compromis* (Zeleny, 1973). Selon Miettinen (1999), cette procédure dépend essentiellement de la norme utilisée. En considérant certaines propriétés importantes des normes, il est possible de retrouver quelques caractéristiques des solutions retrouvées grâce à cette méthode.

Théorème 2.4.4. (i) Une norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite monotone, si $\|y^1\| \leq \|y^2\|$ est vérifiée pour tous y^1 et y^2 de \mathbb{R}^m tels que $|y_j^1| \leq |y_j^2|$, pour $j = 1, \dots, m$.

(ii) Une norme $\|\cdot\|$ est dite strictement monotone, si $\|y^1\| < \|y^2\|$ est vérifiée pour $|y_k^1| \leq |y_k^2|$, $k = 1, \dots, m$ et $|y_j^1| \neq |y_j^2|$ pour quelques valeurs de j .

Supposons qu'un problème d'optimisation est associé aux pondérations $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$ et une norme L_q . Alors, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^m \lambda_j |C_j(x) - A_j^*(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, & q \geq 1 \\ x \in \mathbf{X} \end{cases} \quad (2.15)$$

où les A_j^* , $\forall j \in 1, \dots, m$ sont les composantes du point représentant le point idéal A^* .

Algorithme 5 : Méthode métrique pondérée

Input : $A_j^*(x)$: la meilleure valeur de la fonction objectif C_j en x pour $j = 1, \dots, m$, λ_j : les poids associés à chaque fonction objectif pour $j = 1, \dots, m$, q : un entier supérieur ou égal à 1, \mathbf{X} : l'ensemble des solutions réalisables

Output : La solution optimale x^*

Étape 1 : Calculer la valeur de la métrique pondérée pour chaque critère C_j : **for** $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

 | $W_j(x) \leftarrow \lambda_j |C_j(x) - A_j^*(x)|^q$

Étape 2 : Calculer la distance pondérée pour chaque solution $x \in \mathbf{X}$: **for** $x \in \mathbf{X}$ **do**

 | $D(x) \leftarrow (\sum_{j=1}^m W_j(x))^{\frac{1}{q}}$

Étape 3 : Trouver la solution optimale x^* qui minimise la distance pondérée $D(x)$:

$x^* \leftarrow \arg \min_{x \in \mathbf{X}} D(x)$

Théoreme 2.4.5.

Une solution x^* est optimale pour le problème (2.15) avec $p < +\infty$ est efficace si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) x^* est l'unique solution optimale du problème (2.15).

(ii) $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1 \dots, m$.

2.4.4 Méthodes interactives pour l'implémentation des préférences

Les méthodes interactives d'optimisation appelées aussi méthodes progressives sont fondées sur l'étroite collaboration entre le décideur et l'analyste. Ces méthodes sont particulièrement utiles lorsque le décideur a du mal à exprimer clairement ses opinions et préférences au début du processus de résolution. Dans ces circonstances, l'analyste peut aider le décideur à introduire progressivement des informations sur ses préférences relatives aux objectifs ou aux alternatives tout au long du processus, jusqu'à ce que la solution la plus satisfaisante soit obtenue. Les méthodes les plus connues de cette classe d'approche sont la méthode STEM, aussi appelée STEP (Benayoun et al., 1971) et celle de Steuer et Choo (Steuer, 1986). L'ouvrage de Bouyssou et al. (2006a) décrit plus spécifiquement ces approches et bien d'autres.

Remarque 1. Dans la littérature, on retrouve trois principales approches qui peuvent être utilisées pour traiter les problèmes d'optimisation multi-objectif, notamment :

1. les méthodes agrégées (ou méthodes scalaires) consistent à ramener un problème multi-objectif à un problème mono-objectif en combinant les fonctions objectif en une seule fonction agrégée, telle que la méthode de la somme pondérée.

2. *Les méthodes non-Pareto traitent les objectifs séparément dans le processus d'optimisation et ne considèrent pas la relation de dominance entre les solutions candidates. Parmi les méthodes non-Pareto les plus utilisées, on peut citer la méthode lexicographique.*

3. *Les méthodes Pareto sont basées sur la relation de dominance et l'optimalité au sens de Pareto. Elles fournissent un ensemble de solutions de compromis qui ne peuvent pas être améliorées simultanément pour tous les objectifs. Les méthodes avec implémentation des préférences a posteriori susmentionnées, font partie des méthodes Pareto.*

2.5 Approches de l'aide multicritère à la décision

Il existe un réel débat jusqu'à présent sur la classification des méthodes d'aide multicritère à la décision. D'un point de vue du mécanisme d'évaluation des préférences du décideur, cela divise ces approches en deux familles : les méthodes du critère unique de synthèse et les méthodes de surclassement.

2.5.1 Méthode du critère unique de synthèse

Ces méthodes reposent sur une agrégation transitive complète des critères (ou attributs), qui permet d'éviter toute situation d'incomparabilité en combinant toutes les performances dans une seule fonction d'agrégation ou d'utilité. Cette fonction d'utilité, qui peut être une somme pondérée ou une fonction multi-attribut, permet de classer les alternatives de la meilleure à la moins bonne en préservant une structure de préférences transitives. Dans ce type de méthodes, il y a une certaine compensation entre les critères.

Parmi ces méthodes on retrouve principalement : MAUT (Théorie de l'Utilité Multi-Attribut), UTA (Utilités additives), AHP (Analytic Hierarchy Process), TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution), VIKOR (Optimisation multicritère et solution de compromis), GRA (Gray Relational Analysis), etc. Dans ce qui suit nous présenterons certaines de ces méthodes.

2.5.1.1 Méthode MAUT (Multiple Attribute Utility Theory)

La méthode MAUT a été introduite par [Keeney \(1976\)](#). Elle permet de trouver un compromis entre les différentes préférences du décideur. Elle peut être utilisée pour trouver une solution qui optimise les performances globales, tout en prenant en compte les fonctions d'utilité marginale pour chaque critère.

Algorithme 6 : Méthode MAUT dans MADAM

Entrée : Une matrice de décision : $D = [r_{ij}]$, un ensemble d'alternatives $\mathbf{A} = \{A_i, i = 1, \dots, p\}$ et w_1, \dots, w_m : les poids des critères

Sortie : Un classement des alternatives

for $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

if C_j est un critère de maximisation **then**

 Normaliser les données pour le critère j en utilisant la formule $\hat{r}_{ij} \leftarrow \frac{r_{ij} - \min_i r_{ij}}{\max_i r_{ij} - \min_i r_{ij}}$;

else

 Normaliser les données pour le critère C_j en utilisant la formule $\hat{r}_{ij} \leftarrow \frac{\max_i r_{ij} - r_{ij}}{\max_i r_{ij} - \min_i r_{ij}}$;

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

 Calculer la valeur de l'alternative i en utilisant la formule $U_i = \sum_{j=1}^m w_j u_j(\hat{r}_{ij})$;

Classer les alternatives en fonction de leur valeur U_i décroissante;

Pour la fonction d'utilité marginale notée $u_j(\hat{r}_{ij})$ (Keeney, 1976) de chaque critère est donnée par :

$$u_j(\hat{r}_{ij}) = \frac{\exp \hat{r}_{ij}^2 - 1}{1.71}.$$

2.5.1.2 Méthode de la somme pondérée (Weighted Sum Method (WSM))

La méthode de la somme pondérée (ou Weighted Sum Method) est considérée comme l'une des méthodes les plus simples pour aborder un problème MADM. Elle permet d'évaluer plusieurs alternatives en fonction de plusieurs critères. La première utilisation de WSM remonte à (Churchman and Ackoff, 1954) pour résoudre des problèmes de sélection d'investissements. Étant donné un ensemble d'alternatives $\mathbf{A} = \{A_i, i = 1, \dots, p\}$ et un ensemble de critères $\mathcal{C} = \{C_j, j = 1, \dots, m\}$. On note $D = [x_{ij}]$, la matrice des performances des alternatives A_i sur les critère C_j pour $i = 1 \dots, p; j = 1, \dots, m$. Le vecteur des poids des critères est donnée par : $\mathbf{w}^T = (w_1, \dots, w_m)$.

1 Normalisation : Cette étape consiste en la transformation de D en matrice de décision multicritère normalisée $\hat{D} = [\hat{r}_{ij}]_{i,j}$ tels que

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p x_{ij}^2}}, & i = 1 \dots, p; j = 1, \dots, m, \text{ si } C_j \text{ est un critère de bénéfice,} \\ 1 - \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p x_{ij}^2}}, & i = 1 \dots, p; j = 1, \dots, m, \text{ si } C_j \text{ est un critère de coût.} \end{cases} \quad (2.16)$$

2 Agrégation de la préférence des alternatives : L'alternative préférée, A^* , est choisie telle que :

$$A^* = \{A_i | \max_i \sum_{j=1}^m w_j r_{ij}\}. \text{ avec } \sum_j w_j = 1. \quad (2.17)$$

La méthode WSM utilise une approche compensatoire en sélectionnant l'alternative ayant la meilleure performance globale (2.17) sur l'ensemble des critères. Cette méthode peut permettre de compenser une faible performance sur un critère particulier par une forte performance sur d'autres critères. Toutefois, l'utilisation de cette méthode peut être problématique si les poids w_j ne sont pas correctement sélectionnés.

2.5.1.3 La méthode Analytic Hierachy Process AHP

La méthode AHP est l'une des méthodes d'aide à la décision multicritère compensatoire développée par Saaty (1980). Il s'agit d'une méthode flexible et simple qui est souvent utilisée pour comparer plusieurs alternatives. La méthode intègre les avis du décideur et ses évaluations, et décompose le problème de décision multicritère en un système hiérarchique, descendant couche par couche qui se fait en deux niveaux : le niveau de la hiérarchie et le niveau de l'évaluation. Au niveau de la hiérarchie, les critères et les alternatives sont organisés en une structure hiérarchique qui reflète les relations de subordination et de dépendance entre eux. Au niveau de l'évaluation, les critères et les alternatives sont évalués en utilisant une échelle de notation de 1 à 9 selon la Table 2.2, où 1 signifie que les deux éléments sont d'importance égale et 9 signifie que l'élément est beaucoup plus important que l'autre. Cette structure hiérarchique clarifie le problème et permet la contribution de chaque élément à la décision finale. La méthode AHP se déroule selon les étapes suivantes :

1. Décomposer le problème en une hiérarchie d'éléments inter-reliés. Au sommet de la hiérarchie, on trouve l'objectif, et dans les niveaux inférieurs, les éléments contribuant à atteindre cet objectif. Le dernier niveau est celui des actions.
2. Procéder à des comparaisons par paires des éléments de chaque niveau hiérarchique par rapport à un élément du niveau hiérarchique supérieur. Cette étape permet de construire des matrices de comparaisons. Les valeurs de ces matrices sont obtenues par la transformation des jugements en valeurs numériques selon l'échelle de comparaisons binaires) (Saaty, 2003) Considérons un ensemble d'alternative $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_p\}$ et un ensemble de critères $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$. Soit P la matrice de comparaison par paire, qui compare les alternatives logées au niveau racine de la structure hiérarchique par rapport à leur élément parent, disons le k -ème critère C_k donnée comme suit :

$$P = [P_{(i,j)}] \quad \text{où } P_{(i,i)} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, p,$$

P est une matrice carrée d'ordre p , tel que $P_{(i,j)}$ désigne la comparaison par paire de la i -ème

TABLE 2.2 : Échelle de Saaty de la méthode AHP

Degré d'importance	définition
1	Importance égale des deux éléments
3	Faible importance d'un élément par rapport à un autre
5	Importance forte d'un élément par rapport à un autre
7	Importance attestée d'un élément par rapport à un autre
9	Importance absolue d'un élément par rapport à un autre
2, 4, 6, 8	valeurs intermédiaires entre appréciations voisines

et j -ème alternative. Les matrices de comparaison par paires sont construites pour les m critères, avec $P_{(i,j)} = v_i/v_j$ où v_i et v_j sont les valeurs de préférence absolues des alternatives A_i et A_j , respectivement. Ces valeurs sont déterminées par le décideur en fonction de ses évaluations subjectives des alternatives sur chaque critère de la hiérarchie. La logique veut que toute matrice de comparaison par paire doit satisfaire la propriété connue sous le nom de propriété réciproque :

$$P_{(i,j)} = 1/P_{(j,i)} \quad i, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Cela permet de vérifier la cohérence des jugements du décideur, car les comparaisons doivent être cohérentes et transitives.

3. On normalise dans cette étape la matrice P , en utilisant la forme de normalisation suivante :

$$k_{(i,j)} = \frac{P_{(i,j)}}{\sum_{i=1}^p P_{(i,j)}},$$

ou bien par :

$$k_{(i,j)} = \frac{P_{(i,j)}}{\max_i P_{(i,j)}}.$$

Déterminer l'importance relative des éléments en calculant les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres maximales des matrices de comparaisons.

4. Vérifier la cohérence des jugements à travers l'indice de cohérence IC , et le ratio de cohérence RC tels que :

$$IC = \frac{\lambda_{max} - p}{p - 1}, \tag{2.18}$$

où λ_{max} est la valeur propre maximale correspondant à la matrice des comparaisons par paires et p est le nombre d'éléments comparés. On calcule le ratio de cohérence (RC) défini par :

$$RC = 100 \frac{IC}{ACI}, \quad (2.19)$$

où ACI est l'indice de cohérence moyen obtenu en générant aléatoirement des matrices de jugement de même taille (voir Table 2.3). Saaty (1980) a proposé un seuil égal à 0,1 (10%) en dessous duquel doit se situer le RC sous peine que les comparaisons par paires doivent être révisées pour réduire les incohérences.

TABLE 2.3 : Indice de cohérence moyen

Ordre de la matrice	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ACI	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	141	1.45	1.49	1.51

5. A ce stade le décideur doit agréger les valeurs calculées dans l'étape 3 avec l'équation suivante :

$$V_i = \sum_{j=1}^m w_j \cdot k_{(i,j)} \forall i = 1, \dots, p, \quad (2.20)$$

où V_i représente la valeur de préférence globale de la i -ème alternative réalisable.

6. Dans la dernière étape, Le décideur doit rechercher des signes d'incohérence dans le processus de prise de décision et obtenir la valeur propre principale de chaque matrice de comparaison par paire dans la structure hiérarchique du problème pour évaluer sa rationalité. Le décideur calcule l'indice de cohérence (2.18) et le ratio de cohérence (2.19) pour chaque matrice de comparaison par paire. Si la rationalité est bonne c'est à dire que $RC < 0.1$, le décideur peut faire confiance à la solution choisie. Sinon il doit effectuer des ajustements appropriés aux matrices avec des comparaisons anormales si la rationalité ne prévaut pas.

Comme nous l'avons constaté, La méthode AHP permet de mieux appréhender un problème MADM, grâce à la procédure de hiérarchisation et tente également de ce rapprocher le plus possible des préférences du décideur par l'utilisation d'échelles sémantiques. Toutefois, cette association d'une échelle numérique à une autre sémantique s'avère très restrictive comme conversion. En outre, les comparaisons par paires devient vite fastidieuses dès que l'on dépasse un certain nombre d'éléments à traiter.

2.5.1.4 Technique pour l'ordre de préférence par similarité à la solution idéale (TOPSIS)

TOPSIS a été proposée par Hwang and Yoon (1981) pour déterminer la meilleure alternative sur la base du concept de la solution de compromis. La solution de compromis peut être considérée comme

le choix de la solution dont la distance euclidienne est la plus petite par rapport à la solution idéale A^+ et la plus éloignée de la solution anti-idéale A^- .

Algorithme 7 : Algorithme TOPSIS pour le classement des alternatives

Entrées : $A_{p \times m}$: une matrice de décision, A^+ : la solution idéale et A^- : la solution anti-idéale.

Sorties : Le classement des alternatives en fonction de leur proximité aux solutions idéales

Étape 1 : Calculer la matrice de décision normalisée A_{norm} ;

for $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

$$\left| \begin{array}{l} v_j \leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^p A_{ij}^2}; \text{ for } i \leftarrow 1 \text{ to } p \text{ do} \\ \quad \left| \quad A_{norm,ij} \leftarrow \frac{A_{ij}}{v_j}; \end{array} \right.$$

Étape 2 : Calculer la matrice de décision pondérée A_{pond} en utilisant les pondérations w_1, \dots, w_m ;

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$$\left| \begin{array}{l} \text{for } j \leftarrow 1 \text{ to } m \text{ do} \\ \quad \left| \quad \hat{A}_{ij} \leftarrow w_j \times A_{norm,ij}; \end{array} \right.$$

Étape 3 : Calculer la solution idéale et la solution anti-idéale en utilisant les maximums et les minimums de chaque critère C_1, \dots, C_m ;

for $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

$$\left| \quad S_j^+ \leftarrow \max_i \hat{A}_{ij} : i = 1, \dots, p; S_j^- \leftarrow \min_i \hat{A}_{ij} : i = 1, \dots, p;$$

Étape 4 : Calculer la distance euclidienne de chaque alternative A_i à la solution idéale A^+ et la solution anti-idéale A^- ;

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$$\left| \quad D_i^+ \leftarrow \sqrt{\sum_{j=1}^m (\hat{A}_{ij} - S_j^+)^2}; D_i^- \leftarrow \sqrt{\sum_{j=1}^m (\hat{A}_{ij} - S_j^-)^2};$$

Étape 5 : Calculer la proximité de chaque alternative A_i aux solutions idéales en utilisant la formule :

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$$\left| \quad Q_i \leftarrow \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-};$$

Étape 6 : Classer les alternatives en ordre décroissant de leur proximité à la solution idéale positive, c'est-à-dire en ordre croissant de la valeur de Q_i . Les alternatives les plus proches de la solution idéale sont les meilleures ;

La méthode TOPSIS cherche à identifier l'alternative qui se rapproche le plus de l'option idéale tout en étant la plus éloignée de l'alternative anti-idéale, ce qui en fait une méthode MADM efficace pour la gestion des risques (Opricovic and Tzeng, 2004). En d'autres termes, TOPSIS permet de sélectionner une alternative réalisable considérée comme la plus utile par le décideur tout en évitant de choisir une solution trop coûteuse pour les parties prenantes (Mir et al., 2016). Cependant, certaines études (Opricovic and Tzeng, 2004; Tzeng and Huang, 2011) ont montré qu'elle ne prenait pas en

compte l'importance relative des mesures de séparation, ce qui peut conduire à ne pas différencier les alternatives qui sont à des distances similaires de l'alternative idéale et de l'anti-idéale. Cette limitation peut affecter la qualité des résultats de la méthode et doit être prise en compte lors de l'analyse des résultats. Une étude récente réalisée par [Abbas and Chergui \(2019\)](#), a permis de proposer une révision de TOPSIS dite "TOPSIS-Nadir" en remplaçant le point anti-idéal par le point nadir, ce qui a permis de réduire l'espace de recherche et le temps de calcul.

2.5.1.5 La méthode relationnelles grises (GRA Gray relational analysis)

Algorithme 8 : Algorithme de la méthode analyse relationnelle grise (GRA)

Data : un ensemble d'options A_1, \dots, A_p , des critères C_1, \dots, C_m , une matrice de décision $D = [A_{ij}]$ et une séquence de référence V_0

Result : un classement des options de la meilleure à la moins bonne

Étape 1 : Normaliser D en utilisant la formule : **for** $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

$max_j \leftarrow \max_i A_{ij}; min_j \leftarrow \min_i A_{ij};$

if C_j est un critère de coût **then**

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$\widetilde{A}_{ij} \leftarrow \frac{max_j - A_{ij}}{max_j - min_j};$

else if C_j est un critère de profit **then**

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$\widetilde{A}_{ij} \leftarrow \frac{A_{ij} - min_j}{max_j - min_j};$

Étape 2 : Pour chaque alternative A_i calculer le coefficient gris, qui évalue le degré de La connexion (ou de ressemblance) de A_i à la séquence de référence V_0 . **for** $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

$\xi_{ij} \leftarrow \frac{\min_i \min_j (\delta_{ij}) + \rho \max_i \max_j (\delta_{ij})}{\delta_{ij} + \rho \max_i \max_j (\delta_{ij})}$, où $\delta_{ij} = |V_{0j} - \widetilde{A}_{ij}|$; $\rho \in [0, 1]$ et ρ est un coefficient

de résolution.

Étape 3 : Calculer la moyenne des coefficients relationnels gris de A_i et pour chaque critère C_j en utilisant la formule : **for** $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$\Gamma(A_i, V_0) \leftarrow \sum_j^m w_j \xi_{ij}$

Étape 4 : Classer les options en ordre décroissant selon leur grade gris $\Gamma(A_i, V_0)$. L'option avec le grade gris le plus élevé est considérée comme la meilleure option.

L'analyse relationnelle grise (GRA) fait partie de la théorie des systèmes gris de [Ju-Long \(1982\)](#); [Julong \(1989\)](#). Elle est utilisée pour étudier des problèmes présentant des interdépendances complexes basées sur des relations grises entre des facteurs multiples, fournis sous forme de données discrètes. Le terme "relation grise" fait référence aux relations ambiguës entre les éléments du système. En effet,

La signification essentielle d'un système gris est due aux informations incomplètes ou inconnues sur les interrelations qu'il contient. Si le système comporte des informations incertaines ou manquantes, il est considéré comme gris et est difficile à étudier à l'aide des méthodes conventionnelles.

La méthode GRA a été utilisée avec succès dans un certain nombre de problèmes MCDM (Olson and Wu, 2006; Jiang et al., 2002; Chen et al., 2005). Selon la théorie des systèmes gris, chaque alternative est représentée sous forme de série de comparabilité, où chaque élément de la série indique la performance normalisée de l'alternative par rapport à un critère prédéfini. L'avantage majeur de la méthode GRA est qu'elle peut traiter efficacement les données incertaines ou incomplètes en utilisant des principes mathématiques robustes, et donc fournir des résultats précis dans des situations où d'autres méthodes peuvent échouer. La simplicité d'utilisation et la faible quantité de données nécessaires sont également des atouts de cette méthode. Cependant, la méthode GRA peut être sensible aux valeurs extrêmes des données, ce qui peut altérer la fiabilité des résultats si ces valeurs sont présentes. Plusieurs variantes de la méthode GRA existent, dont certaines ont été combinées avec d'autres méthodes telles que TOPSIS et VIKOR. Dans le cadre de notre contribution, nous présenterons une nouvelle combinaison des méthodes VIKOR et GRA dans un environnement flou.

2.5.1.6 Méthode du produit pondéré

Le modèle du produit pondéré (WPM) est une méthode de comparaison d'alternatives très similaire au modèle de la méthode de la somme pondérée (WSM). La comparaison se fait en multipliant les valeurs relatives de chaque alternative sur chaque critère par le poids relatif du critère, puis en additionnant ces valeurs pour chaque alternative. Plus précisément, chaque alternative est comparée aux autres alternatives en multipliant un certain nombre de ratios, un pour chaque critère, où chaque ratio est élevé à la puissance équivalente au poids relatif du critère correspondant. Pour comparer deux alternatives A_k et A_l , on calcule le produit suivant (Bridgman, 1922; Miller and Starr, 1969) :

$$R(A_k/A_l) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{a_{k,j}}{a_{l,j}} \right)^{w_j}, \quad (2.21)$$

où m est le nombre de critères, a_{ij} est la valeur de la i -ème alternative en termes du j -ème critère, et w_j est le poids d'importance du j -ème critère.

Si le terme $R(A_k/A_l)$ est supérieur ou égal à un, alors cela indique que l'alternative A_k est plus souhaitable que l'alternative A_l (dans le cas de maximisation). La meilleure alternative est celle qui est meilleure que toutes les autres alternatives ou au moins égale à celles-ci.

2.5.1.7 La procédure VIKOR

La procédure VIKOR (VIšekriterijumsko KOMpromisno Rangiranje en serbe, qui signifie "Classement de compromis multicritères" en français) est une approche de la solution d'optimisation et de compromis multicritère qui a été proposée par Opricovic (1998). Elle repose sur le concept de pro-

grammation du compromis (Yu, 1973). Et se concentre sur la sélection et le classement d'un ensemble d'alternatives soumises à des critères concurrents. En introduisant un indice de classement basé sur la mesure particulière de la "proximité" à la solution idéale (Tzeng et al., 2005), basée sur la métrique L_q donnée par :

$$\mathbb{L}_{q,i} = \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\frac{w_j(f_j^* - f_{ij})}{f_j^* - f_j^-} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \quad 1 \leq q \leq +\infty. \quad (2.22)$$

Algorithme 9 : Algorithme de VIKOR pour la sélection des alternatives

Entrées : Une matrice de décision $A_{p \times m}$, les pondérations w_1, \dots, w_m , les valeurs de seuil v ,

Sorties : Le classement des alternatives en fonction de leur performance globale et leur distance par rapport à l'idéal

Étape 1 : Normaliser les colonnes de la matrice A ; **for** $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

$max_j \leftarrow \max A_{ij} : i = 1, \dots, p; min_j \leftarrow \min A_{ij} : i = 1, \dots, p;$

if C_j est un critère de coût **then**

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$\widetilde{A}_{ij} \leftarrow \frac{max_j - A_{ij}}{max_j - min_j};$

else if C_j est un critère de profit **then**

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$\widetilde{A}_{ij} \leftarrow \frac{A_{ij} - min_j}{max_j - min_j};$

Étape 2 : Détermination pour chaque critère la meilleure et la plus mauvaise valeur; **for** $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

$\widetilde{A}_j^+ \leftarrow \max \widetilde{A}_{ij} : i = 1, \dots, p; \widetilde{A}_j^- \leftarrow \min \widetilde{A}_{ij} : i = 1, \dots, p;$

if C_j est critère de coût **then**

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$\widetilde{A}_i^+ \leftarrow \min \widetilde{A}_{ij} : j = 1, \dots, m; \widetilde{A}_i^- \leftarrow \max \widetilde{A}_{ij} : j = 1, \dots, m;$

Étape 3 : Calcul des paramètres de satisfaction de groupe et regret individuel. Ce qui revient à calculer respectivement la satisfaction de groupe S_i et le regret individuel R_i de alternative $A_i (i = 1, 2, \dots, p)$

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$S_i \leftarrow \sum_{j=1}^m w_j \frac{\widetilde{A}_i^+ - \widetilde{A}_{ij}}{\widetilde{A}_i^+ - \widetilde{A}_i^-}; R_i \leftarrow \max_j (w_j \frac{\widetilde{A}_i^+ - \widetilde{A}_{ij}}{\widetilde{A}_i^+ - \widetilde{A}_i^-};$

Étape 4 : Calculer le score de VIKOR pour chaque alternative A_i ;

for $i \leftarrow 1$ **to** p **do**

$S_i^- \leftarrow \min_i S_i; S_i^+ \leftarrow \max_i S_i;$

$R_i^- \leftarrow \min_i R_i; R_i^+ \leftarrow \max_i R_i;$

$Q_i \leftarrow v \frac{S_i - S_i^-}{S_i^+ - S_i^-} + (1 - v) \frac{R_i - R_i^-}{R_i^+ - R_i^-}; v \in [0, 1]$ est le poids de la stratégie d'utilité de groupe maximale;

Étape 5 : Classer les alternatives selon leur score de VIKOR décroissant.

La valeur de Q_i donnée dans l'algorithme 9 plus est petite, meilleure est la solution. Pour garantir l'unicité de l'option optimale, les deux conditions suivantes doivent être satisfaites simultanément :

- ▷ **(ACDV) Avantage acceptable** : $Q(A^{(2)}) - Q(A^{(1)}) \geq DQ$ où $DQ = \frac{1}{p-1}$, p est le nombre d'options et $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ sont les alternatives occupant respectivement la première et la deuxième position dans la liste de classement Q_i .
- ▷ **(ACST) Acceptable Stability** : $A^{(1)}$ devrait également être la mieux classée par S_i et R_i . Néanmoins, il est fréquent que ces deux exigences ne soient pas satisfaites simultanément. Ainsi, un ensemble de solutions de compromis est dérivé.

Si la condition (ACDV) n'est pas remplie, alors nous allons explorer la valeur maximale de m selon l'équation :

$$Q(A^{(m)}) - Q(A^{(1)}) < DQ.$$

Dans ce cas, toutes les alternatives $A^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) sont des solutions de compromis. Si la condition (ACST) n'est pas satisfaite, alors les alternatives $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ sont les solutions de compromis.

La ou les solutions de compromis proposées maximisent l'utilité de groupe (S_i) tout en minimisant le regret individuel (R_i). Ces solutions de compromis servent de base aux négociations incorporant les préférences des décideurs sous forme de poids sur les critères. Par conséquent, la méthode VIKOR est la mieux adaptée aux situations où le décideur ne connaît pas ou ne peut pas transmettre ses préférences dès le début du processus décisionnel (Tzeng and Huang, 2011). Toutefois, en cas de conflit de critères, un décideur doit également prendre en compte des données imprécises ou ambiguës (flous, intervalle) pour plus d'efficacité de cette méthode

2.5.2 Méthodes de surclassement

Les approches de surclassement ont été développées comme un retour critique de l'approche classique de l'utilité multi-attribut. Une méthode de surclassement vise à construire une structure de préférences basée sur les préférences bien établies du décideur.

Concrètement les méthodes de surclassement évaluent d'abord les alternatives réalisables par les décideurs en termes de critères d'évaluation pour établir leurs performances. Cette évaluation est suivie d'une étape d'agrégation partielle au cours de laquelle les informations recueillies sont utilisées pour la comparaison des actions deux à deux en termes de préférence, d'indifférence et d'incomparabilité. Puis une synthèse des résultats de ces comparaisons est établie. Dans l'étape d'agrégation partielle, une relation de surclassement est construite. Roy et al. (1985) ont défini la relation de surclassement de la façon suivante : « Une action A' surclasse une action A'' noté $A'SA''$ si et seulement si A' est au moins aussi bonne que A'' relativement à une majorité de critères sans être trop mauvaise que A'' relativement aux critères ». Les méthodes les plus couramment utilisées sont ELECTRE (Éli-

mination Et Choix Traduisant la REalité) , PROMETEE (Preference Ranking Organisation Method for Enrichement Evaluation).

2.5.2.1 Méthode d'ÉLimination Et Choix Traduisant la REalité (ELECTRE)

Élimination Et Choix Traduisant la REalité est une famille de méthodes constituée des méthodes ELECTRE I, ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV, ELECTRE IS et ELECTRE Tri. Nous exposerons dans ce qui suit, la méthode ELCTRE I.

La méthode ELECTRE I

Algorithme 10 : Méthode ELECTRE I

Data : A : l'ensemble des options, C : l'ensemble des critères, w : le vecteur des poids des critères, c_j , d_j : les seuils de concordance et de discordance respectivement pour $j = 1 \dots, m$

Result : L'ensemble des options surclassées

Initialiser S à l'ensemble vide; Initialiser $flag$ à vrai; **tant que $flag$ est vrai faire**

| Initialiser la matrice de concordance Con à 0 de taille $p \times p$; Initialiser la matrice de discordance

| Dis à 0 de taille $p \times p$; **pour $i = 1$ à p faire**

| | **pour $k = 1$ à p faire**

| | | **si $i \neq k$ alors**

| | | | **si $\forall j \quad C_j(A_i) \geq C_j(A_k)$ alors**

| | | | | $Con_{i,k} \leftarrow \sum_{j=1}^m w_j$;

| | | | **sinon**

| | | | | $Dis_{i,k} \leftarrow \max_{j=1}^m \left\{ \frac{C_j(A_k) - C_j(A_i)}{\delta_j} \right\}$;

| | **pour $i = 1$ à p faire**

| | | A_i surclasse A_k ssi $\forall j \quad Con_{i,k} \geq c_j$ et $\forall j \quad Dis_{i,k} \leq d_j$; **si A_i surclasse tous les autres éléments**

| | | **alors**

| | | | Ajouter A_i à l'ensemble S ;

| | **si S ne change pas alors**

| | | $flag \leftarrow$ faux;

Cette méthode a été développée par Roy (1968) pour répondre à la problématique de choix. Elle permet d'identifier un sous-ensemble d'actions offrant le meilleur compromis possible . Considérons un ensemble A de p actions, et m critères C_1, \dots, C_m et w_j est le poids de chaque critère C_j . Dans le but d'identifier un sous-ensemble d'actions qui offre un meilleur compromis parmi l'ensemble initial. La méthode ELECTRE I fait intervenir trois indices importants qui sont l'indice de concordance et de discordance

On désigne par $Con_j(A_i)$ l'indice de concordance pour deux actions A_i et A_k , qui évalue l'importance de l'assertion « A_i surpasse A_k » comme suit :

$$Con_j(A_i) = \sum_{j \in I} w_j. \quad (2.23)$$

où $I = \{j \mid C_j(A_i) \geq C_j(A_k), k = 1, \dots, p\}$ Par la suite on évalue également l'indice de discordance noté $Dis(A_i, A_k)$ qui mesure la pertinence de l'assertion « A_i surpasse A_k » pour la minorité des critères, par :

$$Dis_j(A_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } C_j(A_i) \geq C_j(A_k), \\ \max \frac{1}{\delta} (C_j(A_k) - C_j(A_i)) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.24)$$

où δ désigne la différence maximale entre deux options sur le même critère. Les valeurs des indices $Con_j(A_i)$ et $Dis_j(A_i)$ sont comprises entre 0 et 1. Une fois les indices de concordance et de discordance sont calculés, ils sont comparés respectivement à des seuils. Ainsi l'option A_i surclasse A_k si et seulement si :

$$Con_j(A_i) \geq c_j \quad \text{et} \quad Dis_j(A_i) \leq d_j.$$

Le seuil de concordance permet de s'assurer que la valeur de l'indice de concordance est considérable, tandis que le seuil de discordance représente le niveau seuil qui, s'il est dépassé par l'indice de discordance, invalide la relation de surclassement parmi les alternatives. Il est recommandé que la valeur du niveau de concordance se situe dans la fourchette $[0.5, 1 - \min_j(w_j)]$ (Figueira et al., 2005).

La méthode ELECTRE I permet de représenter graphiquement les résultats sous forme de graphe et de carte de préférences, ce qui facilite l'interprétation des résultats. De plus, elle permet de prendre en compte un grand nombre de critères. Cependant, elle peut être sensible aux seuils choisis. En effet, les résultats de la méthode ELECTRE I peuvent varier en fonction des seuils choisis pour évaluer les critères. Il est donc important de bien choisir les seuils en fonction des besoins du décideur.

2.6 Techniques de pondération des critères

La pondération d'un critère signifie l'importance relative d'un critère ou encore son taux de contribution à discriminer un ensemble d'alternatives. A cet effet, la pondération des critères peut avoir un impact significatif sur les résultats en les biaisant si elle n'est pas bien ajustée. Ainsi, cette étape doit être entreprise avec prudence et transparence selon un cadre théorique qui guide les analystes pour accompagner les décideurs dans la formalisation et l'affinement de leurs préférences. De nombreuses méthodes pour résoudre les problèmes MADM, nécessitent une connaissance de l'importance relative de chaque critère (Eckenrode, 1965). Ceci est généralement représenté par un ensemble de poids normalisés (recommandé) dont la somme est égale à 1. Pour m critères, un vecteur de poids est utilisé noté $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)^T$ tel que $\sum_1^m w_j = 1$.

