

N° d'ordre :01/2005-M/MT

**Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

***Université des sciences et de la technologie Houari Boumedienne***



Faculté des Sciences Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du

diplôme de Magister

EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : **AOUDJIT SAFIA**

Sujet

**EXTENSION DE CERTAINES SUITES**

Soutenu publiquement le 02 février 2005, devant le jury composé de

A.KHELLADI	Professeur (USTHB)	Président
B.BENZAGHOU	Professeur (USTHB)	Directeur de thèse
M.ZITOUNI	Professeur (USTHB)	Examineur
K.BETINA	Professeur (USTHB)	Examineur
A.TADJINE	Chargé de cour	Examineur



## *Remerciements*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire Monsieur **B.BENZAGHOU** professeur à U.S.T.H.B qui m'a aidé et conseillé pour la finalisation du présent mémoire dans bonnes conditions.*

*Je tiens également à remercier les membre de jury **M<sup>er</sup> A.KHELLADI**, **M<sup>er</sup> K.BETINA**, **M<sup>er</sup> M.ZITOUNI** et **M<sup>er</sup> A.TADJINE** qui ont bien voulu examiner mon travail.*

*Je tiens à remercier mes parents qui m'ont soutenu pendant toute la durée de ce travail.*



<b>Table des matières</b>	<b>page</b>
<b>Introduction</b> .....	00
<b>Chapitre I Extension des séries de Hurwitz</b> .....	01
<b>I.1</b> Corps de Hurwitz.....	01
<b>I.2</b> Composition des suites.....	04
<b>Chapitre II Extension des coefficients binomiaux</b> .....	06
<b>II.1</b> Notations et définitions .....	06
<b>II.2</b> La factorielle de Roman.....	06
<b>II.3</b> Les coefficients de Roman.....	09
<b>II.4</b> Quelques résultats.....	12
<b>Chapitre III Extension des nombres de Stirling</b> .....	15
<b>III.1</b> Définitions et premières propriétés.....	15
<b>III.2</b> Propriétés de Positive Positive Stirling Numbers.....	16
<b>III.3</b> La relation entre les nombres de Stirling et nombres de Bernoulli.....	21
<b>III.4</b> La transformation de Mellin-Barsky formelle.....	23
<b>III.5</b> Negative Negative Stirling Numbers.....	25
<b>III.6</b> Negative Positive Stirling Numbers.....	27
<b>III.7</b> Positive Negative Stirling Numbers.....	29

<b>Chapitre IV</b>	<b>Extension des polynômes de Bell</b>	37
IV.1	Extension des polynômes de Bell exponentiels partiels	37
IV.1.1	Définitions et premières propriétés	37
IV.1.2	Relation entre les polynômes de Bell exponentiels partiels et les nombres de Bernoulli généralisés	39
IV.1.3	Extension des polynômes de Bell exponentiels partiels	40
IV.2	Extension des polynômes de Bell exponentiels complets	47
IV.2.1	Généralisation de la formule de transformation de Mellin-Barsky	47
IV.2.2	Définitions et premières propriétés	48
IV.2.3	Calcul ombral	52
IV.2.4	Extension des polynômes de Bell exponentiels complets	54
<b>Chapitre V</b>	<b>Extension des polynômes de Bernoulli et d'Euler</b>	58
V.1	Les opérateurs d'Appell et les suites d'Appell	58
V.2	Les polynômes de Bernoulli	61
V.2.1	Définitions et premières propriétés	61
V.2.2	Extension des polynômes de Bernoulli	64
V.3	Les polynômes d'Euler	66
V.3.1	Définitions et premières propriétés	66
V.3.2	Extension des polynômes d'Euler	70
	<b>Bibliographie</b>	74

## Notations et définitions

$\mathbb{C}$  corps commutatif, de caractéristique zéro

$\mathbb{V}$  corps des nombres complexes

$\mathbb{Z}$  l'ensemble des nombres naturels

$\mathbb{Q}$  l'anneau des entiers rationnels

$\mathbb{Q}$  : le corps des nombres rationnels

$\mathbb{R}$  : le corps des nombres réels

$\mathbb{Z}_p$  l'anneau des entiers p-adiques

$\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres p-adiques

$\mathbb{V}_p$  le complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$

$$z(\mathbb{C}) = \{u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

$$\text{supp}u = \{n, u(n) \neq 0\}$$

$\text{ordu} = \inf \text{supp}u$  (éventuellement  $-\infty$ ) ordre de la suite  $u$

$\text{degu} = \sup \text{supp}u$  (éventuellement  $+\infty$ ) degré de la suite  $u$

$$s(\mathbb{C}) = \{u \in z(\mathbb{C}), \text{ordu} > -\infty\}$$

$$s^*(\mathbb{C}) = \{u \in z(\mathbb{C}), \text{degu} < +\infty\}$$

$$s_0(\mathbb{C}) = \{u \in z(\mathbb{C}), \text{ordu} \geq 0\}$$

## Introduction

- Dans le premier chapitre, on étudie l'extension des séries de Hurwitz

$g_u(x) = \sum_{n \geq 0} u(n) \frac{x^n}{n!}$  que l'on peut l'étendre aux entiers négatifs en posant

$$g_u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) \frac{x^n}{\gamma(n)} \quad \text{avec} \quad \gamma(n) = \begin{cases} n! & \text{pour } n \geq 0 \\ (-1)^{-n-1} & \text{pour } n < 0 \\ (-n-1)! & \end{cases}$$

la factorielle de Roman.

Ces séries nous permet de définir une extension aux entiers négatifs pour les nombres de Stirling et les polynômes de Bell...

- Dans le deuxième chapitre la factorielle de Roman  $\gamma(n)$  nous permettra de généraliser les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$  aux entiers négatifs que nous appellera les coefficients de Roman et on notera  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$
- Dans le chapitre **III**, nous donnerons l'extension des nombres de Stirling de première et deuxième espèce  $S(n,k)$  et  $s(n,k)$  donnée par **B.Benzaghou** en utilisant le corps de Hurwitz, les nombres de Bernoulli généralisés et la transformation de Mellin-Barsky formelle.
- Dans le quatrième chapitre, pour prolonger les polynômes de Bell exponentiels partiels  $B_{n,k}(u)$  avec la même méthode qui a été utilisée pour prolonger les nombres de Stirling en utilisant le corps de Hurwitz, pour prolonger les polynômes de Bell exponentiels complets  $Y_n(x,u)$  et  $P_n(x)$  en utilisant des techniques ombrales.
- Finalement, on donne l'extension des polynômes de Bernoulli et d'Euler en utilisant le corps de Hurwitz.



# Chapitre I

Extension des séries de Hurwitz

## Chapitre I

## Extension des séries de Hurwitz

## I.1 Corps de Hurwitz

Soit  $C$  un corps commutatif de caractéristique zéro et  $u : \mathbb{Z} \rightarrow C$  est une suite à valeurs dans  $C$ .

On note

$$g_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!}$$

la série génératrice exponentielle (ou série de Hurwitz) associée à la suite  $u$  qui joue un rôle important en combinatoire et dans la définition de nombreux polynômes et nombres remarquables.

On définit le produit de Hurwitz  $u \omega v$  de deux suites  $u$  et  $v$  par

$$g_{u \omega v}(x) = g_u(x) \cdot g_v(x)$$

donc,

$$(u \omega v)(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u(k) v(n-k)$$

L'ensemble des suites  $C^{\mathbb{Z}} = \{ u : \mathbb{Z} \rightarrow C \}$ , muni de l'addition et du produit de Hurwitz est une  $C$ -algèbre commutative intègre munie d'une valuation discrète définie par l'ordre  $u \rightarrow \text{ordu}$ , que nous appellerons *l'algèbre de Hurwitz* de  $C$ , nous noterons  $A(C) = A$ . Son corps des fractions est le corps de Hurwitz de  $C$  noté  $H(C) = H$ .

Notons  $T$  l'opérateur shift sur  $A(C)$  défini par

$$(Tu)(n) = u(n+1)$$

et l'opérateur dérivation  $q$  par

$$(qu) = nu(n)$$

de sorte que

$$\begin{cases} g_{Tu}(x) = \frac{d}{dx} g_u(x) \\ g_{qu}(x) = x \frac{d}{dx} g_u(x) \end{cases}$$

La série génératrice exponentielle  $g_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \frac{x^n}{n!}$  a été définie pour  $ordu \geq 0$ .

Lorsque  $ordu=0$ ,  $g_u(x)$  est inversible dans  $C[[x]]$ , il existe une suite  $v$ ,  $ordv \geq 0$  tel que  $v \omega u = e_0$ .

Lorsque  $ordu > 0$ ,  $g_u(x)$  est inversible dans  $C((x))$ , on se propose d'associer à  $\frac{1}{g_u(x)}$  une

série exponentielle  $\sum_{n \geq m} v(n) \frac{x^n}{\gamma(n)}$ , en choisissant une définition convenable de  $\gamma(n)$  qui conserve les propriétés du produit de Hurwitz.

Si  $e_j$  désigne la suite qui prend la valeurs 1 pour  $n=j$  et 0 ailleurs, alors

$$\begin{aligned} Te_j &= e_{j-1} \quad , \quad \text{pour } j \geq 1 \\ Te_0 &= 0 \end{aligned}$$

Pour  $j \in \mathbf{9}$ , posons  $g_{e_j}(x) = \frac{x^j}{\gamma(j)}$  de sorte que pour  $j \in \mathbf{Z}$ ,  $\gamma(j) = j!$  et choisissons  $\gamma$  de sorte

que  $g_{Te_j}(x) = \frac{d}{dx} g_{e_j}(x)$  et  $Te_j = e_{j-1}$ , pour  $j \geq 0$ ,  $Te_0 = 0$  restent valables pour  $j \in \mathbf{9}$ .

Donc, pour  $j \geq 1$

$$g_{Te_j}(x) = g_{e_{j-1}}(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^{-j}}{\gamma(-j)} = \frac{x^{-j-1}}{\gamma(-j-1)}$$

Comme

$$g_{e_i}(x) \cdot g_{e_j}(x) = \frac{x^{i+j}}{\gamma(i) \cdot \gamma(j)} = \frac{\gamma(i+j)}{\gamma(i) \cdot \gamma(j)} g_{e_{i+j}}(x)$$

Posons

$$e_i \omega e_j = \frac{\gamma(i+j)}{\gamma(i) \cdot \gamma(j)} e_{i+j}$$

Pour  $j \geq 0$ ,  $i+j < 0$ , le coefficient binomial  $\binom{i+j}{j}$  est défini par

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-j+1)}{j!} \quad \text{où } \alpha = i+j$$

En particulier, pour  $i+j=-1$

$$\binom{-1}{j} = \frac{-1(-2)\cdots(-j)}{j!} = (-1)^j = \frac{\gamma(-1)}{\gamma(-1-j) \cdot \gamma(j)}$$

Posons  $g_{e_{-1}}(x) = \frac{1}{x}$ , de sorte que  $\gamma(-1)=1$ , alors nécessairement,

$$\gamma(-1-j) = \frac{(-1)^j}{j!}$$

Ce qui justifie la définition,

**I.1.1 Définition**

$$\gamma : \mathbf{9} \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\gamma(n) = \begin{cases} n! & \text{pour } n \geq 0 \\ \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!} & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

La définition du «factoriel de Roman » est le prolongement des factorielles  $n$  ordinaires aux entiers négatifs.

Quelques valeurs de  $\gamma(n)$  sont données par la table suivante

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\gamma(n)$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	1	1	2	6	24	120	720

Pour  $i \in \mathbf{9}, j \in \mathbf{9}$

$$e_i \omega e_j = \frac{\gamma(i+j)}{\gamma(i) \cdot \gamma(j)} e_{i+j}$$

que l'on prolonge par linéarité et continuité pour l'ordre à  $u$  et  $v$  éléments de  $s(\mathbf{C})$ .

Pour  $u : \mathbf{9} \rightarrow \mathbf{C}$ , nous définissons sa série de Hurwitz (généralisée) par

$$g_u(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} u(n) \frac{x^n}{\gamma(n)}$$

et pour  $u$  et  $v$  d'ordres finis, le produit  $g_u(x) \cdot g_v(x)$  définit encore une suite d'ordre fini avec

$$(u \omega v)(n) = \sum_{i+j=n} \frac{\gamma(i+j)}{\gamma(i) \cdot \gamma(j)} u(i)v(j) \quad (\text{la somme est finie})$$

et pour  $u$  une suite d'ordre fini,

$$g_{Tu}(x) = \frac{d}{dx} g_u(x)$$

Il en résulte la définition suivante

### I.1.2 Définition

Le corps de Hurwitz  $H(\mathbb{C})$  est le corps des suites d'ordre fini muni de la somme  $u+v$  et du produit de Hurwitz  $u \circ v$ .

L'extension des séries de Hurwitz permet de définir une extension aux entiers négatifs pour nombreuses suites classiques et polynômes classiques.

## I.2 Composition des suites

Soit  $u$  une suite d'ordre strictement positif et  $v$  une suite d'ordre quelconque fini alors la composée  $g_v \circ g_u(x)$  des séries formelles est définie, nous la notons  $g_{vou}(x)$ .

$$\text{ord}(vou) = \text{ord}u \cdot \text{ord}v \qquad (v_1 + v_2)ou = v_1ou + v_2ou$$

$$g_{e_k ou}(x) = \frac{1}{k!} (g_u(x))^k$$

En notant  $u^{ok}$  la puissance  $k^{\text{ème}}$  de  $u$  dans  $A$

$$e_k ou = \frac{u^{ok}}{k!}$$

### I.2.1 Définition

Les polynômes de Bell exponentiels partiels [ 10 ] sont les polynômes  $B_{n,k}(u) = B_{n,k}(u_1, u_2, \dots, u_{n-k+1})$  définis par

$$\frac{1}{k!} (g_u(x))^k = \sum_{n \geq k} B_{n,k}(u) \frac{x^n}{n!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Notons  $B_{q,k}(u)$  la suite  $B_{q,k}(u)(n) = B_{n,k}(u)$

Donc,

- Pour  $k \geq 0$ , 
$$e_k ou = \frac{u^{ok}}{k!} = B_{q,k}(u)$$

$$vou = \sum_{k=0}^{+\infty} v(k)(e_k ou)$$

et  $(vou)(n) = \sum_{k=1}^n v(k)B_{n,k}(u)$  est la *formule de Faa di Bruno* [10]

- $e_{-1}ou = u'$  est l'inverse de  $u$  dans le corps de Hurwitz  $H(C)$ . pour  $k > 0$ ,

$$e_{-k}ou = \frac{1}{\gamma(-k)} u'^{\omega k}$$

**I.2.2 Proposition**

Soit  $\Omega_1 = \{ u \in A, ordu=1 \}$ . Alors  $(v,u) \rightarrow vou$  définit une loi de groupe sur  $\Omega_1$  d'élément neutre  $e_1$ . L'inverse  $\bar{u}$  de  $u$  est la suite réciproque de  $u$   $uou\bar{u} = \bar{u}ou = e_1$ .

Si  $y = g_u(x)$  alors  $x = g_{\bar{u}}(y)$  ( $g_u(x)$  est la série réciproque de  $g_{\bar{u}}(x)$ )

**I.2.3 Exemples**

1.  $g_a(x) = e^x - 1$  alors  $g_{\bar{a}}(x) = \log(1 + x)$   
 $a(0)=0, a(n)=1$  pour  $n \geq 1$   
 $\bar{a}(0) = 0 \quad \bar{a}(n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$  pour  $n \geq 1$

2.  $g_\alpha(x) = 1 - e^{-x}$  alors  $g_{\bar{\alpha}}(x) = -\log(1 - x)$   
 $\alpha(0) = 0, \alpha(n) = (-1)^{n-1}$  pour  $n \geq 1$   
 $\bar{\alpha}(0) = 0, \bar{\alpha}(n) = (n-1)!$  pour  $n \geq 1$

**I.2.4 Proposition**

Pour  $v_1$  et  $v_2$  dans  $A(C)$ ,  
 $(v_1 \omega v_2)ou = (v_1ou) \omega (v_2ou)$

**I.2.5 Proposition**

Pour  $v \in A, u$  une suite d'ordre supérieur ou égal à un  
 $T(vou) = [ (Tv)ou ] \omega Tu$   
 $q(vou) = [ (Tv)ou ] \omega qu$

Ces propositions peuvent servir pour définir des relations de récurrences de certaines suites qu'on étudiera plus tard (les nombres de Stirling de première et deuxième espèce, les polynômes de Bell exponentiels partiels...).

# Chapitre II

Extension des coefficients binomiaux

## Chapitre II

### Extension des coefficients binomiaux

#### II.1 Notations et définitions

$n!$  factorielle  $n$ ,  $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$  si  $n \geq k$  et si  $n < k$ ,  $(n)_k = 0$  factorielle  $n$  descendante d'ordre  $k$ ,  $\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}$  sont les coefficients binomiaux et  $\binom{0}{k} = 0$ ,  $\binom{0}{0} = 1$ .

Les coefficients binomiaux satisfont aux récurrences suivantes

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} && k, n \geq 1 \\ \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} && k, n \geq 1 \\ \binom{n+1}{k+1} &= \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} && k, n \geq 0 \end{aligned}$$

#### II.2 La factorielle de Roman

Pour tout entier  $n$ , on a défini la factorielle de Roman notée  $\gamma$  par

$$\gamma(n) = \begin{cases} n! & \text{pour } n \geq 0 \\ \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!} & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

La factorielle de Roman nous permettra de généraliser les coefficients binomiaux pour  $n$  et  $k$  dans **9**.

Il est bien connu que  $n! = \Gamma(n+1)$  pour  $n \geq 0$ , où  $\Gamma$  est la fonction Gamma.

Nous allons montrer que le nombre  $\gamma(n)$  peut aussi être exprimé à l'aide de la fonction Gamma.

