

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET**  
**DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**« HOUARI BOUMEDIENE »**  
**FACULTE DE MATHEMATIQUES**



**MEMOIRE**

*Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER*

**EN : MATHEMATIQUES**

*Spécialité : Recherche Opérationnelle : Génie Mathématiques*

*Par : MORSLI Cherif*

*Sujet :*

***SUR QUELQUES TECHNIQUES POST-OPTIMALES  
POUR LES PROBLEMES MULTI-OBJECTIFS***

*Soutenu le 11/11/2009, devant le jury composé de :*

<i>Mr- M. AÏDER</i>	<i>Professeur</i>	<i>U.S.T.H.B</i>	<i>Président</i>
<i>Mr- M. MOULAÏ</i>	<i>Professeur</i>	<i>U.S.T.H.B</i>	<i>Directeur de Thèse</i>
<i>Mr- A. BERRACHEDI</i>	<i>Professeur</i>	<i>U.S.T.H.B</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr- A. MEZGHICHE</i>	<i>Chargé de recherche</i>	<i>U.S.T.H.B</i>	<i>Invité</i>

## *\* Remerciements \**

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude au professeur Mustapha MOULAI pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique du présent mémoire. Je le remercie aussi pour les encouragements continuels qu'il n'a cessé de me prodiguer et grâce à qui ce modeste travail est arrivé à terme.

Je remercie vivement le professeur M. AIDER pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également au professeur A. H. BERRACHEDI et au Docteur A. H. MEZGHICHE pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie tous mes professeurs, et tous mes collègues pour leurs aides et soutiens et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail, particulièrement, mon ami Mouloud et mes collègues et amis de l'université de Béjaïa qui n'ont ménagé aucun effort pour venir à mon aide; je leurs souhaite succès et prospérité.

Je ne peut oublier de remercier tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements, particulièrement mon cher père et ma chère mère, mes frères et soeurs, mes beaux frères et aussi les familles GHARBI, BELMADANI, BACHIR, KADRI et MECHAHEB qu'ils en soient vivement remerciés.

*\* Dédicaces \**

*Je dédie ce modeste travail à :*

*\* Mes Parents ;*

*\* Tous Mes Enseignants ;*

*\* Tous Mes Proches ;*

*\* Tous Mes Amis ;*

***Cherif MORSLI.***

# Table des matières

Table des matières	i
Introduction Générale	1
<b>1 Programmation Linéaire</b>	<b>3</b>
Introduction . . . . .	3
1.1 Forme générale d'un programme linéaire . . . . .	3
1.2 Forme canonique et forme standard . . . . .	4
1.3 Bases, bases réalisables, solutions de base . . . . .	5
1.4 Caractérisation des bases optimales . . . . .	6
1.5 Algorithme du simplexe . . . . .	6
1.6 Dualité . . . . .	8
1.7 Programmation linéaire en nombres entiers [32, 34, 39] . . . . .	8
1.7.1 Formulation mathématique . . . . .	8
1.7.2 Coupe fractionnaire de Gomory [16] . . . . .	9
1.7.3 Génération de la Coupe de Gomory . . . . .	10
1.7.4 Méthodes par séparation et évaluation . . . . .	12
<b>2 Programmation Multi-objectif</b>	<b>14</b>
Introduction . . . . .	14
2.1 Problème d'optimisation multi-objectif . . . . .	14
2.2 Concepts de bases et terminologie . . . . .	16
2.2.1 Relation de dominance et solutions efficaces . . . . .	16
2.2.2 Point idéal . . . . .	17
2.2.3 Point anti-idéal . . . . .	17
2.2.4 Matrice des gains . . . . .	18
2.2.5 Point nadir . . . . .	18
2.2.6 Face . . . . .	19

2.2.7	Face efficace . . . . .	19
2.2.8	Convexité . . . . .	19
2.3	Les grandes approches multicritères . . . . .	19
2.3.1	Les approches a priori . . . . .	20
2.3.2	Les approches a posteriori . . . . .	21
2.3.3	Les approches interactives . . . . .	21
2.4	Classification de méthodes d'optimisation multi-objectifs . . . . .	22
2.4.1	Transformation du problème multi-objectifs en uni-objectif . . . . .	22
2.4.2	Les approches pareto . . . . .	22
2.4.3	Les approches non pareto . . . . .	22
2.5	Caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Optimisation Sur L'ensemble Des Solutions Efficaces</b>	<b>25</b>
	Introduction . . . . .	25
3.1	Résultats de base . . . . .	26
3.2	L'algorithme de recherche de points extrêmes non adjacents [5] . . . . .	28
3.2.1	L'algorithme . . . . .	29
3.3	Méthode d'Ecker et Song [14] . . . . .	31
3.3.1	L'algorithme d'Ecker et Song . . . . .	31
3.4	Méthode de Yamamoto [45] . . . . .	33
3.4.1	L'algorithme . . . . .	33
3.5	Méthode de Jesus. M. Jorge [23] . . . . .	34
3.5.1	L'algorithme . . . . .	35
3.5.2	illustration [23] . . . . .	35
3.6	Méthode de CHAABANE [10] . . . . .	38
3.6.1	Test d'efficacité . . . . .	39
3.6.2	L'algorithme . . . . .	40
3.6.3	Illustration . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Étude comparative</b>	<b>48</b>
	Introduction . . . . .	48
4.1	Méthode de Jesus M Jorge [24] . . . . .	48
4.1.1	Notation et résultat de base . . . . .	48
4.1.2	Formulation de l'algorithme . . . . .	49
4.1.3	Illustration . . . . .	50
4.2	Méthode de Chaabane [9] . . . . .	52

---

4.2.1	Résultats préliminaires . . . . .	53
4.2.2	L'algorithme . . . . .	54
4.2.3	Exemple . . . . .	57
4.3	Comparaison des deux méthodes . . . . .	61
	<b>Conclusion</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>66</b>

# Introduction Générale

La recherche opérationnelle est une nouvelle discipline des mathématiques qui a connu un développement considérable durant la seconde guerre mondiale. L'une de ses principales missions est d'aider les décideurs à prendre des décisions en vue d'une gestion efficace.