Généralement, il existe deux familles de méthodes pour l'évaluation des pondérations des critères, les méthodes subjectives telle que la technique AHP (voir la sous-section 2.5.1.3) et les méthodes objectives. Ces dernières sont basées sur les informations contenues dans la matrice de décision au sujet des critères. Parmi les techniques les plus répondues de cette famille, on trouve la technique de

résolution par un modèle de programmation multi-objectif (Choo and Wedley, 1985) et la méthode de l'entropie. Dans ce qui suit, nous présentons la méthode de l'entropie.

2.6.1 Évaluation des pondérations par l'entropie

La méthode de pondération des critères par l'entropie est une approche en aide à la décision multicritère qui permet de déterminer les poids de chaque critère en fonction de leur variabilité. Le principe est basé sur l'idée que plus un critère est variable, plus son importance dans la prise de décision est élevée. Cette méthode repose sur l'utilisation de l'entropie, une mesure d'incertitude proposée par Shannon (1948) pour une loi de probabilité discrète $E(p_1, \dots, p_m) = -k \sum_{j=1}^m p_j \ln p_j$, où k est une constante positive qui vaut $\frac{1}{\ln 2}$. Pour une matrice de décision normalisée, le processus de cette technique est donnée dans l'algorithme suivant.

Algorithme 11 : Algorithme de la méthode de l'entropie pour calculer les poids des critères

Input : Une matrice de décision normalisée $D = (r_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$

Output : Les poids normalisés des critères w_1, w_2, \dots, w_m

for $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

Calculer l'entropie E_j du critère j en utilisant la formule : $E_j \leftarrow -k \sum_{i=1}^m r_{ij} \ln r_{ij}$;

for $j \leftarrow 1$ **to** m **do**

Calculer l'importance relative w_j de chaque critère en utilisant la formule : $w_j \leftarrow \frac{1 - E_j}{p - \sum_{j=1}^m E_j}$;

return w_1, w_2, \dots, w_m .

La détermination des pondérations des critères par l'entropie est une méthode simple à mettre en œuvre, mais elle ne permet pas la détermination de poids optimaux car dans bien des cas elle donne des poids presque égaux, cela peut indiquer une faiblesse de la méthode ou un manque de consensus entre les décideurs, et il peut être nécessaire de recourir à d'autres méthodes ou outils pour obtenir des résultats plus précis et utiles.

2.7 Panorama chronologique des méthodes MADM

L'idée de la fonction d'utilité remonte aux correspondances entre Nicolas Bernoulli et Pierre Rémond de Montmort en 1738, alors qu'ils discutaient d'une énigme mathématique connue sous le nom du paradoxe de Saint-Pétersbourg (Tzeng and Huang, 2011). C'est sans doute cette idée qui a inspiré un grand nombre de chercheurs à mettre au point des méthodes d'aide à la décision multicritères dont la majorité sont basées sur le concept de la fonction d'utilité. La Table 2.4 représentant un panorama

chronologique des méthodes MADM.

TABLE 2.4 : Panorama chronologique des méthodes MADM les plus influentes

Méthodes	Innovateurs
Weighted sum method (WSM)	Churchman and Ackoff (1954)
ELECTERE I	Roy (1968)
ELECTRE II	Roy and Bertier (1971)
Analytic hierarchy process (AHP)	Saaty (1980)
ELECTERE III	Roy (1978)
TOPSIS	Hwang and Yoon (1981)
ELECTERE IV	Roy and Hugonnard (1982)
PROMETHEE I	Brans (1982)
PROMETHEE II	Brans and Vincke (1985)
PROMETHEE III	Brans et al. (1986)
PROMETHEE IV	Mladineo et al. (1987)
Grey relational analysis	Julong (1989)
Analytic network process (ANP)	Saaty (1996)
VIKOR	Opricovic (1998)
Superiority and inferiority ranking (SIR)	Xu (2001)
PAPRIKA	Hansen and Ombler (2008)
Best-worst method (BWM)	Rezaei et al. (2015)

Avec cette affluence de méthodes, nous avons besoin d'établir la conformité requise entre un problème décisionnel et la méthode qui lui a été créée, Bouyssou et al. (2006b) ont énuméré quatre formes différentes de validation.

1. La validation conceptuelle : vise à vérifier si les concepts utilisés dans la méthode, pour décrire

les préoccupations et la situation problématique du client, sont significatifs pour la méthode. C'est-à-dire que le décideur comprend ces concepts et les trouve utiles. En d'autres termes, le décideur et l'analyste doivent se mettre d'accord sur la pertinence et l'utilité de chaque concept pour le problème posé.

2. La validation logique : s'intéresse à vérifier si les concepts et les outils utilisés dans la méthode sont logiquement cohérents et significatifs (du point de vue de la théorie utilisée). Cela n'implique pas nécessairement que le décideur est cohérent dans ses affirmations, mais que la méthode traite l'information de manière cohérente (y compris les incohérences et ambiguïtés possibles).
3. La validation expérimentale : teste la méthode en utilisant des données expérimentales afin de montrer qu'elle fournit les résultats attendus et éventuellement vérifier les exigences formelles telle que la sensibilité aux variations des paramètres.
4. La validation opérationnelle : montre que la méthode face au processus de décision pour lequel elle a été conçue, agit comme prévu et que le décideur peut effectivement l'utiliser dans un tel processus de décision.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié différentes approches de l'analyse multicritère. Nous avons examiné quelques méthodes de résolution pour deux situations distinctes : le premier cas est celui où l'espace de décision est fini et discret, ce qui correspond à la résolution d'un problème multi-attribut. Cette approche consiste en la recherche de la meilleure option parmi un ensemble fini d'alternatives prédéfinies. Le deuxième cas est la résolution d'un problème d'optimisation multi-objectif, où l'objectif est de générer un ensemble d'alternatives pour être soumis au décideur afin qu'il puisse choisir la plus appropriée en fonction de ses préférences.

Enfin, nous avons souligné l'importance de vérifier certaines exigences pour valider toute méthode de résolution. En effet, toute méthode de résolution de problèmes en contexte multicritère doit être capable de fournir des solutions complètes, cohérentes, efficaces, robustes et transparentes pour les décideurs.

Deuxième partie

Théorie de l'information et aide multicritère à la décision dans un environnement flou

Théorie des sous-ensembles flous

introduction

L'origine du concept des sous-ensembles flous remonte à 1936 ([Kosko and Toms, 1993](#)), année où le philosophe américain Black a énoncé le principe des ensembles vagues. Toutefois, c'est en 1965 que [Zadeh](#) a redécouvert cette idée en se fondant sur l'observation selon laquelle il est souvent impossible d'atteindre un degré élevé de précision et de certitude dans le monde réel. En effet, les ensembles classiques s'avèrent parfois inadaptés pour décrire de manière adéquate les phénomènes complexes de notre environnement.

La théorie des sous-ensembles flous est une approche mathématique qui permet de modéliser l'activité cognitive humaine en prenant en compte les informations exprimées en langage naturel qui sont imprécises ou vagues. En effet, cette théorie permet de traiter ces informations qui ne sont pas clairement définies ou dont la pertinence n'est pas absolue, ce qui est une caractéristique importante du langage naturel. Zadeh, fondateur de cette théorie, a grandement contribué à son développement dans diverses directions. Aujourd'hui, cette théorie est devenue une discipline majeure dans de nombreux domaines tels que la théorie de la décision, la reconnaissance des formes, le diagnostic médical, la théorie du contrôle et l'intelligence artificielle. Cette approche novatrice, qui permet de traiter des données qualitatives avec des outils mathématiques, améliore notre compréhension de la complexité du monde qui nous entoure.

3.1 Généralités

Dans le cadre de la théorie des ensembles classiques, un ensemble X est constitué d'éléments qui peuvent appartenir ou non à un sous-ensemble A de X . La fonction caractéristique de l'ensemble A indique si un élément de X appartient ou non à A . Par exemple, si A est l'ensemble des tiges métalliques dont le diamètre est compris entre 16 et 24 millimètres (mm), alors sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 16 \leq x \leq 24 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cependant, il peut être nécessaire de décrire des ensembles qui ne sont pas précisément définis, tels que "les tiges métalliques dont le diamètre fait presque 20 mm". Dans ce cas, il est difficile d'associer une fonction caractéristique à cet ensemble, car il n'y a pas de frontière nette entre les diamètres "presque 20 mm" et ceux qui ne le sont pas. Pour résoudre ce problème, il est possible de généraliser la fonction caractéristique en une fonction d'appartenance.

Une fonction d'appartenance permet de prendre en compte toutes les nuances de l'appartenance d'un élément à un ensemble, en attribuant une valeur entre 0 et 1 à chaque élément de X , indiquant dans quelle mesure l'élément appartient à l'ensemble considéré. Ainsi, pour notre exemple d'ensemble de tiges métalliques, la fonction d'appartenance permet de prendre en compte toutes les nuances de l'expression "presque 20 mm". Elle considérera les tiges de diamètre qui ne sont pas exactement de 20 mm, mais qui sont suffisamment proches pour être considérées comme appartenant à l'ensemble. En effet une fonction d'appartenance permet de mettre en évidence les nuances d'appartenance pour les éléments d'un ensemble X de références (ou univers de discours) et de définir un sous-ensemble flou.

Définition 3.1.1. (*Zadeh, 1965*)

Soit X un ensemble appelé univers de discours ou de références. Un sous-ensemble flou A de X , est défini par une fonction d'appartenance $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ qui associe à tout élément x de X une valeur d'appartenance réelle $\mu_A(x)$. l'ensemble flou A est noté par :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}.$$

Dans le cas où $\mu_A(x) = 1/2 \forall x \in X$, alors A est appelé l'ensemble le plus flou de X noté $A_f = [1/2]$.

La notion de sous-ensemble flou permet de prendre en compte des degrés d'appartenance variables d'un élément à une classe, offrant ainsi une gradation entre l'appartenance et la non-appartenance. Cette approche permet de traiter des catégories aux limites mal définies telles que "vieux" ou "adulte", des situations intermédiaires comme "presque vrai" et le passage progressif d'une propriété à une autre comme le passage de "tiède" à "chaud" selon la température. Elle autorise également l'utilisation de

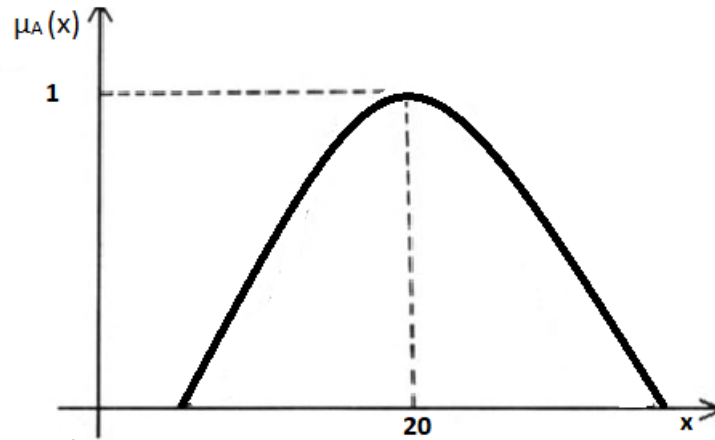


FIGURE 3.1 : Sous-ensemble flou « presque 20 mm »

valeurs approximatives comme "environ douze ans". Cette théorie évite ainsi l'utilisation arbitraire de limites rigides pour définir des classes, ce qui peut conduire à des conclusions injustifiées. Ainsi, la théorie des sous-ensembles flous constitue une extension de la théorie des sous-ensembles classiques, offrant une plus grande souplesse pour la représentation et l'analyse des phénomènes complexes. (Bernadette, 2003).

Remarque 1. 1. La différence entre un ensemble classique et un sous-ensemble flou, réside dans leur fonction d'appartenance. Un ensemble classique possède une fonction d'appartenance unique, tandis qu'un ensemble flou peut être représenté par un nombre infini de fonctions d'appartenance. comme pour l'exemple du sous-ensemble flou des diamètres mesurant presque 20 mm, il peut être représenté par la fonction d'appartenance suivante :

2. Les cas extrêmes de sous-ensembles flous définis sur l'univers de discours X sont respectivement X lui-même associé à une fonction d'appartenance partout égale à 1 sur X , et l'ensemble \emptyset associé à une fonction d'appartenance nulle partout sur tout X .
3. Soient X un univers de discours discret et A un sous-ensemble flou de X . A est souvent noté par : $\sum_{x \in X} \mu_A(x)/x$. Dans le cas où X est continu, on note $A = \int_X \mu_A(x)/x$.

3.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Considérons un sous-ensemble flou A défini sur l'univers de discours X , et dont la fonction d'appartenance est notée μ_A . Pour mieux comprendre la composition de cet ensemble, ainsi que les éléments qui y appartiennent de manière certaine et ceux qui y appartiennent dans une certaine mesure, différentes caractéristiques de A ont été définies.

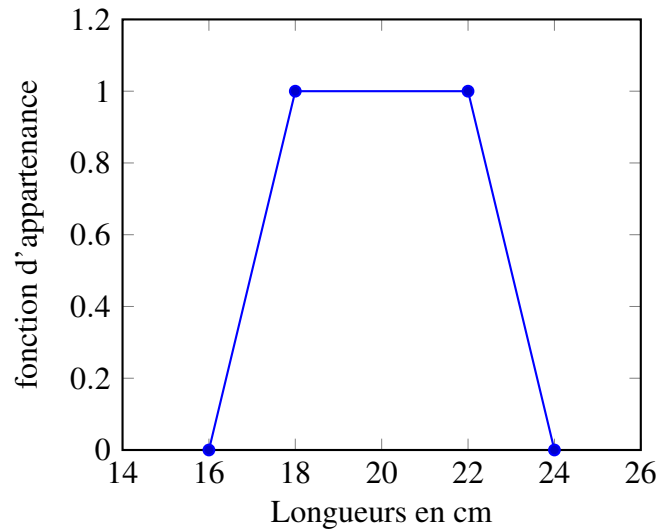


FIGURE 3.2 : Sous-ensemble flou « presque 20 mm de diamètre »

1. Support :

Le support de A , noté $Supp(A)$, est l'ensemble des éléments de X qui appartiennent à A avec un degré d'appartenance non nul. Autrement dit, $Supp(A)$ est défini par :

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

2. Noyau :

Le noyau d'un sous-ensemble flou A de X , noté $Noy(A)$, c'est l'ensemble des éléments de X qui appartiennent totalement (de façon certaine) à A . Formellement :

$$Noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

3. Hauteur :

La hauteur d'un sous-ensemble flou A de X , noté $h(A)$, est la valeur maximale prise par sa fonction d'appartenance $\mu_A(x)$, qui correspond à un degré de confiance quant à l'appartenance d'un élément x à A . On a :

$$h(A) = \max_{x \in X} \mu_A(x).$$

Dans le cas où $h(A) = 1$, alors A est dit ensemble flou normalisé. dans le cas contraire on dit que A est un ensemble flou non-normalisé.

4. α -coupe :

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A avec un degré d'appartenance au moins égal à α . Autrement dit, une α -coupe de A c'est l'ensemble noté A_α donné par :

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Les α -coupes de A sont des parties non floues de X emboîtées les unes dans les autres, en fonction de la valeur de α , c'est-à-dire que si $\alpha' \geq \alpha$, alors $A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$. Si $\alpha = 0$, alors $A_0 = X$, et si $\alpha = 1$, alors $A_1 = \text{Noy}(A)$, qui peut être éventuellement vide.

En pratique, rechercher le degré de similarité entre un sous-ensemble flou et un sous-ensemble ordinaire, revient à déterminer ses α -coupes et choisir ainsi le sous ensemble ordinaire le plus proche. Ce qui s'avère d'une grande utilité dans la définition de mesures telles que l'entropie floue (degré de flou), de spécificité, et mesures d'exactitude (accuracy measure), etc.

Remarque 2. Les α -coupes d'un sous-ensemble flou A correspondent de façon approximative à A , selon (Zadeh, 1965) on peut représenter tout sous-ensemble flou en fonctions de ses α -coupes :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x),$$

avec χ_{A_α} est la fonction caractéristique de A_α .

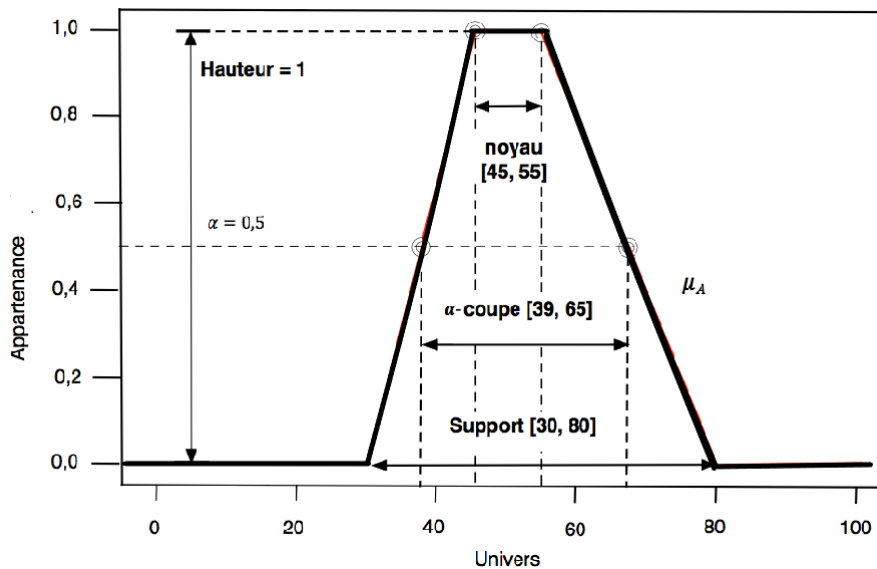


FIGURE 3.3 : Support, noyau, hauteur et α -coupe d'un sous-ensemble flou

Définition 3.2.1. Le complémentaire d'un ensemble flou A de X , est le sous-ensemble flou noté \bar{A} défini comme étant l'ensemble des x qui appartiennent d'autant plus à \bar{A} qu'ils appartiennent peu à A , dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\forall x \in X, \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

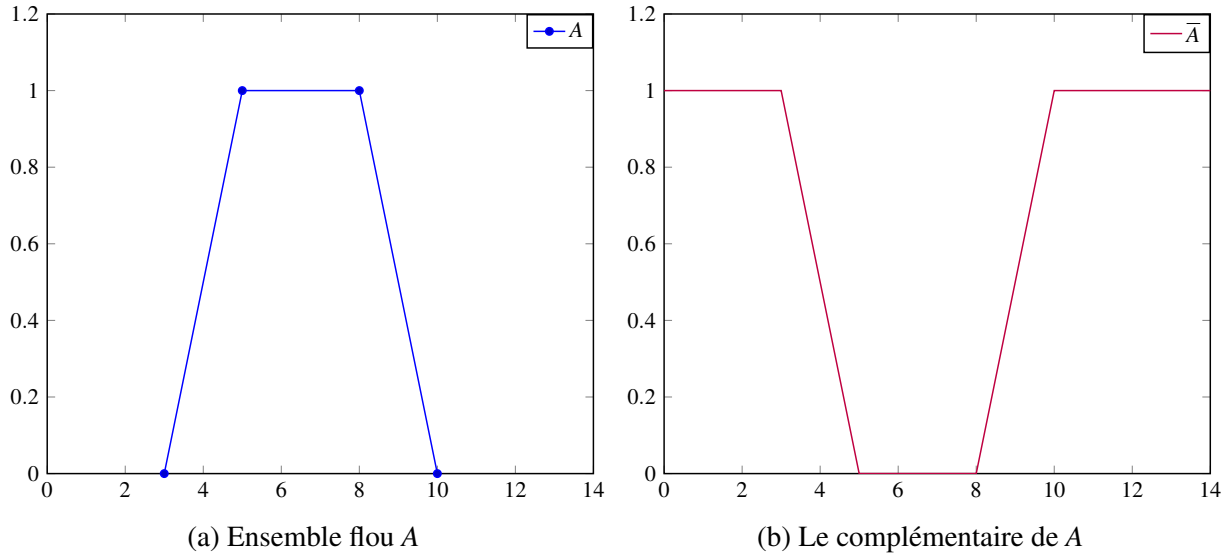


FIGURE 3.4 : Fonction d'appartenance du complémentaire d'un ensemble flou

Remaque 3. Il est important de souligner que les sous-ensembles flous ne vérifient pas la propriété de non-contradiction et la loi du tiers exclus. En effet, si A est un ensemble flou et x un élément de X , alors on ne peut pas dire avec certitude que x est soit dans A , soit dans \bar{A} , mais plutôt il appartient à chacun d'eux avec un degré d'appartenance. On en conclut que :

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \bar{A} \neq X.$$

Définition 3.2.1. Soient A et B deux sous-ensembles flous d'un même univers de discours X

- ▷ A et B sont dits égaux s'ils ont des fonctions d'appartenance égales en tout point x de X . Formellement, $A = B$ si et seulement si $\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$.
- ▷ On dira que A est inclus dans B et on note $A \subset B$ si tout élément x de X qui appartient, même de façon modérée, à A appartient aussi à B avec un degré au moins aussi grand. C'est à dire : $A \subset B$ si et seulement si $\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

3.3 Typologie des opérations sur les sous-ensembles flous d'un point de vue décisionnel

Les travaux fondateurs de Zadeh (1965); Bellman and Giertz (1973) ont permis de montrer que les opérations sur les sous-ensembles flous étaient une généralisation des opérations de la théorie classique des ensembles, en mettant en avant le rôle crucial des fonctions d'appartenance. Dans le cadre de la prise de décision, il est courant de combiner plusieurs critères ou attributs pour évaluer un ensemble d'alternatives. Cette combinaison s'effectue généralement à l'aide des connecteurs "et" et "ou". Cependant, pour tenir compte de la compensation entre les critères, cette section présente une typologie des opérations sur les sous-ensembles flous. Cette typologie est constituée de cinq catégories : non compensation, compensation-min, compensation complète, compensation-max et opérateurs généralisés de compensation. Ces catégories portent sur les opérations d'intersection et d'union de deux sous-ensembles flous ainsi que sur l'intensité que l'on souhaite donner aux connecteurs "et" et "ou". Cette typologie offre une grande flexibilité pour modéliser des situations complexes de prise de décision. (Yager, 1980).

3.3.1 Opérateur de non compensation

Dans le cadre d'un problème MADM (Multiple Attribute Decision Making), il peut arriver qu'une alternative peut être rejetée simplement parce qu'elle a une valeur très faible pour un attribut, même si tous les autres attributs sont bien au-dessus de la moyenne. Cette situation est appelée "non compensatoire", et le seul opérateur dans cette catégorie est l'opérateur "min" qui représente l'opération d'intersection de deux sous-ensembles flous.

Définition 3.3.1. Soient A et B deux sous-ensembles flous de X . L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments de X affectés du plus petit de leurs degrés d'appartenance, et on a :

$$A \cap B = \{x \in X \mid \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\}.$$

Intuitivement, un élément x ne peut appartenir à la fois à A et à B moins fortement qu'il n'appartient à chacun d'eux séparément. En d'autres termes, $A \cap B$ est interprété comme le "plus grand" ensemble flou qui est contenu dans les deux ensembles flous A et B simultanément.

3.3.2 Opérateur de compensation complète

De la même façon, dans un contexte d'un problème MADM, il peut arriver qu'une alternative soit sélectionnée sur la base de sa performance pour un attribut spécifique, même si tous les autres attributs sont inférieurs à la moyenne. Cette situation est appelée "compensation complète", et dans ce cas, l'opérateur max est le plus approprié pour la combinaison des attributs. L'opérateur "max" définit

l'opération d'union de deux sous-ensembles flous, et il constitue le seul opérateur de cette catégorie.

Définition 3.3.1. Soient A et B deux ensembles flous de X . L'union de A et B noté $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de X affectés du plus grand de leurs deux degrés d'appartenance, formellement :

$$A \cup B = \{x \in X \mid \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))\}.$$

$A \cup B$ peut être interprété comme le plus petit sous-ensemble flou contenant à la fois les sous-ensembles flous A et B . Autrement dit, un élément x ne peut appartenir à A ou à B plus qu'il n'appartient à l'un deux.

Bellman and Giertz (1973) ont souligné l'importance des connecteurs : « et logique » et « ou logique ». Ils ont en plus fourni une justification du choix des opérateur "min" et "max", respectivement pour l'intersection et l'union de deux sous-ensembles flous.

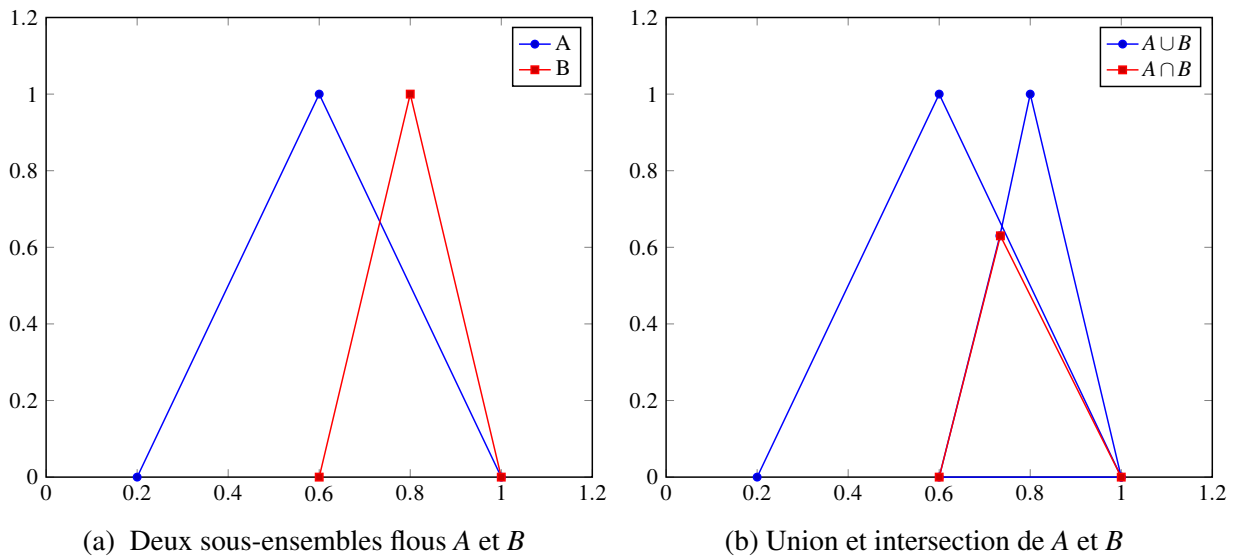


FIGURE 3.5 : Intersection et union de deux ensemble flous

Exemple 1. Considérons deux ensembles flous A et B tels que : A est « x largement supérieur à 5 » et B est « x environ 6 ». On associe à A la fonction d'appartenance donnée par

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 5 \\ (1 + (x - 5)^{-2})^{-1} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

l'ensemble flou B est caractérisé par la fonction d'appartenance donnée par :

$$\mu_B(x) = (1 + (x - 6)^4)^{-1}.$$

L'ensemble flou issue de l'intersection de A et B correspond à la signification sémantique sui-

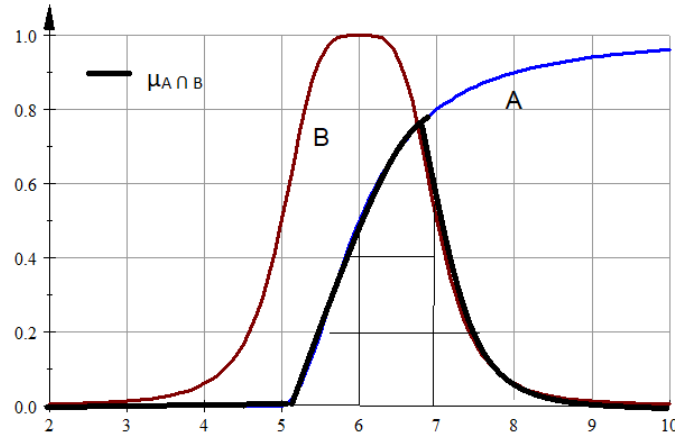


FIGURE 3.6 : Fonction d'appartenance de $A \cap B$

vante : « x est largement supérieur à 5 et environ 6 » (voir Figure 3.6) dont la fonction d'appartenance est :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \min((1 + (x - 5)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 6)^4)^{-1}), & \text{pour } x > 5 \\ 0 & \text{pour } x \leq 5 \end{cases} \quad (3.1)$$

L'ensemble flou $A \cup B$ a pour signification sémantique « x largement plus grand que 5 ou environ 6 » dont la fonction d'appartenance est :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(((1 + (x - 5)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 6)^4)^{-1})), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

3.3.3 Opérateurs de compensation-min

Les opérateurs de compensation-min permettent un certain degré de compensation lorsqu'on considère l'intersection de deux ensembles flous dans l'espace de décision. Autrement dit, ces opérateurs sont utiles lorsque le décideur souhaite privilégier des alternatives qui ont des performances élevées pour plusieurs attributs. Les opérateurs inclus dans cette catégorie sont résumés dans la Table 3.1.

3.3.4 Opérateurs de compensation- max

Les opérateurs de compensation-max permettent un certain degré de compensation (mais pas une compensation totale) lorsque l'on considère l'union d'ensembles flous dans l'espace de décision. C'est à dire , ces opérateurs sont plus adaptés lorsque le décideur veut sélectionner des alternatives qui ont une performance élevée pour au moins un attribut. Les opérateurs de cette catégorie : sont la somme algébrique, la somme bornée, l'opérateur max de Hamacher (Zimmermann, 1985), l'opérateur max de Yager (1980) et l'opérateur max de Dubois (1984), que nous résumerons dans la Table 3.2.

TABLE 3.1 : Opérateurs de compensation-min

Opérateur	Formule
Produit algébrique	$\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
Produit borné	$\mu_{A(.)B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$
Opérateur min de Hamacher (Zimmermann, 1985)	$\frac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{\gamma + (1 - \gamma)(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))}, \gamma \geq 0$
Opérateur min de Yager (1980)	$1 - \min \left[1, ((1 - \mu_A(x))^p + (1 - \mu_B(x))^p)^{\frac{1}{p}} \right], p \geq 1$
Opérateur min de Dubois (1984)	$\frac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{\max(\mu_A(x), \mu_B(x), \lambda)}, 0 \leq \lambda \leq 1$

TABLE 3.2 : Opérateurs de compensation-max

Opérateur	Formule
Somme algébrique	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$
Somme bornée	$\mu_{A(+)B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$
Opérateur max de Hamacher (Zimmermann, 1985)	$\frac{(1 - \alpha)\mu_A(x)\mu_B(x) + \alpha(\mu_A(x) + \mu_B(x))}{\alpha + \mu_A(x)\mu_B(x)}, \alpha \geq 0$
Opérateur max de Yager (1980)	$\min \left[1, ((\mu_A(x))^p + (\mu_B(x))^p)^{1/p} \right], p \geq 1$
Opérateur max de Dubois (1984)	$\frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) - \min(1 - q, \mu_A(x), \mu_B(x))}{\max(q, 1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x))}, 0 \leq q \leq 1$

Remarque 4. L'opérateur max, la somme algébrique et la somme bornée sont les trois versions fondamentales qui représentent l'union de deux sous-ensembles flous. Chacune évalue différemment le degré de "ou" dans l'espace de décision. Il peut être difficile de déterminer la forme de base à utiliser lors de la combinaison d'ensembles flous. Les opérateurs paramétrés, tels que l'opérateur

max de Hamacher, opérateur max de Yager et celui de Duboi et Prade, permettent au décideur de définir l'importance qu'il accorde au "ou" pour un problème de décision particulier.

3.3.5 Opérateurs de compensation généralisés

Les opérateurs de compensation généralisés sont surtout utilisés dans des situations de prise de décision multi-attributs où l'on cherche à prendre en compte différents niveaux de compensation et de trouver un équilibre (compromis) entre la performance des différentes alternatives et leurs caractéristiques (Yager, 1980). Ces opérateurs permettent d'intégrer des informations de compromis en agréant des ensembles flous de manière plus générale et moins restrictive que les opérateurs logiques "et" et "ou" considérés individuellement.

3.3.5.1 Opérateur de Zimmermann and Zysno

Zimmermann and Zysno (1980) ont proposé le concept des opérateurs de compensation généralisés, afin de contrecarrer l'aspect restrictif des opérations d'intersection et d'union opérées respectivement par le "min" et le "max". Cette classe d'opérateur est définie par :

$$\mu_{A\theta B}(x) = \left[(\mu_{A \cap B}(x))^{1-\theta} \right] \left[(\mu_{A \cup B}(x))^{\theta} \right], \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.3)$$

Conformément à ce qui précède, dans l'équation (3.3) on peut représenter l'intersection de A et B ainsi que leur union par le produit algébrique et la somme algébrique respectivement, on obtient :

$$\mu_{A\theta B}(x) = [\mu_A(x)\mu_B(x)]^{1-\theta} [1 - (1 - \mu_A(x))(1 - \mu_B(x))]^{\theta},$$

où le paramètre θ permet au décideur de donner l'intensité qu'il juge convenable pour décrire des informations localisées selon lui entre le "et" et le "ou" logique.

3.4 Les types de fonctions d'appartenances

1. **Fonction d'appartenance discrète** : Si l'ensemble de références X est discret, la fonction d'appartenance est un ensemble de valeurs discrètes de l'intervalle $[0,1]$, comme le montre la Figure 3.7. Dans le cas où X est continu alors la fonction d'appartenance peut prendre plusieurs formes comme la forme triangulaire, trapézoïdale, exponentielle, gaussienne, etc.

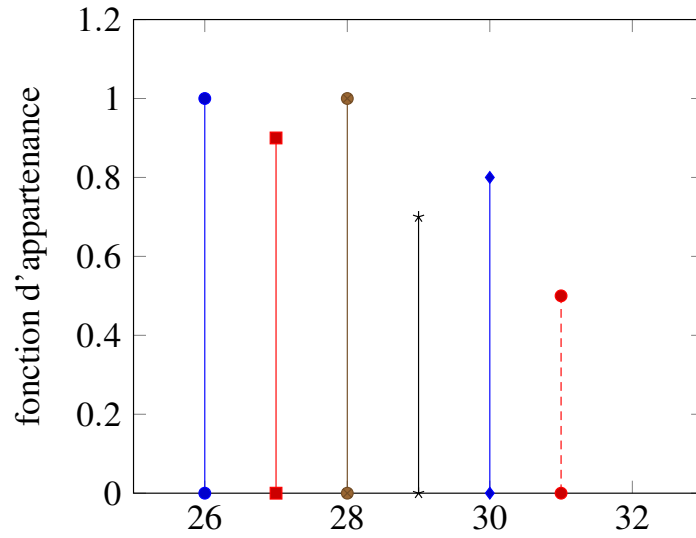


FIGURE 3.7 : Sou-ensemble flou discret

2. **Fonction d'appartenance trapézoïdale** : C'est une fonction définie par morceaux continue à droite. Elle est donnée par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > d \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c \leq x \leq d \end{cases} \quad (3.4)$$

Si $b = c$, la fonction $\mu_A(x)$ est une fonction d'appartenance triangulaire (Figure 3.8).