Rappelons la définition suivante

##### II.2.1 Définition

La fonction méromorphe  $\Gamma(z)$  admet pour pôles simples tous les entiers  $n \leq 0$  et elle satisfait aux relations

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1$$

On déduit, par récurrences sur l'entiers  $n \geq 0$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

et 
$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

En particulier, pour  $z = \frac{1}{2}$ , 
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Rappelons le résidu aux points  $z_0$  d'une fonction  $f(z)$  ( $z_0$  pôle simple) est

$$Res_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

**II.2.2 Proposition**

Pour tout entier  $n$ ,

$$\gamma(n) = \begin{cases} \Gamma(n+1) & \text{pour } n \geq 0 \\ Res_{z=n+1} \Gamma(z) & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

**Preuve**

Le cas  $n \geq 0$  est la définition qu'on utilisera pour démontrer le cas  $n < 0$ , puisque

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Pour  $n < 0$ ,

$$\begin{aligned} Res_{z=n+1} \Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow n+1} (z - n - 1) \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow n+1} (z - n - 1) \frac{\pi}{\Gamma(1-z) \cdot \sin \pi z} \\ &= \frac{\pi}{\Gamma(-n)} \lim_{z \rightarrow n+1} \frac{z - n - 1}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{(-n-1)!} \lim_{z \rightarrow n+1} \frac{1}{\pi \cos \pi z} \\ &= \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!} = \gamma(n) \quad \square \end{aligned}$$

On montre que les nombres  $\gamma(n)$  agissent comme les factorielles ordinaires.

On introduit la notation 
$$\lfloor n \rfloor = \begin{cases} n & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

**II.2.3 Proposition**

Pour tout entier  $n$ ,

a)  $\gamma(n) = \lfloor n \rfloor \gamma(n-1)$

b)  $\frac{\gamma(n)}{\gamma(n-k)} = \lfloor n \rfloor \lfloor n-1 \rfloor \dots \lfloor n-k+1 \rfloor$  pour  $k > 0$

**Preuve**

Pour a), si  $n > 0$ , alors  $\gamma(n) = n!$  est la définition.

Pour  $n=0$ , on a  $\lfloor 0 \rfloor \cdot \gamma(0-1) = 1 \cdot 1 = 1 = \gamma(0)$ . Finalement, si  $n < 0$ , alors  $n-1 < 0$ , et

$$\gamma(n-1) = \frac{(-1)^{-n}}{(-n)!} = \frac{1}{-n} \frac{(-1)^{-n}}{(-n-1)!} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!} = \frac{1}{n} \gamma(n)$$

Pour  $b$ ), on va utiliser  $a$ )

$$\frac{\gamma(n)}{\gamma(n-k)} = \lfloor n \rfloor \lfloor n-1 \rfloor \dots \lfloor n-k+1 \rfloor \cdot \frac{\gamma(n-k)}{\gamma(n-k)} = \lfloor n \rfloor \lfloor n-1 \rfloor \dots \lfloor n-k+1 \rfloor \quad \text{pour } k > 0 \quad \square$$

La proposition suivante est une application de la définition  $\gamma(n)$ .

### II.2.4 Proposition

Pour tout entier  $n$ ,

$$a) \quad \gamma(n) \cdot \gamma(-n) = (-1)^{n+(n>0)} \lfloor n \rfloor$$

où  $(n > 0)$  est 1 si  $n > 0$  et 0 si  $n \leq 0$

b) Pour  $n \in \mathbf{9}$ , notons  $n^* \in \mathbf{9}$ , défini par  $n + n^* + 1 = 0$

$$\gamma(n) \cdot \gamma(n^*) = (-1)^{n+(n<0)}$$

où  $(n < 0)$  est 1 si  $n < 0$  et 0 si  $n \geq 0$

#### Preuve

$$a) \quad \text{Si } n > 0, \quad \gamma(n) = n! \quad \text{et} \quad \gamma(-n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Par suite

$$\gamma(n) \cdot \gamma(-n) = n! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = n(-1)^{n-1}$$

$$\text{Si } n < 0, \quad \gamma(n) = \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!} \quad \text{et} \quad \gamma(-n) = (-n)!$$

Par suite

$$\gamma(n) \cdot \gamma(-n) = \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!} (-n)! = (-1)^{-n-1} (-n) = (-1)^{-n} n$$

Nous obtenons,

$$\gamma(n) \cdot \gamma(-n) = \begin{cases} n(-1)^{n-1} & \text{si } n > 0 \\ n(-1)^n & \text{si } n \leq 0 \end{cases} = (-1)^{n+(n>0)} \lfloor n \rfloor$$

$$b) \quad \text{Si } n > 0, \quad \gamma(n) = n!, \quad \gamma(-n-1) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Par suite

$$\gamma(n) \cdot \gamma(-n-1) = n! \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n$$

Si  $n < 0$ , alors  $-n-1 > 0$ ,  $\gamma(n) = \frac{(-1)^{-n-1}}{(-n-1)!}$ ,  $\gamma(-n-1) = (-n-1)!$

$$\gamma(n) \cdot \gamma(-n-1) = (-1)^{-n-1}$$

$$\gamma(n) \cdot \gamma(-n-1) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \geq 0 \\ (-1)^{-n-1} & \text{si } n < 0 \end{cases} = (-1)^{n+(n-0)} \quad \square$$

### II.3 Les coefficients de Roman

Rappelons la définition suivante, pour tout entier  $n$  et  $k$  dans  $\mathbb{Z}$

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{\gamma(n)}{\gamma(k) \cdot \gamma(n-k)} \quad \text{coefficient de Roman}$$

Voici quelques valeurs spéciales de ces coefficients

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1, \quad \left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \lfloor n \rfloor$$

$$\left[ \begin{matrix} n \\ -1 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \right] = \frac{1}{\lfloor n+1 \rfloor}, \quad \left[ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right] = \frac{(-1)^{k+(k>0)}}{\lfloor k \rfloor}$$

On remarque que pour tout  $n \geq k \geq 0$  où  $k \geq 0 > n$  les coefficients de Roman généralisent les coefficients binomiaux ordinaires

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{n}{k}$$

Pour  $k \geq 0 > n$ , nous utilisons (**II.2.3 proposition**)

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{\gamma(n)}{\gamma(k) \cdot \gamma(n-k)} = \frac{1}{k!} \lfloor n \rfloor \lfloor n-1 \rfloor \dots \lfloor n-k+1 \rfloor = \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) = \binom{n}{k}$$

Nous avons déjà remarqué que les coefficients binomiaux satisfont à des relations de récurrence. La proposition suivante décrit les propriétés des coefficients de Roman qui sont des généralisations des propriétés des coefficients binomiaux ordinaires.

#### II.3.1 Proposition

a) Pour tout entier  $n, k$

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix} \right]$$

b) Pour tout entier  $n, k$  et  $r$  
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-k \\ k-r \end{bmatrix}$$

c) La formule de Pascal. Pour tout entier  $n$  et  $k$  distincts non nuls

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

**Preuve**

Les parties a) et b) sont des conséquences directes de la définition des coefficients de Roman. Pour c), la condition sur  $n$  et  $k$  est  $\lfloor n \rfloor = n, \lfloor k \rfloor = k$  et  $\lfloor n-k \rfloor = n-k$ .  
En utilisant la (proposition II.2.3)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} &= \frac{\gamma(n-1)}{\gamma(k) \cdot \gamma(n-k)} + \frac{\gamma(n-1)}{\gamma(k-1) \cdot \gamma(n-k)} \\ &= \frac{\gamma(n-1)}{\gamma(k-1) \cdot \gamma(n-k+1)} \cdot \left( \frac{1}{\lfloor k \rfloor} + \frac{1}{\lfloor n-k \rfloor} \right) \\ &= \frac{\gamma(n-1)}{\gamma(k-1) \cdot \gamma(n-k+1)} \cdot \frac{\lfloor n \rfloor}{\lfloor n-k \rfloor} \cdot \frac{1}{\lfloor k \rfloor} \\ &= \frac{\gamma(n)}{\gamma(k) \cdot \gamma(n-k)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Quelques valeurs de  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  sont données par la table suivant

n \ k	-2	-1	0	1	2
-2	1	-1	1	-2	3
-1	-1	1	1	-1	1
0	$\frac{-1}{2}$	1	1	0	0
1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0
2	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1

Maintenant, considérons quelques résultats qui ne sont pas analogues pour les coefficients binomiaux ordinaires.

**II.3.2 Proposition**

Pour tout entier  $n$  et  $k$ , on a

$$a) \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n-k+(n>k)}}{\begin{bmatrix} n-k \\ \end{bmatrix}}$$

$$b) \quad \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = (-1)^{n+k+(n>0)+(k>0)} \begin{bmatrix} k-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$$

c) La formule de *Rotation de Knuth*

$$(-1)^{k+(k>0)} \begin{bmatrix} -n \\ k-1 \end{bmatrix} = (-1)^{n+(n>0)} \begin{bmatrix} -k \\ n-1 \end{bmatrix}$$

**Preuve**

Pour prouver a), on utilise la partie a) de (II.2.4 proposition)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} &= \frac{\gamma(n)}{\gamma(k) \cdot \gamma(n-k)} \cdot \frac{\gamma(k)}{\gamma(n) \cdot \gamma(k-n)} = \frac{1}{\gamma(n-k) \cdot \gamma(k-n)} \\ &= \frac{(-1)^{n-k+(n-k>0)}}{\begin{bmatrix} n-k \\ \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

Pour la partie b), on utilise la partie b) de (II.2.4 proposition)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} &= \frac{\gamma(-n)}{\gamma(-k) \cdot \gamma(k-n)} = \frac{(-1)^{n+(n>0)}}{\gamma(n-1)} \cdot \frac{\gamma(k-1)}{(-1)^{k+(k>0)}} \cdot \frac{1}{\gamma(k-n)} \\ &= (-1)^{n+k+(n>0)+(k>0)} \frac{\gamma(k-1)}{\gamma(n-1) \cdot \gamma(k-n)} = (-1)^{n+k+(n>0)+(k>0)} \begin{bmatrix} k-1 \\ n-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour c), on remplace  $-k$  par  $k-1$  dans la partie b), on obtient

$$\begin{bmatrix} -n \\ k-1 \end{bmatrix} = (-1)^{n+k-1+(n>0)+(k-1<0)} \begin{bmatrix} -k \\ n-1 \end{bmatrix}$$

Puisque  $(-1)^{-1+(k-1<0)} = (-1)^{(k>0)}$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n \\ k-1 \end{bmatrix} = (-1)^{n+k+(n>0)+(k>0)} \begin{matrix} -k \\ -n-1 \end{matrix} \quad \square$$

## II.4 Quelques résultats

Les coefficients de Roman permettent de généraliser des résultats bien connus pour les coefficients binomiaux.

En prenant  $C = \forall$  corps des nombres complexes

### II.4.1 Lemme

Soit  $a > 0$ , considérons la série  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{x}{a}\right)^k$

- a) Pour  $n > 0$ , cette série converge pour  $|x| \leq a$ .  
 b) Pour  $n = 0$ , cette série converge pour  $|x| \leq a$ , sauf  $x = -a$ .

#### Preuve

a) Pour  $k > n \geq 0$ , on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{\gamma(n)}{\gamma(k) \cdot \gamma(n-k)} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(k-n-1)!}{(-1)^{k-n-1}} = (-1)^{k-n-1} \frac{n!}{k(k-1) \cdots (k-n)}$$

Par conséquent, si  $n > 0$  et  $|x| \leq a$ , on a

$$\left| \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{x}{a}\right)^k \right| \leq \frac{n!}{k(k-1) \cdots (k-n)} \leq \frac{n!}{k(k-1)}$$

et  $\frac{n!}{k(k-1)}$  est le terme général d'une série convergente ( $n$  fixé)

alors la série converge pour  $|x| \leq a$ .

b) Si  $n=0$ , les termes de la série ont la forme  $\frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{a}\right)^k$ , ces séries sont connues. Elles

convergent pour  $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$  sauf  $\frac{x}{a} = -1$  □

### II.4.2 Proposition

Pour tout entier  $n$  positif

$$(x+1)^n \log(1+x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (h_n - h_{n-k}) x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k \quad (*)$$

où  $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  pour  $|x| \leq 1$  et pour  $x = -1$  le second membre est nul.

### II.4.3 Corollaire

Pour tout entier  $n$  positif

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

#### Preuve

Pour  $k > n \geq 0$ , on a

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (-1)^{k-n-1} \frac{n!}{k(k-1)\dots(k-n)}$$

$$\left| \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \right| = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots(k-n)} < \frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$

$\frac{n!}{k(k-1)}$  est le terme général d'une série convergente

Posons  $x = -1$  dans la formule (\*), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (h_n - h_{n-k}) (-1)^k \\ &= -h_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k h_{n-k} \\ &= 0 + (-1)^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (-1)^i \binom{n-1}{i-1} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Puisque 
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} = 0 \quad \square$$

#### II.4.4 Extension des polynômes de Pochhammer

Pour le but de troisième chapitre, il est intéressant de voir l'extension des polynômes factoriels appelés Pochhammer [12] pour faire l'extension des nombres de Stirling et les polynômes de Bell.

Les polynômes de Pochhammer sont donnés par

$$(x)_0 = 1$$

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad \text{où } \Gamma \text{ est la fonction Gamma}$$

Ce qui permet le prolongement aux entiers négatifs

$$(x)_{-n} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+n+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{(x+n)_n}$$

Ou bien, comme  $(x)_{n+1} = (x-n) \cdot (x)_n$  avec  $(x)_0 = 1$ , il convient de poser

$$(x)_{-1} = \frac{1}{x+1}, \quad (x)_{-2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \dots, \quad (x)_{-n} = \frac{1}{(x+n)_n}$$

Pour  $n \geq 1$ ,  $\binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!}$  le prolongement aux entiers négatifs s'obtient par

$$\binom{x}{-n} = \frac{(x)_{-n}}{\gamma(-n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

Remarquons qu'aux séries de Mahler  $\sum_{n \geq 0} u(n) \binom{x}{n}$  sont associées les séries

$$\sum_{n \geq 0} u(-n) \binom{x}{-n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)\cdots(x+n)} u(-n)$$

Considérées comme séries formelles de Laurent (elles sont appelées *séries factorielles* ou *séries de facultés*). [2]

#### Remarque

$$(x)_{m+n} = (x)_m (x-m)_n \quad m, n \in \mathbf{9}$$



# Chapitre III

Extension des nombres de Stirling

## Chapitre III

### Extension des nombres de Stirling

#### III.1 Définition et premières propriétés

Les nombres de Stirling de première et deuxième espèce  $s(n, k)$  et  $S(n, k)$  sont définis pour  $n$  et  $k$  positifs. On peut définir les nombres de Stirling de manière combinatoire.

Les nombres de Stirling de deuxième espèce  $S(n, k)$  est le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments en  $k$  parties, donc  $S(n, k) > 0$  si  $1 \leq k \leq n$ ,  $S(n, k) = 0$  si  $1 \leq n < k$ . C'est aussi le nombre de relations d'équivalence à  $k$  classes sur un ensemble à  $n$  éléments.

Le nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments à  $k$  orbites vaut  $|s(n, k)|$  où  $s(n, k)$  est le nombre de Stirling de première espèce. [10]

Donc les  $s(n, k)$  ne sont pas tous positifs, et leur signe est précisé par

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} |s(n, k)|$$

De manière algébrique, par leurs séries génératrices, pour  $k \geq 1$ ,  $S(n, k)$  et  $s(n, k)$  sont définis par

$$\begin{cases} \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \\ \sum_{n \geq k} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\log(1+x))^k \end{cases} \quad (1)$$

Il en résulte

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n S(n, k) (x)_k = x^n \\ \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k = (x)_n \end{cases} \quad (2)$$

où  $(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$

(2) est souvent prise comme définition pour les nombres de Stirling.

La question se pose de pouvoir prolonger les nombres de Stirling aux entiers négatifs (Les deux indices  $n$  et  $k$  négatifs ou l'un des indices négatifs et l'autre positif).

David Branson [5] et [6] a donné l'extension des nombres de Stirling pour  $n < 0$ ,  $k < 0$ , nous désignerons ces nombres comme Negative Negative Stirling Nombres (NNSN).

On désigne les nombres définis dans (2) Positive Positive Stirling Numbers (PPSN) et pour  $k > 0$  et  $n < 0$  Negative Positive Stirling Numbers (NNSN).

Nous donnerons l'extension des nombres de Stirling pour  $n \in \mathbf{9}$  et  $k \in \mathbf{9}$  donnée par Benali Benzaghou en utilisant le corps de Hurwitz [1] et [2].

### III.2 Propriétés de Positive Positive Stirling Numbers

Considérons la série d'ordre un

$$g_a(x) = e^x - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$$

sa série réciproque est

$$g_{\bar{a}}(x) = \log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{x^n}{n!}$$

Avec ces notations et (1), posons, pour  $k \geq 0$

$$\begin{cases} S(q, k) = e_k o a \\ s(q, k) = e_k o \bar{a} \end{cases} \quad (3)$$

Notons que  $S(q, k)(n) = S(n, k)$ ,  $s(q, k)(n) = s(n, k)$

Pour  $k=0$ ,  $S(q, 0) = s(q, 0) = e_0$

donc  $S(0, 0) = s(0, 0) = 1$  et  $S(n, 0) = s(n, 0) = 0$  pour  $n \geq 1$

Notons, pour  $t \in \mathbf{C}^*$ ,  $t^q$  la suite  $t^q(n) = t^n$ .