Les modèles traditionnels développés dans le cadre des méthodes quantitatives de gestion considéraient en général un critère unique, pour lesquels il existe des solutions optimales. Les algorithmes mis au point consistent alors à définir un moyen d'atteindre, le plus rapidement possible, une telle solution. Cependant, dans de nombreux cas, cette modélisation des problèmes ne traduit pas exactement la réalité à appréhender. Une autre façon de modéliser les problèmes a vu le jour, il y a maintenant une quarantaine d'années, permettant une représentation fidèle de la réalité. La nouveauté consiste à optimiser plusieurs critères éventuellement conflictuels simultanément. Aussi les chercheurs sont confrontés non plus à la recherche d'une solution optimale, mais à la recherche des conséquences d'une décision afin d'élaborer des procédures d'aide à la décision. Toute la difficulté de ce genre de problème réside dans le fait que le sens du "moins bien" pour un critère correspondant au sens du "mieux" pour un autre critère : il faut donc reconstruire un équilibre du système, appelé solution de compromis et dépendant des préférences du décideur.

Deux types de méthodologies sont possibles selon la nature du problème multicritère :

- (1) l'analyse multicritère, lorsque l'ensemble fini des solutions possibles est fourni explicitement.
- (2) la programmation mathématique multicritère ( ou optimisation multicritère), en sigle PMM, lorsque cet ensemble de cardinal, souvent infini, est défini implicitement par la satisfaction de contraintes.

Dans certaines situations voir [28], les décideurs n'ont pas besoins de connaître l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de programmation multi-objectifs mais uniquement des solutions efficaces qui réalisent l'optimum d'un objectif différent des objectifs déjà fixés. Ceci nous mène vers la recherche de la solution optimale d'un critère sur l'ensemble des solutions efficaces du problème multi-objectifs.

Une introduction générale, quatre chapitres, une conclusion et une bibliographie constituent le manuscrit de ce mémoire. Le premier chapitre est consacré au rappel des concepts de base de la programmation linéaire en variables continue et en variables discrètes. Le second chapitre traite la programmation multi-objectifs entre autre la caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces en passant en revue les principales approches de résolutions connues dans la littérature. Le troisième chapitre étudie quelques méthodes de résolution du problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces dans le cas continu et le cas discret. Le quatrième chapitre constituant le thème de notre travail présente une étude comparative qualitative de deux méthodes de résolution du problème abordé dans le troisième chapitre récemment publiées.

# Chapitre 1

## Programmation Linéaire

### Introduction

La programmation linéaire est l'une des plus importantes techniques d'optimisation utilisée en recherche opérationnelle. Ses développements théoriques ont été suggérés et accélérés par un grand nombre d'applications pratiques, dans le domaine de l'économie, de la gestion et autres.

Dans ce chapitre nous allons présenter les différentes notions de bases de la programmation linéaire et quelques méthodes de résolutions les problèmes de programmation linéaire en nombre entiers.

### 1.1 Forme générale d'un programme linéaire

Le problème général de la programmation linéaire est la recherche d'optimum (maximum ou minimum) d'une fonction linéaire de  $n$  variable  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) liée par des équations et/ou inéquations linéaires qu'on appelle contraintes. La formulation

automatique d'un tel programme étant la suivante :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimiser} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \geq b_k, & k \in K \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j = b_r, & r \in R \subseteq \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0, & i = \overline{1, l} \\ x_j \text{ quelconque,} & i = \overline{l+1, n}. \end{array} \right.$$

Où :

Optimiser pouvant signifier Minimiser ou maximiser selon le problème traité.

$c = (c_i)_{i=1, n} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $A = (a_{ij})_{i=1, m} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b = (b_i)_{i=1, m} \in \mathbb{R}^m$ .

les ensembles  $I$ ,  $K$  et  $R$  sont disjoints et  $I \cup K \cup R = \{1, \dots, m\}$ .

## 1.2 Forme canonique et forme standard

Les deux programmes linéaires :

$$(C) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & i = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (S) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & i = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

sont écrits sous **forme canonique** de max et sous **forme standard** respectivement.

**Remarque:** Tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique ou sous forme standard en utilisant les règles de transformation suivantes :

1. Minimisation  $\longleftrightarrow$  Maximisation :  $\min f(x) = -\max(-f(x))$ .

Pour minimiser  $z = cx$ , il suffit de maximiser  $w = -cx$  et de multiplier la valeur optimale de  $w$  par  $-1$  pour obtenir celle de  $z$ .

2. inéquation " $\geq$ "  $\longleftrightarrow$  inéquation " $\leq$ " :

$$ax \geq b \iff -ax \leq -b$$

3. équation  $\longrightarrow$  inéquations " $\leq$ " ; et " $\geq$ " :

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases} \iff \begin{cases} ax \leq b \\ -ax \leq -b \end{cases}$$

4. inéquation  $\longrightarrow$  équation : on ajoute une variable d'écart

$$ax \leq b \iff ax + s = b, s \geq 0$$

$$ax \geq b \iff ax - s = b, s \geq 0$$

5. variable de signe quelconque  $\longrightarrow$  variable non négative : une variable de signe quelconque  $x$  peut toujours être remplacée par deux variables non négatives  $x'$  et  $x''$

$$x \in R \implies \begin{cases} x = x' - x'' \\ x', x'' \geq 0 \end{cases}$$

### 1.3 Bases, bases réalisables, solutions de base

On considère le programme linéaire :

$$(P) \begin{cases} \text{Max} & z = cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Où :  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tel que le system  $Ax = b$  soit libre.

On appelle **base** un sous ensemble  $B \subset \{1, \dots, n\}$  d'indices de colonnes de  $A$  tel que  $A^B$  soit carré non singulière. Le complémentaire de  $B$  dans  $\{1, \dots, n\}$  est l'ensemble d'indices **hors base** associé noté  $N$ .

Le system de contrainte et la fonction objectif peuvent s'écrire de manière équivalente :  $Ax = b \iff A^B x_B + A^N x_N = b$  et  $cx = c_B x_B + c^N x_N$ . Ainsi toute solution de  $(P)$  vérifie :  $x_B + (A^B)^{-1} A^N x_N = (A^B)^{-1} b$  et on constate que si on fixe la valeur des variables hors bases  $x_N$ , on détermine celle des  $x_B$ .