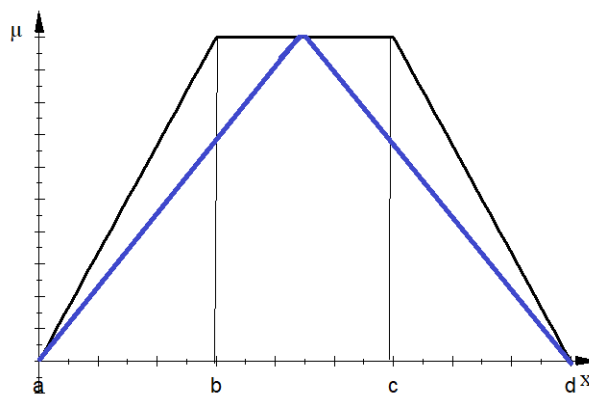


FIGURE 3.8 : Fonction d'appartenance triangulaire et trapézoïdale

3. **Fonction d'appartenance exponentielle** : Son expression est donnée par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \exp(x-a) & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ \exp(-x+b) & \text{si } x > b \end{cases} \quad (3.5)$$

4. **Fonction d'appartenance gaussienne** : Cette fonction est donnée par :

$$\mu_A(x) = \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{c} \right)^2. \quad (3.6)$$

5. **Fonction d'appartenance en forme de cloche** : Cette fonction est donnée par :

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-c)^2}. \quad (3.7)$$

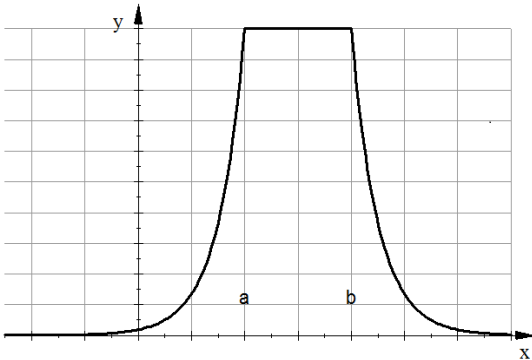


FIGURE 3.9 : Fonction d'appartenance exponentielle

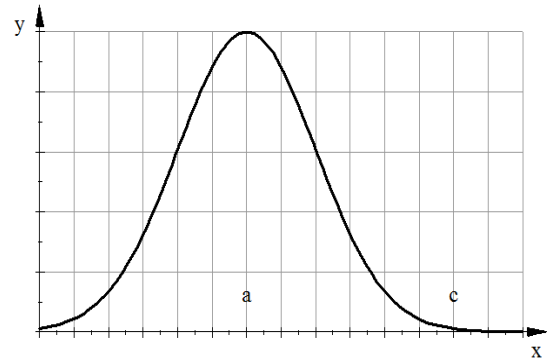


FIGURE 3.10 : Fonction d'appartenance Gaussienne

3.5 Variables et modificateurs linguistiques

Le raisonnement humain repose essentiellement sur des propositions formulées en langage naturel, qui ne peuvent pas être caractérisées de manière appropriée par la logique classique. Pour pallier cette limitation, la logique floue propose d'utiliser des variables linguistiques qui offrent une grande souplesse pour modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont les valeurs précises sont inconnues. Les variables linguistiques permettent ainsi de représenter des concepts tels que "petit", "moyen" ou "grand" par des termes flous qui peuvent prendre des valeurs numériques dans un intervalle donné. Ce concept de variable linguistique constitue l'un des principes fondamentaux de la logique floue, qui permet ainsi de raisonner de manière approximative et de modéliser des

situations où les données sont ambiguës ou imprécises.

Définition 3.5.1. Une variable linguistique est constituée du triplet (V, X_V, T_V) dans lequel :

1. V désigne le nom de la variable (température, âge, taille, etc.),
2. X_V est l'univers des valeurs prise par V (\mathbb{R} , etc.),
3. T_V c'est l'ensemble $\{A_1, A_2, \dots\}$ constitué d'ensembles flous de X_V utilisés pour décrire V .

Exemple 3.5.1. Considérons une source lumineuse et que l'on souhaite décrire son intensité. dans ce cas la variable linguistique est le triplet constitué de : V qui correspond à l'intensité lumineuse , $X = \mathbb{R}$ et $T_V = \{faible, moyenne, forte\}$, comme c'est représenté dans la Figure 3.11

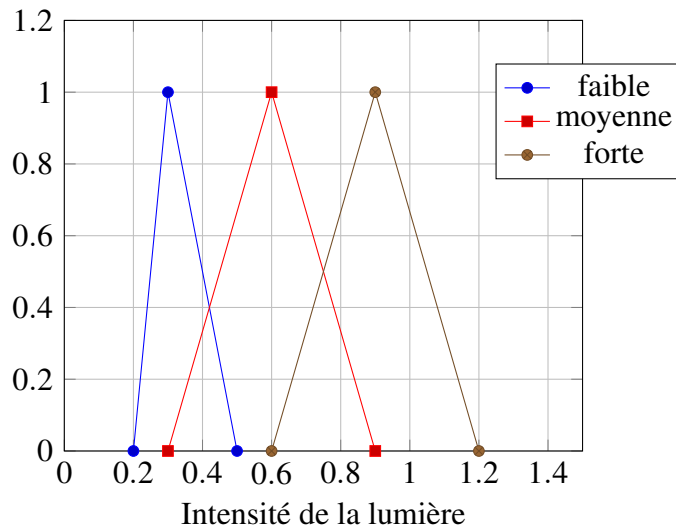


FIGURE 3.11 : Variable linguistique « intensité lumineuse »

3.5.1 Modificateurs linguistiques

Considérons une variable linguistique (V, X_V, T_V) , les modificateurs linguistiques constituent une sorte de standardisation de l'expression linguistique utilisée pour moduler une description comme par exemple « très », « plus ou moins », « très très », etc. Les caractérisations utilisées pour décrire l'état de la variable V sont donc, soit les éléments de T_V , soit des formes modulées de ces éléments obtenus en utilisant des modificateurs (Bernadette, 2003).

Définition 3.5.2. Un modificateur flou est un opérateur m qui permet de passer d'un sous-ensemble flou A à un autre sous-ensemble flou $m(A)$ dont la fonction d'appartenance $\mu_{m(A)} = \Psi_m(\mu_A)$ avec Ψ une transformation mathématique.

Remarque 5. Les premiers modificateurs ont été introduits par Zadeh (1972) tels que : "très" défini par la transformation $\psi_m(\mu_A(x)) = (\mu_A(x))^2$ appelé aussi haie de renforcement, et le modificateur "plus au moins" associé à la transformation $\psi_m(\mu_A(x)) = \sqrt{\mu_A(x)}$ dit de dilatation.

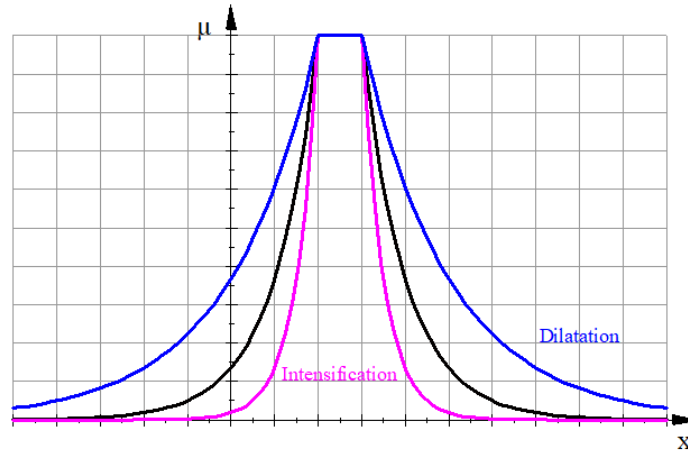


FIGURE 3.12 : Exemple de modificateurs linguistiques

Il existe plusieurs types de modificateurs dits d'intensification (ou de renforcement) et de dilatation (voir Figure 3.12) tels que :

- m est dit modificateur d'intensification si : $\forall \mu_A \in [0, 1], \psi_m(\mu_A) \leq \mu_A$.
- m est dit modificateur de dilatation si : $\forall \mu_A \in [0, 1], \psi_m(\mu_A) \geq \mu_A$.

Exemple 3.5.2. D'après l'exemple 3.5.1 si on applique les modificateurs d'intensification "très" et celui de dilatation "plus ou moins" à l'ensemble flou "l'intensité lumineuse" T_V on aura deux autres sous-ensembles flous « très forte luminosité » et « luminosité plus ou moins intense » dont les fonctions d'appartenance sont représentées dans la Figure 3.13.

3.6 Relation floue et matrice floue

Les relations floues constituent une extension des relations classiques et sont d'une importance capitale dans plusieurs domaines tels que le traitement d'images, le diagnostic médical et la prise de décision. Dans la théorie des ensembles classiques, une relation décrit l'existence d'un lien entre des éléments d'un même ensemble ou de plusieurs ensembles. Et elle est jugée "vraie" si le lien est confirmé, et "fausse" ou "inexistante" dans le cas contraire. De même, dans un contexte flou, on peut définir des relations floues dont les valeurs ou l'intensité du lien représenté par cette relation floue sont graduelles, comme par exemple : "la relation de ressemblance entre un père et son fils" ou encore "la relation entre les pluies modérées et le rendement des cultures", etc. On voit bien que l'intensité de la relation prend ses valeurs graduelles dans l'intervalle $[0, 1]$.

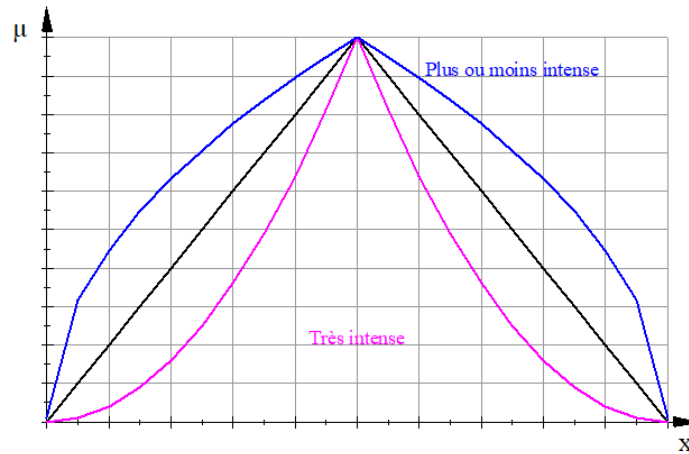


FIGURE 3.13 : Modificateur « très » appliqué à forte luminosité

Définition 3.6.1. Soient X et Y deux ensembles de références. Une relation floue R entre X et Y est un sous-ensemble flou de $X \times Y$ de fonction d'appartenance $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$.

- ▷ Dans le cas où $X = Y$ la relation R est dite relation floue binaire.
- ▷ Dans le cas où X et Y sont finis, la relation R peut être représentée par la matrice des valeurs de sa fonction d'appartenance.

Définition 3.6.2. Une matrice $M = [a_{ij}]_{i,j}$ est dite matrice floue si tous ses coefficients représentent des valeurs d'une fonction d'appartenance d'une relation floue définie sur un univers de discours discret

Exemple 3.6.1. Nous examinerons dans cet exemple deux cas de relations. On note par X et Y les univers de discours considérés.

1 Soit $X = Y = \mathbb{R}$ l'univers des vitesses, et on considère la relation « plus rapide » qui est définie par :

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x + k - 1 \\ \frac{y - x - k_1}{k_2 - k_1} & \text{si } x + k_1 \leq y < x + k_2 \\ 1 & \text{si } y \geq x_2 + k_2 \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

2 Considérons X un ensemble de 4 produits de nettoyage : $X = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, et soit la relation R définie sur $X \times X$: « est préféré à » dont la matrice est donnée par la Table 3.3.

D'après la matrice floue de la Table 3.3, le produit P_1 est préféré à P_3 avec un degré de 0.2, alors que P_3 est préférable à P_1 avec un degré de 0.8.

TABLE 3.3 : Matrice de la relation « est préféré à »

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	0.6	0.2	0.9
P_2	0.7	1	0.5	0.2
P_3	0.8	0.3	1	0.2
P_4	0.3	0.7	0.4	1

Définition 3.6.3. (Composition de relations) Soient deux relations R_1 et R_2 telles que R_1 est définie sur $X \times Y$ et R_2 sur $X \times Z$. Leur composition R notée $R_1 \circ R_2$ définie sur $X \times Z$ est donnée par :

$$\forall (x, z) \in X \times Z, \mu_R(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)).$$

3.6.1 Propriétés des relations floues

Afin de définir certaines structures sur l'univers de références X , on a besoin que les relations floues définies sur $X \times X$, puissent avoir certaines propriétés comme la réflexivité, la symétrie et la transitivité.

Définition 3.6.4. Soit R une relation floue définie sur $X \times X$. On dit que :

1. R est réflexive si et seulement si pour tout élément $x \in X$, on a $\mu_R(x, x) = 1$, ce qui signifie que tout élément x est en relation avec lui-même avec un degré maximum.
2. R est complète si et seulement si pour tout $x, y \in X$, $\max(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 1$, ce qui signifie que tout élément x est en relation avec tout élément y avec un degré maximum.
3. R est antiréflexive si et seulement si pour tout élément $x \in X$, on a $\mu_R(x, x) = 0$.
4. R est symétrique si et seulement si pour tout $x, y \in X$, on a $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$, ce qui signifie que la relation entre x et y est la même que celle entre y et x .
5. R est asymétrique si et seulement si pour tout $x, y \in X$, $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de relation réciproque entre x et y .
6. R est dite antisymétrique si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in X \times X, \mu_R(x, y) > 0 \text{ et } \mu_R(y, x) > 0 \implies x = y.$$

7. Une relation floue R est dite transitive si et seulement si :

$$\forall (x, z) \in X \times X, \left(\sup_{y \in X} \min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \right) \leq \mu_R(x, z).$$

La transitivité d'une relation floue est une propriété très importante pour construire des relations d'ordre et de préférences dans un contexte flou.

Définition 3.6.5. (Relation d'ordre floue) Soit R une relation Floue sur $X \times X$,

1. R est un préordre flou, si R est complète et transitive. Si de plus R est antisymétrique alors R est un ordre flou total.
2. R est un préordre partiel flou, si R est réflexive et transitive. Quand en plus R est antisymétrique, alors R est un ordre partiel flou.
3. Si R est un ordre partiel flou et si R est asymétrique, alors R est un ordre partiel stricte flou.

Remarquons qu'une relation d'ordre floue correspond à l'idée de classement de sous ensembles flous, et sert à définir une structure de préférences en analyse multicritère en contexte flou.

3.7 Construction de fonctions d'appartenance

Pour la théorie des ensembles flous, il est essentiel de savoir comment construire une fonction d'appartenance et de représenter les informations sous une forme qui se rapproche autant que possible de la perception humaine. Cette procédure est souvent appelée granulation ou fuzzification, car elle permet de passer d'un langage naturel à un langage formel. Dans les prochains paragraphes, nous allons passer en revue plusieurs méthodes pour générer des fonctions d'appartenance qui assurent une représentation précise et efficace des concepts flous.

3.7.1 Les approches statistiques et probabilistes

- Méthode « Oui-Non »

Cette méthode a été proposée par [Black \(1937\)](#). Elle consiste à présenter un objet x à plusieurs individus et de prendre leur avis concernant la compatibilité de cet élément avec un sous-ensemble flou A donné. La question posée n'autorise qu'une seule réponse binaire : oui ou non. Le degré d'appartenance de x à l'ensemble flou A est égal à la proportion de la réponse "oui" dans l'ensemble des réponses. :

$$\mu_A(x) = \frac{nbrT(oui)}{nbrT(oui \text{ et non})}, \quad (3.8)$$

avec $nbrT(oui)$ est le nombre total de réponses « oui » et $nbrT(oui \text{ et non})$ est le nombre total de réponses « oui et non ». Par exemple pour savoir si une température de 33°C est élevée, la question

pourra être formulée ainsi : Est-il vrai qu'une température de 33°C soit élevée ? Le degré d'appartenance de 33°C à l'ensemble flou « température élevée » sera égal à la proportion de réponses « oui » dans l'ensemble de toutes les réponses.

- **Méthode d'estimation d'ensembles**

La méthode proposée par [WANG \(1983\)](#) consiste à interroger les membres d'une population pour décrire leur perception d'un sous-ensemble flou A de X . Ainsi, le degré d'appartenance de l'élément x à A , noté $\mu_A(x)$, est déterminé en calculant la fréquence à laquelle x est décrit comme faisant partie de A parmi les membres interrogés p_i . Par exemple, si deux des trois experts interrogés considèrent que l'élément x possède la caractéristique A , alors $\mu_A(x)$ sera égal à $\frac{2}{3}$ (voir Figure 3.14).

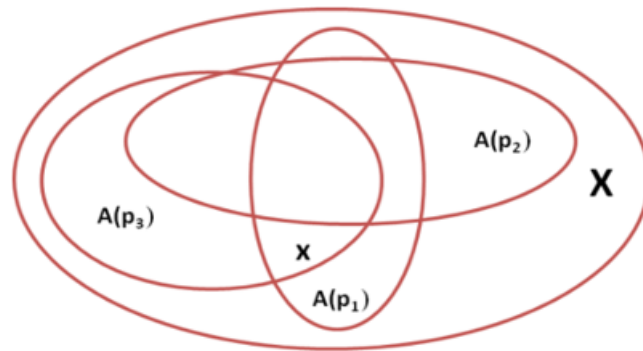


FIGURE 3.14 : Méthode d'estimation d'ensemble ([Aladenise and Bouchon-Meunier, 1997](#))

3.7.2 Méthodes de psychométrie

Les méthodes de psychométrie pour la détermination des fonctions d'appartenance ont pour objectif d'interroger un expert dans un domaine particulier afin de recueillir son opinion sur les degrés d'appartenance de différents éléments à un ensemble flou. Ces méthodes se basent sur l'hypothèse que l'expert dispose d'une connaissance intuitive de l'ensemble flou et de ses caractéristiques.

- **Méthodes « Noyau-Support »** : Pour déterminer la fonction d'appartenance, l'expert doit être interrogé pour définir le noyau et le support de la fonction. Cette étape permet de collecter quatre paramètres (p_1, p_2, p_3, p_4) qui seront utilisés pour construire une fonction qui peut prendre différentes formes telles qu'une fonction linéaire, à base d'arcs de paraboles, etc. Cette fonction atteint un maximum de 1 sur l'intervalle $[p_2, p_3]$, a une valeur minimale de 0 en dehors de l'intervalle $[p_1, p_4]$, et est non croissante entre p_3 et p_4 ainsi que non décroissante entre p_1 et p_2 . Un exemple de cette fonction est représenté sur la Figure 3.15.

- **Quantification structurelle** : Cette méthode proposée par [Zhang \(1993\)](#), consiste à partitionner l'ensemble X en trois sous-ensembles X_0, X_1 et X_f . X_1 est l'ensemble des éléments de X appartenant à A avec une certitude totale : $\mu_A(x) = 1$ (i.e., le noyau de A); X_0 est l'ensemble des éléments de X n'appartenant pas à A avec une certitude totale : $\mu_A(x) = 0$ et X_f est l'ensemble de tous les éléments

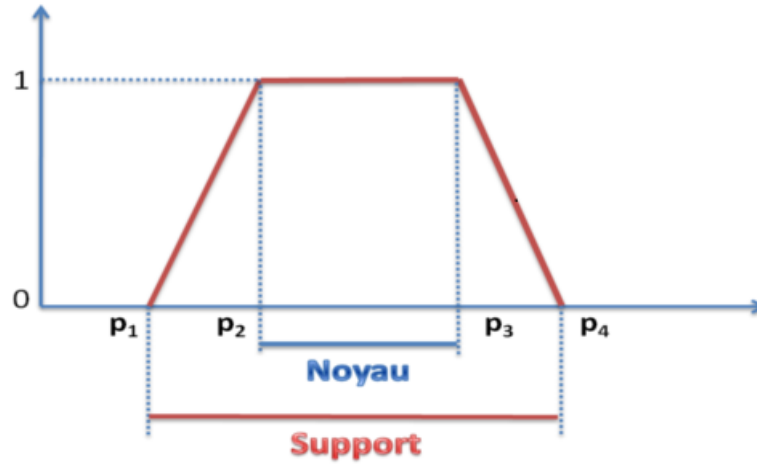


FIGURE 3.15 : Fonction d'appartenance avec quatre paramètres

x n'appartenant ni à X_1 ni à X_0 : tel que $0 < \mu_A(x) < 1$. Nous avons alors :

$$\forall x \in X_f, \mu_A(x) = \frac{\text{Card}\{(y \in X_f | x \succ_A y)\}}{\text{card}X_f} = \frac{\text{nombre de } y \prec_A x}{\text{nombre des éléments de } X_f}, \quad (3.9)$$

où $y \prec_A x$ signifie que « $x \in A$ » est plus vrai que « $y \in A$ ». L'idée de la quantification structurelle est qu'un sous-ensemble flou est défini par rapport aux autres ensembles flous dans le cadre d'un même contexte. Par exemple *bon* est supérieur à *moyen*. Cette Méthode est limitée aux ensemble discrets.

3.7.3 Méthode de l'ajustement de la courbe par la méthode des moindres carrés

Dans cette méthode, nous avons un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}$ des valeurs $(x_1, a_1), (x_2, a_2), \dots, (x_n, a_n)$, où $x_i \in X(\mathbb{R})$ et où a_i est la valeur d'appartenance de x_i à l'ensemble flou A (c'est-à-dire $a_i = \mu_A(x_i)$). Nous cherchons à déterminer la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ en utilisant une classe de fonctions paramétrées $f(x, \alpha, \beta, \dots)$, choisie selon la forme que l'on veut donner à la fonction μ_A . Cette méthode consiste à trouver les valeurs des paramètres α_0, β_0, \dots de la fonction $f(x, \alpha_0, \beta_0, \dots)$ de manière à minimiser la quantité dans l'équation (3.10).

$$E = \sum_i^n [f(x, \alpha, \beta, \dots) - a_i]^2 \quad (3.10)$$

Alors, on aura :

$$\mu_A(x) = \max [0, \min(1, f(x, \alpha_0, \beta_0, \dots))] \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Il faut noter que les deux classes de fonctions les plus utilisées sont la classe de fonctions en forme de cloche données par $f(x) = \gamma \exp(-(x-a)^2/\beta)$ et la classe de fonctions trapézoïdales.

Il existe différentes techniques pour la génération de fonctions d'appartenance automatiques. Parmi celles-ci, on peut citer les méthodes basées sur des techniques de classification automatique, telles que les C-moyennes floues ou les nuées dynamiques. D'autres méthodes utilisent des approches basées sur les réseaux de neurones, les algorithmes génétiques, ou d'autres méthodes d'apprentissage automatique. Ces techniques sont utilisées pour déterminer automatiquement les paramètres de la fonction d'appartenance à partir de l'échantillon de données. Pour plus de détails voir ([Aladenise and Bouchon-Meunier, 1997](#)).

3.8 Les Nombres flous

Les nombres flous sont des ensembles flous définis sur l'ensemble des réels \mathbb{R} , qui représente l'univers de discours ou de références. La fonction d'appartenance d'un nombre flou vérifie certaines caractéristiques données dans la définition ci-dessous.

Définition 3.8.1. *Un nombre flou N est un ensemble flou normalisé, ce qui signifie que la fonction d'appartenance $\mu_N(x)$ est une fonction de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (a) *son support est borné.*
- (b) $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel $\mu_N(x_0) = 1$,
- (c) $\mu_N(x)$ est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, si x_n est une suite croissante de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_N(x_n) \geq \mu_N(x_0)$.
- (d) $\mu_N(x)$ est convexe c'est à dire :

$$\mu_N(tx_1 + (1-t)x_2) \geq \min(\mu_N(x_1), \mu_N(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, 1].$$

Ces propriétés caractérisent les nombres flous et sont nécessaires pour s'assurer que les opérations arithmétiques sur les nombres flous donnent des résultats cohérents et raisonnables. Dans (3.4) on retrouve l'expression de la fonction d'appartenance d'un nombre flou trapézoïdal noté $N = (a, b, c, d)$ et celle d'un nombre flou triangulaire $M = (a, b, d)$. Conformément à la Définition 3.8.1, les Figures 3.2 et 3.5 représentent respectivement un nombre flou trapézoïdal et des nombres flous triangulaires.

3.8.1 Opérations arithmétiques sur les nombres flous triangulaires

Les nombres flous triangulaires sont largement utilisés en raison de leur simplicité et de leur utilité dans la prise de décision floue. Voici les opérations arithmétiques de base pour les nombres flous triangulaires, telles que définies dans ([Van Laarhoven and Pedrycz, 1983](#)). Étant donné deux nombres flous triangulaires N et M représentés par : $M = (p, q, r)$ et $N = (t, y, z)$ on a alors :

▷ L'addition $N \oplus M = (p + t, q + y, r + z)$;

- ▷ La multiplication $M \otimes N = (p \times t, q \times y, r \times s)$;
- ▷ La division $\frac{1}{M} \approx (\frac{1}{r}, \frac{1}{q}, \frac{1}{p})$, où \approx désigne une approximation.
- ▷ la soustraction $M \ominus N = (p - z, q - y, r - t)$.

En décision multicritère floue les scores (performances) d'un ensemble d'alternatives, sont évalués grâce à des variables linguistiques représentées par des nombres flous triangulaires donnés dans la table ci-dessous.

TABLE 3.4 : Exemple d'estimations floues pour les alternatives

variable linguistique	nombre flou
Très bonne	(9, 10, 10)
Bonne	(7, 9, 10)
Assez bonne	(5, 7, 9)
Moyenne	(3, 5, 7)
Légèrement mauvaise	(1, 3, 5)
Mauvaise	(0, 1, 3)
Très mauvaise	(0, 0, 1)

Les nombres flous sont utilisés pour définir l'extension de certaines méthode de décision multicritère telles que TOPSIS, SWM, VIKOR, etc. [Van Laarhoven and Pedrycz \(1983\)](#); [Buckley \(1985a\)](#) et [Boender et al. \(1989\)](#) ont introduit les opérations sur les nombres flous dans la méthode AHP de Saaty en remplaçant les nombres réels par des nombres flous triangulaires.

3.8.2 Comparaison des nombres flous

La comparaison (classement) des nombres flous est un sujet fréquemment traité dans la littérature scientifique ([McCahon and Lee, 1988](#); [Baas and Kwakernaak, 1977](#); [Buckley, 1985a](#)). Plusieurs méthodes ont été proposées, mais la méthode de comparaison introduite par [Tong and Bonissone \(1984\)](#) est souvent préférée pour sa simplicité et son efficacité.

Cette méthode de comparaison pour des nombres flous triangulaires est appliquée comme suit : soit $\mu_{N_i}(x)$ la fonction d'appartenance du nombre flou triangulaire N_i pour $i = 1, 2, \dots, n$, on définit alors la quantité suivante :

$$e_{ij} = \max_{x \geq y} \{ \min(\mu_{N_i}(x), \mu_{N_j}(y)) \}, \text{ pour tout } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

Alors, N_i domine (ou surclasse) N_j , ce qui est noté $N_i > N_j$, si et seulement si $e_{ij} = 1$ et $e_{ji} < Q_s$, où Q_s est une fraction positive fixée inférieure à 1. Des valeurs telles que 0.70, 0.80 ou 0.90 peuvent être appropriées pour Q_s , et cette valeur de Q_s doit être fixée par l'analyste et peut éventuellement être modifiée pour une analyse de sensibilité ultérieure ([Triantaphyllou and Triantaphyllou, 2000](#)).

Exemple 3.8.1. Supposons que l'on dispose de trois nombres flous triangulaires donnés par :
 $P = (2, 4, 8)$, $Q = (3, 5, 7)$ et $R = (3.5, 6.5, 10)$ D'après ce qui précède on pose $Q_s = 0.9$ on obtient :

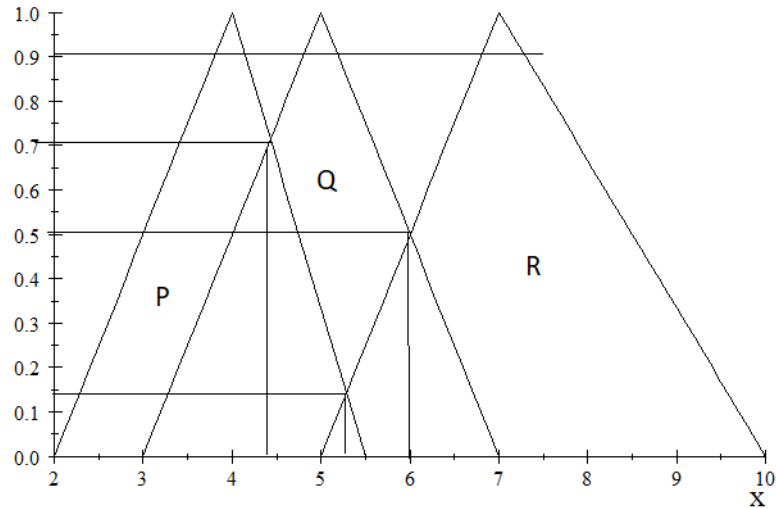


FIGURE 3.16 : Comparaison de nombres flous

▷ $e_{PQ} = 0.7$ et $e_{QP} = 1$, et comme $e_{PQ} < 0.90$, donc $Q > P$.

▷ $e_{PR} = 0.148$ et $e_{RP} = 1$, avec $e_{PR} < 0.90$, donc $R > P$.

▷ $e_{QR} = 0.5$ et $e_{RQ} = 1$, avec $e_{QR} < 0.90$, donc $R > Q$.

On en conclut que : $R > Q > P$.

Notons que cette façon de procéder pour classer des nombres flous est largement utilisée dans les méthodes fuzzifiées multi-attribut d'aide à la décision ¹ (voir Section 4.5)

3.8.3 La représentation intégrée moyenne graduée (The graded mean integration representation)

Une autre façon d'utiliser des nombres flous consiste en la notion proposée par Chou (2003) et appelée « Graded mean integration representation », qui est une méthode d'agrégation utilisée dans la théorie des ensembles flous pour agréger les valeurs d'un nombre flou.

Définition 3.8.2. (Chou, 2003) Pour tout nombre flou triangulaire donné par : $\Xi = (p, q, r)$, the graded mean integration representation (GMIR) de Ξ est défini comme suit :

$$P(\Xi) = \frac{p + 4q + r}{6}. \quad (3.13)$$

¹généralisation des méthodes au contexte flou

Cette technique très utilisée pour transformer un nombres flous en une seule valeur représentative de celui-ci. La méthode de "graded mean integration representation" est particulièrement utile pour agréger des valeurs floues dans des contextes de prise de décision floue, où les valeurs sont souvent exprimées sous forme de nombres flous.

Dans toute la suite de ce document, nous utiliserons le terme "ensemble flou" au lieu de "sous-ensemble flou "

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré la théorie des sous-ensembles flous, un outil puissant largement utilisé dans de nombreux domaines tels que la prise de décision, la reconnaissance de formes, l'intelligence artificielle et la modélisation de systèmes complexes. Les sous-ensembles flous permettent de représenter des concepts imprécis ou vagues en utilisant des degrés d'appartenance plutôt que des notions binaires de vrai ou faux. Les opérations de base sur les sous-ensembles flous telles que l'union, l'intersection et la complémentarité, ainsi que les opérations plus avancées telles que la comparaison de sous-ensembles flous, sont largement utilisées en pratique pour résoudre des problèmes réels. La théorie des sous-ensembles flous continue d'évoluer et de se développer, avec de nouvelles applications émergentes dans des domaines tels que l'apprentissage automatique et l'intelligence artificielle. Ainsi, cette théorie reste un sujet de recherche actif et fascinant avec un grand potentiel pour résoudre des problèmes complexes dans des domaines variés.

Analyse décisionnelle dans un environnement flou

4.1 Introduction

Au fur et à mesure que les systèmes gérés par l'homme deviennent plus complexes, il devient de plus en plus difficile de décrire leur comportement de manière précise et significative en raison du "principe d'incomparabilité" défini par [Zadeh \(1965\)](#). Ce principe stipule que la capacité de décrire un système avec précision diminue à mesure que sa complexité augmente, jusqu'à un seuil où la précision et la signification deviennent presque mutuellement exclusives.

Dans le domaine de la prise de décision, où l'analyse des préférences est essentielle, la subjectivité du décideur peut rendre difficile l'expression claire de ses préférences [Tzeng and Huang \(2011\)](#). Les préférences se forment sous l'influence de la perception des objets comparés, du jugement sur la qualité de cette perception et des interactions avec d'autres décideurs. Les décisions impliquent donc souvent des logiques contradictoires, des connaissances incertaines et des positions ambiguës.

Dans ce contexte, les ensembles flous peuvent être utilisés par les décideurs pour refléter au mieux leurs préférences. Les ensembles flous permettent l'évaluation linguistique, ce qui facilite le processus d'évaluation des décideurs selon ([Bellman and Zadeh, 1970](#)).

4.2 Revue de littérature

Les méthodes MCDM traditionnelles sont souvent limitées dans les situations de prise de décision réelles où les critères peuvent être ambigus ou imprécis. Les données floues et les termes linguistiques nécessitent des méthodes plus adaptées pour tenir compte de ces facteurs. De plus, les méthodes MCDM traditionnelles peuvent ne pas être en mesure de traiter efficacement les problèmes lorsque

les données sont insuffisantes pour représenter avec précision les circonstances réelles.

C'est pourquoi les ensembles flous ont été introduits dans le domaine de la MCDM, ouvrant la voie à une nouvelle famille d'approches pour traiter des problèmes difficiles à résoudre avec les méthodes MCDM conventionnelles. L'analyse multicritère floue est un ensemble de méthodes d'aide à la décision pour prendre en compte l'ambiguïté et la subjectivité dans les processus de décision. Elle est basée sur la théorie des ensembles flous et permet de modéliser des problèmes de décision impliquant plusieurs critères, qui peuvent être contradictoires ou non comparables entre eux. L'analyse multicritère floue permet ainsi de fournir des solutions qui prennent en compte les préférences et les contraintes du décideur, et qui permettent de choisir la meilleure option parmi un ensemble d'alternatives possibles.

Les premières méthodes pour prendre des décisions dans un environnement flou ont été présentées par [Bellman and Zadeh \(1970\)](#) et [Zimmermann \(1987\)](#). Ils ont proposé que les objectifs et les contraintes peuvent être spécifiés comme des ensembles flous. La décision optimale serait alors définie comme la confluence entre les objectifs à satisfaire et les contraintes à respecter. L'imprécision ou le flou dans un problème MCDM peut rendre la prise de décision plus complexe à plusieurs égards. En effet, les données floues ou qualitatives sont plus difficiles à manipuler que les données nettes, ce qui peut augmenter la charge de calcul, en particulier pendant le processus de classement pour rechercher les meilleures alternatives. ([Chen et al., 1992](#)).