Comme  $a = 1^q - e_0$ , pour  $k \geq 1$

$$S(q, k) = \frac{1}{k!} a^{\alpha k} = \frac{1}{k!} (1^q - e_0)^{\alpha k}$$

En remarquant que

$$(t_1 \omega t_2)^q = t_1^q \omega t_2^q \quad (\text{formule de binôme})$$

$$S(q, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^q$$

Pour  $k \geq 1$  et  $n \geq 1$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n \quad (4)$$

$$S(n, k) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} j^n$$

$n \mapsto S(n, k)$  est une somme d'exponentielles

$$S(n, k) = \sum_{j=0}^n \lambda_j j^n, \quad \lambda_j = \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!}$$

Il en résulte que la fonction génératrice ordinaire  $\sum_{n \geq k} S(n, k)x^n$  est une fraction rationnelle

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} S(n, k)x^n &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{j=0}^n \lambda_j j^n \right) x^n = \sum_{j=0}^n \lambda_j \left( \sum_{n \geq 1} (jx)^n \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j jx \frac{1}{1-jx} = x \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j j}{1-jx} = \frac{x A_k(x)}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-kx)} \end{aligned}$$

Avec  $A_k(x)$  est un polynôme de degré inférieur strictement à  $k$ .

Comme  $S(q, k)$  est une suite d'ordre  $k$ , le polynôme  $x A_k(x)$  est d'ordre  $k$ , et compte tenu de  $S(k, k) = 1$ , nécessairement  $x A_k(x) = x^k$

$$\sum_{n \geq k} S(n, k)x^k = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-kx)} \quad (5)$$

Pour une suite  $u$  d'ordre positif ou nul

$$v(n) = u \circ a(n) = \sum_{k=1}^n u(k) S(n, k)$$

et pour  $k \geq 1$

$$\sum_{n \geq 1} v(n)x^n = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=1}^n u(k) S(n, k) \right) x^n = \sum_{k \geq 1} u(k) \sum_{n \geq k} S(n, k)x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)x^k}{(1-x) \cdots (1-kx)} \quad (6)$$

$$\sum_{n \geq 0} v(n)x^n = \sum_{n \geq 0} u \circ v(n)x^n = u(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{u(n)x^n}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-nx)}$$

Par exemple, pour  $u(n) = t^n$ ,  $t \in C^*$ ,  $n \geq 1$

$$t^q oa(n) = \sum_{k=1}^n S(n,k)t^k = P_n(t) \quad \text{polynôme de Bell}$$

et

$$\sum_{n \geq 0} P_n(t)x^n = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{x^k t^k}{(1-t)(1-2t)\dots(1-kt)}$$

Pour  $t \in C^*$ , considérons  $t^q o\bar{a}$

$$g_{t^q o\bar{a}}(x) = g_{t^q}(g_{\bar{a}}(x)) = \exp(t \log(1+x)) = (1+x)^t = 1 + \sum_{n \geq 1} t(t-1)\dots(t-n+1) \frac{x^n}{n!}$$

Notons  $(t)_q$  la suite  $(t)_n = t(t-1)\dots(t-n+1)$

alors

$$\begin{cases} t^q o\bar{a} = (t)_q \\ (t)_q oa = t^q \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} t^q = \sum_{k=0}^{\infty} (t)_k e_k oa \\ (t)_q = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e_k o\bar{a} \end{cases}$$

et pour  $n \geq 1$

$$\begin{cases} t^n = \sum_{k=1}^n S(n,k)(t)_k \\ (t)_n = \sum_{k=1}^n s(n,k)t^k \end{cases}$$

Les nombres de Stirling de première et deuxième espèce vérifient de nombreuses récurrences, pour les retrouver on utilisera les opérateurs définis précédemment l'opérateur shift  $T$  et de dérivation  $q$ .

De (3), on tire,

$$TS(q,k) = T(e_k oa) = (e_{k-1} oa) \omega T a$$

En remarquant que,  $Ta = 1^q = e_0 + a$

Il en résulte

$$\begin{cases} S(q+1, k) = S(q, k-1) \omega 1^q \\ S(q+1, k) = S(q, k-1) + k S(q, k) \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$

$$\begin{cases} S(n+1, k) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S(j, k-1) \\ S(n+1, k) = S(n, k-1) + k S(n, k) \end{cases} \quad (7)$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce  $S(n, k)$  satisfont à la récurrence triangulaire

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k S(n, k) \quad n, k \geq 1$$

avec  $S(n, 0) = S(0, k) = 0$ , sauf  $S(0, 0) = 1$

C'est un moyen rapide pour retrouver les premières valeurs de  $S(n, k)$ .

Les premières valeurs sont les suivantes

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

**Les nombres de Stirling de deuxième espèce  $S(n, k)$**

$$0 \leq n, k \leq 7$$

De (3), on tire

$$q(S(q, k)) = q(e_k o a) = (T e_k o a) \omega q a = S(q, k-1) \omega q a$$

$$\forall n \geq 1, n S(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} S(j, k-1) (n-j)$$

Pour les suites de Stirling de première espèce

De (3), on tire

$$T(s(q, k)) = T(e_k o \bar{a}) = (T e_k o \bar{a}) \omega T \bar{a}$$

Comme

$$g_{\overline{\tau a}}(x) = \frac{d}{dx} g_{\overline{a}}(x) = \frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$(e_0 + e_1)\omega T\overline{a} = e_0$$

Il en résulte

$$\begin{cases} (e_0 + e_1)\omega s(q+1, k) = s(q, k-1) \\ s(q+1, k) = s(q, k-1) - e_1\omega s(q+1, k) \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$

$$\begin{cases} s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k) \\ s(n+1, k) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (n)_{n-j} s(j, k-1) \end{cases} \quad (8)$$

Les nombres de Stirling de première espèce satisfont à la récurrence triangulaire

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k) \quad n, k \geq 1$$

$$s(n, 0) = s(0, k) = 0, \quad \text{sauf} \quad s(0, 0) = 1$$

On a là un moyen rapide pour calculer les premières valeurs de  $s(n, k)$

En particulier,

$$s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!, s(n, n-1) = -\binom{n}{2}, s(n, n) = 1$$

Les premières valeurs sont

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0	0	0
5	0	24	-50	35	-10	1	0	0
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	0
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

**Les nombres de Stirling de première espèce  $s(n, k)$**

$$0 \leq n, k \leq 7$$

De (3), on tire

$$qs(q, k) = q(e_k o\overline{a}) = s(q, k-1)\omega q\overline{a}$$

Pour  $n \geq 1$ ,

$$ns(n, k) = \sum_{j=0}^n (-1)^{j-1} (n)_j s(n-j, k-1)$$

De définition (3), on tire

$$S(q, k) o \bar{a} = e_k o a o \bar{a} = e_k$$

d'où

$$\sum_{j=1}^n S(j, k) s(n, j) = \delta_{k,n}$$

ce qui montre que les matrices de Stirling  $S = (S(n, k))_{n \geq 1, k \geq 1}$  et  $s = (s(n, k))_{n \geq 1, k \geq 1}$  matrices triangulaires inverses l'un de l'autre.

Nous tirons aussi de (3), pour  $i \in \mathcal{L}$ ,  $j \in \mathcal{L}$

$$S(q, i) \omega S(q, j) = (e_i o a) \omega (e_j o a) = (e_i \omega e_j) o a = \frac{(i+j)!}{i!j!} e_{i+j} o a = \frac{(i+j)!}{i!j!} S(q, i+j)$$

De même manière, nous obtenons

$$s(q, i) \omega s(q, j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} s(q, i+j)$$

donc pour tout  $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(n-k, i) S(k, j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} S(n, i+j)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s(n-k, i) s(k, j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} s(n, i+j)$$

### III.3 La relation entre les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli

Notons le lien entre les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli dont nous aurons besoin pour faire l'extension des nombres de Stirling.

Notons  $B_q$  la suite  $(B_n)_{n \geq 0}$

La suite  $(B_n)$  de Bernoulli de première espèce est définie par

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}$$

donc

$$B_q \omega a = e_1$$

En élevant à la puissance  $k^{\text{ème}}$  de Hurwitz

$$B_q^{\omega k} \omega a^{\omega k} = k! e_k$$

$$B_q^{\alpha k} \omega S(q, k) = e_k$$

Posons

$$g_{B_q^{\alpha k}}(x) = \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)^k = \sum_{n \geq 0} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

Nous obtenons une relation entre les nombres de Stirling de deuxième espèce et les nombres de Bernoulli généralisés  $B_n^{(k)}$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(k)} S(n-j, k) = \delta_{n,k}$$

On définit de la même manière les nombres de Bernoulli de deuxième espèce, notons  $b_q$  est la suite  $(b_n)_{n \geq 0}$

$$\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{\log(1+x)}$$

donc

$$b_q \omega \bar{a} = e_1$$

$$b_q^{\alpha k} \omega s(q, k) = e_k$$

Posons

$$g_{b_q^{\alpha k}}(x) = \left( \frac{x}{\log(1+x)} \right)^k = \sum_{n \geq 0} b_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

Nous obtenons une relation entre les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Bernoulli généralisés  $b_q^{(k)}$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} b_j^{(k)} s(n-j, k) = \delta_{n,k}$$

De

$$B_q^{(k)} \omega S(q, k) = e_k$$

$$B_q^{(k)} \omega (e_k o a) = e_k$$

$$(B_q^{(k)} o \bar{a}) \omega e_k = e_k o \bar{a} = s(q, k)$$

On déduit

$$s(n, k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} s(n-k, j) B_j^{(k)}$$

et de 
$$b_q^{(k)} \omega s(q, k) = e_k$$

$$(b_q^{(k)} \circ \alpha) \omega e_k = S(q, k)$$

On déduit, 
$$S(n, k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} S(n-k, j) b_j^{(k)}$$

### III.4 La transformation de Mellin-Barsky formelle [4]

Dans ce paragraphe on montre qu'on peut établir un lien entre série de Laurent  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$  et séries factorielles  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$  à coefficients dans un corps de caractéristique zéro  $C$

Considérons la série formelle de  $\Theta[[x]]$

$$y = g_\alpha(x) = 1 - e^{-x} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

et sa série formelle réciproque

$$x = g_{\bar{\alpha}}(y) = -\log(1-y) = \sum_{n \geq 1} \frac{y^n}{n}$$

Pour toute suite  $u: \mathbb{Z} \rightarrow C$ , posons

$$\begin{cases} \tilde{u} = u \circ \bar{\alpha} \\ u = \tilde{u} \circ \alpha \end{cases}$$

On a  $g_{\bar{\alpha}}(x) = -g_{\bar{\alpha}}(-x)$  ,  $g_\alpha(x) = -g_\alpha(-x)$

#### III.4.1 Proposition

L'application  $u \rightarrow \tilde{u}$  définie par  $g_u(x) = g_{\tilde{u}}(y)$  où  $y = 1 - e^{-x}$  est un isomorphisme de  $C$ - espace vectoriel de  $s_0(C)$  sur lui-même.

$$(s_0(C) = \{u \mid \text{ordu} \geq 0\})$$

L'application  $u \rightarrow \tilde{u}$  sera appelée *la transformation de Mellin –Barsky formelle*, la transformation inverse sera notée  $u \rightarrow \underline{u}$

$$\text{Posons } \begin{cases} e_k o \alpha = \bar{S}(q, k) \\ e_k o \bar{\alpha} = \bar{s}(q, k) \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{alors } \begin{cases} \bar{S}(n, k) = (-1)^{n+k} S(n, k) \\ \bar{s}(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k) \end{cases} \quad \text{pour } n, k \geq 0 \quad (10)$$

### III.4.2 Proposition

$$\begin{cases} \tilde{u}(n) = \sum_{k=1}^n \bar{s}(n, k) u(k) \\ u(n) = \sum_{k=1}^n \bar{S}(n, k) \tilde{u}(k) \end{cases} \quad (11)$$

### III.4.3 Exemple

Soit  $t \in \mathbb{C}^*$  et  $t^q$  la suite définie par  $t^q(n) = t^n = u(n)$

$$g_{\tilde{u}}(y) = g_u(x) = e^{tx} = (1-y)^{-t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t(t+1)\cdots(t+n-1) \frac{y^n}{n!}$$

Posons  $\langle t \rangle_q(n) = \langle t \rangle_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$ , d'où  $\tilde{t}^q = \langle t \rangle_q$

$$\text{donc, } \begin{aligned} \tilde{t}^q(n) &= t(t+1)\cdots(t+n-1), \quad n \geq 1 \\ \tilde{t}^q(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} t(t+1)\cdots(t+n-1) = \sum_{k=1}^n \bar{s}(n, k) t^k \\ t^n = \sum_{k=1}^n \bar{S}(n, k) t(t+1)\cdots(t+k-1) \end{cases} \quad (12)$$

$\bar{s}(n, k)$  et  $\bar{S}(n, k)$  seront dits nombres de Stirling ascendants de première et deuxième espèce.

De (5), on tire

$$\sum_{n \geq k} \bar{S}(n, k) x^n = \sum_{n \geq k} (-1)^{n+k} S(n, k) (-x)^n = (-1)^k \frac{(-x)^k}{(1-(-x))(1-2(-x))\cdots(1-k(-x))}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u(n)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \bar{S}(n,k) \tilde{u}(k) \right) x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}(k) \sum_{n \geq k} \bar{S}(n,k) x^n \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\tilde{u}(k) x^k}{(1+x)(1+2x) \cdots (1+kx)} \end{aligned}$$

$$\text{ou } \sum_{n=1}^{+\infty} u(n)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(n)x^n}{(1+x)(1+2x) \cdots (1+nx)} \quad (13)$$

Pour  $u$  la suite d'ordre supérieur ou égal à zéro, on définit la *série factorielle* (ou de *facultés*) formelle par  $\sum_{n \geq 0} \frac{u(n)}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}$

#### III.4.4 Proposition

Soit  $C$  un corps commutatif de caractéristique zéro et  $u: \mathcal{L} \rightarrow C$ .

Alors

$$\sum_{n \geq 0} \frac{u(n)}{x^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{u}(n)}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (14)$$

est une identité dans  $C[[x^{-1}]]$

Les deux identités formelles (13) et (14) permettent d'écrire des identités formelles fois que  $\tilde{u}$  a une forme explicite.

Comme  $\left\{ \frac{1}{x^{n+1}}, n \in \mathcal{L} \right\}$  et  $\left\{ \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)}, n \in \mathcal{L} \right\}$  forment deux bases de l'espace des séries de Laurent  $x^{-1}C[[x^{-1}]]$  sans terme constant, (14) fournit une relation de changement de bases dans  $x^{-1}C[[x^{-1}]]$ .

#### III.5 Negative Negative Stirling Numbers (NNSN)

En appliquant la formule (14), pour  $\tilde{u} = e_k$ ,  $u = e_k o \alpha = \bar{S}(q, k)$

$$\text{et } \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+k)} = \sum_{n \geq k} \frac{\bar{S}(n, k)}{x^{n+1}} \quad (15)$$

et pour  $u = e_k$ ,  $\tilde{u} = e_k o \bar{\alpha} = \bar{s}(q, k)$

$$\frac{1}{x^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \frac{\bar{s}(n, k)}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (16)$$

On peut définir les Negative Negative Stirling Numbers (NNSN) de première et deuxième espèce par l'extension de (2), si on pose

$$\begin{cases} (x)_{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} s(-n, -k) x^{-k} \\ x^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} S(-n, -k) (x)_{-k} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \sum_{n \geq k} \frac{s(-n, -k)}{x^{k+1}}$$

et par (15)

$$s(-n, -k) = \bar{S}(k, n) = (-1)^{n+k} S(k, n) \quad (17)$$

De même, par (16)

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{k \geq n} \frac{S(-n, -k)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+k)} = \sum_{k \geq n} \frac{\bar{s}(k, n)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+k)}$$

d'où

$$S(-n, -k) = \bar{s}(k, n) = (-1)^{n+k} s(k, n) \quad (18)$$

### III.5.1 Proposition

Les Negative Negative Stirling Numbers sont définis par

$$\begin{cases} (x)_{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} s(-n, -k) x^{-k} \\ x^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} S(-n, -k) (x)_{-k} \end{cases}$$

et la formule de transformation de Mellin Basky formelle (14) donnent

$$\begin{aligned} s(-n, -k) &= \bar{S}(k, n) = (-1)^{n+k} S(k, n) \\ S(-n, -k) &= \bar{s}(k, n) = (-1)^{n+k} s(k, n) \end{aligned} \quad \text{pour } k \geq 1, n \geq 1, k \geq n$$

### III.6 Negative Positive Stirling Numbers (NPSN)

Pour  $k \geq 1$ , la formule explicite (4) de  $S(n, k)$  permet d'étendre aux entiers négatifs

$$S(-n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^{-n}$$

et 
$$S(-n, k) = \sum_{j=0}^k \lambda_j j^{-n} \quad \text{où} \quad \lambda_j = \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!}$$

Il en résulte que la série génératrice de Laurent est rationnelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(-n, k) x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k \lambda_j j^{-n} \right) x^{-n} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(jx)^n} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{1}{jx} \frac{1}{1 - \frac{1}{jx}} = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{jx - 1}$$

Par extension de (2), si on pose

$$(x)_{-n} = \sum_{k \geq 0} s(-n, k) x^k \tag{19}$$

En développant en séries formelles

$$(x)_{-n} = \frac{1}{(x+1) \cdots (x+n)} = \sum_{j=1}^n \frac{\zeta_j}{x+j} \quad \text{avec} \quad \zeta_j = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!(n-j)!}$$

$$\begin{aligned} (x)_{-n} &= \sum_{j=1}^n \frac{\zeta_j}{j} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{j}} = \sum_{j=1}^n \frac{\zeta_j}{j} \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{-x}{j}^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!(n-j)! j} (-1)^k \frac{x^k}{j^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^{-k} \right) (-1)^{n+k-1} x^k \end{aligned}$$

$$(x)_{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n+k-1} S(-k, n) x^k \tag{20}$$

Par identification de (19) et (20), on obtient

$$s(-n, k) = (-1)^{n+k-1} S(-k, n) \tag{21}$$

### III.6.1 Proposition

Les Negative Positive Stirling Numbers sont définis par

$$S(-n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^{-n}$$

et  $(x)_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} s(-n, k) x^k$

alors  $s(-n, k) = (-1)^{n+k-1} S(-k, n)$

### III.6.2 Propriétés de Negative Positive Stirling Numbers

Pour NPSN de première et deuxième espèce, on peut réécrire les relations triangulaires de nombres PPSN comme

$$S(-n + 1, k) = S(-n, k - 1) + kS(-n, k) \quad n \geq 2, k \geq 1 \quad (22)$$

$$s(-n + 1, k) = s(-n, k - 1) + ns(-n, k)$$

Respectivement,  $n=1$  et  $x=0$  dans la définition de  $s(-n, k)$

$$(x)_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} s(-n, k) x^k, \text{ on obtient}$$

$$s(-1, k) = (-1)^k, \quad s(-n, 0) = \frac{1}{n!} \quad (23)$$

Combinons (22) et (23), on peut calculer les valeurs pour  $s(-n, k)$  donné dans le tableau suivant et les valeurs  $S(-n, k)$  sont données par  $S(-n, k) = (-1)^{n+k-1} s(-k, n)$

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	-1	1	-1
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{15}{16}$
3	$\frac{1}{6}$	$-\frac{11}{36}$	$\frac{85}{216}$	$-\frac{575}{1296}$
4	$\frac{1}{24}$	$-\frac{25}{288}$	$\frac{415}{3456}$	$-\frac{5845}{41472}$

**Negative Positive Stirling Numbers de première espèce  $s(-n, k)$**   
 $0 \leq k, n \leq 3$

En remarquant que les nombres  $s(-n, k)$  et  $S(-n, k)$  sont dans  $\Theta$ .