On appelle solution de base (associée à  $B$ ), la solution particulière obtenue en fixant  $x_N$  à  $0_{R^N}$  d'où  $x_B = (A^B)^{-1} b$ . Une telle solution est dite **réalisable** si  $x_B \geq 0$ . Une solution de base est dite **dégénérée** si  $x_B$  a des composantes nulles.

## 1.4 Caractérisation des bases optimales

Etant donné une base réalisable  $B$  du programme linéaire  $(P)$ , le programme linéaire :

$$(PC) \begin{cases} x_B + (A^B)^{-1}A^N x_N = (A^B)^{-1}b \\ \hat{c}_N x_N = z - \pi b \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases}$$

où :

- ◇  $\pi = c_B(A^B)^{-1}$  est dit vecteur multiplicateur relatif à la base  $b$ .
- ◇  $\hat{c} = c - \pi A$  est dit vecteur coût relatif à la base  $B$ .

est dit forme canonique de  $(P)$  par rapport à la base  $B$ .

**Théorème 1.4.1.** Si le vecteur coût  $\hat{c}$  relatif à une base réalisable  $B$  est négatif ou nul, la solution de base correspondante est solution optimale de  $(P)$ . La base  $B$  est alors dite **base optimale**.

## 1.5 Algorithme du simplexe

L'algorithme du simplexe introduit en 1947 par G.B. Dantzig [12], décrit un moyen intelligent de se déplacer d'une solution de base admissible à une autre améliorant la valeur de la fonction objectif, jusqu'à trouver une solution optimale en un nombre fini d'étapes. Malgré une complexité théorique dans le pire des cas exponentielle, il permet de résoudre la plus part des problèmes rapidement.

Soit à résoudre le problème linéaire :

$$\begin{cases} \text{Max} & z = cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

On définit l'application linéaire  $col$  par :

$$\begin{aligned} col : \{1, \dots, m\} &\longrightarrow \{1, \dots, n\} \\ i &\longrightarrow col(i) = \text{indice de la variable de base associé à la ligne } i. \end{aligned}$$

1. **Ecriture canonique.** Soit  $B$  une base réalisable de départ, alors l'écriture cano-

nique de  $(P)$  par rapport à  $B$  donne :

1	0	...	0	$\hat{A}^N = (A^B)^{-1}A^N$	$\hat{b} = (A^B)^{-1}b$
0	...		:		
:		...	0		
0	...	0	1		
0	...	0	0	$\hat{c}_N = c_N - c_B(A^B)^{-1}A^N$	$z - c_B(A^B)^{-1}b$

TAB. 1.1 – Écriture canonique de  $(P)/B$

2. **Choix de la colonne pivot.** (variable à entrer en base)

- (a) Si  $\forall j \in N, \hat{c}_j \leq 0$ , alors **STOP** (la solution optimale est trouvée).
- (b) Sinon, choisir une colonne  $s$  telle que  $\hat{c}_s = \max \hat{c}_j$ .

3. **Choix de la ligne pivot.** (Variable à sortir de la base)

- (a) Si  $\forall i = \overline{1, m}, \hat{A}_i^s < 0$ , alors **STOP** (la fonction objectif n'est pas bornée).
- (b) Sinon, choisir une ligne  $r$ , telle que:

$$\frac{\hat{b}_r}{\hat{A}_r^s} = \min_{i=\overline{1, m}} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{A}_i^s} / \hat{A}_i^s < 0 \right\}$$

$$B = B \cup \{s\} / col(r)$$

4. **Opération pivot.** (Passage au tableau suivant) : Soient  $L_1, L_2, \dots, L_m$  les  $m$  premières lignes du tableau (Tab. 1.1) correspondants au contraintes du problème et  $L_{m+1}$  la  $(m + 1)^{eme}$  ligne correspondant à la fonction objectif, alors les lignes du nouveau tableau sont calculées ainsi :

(a)  $L_i \leftarrow L_i - \frac{L_r \hat{A}_i^s}{\hat{A}_r^s}, i = \overline{1, m}, i \neq r$

(b)  $L_{m+1} \leftarrow L_{m+1} - \frac{L_r \hat{c}_s}{\hat{A}_r^s}$

(c)  $L_r \leftarrow \frac{L_r}{\hat{A}_r^s}$

**Retour à (1)**

## 1.6 Dualité

Les deux programmes linéaires:

$$(P) \begin{cases} \text{Max} & z = cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Dual} \quad (D) \begin{cases} \text{Min} & w = yb \\ & yA \geq c \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Sont dit **duaux** l'un de l'autre.

Si on a une base  $B$  alors:  $y(A^B, A^N) \geq (c_B, c_N) \implies \begin{cases} yA^B \geq c_B \\ yA^N \geq c_N \end{cases}$  On peut choisir  $y$  tel que  $yA^B = c_B$  en prenant  $y = c_B(A^B)^{-1}$

Si de plus on a:

$$c_B(A^B)^{-1}A^N \geq c_N$$

C'est-à-dire  $\hat{c}_j \leq 0$  pour tout  $j$  indice de variable hors base. Ca signifie donc que  $B$  réalise l'optimum si  $B$  est dual réalisable.

Cette remarque donne lieu à l'*algorithme dual du simplexe* qui part d'une situation où  $\hat{c}_j \leq 0, \forall j \in N$  mais où la base n'est pas admissible (des  $b_i$  sont  $< 0$ ). L'algorithme consiste à choisir un pivot qui rend les  $b_i \geq 0$  tout en maintenant les  $\hat{c}_j \leq 0$

## 1.7 Programmation linéaire en nombres entiers [32, 34, 39]

### 1.7.1 Formulation mathématique

Considérons le programme linéaire:

$$(P) \begin{cases} \text{Max} & z = cx \\ & x \in S \end{cases} \quad (1.1)$$

Où:

- ◇  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$
- ◇  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^{1 \times n}$
- ◇  $S$  est supposé borné et non vide.

Une solution optimale de  $(P)$  comportera généralement des composants fractionnaires. Pour certains problèmes une telle solution n'est pas admissible. On devra dans ce cas imposer aux variables des contraintes supplémentaires (dites contraintes d'intégrité):

$x_j$  entier pour  $j = \overline{1, n}$ .