Dans le domaine de la décision multi-attributs (MCDM), [Fan et al. \(2004\)](#) ont étudié l'utilisation d'informations de préférences floues pour évaluer les alternatives. Ils ont proposé une méthode basée sur un modèle de programmation linéaire pour déterminer les poids des attributs et classer les alternatives en fonction des préférences floues du décideur. Dans une autre étude, [Wu et al. \(2006\)](#) ont proposé un nouvel algorithme pour résoudre les problèmes de programmation linéaire multi-objectif flous (FMOLP) qui impliquent des paramètres flous dans les fonctions objectifs et les contraintes. L'algorithme a été entièrement décrit et analysé.

En plus de l'extension de la méthode TOPSIS par [Chen \(2000\)](#), [Abo-Sinna and Abou-El-Enien \(2006\)](#); [Abo-Sinna \(2016\)](#) ont proposé une autre extension de TOPSIS pour résoudre des problèmes de programmation multi-objectif à grande échelle impliquant des paramètres flous représentés par des nombres flous. L'optimalité α -Pareto est une extension de l'optimalité Pareto classique, qui est basée sur les ensembles α -coupes de nombres flous. Cette extension est utilisée pour résoudre des problèmes impliquant plusieurs critères contradictoires. Pour trouver une solution optimale α -Pareto, un algorithme interactif de prise de décision floue est utilisé, basé sur la méthode TOPSIS. Dans cette méthode, le décideur peut spécifier le degré de α et l'importance relative des objectifs afin de générer une solution efficace. De même, l'utilisation de la méthode VIKOR à des données floues a été opérée pour la première fois par [Wang and Chang \(2005\)](#). Cette méthode a également été combinée à la méthode GRA par [Kuo and Liang \(2011\)](#) dans un environnement flou, pour améliorer les services

fournis par certains aéroports internationaux. Dans la même optique, cette thèse propose une seconde façon de combiner VIKOR et GRA sur des données floues munies d'une mesure de divergence floue.

Nous sommes témoins de la grande utilité des ensembles flous dans l'intégration de nombreuses techniques d'optimisation, notamment dans le domaine de la prise de décision multicritère. De nombreux articles scientifiques continuent d'affluer avec des propositions de méthodes et d'algorithmes pour résoudre des problèmes de décision floue, témoignant ainsi de l'importance croissante de cette approche. Il est important de souligner que l'évolution de l'analyse multicritère ne s'est pas limitée à l'utilisation d'ensembles flous ordinaires. En effet, avec l'introduction des extensions des ensembles flous, telles que les ensembles flous de type-2, les ensembles flous intuitionnistes et les ensembles flous hésitants, les méthodes de prise de décision floues ont commencé à être étendues vers de nouvelles versions, telles que le TOPSIS flou de type-2 (Chen and Lee, 2010), l'AHP flou de type-2 (Kahraman et al., 2014), le VIKOR flou de type-2 (Yazici and Kahraman, 2015), le TOPSIS flou Intuitionniste (Ashtiani et al., 2009), le TOPSIS flou hésitant (Xu and Zhang, 2013), et bien d'autres. Malgré l'abondance de la recherche existante sur la MCDM, il reste encore plusieurs domaines de recherche à explorer. Il serait intéressant, par exemple, de développer des méthodes de décision multicritère qui reposent sur des mesures d'information floue, ainsi que d'approfondir les implications de la combinaison de différentes approches de décision multicritère pour une prise de décision plus éclairée. La Table 4.1 fournit quelques références sur la décision multicritère floue.

4.3 Procédures d'analyse décisionnelle dans un contexte flou

Dans les situations de décision réelles, l'analyste doit fournir au décideur une suggestion claire et compréhensible, même si l'information préférentielle est fournie avec ambiguïté, imprécision ou incertitude. Pour atteindre cet objectif, il est souvent nécessaire d'utiliser une procédure permettant de tirer une conclusion non floue à partir d'informations floues. Comme le suggèrent Perny and Roy (1992), on peut distinguer les éléments suivants

4.3.1 Approche conventionnelle

Dissoudre le flou puis traiter les données non floues : Cette méthode repose sur la construction d'un modèle de préférences non flou après dissolution du flou à partir d'informations initiales souvent imprécises ou incertaines (ambiguës). Ces informations sont ensuite analysées et exploitées au sein d'un système d'aide à la décision (traitement de données précises). Le système fournit des résultats précis conduisant à des recommandations claires. Toutefois, la dissolution du flou effectuée au début du processus décisionnel global n'est pas sans arbitraire. La construction d'un modèle de préférences nettes nécessite de nombreuses simplifications et distorsions des données d'origine. De ce fait, il est souvent difficile de déterminer le caractère exact et discriminatoire des résultats obtenus. Des analyses de sensibilité sont parfois réalisées ultérieurement pour pallier cette difficulté.

TABLE 4.1 : Références sur l'aide multicritère à la décision floue

Auteur(s)	Titre	Année	Type
Bellman, R. E.	On the theory of subjective probability	1961	Article
Zadeh, L. A.	Fuzzy sets	1965	Article
Zadeh, L. A.	The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning	1975	Article
Sakawa, M.	Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization	1985	Livre
Yager, R. R.	A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval	1981	Article
Buckley, J. J.	Fuzzy hierarchical analysis	1985	Article
Zimmermann, H.-J.	Fuzzy set theory and its applications	1985	Livre
Klir, G. J.	Fuzzy sets, uncertainty, and information	1987	Livre
Dubois, D. and Prade, H.	The fuzzy reasoning calculus : Its mathematical structure, computational aspects, and applications	1988	Livre
Chanas and Zielinski	A proposal for multicriteria decision making under fuzzy environment	1994	livre
Chen, S.J. and Hwang, C.L.	Fuzzy multiple attribute decision making : Methods and applications	2000	livre
Kahraman, C	Fuzzy multi-criteria decision making : theory and applications with recent developments	2008	livre
Mardani et al	Fuzzy multiple criteria decision-making techniques and applications – two decades review from 1994 to 2014	2015	livre

4.3.2 L'approche floue

Traitement des données floues puis dissolution du flou : Cette stratégie vise à éliminer le flou à un stade ultérieur du processus décisionnel global. Les informations initiales sont utilisées pour créer un modèle de préférences floues qui est ensuite traité à l'aide de méthodes de calcul flou. Les résultats obtenus sont généralement flous, ce qui permet de formuler des recommandations plus nuancées. Si nécessaire, une étape de déffuzification (dissolution du flou) est effectuée pour obtenir plusieurs ensembles de résultats précis, permettant ainsi de formuler des recommandations claires et compréhensibles pour le décideur.

La principale distinction entre les deux approches est l'emplacement de la phase de dissolution du flou dans le système d'aide à la décision. Dans l'approche floue, cette phase qui entraîne souvent un affaiblissement et une distorsion de l'information, intervient après (et non avant) l'étape d'analyse et d'exploitation dans le processus global d'aide à la décision. Cela améliore la fiabilité et la flexibilité du modèle tout en compliquant l'étape suivante d'analyse et d'exploitation. Néanmoins, l'évolution des recherches dans le domaine d'aide à la décision dans un environnement flou, a donné lieu à des techniques hybrides combinant des méthodes d'aide décisionnelle pour fournir au décideur une solution efficace, avec la moindre distorsion possible dans l'information disponible.

4.4 Méthodologie multicritère de la décision en contexte floue

Comme l'a indiqué [Zimmermann \(1987\)](#), les méthodes multicritère de prise de décision (MCDM) floue, se divisent en deux phases : **l'agrégation des scores des performances et le classement des alternatives**. Dans un problème de MCDM flou, les scores des performances sont exprimés par des ensembles flous et les notes finales sont également floues, ce qui rend difficile l'obtention de l'ordre de classement des alternatives. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire d'utiliser des algorithmes pour calculer et comparer les notes floues finales. Les méthodes de MCDM floues peuvent se concentrer soit sur la première phase, soit sur la deuxième phase, d'où la nécessité de les classer en deux catégories : les méthodes de classement floues et les méthodes de MCDM floues. Les méthodes de classement floues sont conçues pour la comparaison de nombres flous et peuvent être utilisées pour de nombreuses applications floues¹, tandis que les méthodes de MCDM floues sont spécifiquement conçues pour résoudre les problèmes de MCDM contenant des données floues. Cette différence justifie leur classification distincte pour faciliter leur utilisation efficace dans la résolution des problèmes de MCDM flous

4.4.1 Procédure des méthodes de MCDM floues

La procédure de toute méthode de MCDM floue, s'effectue selon les étapes suivantes ([Chen et al., 1992](#)) :

▷ **Étape 1** : Cette étape consiste à déterminer la taille d'un problème pour lequel une méthode MCDM floue est appropriée. La taille d'un problème MCDM est caractérisée par le nombre d'attributs et le nombre d'alternatives. Les méthodes MCDM floues sont adaptées pour résoudre un problème ayant moins de dix alternatives et dix attributs, ou n'importe quel nombre d'alternatives et moins de 350 attributs.

▷ **Étape 2** : La deuxième étape consiste à déterminer le type de données autorisé par chaque méthode, qui peut être : totalement flou, totalement flou singleton, totalement net, ou un mélange de données floues et nettes. Les problèmes réels de MCDM contiennent souvent un mélange de données floues et

¹méthode de classement de nombres flous de [Tong and Bonissone \(1984\)](#). Voir Sous- section 3.8.2

nettes.

▷ **Étape 3** : La troisième étape consiste à identifier les concepts de base des méthodes MCDM floues qui sont principalement dérivés des méthodes MCDM classiques telles que la méthode de pondération additive simple (SAW), la méthode de processus hiérarchique analytique (AHP), la méthode conjonctive, la méthode disjonctive, la théorie de la fonction d'utilité à attributs multiples (MAUF), la méthode de classement avec relations de préférence, Maximin, TOPSIS et les méthodes de MCDM classiques générales.

4.4.2 Procédure des méthodes de classement flou

Selon (Chen et al., 1992), une procédure de classement flou s'effectue conformément aux étapes suivantes :

▷ **Étape 1** : La première étape consiste à identifier le type de support de comparaison utilisé pour comparer des ensembles flous. Cela peut inclure des méthodes telles que la relation de préférences, qui établit l'ordre de préférence entre des ensembles flous, ou la moyenne et l'écart de l'ensemble flou, qui déterminent le degré de dispersion de l'ensemble flou.

▷ **Étape 2** : La deuxième étape consiste à déterminer la technique nécessaire pour développer le support de comparaison (telle que le degré d'optimalité, mesure de distance, les α -coupes, la fonction de comparaison, la distribution de probabilité, la proportion à l'optimal, les scores gauche et droit, l'indice du centre de gravité, l'intuition et l'approximation linguistique)

▷ **Étape 3** : Enfin, la troisième étape consiste à identifier les approches majeures qui sont utilisées pour combiner les résultats obtenus à partir des étapes précédentes. Ces approches peuvent inclure des méthodes basées sur l'optimisation, des approximations linguistiques, etc.

4.5 Exemple de méthodes MCDM floue : Somme pondérée floue

Dans cette section, nous présentons à titre d'exemple une méthode MCDM floue appelée la méthode *de la somme pondérée floue*, notée F-WSM (Fuzzy Weighted Sum Method). Dans le Chapitre 2, nous avons vu que la méthode WSM classique permet de déterminer la meilleure alternative qui satisfait l'équation (2.17). Dans le cas de la méthode F-WSM, nous considérons p alternatives A_i et m critères. La valeur de performance de chaque alternative par rapport à chaque critère C_j , est exprimée par un nombre flou triangulaire $\hat{A}_{ij} = (A_{ijl}, A_{ijm}, A_{iju})$. De même, les poids représentant l'importance des critères sont exprimés sous forme de nombres flous triangulaires $\hat{w}_j = (w_{jl}, w_{jm}, w_{ju})$. Pour garantir que la somme des poids puisse être égale à 1 comme dans un environnement non flou, la somme des valeurs modales w_{jm} (c'est-à-dire les valeurs modales des nombres flous triangulaires qui représentent les poids des critères) des poids des critères doit être égale à 1. La meilleure alternative est

celle qui satisfait la relation suivante (où m est le nombre d'alternatives) :

$$P_i^* = \max \sum_{j=1}^m A_{ij} w_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, p. \quad (4.1)$$

Chaque alternative est associée à un nombre flou triangulaire P_i^* qui est déterminé à partir de la somme et du produit de plusieurs nombres flous triangulaires, comme expliqué en détail dans la Sous-section 3.8.1. Pour comparer les scores P_i^* des différentes alternatives, on utilise la méthode de comparaison de nombres flous triangulaires proposée par Tong and Bonissone (1984), qui est décrite en détail dans la Sous-section 3.8.2 .

4.5.1 Illustration numérique pour F-WSM

Exemple 4.5.1. Soit un problème de décision défini sur quatre critères de décision flous C_1, C_2, C_3, C_4 , et les trois alternatives floues A_1, A_2 et A_3 . Ensuite, supposons que les données de ce problème sont données dans la matrice de décision floue suivante.

TABLE 4.2 : Matrice de décision floue

	C_1	C_2	C_3	C_4
w_j	(0.13,0.20,0.31)	(0.08,0.15,0.25)	(0.29,0.40,0.56)	(0.17,0.25,0.38)
A_1	(3.00,4.00,5.00)	(5.00,6.00,7.00)	(5.00,6.00,7.00)	(2.00,3.00,4.00)
A_2	(6.00,7.00,8.00)	(5.00,6.00,7.00)	(0.50, 1.00,2.00)	(4.00,5.00,6.00)
A_3	(4.00,5.00,6.00)	(3.00,4.00,5.00)	(7.00,8.00,9.00)	(6.00,7.00,8.00)

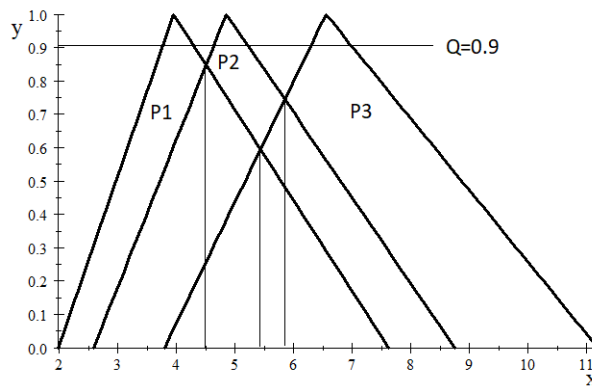


FIGURE 4.1 : Fonctions d'appartenance des performances des alternatives A_1, A_2 et A_3

Par conséquent, lorsque l'approche F-WSM est utilisée, les scores finaux de priorité (notés respectivement P_1^* , P_2^* et P_3^* des trois alternatives sont :

$$\begin{aligned}
 P_1^* &= (0.13, 0.20, 0.31) \times (3.00, 4.00, 5.00) \\
 &+ (0.08, 0.15, 0.25) \times (5.00, 6.00, 7.00) \\
 &+ (0.29, 0.40, 0.56) \times (5.00, 6.00, 7.00) \quad . \\
 &+ (0.17, 0.25, 0.38) \times (2.00, 3.00, 4.00) \\
 &= (2.583, 4.850, 8.750)
 \end{aligned}$$

De la même manière on obtient : $P_2^* = (1.979, 3.950, 7.625)$, et $P_3^* = (3.792, 6.550, 11.188)$. On doit maintenant comparer ces performances selon la méthode de *Tong and Bonissone (1984)*. La Figure 4.1 représente les fonctions d'appartenance des résultats finaux. Elles peuvent être interprétées comme une mesure de la capacité de chaque alternative à répondre aux critères de décision. En observant cette figure ainsi que la définition du coefficient e_{ij} dans (3.12), il est clair que $e_{32} = e_{12} = 1$, et que e_{13} , e_{23} et e_{21} sont inférieurs à $Q_s = 0,90$. Par conséquent, selon cette procédure de classement, A_3 est la meilleure alternative floue. Autrement dit, on a $A_3 > A_2 > A_1$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré le domaine de l'analyse multicritère dans un environnement flou, une approche permettant de prendre en compte l'ambiguïté et la subjectivité des données dans la prise de décision. Nous avons présenté une revue de la littérature sur ce sujet, afin de synthétiser les travaux existants dans ce domaine.

Nous avons ensuite abordé les deux approches principales pour l'analyse décisionnelle dans un contexte flou : l'approche conventionnelle et l'approche floue. Dans la première, le flou est dissous en premier lieu pour ensuite traiter les données non-floues. Dans la seconde, les données floues sont traitées en premier, avant de dissoudre le flou en dernière étape.

Pour finir, nous avons introduit à titre d'exemple la méthode de la somme pondérée floue (F-WSM) pour aider à mieux comprendre et s'acclimater à ce contexte. Bien qu'elle soit basée sur le même principe que la méthode classique, cette méthode permet d'évaluer dans un environnement flou, plusieurs alternatives en prenant en compte plusieurs critères qualitatifs et conflictuels, ce qui peut aider les décideurs à prendre des décisions plus éclairées et plus efficaces.

État de l'art sur les mesures de l'information floue

Introduction

De nos jours, la gestion efficace de l'information et de la connaissance est cruciale pour toutes les avancées scientifiques. La théorie de l'information est une branche des mathématiques et de l'informatique qui s'intéresse à la quantification, le stockage et la transmission de l'information. Elle a été développée par [Shannon \(1948\)](#) et comprend des concepts tels que l'entropie et l'information mutuelle pour mesurer la quantité d'information contenue dans un message ou transmise par un canal de communication. La théorie de l'information a des applications pratiques dans de nombreux domaines, notamment les télécommunications, la compression de données et la cryptographie. Elle fournit également un cadre mathématique pour étudier la quantité d'information dans les systèmes naturels ou humains. Par exemple, les scientifiques peuvent utiliser la théorie de l'information pour comprendre comment les informations circulent dans les réseaux sociaux et comment les personnes prennent des décisions en utilisant ces informations. La théorie de l'information peut également être utilisée pour concevoir des systèmes d'information efficaces et pour évaluer l'efficacité de ces systèmes.

La théorie de l'information floue constitue une extension essentielle de la théorie de l'information classique, car elle prend en compte les situations où les données sont entachées d'incertitudes, d'imprécisions ou d'ambiguïtés. Cette théorie repose sur le concept d'ensembles flous, qui permet de décrire des objets dont les limites ne sont pas clairement définies. Elle offre des outils mathématiques permettant de quantifier l'information contenue dans ces ensembles flous, de les comparer entre eux et de les manipuler de manière adéquate. Ainsi, la théorie de l'information floue joue un rôle crucial dans la gestion de l'information vague ou imprécise, en offrant des méthodes cohérentes pour la

fusion et l'analyse de telles données.

La théorie de l'information floue a des applications dans de nombreux domaines, tels que la prise de décision, le traitement d'images, la reconnaissance de formes, l'analyse de données, la robotique, etc. Elle permet notamment de traiter des données qui ne peuvent pas être représentées de manière précise ou déterministe, ce qui est souvent le cas dans des problèmes réels complexes.

5.1 Entropie comme mesure d'information

L'entropie est un concept qui a été initialement développé en physique pour mesurer le degré de désordre ou d'incertitude dans un système. Ce concept a ensuite été adapté par [Shannon \(1948\)](#) un pionnier de la théorie de l'information, pour mesurer la quantité d'information nécessaire pour décrire les occurrences d'une expérience aléatoire dans un contexte probabiliste.

En théorie de l'information, l'entropie est utilisée pour quantifier l'incertitude associée à une variable aléatoire discrète. Si l'on considère une expérience aléatoire avec un ensemble fini de résultats possibles, l'entropie mesure le nombre moyen de bits d'information (binary information unit) nécessaires pour décrire chaque résultat. Plus précisément, si une variable aléatoire discrète X prend des valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec des probabilités respectives p_1, p_2, \dots, p_n , l'entropie de X est donnée par :

$$E_{Sh}(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i). \quad (5.1)$$

Le logarithme dans (5.1) est à base 2. Notons aussi la convention selon laquelle $0 \log 0 = 0$, ce qui est facilement justifié par la continuité puisque $x \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Il convient de souligner que [Shannon \(1948\)](#) a établi sa définition de l'entropie sur la base des postulats suivants :

1. L'ambiguïté $E_{Sh}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ change légèrement s'il y a de légers changements de quantité dans les p_i et que l'ambiguïté reste inchangée (invariance par permutation) si les p_i sont interverties.
2. $E_{Sh}(p_1, p_2, \dots, p_n) = E_{Sh}(p_1, p_2, \dots, p_n, 0)$ c'est-à-dire que l'incertitude ne devrait pas changer lorsqu'un résultat impossible est ajouté au schéma.
3. $E_{Sh}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ si la distribution (p_1, p_2, \dots, p_n) est dégénérée c'est à dire qu'il existe un événement certain et que tous les autres événements ne se sont pas réalisés ($\exists p_k = 1$ et $\forall i, p_i = 0$ pour $i \neq k$).
4. $E_{Sh}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ doit être maximale lorsque $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. L'équiprobabilité mène à une incertitude maximale et donc une entropie maximale. L'entropie ne peut donc que décroître en s'éloignant de la valeur correspondant à l'équiprobabilité.

Quelques mesures d'entropie

Depuis que Claude Shannon a proposé sa mesure d'entropie, plusieurs autres auteurs ont proposé d'autres mesures d'incertitude. Par exemple, Rényi (1961) ont suggéré une généralisation de l'entropie de Shannon donnée par :

$$E_{Ry}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad (5.2)$$

où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$

De même Pal and Pal (1989) ont défini une expression de l'entropie basée sur une fonction exponentielle.

$$E_{Pal}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i e^{(1-p_i)} - 1. \quad (5.3)$$

Havrda and Charvát (1967) ont défini une mesure d'entropie pour être utilisée dans un processus de classification. Elle est donnée par :

$$E_H^\alpha(P) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right) \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1. \quad (5.4)$$

5.2 Mesure d'entropie floue

L'entropie de Shannon est un concept qui mesure la quantité d'information contenue dans un message transmis par un canal de communication bruité. En s'appuyant sur cette idée, l'entropie floue quantifie la quantité d'information qui est transmise de manière floue ou incertaine, en raison de la subjectivité inhérente à la perception humaine ou à la pensée. Cette mesure prend en compte le fait que les informations perçues et transmises par l'homme ne sont pas toujours précises ou déterministes, mais sont souvent caractérisées par une certaine imprécision ou incertitude. Ainsi, l'entropie floue fournit un cadre mathématique pour quantifier cette ambiguïté et cette imprécision dans la transmission des informations, en utilisant des concepts tels que la théorie des ensembles flous et la logique floue.

L'entropie floue a fait l'objet de plusieurs tentatives d'évaluation. La première approche a été introduite par Zadeh (1968), qui a considéré une distribution de probabilité sur l'univers de discours X , de sorte que tout ensemble flou de X est un événement flou A dont le degré d'incertitude est exprimé par :

$$H_{Zadeh}(A) = - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) P(x_i) \ln(P(x_i)). \quad (5.5)$$

Dans cette équation, $\mu_A(x_i)$ joue le rôle d'un poids, ce qui a valu à $H_{Zadeh}(A)$ l'appellation "entropie pondérée".

Dans la suite, $F(X)$ désigne l'ensemble de tous les ensembles flous de X .

Dans un environnement flou dépourvu de distributions de probabilités, [De Luca and Termini \(1972\)](#) ont proposé une nouvelle définition axiomatique de l'entropie floue (fuzziness measure). Ils ont ainsi établi l'une des expressions les plus connues de l'entropie floue, en se basant sur l'expression de l'entropie de Shannon.

Définition 5.2.1. ([De Luca and Termini, 1972](#))

Une mesure d'entropie floue définie sur $F(X)$, est une fonction à valeurs réelles définie par $H : F(X) \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant les axiomes suivants :

(E1) Pour tout ensemble flou A dans $F(X)$, $H(A) = 0$ si et seulement si A est un ensemble net non flou (ensemble ordinaire)

(E2) $H(A) = 1$ si et seulement si A est l'ensemble le plus flou¹ noté A_f de $F(X)$.

(E3) $H(A^*) \leq H(A)$, où $A^* \in F(X)$ appelé sharpened version of A tel que :

$$\begin{aligned} \mu_{A^*}(x) &\leq \mu_A(x) & \text{si } \mu_A(x) &\leq 0.5, \\ &\text{et} & & \\ \mu_{A^*}(x) &\geq \mu_A(x) & \text{si } \mu_A(x) &\geq 0.5. \end{aligned} \tag{5.6}$$

(E4) $H(A) = H(A^c)$, où A^c désigne le complémentaire de A .

Aussi, en se basant sur le fait que pour tout ensemble flou A les quantités $\mu_A(x_i)$ et $1 - \mu_A(x_i)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ donnent le même degré de flou, par conséquent, [De Luca and Termini \(1972\)](#) ont introduit une structure axiomatique de la mesure de l'entropie floue correspondant à l'entropie de [Shannon \(1948\)](#) comme étant :

$$H_{DT}(A) = \frac{-1}{n \ln 2} \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \ln(\mu_A(x_i)) + (1 - \mu_A(x_i)) \ln(1 - \mu_A(x_i)). \tag{5.7}$$

L'entropie floue est l'une des caractéristiques numériques importantes des ensembles flous et occupe une place importante dans la modélisation et la conception des systèmes complexes. Elle a de nombreuses applications dans le domaine du traitement d'images, la reconnaissance de formes, reconnaissance de voix, prise de décision, etc. Plusieurs chercheurs ont conduit des études pour

¹voir Définition 3.1.1

construire de nouvelles mesures d'entropie floue. [Bezdek \(1993\)](#) a construit deux classes d'entropie floue : une classe additive et l'autre multiplicative, basées sur des fonctions réelles telles que $H(A) = k \sum_i^n f(\mu_A(xi))$ où f doit vérifier certaines propriétés (cf ([Bezdek, 1993](#))).

Dans le domaine de la prise de décision en environnement flou, l'entropie floue est largement utilisée dans les méthodes objectives pour déterminer les poids optimaux des différents critères ([Garg et al., 2015](#); [Wang and Lee, 2009](#); [Chen and Li, 2011](#)). Par exemple, ([Xia and Xu, 2012](#)) ont proposé une nouvelle approche combinant l'entropie floue et l'entropie croisée floue qui est une mesure d'information non symétrique, pour évaluer les poids des différents critères.

5.3 Mesure de divergence floue

Avant d'introduire les mesures de divergence floue, il est important de comprendre les mesures de divergence probabilistes, qui ont inspiré la définition des mesures de divergence floue. Les mesures de divergence probabilistes sont utilisées pour évaluer la différence ou la distance entre deux distributions de probabilités. [Kullback and Leibler \(1951\)](#) ont proposé une mesure de divergence pour quantifier la déviation entre une distribution observée P et une distribution Q qui représente un modèle approximatif de P . Soit $\Pi_n = \{P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ un ensemble de distributions de probabilités. Soient P et Q deux distributions de Π_n alors on a :

$$D_{KL}(P, Q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right). \quad (5.8)$$

Notons que pour l'expression de (5.8), on doit considérer par conventions que : $0 \ln \frac{0}{0} = 0$, $0 \ln \frac{0}{q} = 0$. $D_{KL}(P, Q)$ est aussi appelée *entropie relative*, *entropie croisée*, *fonction de discrimination*. Une multitude de mesures de divergence ont été établies pour leur importance cruciale dans le domaine de l'inférence statistique, et la cryptanalyse.

Quelques années plus tard, [Csiszár \(1963\)](#) a développé une classe très importante de mesures de divergence, connue sous le nom de f -divergence où f est une fonction convexe définie par :

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, et pour toute paire de distributions $(P, Q) \in \Gamma_n \times \Gamma_n$. on a :

$$C_f(P, Q) = \sum_{i=1}^n q_i f \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \quad (5.9)$$

Théoreme 5.3.1. ([Csiszár and Korner, 1981](#))

Si la fonction f est convexe et normalisée, i.e., $f(1) = 0$, alors la f -divergence $C_f(P, Q)$ est convexe pour la paire de distributions de probabilités $(P, Q) \in \Gamma_n \times \Gamma_n$.

Les expressions indéfinies de f sont établies conformément à (Csiszár and Korner, 1981) comme étant :

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \quad 0f\left(\frac{0}{0}\right) = 0, \text{ et} \\ 0f\left(\frac{a}{0}\right) &= a \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t}, \quad a > 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Remarque 5.3.1. *La condition $f(1) = 0$ est une exigence qui contribue à assurer la cohérence et l'interprétation correcte de la divergence $C_f(P, Q)$, en particulier lorsque les distributions P et Q sont égales.*

Nous donnons ici l'exemple de la divergence du chi-deux χ^2 donnée par $\chi^2(P, Q) = \frac{1}{2n} \sum_i^n \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i}$, qui est une f -divergence de Csiszár, dont f est donnée par $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$. Nous avons aussi la divergence de Hellinger (1909) qui appartient à la classe de divergences de Csiszár, définie par : $h(P, Q) = \frac{1}{2n} \sum_i^n (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2$. La divergence $h(P, Q)$ est très utilisée dans la théorie des statistiques séquentielles et asymptotique.

Lorsque l'on utilise dans une situations donnée les ensembles flous, il peut être difficile de comparer ou d'évaluer la différence entre deux ensembles. Afin de surmonter cette difficulté, plusieurs approches ont été proposées, dont la mesure de divergence floue. Cette méthode permet de mesurer la différence ou l'écart entre deux ensembles flous en quantifiant leur degré de dissemblance. Cela permet de mieux comprendre comment ces ensembles sont différents l'un de l'autre et de mieux comprendre les caractéristiques de chacun des ensembles étudiés. La mesure de divergence floue est basée sur une analogie avec la mesure de divergence de Kullback and Leibler (1951). Bhandari and Pal (1993) ont été les premiers à utiliser la mesure de divergence floue pour évaluer l'information moyenne floue pour distinguer deux ensembles flous. Les mesures de divergence floue sont très polyvalentes et trouvent des applications dans de nombreux domaines, notamment l'analyse de données, la reconnaissance de formes, la prise de décision, la classification, et bien d'autres encore.

A cet effet, Bhandari and Pal (1993) ont considéré deux ensembles flous A et B définis sur un univers de discours X , et ont évalué l'information floue moyenne pour la discrimination en faveur de A contre B par :

$$\begin{aligned} I(A, B) &= \sum_{i=1}^n \left[\mu_A(x_i) \ln \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_B(x_i)} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu_A(x_i)) \ln \frac{1 - \mu_A(x_i)}{1 - \mu_B(x_i)} \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ensuite, ils ont proposé une mesure de divergence floue comme moyenne totale de l'information floue pour la discrimination entre A et B , qui est la version symétrique de $I(A, B)$ et est fournie par :

$$D_{BH}(A, B) = I(A, B) + I(B, A). \quad (5.12)$$

Pour pouvoir développer d'autres mesures de divergence pour les ensembles flous [Montes et al. \(2002\)](#); [Couso et al. \(2000\)](#) ont mis au point le cadre mathématique adéquat pour l'établissement d'une divergence pour les ensembles flous, qui doit vérifier certaines propriétés.

Définition 5.3.1. ([Montes et al., 2002](#); [Couso et al., 2000](#))

La fonction $D : F(X) \times F(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une mesure de divergence pour les ensembles flous si et seulement si elle satisfait les propriétés suivantes pour tout A, B et C appartenant à $F(X)$, :

(D1) $D(A, B)$ est positive,

(D2) $D(A, B) = 0$, si et seulement si $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$,

(D3) $D(A, B) = D(B, A)$ (symétrique),

(D4) $\max\{D(A \cup C, B \cup C), D(A \cap C, B \cap C)\} \leq D(A, B)$.

Remarquons que la propriété (D4) de la Définition 5.3.1, est équivalente à : $D(A, B)$ est une fonction convexe en A et B .

De leur côté, [Fan and Xie \(1999\)](#) ont introduit une nouvelle mesure d'information pour évaluer la discrimination en faveur d'un ensemble flou A par rapport à un autre ensemble flou B , à partir de laquelle il a défini la mesure de divergence $I(A, B)$ donnée par :

$$I(A, B) = \sum_{i=1}^n [2 - (1 - \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))e^{\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)} - (1 - \mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))e^{\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)}]. \quad (5.13)$$

[Bhatia and Singh \(2012\)](#) ont développé les mesures suivantes :

(i) La divergence nommée « arithmetic-geometric measure of fuzzy divergence » :

$$T(A, B) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))}{2} \ln \frac{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))}{2\sqrt{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i)}} + \frac{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))}{2} \ln \frac{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))}{2\sqrt{(1 - \mu_A(x_i))(1 - \mu_B(x_i))}} \right]. \quad (5.14)$$

(ii) Ils ont aussi établi la divergence floue nommée la discrimination triangulaire généralisée :

$$\Delta_m(A, B) = \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{2m} \left[\frac{1}{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^{2m-1}} + \frac{1}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^{2m-1}} \right], \quad m > \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

Verma and Maheshwari (2017) ont défini la divergence appelée « fuzzy Jensen-exponential divergence measure » :

$$\begin{aligned}
 FJED(A|B) = & \frac{1}{n(\sqrt{e}-1)} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))}{2} \exp \frac{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))}{2} \right. \\
 & + \frac{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))}{2} \exp \frac{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))}{2} \\
 & - \frac{(\mu_A(x_i)) \exp(1 - \mu_A(x_i)) + (1 - \mu_A(x_i)) \exp(\mu_A(x_i))}{2} \\
 & \left. - \frac{(\mu_B(x_i)) \exp(1 - \mu_B(x_i)) + (1 - \mu_B(x_i)) \exp(\mu_B(x_i))}{2} \right], \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Joshi and Kumar (2018) on établi la mesure de divergence suivante

$$\begin{aligned}
 I_R^S(A, B) = & \frac{R \times S}{n(S-R)} \sum_{i=1}^n \left((\mu_A(x_i))^S (\mu_B(x_i))^{1-S} + (1 - \mu_A(x_i))^S (1 - \mu_B(x_i))^{1-S} \right)^{\frac{1}{S}} \\
 & - \left((\mu_A(x_i))^R (\mu_B(x_i))^{1-R} + (1 - \mu_A(x_i))^R (1 - \mu_B(x_i))^{1-R} \right)^{\frac{1}{R}} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

où soit $0 < R \leq 1$, $S > 1$ soit $R > 1$, $0 \leq S < 1$.

De nombreuses mesures de divergence floue ont été développées ces dernières années pour une utilisation dans des stratégies de résolution de problèmes de prise de décision, de segmentation d'images, de reconnaissance de formes et bien d'autres domaines. Les mesures de divergence floue sont considérées comme un outil puissant pour obtenir des informations discriminantes dans un large éventail de domaines et peuvent potentiellement améliorer les connaissances des experts.