L'équation  $(x)_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} s(-n, k)x^k$ ,  $n \geq 1$  montre que  $s(-n, k)$  peut être regardé comme coefficient de série de Taylor, alors, utilisons (21)

$$S(-n, k) = \frac{(-1)^{n+k-1}}{n!} \left[ \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} \right) \right]_{x=0}$$

### III.6.3 Fonction génératrice

La définition  $(x)_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} s(-n, k)x^k$

est une fonction génératrice pour  $s(-n, k)$

et une fonction génératrice exponentielle de  $S(-n, k)$  est donné par

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} S(-n, k) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^{-n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{x}{j} \right)^n \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \exp\left( \frac{x}{j} \right) \end{aligned}$$

$$S(-n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^{-n} \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty \quad S(-n, k) \rightarrow \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

### III.7 Positive Negative Stirling Numbers (PNSN)

Dans cette partie le corps de Hurwitz et les nombres de Bernoulli généralisés ont un grand rôle pour déterminer les Positive Negative Stirling Numbers.

Pour  $k \geq 0$ ,  $S(q, k)$  et  $s(q, k)$  ont été définis par  $e_k o a$  et  $e_k o \bar{a}$

Ces définitions se prolongent naturellement pour  $k < 0$

**III.7.1 Définition** Pour  $k \geq 1$   $\begin{cases} S(q, -k) = e_{-k} o a \\ s(q, -k) = e_{-k} o \bar{a} \end{cases}$

Dans le corps de Hurwitz

$$S(q, -k) = \frac{a^{\omega(-k)}}{\gamma(-k)}$$

$$g_{S(q, -k)}(x) = g_{e_{-k} o a}(x) = \frac{(e^x - 1)^{-k}}{\gamma(-k)} = \sum_{n \geq 1} S(n, -k) \frac{x^n}{\gamma(n)}$$

Comme  $S(q, -k)$  est une suite d'ordre  $-k$ ,  $S(n, -k) = 0$  pour  $n < -k$ ,  $S(-k, -k) = 1$

$$\text{On a } \sum_{n \geq -k} S(n, -k) \frac{x^n}{\gamma(n)} = \frac{1}{\gamma(-k) x^{-k}} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)^k = \frac{1}{\gamma(-k) x^k} \sum_{n \geq 0} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq k} \frac{B_{n+k}^{(k)}}{\gamma(-k)} \cdot \frac{x^n}{(n+k)!}$$

Pour  $n > 0$ , nous obtenons

$$\frac{S(n, -k)}{n!} = \frac{1}{\gamma(-k)} \frac{B_{n+k}^{(k)}}{(n+k)!}$$

$$S(n, -k) = (-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{n}^{-1} \frac{B_{n+k}^{(k)}}{n+k}$$

$-k < -n \leq -1$

$$\frac{S(-n, -k)}{\gamma(-n)} = \frac{1}{\gamma(-k)} \frac{B_{k-n}^{(k)}}{(k-n)!}$$

$k > n$

$$S(-n, -k) = (-1)^{n+k} \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}$$

Pour  $1 \leq n < k$ , on a déjà défini  $S(-n, -k)$  par  $(-1)^{n+k} s(k, n)$ .

Pour établir cette relation, il faut montrer le lemme suivant

**III.7.2 Lemme** Pour  $1 \leq n < k$   $s(k, n) = \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}$

En posant  $k-n=m$ ,  $1 \leq m \leq k-1$  la relation s'écrit

$$s(k, k - m) = \binom{k - 1}{m} B_m^{(k)}$$

**Preuve**

Les nombres de Bernoulli de première espèce sont définis par

$$\sum_{n \geq 0} B_n^{(k)} \frac{z^n}{n!} = \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)^k$$

fonction analytique au voisinage de zéro (d'une variable complexe), dans la théorie des entières, on peut exprimer les coefficients  $\frac{B_n^{(k)}}{n!}$  par la formule de Cauchy

$$\frac{B_n^{(k)}}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Pi} \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)^k \frac{dz}{z^{n+1}}$$

où  $\Pi$  est une courbe simple fermée autour de zéro.

$t = e^z - 1$  alors  $z = \log(1+t)$  est la fonction réciproque, définie pour  $|t| < 1$ , analytique dans  $|t| < 1$ .

On prend  $\Pi' = \{t, |t| = \rho, \rho < 1\}$  et  $\Pi$  son image par la transformation conforme  $t \rightarrow z = \log(1+t)$

$$\frac{B_n^{(k)}}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Pi'} \frac{(\log(1+t))^{k-n-1}}{t^k} \frac{1}{1+t} dt$$

Par intégration par parties et tenant compte de la méromorphie en zéro de

$$\frac{(\log(1+t))^{k-n}}{t^k}, \quad 0 < n < k$$

$$\frac{B_n^{(k)}}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \frac{k}{k-n} \int_{\Pi'} (\log(1+x))^{k-n} \frac{dt}{t^{k+1}}$$

On a 
$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!} = \sum_{n \geq k} s(n, k) \frac{t^n}{n!}$$

et par la formule de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Pi'} \frac{(\log(1+t))^k}{k!} \frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{s(n, k)}{n!}$$

Il en résulte

$$\frac{B_n^{(k)}}{n!} = \frac{k}{k-n} (k-n)! \frac{s(k, k-n)}{k!}$$

$$s(k, k-n) = \frac{(k-1)!}{n!(k-1-n)!} B_n^{(k)} = \binom{k-1}{n} B_n^{(k)} \quad \square$$

Alors pour  $1 \leq n < k$

$$s(k, n) = \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}$$

et pour  $-k \leq -n \leq -1$

$$S(-n, -k) = (-1)^{n+k} \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)} = (-1)^{n+k} s(k, n)$$

De la même manière, pour  $k > 0$ ,  $s(q, k) = e_{-k} o\bar{a}$  de sorte que

$$g_{s(q, -k)}(x) = g_{e_{-k} o\bar{a}}(x) = \sum_{n \geq 0} s(n, -k) \frac{x^n}{\gamma(n)}$$

En posant

$$\left( \frac{x}{\log(1+x)} \right)^k = \sum_{n \geq 0} b_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

d'où

$$\sum_{n \geq 0} s(n, -k) \frac{x^n}{\gamma(n)} = \frac{1}{\gamma(-k) x^k} \sum_{n \geq 0} b_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

Comme  $s(q, -k) = 0$  pour  $n < -k$

Donc

$$\sum_{n \geq -k} s(n, -k) \frac{x^n}{\gamma(n)} = \frac{1}{\gamma(-k)} \sum_{n \geq -k} b_{n+k}^{(k)} \frac{x^n}{(n+k)!}$$

Pour  $n \geq 0$ ,

$$\frac{s(n, -k)}{n!} = \frac{1}{\gamma(-k)} \frac{b_{n+k}^{(k)}}{(n+k)!}$$

$$s(n, -k) = (-1)^{n+k} \binom{n+k-1}{k-1}^{-1} \frac{b_{n+k}^{(k)}}{n+k}$$

Pour établir la relation  $s(-n, -k) = (-1)^{n+k} S(k, n)$  pour  $-k \leq -n \leq -1$ , montrons

**III.7.3 Lemme** Pour  $1 \leq n < k$   $S(k, n) = \binom{k-1}{n-k} b_{k-n}^{(k)}$

**Preuve**

Les nombres de Bernoulli  $b_n^{(k)}$  de deuxième espèce sont définis par

$$\left( \frac{z}{\log(1+z)} \right)^k = \sum_{n \geq 0} b_n^{(k)} \frac{z^n}{n!},$$

fonction analytique au voisinage de zéro (d'une variable complexe), dans la théorie des séries entières, par la formule de Cauchy

$$\frac{b_n^{(k)}}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Sigma} \left( \frac{z}{\log(1+z)} \right)^k \frac{dz}{z^{n+1}}$$

où  $\Sigma$  une courbe simple fermée autour de zéro.

$t = \log(1+z)$ . Alors  $z = e^t - 1$  est la fonction réciproque définie pour  $|t| < 1$ .

$\Sigma' = \{t, |t| = \sigma, \sigma < 1\}$  et  $\Sigma$  son image par la transformation conforme  $t \rightarrow z = e^t - 1$ , d'où

$$\frac{b_n^{(k)}}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Sigma} \left( \frac{z}{\log(1+z)} \right)^k \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Sigma'} \frac{(e^t - 1)^{k-n-1}}{t^k} e^t dt$$

Par intégration par parties et tenant compte de la méromorphie en zéro de  $\frac{(e^t - 1)^{k-n}}{t^k}$ ,

$0 < n < k$

$$\frac{b_n^{(k)}}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \frac{k}{k-n} \int_{\Sigma'} (e^t - 1)^{k-n} \frac{dt}{t^{k+1}}$$

On a  $\frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{t^n}{n!}$  par la formule de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Sigma'} \frac{(e^t - 1)^k}{k!} \frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{S(n, k)}{n!}$$

Donc,

$$\frac{b_n^{(k)}}{n!} = \frac{k}{k-n} (k-n)! \frac{S(k, k-n)}{k!}$$

$$S(k, k-n) = \binom{k-1}{n} b_n^{(k)} \quad \square$$

Pour  $n \geq 0$

$$s(n, -k) = (-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{k-1}^{-1} \frac{b_{n+k}^{(k)}}{n+k}$$

$$s(-n, -k) = (-1)^{n+k} \binom{k-1}{n} b_n^{(k)} = (-1)^{n+k} S(k, n)$$

### III.7.4 Proposition

Les Positive Negative Stirling Numbers sont définis par

$$\begin{cases} S(q, -k) = e_{-k} o a \\ s(q, -k) = e_{-k} o \bar{a} \end{cases}$$

et  $\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^k = \sum_{n \geq k} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$   $\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^k = \sum_{n \geq 0} b_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$

alors

$$S(n, -k) = (-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{k-1} \frac{B_{n+k}^{(k)}}{n+k}$$

$$s(n, -k) = (-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{n}^{-1} \frac{b_n^{(k)}}{n+k}$$

### Autre démonstration des lemmes III.7.2 et III.7.3

On peut démontrer les deux lemmes précédents algébriquement sans passer par l'intégrale de Cauchy en utilisant la formule d'inversion de Lagrange [10].

Pour toute série formelle  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$

et soit:

$$\mathbf{C}_x^k f(x) := a_k = \text{coefficient de } x^k \text{ dans } f(x) \quad (a)$$

Supposant  $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ , nous allons calculer les coefficients  $b_k$  de la série réciproque de  $f(x)$ , soit :

$$g(x) = \sum_{k \geq 1} b_k x^k$$

telle que  $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$

**III.7.5 Théorème :** (Formule d'inversion de Lagrange)[10]: Avec la notation (a)

Pour tout entier  $n$ ,  $1 \leq n \leq k$ , on a

$$\mathbf{C} x^k (g(x))^n = \frac{n}{k} \mathbf{C} x^{k-n} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^{-k} \quad (b)$$

**Preuve :** Voir [10]

En appliquant le théorème, on pose  $f(x)=g_a(x)=e^x - 1$  et  $g(x)=g_a(x) = \log(1+x)$  est la série réciproque de  $g_a(x)$  la formule d'inversion de Lagrange donne

$$\mathbf{C} x^k (\log(1+x))^n = \frac{n}{k} \mathbf{C} x^{k-n} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^{-k}$$

Les fonctions génératrices

$$\frac{(\log(1+x))^n}{n!} = \sum_{k \geq n} s(k, n) \frac{x^k}{k!}, \quad \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)^k = \sum_{n \geq 0} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

donnent

$$\mathbf{C} x^k \frac{(\log(1+x))^n}{n!} = \frac{s(k, n)}{k!}; \quad \mathbf{C} x^{k-n} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)^k = \frac{B_{k-n}^{(k)}}{(k-n)!}$$

D'où

$$n! \cdot \frac{s(k, n)}{k!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{B_{k-n}^{(k)}}{(k-n)!}$$

$$s(k, n) = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} B_{k-n}^{(k)} = \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}$$

Ce qui achève la démonstration de **lemme III.7.2**

De la même manière, on pose  $f(x)=g_a(x) = \log(1+x)$  et sa série réciproque  $g(x)=g_a(x)=e^x - 1$  la formule d'inversion de Lagrange donne

$$\mathbf{C} x^k (e^x - 1)^n = \frac{n}{k} \mathbf{C} x^{k-n} \left( \frac{\log(1+x)}{x} \right)^{-k}$$

Les fonctions génératrices

$$\frac{(e^x - 1)^n}{n!} = \sum_{k \geq n} S(k, n) \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad \left( \frac{x}{\log(1+x)} \right)^k = \sum_{n \geq k} b_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

Il en résulte

$$\mathbf{C} x^k \frac{(e^x - 1)^n}{n!} = \frac{S(k, n)}{k!}, \quad \mathbf{C} x^{k-n} \left( \frac{x}{\log(1+x)} \right)^k = \frac{b_{k-n}^{(k)}}{(k-n)!}$$

D'où 
$$n! \cdot \frac{S(k, n)}{k!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{b_{k-n}^{(k)}}{(k-n)!}$$

$$S(k, n) = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} b_{k-n}^{(k)} = \binom{k-1}{n-1} b_{k-n}^{(k)}$$

Ce qui achève la démonstration de **Lemme III.7.3**

Les formules de récurrences entre les  $S(n, -k)$  et  $s(n, -k)$  déduites de  $e_{-k}oa$  et  $e_{-k}o\bar{a}$

$$TS(q, -k) = S(q, -k - 1) \omega 1^q \quad \text{où} \quad 1^q = a + e_0$$

On déduit  $TS(q, -k) = S(q, -k - 1) - kS(q, -k)$

donc , pour  $n \geq 0$

$$\begin{cases} S(n+1, -k) = S(n, -k - 1) - kS(n, -k) \\ S(n+1, -k) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S(j, -k - 1) \end{cases}$$

Pour  $k=-1$  par exemple,

$$S(q, -1) = a' \text{ inverse de } a \text{ dans } H(C)$$

Comme 
$$g_{e_1, a'}(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

où  $B_q$  désigne la suite des nombres de Bernoulli.

$$S(q, -1) = e_{-1} \omega B_q$$

$$S(-1, -1) = 1, \quad S(0, -1) = -\frac{1}{2}, \quad S(n, -1) = \frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Voici les premières valeurs de  $S(n, -1)$

n	0	1	2	3	4	5	6
-k=-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{-1}{252}$	0

*Positive Negative Stirling Numbers de deuxième espèce  $S(n, -k)$*

$$0 \leq n \leq 6, \quad k=1$$

# Chapitre IV

Extension des polynômes de Bell

Chapitre IV

Extension des polynômes de Bell

IV.1 Extension des polynômes de Bell exponentiels partiels

IV.1.1 Définitions et premières propriétés

Rappelons que les polynômes de Bell exponentiels partiels  $B_{n,k}(u)$  par sa fonction génératrice

$$\sum_{n \geq 0} B_{n,k}(u) \frac{x^n}{n!} = \frac{g_u^k(x)}{k!} = g_{e_k ou}(x)$$

Donc, notons  $B_{q,k}(u)(n) = B_{n,k}(u)$

$$B_{q,k}(u) = e_k ou = \frac{u^{ok}}{k!}$$

On définit aussi les polynômes de Bell exponentiels complets

$Y_n = Y_n(u) = Y_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$  par

$$\exp(g_u(x)) = 1 + \sum_{n \geq 1} Y_n(u) \frac{x^n}{n!}$$

c'est à dire  $Y_n(u) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(u)$ ,  $Y_0 := 1$

et  $Y_q(u) = 1^q ou$  où  $Y_q(u)(n) = Y_n(u)$

Les polynômes de Bell partiels sont à coefficients entiers et ont pour expression exacte

$$B_{n,k}(u) = B_{n,k}(u_1, u_2, \dots, u_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{c_1! c_2! \dots (1!)^{c_1} (2!)^{c_2} \dots} u_1^{c_1} u_2^{c_2} \dots$$

la sommation ayant lieu sur tous les entiers  $c_1, c_2, \dots \geq 0$ ,

tels que  $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots = n$

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots = k$

Comme pour les nombres de Stirling nous retrouverons les relations de récurrence utilisons les opérateurs shift  $T$  et de dérivation  $q$ .