Le problème deviendra donc:

$$(Q) \begin{cases} \text{Max} & z = cx \\ & x \in D \end{cases} \quad (1.2)$$

Où:  $D = \{x \in \mathbb{Z}^n / Ax = b, x \geq 0\}$  avec  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des nombres entiers relatifs. Un tel problème est appelé *programme linéaire en nombres entiers*.

Les deux principales familles de méthodes actuellement connues pour résoudre les problèmes de programmation linéaire en nombre entiers sont les *méthodes de coupes* et les *méthodes arborescentes*.

### 1.7.2 Coupe fractionnaire de Gomory [16]

Soit à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$(Q) \begin{cases} \text{Max} & z = cx \\ & x \in D \end{cases}$$

Dont le problème relaxé est:  $(P) \text{Max}\{z = cx / x \in S\}$ .

Dans cette méthode le programme linéaire  $(P)$  est résolu en première étape en utilisant la méthode du simplexe. À l'optimum on a les conditions: (1)  $\hat{c} \leq 0$  et (2)  $\hat{b} \geq 0$  qui sont vérifiées. Si de plus (3)  $\hat{b}$  est entier, alors la solution optimale de  $(P)$  est aussi optimale pour  $(Q)$ . Sinon, une ou plus des variables de base soumises à l'intégrité sont à valeurs fractionnaires.

L'idée principale de l'algorithme de Gomory est de maintenir les conditions (1) et (2) satisfaites et de rajouter des contraintes dites *coupes de Gomory* une par une jusqu'à ce que la troisième condition soit vérifiée.

**Définition 1.1.** Etant donnée un programme linéaire en nombres entiers  $(Q)$ , On dit que l'inéquation

$$\sum \alpha_j x_j \leq \beta$$

est valide si elle est satisfaite par tout point de  $D$ . Une coupe est une inéquation valide qui n'est pas satisfaite pour tout point de  $S$ .

**Définition 1.2.** Soit  $\alpha$  un scalaire quelconque, on désigne par :

- ◇  $[\alpha]$  le plus grand entier inférieur ou égale à  $\alpha$ .
- ◇  $\lceil \alpha \rceil$  le plus petit entier supérieure ou égale à  $\alpha$ .
- ◇  $\langle \alpha \rangle = \alpha - [\alpha]$ .

$\langle \alpha \rangle$  est appelée la partie fractionnaire de  $\alpha$  et  $[\alpha]$  sa partie entière.

### 1.7.3 Génération de la Coupe de Gomory

Soit le tableau optimal issu de la résolution de  $(P)$  par la méthode du simplexe où la solution optimale est supposée non entière (voir Tab. 1.2). Sans perte de généralité, on suppose qu'à l'optimum, il y a un total de  $(m + n)$  variables où  $m$  représente le nombre de variables de base notées  $x_i, i = \overline{1, m}$  et  $n$  représente le nombre de variables hors base notées  $y_j, j = \overline{1, n}$ .

$vb$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_m$	$y_1$	$y_2$	...	$y_j$	...	$y_n$	$\hat{b}_i$
$x_1$	1	0	...	0	...	0	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1j}$	...	$\hat{a}_{1n}$	$\hat{b}_1$
$x_2$	0	1	...	0	...	0	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2j}$	...	$\hat{a}_{2n}$	$\hat{b}_2$
⋮													
$x_i$	0	0	...	1	...	0	$\hat{a}_{i1}$	$\hat{a}_{i2}$	...	$\hat{a}_{ij}$	...	$\hat{a}_{in}$	$\hat{b}_i$
⋮													
$x_m$	0	0	...	0	...	1	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	...	$\hat{a}_{mj}$	...	$\hat{a}_{mn}$	$\hat{b}_m$
$-z$	0	0	...	0	...	0	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	...	$\hat{c}_j$	...	$\hat{c}_n$	$z^*$

TAB. 1.2 – Tableau optimal

À partir du tableau optimal, choisir une variable de base dont la valeur est fractionnaire, soit  $x_i$ . La  $i^{eme}$  équation du tableau est donnée par :

$$x_i + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} y_j = \hat{b}_i. \tag{1.3}$$

En décomposant chaque coefficient en la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire, on obtient :

$$x_i + \sum_{j=1}^n \langle \hat{a}_{ij} \rangle y_j + \sum_{j=1}^n [\hat{a}_{ij}] y_j = \langle \hat{b}_i \rangle + [\hat{b}_i]$$

puisque  $0 \leq \langle \hat{a}_{ij} \rangle < 1$ , ceci implique:

$$x_i + \sum_{j=1}^n [\hat{a}_{ij}] y_j \leq \langle \hat{b}_i \rangle + [\hat{b}_i]$$

Or le nombre gauche est entier et  $0 < \langle \hat{b}_i \rangle < 1$ . Par conséquent cette dernière équation implique :

$$x_i + \sum_{j=1}^n [\hat{a}_{ij}] y_j \leq [\hat{b}_i]$$

et en soustrayant cette dernière inéquation de (1.3), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \langle \hat{a}_{ij} \rangle y_j \geq \langle \hat{b}_i \rangle. \tag{1.4}$$

Qui est bien valide, de plus (1.4) n'est pas satisfaite par la solution optimale de (P), donc (1.4) est bien une coupe.

En ajoutant une variable d'écart  $s_i$  à (1.4), et en posant  $\alpha_{ij} = \langle \hat{a}_{ij} \rangle$  et  $\beta_i = \langle \hat{b}_i \rangle$  la coupe de Gomory devient :

$$-\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j + s_i = -\beta_i. \tag{1.5}$$

Une fois la coupe est générée, les coefficients (1.5) sont insérés dans une nouvelle ligne du tableau (1.2). Le nouveau tableau est donné par :