Des chercheurs ont récemment proposé de nouvelles mesures de divergence floue, adaptées à des méthodes de résolution de problèmes de prise de décision floue. Par exemple, Ohlan and Ohlan (2016) ont présenté une mesure de divergence généralisée floue dite de Hellinger basée sur la mesure de divergence généralisée de Hellinger pour les distributions de probabilités, tandis que Verma and Maheshwari (2017) ont développé une méthode pour résoudre les problèmes de décision multicritère en utilisant une nouvelle mesure de divergence floue du type Jensen-exponentiel. De même, Mishra et al. (2018) ont proposé une nouvelle mesure de divergence appliquée à la décision multicritère floue pour sélectionner le meilleur fournisseur de services de téléphonie mobile.

Ces travaux montrent que les mesures de divergence floue continuent d'évoluer pour répondre aux besoins de différents domaines, et que les chercheurs continuent de développer des méthodes plus efficaces pour résoudre les problèmes de prise de décision floue.

En plus de la mesure de divergence floue, une mesure de distance floue est aussi un concept devenu important en raison de ses applications significatives dans divers cadres flous.

Définition 5.3.2. (*Fan and Xie, 1999*) Une fonction réelle $d : F(X) \times F(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une mesure de distance sur $F(X)$, si d satisfait aux propriétés suivantes

$$(d1) \quad d(A, B) = d(B, A) \quad \forall A, B \in F(X),$$

$$(d2) \quad d(A, A) = 0, \quad \text{pour tout } A \in F(X),$$

$$(d3) \quad d(N, N^c) = \max_{A, B \in F(X)} d(A, B), \quad N \text{ est un ensemble clair},$$

$$(d4) \quad \forall A, B, C \in F(X), \text{ si } A \subset B \subset C, \text{ alors } d(A, B) \leq d(A, C) \text{ et } d(B, C) \leq d(A, C).$$

Fan and Xie (1999) ont également étudié la relation entre l'entropie floue, la distance et la mesure de similarité floue où, une mesure de similarité S définie sur $F(X)$ est liée à la distance (exprimée en échelle normalisée) par la relation suivante : $S(A, B) = 1 - d(A, B)$.

5.4 Mesure de connaissances floues (fuzzy knowledge measure)

Dans le domaine de la théorie de l'information floue, une question pertinente se pose : si l'entropie floue permet d'estimer la quantité d'information floue, de désordre et d'irrégularité des ensembles flous. Comment peut-on mesurer la quantité d'informations nettes et non floues contenues dans cet ensemble ? En réponse à cette question, une mesure de connaissance floue a été définie en tant que dual complémentaire de l'entropie floue. Alors que l'entropie floue fournit une estimation de la quantité d'ambiguïté, d'imprécision des ensembles flous, une mesure de connaissance floue détermine la quantité de connaissance et de précision associée à ces ensembles flous.

Selon *Arya and Kumar (2020)*; *Singh et al. (2019)*, les mesures de connaissances peuvent capturer des informations essentielles qui expriment la quantité de certitude ou de précision dans un ensemble flou. Ces mesures peuvent également être considérées comme le degré moyen de discrimination entre un ensemble flou et l'ensemble le plus flou A_f de $F(X)$. Plusieurs études antérieures ont été menées sur les mesures de connaissances en utilisant des ensembles flous intuitionnistes (IFS), qui sont caractérisés par une fonction d'appartenance, une fonction de non-appartenance et une marge d'hésitation. *Szmidt et al. (2011, 2014)* ont remis en question la dualité des mesures d'entropie et de connaissances dans un cadre intuitionniste et ont défini une nouvelle mesure de connaissance qui est en fait une mesure duale de l'entropie. De plus, *Nguyen (2015)* ont proposé une nouvelle mesure de connaissances pour les IFS, basée sur la distance entre un IFS et l'ensemble le plus intuitionniste, en se basant sur la distance décrite dans *Szmidt and Kacprzyk (2000)*.

Dans leur article de 2019, *Singh et al. (2019)* ont introduit pour la première fois le concept de mesure de connaissance pour les ensembles flous classiques et ont démontré sa dualité avec une mesure d'entropie floue. Ils ont également proposé une nouvelle expression pour cette mesure, qui a

été utilisée pour déterminer les poids des critères dans une procédure de résolution de problèmes de décision multicritère.

Definition 5.4.1. (Singh et al. (2019) Soit $A \in F(X)$; une fonction $K : F(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée mesure de connaissance si elle satisfait les quatre propriétés suivantes :

(k1) $K(A)$ atteint son maximum si et seulement si A est une ensemble net ordinaire,

(k2) $K(A)$ atteint son minimum si et seulement si $A = A_f$, où A_f est l'ensemble le plus flou de $F(x)$,

(k3) $K(A^*) \geq K(A)$, où $A^* \in F(X)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \mu_{A^*}(x) &\leq \mu_A(x) & \text{si } \mu_A(x) &\leq 0.5; \\ & \text{et} & & \\ \mu_{A^*}(x) &\geq \mu_A(x) & \text{si } \mu_A(x) &\geq 0.5. \end{aligned} \tag{5.18}$$

(k4) $K(A^c) = K(A)$, où A^c est le complémentaire de A .

Dans leur article, Singh et al. (2020) ont généralisé cette mesure en introduisant un paramètre de généralisation. De leur côté, Singh and Ganie (2021) ont proposé une mesure de connaissances floues généralisée ayant deux paramètres, qui a été intégrée à la technique MOORA. Plus récemment, Joshi (2022) a proposé une nouvelle mesure de connaissances floues basée sur l'entropie floue et ont démontré son utilité pour déterminer les poids des critères dans un problème de décision multicritères. Leur approche est illustrée dans l'équation (5.19).

$$Kjo(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{2((\mu_A(x_i))^2 + (1 - \mu_A(x_i))^2)} - 1}{(\sqrt{2} - 1)}, \tag{5.19}$$

où le coefficient $\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}$ est une constante de normalisation de façon à voir $0 \leq Kjo(A) \leq 1$.

D'autres mesures de connaissances (voir (6.27), (6.28) et (6.29)) seront exposées au chapitre suivant.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art des différentes mesures classiques de l'information, ainsi que des mesures de l'information floue. Nous avons commencé par décrire les mesures classiques de l'information telles que l'entropie de Shannon et la divergence de Kullback and Leibler, qui sont des outils fondamentaux pour quantifier l'incertitude et la similarité entre des distributions de probabilités. Ensuite, nous nous sommes concentrés sur le concept des mesures de l'information floue, qui sont pour la plupart des extensions des mesures d'entropie ou de divergence définies dans un espace de probabilités. À l'exception de la mesure de connaissances pour les ensembles flous

classiques, qui est définie comme un concept dual de l'entropie floue, servant à quantifier la quantité d'information utile et exempte d'ambiguïté dans un ensemble flou.

Ces mesures sont de plus en plus utilisées dans différents domaines, notamment en théorie de la décision. Les mesures de divergence floue sont particulièrement utiles pour les méthodes de décision multicritère, telles que TOPSIS, MOORA, VIKOR, TODIM, . . . , etc., qui permettent d'évaluer la proximité entre des profils disponibles et un profil idéal. En conséquence, le paradigme de l'information floue constitue un outil de choix pour la modélisation et l'évaluation de l'ambiguïté et/ou de la précision dans les problèmes de décision. Il est donc devenu un élément naturel de la boîte à outils de la théorie de la décision, offrant des moyens efficaces pour traiter des situations complexes et des données imprécises ou incertaines.

Troisième partie

Contributions

Construction de mesures de divergence et de connaissances floues : une approche basée sur la f -divergence de Csiszár

6.1 Introduction et contexte

De nombreuses méthodes d'analyse multicritère reposent sur le principe de la programmation de compromis, qui consiste à identifier une solution optimale la plus proche possible d'un point idéal. Pour évaluer cette proximité, une fonction de distance est utilisée dans l'analyse. Afin de permettre à cette approche de fonctionner correctement pour un large éventail d'applications en contexte flou, il est essentiel de développer une mesure de divergence floue flexible et adaptable. D'autre part, une mesure de connaissances floues joue un rôle substantiel dans divers domaines de la recherche, car elle fournit des informations précises et complémentaires sur les ensembles flous. En tant que mesure duale de l'entropie floue, elle est particulièrement utile pour l'analyse de systèmes complexes et flous. Par conséquent, l'utilisation de ce type de mesures dans une approche d'aide à la décision dans un environnement flou est une démarche judicieuse.

Ce chapitre porte sur la première partie des contributions présentées dans l'article ([Chaabane and Kheffache, 2023](#)). Cette première partie concerne la construction de deux mesures de l'information pour les ensembles flous, qui ont été élaborées en suivant deux étapes principales :

1. La première étape consiste à définir et valider une nouvelle mesure généralisée de divergence floue, de type f -divergence de Csiszár. Pour montrer l'efficacité de cette mesure dans la détection de toute discrimination qui pourrait exister entre deux ensembles flous, Nous allons la comparer à quelques mesures de divergence bien connues.

2. La seconde étape vise à construire une nouvelle classe de mesures de connaissances floues. Cette construction s'appuie sur la structure mathématique de la notion de la f -divergence de Csiszár, ainsi que sur l'idée que toute mesure de connaissances floues devrait quantifier le degré de déviation entre un ensemble flou et l'ensemble le plus flou noté par $A_f = [\frac{1}{2}]$. Nous proposons ainsi une classe de mesures de connaissances floues qui respectent certaines propriétés axiomatiques, permettant d'évaluer la quantité d'information exempte d'ambiguïté qui devrait augmenter plus un ensemble flou s'éloigne de l'ensemble le plus flou. En outre, cette approche permet de déduire (ou de dériver) une mesure de connaissances floues associée à toute mesure de divergence floue de type f -divergence de Csiszár.

6.2 Nouvelle mesure généralisée de divergence floue

L'objectif de cette section est de développer une nouvelle mesure généralisée de divergence floue de type f -divergence de Csiszár. Pour ce faire, nous devons introduire une fonction f convexe et normalisée conformément au Théorème 5.3.1. Ainsi, la fonction proposée est f_m donnée par :

$f_m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ où :

$$f_m(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^{2m+2}}{(x+1)^m}, \quad (6.1)$$

vérifiant $f_m(1) = f'_m(1) = 0$, avec les expressions indéfinies données comme dans (5.10).

Pour deux ensembles flous A et B quelconques dans $F(X)$, où les valeurs d'appartenance sont respectivement : $\mu_A(x_i)$, et $\mu_B(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. On obtient l'expression :

$$D_m(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)} \right)^{2m+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^m} + \frac{\left(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)} \right)^{2m+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^m} \right], \text{ où } m \in \mathbb{N} \quad (6.2)$$

Théorème 6.2.1.

$D_m(A, B)$ définie dans (6.2) est une mesure généralisée de divergence floue.

Démonstration. D_m est une mesure de divergence si elle satisfait les propriétés (D1)-(D4) de la Définition 5.3.1.

(D1) Pour A, B deux ensemble de $F(X)$ et pour $m \in \mathbb{N}$, nous avons de (6.2) que $D_m(A, B)$ est la somme de termes tous positifs alors $D_m(A, B) \geq 0$. Ce qui prouve (D1).

(D2) Supposons que $D_m(A, B) = 0$ alors de (6.2) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)}\right)^{2m+2}}{\left(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)\right)^m} = 0, \\ \text{et} \\ \frac{\left(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)}\right)^{2m+2}}{\left(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right)^m} = 0. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

(6.3) est vérifiée si $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$. D'autre part, il est évident que si $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$ ceci implique que $D(A, B) = 0$. Ce qui vérifie (D2).

(D3) Il est facile de vérifier que : $D_m(A, B) = D_m(B, A)$ d'où, D_m est symétrique, on conclut que (D3) est satisfaite.

(D4) Vérifions la propriété (D4), ce qui est équivalente à prouver la convexité de D_m en A et B conjointement. Pour cela, il suffit de montrer que f_m est convexe (voir Théorème 5.3.1)

$$f_m''(x) = \frac{(2x + 2m\sqrt{x} + 2mx^{\frac{3}{2}} + 4mx + x^2 + 1)}{4x^{\frac{3}{2}}(x+1)^{m+2}} \times (m+1)(\sqrt{x}-1)^{2m}. \quad (6.4)$$

À partir de (6.4), on obtient $f_m''(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$, et $\forall m \in \mathbb{N}$, d'où f_m est une fonction convexe. On en déduit du Théorème 5.3.1, que D_m est conjointement convexe en A et B .

(D1)-(D4) sont vérifiées, alors D_m est une mesure valide de divergence floue.

□

Cas particuliers de D_m

Pour des valeurs particulières du paramètre m , D_m se réduit à certaines mesures de divergence floue bien connues.

1. $m = -1$, $D_{m=-1}(A, B) = R(A, B)$, où $R(A, B)$ est la mesure de divergence de la moyenne arithmétique floue. (Tomar and Ohlan, 2014b) donnée par :

$$R(A, B) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)}{2} + \frac{2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)}{2} \right]. \quad (6.5)$$

2. $m = 0$, $D_{m=0}(A, B) = h(A, B)$ où $h(A, B)$ est la discrimination floue de Hellinger (Beran, 1977) définie par :

$$h(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)}\right)^2}{2} \right]. \quad (6.6)$$

Remarque 1. Pour $m = 1$, $D_{m=1}$ peut être exprimée comme étant : $D_{m=1}(A, B) = 2h(A, B) - \frac{1}{2}\Delta(A, B)$, où : $\Delta(A, B)$ est la mesure de discrimination triangulaire floue (Dragomir, 2003) donnée par :

$$\Delta(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 \times \left[\frac{1}{\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)} + \frac{1}{2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)} \right]. \quad (6.7)$$

Le théorème ci-dessous exhibe certaines propriétés de la mesure de divergence proposée

Theorem 6.2.2. Soient A, B et C appartenant à $F(X)$, D_m vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $D_m(A \cup B, A \cap B) = D_m(A, B)$,
- (b) $D_m(A \cup B, A) + D_m(A \cap B, A) = D_m(A, B)$,
- (c) $D_m(A \cup B, C) + D_m(A \cap B, C) = D_m(A, C) + D_m(B, C)$,
- (d) $D_m(A, A \cup B) = D_m(B, A \cap B)$,
- (e) $D_m(A, A \cap B) = D_m(B, A \cup B)$,
- (f) $D_m(\bar{A}, \bar{B}) = D_m(A, B)$,
- (g) $D_m(\overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}) = D_m(\bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}) = D_m(A, B)$,
- (h) $D_m(A, \bar{B}) = D_m(\bar{A}, B)$,
- (i) $D_m(A, \bar{B}) + D_m(\bar{A}, \bar{B}) = D_m(A, B) + D_m(\bar{A}, B)$.

Démonstration. La preuve est donnée dans Annexe B. □

Theorem 6.2.3. *La mesure généralisée de divergence floue D_m est une mesure de distance si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $D_m(N, N^c) = \max_{A, B \in F(X)} D_m(A, B) = 1$, où N est ensemble ordinaire,

2. Soient A, B et C dans $F(X)$.

Si $A \subset B \subset C$, alors $D_m(A, B) \leq D_m(A, C)$ et $D_m(B, C) \leq D_m(A, C)$.

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $m \in \mathbb{N}$, la dérivée de f est

$$f'_m(x) = (\sqrt{x} - 1)^{2m} (\sqrt{x} - 1) \frac{m + x + m\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x+1)^{m+1}}. \quad (6.8)$$

1. De (6.8), on constate que le le signe f'_m dépend du signe de $(\sqrt{x} - 1)$, ce qui implique que f_m est décroissante sur $(0, 1)$ et croissante sur $(1, +\infty)$. De plus, posons $x = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_B(x_i)}$ et de (5.10), alors $x = 0$ que si $\mu_A(x_i) = 0$ et $\mu_B(x_i)$ est quelconque $\in]0, 1]$ en particulier, si $\mu_B(x_i) = 1 - \mu_A(x_i)$, de (6.1), et on a $f_m(0) = 1$. D'autre part, quand $\mu_A(x_i) = 1$ et $\mu_B(x_i) = 0$ alors $x \rightarrow +\infty$, en utilisant (6.1), on aura $D_m(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 0 f_m\left(\frac{1}{0}\right) = 1$. Par conséquent on a :

$$D_m(N, N^c) = \max_{A, B \in F(X)} D_m(A, B) = 1.$$

2. Pour montrer que $D_m(A, B) \leq D_m(A, C)$, considérons $t_1 = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_B(x_i)}$ et $t_2 = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_C(x_i)}$ et du fait que $A \subset B \subset C$ on aura $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_C(x_i) \forall x_i \in X$, donc $0 \leq t_2 \leq t_1 \leq 1$ et puisque selon (6.8) on a, $f_m(x)$ est décroissante sur $(0, 1)$, ce qui donne $f_m(t_1) \leq f_m(t_2)$ d'où on obtient : $D_m(A, B) \leq D_m(A, C)$.

De la même façon, pour prouver que $D_m(B, C) \leq D_m(A, C)$, on considère $t_1 = \frac{\mu_B(x_i)}{\mu_C(x_i)}$ et $t_2 = \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_C(x_i)}$, et puisque $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i)$ pour tout $x_i \in X$ alors on obtient $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq 0$, car $f_m(t)$ est décroissante sur $(0, 1)$, ce qui donne $f_m(t_1) \leq f_m(t_2)$, on en déduit que $D_m(B, C) \leq D_m(A, C)$.

On en conclut que D_m est une mesure de distance sur $F(X)$.

□

6.2.1 Analyse comparative pour D_m

Afin de démontrer l'utilité et l'efficacité de la divergence proposée D_m , celle-ci a été comparée à plusieurs mesures de divergence floue couramment utilisées et proposées par les auteurs, notamment : [Bajaj and Hooda \(2010\)](#) ont proposé une mesure de divergence floue basée sur la divergence de probabilités donnée dans ([Rényi, 1961](#)), définie pour $m > 0$ et $m \neq 1$ comme :

$$d_m(A, B) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^n \ln \left[\mu_A(x_i)^m \mu_B(x_i)^{1-m} + (1 - \mu_A(x_i))^m (1 - \mu_B(x_i))^{1-m} \right]. \quad (6.9)$$

Bhatia and Singh (2012) ont élaboré une nouvelle classe (m, q) de mesure de divergence donnée par :

$$D_m^q(A, B) = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^n [(\mu_A^m(x_i)\mu_B^{1-m}(x_i) + (1-\mu_A(x_i))^m(1-\mu_B(x_i))^{1-m})^{\frac{q-1}{m-1}} - 1], \quad (6.10)$$

$m > 0, m \neq 1$ and $q > 0, q \neq 1$.

Ohlan (2015) a introduit la mesure paramétrique de la divergence floue en tant que :

$$L_m(A, B) = \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}{2^m} \times \left[\frac{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^m}{(\sqrt{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i)})^{m+1}} + \frac{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^m}{(\sqrt{(1-\mu_A(x_i))(1-\mu_B(x_i))})^{m+1}} \right], \quad (6.11)$$

$m \in \mathbb{N}$

Ohlan and Ohlan (2016) ont proposé la mesure généralisée de divergence de Hellinger définie par :

$$h_m(A, B) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2(m+1)}}{(\sqrt{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i)})^m} + \frac{(\sqrt{1-\mu_A(x_i)} - \sqrt{1-\mu_B(x_i)})^{2(m+1)}}{(\sqrt{(1-\mu_A(x_i))(1-\mu_B(x_i))})^m} \right], \quad (6.12)$$

$n \in \mathbb{N}$

L'analyse est effectuée à l'aide de deux ensembles flous définis sur l'univers de discours $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, soient A et B les deux ensembles flous donnés par : $A = \{1/0.3, 2/0.4, 3/0.2, 4/0.1, 5/0.5\}$, $B = \{1/0.2, 2/0.2, 3/0.3, 4/0.4, 5/0.4\}$.

En examinant attentivement les résultats de la Table 6.1, on constate que la divergence $D_m^{q=2}$ est constante pour $m > 7$. Concernant $L_m(A, B)$, on peut constater que pour quelques valeurs du paramètre m (c'est-à-dire $m = 0, \dots, 7$), les valeurs de disparité sont raisonnables par rapport aux autres mesures. En revanche, à partir de $m = 38$, L_m augmente rapidement, de même pour d_m . Cependant, h_m et D_m sont plus fonctionnelles, leur efficacité est représentée par la minimisation des degrés de divergence (Tomar and Ohlan, 2014a). La Figure 6.1 illustre comment D_m est supérieur aux mesures de divergence mentionnées précédemment. En fait, la capacité de D_m à détecter même la plus petite différence entre deux ensembles flous, augmente avec l'augmentation de m .

TABLE 6.1 : Résultats de l'analyse comparative de D_m

m	$h_m(A,B)$	$L_m(A,B)$	$d_m(A,B)$	$D_m^{q=2}$	$D_m(A,B)$
0	6.4037×10^{-2}	0.9207	—	—	6.4037×10^{-2}
1	5.6681×10^{-2}	1.0718	—	—	2.3198×10^{-3}
2	2.5598×10^{-2}	0.5010	0.6895	7.8732	4.1347×10^{-4}
3	1.2565×10^{-2}	1.1868	1.8070	6.0075	8.0685×10^{-5}
7	7.8126×10^{-4}	0.5583	8.2080	5.8399	1.2801×10^{-7}
38	3.6380×10^{-13}	2169	65.7061	5.8399	2.7488×10^{-29}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	8.8818×10^{-17}	31533	88.0350	5.8399	1.1259×10^{-37}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	8.2718×10^{-26}	2.5469×10^7	143.8600	5.8399	1.2089×10^{-58}

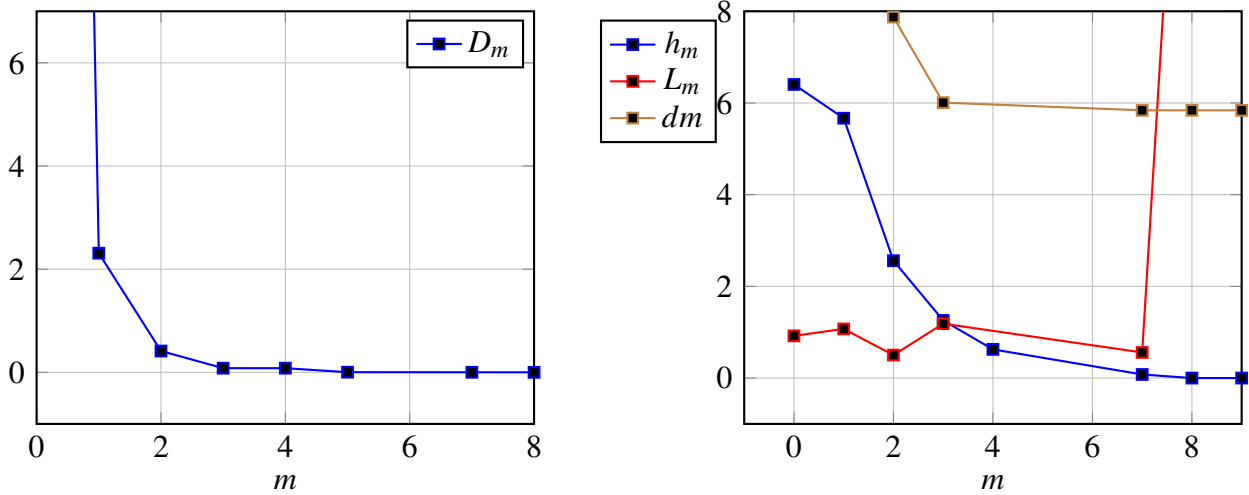


FIGURE 6.1 : Comparaison de D_m avec h_m , L_m et dm relativement à m

6.3 Nouvelle classe de mesures de connaissances floues

L'objectif de cette section est de développer une nouvelle classe de mesures de connaissances floues, basées sur la f -divergence de Csiszár, puis de déduire une nouvelle mesure généralisée de connaissances floues à partir de la divergence floue D_m .

Soient A et B deux ensembles flous de $F(X)$, et supposons que D_f est une f -divergence floue de Csiszár caractérisée par :

$$D_f(A,B) = \sum_{i=1}^n q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right), \quad (6.13)$$

où $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe et on suppose de plus que f est deux fois différentiable sur \mathbb{R}^+ avec $f(1) = f'(1) = 0$, où pour ses expressions indéfinies, on utilise l'interprétation donnée

dans (5.10). Maintenant, considérons $B = [\frac{1}{2}]$ l'ensemble le plus flou dans $F(X)$, alors en termes de fonctions d'appartenance de A et B on obtient :

$$D_f(A, [\frac{1}{2}]) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(2\mu_A(x_i)) + f(2(1 - \mu_A(x_i)))] . \quad (6.14)$$

Considérons la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que

$$g(\mu_A(x_i)) = \frac{1}{2} [f(2\mu_A(x_i)) + f(2(1 - \mu_A(x_i)))] .$$

Alors pour $A \in F(X)$, on définit :

$$K_f(A) = c \sum_{i=1}^n g(\mu_A(x_i)), \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad (6.15)$$

où c est une constante de normalisation.

Théorème 6.3.1. $K_f(A)$ dans (6.15) est une mesure de connaissances floues.

Démonstration. Sans perte de généralité, posons $c = 1$ et $t_i = \mu_A(x_i)$ de façon à avoir :

$$g(t_i) = \frac{1}{2} [f(2t_i) + f(2(1 - t_i))] . \quad (6.16)$$

la dérivée de g est :

$$g'(t_i) = f'(2t_i) - f'(2(1 - t_i)) . \quad (6.17)$$

Puisque f est convexe et deux fois différentiable, alors f' est croissant sur \mathbb{R}^+ , on a alors : pour

$$t_i \in [0, 0.5), \text{ on a } f'(2t_i) < f'(2(1 - t_i)) \Rightarrow g'(t_i) < 0,$$

et pour

$$t_i \in (0.5, 1), \text{ on a } f'(2t_i) > f'(2(1 - t_i)) \Rightarrow g'(t_i) > 0.$$

De plus, nous obtenons $g'(t_i) = 0$ pour $t_i = 0,5$. Aussi, nous notons que g est une fonction convexe sur $[0, 1]$. Ainsi, $g(0,5)$ est un minimum global de g . D'autre part, g atteint son maximum en $t_i = 0$ ou $t_i = 1$, et on aura :

$$\max_{[0,1]} g(t_i) = \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] .$$

D'après la Définition 5.4.1, $K_f(A)$ devrait vérifier les axiomes (k1)-(k4).

(k1) D'abord, nous supposons que $K_f(A)$ est maximale, c'est-à-dire que $g(\mu_A(x_i))$ est maximale, ce qui implique que $\mu_A(x_i) = 0$ ou $\mu_A(x_i) = 1$ pour tous les $x_i \in X$. Ainsi, A est un ensemble net

(ordinaire). Inversement, supposons que A est un ensemble net, c'est-à-dire que $\mu_A(x_i) = 1$ ou $\mu_A(x_i) = 0$, donc $g(\mu_A(x_i))$ est maximale puisque g atteint son maximum en 0 et en 1. Donc $K_f(A)$ est maximale. Ceci prouve (k1).

(k2) Puisque, g atteint son unique minimum en $t_i = 0.5$, c'est-à-dire, $g(0.5) = 0$ car $f(1) = 0$. Ainsi, si $A = [\frac{1}{2}]$ pour tout $x_i \in X$, on obtient $K_f(A) = 0$.

Inversement, si $K_f(A) = 0$, cela implique que $g(\mu_A(x_i)) = 0$, c'est à dire $f(2\mu_A(x_i)) = f(2(1 - \mu_A(x_i))) = 0$, ce qui est vrai que si $\mu_A(x_i) = \frac{1}{2}$ car on a $f(1) = 0$. Par conséquent, (k2) est vrai.

(k3) Considérons A^* la version affinée de A (sharpened version of A), c'est-à-dire

$$\mu_{A^*}(x_i) \leq \mu_A(x_i) \text{ si } \mu_A(x) \leq \frac{1}{2};$$

et

$$\mu_{A^*}(x_i) \geq \mu_A(x_i) \text{ si } \mu_A(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Puisque, g est décroissant sur $[0, \frac{1}{2})$ et croissant sur $(\frac{1}{2}, 1]$, donc $g(\mu_{A^*}(x_i)) \geq g(\mu_A(x_i))$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $g(\mu_{A^*}(x_i)) \geq g(\mu_A(x_i))$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

D'où $K_f(A^*) \geq K_f(A)$. Ainsi, (k3) est vérifié.

(k4) Puisque pour tous les $t_i \in [0, 1]$ nous avons $g(1 - t_i) = g(t_i)$, donc (k4) est vérifié.

Comme (k1)-(k4) sont vérifiés $K_f(A)$ est une mesure de connaissance valide pour les ensembles flous. \square

6.3.1 Mesure de connaissances floues dérivée de D_m

On se basant sur le Théorème 6.3.1, et en posant $D_f = D_m$ nous allons déduire une nouvelle mesure généralisée de connaissances floues à partir de la divergence floue D_m définie dans (6.2) selon le théorème suivant :

Théorème 6.3.2. Pour tout $A \in F(X)$,

$$K_m(A) = \frac{c}{4n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\sqrt{2\mu_A(x_i)} - 1)^{2m+2}}{(2\mu_A(x_i) + 1)^m} + \frac{(\sqrt{2(1 - \mu_A(x_i))} - 1)^{2m+2}}{(3 - 2\mu_A(x_i))^m} \right], \quad (6.18)$$

où c est une constante de normalisation et $m \in \mathbb{N}$.

1. $K_m(A)$ est une mesure généralisée de connaissances floues valide sur $F(X)$ obtenue à partir de D_m ,
2. $K_m(A \cup B) + K_m(A \cap B) = K_m(A) + K_m(B)$, $\forall A, B \in F(X)$.

Démonstration. 1. Pour montrer que $K_m(A)$ est une mesure de connaissance floue, on vérifie qu'elle respecte bien les propriétés (k1)-(k4).

(k1) On pose $\mu_A(x_i) = t_i$ et on considère la fonction $g_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$g_m(t_i) = \frac{(\sqrt{2t_i} - 1)^{2m+2}}{(2t_i + 1)^m} + \frac{(\sqrt{2(1-t_i)} - 1)^{2m+2}}{(2(1-t_i) + 1)^m}.$$

D'où

$$g_m(t_i) = f_m(2t_i) + f_m(2(1-t_i)),$$

où $f_m(x)$ est la fonction convexe sur \mathbb{R}^+ qui définit la f -divergence D_m . En dérivant g_m , on obtient : $g'_m(t_i) = 2f'_m(2t_i) - 2f'_m(2(1-t_i))$.

Pour $t_i \in [0, 0.5)$, alors $2t_i \in [0, 1)$. Comme f_m est décroissante sur $[0, 1]$, on en déduit pour tout $t_i \in [0, 0.5)$, que $g'_m(t_i) < 0$. De la même façon, on montre que pour $t_i \in (0.5, 1]$, $g'_m(t_i) > 0$. Ainsi, $g_m(t_i)$ est décroissante sur $[0, 0.5)$ et croissante sur $(0.5, 1]$. D'où $g_m(t_i)$ atteint son maximum en $t_i = 0$ et $t_i = 1$.

Supposons que A est un ensemble clair (net), donc $\mu_A(x_i) = 1$ ou $\mu_A(x_i) = 0$ pour tout x_i dans X , et comme $g(1) = g(0)$ maximise chaque terme de la somme. D'où $K_m(A)$ est maximale.

Inversement, supposons que $K_m(A)$ atteint sa valeur maximale, ce qui est possible quand chaque terme de la somme atteint son maximum, et comme g_m atteint son maximum en $\mu_A(x_i) = 1$ ou $\mu_A(x_i) = 0$ pour tout $x_i \in X$. D'où $K_m(A)$ est maximale si A est un ensemble net.

(k2) Supposons que A est l'ensemble le plus flou dans $F(X)$, c'est-à-dire $\mu_A(x_i) = 0.5$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, alors :

$$K_m(A) = \frac{c}{4n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\sqrt{2(0.5)} - 1)^{2m+2}}{(2(0.5) + 1)^m} + \frac{(\sqrt{2(1-0.5)} - 1)^{2m+2}}{(3-2(0.5))^m} \right] = 0 \Rightarrow K_m(A) = 0.$$

Inversement, nous avons $K_m(A) = \frac{c}{4n} \sum_{i=1}^n g_m(\mu_A(x_i))$, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_m(A)}{\partial \mu_A^2(x_i)} &= \frac{\partial g_m(\mu_A(x_i))}{\partial \mu_A(x_i)} \\ &= 4f''_m(2\mu_A(x_i)) + 4f''_m(2(1-\mu_A(x_i))). \end{aligned}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $f''_m(x) \geq 0$, on en déduit que g_m est convexe et d'après ce qui précède on a $g'(0.5) = 0$, c'est à dire que $\mu_A(x_i) = 0.5 \forall i = 1$ est un minimum global de g . D'où $K_m(A)$ est aussi convexe et elle atteint son minimum global en $\mu_A(x_i) = 0.5$ pour $x_i \in X$. Par conséquent, $K_m(A) = 0$ si et seulement si A est l'ensemble le plus flou de $F(X)$.

(k3) Selon la croissance et la décroissance de la fonction g_m , il est facile de voir que l'on a : $K_m(A^*) \geq K_m(A)$ où A^* est la version affinée de A . Donc (k3) est bien vérifiée.

(k4) Puisqu'on a : $g_m(t) = g_m(1-t)$ par définition de g_m . Alors (k4) est vérifiée.

Les axiomes (k1)-(k4) sont vérifiés et donc $K_m(A)$ est une mesure de connaissances floues.

2. Pour montrer que $K_m(A \cup B) + K_m(A \cap B) = K_m(A) + K_m(B)$ nous utiliserons le Théorème 6.2.2 propriété (c), car par définition de $K_m(\cdot) = D_m(\cdot, [\frac{1}{2}])$ d'où on aura : $K_m(A \cup B) = D_m(A \cup B, [\frac{1}{2}])$, et $K_m(A \cap B) = D_m(A \cap B, [\frac{1}{2}])$. Selon (c) : $D_m(A \cup B, [\frac{1}{2}]) + D_m(A \cap B, [\frac{1}{2}]) = D_m(A, [\frac{1}{2}]) + D_m(B, [\frac{1}{2}])$. On aura alors : $K_m(A \cup B) + K_m(A \cap B) = K_m(A) + K_m(B)$.

□

Pour mieux illustrer notre démarche qui consiste à dériver de nouvelles mesures de connaissances floues à partir de mesures de type f -divergence floue, on considère la divergence appelée discrimination triangulaire donnée dans (6.7), alors la mesure de connaissances dérivée ou induite par cette f -divergence de Csiszár est donnée par

$$K_{\Delta}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{2(2\mu_A(x_i) - 1)^2}{(2\mu_A(x_i) + 1)(3 - 2\mu_A(x_i))}. \quad (6.19)$$

Il est facile de vérifier que $K_{\Delta}(A)$ vérifie les axiomes (k1)-(k4). $K_{\Delta}(A)$ est bien une mesure de connaissances floues.