De  $B_{q,k}(u) = e_k ou$ , on tire que

$$TB_{q,k}(u) = B_{q,k-1}(u) \omega Tu \quad \text{pour } k \geq 1$$

Pour  $n \geq 1$ ,

$$B_{n+1,k}(u) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_{j,k-1}(u) \cdot u(n+1-j)$$

Comme  $B_{n,1}(u) = u(n) = u_n$  les  $B_{n,k}(u)$  est un polynôme en  $u_1, u_2, \dots, u_{n-k}$  à coefficient dans  $\mathfrak{9}$

$$B_{n,k}(u) \in \mathfrak{9}[u] = \mathfrak{9}[u_1, u_2, \dots, u_{n+k-1}]$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux suites d'ordre supérieur ou égal à un.

$$e_k o v o u = B_{q,k}(v) o u = B_{q,k}(v o u)$$

$$B_{n,k}(v o u) = \sum_{j=1}^n B_{j,k}(v) B_{n,j}(u)$$

Notons  $B(u)$  la matrice de Bell associée à  $u$

$$B(u) = (B_{n,k}(u))_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 1}}$$

matrices triangulaires dont les termes diagonaux sont  $B_{n,n}(u) = u_1^n$  alors

$$B(v o u) = B(u)B(v)$$

De  $B_{q,i}(u) = e_i o u$   $B_{q,j}(u) = e_j o u$

On a

$$B_{q,i}(u) o B_{q,j}(u) = (e_i o u) o (e_j o u) = (e_i o e_j) o u = \frac{(i+j)!}{i!j!} e_{i+j} o u = \frac{(i+j)!}{i!j!} B_{q,i+j}(u)$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{k,i}(u) B_{n-k,j}(u) = \frac{(i+j)!}{i!j!} B_{n,i+j}(u)$$

Posons  $i = 1, j = l - 1$ , on obtient la formule de récurrence

$$l B_{n,l}(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u(k) B_{n-k,l-1}(u)$$

Considérons quelques cas particuliers des polynômes de Bell  $B_{n,k}(u)$

- ♦  $u(n) = a(n) = 1, n \geq 1, a(0) = 0$   $B_{n,k}(a) = S(n, k)$  sont les nombres de Stirling de deuxième espèce.
- ♦  $u(n) = \bar{a}(n) = (-1)^{n+1}(n-1)! \quad n \geq 1, \quad \bar{a}(0) = 0, \quad B_{n,k}(\bar{a}) = s(n, k)$  sont les nombres de Stirling de première espèce.
- ♦  $u(n) = n a^{n-1}, n \geq 1, u(0) = 0$   
 $B_{n,k}(1, 2a, 3a^2, \dots) = \binom{n}{k} (ak)^{n-k}$

Pour  $a=1$ , ces nombres sont connus comme les *nombres idempotents*[8] et [10] (le nombre des applications idempotentes définis de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  où  $\mathbb{N}$  ensemble à  $n$  éléments vaut

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k} \text{ et les } \binom{n}{k} k^{n-k} \text{ sont appelés les nombres idempotents).}$$

♦  $u(n)=n!, n \geq 1, u(0)=0$

$$B_{n,k}(1!,2!,\dots) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}$$

sont les *nombres de Lah* [10]

♦  $u(n)=(n-1)!, n \geq 1, u(0)=0$

$$B_{n,k}(0!,1!,2!,\dots) = |s(n,k)|$$

### IV.1.2 Relation entre les polynômes de Bell exponentiels partiels et les nombres de Bernoulli généralisée

Notons aussi que les polynômes de Bell exponentiels partiels étant en relation avec les nombres de Bernoulli généralisés.

La suite de Bernoulli  $B_q=(B_n)$  est définie par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Pour une suite  $u$  d'ordre un nous poserons

$$\frac{x}{g_u(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(u) \frac{x^n}{n!}$$

tel que  $B_q(a) = B_q$

Notons que

$$\frac{x}{g_{\bar{a}}(x)} = \sum_{n \geq 0} B_n(\bar{a}) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

où  $B_q(\bar{a}) = b_q$  les nombres de Bernoulli de deuxième espèce et  $b_q=(b_n)$

et  $B_q(\alpha) = e_1 + B_q(a) \qquad B_q(\bar{\alpha}) = (-1)^q B_q(\bar{a})$

Plus généralement, posons pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$\left( \frac{x}{g_u(x)} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(u) \frac{x^n}{n!}$$

de sorte que  $B_q^{(k)}(u) = [B_q(u)]^{ok}$

$u'$  est l'inverse de  $u$  dans l'algèbre de Hurwitz  $A(\mathbb{C})$

$$g_{u'}(x) = \frac{1}{g_u(x)}$$

D'où  $xg_{u'}(x) = g_{B_q(u)}(x)$ ,  $e_1 \omega u' = B_q(u)$

$$B_n(u) = n u'(n-1)$$

D'où  $B_{n+1}(u) = (n+1)u'(n)$  pour  $n \geq 0$

Notons  $u(k) = u_k$  pour  $k \geq 0$

$$u'(-1) = B_0(u) = u_1^{-1}$$

$$g_{u'}(x) = \frac{1}{u_1 x} \left( 1 + \frac{u_2}{2u_2} + \dots + \frac{u_{n+1}}{(n+1)u_1} \frac{x^n}{n!} + \dots \right)^{-1}$$

En posant

$$g_v(x) = \frac{u_2}{2u_1} x + \dots + \frac{u_{n+1}}{(n+1)u_1} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(1 + g_v(x))^{-1} = 1 + \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} j! \frac{g_v^j(x)}{j!} = 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j! B_{n,j}(v) \right) x^n$$

Soit  $w(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j! B_{n,j}(v) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j! u_1^{-j} B_{n,j} \left( \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{3}, \dots \right)$

Pour  $n \geq 1$

$$u_1^n w(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j! u_1^{n-j} B_{n,j} \left( \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{3}, \dots \right)$$

Donc,

$$n u_1^{n+1} u'(n-1) = \sum_{j=1}^n j! u_1^{n-1} B_{n,j} \left( \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{3}, \dots \right) = u_1^{n+1} B_n(u)$$

D'où

$$u_1^{n+1} B_n(u) \in \Theta[u_2, u_3, \dots]$$

Si  $u_1=1$  et  $\frac{u_n}{n} \in \mathfrak{9}$ , pour tout entier naturel,  $B_n(u)$  est un polynôme en  $u_i$  à coefficient dans

**9.**

Comme  $u_1 u_1^q B_q(u) \in \Theta[u]$ , nous déduisons  $u_1^{n+k} B_n^{(k)}(u) \in \Theta[u]$

### IV.1.3 Extension des polynômes de Bell exponentiels partiels

Pour prolonger les polynômes de Bell exponentiels partiels pour  $n$  et  $k$  négatifs,  $n$  positif et  $k$  négatif utilisons la méthode qui a été utilisé pour prolonger les nombres de Stirling [1].

Pour  $k \geq 0$   $B_{q,k}(u) = e_k$  ou

**IV.1.3.1 Définition**

Pour  $k \in \mathfrak{9}$ ,  $B_{q,k}(u) = e_k$  ou

Dans le corps de Hurwitz  $H(\mathbb{C})$ , pour  $k > 0$

$$e_{-k} \text{ ou } = \frac{1}{\gamma(-k)} u^{\omega(-k)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq -k} B_{n,-k}(u) \frac{x^n}{\gamma(n)} &= g_{e_{-k} \text{ ou}}(x) = \frac{g_u^{-k}(x)}{\gamma(-k)} = \frac{1}{\gamma(-k)x^k} \left( \frac{x}{g_u(x)} \right)^k = \frac{1}{\gamma(-k)x^k} \sum_{j \geq 0} B_j^{(k)}(u) \frac{x^j}{j!} \\ &= \frac{1}{\gamma(-k)} \sum_{n \geq -k} B_{n+k}^{(k)}(u) \frac{x^n}{(n+k)!} \end{aligned}$$

D'où pour  $n < -k$   $B_{n,-k}(u) = 0$

Pour  $n \geq 0$

$$\frac{B_{n,-k}(u)}{n!} = \frac{1}{\gamma(-k)} \frac{B_{n+k}^{(k)}(u)}{(n+k)!}$$

$$B_{n,-k}(u) = (-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{n}^{-1} \frac{B_{n+k}^{(k)}(u)}{n+k}$$

D'où  $u_1^{n+2k} B_{n,-k}^{(k)}(u) \in \mathfrak{O}[u]$  et  $u_1^{n+2k} B_{n,-k}(u) \in \mathfrak{O}[u]$

C'est à dire que les  $B_{n,-k}(u)$  ont des quotients de polynômes en  $u_2, u_3, \dots$  à coefficients dans  $\mathfrak{O}$  par des puissances de  $u_1$ .

**IV.1.3.2 Proposition**

Les  $B_{n,-k}(u)$  sont définis par

$$B_{q,k}(u) = e_k \text{ ou } , k \in \mathfrak{9}$$

et 
$$\left( \frac{x}{g_u(x)} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(u) \frac{x^n}{n!}$$

Alors, 
$$B_{n,-k}(u) = (-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{n}^{-1} \frac{B_{n+k}^{(k)}}{n+k}$$

$$u_1^{n+2k} B_{n,-k}(u) \in \mathfrak{O}[u]$$

Pour  $-k \leq -n < 0$

$$B_{-n,-k}(u) = \frac{\gamma(-n)}{\gamma(-k)} \cdot \frac{B_{k-n}^{(k)}(u)}{(k-n)!} = (-1)^{n+k} \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}(u)$$

D'où  $u_1^{2k-n} B_{k-n}^{(k)}(u) \in \Theta[u]$  et  $u_1^{2k-n} B_{-n,-k}(u) \in \Theta[u]$

$$B_{-k,-k}(u) = B_0^{(k)}(u) = u_1^{-k}$$

Nous avons que

$$S(-n,-k) = (-1)^{n+k} s(k,n)$$

$$s(-n,-k) = (-1)^{n+k} S(k,n)$$

Montrons qu'il existe une propriété analogue pour  $B_{-n,-k}(u)$ ,  $0 \leq n \leq k$ .

Considérons  $u: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{V}$  suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u(n)|^{1/n} < +\infty$ , alors

$$\left( \frac{z}{g_u(z)} \right)^k \text{ est une fonction analytique dans un voisinage zéro } (u(1) \neq 0)$$

Les nombres de Bernoulli généralisés sont définis par

$$\left( \frac{z}{g_u(z)} \right)^k = \sum_{n \geq 0} B_n^{(k)}(u) \frac{z^n}{n!}$$

Les coefficients  $\frac{B_n^{(k)}(u)}{n!}$  sont donnés par la formule de Cauchy

$$\frac{B_n^{(k)}(u)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{z}{g_u(z)} \right)^k \frac{dz}{z^{n+1}}$$

où  $\Gamma$  une courbe simple autour de zéro

$t = g_u(z)$  définit dans un voisinage de zéro une fonction analytique  $t \rightarrow g_u^{-1}(t) = z$ ,

$$\text{d'où } \frac{B_n^{(k)}(u)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \frac{(g_u^{-1}(t))^{k-n-1}}{t^k} g_u^{-1}'(t) dt$$

où  $\Gamma'$  étant une courbe simple autour de zéro.

Par intégration par parties et tenant compte de la méromorphie en zéro de  $\frac{g_u^{k-n}(t)}{t^k}$ ,

$0 < n < k$ .

$$\frac{B_n^{(k)}(u)}{n!} = \frac{k}{k-n} \frac{(k-n)!}{k!} B_{k,k-n}(\bar{u})$$

Pour  $r = k - n$ ,

$$B_{k,r}(\bar{u}) = \binom{k-1}{r-1} B_{k-r}^{(k)}(u)$$

alors

$$B_{k,r}(\bar{u}) = (-1)^{r+k} B_{-r,-k}(u)$$

### IV.1.3.3 Proposition

Les  $B_{-n,-k}(u)$  sont définis par

$$B_{-n,-k}(u) = (-1)^{n+k} \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}(u)$$

$$u_1^{2k-n} B_{-n,-k}(u) \in \Theta[u_2, u_3, \dots]$$

$$B_{-n,-k}(u) = (-1)^{n+k} B_{k,n}(\bar{u})$$

De la même manière, pour les nombres de Stirling on peut montrer

$$B_{k,n}(\bar{u}) = \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}(u)$$

algébriquement sans passer par l'intégrale de Cauchy, en utilisant la formule d'inversion

de Lagrange, en appliquant le (**Théorème III.7.4**)

On pose  $f(x) = g_u(x)$  ( $u$  une suite d'ordre un) et sa série réciproque  $g(x) = g_u^{-1}(x)$

$$\mathbf{C} x^k g_u^n(x) = \frac{n}{k} \cdot \mathbf{C} x^{k-n} \left( \frac{g_u(x)}{x} \right)^{-k}$$

Les fonctions génératrices

$$\left( \frac{x}{g_u(x)} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(u) \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \left( \frac{x}{g_u(x)} \right)^k = \sum_{n \geq k} B_{k-n}^{(k)}(u) \frac{x^n}{n!}$$

Donnent

$$\mathbf{C}_x^k \frac{(g_{\bar{u}}(x))^n}{n!} = \frac{B_{k,n}(\bar{u})}{k!}, \quad \mathbf{C}_x^{k-n} \left( \frac{x}{g_u(x)} \right)^k = \frac{B_{k-n}^{(k)}(u)}{(k-n)!}$$

D'où

$$n! \frac{B_{k,n}(\bar{u})}{k!} = \frac{n B_{k-n}^{(k)}(u)}{k (k-n)!}$$

$$B_{k,n}(\bar{u}) = \binom{k-1}{n-1} B_{k-n}^{(k)}(u) \quad \square$$

#### IV.1.3.4 Série génératrice

Pour les nombres de Stirling

$$(x)_{-n} = \sum_k s(-n, -k) x^{-k}$$

$$x^{-n} = \sum_k S(-n, -k) (x)_{-k}$$

Examinons  $\sum_k B_{-n,-k}(\bar{u}) x^{-k}$   $\sum_k B_{-n,-k}(u) (x)_{-k}$

$$\sum_k B_{-n,-k}(\bar{u}) x^{-k} = \sum_k (-1)^{n+k} B_{k,n}(u) x^{-k}$$

En utilisant la transformation de Mellin Barsky formelle [4 ].

Pour une suite  $w$  d'ordre nul, nous noterons  $\tilde{w} = w o \bar{\alpha}$  et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w(n)}{x^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{w}(n)}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$w(k) = (-1)^k B_{k,n}(u) = [(-1)^q (e_n ou)](k)$$

$$\tilde{w}(k) = [(-1)^q (e_n ou)] o \bar{\alpha}(k)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(k) &= \sum_{j=1}^k (-1)^j (e_n ou)(j) \cdot B_{k,j}(\bar{\alpha}) = \sum_{j=1}^k (-1)^j (e_n ou)(j) \cdot \bar{s}(k, j) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^j B_{j,n}(u) (-1)^{k+j} s(k, j) = (-1)^k \sum_{j=1}^k e_n ou(j) \cdot s(k, j) \end{aligned}$$

$$= (-1)^k (e_n \text{ou} \bar{a})(k)$$

Il en résulte,

$$\sum_{k \geq n} \frac{B_{-n, -k}(\bar{u})}{x^k} = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{n+k} (e_n \text{ou} \bar{a})(k)}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$$

Nous avons obtenu l'analogue de  $(x)_{-n} = \sum_k s(-n, -k)x^{-k}$  l'extension

$$\text{de } (x)_n = \sum_{k=1}^n s(n, k)x^k$$

En particulier, pour  $u = a$

$$\sum_k s(-n, -k)x^{-k} = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{n+k} e_n(k)}{(x+1)\dots(x+k)} = \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} = (x)_{-n}$$

Pour  $u = \bar{a}$

$$\sum_k S(-n, -k)x^{-k} = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{n+k} B_{k,n}(\bar{a} \bar{a})}{(x+1)\dots(x+k)}$$

$$\sum_k B_{-n, -k}(u)(x)_{-k} = \sum_k \frac{(-1)^{n+k} B_{k,n}(\bar{u})}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$$

Avec la formule de transformation de Mellin Barsky

$$\tilde{w}(k) = (-1)^k B_{k,n}(\bar{u}) = [(-1)^q (e_n \text{ou} \bar{u})](k)$$

$$w(k) = [(-1)^q (e_n \text{ou} \bar{u})] \alpha(k)$$

d'où

$$w(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^j (e_n \text{ou} \bar{u})(j) B_{k,j}(\alpha) = \sum_{j=1}^k (-1)^k B_{j,n}(\bar{u}) \bar{S}(k, j)$$

$$= (-1)^k \sum_{j=1}^k B_{j,k}(\bar{u}) \cdot S(k, j) = (-1)^k (e_n \text{ou} \bar{a})(k)$$

$$\sum_k B_{-n, -k}(u) \cdot (x)_{-k} = \sum_k \frac{(-1)^{n+k} B_{k,n}(\bar{u})}{(x+1)\dots(x+k)} = \sum_k \frac{(-1)^{n+k} (e_n \text{ou} \bar{a})(k)}{x^k}$$

En particulier, pour  $u=a$

$$\sum_k S(-n, -k)(x)_{-k} = \sum_k \frac{(-1)^{n+k} e_n(k)}{x^k} = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (\text{NNSN})$$

Pour  $u = \bar{a}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_k s(-n, -k)(x)_{-k} &= \sum_k \frac{(-1)^{n+k} (e_n o a o a)(k)}{x^k} \\ &= \sum_k \frac{(-1)^{n+k} B_{k,n}(a o a)}{x^k} \\ &= \sum_k \frac{(-1)^{n+k} \sum_{l=1}^k S(k, l) \cdot S(l, n)}{x^k} \end{aligned}$$

**IV.2 Extension des polynômes de Bell exponentiels complet**

**IV.2.1 Généralisation de la formule de transformation de Mellin Barsky**

Rappelons le résultat suivant qui sera utile pour donner une généralisation pour la formule de transformation de Mellin-Barsky.