$vb$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_i$	$\dots$	$x_m$	$s_i$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_j$	$\dots$	$y_n$	$\hat{b}_i$
$x_1$	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	$\dots$	$\hat{a}_{1j}$	$\dots$	$\hat{a}_{1n}$	$\hat{b}_1$
$x_2$	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	0	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	$\dots$	$\hat{a}_{2j}$	$\dots$	$\hat{a}_{2n}$	$\hat{b}_2$
$\vdots$														
$x_i$	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	0	$\hat{a}_{i1}$	$\hat{a}_{i2}$	$\dots$	$\hat{a}_{ij}$	$\dots$	$\hat{a}_{in}$	$\hat{b}_i$
$\vdots$														
$x_m$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	0	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	$\dots$	$\hat{a}_{mj}$	$\dots$	$\hat{a}_{mn}$	$\hat{b}_m$
$s_i$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	1	$-\alpha_{i1}$	$-\alpha_{i2}$	$\dots$	$-\alpha_{ij}$	$\dots$	$-\alpha_{in}$	$-\beta_i$
$-z$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\dots$	$\hat{c}_j$	$\dots$	$\hat{c}_n$	$z^*$

TAB. 1.3 – Tableau augmenté

Pour ce nouveau programme, la condition (1) est toujours satisfaite mais pas la condition (2). On effectue donc une ou plusieurs itérations de l'algorithme dual du simplexe, jusqu'à ce que la condition (2) soit satisfaite. Si  $\hat{b}$  est entier, la solution courante est optimale pour (Q), sinon on recommence le processus.

### 1.7.4 Méthodes par séparation et évaluation

La méthode par séparation et évaluation (*Branch & Bound*) est aussi utilisée pour la résolution des problèmes de programmation linéaire en nombre entiers. Elle a été à l'origine développée par Land et Doig [25] pour résoudre un problème de programmation linéaire en nombres entiers et a été modifiée plus tard par Dakin [11]. Une approche naïve pour résoudre un problème de programmation linéaire en nombres entiers est d'énumérer tous les points entiers réalisables du problème, d'évaluer la fonction objectif en chaque point et d'identifier celui qui a la meilleure valeur de fonction objectif. Bien qu'une recherche si approfondie dans l'espace des solutions réalisables soit simple de mettre en œuvre, elle sera très coûteuse en terme de temps de calcul même pour des problèmes de taille réduites.

La méthode par séparation et évaluation peut être considérée comme une méthode d'énumération raffinée dans laquelle plusieurs points entiers réalisables sont écartés sans les évaluer. Son principe repose sur trois notions distinctes : séparation de l'ensemble principal, relaxation des sous problèmes et stérilisation de l'arbre de recherche.

- 1 **Séparation** : Considérons le problème de programmation linéaire en nombres entiers  $(Q)$  dont l'espace des solutions réalisables est notés  $D(Q)$ . L'ensemble de sous problèmes  $(Q_1), (Q_2), \dots, (Q_n)$  est une séparation de  $(Q)$  si :

$$D(Q) = \bigcup_i D(Q_i) \text{ et } \forall i, j \text{ avec } i \neq j, D(Q_i) \cap D(Q_j) = \emptyset.$$

où un  $Q_i$  peut être vide.

- 2 **Relaxation** : Le domaine  $S$  des solutions réalisables de la relaxation  $(P)$  du problème  $(Q)$  contient celui de  $(Q)$  ce qui implique que :

- (a) Si  $(P)$  n'est pas réalisable, alors  $(Q)$  l'est aussi ;
- (b) La solution optimal de  $(P)$  est une borne supérieure de la solution optimale de  $(Q)$ ;
- (c) Une solution optimale de  $(P)$  réalisable pour  $(Q)$  est une solution optimale de  $(Q)$ .
- (d)  $Q_k$  est vide.

- 3 **Stérilisation** : Soit  $(Q_k)$  un sous problème de  $(Q)$  susceptible de mener à la solution

optimale de  $(Q)$ .

Trois critères peuvent autoriser à stériliser  $(Q_k)$  :

- (a) la solution optimale de la relaxation de  $(Q_k)$  est réalisable, donc optimale pour  $(Q_k)$ . Si en plus son évaluation est supérieure à  $U$ , alors cette dernière peut être actualisée.;
- (b) L'évaluation de la solution optimale de la relaxation de  $(Q_k)$  est inférieure à celle de la meilleure solution réalisable trouvées antérieurement (soit  $U$  son évaluation) ;
- (c) La relaxation de  $(Q_k)$  n'est pas réalisable

Un problème de programmation linéaire en nombre entiers  $(Q)$ , peut avoir plusieurs solutions optimales, on parle dans ce cas de solutions alternatives dont la définition est la suivant :

**Définition 1.3.** Soit  $x^*$  une solution optimale du problème  $(Q)$ . Une solution réalisable  $x' \in D$  est dite alternative à  $x^*$  si  $cx' = cx^*$ .

# Chapitre 2

## Programmation Multi-objectif

### Introduction

La programmation mathématique multi-objectifs est conçue pour résoudre des problèmes mathématiques qui modélisent des situations réelles qui, généralement sont décrites par plusieurs critères. D'où on doit nécessairement optimiser plusieurs objectifs simultanément. Dans ce cas on ne parle plus d'optimum mais de solution pareto optimale ou solutions efficaces, auquel cas, on ait face à une grande variété de solutions et l'on doit choisir celle qui présente le meilleure compromis.

Dans ce chapitre nous allons donner la terminologie utilisée dans la programmation mathématique multi-objectif et rappeler certaines notions fondamentales, ainsi qu'une présentation sommaire des grandes approches multicritères et la caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces.

### 2.1 Problème d'optimisation multi-objectif

Un problème multi objectif ou multicritère peut être défini comme étant un problème de décision en présence de critères multiples et souvent conflictuels. Ces problèmes consistent à optimiser  $r$  critères simultanément ( $r \geq 2$ ) qui sont des fonctions à valeurs réelles explicites des variables de décision. Le domaine sur lequel les alternatives admissibles prennent leurs valeurs est continu.

Ce problème est défini généralement par :

$$\begin{aligned} \text{''optimiser''} \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)) \\ \text{s.c} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{2.1}$$

$x$ , est caractérisé par un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  ( $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ),

$S$ , l'espace de décision,  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$ ,

$f_k (k = 1, \dots, r)$  et  $g_i (j = 1, \dots, m)$  des fonctions à valeurs réelles du vecteur de décision  $x$ .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de programmation linéaire multi-objectifs (MOLP/ Multiple Objective Linear Programming) que l'on définit lorsque les  $r$  critères et les contraintes dépendent linéairement de  $x$  :

$$\begin{aligned} \text{''optimiser''} \quad & Z_k(x) = C_k x \quad k = 1, \dots, r \\ \text{s.c} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

où:

$C_k$  une matrice de dimension  $(1 \times n)$

$S$  un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$ , défini par  $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ , avec  $A, x, b$  sont des matrices de dimensions  $(m \times n), (n \times 1), (m \times 1)$ .