En littérature spécialisée sur les mesures d'entropie et de connaissances floues, on considère souvent que ces deux mesures sont des aspects complémentaires d'une même notion d'information. L'entropie floue traduit l'incertitude ou la désorganisation d'un système, tandis que la mesure de connaissances reflète la quantité d'informations précises que l'on possède sur ce système. Ces deux mesures sont liées de manière inverse, ce qui signifie que si l'entropie floue augmente, cela correspond à une diminution de la quantité de connaissances, et inversement. En d'autres termes, une réduction de l'ambiguïté ou de la désorganisation d'un système flou peut être obtenue par une augmentation de notre connaissance de ce système, et vice versa. C'est pourquoi on parle de mesures d'information duales (Singh et al., 2019). Dans cette perspective, il est important que la classe de mesures de connaissances $K_f(\cdot)$ puisse vérifier cette caractéristique. A cet effet, nous allons examiner la relation entre une mesure de connaissances définies dans Eq (6.15) et l'entropie floue telle qu'elle est définie dans le théorème ci-dessous établi par Ebanks (1983).

Théorème 6.3.3. (Ebanks, 1983) Soit $H : F(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Alors H satisfait (E1)-(E4) de la Définition 5.2.1 si et seulement si H a la forme $H(A) = \sum_{i=1}^n G(\mu_A(x_i))$ pour une certaine fonction $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait :

(a) $G(0) = G(1)$, et $G(t) > 0$ pour tout $t \in (0, 1)$,

- (b) $G(t) < G(0.5)$ pour tout $t \in [0, 1] - \{0.5\}$,
- (c) G est croissante sur $[0, 0.5)$ et décroissante sur $(0.5, 1]$,
- (d) $G(t) = G(1 - t)$ pour tout t dans $[0, 1]$.

Théorème 6.3.4. *Considérons sur $F(X)$, une mesure d'entropie floue $H(A)$ définie comme dans le théorème 6.3.3, et $K_f(A)$ une mesure de connaissances floues comme dans le théorème 6.3.1. On a alors :*

$$H(A) = 1 - K_f(A). \quad (6.20)$$

Démonstration. Pour montrer la dualité qui existe entre l'entropie floue $H(\cdot)$ et la mesure de connaissances $K_f(\cdot)$ donnée dans Eq (6.15). Supposons qu'elles soient toutes deux normalisées (échelle normalisée), nous obtenons aisément la relation suivante entre les fonctions G et g , à savoir, $G(t) = 1 - g(t)$. Les propriétés de ces deux fonctions font que la preuve devient évidente. \square

6.3.2 Étude comparative pour K_m

Considérons une variable linguistique représentée par un ensemble flou V . Un modificateur linguistique, est un opérateur T qui transforme l'ensemble flou V en un autre ensemble flou $T(V)$, où $\mu_{T(V)}(x) = \Psi_T \mu_V(x)$, et Ψ_T est une transformation mathématique. Les premiers modificateurs ont été introduits par Zadeh (1972) comme "très", "plus ou moins", "assez" et "très très".

Considérons un ensemble flou A dans $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ défini comme :

$$A = \{(1, 0.15), (2, 0.45), (3, 0.65), (4, 0.25), (5, 0.3)\}.$$

Les modificateurs linguistiques sur un ensemble flou A sont : $A^{0.5}$ peut être interprété comme "plus ou moins A ", A^2 peut être interprété comme "très A ", A^3 peut être interprété comme "fortement A ", et A^4 peut être interprété comme "très très A ". Les modificateurs linguistiques semblent réduire l'incertitude d'un ensemble flou tout en augmentant la quantité d'informations utiles. Ainsi, une entropie floue efficace H ou une mesure de connaissances floues K doit répondre respectivement aux exigences suivantes :

$$H(A^{0.5}) > H(A) > H(A^2) > H(A^3) > H(A^4). \quad (6.21)$$

$$K(A^{0.5}) < K(A) < K(A^2) < K(A^3) < K(A^4). \quad (6.22)$$

Pour évaluer l'efficacité et la pertinence de la mesure généralisée de connaissances floues $K_m(\cdot)$, une étude comparative sera menée avec certaines mesures d'information courantes, en utilisant des modificateurs linguistiques. Pour ce faire, le paramètre de généralisation m est fixé à 1, 2 et 3. Voici quelques mesures d'information floues qui sont utilisées dans cette l'évaluation comparative.

Les mesures d'entropie floue sont :

(Hwang and Yang, 2008) :

$$H_H(A) = \frac{1}{n(1 - e^{-0.5})} \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - e^{-(1 - \mu_A(x_i))}\right) I(x)_{\{\mu_A(x_i) \geq 0.5\}} + \left(1 - e^{-\mu_A(x_i)}\right) I(x)_{\{\mu_A(x_i) < 0.5\}} \right]. \quad (6.23)$$

(Bhandari and Pal, 1993) :

$$H_B^\alpha(A) = \frac{1}{(1 - \alpha)n} \sum_{i=1}^n \ln [\mu_A^\alpha(x_i) + (1 - \mu_A(x_i))^\alpha], \quad (6.24)$$

$\alpha > 0, \alpha \neq 1.$

(Pal and Pal, 1989) :

$$H_{PP}(A) = \frac{1}{n(\sqrt{e} - 1)} \sum_{i=1}^n \left[\mu_A(x_i) e^{1 - \mu_A(x_i)} + (1 - \mu_A(x_i)) e^{\mu_A(x_i)} - 1 \right]. \quad (6.25)$$

(Joshi and Kumar, 2018) :

$$H_R^S(A) = \frac{R \times S}{n(R - S)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\mu_A^S(x_i) + (1 - \mu_A(x_i))^S \right)^{\frac{1}{S}} - \left(\mu_A^R(x_i) + (1 - \mu_A(x_i))^R \right)^{\frac{1}{R}} \right], \quad (6.26)$$

$R > 1$ et $0 < S < 1$ or $0 < R < 1$ et $S > 1.$

Pour les mesure de connaissances floues on prend les suivantes : (Singh et al., 2019) :

$$K_{SG}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 [\mu_A^2(x_i) + (1 - \mu_A(x_i))^2] - 1. \quad (6.27)$$

(Arya and Kumar, 2020) :

$$S(A) = \frac{1}{\ln 2} \ln \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)^2 + (1 - \mu_A(x_i))^2 \right]. \quad (6.28)$$

(Singh et al., 2020) :

$$K_{SG}^\alpha(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 [\mu_A^\alpha(x_i) + (1 - \mu_A(x_i))^\alpha] - 1, \alpha > 1. \quad (6.29)$$

(Chaabane and Kheffache, 2023) :

$$K_m(A) = \frac{k}{4n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\sqrt{2x} - 1)^{2m+2}}{(2x+1)^m} + \frac{(\sqrt{2(1-x)} - 1)^{2m+2}}{(3-2x)^m} \right], m \in \mathbb{N}. \quad (6.30)$$

TABLE 6.2 : Valeurs comparatives résultantes

Fuzzy set	$H_2^{0.5}(A)$	$H_{0.5}^{15}(A)$	$H_{BP}^2(A)$	$K_{SG}^3(A)$
$A^{0.5}$	0.7975	0.6762	0.5956	- 0.3344
A	0.7448	0.6148	0.5198	- 0.2000
A^2	0.5032	0.4080	0.2816	0.3184
A^3	0.3350	0.2656	0.1562	0.6076
A^4	0.2297	0.1803	0.0908	0.7619

$$\begin{aligned} H_2^{0.5}(A^{0.5}) &> H_2^{0.5}(A) > H_2^{0.5}(A^2) > H_2^{0.5}(A^3) > H_2^{0.5}(A^4), \\ H_{0.5}^{15}(A^{0.5}) &> H_{0.5}^{15}(A) > H_{0.5}^{15}(A^2) > H_{0.5}^{15}(A^3) > H_{0.5}^{15}(A^4), \\ H_{BP}^2(A^{0.5}) &> H_{BP}^2(A) > H_{BP}^2(A^2) > H_{BP}^2(A^3) > H_{BP}^2(A^4), \\ K_1(A^{0.5}) &< K_1(A) < K_1(A^2) < K_1(A^3) < K_1(A^4), \\ K_2(A^{0.5}) &< K_2(A) < K_2(A^2) < K_2(A^3) < K_2(A^4), \\ K_3(A^{0.5}) &< K_3(A) < K_3(A^2) < K_3(A^3) < K_3(A^4). \end{aligned}$$

D'après les résultats de la Table 6.2, nous observons que pour $\alpha > 2$, K_{SG}^α est une fonction à valeur réelle non positive. D'après les Tables 6.2 et 6.3, les séquences d'ordre ci-dessus indiquent que les mesures d'entropie $H_2^{0.5}(A)$, $H_{0.5}^{15}(A)$ et $H_{BP}^2(A)$ sont conçues pour répondre à l'exigence en (6.21). L'exigence de l'équation (6.22) est vérifiée par la mesure de connaissances proposée $K_m(A)$ pour $m = 1, 2, 3$, ce qui est confirmé par l'étendue de sa séquence d'ordre qui s'étend sur une large plage de valeurs comme le montrent les Figures 6.4 et 6.5.

TABLE 6.3 : Valeur de $K_m(A)$ pour $m = 1, 2, 3$

Fuzzy set	$K_1(A)$	$K_2(A)$	$K_3(A)$
$A^{0.5}$	3.539×10^{-3}	3.1574×10^{-4}	3.1252×10^{-5}
A	8.7030×10^{-3}	1.1073×10^{-3}	1.6377×10^{-4}
A^2	0.1290	6.0977×10^{-2}	3.1804×10^{-2}
A^3	0.3181	0.2186	0.1592
A^4	0.4815	0.3862	0.3219

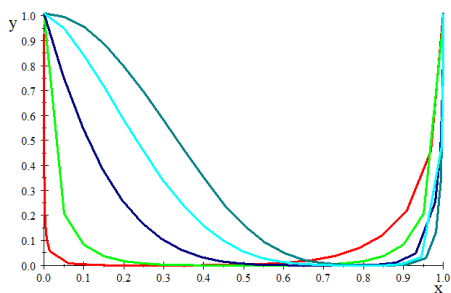


FIGURE 6.2 : Fonction $K_1(\cdot)$

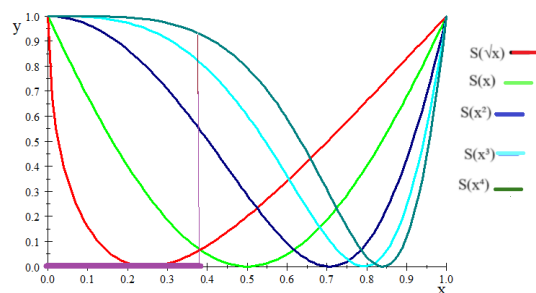


FIGURE 6.3 : Fonction $S(\cdot)$

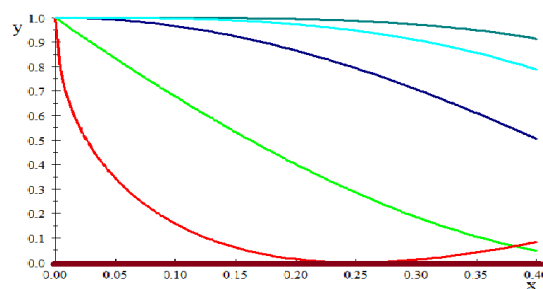
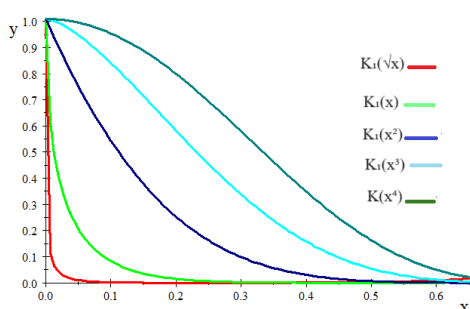


FIGURE 6.4 : Étendue de la séquence d'ordre pour $K_1(\cdot)$ et $S(\cdot)$

Considérons un autre ensemble flou B défini sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donné par :

$$B = \{(1, 0.08), (2, 0.116), (3, 0.73), (4, 0.85), (5, 0.68), (6, 0.7), (7, 1)\}.$$

TABLE 6.4 : Valeurs comparatives obtenues

Fuzzy set	$H_H(B)$	$H_{PP}(B)$	$H_{BP}^{0.5}(B)$	$K_{SG}(B)$	$S(B)$	$K_1(B)$	$K_2(B)$	$K_3(B)$
$B^{0.5}$	0.3838	0.5252	0.4844	0.4828	0.5683	0.1732	0.1498	0.1447
B	0.3976	0.5379	0.4874	0.4695	0.5553	0.1744	0.1504	0.1449
B^2	0.5057	0.5545	0.4388	0.4471	0.5331	0.2996	0.2569	0.2269
B^3	0.4373	0.5264	0.4007	0.4756	0.5613	0.3821	0.3607	0.3420
B^4	0.3751	0.4630	0.3701	0.5408	0.6236	0.4160	0.4055	0.3980

Sur la Table 6.4, nous observons en accord avec les séquences d'ordre ci-dessus, que les mesures d'entropie $H_H(B)$, $H_{BP}(B)$ et $H_{PP}(B)$ ne sont pas performantes, tout comme les mesures de connaissances $S(B)$ et $K_{SG}(B)$, puisque ces mesures d'information ne vérifient pas les séquences d'ordre données respectivement dans (6.21) et (6.22). En revanche, la mesure de connaissances K_m donne de bons résultats et semble être efficace pour évaluer l'information utile dans un ensemble flou.

$$\begin{aligned}
 &H_H(B^{0.5}) < H_H(B) < H_H(B^2) > H_H(B^3) > H_H(B^4), \\
 &H_{PP}(B^{0.5}) < H_{PP}(B) < H_{PP}(B^2) > H_{PP}(B^3) > H_{PP}(B^4), \\
 &H_{BP}^{0.5}(B^{0.5}) < H_{PP}^{0.5}(B) > H_{BP}^{0.5}(B^2) > H_{BP}^{0.5}(B^3) > H_{BP}^{0.5}(B^4), \\
 &K_{SG}(B^{0.5}) > K_{SG}(B) > K_{SG}(B^2) < K_{SG}(B^3) < K_{SG}(B^4), \\
 &S(B^{0.5}) > S(B) > S(B^2) > S(B^3) < S(B^4), \\
 &K_1(B^{0.5}) < K_1(B) < K_1(B^2) < K_1(B^3) < K_1(B^4), \\
 &K_2(B^{0.5}) < K_2(B) < K_2(B^2) < K_2(B^3) < K_2(B^4), \\
 &K_3(B^{0.5}) < K_3(B) < K_3(B^2) < K_3(B^3) < K_3(B^4).
 \end{aligned}$$

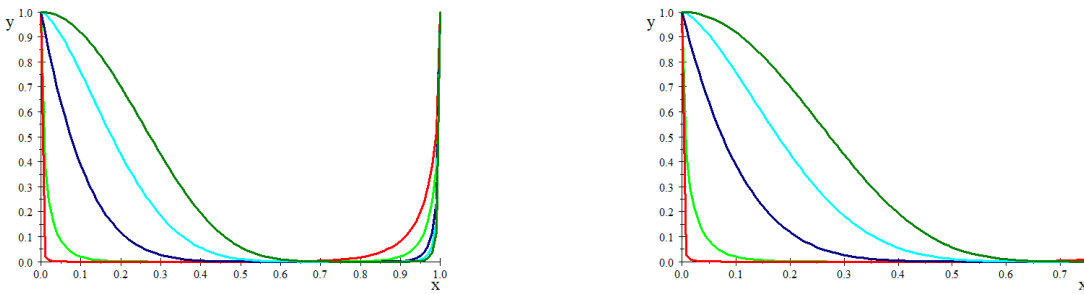


FIGURE 6.5 : Fonction $K_2(\cdot)$ et l'étendue de sa séquence d'ordre

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle mesure généralisée de divergence floue D_m du type f -divergence de Csiszár. L'analyse comparative a démontré que cette mesure présente un avantage significatif : elle est extrêmement sensible à toute déviation, aussi minime soit-elle, entre deux ensembles flous, ce qui renforce considérablement son pouvoir discriminant.

Nous avons exploité la structure mathématique de la f -divergence de Csiszár pour proposer une classe de mesures de connaissances floues, basée sur une fonction f convexe deux fois différentiable vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$. Ainsi, nous avons introduit la mesure de connaissances floues K_m , dérivée de D_m . Par comparaison avec d'autres mesures d'information, nous avons démontré que K_m est également capable de détecter toute information utile présente dans un ensemble flou. Par conséquent, il est judicieux d'intégrer ces deux mesures dans un processus de prise de décision multicritère en présence de données floues. Dans le chapitre 7, nous exposons en détail la façon dont nous avons intégré ces deux mesures dans une nouvelle approche d'aide à la décision multi-attribut dans un contexte flou.

Optimisation multicritère floue basée sur les mesures proposées de l'information floue

7.1 Introduction

Ce chapitre se focalise sur la seconde partie de notre contribution exposée dans l'article ([Chaabane and Kheffache, 2023](#)). Afin de faciliter la lecture, nous avons divisé ce chapitre en trois sections distinctes.

La première section présente deux nouveaux modèles d'optimisation permettant de générer les pondérations optimales des critères. Ces modèles intègrent les mesures d'information floue proposées dans le Chapitre 6, afin d'obtenir des pondérations qui reflètent de manière plus précise l'importance relative de chaque critère dans le processus de prise de décision.

Dans la deuxième section, nous décrivons une nouvelle approche que nous avons développée pour combiner les méthodes GRA (Grey Relational Analysis) et VIKOR (Multicriteria Optimization and Compromise Solution) dans un contexte flou. Cette approche utilise la mesure de divergence D_m comme mesure de distance floue.

Enfin, la dernière section présente une expérimentation numérique qui compare notre approche à d'autres méthodes bien connues. Nous effectuons également une analyse de sensibilité incluant tous les paramètres de notre approche, afin d'évaluer sa cohérence et sa rationalité.

7.2 Modèles pour la génération des pondérations

7.2.1 Environnement global de la procédure

Dans certains contextes d'évaluation multicritère, il peut être difficile voire impossible de fournir une évaluation précise pour chaque alternative sur chaque critère, en raison de divers facteurs tels que les imprécisions, les subjectivités ou les variations dans les mesures de performance. Afin de résoudre ce problème, l'utilisation d'ensembles flous permet de représenter l'ambiguïté et l'imprécision associées aux évaluations. Ainsi, chaque alternative peut être décrite à l'aide d'ensembles de valeurs floues, décrivant le degré de satisfaction associé à chaque critère. Cela permet d'obtenir une représentation plus réaliste et nuancée de la performance des alternatives sur chaque critère, en prenant en compte les incertitudes inhérentes aux évaluations.

Dans un cadre de décision floue, on considère que l'on dispose d'un ensemble de p alternatives floues, noté $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ et $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ est un ensemble de n critères concurrents. Chaque ensemble flou A_i est défini par une collection de paires (C_j, a_{ij}) , où a_{ij} est la valeur de la fonction d'appartenance $\mu_{A_i}(C_j)$ où a_{ij} évalue dans quelle mesure l'alternative A_i satisfait le critère C_j . Ainsi, plus la valeur a_{ij} est proche de 1, plus l'alternative A_i satisfait le critère C_j de manière presque certaine, et plus elle est proche de 0, moins l'alternative A_i satisfait le critère C_j . Et on a de l'ambiguïté totale quand $a_{ij} = 0.5$. Cependant, pour les critères de désavantage, des valeurs proches de 0 sont meilleures que celles proches de 1, et inversement pour les critères d'avantage. Ainsi, toute alternative est décrite par un ensemble flou donné par :

$$A_i = \{(C_j, \mu_{A_i}(C_j))\}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, p, \forall j = 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

On considère également $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ le vecteur de pondérations des n critères, tels que

$$\forall j = 1, \dots, n, 0 \leq w_j \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

La matrice de décision floue est notée $D = [a_{ij}]$, où $i = 1, 2, 3, \dots, p$, et $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Afin de rendre les alternatives comparables par rapport à des critères concurrents on normalise la matrice de décision D par la méthode "vector normalization" (Ohlan and Ohlan, 2016). Cette façon de normaliser la matrice D , permet de mettre en évidence les alternatives qui ont une satisfaction forte pour un critère de bénéfice et faible pour un critères de coût. Elle réduit également l'impact de

la satisfaction excessivement élevée des critères de coût.

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p a_{ij}^2}} & C_j \text{ critère d'avantage,} \\ 1 - \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p a_{ij}^2}} & C_j \text{ critère de désavantage} \end{cases} \quad (7.1)$$

7.2.2 Génération des pondérations des critères

En raison de contraintes de temps ou de limitations liées aux compétences du décideur, il peut arriver que les informations sur les pondérations des critères soient insuffisantes voire totalement inconnues. Dans de tels cas, il est nécessaire de développer des modèles d'optimisation permettant de déterminer le vecteur de poids optimal. Différentes stratégies ont été élaborées à cet effet. Par exemple, [Wei \(2008\)](#) a proposé une méthode pour déterminer les poids relatifs des critères. Cette méthode vise à trouver la solution qui a le plus grand écart par rapport aux autres solutions pour chaque critère, ce qui permet d'obtenir une pondération qui met en avant les différences significatives entre les alternatives. Les poids des critères sont ensuite ajustés de manière à minimiser cette déviation maximale. [Ye \(2010\)](#) a créé une approche basée sur le modèle d'entropie et d'une mesure de divergence. D'autre part, [Wu et al. \(2021\)](#) ont proposé un modèle qui calcule les pondérations des attributs dans un contexte intuitionniste en utilisant à la fois des mesures de distance et de connaissances basées sur les techniques présentées dans ([Xia and Xu, 2012](#)).

Dans ce paragraphe, nous présentons une nouvelle procédure pour déterminer les poids des critères en utilisant l'idée de la déviation maximale proposée par [Wei \(2008\)](#). Cette procédure utilise les deux mesures d'information D_m et K_m , définies respectivement dans les équations (6.2) et (6.15).

La mesure de connaissances K_m se révèle particulièrement utile lorsqu'il y a peu ou pas d'informations disponibles concernant l'importance relative des critères. Elle permet ainsi de prendre en compte l'ambiguïté quant à l'importance de chaque critère dans le processus de décision.

D'autre part, la mesure de divergence D_m évalue la capacité d'un critère à discriminer de manière efficace entre les différentes options, en se focalisant sur chaque critère individuellement. Cette mesure permet donc de prendre en considération la capacité discriminante de chaque critère de manière spécifique.

En utilisant ces deux mesures d'information, notre procédure permet de prendre en compte de manière complète et approfondie les principaux aspects de l'information utilisée pour l'analyse multicritère dans un environnement floue. Elle offre ainsi une approche fiable pour les experts souhaitant obtenir des poids de critères précis et fiables dans leur prise de décision.

Ainsi, pour le critère C_j , la quantité moyenne de la divergence entre l'alternative A_i et toutes les

autres options est donnée par :

$$\frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}). \quad (7.2)$$

D'où la divergence totale entre toutes les alternatives évaluées par le critère C_j est quantifiée par :

$$\sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right). \quad (7.3)$$

D'autre part, le montant total de la mesure de connaissances par rapport au critère C_j est donnée par :

$$\sum_{i=1}^p K_m(A_{ij}). \quad (7.4)$$

Comme mentionné précédemment, si un critère fournit une grande quantité de connaissances pour toutes les options, cela signifie que l'information fournie est plus utile pour la prise de décision et devrait donc recevoir un poids plus élevé. Sinon, il devrait recevoir un poids plus faible. Ainsi, en combinant ces deux facteurs, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right). \quad (7.5)$$

En utilisant l'association présentée dans (7.5), si l'on ne dispose d'aucune information sur les pondérations des critères, il est possible de générer un vecteur de pondérations \mathbf{w} à l'aide d'un modèle de programmation non linéaire noté **Modèle (I)**. Ce modèle est exprimé mathématiquement de la manière suivante :

$$\text{Modèle (I)} \left\{ \begin{array}{l} \max F(\mathbf{w}) = \max \left(\sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right) \right) \\ \text{sous contraintes : } w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n w_j^2 = 1. \end{array} \right. \quad (7.6)$$

Pour résoudre le modèle ci-dessus posant la fonction de Lagrange $L(w_j, \lambda)$ du problème d'optimisation dans le modèle (I), où $\lambda \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange.

$$L(w_j, \lambda) = \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right) + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 \right). \quad (7.7)$$

On obtient l'équation suivante des dérivées partielles de L :

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right) + \lambda w_j = 0. \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 \right) = 0. \quad (7.9)$$

De (7.8) on aura :

$$w_j = \frac{- \sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right)}{\lambda}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

En remplaçant dans (7.9) et selon que w_j doit être positif, alors on obtient :

$$\lambda = - \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right) \right)^2}. \quad (7.11)$$

En combinant (7.10) et (7.11) on obtient l'unique solution du problème d'optimisation, qui est donnée par :

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right) \right)^2}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.12)$$

Selon la contrainte dans le modèle (I), on obtient le poids normalisé w_j^* comme suit :

$$w_j^* = \frac{\sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right)}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.13)$$

En raison de la complexité et de l'ambiguïté des problèmes de prise de décision pratiques ainsi que de la nature subjective inhérente à la pensée humaine, les informations sur les poids des attributs sont généralement incomplètes et seules des informations partielles sont disponibles que l'on regroupe dans l'ensemble Ω qui contient les informations sur les poids connus sous forme de contraintes que les pondérations w_j doivent respecter pour $j = 1, 2, \dots, n$. L'ensemble Ω peut être constitué d'informations

sur les poids w_i et w_j selon les types suivants pour $i \neq j$:

Type 1. Un classement(ordre) faible : $\{w_i \geq w_j\}$;

Type 2. Un classement stricte : $\{w_i - w_j \geq \alpha_i (\alpha_i > 0)\}$;

Type 3. Un classement des différences : $\{w_i - w_j \geq w_k - w_l\}$, pour $j \neq k \neq l$;

Type 4. Un classement avec des doublons : $\{w_i \geq \alpha_i w_j (0 \leq \alpha_i \leq 1)\}$;

Type 5. Sous forme d'intervalle : $\{\alpha_i \leq w_i \leq \alpha_i + \varepsilon_i\} (0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i + \varepsilon_i \leq 1)$.

Pour de telles situations, nous proposons un modèle de programmation linéaire **Modèle (II)**,

$$\text{Modèle (II)} \left\{ \begin{array}{l} \max F(w) = \max \left(\sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^p \left(K_m(A_{ij}) + \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_m(A_{ij}, A_{kj}) \right) \right) \\ \text{sous contraintes : } \mathbf{w} \in \Omega, w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n w_j = 1. \end{array} \right. \quad (7.14)$$

En résolvant le problème décrit dans le Modèle (II), nous obtenons le vecteur de pondérations optimal $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$.

7.3 Nouvelle combinaison de GRA et VIKOR en contexte flou

7.3.1 Principales motivations

Une analyse attentive des avantages et limites des deux méthodes GRA et VIKOR, nous a conduit à proposer leur combinaison dans un environnement flou. Voici globalement quelques raisons qui ont conduit à cette nouvelle combinaison.

- (a) Complémentarité des avantages : la méthode GRA est utile pour rechercher des interdépendances complexes basées sur des relations grises (floues) entre les multiples facteurs du problème, fournis sous forme de données discrètes en utilisant un seul point de référence, tandis que VIKOR est utile pour trouver une solution de compromis efficace. La combinaison des deux méthodes pourrait donc fournir un ensemble plus complet d'informations pour prendre des décisions. En outre, la méthode que nous avons adopté pour la normalisation des données, suggère de choisir un seul point de référence représenté par les valeurs élevées pour les critères d'avantage et de faible valeurs pour les critères de désavantage.
- (b) Robustesse : La méthode VIKOR est connue pour être robuste aux incertitudes dans les données. D'un autre côté, la méthode GRA est plus sensible aux variations de données, en particulier si la variation est importante. Cela est dû en partie à l'utilisation d'une technique de

normalisation qui est sensible aux valeurs extrêmes. Dans notre cas, nous avons pallier ce problème en choisissant une technique de normalisation bien appropriée au contexte flou qui va nous permettre obtenir des résultats plus fiables qui résistent mieux aux perturbations des données.

- (c) Amélioration de la performance : Il a été démontré que la combinaison de plusieurs méthodes d'analyse multicritère peut améliorer la précision et la performance de l'analyse. En utilisant GRA et VIKOR ensemble, on pourra obtenir des résultats plus nuancés et proche de la réalité et donc une meilleure prise de décision.

7.3.2 Procédure de combinaison de GRA et VIKOR

Une fois que les poids des critères ont été déterminés en utilisant soit le modèle (I) (7.6) si les pondérations son totalement inconnues, soit le modèle (II) (7.14) si les poids sont partiellement inconnus, nous procédons aux étapes suivantes où on doit déterminer la matrice de décision normalisée et pondérée que l'on note D_{np} dont les coefficients sont donnés par :

$$\vartheta_{ij} = A_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.15)$$

A ce stade, nous appliquons la démarche de la procédure GRA à la matrice D_{np} . Ainsi on détermine la séquence de référence comme étant :

$$A^+ = (\vartheta_{01}^+, \vartheta_{02}^+, \dots, \vartheta_{0n}^+), \quad \text{où} \quad \vartheta_{0j}^+ = \max_i \vartheta_{ij}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.16)$$

Dans la prochaine étape, nous allons évaluer les coefficients relationnels gris. Cette évaluation implique l'utilisation de la mesure de divergence floue D_m pour déterminer les écarts entre les alternatives et la séquence de référence. Pour chaque alternative A_i , son coefficient relationnel gris relativement au critère C_j est calculé de la manière suivante :

$$\xi_{ij} = \frac{\min_i \min_j (D_m(\vartheta_{ij}, \vartheta_{0j}^+)) + \rho \max_i \max_j (D_m(\vartheta_{ij}, \vartheta_{0j}^+))}{D_m(\vartheta_{ij}, \vartheta_{0j}^+) + \rho \max_i \max_j (D_m(\vartheta_{ij}, \vartheta_{0j}^+))}. \quad (7.17)$$

Le coefficient de résolution ρ est défini dans la plage $0 < \rho \leq 1$ et est généralement pris égal à 0.5. Les coefficients de corrélation grise ξ_{ij} sont calculés pour refléter les corrélations entre les évaluations des options existantes et le profil de référence souhaité. Autrement dit, ξ_{ij} évalue le degré d'affinité entre le profil disponible et le profil de référence A^+ relativement au critère C_j . L'utilisation de la divergence D_m est un choix judicieux, car elle est efficace dans la détection de la plus petite déviation pouvant exister entre deux profils.

Une fois que les coefficients ξ_{ij} ont été établis, on peut déterminer le meilleur et le pire niveau du coefficient de corrélation grise ξ_j^* et ξ_j^- , respectivement, à partir de l'équation (7.17).

$$\xi_j^* = \max_i(\xi_{ij}) \quad \text{et} \quad \xi_j^- = \min_i(\xi_{ij}) \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

De manière générale, lorsque la divergence entre A_{ij} et A_j^+ est importante, le coefficient relationnel gris ξ_{ij} tend vers zéro, ce qui indique une satisfaction plus faible de l'alternative A_i pour le critère C_j . En revanche, lorsque la divergence entre A_{ij} et A_j^+ est moins importante, la satisfaction de l'alternative A_i pour le critère C_j est meilleure.

Selon ce qui précède, on calcule l'utilité de groupe S_i , le regret individuel R_i et la mesure de compromis Q_i pour chaque alternative A_i ($i = 1, \dots, p$) selon :

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\xi_j^* - \xi_{ij}}{\xi_j^* - \xi_j^-}, \quad R_i = \max_j \left(w_j \frac{\xi_j^* - \xi_{ij}}{\xi_j^* - \xi_j^-} \right), \quad (7.18)$$

pour $i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n$

$$Q_i = v \left(\frac{S_i - S^-}{S^* - S^-} \right) + (1 - v) \left(\frac{R_i - R^-}{R^* - R^-} \right), \quad (7.19)$$

pour $i = 1, 2, \dots, p$

où $S^* = \max_i S_i$, $S^- = \min_i S_i$, $R^* = \max_i R_i$, $R^- = \min_i R_i$.

Le paramètre v , compris dans l'intervalle $[0, 1]$, joue un rôle crucial dans la détermination de la solution de compromis en MCDM. En effet, il représente le poids relatif de la maximisation de l'utilité de groupe et du regret individuel. La valeur de v doit être adaptée en fonction des caractéristiques du problème considéré. En pratique, une valeur de v égale à 0.5 est souvent choisie afin de prendre en compte de manière équilibrée ces deux aspects. Il convient de rappeler que l'intérêt des mesures d'utilité de groupe et de regret individuel dans la méthode VIKOR est de prendre en compte les préférences individuelles des décideurs et d'obtenir des solutions qui maximisent l'utilité globale tout en minimisant le regret individuel. Cela permet d'améliorer le processus de décision en favorisant la participation active de chaque décideur et en cherchant à atteindre un consensus satisfaisant pour l'ensemble du groupe.

Le classement des alternatives peut être obtenu en triant les valeurs de S_i , R_i et Q_i par ordre décroissant. La meilleure option sera celle ayant la plus petite valeur de la mesure de compromis Q_i . Toutefois, afin de garantir l'unicité de la meilleure option, il est important de déterminer la solution de compromis optimale. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites, l'alternative de rang supérieur $A^{(1)}$ sera recommandée comme solution de compromis par Q_i :

- **(ACDV) Avantage acceptable** : $Q(A^{(2)}) - Q(A^{(1)}) \geq DQ$, où $DQ = \frac{1}{p-1}$, $A^{(2)}$ est l'alternative de deuxième position dans la liste de classement par Q_i , et p est le nombre des alternatives. Cette condition garantit qu'il existe une différence significative entre la meilleure alternative et la deuxième meilleure alternative en termes de performance des critères.
- **(ACST) Stabilité acceptable dans la prise de décision** : l'alternative $A^{(1)}$ doit également être la mieux classée par S_i et/ou R_i . Cette solution de compromis est stable dans un processus de prise de décision qui peut être effectué par un vote à la majorité (lorsque la majorité est requise $v > 0,5$), par consensus (lorsque l'égalité des voix est acceptable $v \approx 0,5$), ou avec un veto (lorsqu'une minorité peut empêcher la décision $v < 0,5$).

Si l'une des conditions n'est pas remplie, alors un ensemble de solutions de compromis est proposé. Cet ensemble comprend l'alternative $A^{(1)}$ et l'alternative $A^{(2)}$, si seulement l'exigence (ACST) n'est pas satisfaite. Si l'exigence (ACDV) n'est pas satisfaite, l'ensemble comprend les alternatives $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \dots, A^{(M)}$, où $A^{(M)}$ est déterminée par la relation $Q(A^{(M)}) - Q(A^{(1)}) < DQ$ pour un maximum de M . Les positions de ces alternatives sont considérées comme « proches ».

7.4 Expérimentation de la méthode sur des données concrètes

Afin d'évaluer l'efficacité de la technique de prise de décision proposée, une mise en œuvre a été effectuée en utilisant des données réelles provenant de la période allant du 21.9.2012 au 27.9.2012, obtenues à partir de la source (<http://www.moneycontrol.com>). Les données fuzzifiées ont été rapportés dans les articles des auteurs [Joshi and Kumar \(2014\)](#) et [Mishra and Rani \(2017\)](#).