**Théorème [3]**

Soit  $\phi : A \rightarrow A$

$\phi$  est un automorphisme de l'algèbre de Hurwitz  $A=A(C)$  si et seulement s'il existe une suite  $u$  d'ordre un telle que  $\phi(v) = vou$

Pour  $ord u = 1$   $v \rightarrow vou$  est bien un homomorphisme de l'algèbre de Hurwitz.

Puisque  $(v_1 \omega v_2)ou = (v_1 ou)\omega(v_2 ou)$  et  $u = vou\bar{u}$  en est l'inverse.

Cet automorphisme de  $A$  conserve l'ordre.

Le théorème précédent affirme que tout automorphisme de  $A(C)$  est de la forme  $w \rightarrow wo\bar{u}$  où  $\bar{u}$  est une suite d'ordre un.

(En particulier, pour  $u = \alpha$ , c'est la transformation de Mellin- Barsky formelle

$w \rightarrow wo\bar{\alpha} = \tilde{w}$ )

En posant de manière générale

$$\begin{cases} \tilde{w} = wo\bar{u} \\ w = \tilde{w}ou \end{cases}$$

En utilisant la formule de Faa di Bruno,

$$\begin{cases} \tilde{w}(n) = \sum_{k=1}^n w(k)B_{n,k}(\bar{u}) \\ w(n) = \sum_{k=1}^n \tilde{w}(k)B_{n,k}(u) \end{cases}$$

Les  $(e_n ou)_{n \in \mathbb{N}} = (B_{n,k}(u))_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $s_0(C)$  (pour la valuation ordre) et toute suite  $w$  d'ordre zéro à valeurs dans  $C$  s'écrit

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{w}(k)B_{q,k}(u)$$

En particulier, pour  $w = x^q$ ,  $x \in C^*$ ,  $x^q(n) = x^n$  et notons  $Y_q(x,u)(n) = Y_n(x,u)$

$$Y_q(x,u) = x^q o\bar{u}$$

$$Y_n(x, u) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(\bar{u})x^k$$

et pour  $w = 1^q, \quad 1^q(n) = 1^n$

$$1^q o\bar{u} = Y_q(\bar{u}) = Y_q(1, u)$$

sont les polynômes de Bell exponentiels complets.

$$Y_n(\bar{u}) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(\bar{u})$$

En particulier, pour  $u = \bar{a}$

$$Y_n(x, \bar{a}) = \sum_{k=1}^n x^k B_{n,k}(\bar{a}) = \sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = P_n(x) \text{ est le } n^{\text{ème}} \text{ polynôme de Bell}$$

et pour  $x=1,$

$$Y_n(\bar{a}) = \sum_{k=1}^n S(n, k) = P_n \quad \text{est le } n^{\text{ème}} \text{ nombre de Bell.}$$

### IV.2.2 Définitions et premières propriétés

Donnons l'extension des polynômes de Bell aux entiers négatifs, on reprend l'article de B.Benzaghou [1] et la thèse de doctorat A.Junod [13], ce dernier a utilisé les techniques du calcul ombral.

Nous désignerons par  $C$  un corps commutatif de caractéristique zéro, les polynômes Pochhammer

$$\begin{aligned} (x)_0 &= 1, \\ (x)_n &= x(x-1)\dots(x-n+1) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

constituent une base du  $C[x]$  et on peut considérer l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi : C[x] &\rightarrow C[x] \\ (x)_n &\rightarrow x^n \end{aligned}$$

Où  $x^q = (x)_q o a$   $\phi$  est un opérateur ombral

**IV.2.2.1 Définitions**

1 Le  $n^{\text{ème}}$  polynôme de Bell  $P_n(x)$  est l'image de  $x^n$  par  $\phi$

$$P_n(x) = \phi(x^n).$$

2 Le  $n^{\text{ème}}$  nombre de Bell  $P_n$  est défini par

$$P_n = P_n(1) = \phi(x^n)|_{x=1}$$

Les nombres de Stirling de deuxième espèce  $S(n, k)$  donnent de manière explicite

$$\left( x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k \right).$$

$$P_n(x) = \phi \left( \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k \right) = \sum_{k=0}^n S(n, k)\phi((x)_k) = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k$$

$$P_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

Donc  $P_n(x) \in \mathfrak{9}[x]$  ,  $P_n \in \mathfrak{9}$ ,  $P_n \in \mathcal{L}$

Les premières valeurs sont les suivantes:

$n$	$P_n$	Polynômes de Bell $P_n(x)$
0	1	1
1	1	$X$
2	2	$x+x^2$
3	5	$x+3x^2+x^3$
4	15	$x+7x^2+6x^3+x^4$
5	52	$x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5$

$P_n$  est le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments en sous-ensembles non vides.

C'est aussi le nombre de relation d'équivalence sur un ensemble à  $n$  éléments.

**IV.2.2.2 Proposition**

Pour tout polynôme  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , pour tout  $n \geq 0$ , on a

a)  $x^n \phi(f(x)) = \phi((x)_n f(x-n))$

b)  $x \phi((x+1)^n) = \phi(x^{n+1})$

**Preuve**

Pour  $a)$ , pour tous les entiers  $m, n \geq 0$ , on a la relation

$$\binom{x}{n+m} = \binom{x}{n} (x-n)_m$$

$$x^n \phi\left(\binom{x}{m}\right) = x^{n+m} = \phi\left(\binom{x}{n+m}\right) = \phi\left(\binom{x}{n} (x-n)_m\right)$$

$$x^n \phi\left(\binom{x}{m}\right) = \phi\left(\binom{x}{n} (x-n)_m\right)$$

Si  $f(x) = \sum_{finie} c_m \binom{x}{m}$ ,  $c_m \in \mathbb{C}$ , on déduit par linéarité

$$\begin{aligned} x^n \phi\left(\sum_{finie} c_m \binom{x}{m}\right) &= x^n \sum_{finie} c_m \phi\left(\binom{x}{m}\right) = x^n \sum_{finie} c_m x^m = \sum_{finie} c_m x^{n+m} \\ &= \sum_{finie} c_m \phi\left(\binom{x}{n+m}\right) = \sum_{finie} c_m \phi\left(\binom{x}{n} (x-n)_m\right) \\ &= \phi\left(\sum_{finie} c_m \binom{x}{n} (x-n)_m\right) = \phi\left(\binom{x}{n} \sum_{finie} c_m (x-n)_m\right) \end{aligned}$$

D'où  $x^n \phi(f(x)) = \phi\left(\binom{x}{n} f(x-n)\right)$  pour tout polynôme  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ .

En particulier, avec  $n=1$ , cela donne

$$x \phi(f(x)) = \phi(x \cdot f(x-1)) \quad \text{pour tout polynôme } f(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Pour  $b)$ , en prenant  $f(x) = (x+1)^n$ , on trouve

$$x \phi\left((x+1)^n\right) = \phi(x \cdot x^n) = \phi(x^{n+1}) \quad \square$$

**IV.2.2.3 Corollaire**

Les polynômes de Bell  $P_n(x)$  peuvent être calculés par la relation de récurrence

$$P_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) \quad , \quad n \geq 0$$

$$P_0(x) = 1$$

**Preuve**

Suit de la linéarité de l'opérateur  $\phi$  et le développement  $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

$$\phi((x+1)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi(x^k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x)$$

et la partie b) de **proposition IV.2.2..2**

$$x\phi((x+1)^n) = \phi(x^{n+1}) = P_{n+1}(x)$$

Il en résulte

$$P_{n+1}(x) = x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) \quad \square$$

En prenant  $C = \forall$  Corps des nombres complexes

**IV.2.2.4 Proposition**

Pour tout polynôme  $f(x) \in C[x]$

$$\phi(f(x)) = e^{-x} \sum_{k \geq 0} \frac{f(k)}{k!} x^k$$

**Preuve**

On peut écrire

$$\phi((x)_n) = x^n = x^n e^x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{x^{n+k}}{k!} = e^{-x} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(k-n)!} = e^{-x} \cdot \sum_{k \geq n} \frac{(k)_n}{k!} x^k = e^{-x} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(k)_n}{k!} x^k$$

qui montre par linéarité

$$\phi(f(x)) = e^{-x} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{f(k)}{k!} x^k \quad \square$$

En considérant, en particulier  $f(x) = x^n$

$$P_n(x) = \phi(x^n) = e^{-x} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} x^k$$

$$P_n = e^{-1} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} \quad \text{la formule de Dobinski qui est une série convergente}$$

Aussi les polynômes de Bell  $P_n(x)$  et les nombres de Bell  $P_n$  peuvent être définis par leurs fonctions génératrices exponentielles.

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)}$$

$$\sum_{n \geq 0} P_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t-1}$$

Par leurs fonctions génératrices ordinaires

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n \cdot t^n}{(1-t)\dots(1-nt)}$$

$$\sum_{n \geq 0} P_n t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(1-t)\dots(1-nt)}$$

L'identité binomiale

$$P_n(x+y) = (x+y)^q \circ a(n) = (x^q \omega y^q) \circ a(n) = (x^q \circ a) \omega (y^q \circ a)(n) = P_q(x) \omega P_q(y)(n)$$

$$P_n(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j(x) P_{n-j}(y)$$

### IV.2.3 Calcul ombra

Rappelons quelques concepts de la théorie du calcul ombra, on se limite au cas considéré [8], [9] et [12].

#### IV.2.3.1 Définition

On dit que la suite  $(q_n(x))_{n \geq 0} \in C[x]$  est une suite de polynôme associée à un opérateur  $\delta$  si

- 1)  $\deg q_n(x) = n, \quad n \geq 0$
- 2)  $\delta q_n(x) = n q_{n-1}(x), \quad n \geq 1$
- 3)  $q_0(x) = 1, q_n(0) = 0, \quad n \geq 1$

Par exemple, la base canonique  $(x^n)_{n \geq 0}$  est associée à l'opérateur de dérivation

$$D: C[x] \rightarrow C[x]$$

$$f(x) \rightarrow f'(x)$$

et la base des polynômes de Pochhammer  $((x)_n)_{n \geq 0}$  est associée à l'opérateur de différence finie

$$\Delta: C[x] \rightarrow C[x]$$

$$f(x) \rightarrow f(x+1) - f(x)$$

L'application  $\phi$ , qui relie ces deux bases, relie de manière naturelle les opérateurs associés

$$\phi(\Delta(x)_n) = \phi(n(x)_{n-1}) = n \phi((x)_{n-1}) = n x^{n-1} = D x^n = D \phi(x^n)$$

Généralisons, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\phi(\Delta^k(x)_n) = \phi((n)_k(x)_{n-k}) = (n)_k \phi((x)_{n-k}) = (n)_k x^{n-k} = D^k x^n = D^k \phi((x)_n)$$

Par linéarité, il suit alors

$$\phi \Delta^k = D^k \phi$$

c'est à dire

$$\phi(\Delta^k f(x)) = D^k \phi(f(x)) \quad \text{pour tout polynôme } f(x) \in \mathbb{C}[x]$$

En particulier, pour  $f(x) = x^n$ ,  $k = 1$

$$D \phi(x^n) = P'_n(x) = \phi((x+1)^n - x^n) = \phi((x+1)^n) - \phi(x^n) = \frac{1}{x} (P_{n+1}(x) - P_n(x))$$

C'est à dire 
$$P_{n+1}(x) = x(P_n(x) + P'_n(x))$$

En introduisant l'opérateur de multiplication

$$m_x : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$$

$$f(x) \rightarrow x f(x)$$

On peut écrire,

$$P_n(x) = m_x(1+D)P_{n-1}(x) = \dots = (m_x(1+D))^n(1)$$

Les polynômes de Bell sont associés à l'opérateur  $\nabla = \log(1+D)$

car  $P_0(x) = 1$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a  $P_n(0) = 0$  ainsi que

$$\nabla P_n(x) = \log(1+D)\phi(x^n) = \phi \log(1+\Delta)x^n$$

$\Delta = e^D - 1$  alors  $D = \log(1+\Delta)$  qui traduit un développement de Taylor et que l'on peut vérifier avec la base canonique.

$$\exp D \cdot x^n = \sum_{k \geq 0} \frac{D^k}{k!} \cdot x^n = \sum_{k \geq 0} \frac{(n)_k}{k!} \cdot x^{n-k} = (1+x)^n = (1+\Delta)x^n$$

Donc 
$$\nabla P_n(x) = \phi(n x^{n-1}) = n P_{n-1}(x)$$

La translation  $\tau_a$ ,  $a \in \mathbb{C}$  est un opérateur linéaire dans  $\mathbb{C}[x]$ , définit par

$$\tau_a f(x) = f(x+a).$$

Un delta-opérateur est un endomorphisme linéaire  $\delta$  de  $\mathbb{C}[x]$  tel que

$\delta$  commute avec toute translation  $\tau_a$ ,  $a \in \mathbb{C}$

$\delta(x) = c \in \mathbb{C}^*$  est une constante non nul.

**IV.2.3.2 Proposition**

Soit  $\delta$  un delta-opérateur dans  $C[x]$ , alors

- 1)  $\delta(a)=0, a \in C^*$
- 2) Si  $f$  est un polynôme non constant, alors  $deg(\delta f)=deg f-1$

Soit  $\delta$  est un delta-opérateur et  $(q_n(x))_{n \geq 0}$  système de base  $C[x]$ .

Alors on a le développement général

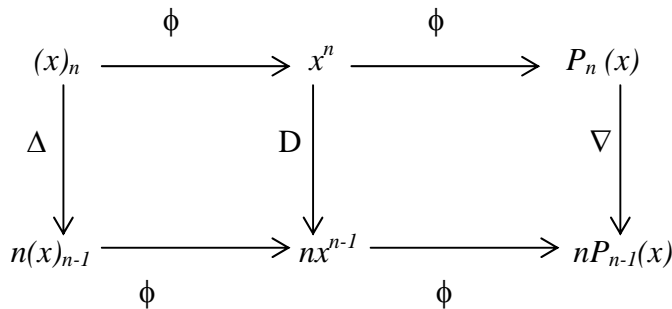
$$f(x+y) = \sum_{k \geq 0} \frac{\delta^k f(x)}{k!} q_k(y) \quad \text{pour tout polynôme } f(x) \text{ dans } C[x].$$

Remplaçons  $f$  par une translation  $\tau_a f$  dans l'égalité

$$\tau_a f = \sum_{k \geq 0} \frac{\delta^k f(x)}{k!} q_k$$

Cela généralise les développements de Taylor et de Mahler.

On peut résumer les différentes bases rencontrées avec les delta-opérateurs associés par le diagramme commutatif suivant



Avec  $\Delta = e^D - 1$

$$D = \log(1 + \Delta)$$

$$\nabla = \log(1 + D)$$

$$\phi \Delta^k = D^k \phi$$

$$\phi D^k = \nabla^k \phi$$

**IV.2.4** Nous allons définir les polynômes de Bell  $P_n(x)$  à indices négatifs de façon à respecter le diagramme, on a

$$(x)_0 = 1$$

$$(x)_{-n} = \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{(x+n)_n}$$

$$\text{et } \Delta(x)_{-n} = -n(x)_{-n-1}.$$

Pour que le diagramme commute, on doit respecter la relation  $x^n \phi(f(x)) = \phi((x)_n f(x-n))$

En posant, pour  $f(x) = (x)_{-n}$

$$x^n \phi((x)_{-n}) = \phi((x)_n (x-n)_{-n}) = \phi((x)_n \frac{1}{(x)_n}) = \phi(1) = 1$$

D'où  $\phi((x)_{-n}) = x^{-n}$  ce qui prolonge  $\phi((x)_n) = x^n$  à l'espace des séries de Laurent  $C[[x^{-1}]]$

On a déjà  $x^{-n} = \sum_{k \geq 0} S(-n, -k) (x)_{-k}$  (NNSN)

Il ne reste qu'à poser

$$P_{-n}(x) = \phi(x^{-n}) = \sum_{k \geq 0} S(-n, -k) \phi((x)_{-k}) = \sum_{k \geq 0} S(-n, -k) x^{-k} \quad \text{pour } n \geq 0$$

( $P_{-n}(x) = \phi(x^{-n})$  c'est à dire  $P_{-n}(x)$  est l'image de  $x^{-n}$  par  $\phi$ )

Aussi  $S(-n, -k) = (-1)^{n+k} s(k, n)$

Donc  $P_{-n}(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+k} s(k, n) x^{-k} = \sum_{k \geq 0} \frac{\bar{s}(k, n)}{x^k}$  (c'est une série de Laurent)

Donnons ici la définition des polynômes de Bell à indices positifs et négatifs par

$$P_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(n, k) x^k \quad \text{avec } S(-n, -k) = (-1)^{n+k} s(k, n) \quad \text{pour } k, n \in \mathbf{9}$$

Par transformation de Mellin-Barsky formelle, on a

$$P_{-n}(x) = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{n+k} s(k, n)}{x^k} = \sum_{k \geq n} \frac{(e_n o \bar{\alpha} o \bar{\alpha})(k)}{(x+1) \dots (x+k)}$$

Avec  $(e_n o \bar{\alpha} o \bar{\alpha})(k) = \sum_{j=1}^k e_n o \bar{\alpha}(j) \cdot B_{k,j}(\bar{\alpha})$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^k \bar{s}(j, n) \cdot \bar{s}(k, j) = \sum_{j=1}^k (-1)^{n+j} (-1)^{k+j} s(j, n) \cdot s(k, j) \\
 &= (-1)^{n+k} \sum_{j=1}^k s(j, n) \cdot s(k, j)
 \end{aligned}$$

$$P_{-n}(x) = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{n+k} \cdot s(k, n)}{x^k} = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^{n+k} \sum_{j=1}^k s(j, n) \cdot s(k, j)}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$$

Rappelons que les nombres de Bell peuvent être défini par  $P_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ .

On voit qu'il est possible de prolonger la définition des nombres de Bell à indice négatif

$$\text{en sommant } S(-n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{-n} \quad n \geq 0, k \geq 1 \text{ (NPSN)}$$

$k$  de 1 à l'infini.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 1} S(-n, k) &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{-n} \\
 &= \sum_{j \geq 1} j^{-n} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-j}}{k!} \binom{k}{j} \\
 &= \sum_{j \geq 1} \frac{j^{-n}}{j!} \sum_{k \geq j} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} \\
 &= e^{-1} \cdot \sum_{j \geq 1} \frac{j^{-n}}{j!} = P_{-n}
 \end{aligned}$$

C'est l'extension de la formule de Dobinski pour  $n$  positif, donné par

$$P_n = e^{-1} \sum_{j \geq 1} \frac{j^n}{j!}$$

La somme est convergente dans  $\forall$ .

#### IV.2.4.1 Définition

Pour  $n \geq 1$

$$Y_{-n}(x, u) = \sum_k x^{-k} \cdot B_{-n, -k}(\bar{u}) = \sum_{k \geq n} (-1)^{n+k} \cdot x^{-k} \cdot B_{k, n}(u)$$

En particulier, pour  $u = a$

$$Y_{-n}(x, a) = \sum_k s(-n, -k) \cdot x^{-k} = (x)_{-n} \quad (\text{NNSN})$$

et pour  $u = \bar{a}$

$$Y_{-n}(x, \bar{a}) = \sum_k S(-n, -k) x^{-k} = \sum_{k \geq n} (-1)^{n+k} x^{-k} \cdot s(k, n)$$

est le prolongement des polynômes de Bell  $P_n(x)$  (C'est une série de Laurent)

# Chapitre V

Extension des polynômes de Bernoulli  
et d'Euler

## Chapitre V

## Extension des polynômes de Bernoulli et d'Euler

## V.1 Les opérateurs d'Appell et les suites d'Appell

S.Roman [8] a donné la définition des suites avec leurs propriétés avec des techniques ombrales, on peut reformuler ces définitions et les propriétés en utilisant l'algèbre de Hurwitz.

B.Benzaghoul [3] a réécrit les fondements du calcul ombraux en utilisant systématiquement le produit de Hurwitz et la composition des suites.

Si  $P=C[x]$ ,  $C$  est un corps commutatif de caractéristique zéro, le dual  $P'$  s'identifie à l'algèbre de Hurwitz  $A=A(C)$  des suites à valeurs dans  $C$  muni du produit de Hurwitz.

$$\langle v_1 \omega v_2 | x^n \rangle = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \langle v_1 | x^k \rangle \cdot \langle v_2 | x^{n-k} \rangle$$

avec une forme linéaire  $v_i$   $i=1,2$  sur  $P$  est déterminée par ses valeurs sur la base  $\{x^n, n \in \mathbb{Z}\}$

$$\langle v_i | x^n \rangle = v_i(n).$$

Soit  $E$  l'algèbre (pour la composition) des applications linéaires de  $P$  dans  $P$ .

Un élément  $\lambda: P \rightarrow P$  de  $E$  est déterminé par son action sur la base  $\{x^n, n \in \mathbb{Z}\}$

$$\lambda x^n = a_n(\lambda, x) \in P$$

$\lambda \rightarrow a_q(\lambda, x)$  définit un isomorphisme entre l'algèbre  $\xi$  des endomorphismes continus de  $A$  (pour la valuation ordre) et les suites  $s_0(C)$  à valeurs dans  $P$ .

Nous noterons  $\lambda x^n = a_n(\lambda, x)$

La dérivation  $D = \frac{d}{dx}$  appartient à  $E$

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

$$Dx^q = e_1 \omega x^q$$

Pour  $w \in A$ ,  $g_w(D) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j) \frac{D^j}{j!}$  est un élément de  $E$  et

$$g_w(D) \cdot x^q = w \omega x^q$$

$$g_w(D) \cdot x^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w(j) \cdot x^{n-j}$$

Lorsque  $\lambda = g_w(D)$

$E_1 = \{ \lambda = g_w(D), w \in A \}$  est une sous algèbre commutative de  $E$  dont l'image dans  $\xi$  est la sous algèbre commutative  $\xi_1 = \{ a_q(\lambda, x) = w \omega x^q, w \in A \}$

$w \rightarrow a_q(\lambda, x) = w \omega x^q$  est un isomorphisme de l'algèbre de Hurwitz A dans  $\xi_1$

Soit  $\lambda \in E$ , alors son opérateur adjoint  $\lambda^*$  est dans l'algèbre des endomorphismes continus  $\text{End}_C(A, A)$  dans A (pour la valuation d'ordre).

Comme  $(\lambda_1 \circ \lambda_2)^* = \lambda_2^* \circ \lambda_1^*$ ,

$\lambda \rightarrow \lambda^*$  définit un homomorphisme d'algèbre de E dans  $\text{End}_C(A, A)$ .

Soit  $m_x$  l'opérateur de P de multiplication par x, comme  $m_x x^n = x^{n+1}$ ,

$$\langle m_x^*(v) | x^n \rangle = \langle v | x^{n+1} \rangle = v(n+1) = (Tv)(n) = \langle Tv | x^n \rangle$$

d'où  $m_x^*(v) = Tv$   $m_x^* = T$  l'opérateur shift de A.

Considérons l'opérateur  $\delta$  de dérivation de P, où  $\delta = x \cdot \frac{d}{dx}$

$$\text{alors } \langle \delta^*(v) | x^n \rangle = \langle v | nx^n \rangle = n v(n)$$

$$\delta^*(v) = qv \quad \text{l'opérateur de dérivation}$$

Dans le calcul ombral classique,  $g_w(t)$  est

- la série de Hurwitz formelle associée à w
- un élément du dual P',  $\langle g_w(t) | x^n \rangle = w(n)$
- l'opérateur  $\lambda = g_w(D)$  et on a  $\langle g_w(D) | g_v(D)x^n \rangle = \langle g_w(D) g_v(D) | x^n \rangle$

Rappelons qu'un automorphisme de A est de la forme  $\mu(v) = v \circ \bar{u}$ , où u est une suite d'ordre un l'opérateur  $\lambda$  de P tel que  $\lambda^* = \mu$  est dit un opérateur ombral et

$$\lambda x^q = x^q \circ \bar{u}, \quad \lambda x^n = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(\bar{u}) \cdot x^k$$

Les opérateurs de la forme  $\lambda = g_w(D)$  forment un sous algèbre  $E_1$  de E.

Lorsque  $ord w = 0$  ( $\lambda$  est alors inversible dans E), c'est le groupe des opérateurs d'Appell.

La proposition suivante donne des propriétés concernant les opérateurs et les suites d'Appell.

**V.1.1 Proposition** Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $\lambda = g_w(D)$
2.  $\lambda D = D \lambda$
3.  $a'_n(\lambda, x) = n a_{n-1}(\lambda, x)$  et  $deg a_n(\lambda, x) \leq n$
4.  $\lambda x^q = w \omega x^q$
5.  $\lambda^* v = w \omega v$

**Preuve**

1)⇒2) On a pour  $w \in A$  ,  $\lambda = g_w(D) = \sum_{j=0}^{+\infty} w(j) \frac{D^j}{j!}$

$$g_w(D).x^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w(j) x^{n-j}$$

$$\lambda D x^n = \lambda n x^{n-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} w(j) x^{n-1-j}$$

et  $D \lambda x^n = D \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w(j) x^{n-j} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} w(j) x^{n-1-j}$

alors  $\lambda D = D \lambda$

2)⇒3)  $D \lambda x^n = D a_n(\lambda, x) = a'_n(\lambda, x) = \lambda (n x^{n-1}) = n a_{n-1}(\lambda, x)$

comme  $\lambda D 1 = 0 = D \lambda 1$ ,  $\lambda.1 = a_n(\lambda, x) \in C$  et  $\deg a_n(\lambda, x) \leq n$

3) ⇒4) comme  $a_n(\lambda, x) = \int_0^x n. a_{n-1}(\lambda, \theta) d\theta + a_n(0)$

la suite  $a_n(\lambda, x)$  est déterminée par la donnée de la suite  $a_n(0) = w(n)$ .

Soit  $\Gamma = g_w(D)$  alors  $\Gamma x^q = w \omega x^q$ ,  $a_q(\Gamma, x)$  satisfait à 3)

$$\text{Avec } a_q(\Gamma, 0) = w(n) \text{ d'où } \lambda = g_w(D)$$

4)⇒5)  $\langle \lambda^* v | x^n \rangle = \langle v | \lambda x^n \rangle = \langle v | \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w(j) x^{n-j} \rangle$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w(j) \langle v | x^{n-j} \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w(j) v(n-j)$$

$$= (w \omega v)(n)$$

$$= \langle w \omega v | x^n \rangle$$

5)⇒1)

$$\langle \lambda^* v | x^n \rangle = \langle w \omega v | x^n \rangle = \langle v | g_w(D).x^n \rangle = \langle v | \lambda.x^n \rangle \text{ pour tout } v \in A$$

$$\lambda.x^n = g_w(D).x^n \quad \square$$

**V.1.2 Corollaire**

$$\lambda = g_w(D) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{t^n}{n!} = g_w(t) \cdot e^{xt} \quad (\text{c'est une conséquence de 4})$$

**V.1.3 Définition**

Lorsque  $ord w=0$ ,  $\lambda = g_w(D)$  est dit un d'Appell et  $a_q(x) = w \omega x^q$  opérateur est dite une suite d'Appell

**V.2 Les polynômes de Bernoulli et d'Euler**

**V.2.1 Définitions et premières propriétés**

Les polynômes de Bernoulli  $B_n^{(r)}(x)$  d'ordre  $r$  sont définis par la fonction génératrice

$$g_{B_q^{(r)}(x)}(t) = \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^r \cdot e^{xt} = \sum_{n \geq 0} B_n^{(r)}(x) \cdot \frac{t^n}{n!} \tag{1}$$

On a  $B_n^{(0)}(x) = x^n$  et en prenant  $r=1$ , on retrouve les polynômes de Bernoulli  $B_n(x)$  ordinaires.

Pour  $x=0$ , on retrouve

$$g_{B_q^{(r)}}(t) = \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^r = \sum_{n \geq 0} B_n^{(r)} \cdot \frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

où les nombres  $B_n^{(r)}$  sont connus comme les nombres de Bernoulli généralisés,

et pour  $r=1$ , les nombres  $B_n$  sont les nombres de Bernoulli ordinaires.

On a que la fonction  $\frac{t}{e^t - 1} - B_0 - B_1 t$  est paires alors  $B_{2k+1} = 0$  pour  $k=1, 2, 3, \dots$

Voici les premières valeurs des  $B_n$

$n$	0	1	2	4	6	8	10	12	14
$B_n$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{-1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{-691}{2730}$	$\frac{7}{6}$

On remarque que les nombres  $B_n$  sont dans  $\ominus$  (avec des signes alternés)

Exprimons les suites  $B_n^{(r)}(x)$  en utilisant le produit de Hurwitz

De (1) et (2), on tire

$$B_q^{(r)}(x) = B_q^{(r)} \omega x^q \tag{3}$$

pour  $r=1$

$$B_q(x) = B_q \omega x^q \tag{4}$$

De (3) et (4), on tire

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot B_j^{(r)} \cdot x^{n-j} \qquad B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot B_j \cdot x^{n-j}$$

Les premiers polynômes sont

$$B_0^{(r)}(x) = 1$$

$$B_1^{(r)}(x) = x - \frac{r}{2}$$

$$B_2^{(r)}(x) = x^2 - rx + \frac{r(3r-1)}{12}$$

$$B_3^{(r)}(x) = x^3 - \frac{3r}{2}x^2 + \frac{r(3r-1)}{4}x - \frac{r^2(r-1)}{8}$$

On remarque que les polynômes  $B_n^{(r)}(x) \in \Theta[x]$

La suite  $(B_n^{(r)}(x))_{n \geq 0}$  forme une famille d'Appell.

L'identité d'Appell (pour les suites d'Appell)

$$B_q^{(r)}(x+y) = B_q^{(r)} \omega (x+y)^q = B_q^{(r)} \omega x^q \omega y^q = B_q^{(r)}(x) \omega y^q = B_q^{(r)}(y) \omega x^q$$

donc,

$$B_n^{(r)}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot B_j^{(r)} \cdot x^{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(r)}(y) x^{n-j}$$

On a

$$\begin{aligned} g_{B_q^{(r)}(x)}(t) \cdot g_{B_q^{(s)}(y)}(t) &= \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^r \cdot e^{xt} \cdot \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^s \cdot e^{yt} \\ &= \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^{r+s} e^{(x+y)t} = g_{B_q^{(r+s)}(x+y)}(t) \end{aligned}$$

$$g_{B_q^{(r)}(x) \omega B_q^{(s)}(y)}(t) = g_{B_q^{(r+s)}(x+y)}(t)$$

d'où

$$B_q^{(r)}(x) \omega B_q^{(s)}(y) = B_q^{(r+s)}(x+y)$$

donc 
$$B_n^{(r+s)}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(r)}(x) B_{n-j}^{(s)}(y)$$

Pour  $r+s=0$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k^{(r)}(x) B_{n-k}^{(-r)}(y)$$

la **proposition V.1.1** donne les propriétés suivantes

$$B_q^{(r)}(x) = B_q^{(r)} \omega x^q \qquad B_q(x) = B_q \omega x^q$$

$\lambda = g_{B_q}(D) = \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{D^k}{k!}$  est un opérateur d'Appell associée à la suite  $B_q$

$$\left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r x^q = B_q^{(r)} \omega x^q = B_q^{(r)}(x) \qquad \text{et } \lambda x^q = B_q \omega x^q = B_q(x)$$

et

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(x)' &= n B_{n-1}^{(r)}(x), & B_0^{(r)}(x)' &= 0 \\ B_n(x)' &= n B_{n-1}(x) & B_0(x)' &= 0 \end{aligned}$$

Comme  $\lambda = \frac{D}{e^D - 1} \qquad \lambda(e^D - 1) = D$

et que  $e^D x^q = (1+x)^q = 1^q \omega x^q \qquad (e^D \text{ est l'opérateur de translation})$

$(e^D - 1)p(x) = p(x+1) - p(x) = \Delta p(x) \quad \text{où } \Delta \text{ opérateur aux différences finies}$

$$\lambda \Delta = \Delta \lambda = D$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$$

On dit que  $B_n(x)$  est solution de cette équation aux différences finies.

On observe que

$$(e^D - 1)B_n^{(r)}(x) = (e^D - 1) \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r x^n = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^{r-1} n x^{n-1} = n B_{n-1}^{(r-1)}(x)$$

donc,

$$B_n^{(r)}(x+1) - B_n^{(r)}(x) = n B_{n-1}^{(r-1)}(x)$$

L'identité,

$$g_{B_q^{(r)}}(-t) = \left( \frac{-t}{e^{-t} - 1} \right)^r \cdot e^{-tx} = \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^r \cdot e^{rt} \cdot e^{-tx} = \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^r \cdot e^{(r-x)t} = g_{B_q^{(r)}(r-x)}(t)$$

donc,

$$(-1)^r \cdot B_n^{(r)}(x) = B_n^{(r)}(r-x)$$

ou

$$B_n^{(r)}(-x) = (-1)^n \cdot B_n^{(r)}(r+x)$$

Le théorème de multiplication classique pour les polynômes de Bernoulli est

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

Rappelons aux chapitre III, on a un lien entre les nombres de Bernoulli et les nombres de Stirling

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(k, r) B_{n-k}^{(r)} &= e_r(n) \\ s(n, r) &= \binom{n}{r} \sum_{j=0}^{n-r} B_j^{(r)} s(n-r, j) \\ s(n, r) &= \binom{r-1}{n-1} B_{n-r}^{(r)} \end{aligned}$$

### V.2.2 Extension des polynômes de Bernoulli

On a  $\lambda = g_{B_q}(D) = \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{D^k}{k!}$  est l'opérateur d'Appell associée à la suite  $B_q$ .

$$\begin{aligned} \lambda x^{-n} &= \sum_{j \geq 0} B_j \frac{D^j x^{-n}}{j!} = \sum_{j \geq 0} B_j \frac{-n(-n-1) \cdots (-n-j+1)}{j!} x^{-n-j} \\ &= \sum_{j \geq 0} \binom{-n}{j} B_j \cdot x^{-n-j} = B_{-n}(x) \end{aligned}$$

Les séries de Bernoulli  $B_{-n}(x)$  peuvent être considérées comme l'extension des polynômes de Bernoulli.