## Notations

Dans la suite de ce travail, nous conservons les notations suivantes :

- toute optimisation se rapporte à une maximisation, sans perte de généralité,
- $r$ , le nombre de critères,
- $x$ , le vecteur des variables de décisions,
- $Z_k(\cdot)$ , le  $k^{eme}$  critère,  $Z_k : S \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $k = 1, \dots, r$ ,
- $Z(\cdot)$ , le vecteur des fonctions critères,
- $S$ , l'ensemble des solutions qui décrivent les décisions possible, espace de décision,  $S \subseteq \mathbb{R}^r$ ,

- $F$ , espace des critères admissibles (l'ensemble des images de  $x$  appartenant à  $S$ ),  
 $F \subseteq \mathbb{R}^r$ .

Nous utilisons la notation  $Z(x) \geq Z(y)$  comme abréviation de  $Z_k(x) \geq Z_k(y)$  pour tout  $k = 1, \dots, r$ .

Le problème (2.2) peut être reformulé, d'une manière équivalente, comme suit :

$$\begin{aligned} \text{"max"} \quad & Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x)) \\ \text{s.c} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par la suite, nous allons voir que ces problèmes ont en générale plusieurs solutions car la définition d'un optimum ne peut être établie dans le cas de problèmes multi-objectifs.

## Problématique

La difficulté de ces problèmes vient du fait que, contrairement aux problèmes mono-objectifs, il n'existe plus de relation d'ordre entre toutes les solutions admissibles (un problème de rangement n'aura pas une solution objective) et donc plus de notion d'optimalité (à moins qu'une solution soit optimale pour toutes les fonctions objectifs, ce qui est rarement le cas). Dans le cas des problèmes multi-objectifs, elles sont remplacées par les notions de dominance et de Pareto optimalité (efficacité).

Résoudre un problème multicritère consiste à aider le décideur à maîtriser les données (souvent complexes) de son problème et de progresser vers une solution. Celle-ci est souvent appelée solution du *meilleur compromis*.

## 2.2 Concepts de bases et terminologie

### 2.2.1 Relation de dominance et solutions efficaces

**Définition 2.2.1. (Dominance).** Soient deux vecteurs critères  $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^r$ . On dit que  $Z_1$  domine  $Z_2$  si et seulement si  $Z_1 \geq Z_2$  et  $Z_1 \neq Z_2$  (ie:  $z_1^i \geq z_2^i$  pour tout  $i, i = 1, \dots, r$ , et  $z_1^i > z_2^i$  pour au moins un  $i$ ).

**Définition 2.2.2. (Dominance forte).** Soient deux vecteurs critères  $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^r$ . On dit que  $Z_1$  domine  $Z_2$  si et seulement si  $z_1^i > z_2^i, \forall i, i = 1, \dots, r$ .

Si  $Z_1$  domine fortement  $Z_2$ , alors  $Z_1$  est meilleur que  $Z_2$  sur tous les critères.

**Définition 2.2.3. (Efficacité).** Une solution  $x^*$  est une solution efficace du problème (2.2) s'il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $Z(x)$  domine  $Z(x^*)$ .

Un point est efficace si son image dans l'espace des critères est un vecteur critère non dominé.

Cela signifie que tout gain sur un critère entraîne nécessairement une perte sur au moins un autre.

**Définition 2.2.4. (Efficacité faible).** Une solution  $x^*$  est une solution faiblement efficace du problème (2.2) s'il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $Z(x) > Z(x^*)$ .

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère n'est pas fortement dominé.

**Définition 2.2.5. (Efficacité forte).** Une solution  $x^*$  est une solution fortement efficace du problème (2.2) s'il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $x \neq x^*$  et  $Z(x) \geq Z(x^*)$ .

Une solution  $x$  est fortement efficace s'il n'existe pas une autre solution telle que le vecteur critère, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de  $x$ .

Nous ne parlerons donc plus de solution optimale, mais d'un *ensemble de solutions efficaces*. L'ensemble des solutions efficaces du problème (2.2) est noté  $E$ . La projection dans l'espace des objectifs de cet ensemble  $E$  décrit une frontière communément appelée *frontière efficace*.

En outre, deux points caractéristiques ne correspondant généralement à aucune solution admissible sont aussi souvent utilisés : le *point idéal* et le *point nadir*.

## 2.2.2 Point idéal

**Définition 2.2.6.** Le point idéal est, dans  $\mathbb{R}^r$ , le point de coordonnées  $(Z_1^*, \dots, Z_r^*)$  avec

$$Z_k^* = \max_{x \in S} Z_k(x), \quad k = 1, \dots, r.$$

On notera par  $X_k^*$  l'ensemble des points  $x_k^*$  qui maximisent  $Z_k$ .

## 2.2.3 Point anti-idéal

**Définition 2.2.7.** Le point anti-idéal est, dans  $\mathbb{R}^r$ , le point de coordonnées  $(Z_{1*}, \dots, Z_{r*})$  avec

$$Z_{k*} = \min_{x \in S} Z_k(x), \quad k = 1, \dots, r.$$

## 2.2.4 Matrice des gains

**Définition 2.2.8.** Nous appelons matrice des gains  $G$ , une matrice de dimension  $r \times r$  dont les colonnes représentent les performances de  $r$  points  $x_1^*, \dots, x_r^*$ , suivant tout les critères.

$$G_{ij} = Z_i(x_j^*), \quad i, j = 1, \dots, r.$$

En particulier,

$$G_{ii} = Z_i^*$$

Remarquons que la matrice des gains n'est unique que si chaque critère atteint son maximum fini en un seul point.

## 2.2.5 Point nadir

**Définition 2.2.9.** Le point nadir est, dans  $\mathbb{R}^r$ , le point de coordonnées  $(Z_1^{nad}, \dots, Z_r^{nad})$  avec

$$Z_k^{nad} = \min_j Z_k(x_j^*), \quad k = 1, \dots, r.$$

La figure (2.1) illustre ces différents points caractéristiques dans l'espace des objectifs sur un exemple de problème de maximisation biobjectif.