Dans le problème de décision en question, on veut classer quatre organisations (alternatives), Bajaj Steel (A_1); H.D.F.C Bank (A_2); Tata Steel (A_3); InfoTech Enterprises (A_4). Les alternatives sont évaluées sur cinq critères tels que : le bénéfice par action (EPS) (C_1); la valeur faciale (C_2); le ratio P/C (Put-Call) (C_3); le dividende (C_4); le ratio P/E (Price-to-earnings) (C_5). Il convient de noter que C_1 et C_2 sont des critères de bénéfice; une valeur élevée indique une perspective de croissance positive, tandis que les autres sont des critères de coût; une faible valeur indique une perspective de croissance positive.

Cas 1. Les poids des critères sont complètement inconnus

L'efficacité de la méthode proposée est examinée pour deux valeurs du paramètre de généralisation $m = 1$ et $m = 2$ des mesures généralisées d'information floue D_m et K_m , respectivement. Pour résoudre le problème en question, nous allons suivre l'approche méthodique décrite ci-dessous.

Étape 1. La matrice de décision floue est donnée dans la table 7.1. Puis, en utilisant la normalisation des données comme dans (7.2) sur les données de la Table 7.1, il en résulte la matrice de décision normalisée donnée dans la Table 7.2.

TABLE 7.1 : Matrice de décision floue (Joshi and Kumar, 2014)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.2846	0.7500	0.2340	0.2300	0.2400
A_2	0.3180	0.2480	0.7660	0.0970	0.7600
A_3	0.7590	0.7500	0.3150	0.3200	0.2780
A_4	0.2410	0.4370	0.4100	0.1550	0.3940

TABLE 7.2 : Matrice de décision floue normalisée

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.3150	0.6390	0.7299	0.4705	0.7423
A_2	0.3519	0.2113	0.1159	0.7767	0.1841
A_3	0.8400	0.6390	0.6364	0.2634	0.7015
A_4	0.2667	0.3723	0.5267	0.6432	0.5770

Étape 2. En utilisant les équations (7.1) et (7.3) on obtient la divergence totale entre toutes les alternatives relativement au critère C_j , ainsi que la quantité globale de connaissances pour le même critère. Ensuite, pour obtenir le vecteur de poids optimal w^* , on utilise l'équation (7.13).

TABLE 7.3 : Calcul du vecteur de pondérations pour $m = 1$

	$\sum_{i=1}^p \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_{m=1}(A_{ij}, A_{kj})$	$\sum_{i=1}^p K_{m=1}(A_{ij})$	w_j^*
C_1	5.5672×10^{-2}	3.5750×10^{-2}	0.2480
C_2	1.6453×10^{-2}	1.3218×10^{-2}	0.0803
C_3	7.2272×10^{-2}	6.6672×10^{-2}	0.3761
C_4	2.0596×10^{-2}	1.4696×10^{-2}	0.0955
C_5	4.2152×10^{-2}	2.6745×10^{-2}	0.1865

Une analyse approfondie des Tables 7.3 et 7.4 révèle que les critères qui ont joué un rôle important dans la discrimination entre les alternatives et qui fournissent une quantité considérable de connaissances utiles sur les options se voient attribuer une importance supérieure par rapport à ceux qui ne contribuent pas de la même manière. De plus, le modèle (I) produit des résultats cohérents avec les mesures d'information floue établies, confirmant ainsi leur efficacité dans la génération des poids des critères. Il est intéressant de noter que pour $m = 1$ et $m = 2$, les poids sont maintenus dans le même ordre d'importance des critères, ce qui souligne une fois de plus la fiabilité du modèle proposé pour la génération des pondérations et sa cohérence avec les mesures d'information floue établies.

TABLE 7.4 : Calcul du vecteur de pondérations pour $m = 2$

	$\sum_{i=1}^p \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^p D_{m=2}(A_{ij}, A_{kj})$	$\sum_{i=1}^p K_{m=2}(A_{ij})$	w_j^*
C_1	1.0768×10^{-2}	4.1624×10^{-3}	0.2511
C_2	1.7877×10^{-3}	9.6136×10^{-4}	0.0462
C_3	1.8372×10^{-2}	1.3137×10^{-2}	0.5300
C_4	2.4787×10^{-3}	8.7424×10^{-4}	0.0564
C_5	4.5688×10^{-3}	2.3369×10^{-3}	0.1161

Étape 3. En utilisant l'équation (7.15), on détermine la matrice de décision floue normalisée et pondérée, donnée dans la Table 7.5.

TABLE 7.5 : Matrice de décision flou normalisée et pondérée

		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$m = 1$	A_1	0.0781	0.0513	0.2745	0.0449	0.1384
	A_2	0.0872	0.0169	0.0436	0.0742	0.0343
	A_3	0.2083	0.0513	0.2394	0.0251	0.1308
	A_4	0.0661	0.0299	0.1981	0.0614	0.1076
$m = 2$	A_1	0.0791	0.0295	0.3868	0.0265	0.0862
	A_2	0.0883	0.0097	0.0614	0.0438	0.0213
	A_3	0.2109	0.0295	0.3373	0.0148	0.0814
	A_4	0.0669	0.0172	0.2791	0.0362	0.0670

Étape 4. Selon la Table 7.5, la séquence de référence A^+ est obtenue en utilisant l'équation (7.16). Ainsi, pour $m = 1$, nous obtenons $A^+ = (0, 2083; 0, 0513; 0, 2745; 0, 0742; 0, 1384)$. Pour $m = 2$, nous avons $A^+ = (0, 2109; 0, 0295; 0, 3868; 0, 0438; 0, 0862)$.

Étape 5. Calculer le coefficient relationnel gris ξ_{ij} pour A_i , $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, 2, \dots, n$ en utilisant, (7.17) et en fixant la valeur du coefficient de résolution ρ à 0.5. les résultats sont résumés dans la Table 7.6 pour deux valeurs du paramètre de généralisation m .

Étape 6. On calcule l'utilité de groupe S_i , le regret individuel R_i et la mesure de compromis Q_i pour chaque alternative A_i en utilisant les équations (7.18), (7.19), et en fixant $\nu = 0.5$. Les résultats sont représentés dans la Table 7.7. Ainsi, les résultats obtenus permettent de déterminer quelle alternative est la plus favorable pour la prise de décision.

TABLE 7.6 : Coefficients relationnels gris pour chaque alternative (cas 1)

		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$m = 1$	A_1	0.8193	1.0000	1.0000	0.9928	1.0000
	A_2	0.7215	0.9253	0.3333	1.0000	0.6885
	A_3	1.0000	1.0000	0.9998	0.9023	1.0000
	A_4	0.7300	0.9935	0.9946	0.9998	0.9990
$m = 2$	A_1	0.9730	1.0000	1.0000	0.9985	1.0000
	A_2	0.9854	0.9928	0.5000	1.0000	0.9391
	A_3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	A_4	0.9420	0.9995	0.9989	1.0000	0.9999

TABLE 7.7 : Résultats du classement obtenus en utilisant notre méthode (cas1)

		S_i	R_i	Q_i	Rank
$m = 1$	A_1	0.1729	0.1659	0.1836	2
	A_2	0.7605	0.3762	1.0000	4
	A_3	0.0956	0.0955	0.0000	1
	A_4	0.2573	0.2480	0.3933	3
$m = 2$	A_1	0.1177	0.1168	0.1075	2
	A_2	0.7555	0.5300	1.0000	4
	A_3	0.0564	0.0564	0.0000	1
	A_4	0.2522	0.2511	0.3456	3

Step 7. Pour $m = 1$ et $m = 2$, la Table 7.7 fournit trois listes de classement pour $\nu = 0.5$. En se basant sur les valeurs de Q_i . La meilleure alternative, est celle ayant la valeur minimale de Q_i . Ainsi, les options sont classées de la meilleure à la pire comme suit : $A_3 > A_1 > A_4 > A_2$. Toutefois, pour trouver une solution de compromis, les deux conditions : avantage acceptable (ACDV) et la stabilité acceptable dans la prise de décision (ACST), doivent être examinées.

En effet, pour $m = 1$, la condition (ACDV) n'est pas satisfaite car $Q(A^{(2)}) - Q(A^{(1)}) = 0.18360 < DQ$ avec $DQ = 0.3333$. Par conséquent, A_3 et A_1 sont des solutions de compromis. De plus, on a $Q(A^{(3)}) - Q(A^{(1)}) = 0.3933$, c'est-à-dire que A_3 et A_4 ne sont pas les mêmes solutions de compromis car $DQ \leq 0.3933$, et A_3 a un avantage acceptable par rapport à A_4 qui n'est pas inclus dans l'ensemble des solutions de compromis. La condition (ACST) est vérifiée car A_3 est mieux classée par S_i et R_i que l'option A_4 , comme c'est indiqué dans la Table 7.8. Par conséquent, un décideur peut donner son ordre de préférence comme suit : $A_3 > A_1 > A_4 > A_2$.

De plus, à partir de la Table 7.7, on observe que pour $m = 1, 2$, l'option A_3 est meilleure que les trois autres alternatives, et pour A_2 , les critères C_3 et C_5 doivent être améliorés car ces critères

TABLE 7.8 : Résultats de classement obtenus en utilisant notre méthode (cas2)

		S_i	R_i	Q_i	Rank
$m = 1$	A_1	0.2135	0.2058	0.1658	2
	A_2	0.7611	0.2500	0.6134	4
	A_3	0.1000	0.1000	0.0000	1
	A_4	0.3087	0.2900	0.3014	3
$m = 2$	A_1	0.1485	0.13867	0.0427	2
	A_2	0.7619	0.3280	1.0000	4
	A_3	0.1000	0.1000	0.0000	1
	A_4	0.2204	0.2080	0.2787	3

font de A_2 la pire option. Comme on peut le constater, l'ordre de classement est resté inchangé même si le paramètre de généralisation de la divergence floue suggérée a été modifié. Notez que selon les résultats pour $m = 2$, les interprétations et le classement sont les mêmes que ceux mentionnés précédemment.

Cas 2 : Les poids des critères sont partiellement connus

Les relations ci-dessous donnent les informations partiellement disponibles sur les poids :

$$\begin{aligned}
 \Omega = \{ & 0.25 \leq w_1 \leq 0.4, 0.16 \leq w_2 \leq 0.27, \\
 & 0.15 \leq w_3 \leq 0.25, 0.1 \leq w_4 \leq 0.18, \\
 & 0.2 \leq w_5 \leq 0.35, w_1 \geq 0.2w_4, \\
 & w_5 - w_2 \leq w_3, \sum_{j=1}^n w_j = 1, \\
 & w_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, 5\}.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

En utilisant le modèle (II) (7.14), on obtient pour $m = 1$ le vecteur des poids suivant : $\mathbf{w}^* = (0, 2900, 0, 1600, 0, 2500, 0, 1000, 0, 2000)^T$. Pour $m = 2$, on obtient le vecteur des poids suivant : $\mathbf{w}^* = (0, 2080, 0, 0980, 0, 3280, 0, 1280, 0, 2380)^T$.

En suivant les étapes de la technique proposée et après avoir calculer la matrice de décision normalisée et pondérée ($m=1$ puis $m=2$), Fixez le coefficient de résolution $\rho = 0.5$ et le poids de la stratégie de prise de décision $\nu = 0.5$. La Table 7.8 indique que, pour $m = 1$ et $m = 2$, la condition d'avantage acceptable (ACDV) n'est pas vérifiée pour A_1 et A_4 . Cependant, la condition (ACST) est vérifiée car A_3 est le mieux classée par S_i et R_i . Ainsi, il y a une stabilité acceptable dans la prise de décision par consensus. Par conséquent, l'ensemble des solutions de compromis comprend A_3, A_1 et A_4 . Toutefois, le classement final par ordre de préférence peut être proposé comme suit : $A_3 > A_1 > A_4 > A_2$. La cohérence des résultats dans les deux scénarios où les poids des critères sont totalement ou partiellement

inconnus indique la robustesse de la technique proposée.

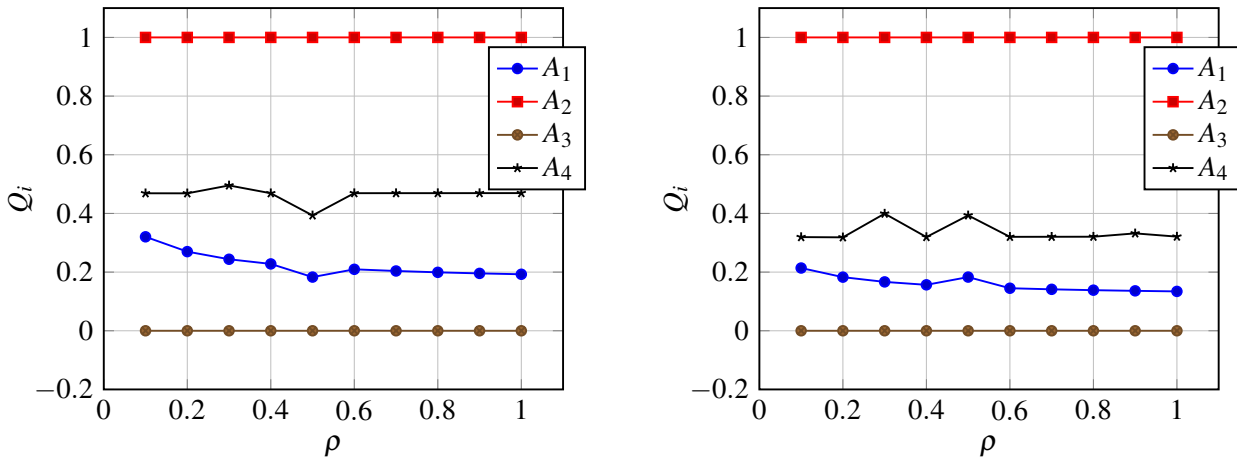
7.4.1 Analyse de sensibilité et étude comparative

Dans cette étude, nous avons réalisé une analyse de sensibilité pour démontrer la robustesse de l'intégration de GRA et de VIKOR proposée. Pour ce faire, nous avons déterminé les coefficients de corrélation grise en faisant varier la valeur du coefficient de résolution ρ dans l'intervalle $[0, 1]$, en gardant le paramètre de généralisation de la mesure de divergence floue m fixé à 1. Les résultats montrent que pour $\nu = 0,25$ et $\nu = 0,5$, les solutions de compromis A_3 et A_1 sont classées en tête, suivies de A_4 , tandis que A_2 est la moins bien classée. Pour $\nu = 0,75$, plusieurs solutions de compromis ont été identifiées, dont A_3 , A_1 et A_4 , avec A_2 étant la pire option.

TABLE 7.9 : Valeurs de Q_i pour différentes valeurs du coefficient de résolution ρ

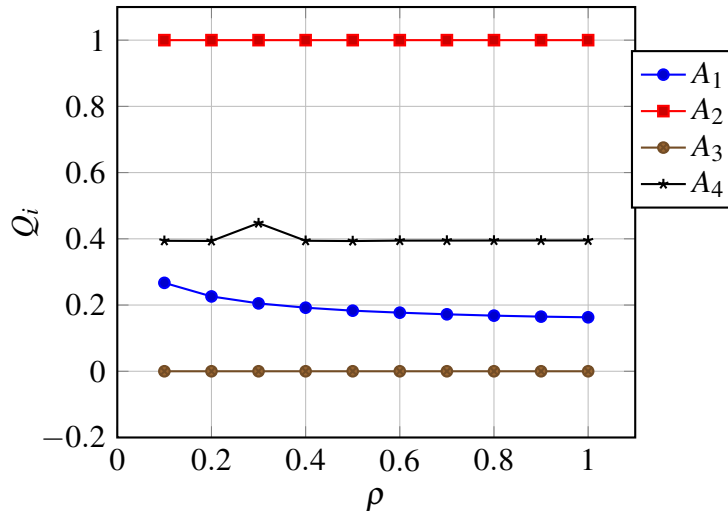
	$\rho = 0.1$			$\rho = 0.2$			$\rho = 0.3$		
	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$
A_1	0.3203	0.2671	0.2139	0.2698	0.2263	0.1828	0.2438	0.2052	0.1666
A_2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
A_3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A_4	0.4687	0.3940	0.3193	0.4685	0.3935	0.3185	0.4954	0.4474	0.3993
	$\rho = 0.4$			$\rho = 0.6$			$\rho = 0.7$		
	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$
A_1	0.2279	0.1923	0.1566	0.2095	0.1772	0.1450	0.2038	0.1725	0.1413
A_2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
A_3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A_4	0.4688	0.3941	0.3195	0.4690	0.3946	0.3202	0.4691	0.3947	0.3204
	$\rho = 0.8$			$\rho = 0.9$			$\rho = 1$		
	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.75$
A_1	0.1992	0.1688	0.1384	0.1956	0.1658	0.1361	0.1926	0.1634	0.1342
A_2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
A_3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A_4	0.4691	0.3949	0.3206	0.4692	0.3950	0.3320	0.4693	0.3951	0.3209

Les résultats obtenus ont permis d'établir un classement fiable des options : $A_3 > A_1 > A_4 > A_2$. Il est important de noter que les variations du coefficient de résolution et du poids de la stratégie n'ont pas eu d'impact sur le classement final, comme le met en évidence la Figure ???. Une comparaison a également été réalisée entre notre approche et certains processus de FMCDM basés sur le principe TOPSIS, comme indiqué dans la Table 7.10. Bien que ces approches aient abouti au même classement final que notre méthode, elles ne prennent pas en compte les avantages que les options ont les unes



(a) Analyse de sensibilité pour ρ quand $v = 0.25$

(b) Analyse de sensibilité pour ρ quand $v = 0.75$



(c) Analyse de sensibilité pour ρ quand $v = 0.5$

FIGURE 7.1 : Analyse de sensibilité pour ρ

sur les autres du point de vue décisionnel, et ne permettent pas de mettre en évidence les critères qui rendent certaines alternatives inefficaces. De plus, certains des algorithmes utilisés pour générer les poids des critères utilisent la méthode de l'entropie, qui ne discrimine pas correctement l'importance des critères.

7.4.2 Comparaison de notre méthode à celle de Kuo and Liang (2011)

Dans leur étude, Kuo and Liang (2011) ont développé une approche combinant GRA et VIKOR pour évaluer la qualité de service des aéroports internationaux d'Asie du Nord-Est. Nous avons souhaité comparer notre méthode combinant GRA et VIKOR avec celle de Kuo et Liang, en appliquant notre technique aux données présentées dans la table 6 de leur article. Nous avons fixé le coefficient de résolution ρ à 0,5 et le poids de la stratégie v à 0, 0,5 et 1. Les résultats présentés dans la Table 7.7 montrent que notre stratégie permet d'obtenir le même classement des aéroports internationaux que

TABLE 7.10 : Comparaison de l'ordre de classement des options provenant de différentes procédures.

Methods	Rank	Best option
F-TOPSIS Chen (2000)	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3
TOPSIS Hwang and Yoon (1981)	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3
IF-TOPSIS Joshi and Kumar (2014)	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3
Méthode de Mishra and Rani (2017)	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3
Méthode de Rani et al. (2020) method	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3
Méthode par Chaabane and Kheffache (2023)	$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$	A_3

TABLE 7.11 : Résultats de classement obtenus en utilisant notre approche sur l'exemple de Kuo et Liang pour $\rho = 0.5$

Option	$\nu = 0$			$\nu = 0.5$			$\nu = 1$		
	Q_i	Rank ¹	Rank ²	Q_i	Rank ¹	Rank ²	Q_i	Rank ¹	Rank ²
HKG	0.7535	3	4	0.5536	3	4	0.3537	3	3
KIX	0.0000	1	1	0.0000	1	1	0.0000	1	1
NRT	0.4034	2	2	0.2876	2	2	0.1718	2	2
PEK	1.0000	7	1	1.0000	7	7	1.0000	7	7
SEL	0.7891	5	5	0.7865	5	5	0.7838	5	5
SHA	0.9481	6	6	0.8939	6	6	0.8398	6	6
TPE	0.7609	4	3	0.6044	4	3	0.4480	4	4

¹Classement par [Chaabane and Kheffache \(2023\)](#).

²Classement par [Kuo and Liang \(2011\)](#).

celui de Kuo et Liang, à l'exception de ceux de HKG et TPE, qui sont respectivement classés 3 et 4 selon notre méthode, alors qu'ils sont classés 4 et 3 selon celle de Kuo et Liang. Cependant, ils ont signalé que lors de l'application de SAW (Simple Additive Weighting) flou ([Chen et al., 1992](#); [Triantaphyllou and Lin, 1996](#)) et de TOPSIS flou ([Chen, 2000](#)) aux mêmes données numériques, le classement final obtenu par ces méthodes est le suivant : $KIX > NRT > HKG > TPE > SEL > SHA > PEK$. Il convient de mentionner que le classement de SWA flou et de TOPSIS flou est le même que le classement final obtenu par notre méthode combinant GRA et VIKOR.

7.4.3 Avantages et inconvénients de notre méthode

Dans un contexte flou, la combinaison de la méthode GRA et celle de VIKOR pourrait offrir certains avantages et inconvénients potentiels : La méthode proposée présente un potentiel important, car elle permet de déterminer la meilleure option qui satisfait fortement presque tous les critères de bénéfice, et ce, en raison de la technique choisie pour la phase de normalisation. En outre, cette méthode est capable de déceler quels sont les critères qui rendent une option moins efficace comme

dans le cas de l'option A_2 selon la table 7.2, celle-ci révèle que pour les critères C_3 et C_5 , l'alternative A_2 ne satisfait pas ces critères suffisamment. Il est recommandé dans ce cas d'apporter une amélioration de A_2 du point de vue de ces critères. Cette nouvelle approche facilite également la compréhension des avantages de certaines options par rapport à d'autres du point de vue de la prise de décision, et ce, grâce à l'utilisation de la méthode VIKOR. De plus, en s'appuyant sur les principes de la méthode GRA dans l'approche proposée, permet d'utiliser un seul point de référence, ce qui a aidé à clarifier et à simplifier l'analyse. La contribution de la méthode VIKOR à notre approche consiste en la détermination d'une solution de compromis efficace, en identifiant l'alternative qui se rapproche le plus du point de référence tout en ayant la plus faible distance relative aux autres alternatives.

Néanmoins, la précision et la fiabilité des résultats peuvent en effet être affectées si le choix du point de référence n'est pas justifié ou si les données ne sont pas correctement normalisées. Il est donc crucial de bien sélectionner ces deux points et de s'assurer que la normalisation est réalisée de manière adéquate. Cela permettra de réduire les risques d'erreurs dans les résultats et de garantir la pertinence de la méthode pour la prise de décision.

7.5 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode innovante d'optimisation multicritère dans un environnement flou. Cette méthode est composée de deux modèles mathématiques pour générer les poids des critères et de l'intégration des méthodes GRA et VIKOR.

Les modèles mathématiques pour la génération des poids sont basés sur une combinaison des mesures de l'information proposées, à savoir D_m et K_m , selon le principe de déviation maximale de Wei (2008).

Dans le même contexte, nous présentons une nouvelle combinaison de GRA et VIKOR offrant des avantages importants pour la prise de décision multicritère. Cette approche permet grâce au type de normalisation opérée sur les données, d'utiliser un seul point de référence et de déterminer une solution de compromis efficace qui satisfait amplement la plupart des critères de bénéfice, tout en minimisant les critères de coût. En plus, cette procédure permet également d'identifier les critères pour lesquels certaines options peuvent être moins efficaces.

Cependant, il est important de noter que cette méthode peut présenter des limites en termes de précision et de fiabilité des résultats, en particulier si les données ne sont pas correctement normalisées ou si le choix du point de référence n'est pas bien justifié. Il est donc crucial de bien choisir ces deux points pour garantir la qualité des résultats obtenus. Enfin, il convient de souligner que cette méthode peut être appliquée dans de nombreux domaines, tels que la finance, l'ingénierie, la gestion de projet, l'environnement, offrant ainsi une solution efficace pour la prise de décision multicritère dans des contextes incertains et flous.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Cette thèse constitue une contribution significative au domaine de la décision multicritère floue et vise à proposer de nouvelles mesures de l'information floue pour résoudre les problèmes de prise de décision en présence de critères conflictuels et de données ambiguës.

Pour atteindre cet objectif, cette thèse commence par proposer et valider une mesure généralisée de divergence floue du type f -divergence de Csiszár, appelée D_m , spécifiquement conçue pour les ensembles flous classiques. Une analyse comparative approfondie est réalisée pour évaluer la performance de cette mesure par rapport à d'autres mesures de divergence floue bien connues. Les résultats de cette analyse ont mis en évidence un aspect particulièrement remarquable : la divergence proposée se révèle extrêmement sensible, détectant avec précision les plus infimes variations entre deux ensembles flous.

Cette capacité exceptionnelle met en évidence la supériorité de la mesure de divergence floue proposée par rapport aux autres mesures de divergence floue utilisées dans l'analyse comparative. En effet, sa sensibilité accrue confère à cette mesure un pouvoir discriminant considérable, ce qui en fait un atout majeur dans le contexte de la prise de décision en présence d'ambiguïté.

La nouvelle mesure de divergence floue présentée offre une capacité remarquable pour traiter l'ambiguïté et permet de distinguer de manière précise et nuancée entre différentes alternatives lors d'un processus de prise de décision multicritère floue. Cette capacité accrue ouvre de nouvelles perspectives pour améliorer les méthodes d'analyse multicritère et offre des possibilités d'application dans divers domaines où l'incertitude et l'ambiguïté sont prédominantes.

Par ailleurs, en termes de distributions de probabilités, la mesure de divergence D_m , est une mesure de divergence probabiliste polyvalente. Elle trouve son utilité dans différents contextes, notamment

pour comparer des modèles probabilistes, évaluer la qualité des prédictions, estimer la complexité d'un modèle, ainsi que pour des tâches d'optimisation, de classification ou de regroupement de données probabilistes. Cette mesure quantifie de manière précise la différence entre deux distributions de probabilité, offrant ainsi une approche quantitative pour analyser les disparités et les similitudes probabilistes. Son application s'étend à de nombreux domaines où l'analyse probabiliste joue un rôle fondamental, permettant une évaluation objective et des prises de décision éclairées.

En outre, cette thèse se distingue par la proposition d'une nouvelle classe de mesures de connaissances floues dont la construction est basée sur la classe des f -divergence de Csiszár. Dans cette optique, la divergence floue proposée D_m est utilisée pour déduire une nouvelle mesure généralisée de connaissances floues, notée K_m , qui a été comparée à certaines mesures d'information usuelles. L'évaluation comparative a démontré que la nouvelle mesure de connaissances est particulièrement pertinente pour évaluer la quantité d'informations précises contenues dans un ensemble flou. Cette approche novatrice offre donc de nouvelles perspectives pour évaluer et mesurer les connaissances floues, en utilisant la divergence comme outil fondamental. De plus, deux nouveaux modèles d'optimisation ont été développés pour la génération des poids des critères sur la base des deux mesures proposées. Les résultats numériques ont indiqué que l'ordre de préférence des critères n'a pas été altéré par la disponibilité ou l'absence d'informations sur les poids des critères, ni par les variations du paramètre de généralisation des mesures D_m et K_m .

Une approche innovante basée sur la mesure de divergence floue D_m a été développée, combinant les méthodes GRA et VIKOR pour aborder les problèmes de décision en contexte flou. Pour démontrer la pertinence et la robustesse de cette méthode d'analyse multicritère suggérée, une étude expérimentale complète, comprenant une étude comparative et une analyse de sensibilité, a été réalisée.

Cette approche présente un énorme potentiel, car elle permet de déterminer l'option optimale qui répond efficacement à tous les critères de bénéfice. De plus, elle indique aux professionnels quel critère rend une alternative moins efficace. Aussi, cette approche permet une évaluation aisée des avantages de certaines options par rapport à d'autres, du point de vue de la prise de décision. Enfin, la procédure MCDM proposée ne nécessite pas des calculs intensifs et offre des perspectives prometteuses pour la prise de décision en présence de critères conflictuels et d'informations ambiguës, avec une large portée d'exploration et d'utilisation dans divers environnements flous.

Perspectives

En termes de perspectives de recherche, il serait intéressant d'approfondir l'étude des mesures de l'information et de leur impact sur l'optimisation multicritère en explorant d'autres types d'ensembles flous tels que les ensembles flous Pythagoriciens "Pythagorean fuzzy sets" et les ensembles flous

hésitants "hesitant fuzzy sets". Ces ensembles flous avancés permettent de modéliser des situations d'ambiguïté plus complexes et pourraient apporter de nouvelles nuances dans l'analyse des problèmes de décision multicritère.

Une autre piste intéressante consisterait à étendre le concept d'énergie de l'information floue (fuzzy information energy) à l'optimisation multicritère, une approche qui n'a pas encore été explorée dans ce domaine. L'énergie de l'information floue est une mesure de connaissance floue pour les nombres flous, dans le contexte d'un univers de référence avec une densité de probabilité associée. Cette extension pourrait permettre le développement de nouvelles approches multicritères qui prennent en compte à la fois l'aspect subjectif de l'imprécision et l'aspect probabiliste, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour la résolution de problèmes de décision complexes.

La décision multicritère utilise la notion des notions de préférence régies par des relation binaires que nous rappelons ci-dessous :

A.1 Relations binaires et relations d'ordre

Définition A.1.1. Une relation binaire S sur un ensemble X est définie comme un ensemble de paires ordonnées (x, y) avec $x, y \in X$ tels que xSy .

Définition A.1.2. Une relation binaire définie sur un ensemble X est dite :

- réflexive si xSx pour tout $x \in X$;
- irreflexive si $x \not Sx$ pour tout $x \in X$;
- symétrique si $xSy \Rightarrow ySx$ pour tout $x, y \in X$;
- asymétrique si $xSy \Rightarrow y \not Sx$ pour tout $x, y \in X$ et $x \neq y$;
- transitive si xSy et $ySz \Rightarrow xSz$ pour tout $x, y, z \in X$;
- négativement transitive si $x \not Sy$ et $y \not Sz \Rightarrow x \not Sz$ pour tout $x, y, z \in X$;
- connexe si $x, y \in X \Rightarrow xSy$ ou ySx ;
- faiblement connexe si $x, y \in X$ et $x \neq y \Rightarrow xSy$ ou bien ySx .

Définition A.1.3. *Un ordre partiel est une relation binaire réflexive, asymétrique et transitive.*

Définition A.1.4. *Un ordre faible est une relation binaire asymétrique et négativement transitive.*

Définition A.1.5. *Un ordre strict est une relation binaire asymétrique, négativement transitive et faiblement connexe.*

Définition A.1.6. *Une relation binaire est dite complète si elle est connexe et antisymétrique.*

Définition A.1.7. *Un préordre complet (ou total) est une relation transitive et complète.*

,

A.2 Enveloppe convexe

On supposera être dans un contexte où la notion de sous-ensemble convexe a un sens (par exemple en géométrie affine sur les réels), et l'on notera E le cadre géométrique où l'on se place.

Définition A.2.1. *Soit A une partie de E . L'enveloppe convexe de A est l'intersection de toutes les parties convexes E qui contiennent A .*

B.1 Preuve du Théorème 6.2.2

En accord avec les notions de l'union et de l'intersection de deux ensembles flous dans la Section 3.3. On considère l'univers de discours X donné par $X = X_1 \cup X_2$ tels que :

$$X_1 = \{x \in X \mid \mu_A(x) \leq \mu_B(x)\},$$

$$X_2 = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \mu_B(x)\}.$$

Ainsi on aura :

$$(a) D_m(A \cup B, A \cap B) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_{A \cup B}(x_i)} - \sqrt{\mu_{A \cap B}(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_{A \cup B}(x_i) + \mu_{A \cap B}(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_{A \cup B}(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_{A \cap B}(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_{A \cup B}(x_i) - \mu_{A \cap B}(x_i))^t} \right] \\ &= \sum_{x_i \in X_1} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_B(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right] \\ &+ \sum_{x_i \in X_2} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^t} \right] \end{aligned}$$

$= D_m(A, B)$. D'où (a) est vérifié.

(b) $D_m(A \cup B, A) + D_m(A \cap B, A) =$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_{A \cup B}(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_{A \cup B}(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_{A \cup B}(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_{A \cup B}(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_{A \cap B}(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_{A \cap B}(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_{A \cap B}(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_{A \cap B}(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right] \\
& = \sum_{x_i \in X_1} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_B(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{x_i \in X_2} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{x_i \in X_1} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{x_i \in X_2} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_B(x_i) - \mu_A(x_i))^t} \right]
\end{aligned}$$

$= D_m(A, B)$. On alors (b)

(c) $D_m(A \cup B, C) + D_m(A \cap B, C)$

$$\begin{aligned}
& = \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_{A \cup B}(x_i)} - \sqrt{\mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_{A \cup B}(x_i) + \mu_C(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_{A \cup B}(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_{A \cup B}(x_i) - \mu_C(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_{A \cap B}(x_i)} - \sqrt{\mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_{A \cap B}(x_i) + \mu_C(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_{A \cap B}(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_{A \cap B}(x_i) - \mu_C(x_i))^t} \right] \\
& = \sum_{x_i \in X_1} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_C(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_B(x_i) - \mu_C(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{x_i \in X_2} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_C(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_C(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{x_i \in X_1} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_C(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_C(x_i))^t} \right] \\
& + \sum_{x_i \in X_2} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_C(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_C(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_B(x_i) - \mu_C(x_i))^t} \right]
\end{aligned}$$

$= D_m(A, C) + D_m(B, C)$. Par conséquent on a bien (c).

(d) $D_m(A, A \cup B)$

$$= \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_{A \cup B}(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_{A \cup B}(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_{A \cup B}(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_{A \cup B}(x_i))^t} \right]$$

$$= \sum_{x_i \in X_1} 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^t} \right]$$

Alors (d) est vérifié.

(e) On peut vérifier (e) de la même façon que pour (c).

(f) Puisque, $\mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i)$, (f) est alors vérifié.

(g) Dans l'ensemble X_1 , on a : $\mu_{\overline{A \cup B}}(x_i) = \mu_{\bar{B}}(x_i)$, $\mu_{\overline{A \cap B}}(x_i) = \mu_{\bar{A}}(x_i)$,

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x_i) = \mu_{\bar{A}}(x_i) \text{ et } \mu_{\overline{A \cap B}}(x_i) = \mu_{\bar{B}}(x_i).$$

$$\text{dans } X_2, \mu_{\overline{A \cup B}}(x_i) = \mu_{\bar{A}}(x_i), \mu_{\overline{A \cap B}}(x_i) = \mu_{\bar{B}}(x_i),$$

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x_i) = \mu_{\bar{B}}(x_i) \text{ et } \mu_{\overline{A \cap B}}(x_i) = \mu_{\bar{A}}(x_i). \text{ Alors,}$$

$$D_m(\overline{A \cup B}, \overline{A \cap B})$$

$$= \sum_{x_i \in X_1} 2^t \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_B(x_i) - \mu_A(x_i))^t} + \sum_{x_i \in X_1} 2^t \frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))^t}$$

$$+ \sum_{x_i \in X_2} 2^t \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^t} + \sum_{x_i \in X_2} 2^t \frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^t}.$$

$$= D_m(A \| B)$$

d'autre part on a $D_m(\overline{A \cap B}, \overline{A \cup B})$

$$= \sum_{x_i \in X_1} 2^t \frac{(\sqrt{1 - \mu_B(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^t} + \sum_{x_i \in X_1} 2^t \frac{(\sqrt{\mu_B(x_i)} - \sqrt{\mu_A(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))^t}$$

$$+ \sum_{x_i \in X_2} 2^t \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(2 - \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^t} + \sum_{x_i \in X_2} 2^t \frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^t}.$$

$$= D_t(A \| B)$$

On aura alors : $D_m(\overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}) = D_m(\overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}) = D_m(A, B)$.