Aussi  $g_{B_q^{(r)}}(D) = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r = \sum_{j \geq 0} B_j^{(r)} \frac{D^j}{j!}$

est l'opérateur d'Appell associée à la suite  $B_q^{(r)}$

$$\begin{aligned} g_{B_q^{(r)}}(D) \cdot x^{-n} &= \sum_{j \geq 0} B_j^{(r)} \frac{D^j x^{-n}}{j!} = \sum_{j \geq 0} B_j^{(r)} \frac{-n(-n-1) \cdots (-n-j+1)}{j!} x^{-n-j} \\ &= \sum_{j \geq 0} \binom{-n}{j} B_j^{(r)} x^{-n-j} = B_{-n}^{(r)}(x) \end{aligned}$$

$B_{-n}^{(r)}(x)$  est la série de Bernoulli d'ordre  $r$

$$\lambda = \frac{D}{e^D - 1}, \quad \Delta = e^D - 1 \text{ opérateur aux différences finies}$$

$$\lambda = \frac{D}{\Delta}, \quad \lambda \Delta = \Delta \lambda = D$$

De  $\lambda \Delta x^{-n} = D x^{-n}$

$$\begin{aligned} \lambda((x+1)^{-n} - x^{-n}) &= -n x^{-n-1} \\ \lambda(x+1)^{-n} - \lambda x^{-n} &= -n x^{-n-1} \end{aligned}$$

donc,

$$B_{-n}^{(r)}(x+1) - B_{-n}^{(r)}(x) = -n x^{-n-1}$$

Aussi,

$$(e^D - 1) B_{-n}^{(r)}(x) = (e^D - 1) \cdot \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r x^{-n} = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^{r-1} D x^{-n} = -n B_{-n-1}^{(r-1)}(x)$$

$$B_{-n}^{(r)}(x+1) - B_{-n}^{(r)}(x) = -n B_{-n-1}^{(r-1)}(x)$$

On a  $B_{-n}^{(r)}(x) = \lambda x^{-n}$

$$B_{-n}^{(r)}(x+y) = \lambda(x+y)^{-n} = \lambda \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k y^{-n-k}$$

$$B_{-n}^{(r)}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k B_{-n-k}^{(r)}(y)$$

La série de Bernoulli d'ordre  $r$   $B_{-n}^{(r)}(x)$  est défini par

$$B_{-n}^{(r)}(x) = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r x^{-n}$$

On a  $B_{-n}^{(r)}(x+y) = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r (x+y)^{-n}$

$$= \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^r \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k y^{-n-k}$$

$$B_{-n}^{(r)}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k B_{-n-k}^{(r)}(y)$$

Pour  $s \in \mathcal{L}, r \in \mathcal{L}$

$$B_{-n}^{(r+s)}(x+y) = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^{r+s} (x+y)^{-n} = \left( \frac{D}{e^D - 1} \right)^s \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k B_{-n-k}^{(r)}(y)$$

$$B_{-n}^{(r+s)}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} B_k^{(s)}(x) \cdot B_{-n-k}^{(r)}(y)$$

### V.3 Extension des polynômes d'Euler

#### V.3.1 Définitions et premières propriétés

Les polynômes d'Euler  $E_n^{(r)}(x)$  d'ordre  $r \in \mathcal{L}$  sont définis par la fonction génératrice

$$g_{E_q^{(r)}(x)}(t) = \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^r \cdot e^{xt} = \sum_{n \geq 0} E_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!} \tag{1}$$

On a  $E_n^{(0)}(x) = x^n$  et en prenant  $r=1$ , on retrouve les polynômes d'Euler  $E_n(x)$  ordinaires

$$g_{E_q(x)}(t) = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n \geq 0} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

Pour  $x=0$ , on retrouve

$$g_{E_q^{(r)}}(t) = \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^r = \sum_{n \geq 0} E_n^{(r)} \frac{t^n}{n!}$$

où  $E_n^{(r)}$  sont connus comme les nombres d'Euler généralisés.

Pour  $r=1$ , les nombres  $E_n$  ordinaires d'Euler

- Pour  $r=1, x = \frac{1}{2}, t=2u$

$$\sum_{n \geq 0} 2^n E_n \left(\frac{1}{2}\right) \frac{u^n}{n!} = \frac{2e^u}{e^{2u} + 1} = \frac{1}{\text{chu}}$$

et 
$$E_n = 2 E_n \left(\frac{1}{2}\right)$$

- Si on pose  $r=1, t=2iu$  et  $x=0$

$$\sum_{n \geq 0} 2^n E_n \frac{(iu)^n}{n!} = \frac{2}{e^{2iu} + 1} = 1 - i \tan u$$

- Pour  $r=1, t=2iu$  et  $x=\frac{1}{2}$

$$\sum_{n \geq 0} 2^n E_n \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(iu)^n}{n!} = \frac{2}{e^{2iu} + 1} e^{iu} = \frac{1}{\cos u}$$

Pour ces raisons les nombres  $2^n \cdot E_n$  et  $2^n \cdot E_n \left(\frac{1}{2}\right)$  sont connus comme les coefficients tangents et sécants.

On a que la fonction  $\frac{1}{\text{cht}}$  est paire alors  $E_{2k+1}=0$ , pour  $k=1,2,3,\dots$

Voici les premières valeurs des  $E_n$

$n$	0	1	2	4	6	8	10	12
$E_n$	1	0	-1	5	-61	1385	-50521	2702765

Le nombre  $E_n$  sont dans **9** de signe alterné

Les nombres d'Euler se retrouvent aussi dans le problème combinatoire suivant  
 Etant donné  $n$  objets numérotés  $1,2,3,\dots,n$ . Combien peut on former de permutations de ces objets de sorte que leurs numéros croissent et décroissent alternativement(on parle de permutation alternée)?[10]

Comme pour les polynômes de Bernoulli exprimons les suites  $E_n^{(r)}(x)$  en utilisant le produit de Hurwitz.

De (1) et (2), on tire

$$E_q^{(r)}(x) = E_q^{(r)} \omega x^q \tag{3}$$

Pour  $r=1$ ,

$$E_q(x) = E_q \omega x^q \tag{4}$$

de (3) et (4), on tire

$$E_n^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j^{(r)} x^{n-j} \quad , \quad E_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j x^{n-j}$$

Les premiers polynômes sont

$$E_0^{(r)}(x) = 1$$

$$E_1^{(r)}(x) = x - \frac{r}{2}$$

$$E_2^{(r)}(x) = x^2 - rx + \frac{r(r-1)}{4}$$

$$E_3^{(r)}(x) = x^3 - \frac{3r}{2}x^2 + \frac{3r(r-1)}{4}x - \frac{(r-3)r^2}{8}$$

On remarque que  $E_n^{(r)}(x)$  sont dans  $\Theta[x]$

La suite  $(E_n^{(r)}(x))_{n \geq 0}$  forme une famille d'Appell

L'identité d'Appell est

$$E_q^{(r)}(x+y) = E_q^{(r)} \omega(x+y)^q = E_q^{(r)} \omega x^q \omega y^q = E_q^{(r)}(x) \omega y^q = E_q^{(r)}(y) \omega x^q$$

donc

$$E_q^{(r)}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j^{(r)}(x) y^{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j^{(r)}(y) x^{n-j}$$

On a

$$g_{E_q^{(r)}(x)}(t) \cdot g_{E_q^{(s)}(x)}(t) = \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^r \cdot e^{xt} \cdot \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^s \cdot e^{yt} = \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^{r+s} \cdot e^{(x+y)t} = g_{E_q^{(r+s)}(x+y)}(t)$$

donc

$$E_q^{(r)}(x) \omega E_q^{(s)}(y) = E_q^{(r+s)}(x+y)$$

donc

$$E_n^{(r+s)}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j^{(r)}(x) \cdot E_{n-j}^{(r+s)}(y)$$

Pour  $r+s=0$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j^{(r)}(x) \cdot E_{n-j}^{(-r)}(y)$$

D'après la **proposition V.1.1**, on a la suite d'Appell

$$E_q^{(r)}(x) = E_q^{(r)} \omega x^q \quad \text{pour } r=1, \quad E_q(x) = E_q \omega x^q$$

$$\mu = g_{E_q}(D) = \frac{2}{e^D - 1} = \sum_{k \geq 0} E_k \frac{D^k}{k!} \text{ est un opérateur d'Appell associée à la suite } E_q$$

$$\left( \frac{2}{e^D + 1} \right)^r x^q = E_q^{(r)} \omega x^q = E_q^{(r)}(x) \quad \text{et} \quad \frac{2}{e^D + 1} \cdot x^q = E_q \omega x^q = E_q(x)$$

$$\text{et} \quad E_n^{(r)}(x)' = n E_{n-1}^{(r)}(x), \quad E_0^{(r)}(x)' = 0$$

$$\text{Comme} \quad \begin{aligned} \mu (e^D + 1) &= 2 \\ \mu (e^D + 1) x^n &= 2x^n \end{aligned}$$

$$\mu [(x+1)^n + x^n] = 2x^n$$

$$\text{donc,} \quad E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$$

On observe

$$(e^D + 1)E_n^{(r)}(x) = (e^D + 1) \left( \frac{2}{e^D + 1} \right)^r x^n = \left( \frac{2}{e^D + 1} \right)^{r-1} 2x^n = 2E_n^{(r-1)}(x)$$

$$E_n^{(r)}(x+1) + E_n^{(r)}(x) = 2E_n^{(r-1)}(x) \quad \text{pour} \quad r \geq 1$$

L'identité,

$$g_{E_q^{(r)}(x)}(-t) = \left( \frac{2}{e^{-t} + 1} \right)^r e^{-xt} = \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^r e^{(r-x)t} = g_{E_q^{(r)}(t-x)}(t)$$

$$\text{donc} \quad (-1)^n E_n^{(r)}(x) = E_n^{(r)}(r-x)$$

$$\text{ou} \quad E_n^{(r)}(-x) = (-1)^n E_n^{(r)}(r+x)$$

On trouve aussi une formule qui relie les deux familles de polynômes  $(B_n^{(r)}(x))_{n \geq 0}$  et  $(E_n^{(r)}(x))_{n \geq 0}$

$$\begin{aligned} g_{B_q^{(r)}(x)}(t) \cdot g_{E_q^{(r)}(x)}(t) &= \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)^r e^{xt} \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^r e^{yt} \\ &= \left( \frac{2t}{e^{2t} - 1} \right)^r e^{\frac{x+y}{2} 2t} = g_{B_q^{(r)}\left(\frac{x+y}{2}\right)}(2t) \end{aligned}$$

donc

$$B_q^{(r)}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2^q} B_q^{(r)}(x) \omega E_q^{(r)}(y)$$

$$B_n^{(r)}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(r)}(x) E_{n-j}^{(r)}(y)$$

En particulier,  $x=y$

$$B_n^{(r)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(r)}(x) E_{n-j}^{(r)}(x)$$

### V.3.2 Extension des polynômes d'Euler

Rappelons que  $\mu = g_{E_q}(D) = \frac{2}{e^D - 1} = \sum_{k \geq 0} E_k \frac{D^k}{k!}$

est l'opérateur d'Appell associée à la suite d'Euler  $E_q$

$$\mu(e^D + 1) = 2$$

$$\mu x^{-n} = E_{-n}(x) = \sum_{j \geq 0} E_j \frac{-n(-n-1) \cdots (-n-j+1)}{j!} x^{-n-j} = \sum_{j \geq 0} \binom{-n}{j} E_j x^{-n-j} = E_{-n}(x)$$

$E_{-n}(x)$  est la série d'Euler

$$g_{E_q^{(r)}}(D) = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^r = \sum_{j \geq 0} E_j^{(r)} \frac{D^j}{j!}$$

est l'opérateur d'Appell associée à la suite  $E_j^{(r)}$

$$\begin{aligned} g_{E_q^{(r)}}(D) x^{-n} &= \sum_{j \geq 0} E_j^{(r)} \frac{D^j x^{-n}}{j!} = \sum_{j \geq 0} E_j^{(r)} \frac{-n(-n-1) \cdots (-n-j+1)}{j!} \\ &= \sum_{j \geq 0} E_j^{(r)} \binom{-n}{j} x^{-n-j} = E_{-n}^{(r)}(x) \end{aligned}$$

$E_{-n}^{(r)}(x)$  est la série d'Euler d'ordre  $r$

Comme

$$\begin{aligned} \mu(e^D + 1) &= 2 \\ \mu(e^D + 1)x^{-n} &= 2x^{-n} \\ \mu((x+1)^{-n} + x^{-n}) &= 2x^{-n} \end{aligned}$$

Aussi,

$$(e^D + 1)E_{-n}^{(r)}(x) = (e^D + 1)\left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^r x^{-n} = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^{r-1} 2x^{-n} = 2E_{-n}^{(r-1)}(x)$$

$$E_{-n}^{(r)}(x+1) + E_{-n}^{(r)}(x) = 2E_{-n}^{(r-1)}(x)$$

On a  $E_{-n}(x) = \mu x^{-n}$  et  $E_{-n}(x+y) = \mu(x+y)^{-n}$

$$= \mu \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k y^{-n-k}$$

$$E_{-n}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k E_{-n-k}(y)$$

La série d'ordre r  $E_{-n}^{(r)}(x)$  est définie par

$$E_{-n}^{(r)}(x) = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^r x^{-n}$$

$$E_{-n}^{(r)}(x+y) = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^r (x+y)^{-n}$$

$$= \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^r \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k y^{-n-k}$$

$$E_{-n}^{(r)}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k E_{-n-k}^{(r)}(y)$$

Pour  $s \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}$

$$E_{-n}^{(r+s)}(x+y) = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^{r+s} (x+y)^{-n} = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^s \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} x^k E_{-n-k}^{(r)}(y)$$

$$E_{-n}^{(r+s)}(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} E_k^{(s)}(x) E_{-n-k}^{(r)}(y)$$

Maintenant étudions la convergence de la série de Bernoulli

$$B_{-n}(x) = \sum_{j \geq 0} \binom{-n}{j} B_j x^{-n-j}$$

dans  $\mathbb{V}_p$ .

Comme  $\mathbb{V}_p$  est complet, la série de Bernoulli  $B_{-n}(x)$  converge quand le terme général tend vers zéro ( $v_p$  la valuation p-adique du terme général tend vers l'infini)

Rappelons que les nombres de Bernoulli sont définis par

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \quad (1)$$

On a  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = \frac{-1}{2}$ ,  $B_{2k+1} = 0 \quad k \geq 1$

$B_{2k} = (-1)^{k+1} \dot{B}_k$  tous les  $\dot{B}_k$  étant alors positifs de sorte que l'on peut récrire (1) sous la forme

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \dot{B}_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\dot{B}_1 = \frac{1}{6}, \dot{B}_2 = \frac{1}{30}, \dot{B}_3 = \frac{1}{42}, \dot{B}_4 = \frac{1}{30}, \dot{B}_5 = \frac{5}{66}$$

Les valuations p-adiques  $v_p(\dot{B}_k)$  des  $\dot{B}_k$  possèdent les propriétés suivantes [14]

- i) Si  $p-1$  divise  $2k$ , alors  $v_p(\dot{B}_k) = -1$
- ii) Si  $p-1$  ne divise pas  $2k$ , alors  $v_p\left(\frac{\dot{B}_k}{k}\right) \geq 0$  (et a fortiori  $v_p(\dot{B}_k) \geq 0$ )

$$\text{Et } \binom{-n}{j} = (-1)^j \binom{n+j-1}{j}$$

Rappelons que pour  $n > 0$ ,  $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_h p^h$

$$Schiff_p(n) = S_p(n) = n_0 + n_1 + \dots + n_h$$

la somme des chiffres de ce développement, alors

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

On déduit,

$$v_p\left(\binom{-n}{j}\right) = \frac{S_p(j) + S_p(n-1) - S_p(n+j-1)}{p-1}$$

La valuation p-adique de terme général de  $B_{-n}(x)$

$$v_p\left(\binom{-n}{j} B_j x^{-n-j}\right) = v_p\left(\binom{-n}{j}\right) + v_p(B_j) - (n+j)v_p(x)$$

$$= v_p \left( \binom{-n}{j} \right) + v_p(B_j) - (n+j)v_p(x)$$

i) Si  $p-1$  divise  $2j$ ,

$$v_p \left( \binom{-n}{j} B_j x^{-n-j} \right) = v_p \left( \binom{-n}{j} \right) - 1 - (n+j)v_p(x)$$

On déduit que la série  $B_{-n}(x)$  converge pour  $v_p(x) < 0$

$$v_p \left( \binom{-n}{j} B_j x^{-n-j} \right) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$$

ii) Si  $p-1$  ne divise pas  $2j$ ,

$$v_p \left( \binom{-n}{j} B_j x^{-n-j} \right) \geq v_p \left( \binom{-n}{j} \right) - (n+j)v_p(x)$$

On déduit que la série  $B_{-n}(x)$  converge pour  $v_p(x) < 0$

$$v_p \left( \binom{-n}{j} B_j x^{-n-j} \right) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$$

Le domaine de convergence des séries de Bernoulli  $B_{-n}(x)$  contient

$D = \{ x \in \mathbb{V}_p, v_p(x) < 0 \} = \{ x \in \mathbb{V}_p, |x|_p > 1 \}$  (C'est à dire que nous nous donnons pas exactement le domaine de convergence)

## Bibliographie

- [1] **B.Benzaghou**, Extension des polynômes de Bell. Prépublication Institut de mathématique U.S.T.H.B.
  
- [2] **B.Benzaghou**, Extension des nombres de Stirling aux entiers négatifs. Prépublication Institut de mathématique U.S.T.H.B.
  
- [3] **B.Benzaghou**, Algèbre de Hurwitz et calcul ombraal. Prépublication Institut de mathématique U.S.T.H.B.
  
- [4] **B.Benzaghou**, La transformation de Mellin-Barsky formelle. Prépublication Institut de mathématique U.S.T.H.B.1999
  
- [5] **D.Branson**. An extension of Stirling numbers. The Fibonacci Quarterly, 34 (1996),213-223.
  
- [6] **D.Branson**, Stirling numbers and Bell numbers :  
Their rôle in combinatorics and probability.  
Math.Scientist 25, 1-31 (2000)
  
- [7] **S. Roman**, The harmonic logarithms and the binomials formula. J.Combinatorial theory.Serie A-63 143-163 (1993).
  
- [8] **S. Roman**, The umbral calculus. Acad. Press Inc 1984.
  
- [9] **S. Roman and G.C.Rota**. The umbral calculus. Advances in mathematics 27, 95-188 (1978)
  
- [10] **L.Comtet**. Analyse combinatoire, tomes 1 et 2, PUF 1970.
  
- [11] **J. Riordan**. Combinatorial identities. Jhon Wiley and sons Inc 1968.
  
- [12] **Alain M Robert**, A course in p-adic analysis GTM 198, Springer-Verlag (2000)
  
- [13] **Alexandre Junod**, Congruence par l'analyse p-adique et le calcul symbolique.Thèse de doctorat Université de Neuchâtel 12 juin 2003.
  
- [14] **Jean Pierre Serre**. Cours d'arithmétique PUF 1970