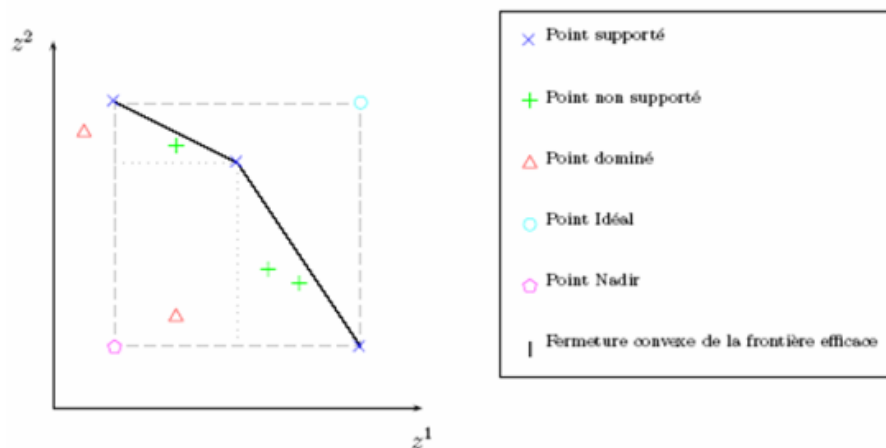


FIG. 2.1 – Points caractéristiques d'un problème de maximisation bi-objectif.

### 2.2.6 Face

**Définition 2.2.10.** Soit  $S$  un polyèdre, soit  $H$  un hyperplan,  $H = \{x/d^T x = \alpha\}$  Soit  $F$ , un sous ensemble non vide de  $S$  tel que  $F = S \cap H$ .  $F$  est une face de  $S$ , alors

$$\forall x \in S : d^T x \leq \alpha.$$

### 2.2.7 Face efficace

**Définition 2.2.11.** Une face  $F$  de  $S$  est dite efficace, si tout  $x \in F$  est efficace.

### 2.2.8 Convexité

**Définition 2.2.12.** L'ensemble  $\chi$  est dit convexe si tout segment joignant deux points quelconques de  $\chi$  est inclus dans  $\chi$ . La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, certaines méthodes sont dans l'incapacité de résoudre des problèmes non convexes de manière optimale.

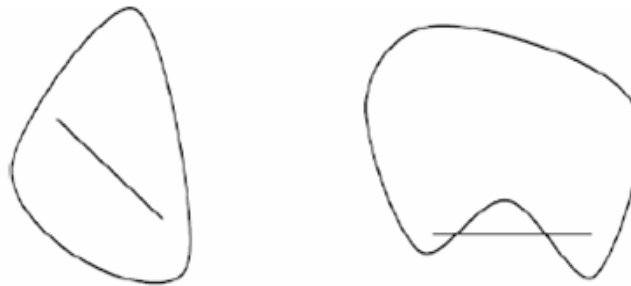


FIG. 2.2 – Espace convexe (à gauche) et non convexe (à droite)

## 2.3 Les grandes approches multicritères

Dans le cas général, la résolution de problèmes d'optimisation multicritères qui vise à établir un compromis entre plusieurs critères, met en œuvre des mécanismes d'optimisation ainsi que des mécanismes de prise de décision dans lesquels intervient un décideur humain. Le domaine de prise de décision distingue à cet égard trois schémas possibles de combinaison de ces deux mécanismes complémentaires qui correspondent à des situations et des problématiques différentes [42], [40].

### 2.3.1 Les approches a priori

Dans lesquelles le décideur intervient en amont du processus d'optimisation, pour définir la fonction d'agrégation des différents critères. Dans ce type de méthodes, le problème de résolution du problème multi-objectifs est ramenée à la résolution d'un problème mono-objectif. Tout décideur essaye implicitement de maximiser une fonction, appelée une fonction d'utilité ou d'agrégation,

$$u = u(Z_1, \dots, Z_r)$$

$$u : \mathbb{R}^r \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^r : \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1, \lambda_k > 0 \right\},$$

qui agrège tout les points de vue à prendre en compte en leur attribuant d'éventuels poids  $\lambda_k$  qui caractérisent l'importance relative des  $r$  critères, fixés a priori. Pour cela il faut que tous les objectifs représentent des grandeurs d'unités comparables. Le problème multicritères (2.2) est donc remplacé par un problème unicritère dont la fonction économique est la fonction d'utilité :

$$\begin{aligned} \max \quad & u(Z, \lambda) \\ & Z \in F \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le modèle le plus couramment utilisé est le modèle additif

$$u(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^r u_i(Z_i, \lambda_i)$$

Avec  $u_i$  fonction de mise à l'échelle du critère  $i$ .

**Quelques formes analytiques de  $u$ :** Les fonctions d'utilité les plus employées sont :  
-somme pondérée des objectifs (particulièrement utilisée dans le cas linéaire):

$$u_1(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda_k Z_k, \quad \lambda \in \Lambda,$$

ou bien,

$$u_2(Z, \lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda_k | Z_k - Z_k^* |, \quad \lambda \in \Lambda, Z_k^* \text{ est le point idéal}$$

-norme  $L_p$  pondérée :

$$u_3(Z, \lambda) = \left( \sum_{i=1}^r \lambda_k |Z_k - Z^*|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \lambda \in \Lambda, \quad p \in \mathbb{Z}_0^+,$$

-norme pondéré de Tchebycheff :

$$u_4(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq r} \{ \lambda_k |Z_k - Z^{ref}| \}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

-norme pondérées augmentée de Tchebychev :

$$u_5(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq r} \{ \lambda_k |Z_k - Z^{ref}| \} + \rho \sum_{i=1}^r \lambda_k |Z_k - Z^{ref}|, \quad \rho > 0, \lambda \in \Lambda,$$

$Z^{ref} = (Z_1^{ref}, \dots, Z_r^{ref})$  les buts qu'on désire atteindre pour chaque objectif (valeurs cibles).