(h) $D_m(A, \bar{B}) =$

$$\sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(1 - \mu_B(x_i) + \mu_A(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(1 - \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^t} \right]$$

et

$$D_m(\bar{A}, B) = \sum_{i=1}^n 2^t \left[\frac{(\sqrt{1 - \mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(1 - \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i))^t} + \frac{(\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{1 - \mu_B(x_i)})^{2t+2}}{(\mu_A(x_i) + 1 - \mu_B(x_i))^t} \right].$$

= $D_m(A, \bar{B})$. On ainsi (h) .

(i) De(f) et (h) du Théorème 6.2.2, (i) est vérifié.

(j) Puisque A est ensemble ordinaire non flou i.e., $\mu_A(x) = 1$ or 0 , alors (j) est vérifié.

Bibliographie

- Abbas, M. and Chergui, Z. (2019). The impact of using new significant reference point with topsis methods : study and application. *International Journal of Information and Decision Sciences*, 11(2) :95–115.
- Abdullah, L. (2013). Fuzzy multi criteria decision making and its applications : A brief review of category. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 97 :131–136.
- Abo-Sinna, M. A. (2016). An interactive algorithm for large scale multiple objective programming problems with fuzzy parameters through topsis approach. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 21(2).
- Abo-Sinna, M. A. and Abou-El-Enien, T. H. (2006). An interactive algorithm for large scale multiple objective programming problems with fuzzy parameters through topsis approach. *Applied Mathematics and Computation*, 177(2) :515–527.
- Aladenise, N. and Bouchon-Meunier, B. (1997). Acquisition de connaissances imparfaites : mise en évidence d'une fonction d'appartenance. *Revue Internationale de systématique*, 11 :109–127.
- Arya, V. and Kumar, S. (2020). Knowledge measure and entropy : a complementary concept in fuzzy theory. *Granular Computing*, pages 1–13.
- Ashtiani, B., Haghighirad, F., Makui, A., and Montazer, G. A. (2009). Extension of fuzzy topsis method based on interval-valued fuzzy sets. *Applied Soft Computing*, 9(2) :457–461.
- Atanassov, K. T. (1999). Intuitionistic fuzzy sets. In *Intuitionistic fuzzy sets*, pages 1–137. Springer.
- Baas, S. M. and Kwakernaak, H. (1977). Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets. *Automatica*, 13(1) :47–58.
- Bajaj, R. K. and Hooda, D. (2010). On some new generalized measures of fuzzy information. *World Acad Sci Eng Technol*, 62 :747–753.
- Bellman, R. and Giertz, M. (1973). On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. *Information sciences*, 5 :149–156.
- Bellman, R. E. and Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, 17(4) :B–141.
- Belton, V. and Stewart, T. (2002). *Multiple criteria decision analysis : an integrated approach*. Springer Science & Business Media.

-
- Benayoun, R., de Montgolfier, J., Tergny, J., and Larichev, O. (1971). Linear programming with multiple objective functions : Step method (stem). *Mathematical Programming*, 1(2) :366–373.
- Benayoun, R., Roy, B., and Sussman, N. (1966). Reference manual of the electre programme.
- Beran, R. (1977). Minimum hellinger distance estimates for parametric models. *The annals of Statistics*, pages 445–463.
- Bernadette, B.-M. (2003). *Logique floue, principes, aide à la décision*. Lavoisier.
- Bezdek, J. (1993). Fuzzy models—what are they, and why?[editorial]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(1) :1–6.
- Bhandari, D. and Pal, N. R. (1993). Some new information measures for fuzzy sets. *Information Sciences*, 67(3) :209–228.
- Bhatia, P. and Singh, S. (2012). Three families of generalized fuzzy directed divergence. *AMO-Adv Model Optim*, 14(3) :599–614.
- Black, M. (1937). Vagueness : An exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4(4) :427–455.
- Boender, C., De Graan, J., and Lootsma, F. (1989). Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. *Fuzzy sets and Systems*, 29(2) :133–143.
- Bouyssou, D. (1984). Approches descriptives et constructives d’aide à la décision : Fondements et comparaison. *Thèse de 3me cycle, Université Paris-Dauphine, Paris*.
- Bouyssou, D., Dubois, D., Pirlot, M., and Prade, H. (2006a). *Concepts et méthodes pour l’aide à la décision 1 : outils de modélisation (Traité IC2, série Informatique et Systèmes d’Information)*, volume 1. Lavoisier.
- Bouyssou, D., Marchant, T., Pirlot, M., Tsoukias, A., and Vincke, P. (2006b). *Evaluation and decision models with multiple criteria : Stepping stones for the analyst*, volume 86. Springer Science & Business Media.
- Branke, J., Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., and Slowiński, R. (2008). *Multiobjective optimization : Interactive and evolutionary approaches*, volume 5252. Springer Science & Business Media.
- Brans, J.-P. (1982). *L’ingénierie de la décision : l’élaboration d’instruments d’aide a la décision*. Université Laval, Faculté des sciences de l’administration.
- Brans, J.-P. and Vincke, P. (1985). Note—a preference ranking organisation method : (the promethee method for multiple criteria decision-making). *Management science*, 31(6) :647–656.
-

-
- Brans, J.-P., Vincke, P., and Mareschal, B. (1986). How to select and how to rank projects : The promethee method. *European journal of operational research*, 24(2) :228–238.
- Brauers, W. K. and Zavadskas, E. K. (2006). The moora method and its application to privatization in a transition economy. *Control and Cybernetics*, 35 :445–469.
- Bridgman, P. (1922). Dimensional analysis. *Phys. Rev*, 20 :235–242.
- Buckley, J. J. (1985a). Fuzzy hierarchical analysis. *Fuzzy sets and systems*, 17(3) :233–247.
- Buckley, J. J. (1985b). Ranking alternatives using fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 15(1) :21–31.
- Campbell, L. L. (1965). A coding theorem and rényi’s entropy. *Information and control*, 8(4) :423–429.
- Chaabane, D. and Kheffache, D. (2023). Correction : Multi-criteria decision-making based on novel fuzzy generalized divergence and knowledge measures. *Granular Computing*, 8(6) :2083–2083.
- Chai, J., Liu, J. N., and Ngai, E. W. (2013). Application of decision-making techniques in supplier selection : A systematic review of literature. *Expert systems with applications*, 40(10) :3872–3885.
- Chakhar, S. (2006). *Cartographie décisionnelle multicritère : formalisation et implémentation informatique*. PhD thesis, Paris 9.
- Chankong, V. and Haimes, Y. Y. (2008). *Multiobjective decision making : theory and methodology*. Courier Dover Publications.
- Charnes, A., Cooper, W. W., and Ferguson, R. O. (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management science*, 1(2) :138–151.
- Chen, C.-T. (2000). Extensions of the totpis for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy sets and systems*, 114(1) :1–9.
- Chen, S.-J., Hwang, C.-L., Chen, S.-J., and Hwang, C.-L. (1992). *Fuzzy multiple attribute decision making methods*. Springer.
- Chen, S.-M. and Lee, L.-W. (2010). A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management. *International Journal of Production Economics*, 126(2) :370–377.
- Chen, S.-M., Zou, X.-Y., and Barman, D. (2019). Adaptive weighted fuzzy rule interpolation based on ranking values and similarity measures of rough-fuzzy sets. *Information Sciences*, 488 :93–110.

-
- Chen, T.-Y. and Li, C.-H. (2011). Objective weights with intuitionistic fuzzy entropy measures and computational experiment analysis. *Applied Soft Computing*, 11(8) :5411–5423.
- Chen, W.-H., Tsai, M.-S., and Kuo, H.-L. (2005). Distribution system restoration using the hybrid fuzzy-grey method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(1) :199–205.
- Choo, E. U. and Wedley, W. C. (1985). Optimal criterion weights in repetitive multicriteria decision-making. *Journal of the Operational Research Society*, 36(11) :983–992.
- Chou, C.-C. (2003). The canonical representation of multiplication operation on triangular fuzzy numbers. *Computers & Mathematics with Applications*, 45(10-11) :1601–1610.
- Churchman, C. W. and Ackoff, R. L. (1954). An approximate measure of value. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(2) :172–187.
- Collette, Y. and Siarry, P. (2002). *Optimisation multiobjectif*. Editions Eyrolles.
- Couso, I., Janis, V., and Montes, S. (2000). Fuzzy divergence measures. *Acta Univ M Belii*, 8 :21–26.
- Csiszar, I. (1963). Eine informations theoretische ungleichung und ihre anwendung auf den beweis der ergodizitat von marko-schen ketten. *Magyar. Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl*, 8.
- Csiszár, I. (1963). Eine informations theoretische ungleichung und ihre anwendung auf den beweis der ergodizitat von markoffschen ketten. *Mayar Tud. Acad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, 8 :85–108.
- Csiszár, I. (1967). Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observation. *studia scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 2 :229–318.
- Csiszár, I. and Korner, J. (1981). Graph decomposition : A new key to coding theorems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 27(1) :5–12.
- Darbelet, M., Izard, L., and Scaramuzza, M. (1996). *Économie d'entreprise, BTS 2 : guide pédagogique : nouveau référentiel*. Foucher.
- De Luca, A. and Termini, S. (1972). A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and control*, 20(4) :301–312.
- Deb, K. (2001). *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, volume 16. John Wiley & Sons.
- Dragomir, S. S. (2003). Bounds for f-divergences under likelihood ratio constraints. *Applications of Mathematics*, 48(3) :205–223.

-
- Dubois, D. (1983). *Modeles mathematiques de l'imprecis et de l'incertain en vue d'applications aux techniques d'aide a la decision*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I; Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Dubois, D. (1984). Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory. *TIMS Studies in the Management Sciences*, 20 :209–240.
- Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy sets and systems : theory and applications*, volume 144. Academic press.
- Ebanks, B. R. (1983). On measures of fuzziness and their representations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 94(1) :24–37.
- Eckenrode, R. T. (1965). Weighting multiple criteria. *Management science*, 12(3) :180–192.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization*, volume 491. Springer Science & Business Media.
- Fan, J. and Xie, W. (1999). Distance measure and induced fuzzy entropy. *Fuzzy sets and systems*, 104(2) :305–314.
- Fan, Z.-P., Hu, G.-F., and Xiao, S.-H. (2004). A method for multiple attribute decision-making with the fuzzy preference relation on alternatives. *Computers & Industrial Engineering*, 46(2) :321–327.
- Farahani, R. Z., SteadieSeifi, M., and Asgari, N. (2010). Multiple criteria facility location problems : A survey. *Applied Mathematical Modelling*, 7(34) :1689–1709.
- Figueira, J., Greco, S., and Ehrgott, M. (2005). State of the art surveys. In *Multiple Criteria Decision Analysis*. Springer.
- Fishburn, P. C. (1974). Exceptional paper—lexicographic orders, utilities and decision rules : A survey. *Management science*, 20(11) :1442–1471.
- Ganie, A. H. (2022). Multicriteria decision-making based on distance measures and knowledge measures of fermatean fuzzy sets. *Granular Computing*, 7 :1–20.
- Garg, H., Agarwal, N., and Tripathi, A. (2015). Entropy based multi-criteria decision making method under fuzzy environment and unknown attribute weights. *Global Journal of Technology and Optimization*, 6(3) :13–20.
- Gass, S. and Saaty, T. (1955). The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval research logistics quarterly*, 2(1-2) :39–45.
- Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of mathematical analysis and applications*, 22(3) :618–630.

-
- Ghosh, M., Das, D., Chakraborty, C., and Ray, A. K. (2010). Automated leukocyte recognition using fuzzy divergence. *Micron*, 41(7) :840–846.
- Giard, V. E. and Roy, B. (1985). *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Editions Economica.
- Gibson, J. D., Berger, T., Lookabaugh, T., Baker, R., and Lindbergh, D. (1998). *Digital compression for multimedia : principles and standards*. Morgan Kaufmann.
- Grabisch, M. (2005). Une approche constructive de la décision multicritère. *Traitement du signal*, 22(4) :321–337.
- Grabisch, M., Nguyen, H. T., and Walker, E. A. (2013). *Fundamentals of uncertainty calculi with applications to fuzzy inference*, volume 30. Springer Science & Business Media.
- Guo, J. and Zhang, W. (2008). Selection of suppliers based on rough set theory and vikor algorithm. In *2008 International Symposium on Intelligent Information Technology Application Workshops*, pages 49–52. IEEE.
- Haimes, Y. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (3) :296–297.
- Hansen, P. and Ombler, F. (2008). A new method for scoring additive multi-attribute value models using pairwise rankings of alternatives. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 15(3-4) :87–107.
- Havrda, J. and Charvát, F. (1967). Quantification method of classification processes. concept of structural a -entropy. *Kybernetika*, 3(1) :30–35.
- Hellinger, E. (1909). Neue begründung der theorie quadratischer formen von unendlichvielen veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1909(136) :210–271.
- Hobson, A. and Cheng, B.-K. (1973). A comparison of the shannon and kullback information measures. *Journal of Statistical Physics*, 7(4) :301–310.
- Hwang, C.-L., Lai, Y.-J., and Liu, T.-Y. (1993). A new approach for multiple objective decision making. *Computers & operations research*, 20(8) :889–899.
- Hwang, C.-L. and Yoon, K. (1981). Methods for multiple attribute decision making. In *Multiple attribute decision making*, pages 58–191. Springer.
- Hwang, C.-M. and Yang, M.-S. (2008). On entropy of fuzzy sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(04) :519–527.

-
- Ishizaka, A. and Nemery, P. (2013). *Multi-criteria decision analysis : methods and software*. John Wiley & Sons.
- Jatoth, C., Gangadharan, G., Fiore, U., and Buyya, R. (2019). Selcloud : a hybrid multi-criteria decision-making model for selection of cloud services. *Soft Computing*, 23 :4701–4715.
- Jiang, B. C., Tasi, S.-L., and Wang, C.-C. (2002). Machine vision-based gray relational theory applied to ic marking inspection. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 15(4) :531–539.
- Joshi, D. and Kumar, S. (2014). Intuitionistic fuzzy entropy and distance measure based totpsis method for multi-criteria decision making. *Egyptian informatics journal*, 15(2) :97–104.
- Joshi, R. (2022). Multi-criteria decision making based on novel fuzzy knowledge measures. *Granular Computing*, pages 1–18.
- Joshi, R. and Kumar, S. (2018). An (r, s) -norm fuzzy information measure with its applications in multiple-attribute decision-making. *Computational and Applied Mathematics*, 37(3) :2943–2964.
- Ju-Long, D. (1982). Control problems of grey systems. *Systems & control letters*, 1(5) :288–294.
- Julong, D. (1989). Introduction to grey system theory. *The Journal of grey system*, 1(1) :1–24.
- Kahraman, C., Öztayşi, B., Uçal Sarı, I., and Turanoğlu, E. (2014). Fuzzy analytic hierarchy process with interval type-2 fuzzy sets. *Knowledge-Based Systems*, 59 :48–57.
- Kapur, J. (1984). A comparative assessment of various measures of directed divergence. *Advances in Management Studies*, 3(1) :1–16.
- Kapur, J. N. (1997). *Measures of fuzzy information*. Mathematical Sciences Trust Society.
- Karande, P. and Chakraborty, S. (2012). A fuzzy-moora approach for erp system selection. *Decision Science Letters*, 1 :11–21.
- Kaufmann, A. and Bonaert, A. (1977). Introduction to the theory of fuzzy subsets-vol. 1 : Fundamental theoretical elements. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 7(6) :495–496.
- Keeney, R. (1976). Decision with multiple objectives. *Preference and Value Tradeoffs*, pages 231–232.
- Keeney, R. L. (1982). Decision analysis : an overview. *Operations research*, 30(5) :803–838.
- Khan, I., Pintelon, L., and Martin, H. (2022). The application of multicriteria decision analysis methods in health care : a literature review. *Medical Decision Making*, 42(2) :262–274.

-
- Kosko, B. and Toms, M. (1993). *Fuzzy thinking : The new science of fuzzy logic*. Hyperion New York.
- Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The annals of mathematical statistics*, 22(1) :79–86.
- Kumar, R., Singh, H., and Dureja, J. (2012). An approach to analyze logistic outsourcing problem in medium-scale organization by cfpr and vikor. *Journal of Manufacturing Technology Management*.
- Kuo, M.-S. and Liang, G.-S. (2011). Combining vikor with gra techniques to evaluate service quality of airports under fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 38(3) :1304–1312.
- Kuo, Y., Yang, T., and Huang, G.-W. (2008). The use of grey relational analysis in solving multiple attribute decision-making problems. *Computers & industrial engineering*, 55(1) :80–93.
- Lazarevic, S. (2001). Personnel selection fuzzy model. *International Transactions in Operational Research*, 8(1) :89–105.
- Leake, C. (2000). Gis and multicriteria decision analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 51(2) :247–247.
- Liu, X. and Liu, J. (2002). Entropy-based multi-criteria decision-making for quality control in garment production. *International Journal of Clothing Science and Technology*, 14(4) :275–283.
- Lotfi, F. H. and Fallahnejad, R. (2010). Imprecise shannon’s entropy and multi attribute decision making. *Entropy*, 12(1) :53–62.
- Lumet, C. (2012). *Modélisation, représentation et résolution de problèmes de partage équitable de biens indivisibles soumis au risque*. PhD thesis, Toulouse, ISAE.
- Ma, J., Fan, Z.-P., and Huang, L.-H. (1999). A subjective and objective integrated approach to determine attribute weights. *European journal of operational research*, 112(2) :397–404.
- Mareschal, B., Brans, J. P., Vincke, P., et al. (1984). Promethee : A new family of outranking methods in multicriteria analysis. Technical report, ULB–Université Libre de Bruxelles.
- Marler, R. T. and Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimization*, 26(6) :369–395.
- Maystre, L. Y., Pictet, J., and Simos, J. (1994). *Méthodes multicritères ELECTRE : description, conseils pratiques et cas d’application à la gestion environnementale*, volume 8. PPUR presses polytechniques.

-
- McCahon, C. S. and Lee, E.-S. (1988). Project network analysis with fuzzy activity times. *Computers & Mathematics with applications*, 15(10) :829–838.
- Méndez, M., Galván, B., Salazar, D., and Greiner, D. (2009). Multiple-objective genetic algorithm using the multiple criteria decision making method topsis. In *Multiobjective Programming and Goal Programming*, pages 145–154. Springer.
- Menni, A. and Chaabane, D. (2020). A possibilistic optimization over an integer efficient set within a fuzzy environment. *RAIRO-Operations Research*, 54(5) :1437–1452.
- Meyer, P. (2003). Multicriteria decision making. *Encyclopedia of life support systems*.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Mikhailov, L. (2000). A fuzzy programming method for deriving priorities in the analytic hierarchy process. *Journal of the Operational Research Society*, 51(3) :341–349.
- Miller, G. and Starr, M. (1969). *Mathematics of multi-criteria decision making*. Pergamon Press.
- Mir, M. A., Ghazvinei, P. T., Sulaiman, N., Basri, N., Saheri, S., Mahmood, N., Jahan, A., Begum, R., and Aghamohammadi, N. (2016). Application of topsis and vikor improved versions in a multi criteria decision analysis to develop an optimized municipal solid waste management model. *Journal of environmental management*, 166 :109–115.
- Mishra, A. R. and Rani, P. (2017). Information measures based topsis method for multicriteria decision making problem in intuitionistic fuzzy environment. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 14(6) :41–63.
- Mishra, A. R., Singh, R. K., and Motwani, D. (2018). Intuitionistic fuzzy divergence measure-based electre method for performance of cellular mobile telephone service providers. *Neural Computing and Applications*, pages 1–21.
- Mladineo, N., Margeta, J., Brans, J., and Mareschal, B. (1987). Multicriteria ranking of alternative locations for small scale hydro plants. *European Journal of Operational Research*, 31(2) :215–222.
- Montes, S., Couso, I., Gil, P., and Bertoluzza, C. (2002). Divergence measure between fuzzy sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, 30(2) :91–105.
- Murray, T. J., Pipino, L. L., and Van Gigch, J. P. (1985). A pilot study of fuzzy set modification of delphi. *Human Systems Management*, 5(1) :76–80.

-
- Nafi, A. and Werey, C. (2009). Aide à la décision multicritère : introduction aux méthodes d'analyse multicritère de type electre. *Module d'ingénierie financière, ENGEES*, 2010.
- Nguyen, H. (2015). A new knowledge-based measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in multiple attribute group decision making. *Expert Systems with Applications*, 22(42) :8766–8774.
- Nijkamp, P. (1977). Stochastic quantitative and qualitative multicriteria analysis for environmental design. *Papers in Regional Science*, 39(1) :175–199.
- Ohlan, A. (2015). A new generalized fuzzy divergence measure and applications. *Fuzzy Information and Engineering*, 7(4) :507–523.
- Ohlan, A. and Ohlan, R. (2016). Generalized hellinger's fuzzy divergence measure and its applications. In *Generalizations of Fuzzy Information Measures*, pages 107–121. Springer International Publishing, Cham.
- Olson, D. L. and Wu, D. (2006). Simulation of fuzzy multiattribute models for grey relationships. *European Journal of Operational Research*, 175(1) :111–120.
- Opricovic, S. (1998). Multicriteria optimization of civil engineering systems. faculty of pennsylvania. opricovic, s. & tzeng, gh, 2004. compromise solution by mcdm methods : A comparative analysis of vikor and topsis. *European Journal of Operational Research*, 156 :445–455.
- Opricovic, S. and Tzeng, G.-H. (2004). Compromise solution by mcdm methods : A comparative analysis of vikor and topsis. *European journal of operational research*, 156(2) :445–455.
- Pal, N. R. and Bezdek, J. C. (1994). Measuring fuzzy uncertainty. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2(2) :107–118.
- Pal, N. R. and Pal, S. K. (1989). Object-background segmentation using new definitions of entropy. *IEE Proceedings E (Computers and Digital Techniques)*, 136(4) :284–295.
- Pareto, V., Bousquet, G., and Busino, G. (1964). *Cours d'économie politique*, volume 1. Librairie Droz, 8,rue Verdine.
- Pedrycz, W., Ekel, P., and Parreiras, R. (2011). *Fuzzy multicriteria decision-making : models, methods and applications*. John Wiley & Sons.
- Perny, P. (1998). Multicriteria filtering methods based on concordance and non-discordance principles. *Annals of operations Research*, 80 :137–165.

-
- Perny, P. and Roy, B. (1992). The use of fuzzy outranking relations in preference modelling. *Fuzzy sets and Systems*, 49(1) :33–53.
- Rani, P., Govindan, K., Mishra, A. R., Mardani, A., Alrasheedi, M., and Hooda, D. (2020). Unified fuzzy divergence measures with multi-criteria decision making problems for sustainable planning of an e-waste recycling job selection. *Symmetry*, 12(1) :90.
- Rényi, A. (1961). On measures of entropy and information. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1 : Contributions to the Theory of Statistics*, volume 4, pages 547–562. University of California Press.
- Rezaei, J., Wang, J., and Tavasszy, L. (2015). Linking supplier development to supplier segmentation using best worst method. *Expert Systems with Applications*, 42(23) :9152–9164.
- Roy, B. (1968). Classement et choix en présence de points de vue multiples. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, 2(8) :57–75.
- Roy, B. (1978). Electre iii : Un algorithme de classements fonde sur une representation floue des preferences en presence de criteres multiples. *CAH. CENTRE ET. RECH. OPERAT. ; BEL; DA. 1978; VOL. 20; NO 1; PP. 3-24; BIBL. 17 REF.*
- Roy, B. (1990). Decision-aid and decision-making. *European Journal of Operational Research*, 45(2-3) :324–331.
- Roy, B. (1996). *Multicriteria methodology for decision aiding*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Roy, B. and Bertier, P. (1971). La methode electre ii : Use methode de classement en presence de criteres multiples., note de travail no. 142, direction scientifique. *Group Metra, Paris.*
- Roy, B. et al. (1985). Méthodologie multicritère d'aide à la décision. *Economica.*
- Roy, B. and Hugonnard, J.-C. (1982). Ranking of suburban line extension projects on the paris metro system by a multicriteria method. *Transportation Research Part A : General*, 16(4) :301–312.
- Roy, Bernard et Bouyssou, D. (1993). *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas.* Economica Paris.
- Saaty, T. (1980). The analytic hierarchy process (ahp) for decision making. In *Kobe, Japan*, pages 1–69.

-
- Saaty, T. L. (1996). *Decision making with dependence and feedback : The analytic network process*, volume 4922. RWS publications Pittsburgh.
- Saaty, T. L. (2003). Decision-making with the ahp : Why is the principal eigenvector necessary. *European journal of operational research*, 145(1) :85–91.
- Saaty, T. L., Peniwati, K., and Shang, J. S. (2007). The analytic hierarchy process and human resource allocation : Half the story. *Mathematical and Computer Modelling*, 46(7-8) :1041–1053.
- Sanayei, A., Mousavi, S. F., and Yazdankhah, A. (2010). Group decision making process for supplier selection with vikor under fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 37(1) :24–30.
- Sarkis, J. and Talluri, S. (2002). A model for strategic supplier selection. *Journal of supply chain management*, 38(4) :18–28.
- Schärlig, A. (1985). *Décider sur plusieurs critères : panorama de l'aide à la décision multicritère*, volume 1. PPUR presses polytechniques.
- Sennaroglu, B. and Celebi, G. V. (2018). A military airport location selection by ahp integrated promethee and vikor methods. *Transportation Research Part D : Transport and Environment*, 59 :160–173.
- Shahhosseini, V. and Sebt, M. (2011). Competency-based selection and assignment of human resources to construction projects. *Scientia Iranica*, 18(2) :163–180.
- Shang, X.-G. and Jiang, W.-S. (1997). A note on fuzzy information measures. *Pattern Recognition Letters*, 18(5) :425–432.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3) :379–423.
- Sharma, B. D. and Mittal, D. P. (1975). New nonadditive measures of entropy for discrete probability distributions. *J. Math. Sci*, 10 :28–40.
- Simon, H. A. (1960). The new science of management decision.
- Singh, S. and Ganie, A. H. (2021). Two-parametric generalized fuzzy knowledge measure and accuracy measure with applications. *International Journal of Intelligent Systems*, 37(7) :836–3880.
- Singh, S., Lalotra, S., and Sharma, S. (2019). Dual concepts in fuzzy theory : Entropy and knowledge measure. *International Journal of Intelligent Systems*, 34(5) :1034–1059.

-
- Singh, S., Sharma, S., and Ganie, A. H. (2020). On generalized knowledge measure and generalized accuracy measure with applications to madm and pattern recognition. *Computational and Applied Mathematics*, 39(3) :1–44.
- Steuer, R. E. (1986). *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Application*. Wiley.
- Sugeno, M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals. *Fuzzy Automata and Decision Processes*, pages 89–102.
- Szmidt, E. and Kacprzyk, J. (2000). Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems*, 114(3) :505–518.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., and Bujnowski, P. (2011). Measuring the amount of knowledge for atanasov’s intuitionistic fuzzy sets. In *International Workshop on Fuzzy Logic and Applications*, pages 17–24. Springer.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., and Bujnowski, P. (2014). How to measure the amount of knowledge conveyed by atanasov’s intuitionistic fuzzy sets. *Information Sciences*, 257 :276–285.
- Taneja, I. (2013). Seven means, generalized triangular discrimination, and generating divergence measures. *Information*, 4(2) :198–239.
- Taneja, I. J. (1987). Statistical aspects of divergence measures. *Journal of statistical planning and inference*, 16 :137–145.
- Taneja, I. J. (1989). On generalized information measures and their applications. In *Advances in Electronics and Electron Physics*, volume 76, pages 327–413. Elsevier.
- Tecle, A. and Duckstein, L. (1994). Concepts of multicriterion decision making. *Multicriteria analysis in water resources management. UNESCO, Paris*, pages 33–62.
- Tomar, V. P. and Ohlan, A. (2014a). New parametric generalized exponential fuzzy divergence measure. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 2(1) :24.
- Tomar, V. P. and Ohlan, A. (2014b). Sequence of inequalities among fuzzy mean difference divergence measures and their applications. *SpringerPlus*, 3(1) :623.
- Tong, R. M. and Bonissone, P. P. (1984). Fuzzy information processing. *Information sciences*, 34(2) :83–84.
- Triantaphyllou, E. and Lin, C.-T. (1996). Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods. *international Journal of Approximate reasoning*, 14(4) :281–310.

-
- Triantaphyllou, E. and Triantaphyllou, E. (2000). *Multi-criteria decision making methods*. Springer.
- Turskis, Z. and Zavadskas, E. K. (2010). A new fuzzy additive ratio assessment method (aras-f). case study : The analysis of fuzzy multiple criteria in order to select the logistic centers location. *Transport*, 25(4) :423–432.
- Tzeng, G.-H. and Huang, J.-J. (2011). *Multiple attribute decision making : methods and applications*. CRC press.
- Tzeng, G.-H., Lin, C.-W., and Opricovic, S. (2005). Multi-criteria analysis of alternative-fuel buses for public transportation. *Energy policy*, 33(11) :1373–1383.
- Van Laarhoven, P. J. and Pedrycz, W. (1983). A fuzzy extension of saaty's priority theory. *Fuzzy sets and Systems*, 11(1-3) :229–241.
- Vansnick, J.-C. (1986). On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach). *European Journal of Operational Research*, 24(2) :288–294.
- Verma, R. (2014). On generalized fuzzy divergence measure and their application to multi-criteria decision making. *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences*, 39(1-4) :191.
- Verma, R. and Maheshwari, S. (2017). A new measure of divergence with its application to multi-criteria decision making under fuzzy environment. *Neural Computing and Applications*, 28(8) :2335–2350.
- Vincke, P. (1992). *Multicriteria decision-aid*. John Wiley & Sons.
- Wang, J.-q. and Li, J.-j. (2011). Multi-criteria fuzzy decision-making method based on cross entropy and score functions. *Expert Systems with Applications*, 38(1) :1032–1038.
- WANG, P. (1983). From the fuzzy statistics to the falling random subsets. *Advances in Fuzzy Sets, Possibility Theory and Applications*, pages 81–96.
- Wang, T. and Chang, T. (2005). Fuzzy vikor as a resolution for multicriteria group decision-making. In *The 11th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, pages 352–356. Atlantis Press Paris, France.
- Wang, T.-C. and Lee, H.-D. (2009). Developing a fuzzy topsis approach based on subjective weights and objective weights. *Expert systems with applications*, 36(5) :8980–8985.
- Wei, G.-W. (2008). Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting. *Knowledge-Based Systems*, 21(8) :833–836.

-
- Wei, G.-W. (2010). Gra method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in intuitionistic fuzzy setting. *Knowledge-Based Systems*, 23(3) :243–247.
- Wierzbicki, A. P. (1999). Reference point approaches. *Multicriteria decision making : advances in MCDM models, algorithms, theory, and applications*, pages 237–275.
- Wu, F., Lu, J., and Zhang, G. (2006). A new approximate algorithm for solving multiple objective linear programming problems with fuzzy parameters. *Applied Mathematics and Computation*, 174(1) :524–544.
- Wu, X., Song, Y., and Wang, Y. (2021). Distance-based knowledge measure for intuitionistic fuzzy sets with its application in decision making. *Entropy*, 23(9).
- Xia, H.-C., Li, D.-F., Zhou, J.-Y., and Wang, J.-M. (2006). Fuzzy linmap method for multiattribute decision making under fuzzy environments. *Journal of Computer and System Sciences*, 72(4) :741–759.
- Xia, M. and Xu, Z. (2012). Entropy/cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment. *Information Fusion*, 13(1) :31–47.
- Xia, M. and Xu, Z. (2014). A novel method for fuzzy multi-criteria decision making. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 13(03) :497–519.
- Xu, X. (2001). The sir method : A superiority and inferiority ranking method for multiple criteria decision making. *European journal of operational research*, 131(3) :587–602.
- Xu, Y. and Da, Q. (2005). Determine the weights of uncertain multi-attribute decision-making and its application. *Systems Engineering-Theory and Methodology Application*, 14 :434–436.
- Xu, Z. and Zhang, X. (2013). Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on topsis with incomplete weight information. *Knowledge-Based Systems*, 52 :53–64.
- Xuecheng, L. (1992). Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. *Fuzzy sets and systems*, 52(3) :305–318.
- Yager, R. R. (1980). On a general class of fuzzy connectives. *Fuzzy sets and Systems*, 4(3) :235–242.
- Yazici, I. and Kahraman, C. (2015). Vikor method using interval type two fuzzy sets. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 29(1) :411–422.
- Ye, J. (2010). Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment. *European Journal of Operational Research*, 205(1) :202–204.

-
- Yeh, C.-H. and Deng, H. (1997). An algorithm for fuzzy multi-criteria decision making. In *1997 IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems (Cat. No. 97TH8335)*, volume 2, pages 1564–1568. IEEE.
- Yu, P.-L. (1973). A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, 19(8) :936–946.
- Zadeh, L. (1963). Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE transactions on Automatic Control*, 8(1) :59–60.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3) :338–353.
- Zadeh, L. A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of mathematical analysis and applications*, 23(2) :421–427.
- Zadeh, L. A. (1972). A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges. *Journal of Cybernetics*, 2(3) :338–353.
- Zadeh, L. A. (1995). Discussion : Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive. *Technometrics*, 37(3) :271–276.
- Zeleny, M. (1973). Compromise programming. *Multiple Criteria Decision Making*.
- Zeleny, M. (1982). *Multiple criteria decision making*. New York (USA) McGraw-Hill.
- Zeng, S., Chen, J., and Li, X. (2010). A hybrid method for pythagorean fuzzy multiple-criteria decision-making. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 15(02) :403–422.
- Zhang, L. (1993). Structural and functional quantization of vagueness. *Fuzzy Sets and Systems*, 55(1) :51–60.
- Zimmermann, H. (1985). Fuzzy set theory—and its applications, international series in management science. *Operations Research. Kluwer. Nijhoff Publishing, Boston*.
- Zimmermann, H.-J. (1987). *Fuzzy sets, decision making, and expert systems*, volume 10. Springer Science & Business Media.
- Zimmermann, H.-J. and Gutsche, L. (1991). Multi-criteria-entscheidungen. In *Multi-Criteria Analyse*, pages 21–33. Springer.
- Zimmermann, H.-J. and Zysno, P. (1980). Latent connectives in human decision making. *Fuzzy sets and systems*, 4(1) :37–51.
-