Il est à noter que cette technique suppose en outre que les jugements soient transitifs, d'où l'appellation *agrégation complète transitive* [33]. D'autres l'appellent encore *Optimisation paramétrique avec articulation a posteriori des préférences* (Vincke et Vanderpooten)[41].

### 2.3.2 Les approches a posteriori

Elles font intervenir le décideur en aval du processus d'optimisation, en lui présentant toutes les solutions efficaces sur lesquelles il exerce son choix final.

### 2.3.3 Les approches interactives

Une méthode interactive consiste en une alternance d'étapes de calculs par l'analyste ou l'ordinateur et d'étapes de dialogue avec le décideur. La première étape de calcul fournit une ou plusieurs solutions de compromis. Celles-ci sont présentées au décideur qui réagit en apportant des informations supplémentaires sur ses préférences. Cette information est injecté dans le model utilisé et permet de construire de nouvelles solutions de compromis. Le processus s'arrête évidemment lorsque le décideur se montre satisfait ou bien par une condition d'arrêt que l'analyste se fixe.

## 2.4 Classification de méthodes d'optimisation multi-objectifs

En se basant sur ces trois schémas possibles de coopération entre solveur du problème et décideur final, les approches utilisées pour la résolution des problèmes multi-objectifs peuvent être classées en trois catégories [40].

### 2.4.1 Transformation du problème multi-objectifs en uni-objectif

Consiste à combiner les divers critères en les pondérant. Ces méthodes sont de type a priori. Dans cette catégorie, nous citons les méthodes d'agrégation,  $\varepsilon$ -contrainte et la programmation par but (goal programming).

### 2.4.2 Les approches pareto

Les approches pareto utilisent la notion de dominance, elles visent à atteindre deux buts : d'une part converger vers la frontière pareto (efficace) et d'autre part obtenir des solutions diversifiées (réparties sur toutes cette frontière). Ces approches appartiennent également aux approches dites a posteriori.

### 2.4.3 Les approches non pareto

Elles traitent séparément les différents critères non commensurables, elles utilisent directement la notion de non dominance dans leur processus de recherche. Il s'agit principalement d'approches de type a posteriori. Nous citons les algorithmes génétiques à sélection parallèle, à sélection lexicographique.

## 2.5 Caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces

Pour tester l'efficacité en un point  $x \in S$ , Steuer a introduit le concept d'ensembles dominant au sens de la définition suivante :

**Définition 2.5.1. (Cône dominant).** Soit  $V$  la région semi-positive du cône générée par

les gradients des  $r$  fonctions objectifs du problème (2.2), tel que,

$$V = \{\pi \in \mathbb{R}^n / C\pi \geq 0\} \cup \{0\}. \quad (2.5)$$

On appelle  $V$  le cône dominant.

Le théorème suivant montre l'importance de la notion de cône dominant dans la description des points efficaces.

**Théorème 2.5.1.**  $x^0 \in E$  si et seulement s'il n'existe pas une direction réalisable dominante non nulle  $\pi$  dans  $S$  au point  $x^0$ .

Le théorème 2.5.1 fournit un test permettant de détecter les points efficaces et pouvant être géométriquement visualisé (dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ ): si l'intersection du cône dominant au point  $x^0$  avec la région réalisable contient seulement  $x^0$ , alors  $x^0$  est efficace, cependant, s'il existe d'autres points appartenant à l'intersection de ces deux ensembles, alors  $x^0$  est efficace. À travers les résultats présentés ci-dessous, nous caractérisons l'ensemble des solutions efficaces en termes de solutions d'un programme pondéré (problème d'optimisation paramétriques).

**Théorème 2.5.2. (Geoffrion [15].)** Si  $x^*$  est une solution optimale du problème mono-objectif

$$(P_\lambda) \begin{cases} \max & \lambda^T Cx \\ s.c & x \in S \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour un certain  $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^r : \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1, \lambda_k > 0\}$ , alors  $x^*$  est une solution efficace du problème linéaire multicritères (2.2).

**Remarque 2.5.1.** La réciproque du théorème 2.5.1 n'est vérifiée que sous certaines hypothèses de convexité de l'espace des critères.

Les solutions efficaces générées par résolution du problème mono-objectif  $(P_\lambda)$ , sont dites solutions efficaces supportées du problème (2.2). Certaines solutions efficaces du problème (2.2) ne sont pas des solutions optimales du problème  $(P_\lambda)$  pour aucun  $\lambda$ , elle sont dites solutions efficaces non supportée du problème (2.2) (voir Fig 2.1).

**Théorème 2.5.3.** Soit le problème :

$$\max_{Z \in F} u_4(Z, \lambda), \quad \lambda \in \Lambda. \quad (2.7)$$

$x^*$  est efficace si et seulement si  $x^*$  est une solution optimale du problème paramétrique (2.7), dans le cas où  $x^*$  n'est pas unique, l'une au moins des solutions optimales est efficace.

**Théorème 2.5.4.** Soit le problème :

$$\max_{Z \in F} u_5(Z, \lambda), \quad \lambda \in \Lambda. \quad (2.8)$$

$x^*$  est efficace si et seulement si  $x^*$  est une solution optimale du problème paramétrique (2.8).

# Chapitre 3

## Optimisation Sur L'ensemble Des Solutions Efficaces

### Introduction

La post-optimisation ou en d'autres termes, l'optimisation sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de programmation multi objectif a connue un développement considérable depuis son étude pour la première fois dans les années 70 par Philip [31]. Elle suscite l'intérêt des chercheurs en recherche opérationnelle jusqu'à ce jour. L'importance et la motivation de ce problème ont été largement discutées dans la littérature mathématique (voir par exemple [28, 7, 44, 22, 36, 27, 43]). Le problème que nous allons étudier tout au long de ce chapitre est l'optimisation d'une fonction linéaire ([8, 45]) sur l'ensemble des solutions efficaces "E" d'un problème de programmation multi-objectif MOLP, ce problème est alors noté comme  $P$  et peut être formulé comme  $\max\{dx/x \in E \text{ où } d \in \mathbb{R}^n\}$  Une illustration du problème est donnée dans [43], dans lequel un producteur de quatre types de produits possède dix unités de production. Les clés de mesure de performance, pour un plan de production  $x \in X$  sont le profit  $a(x)$ , et les niveaux d'emploi,  $\{f^q(x), 1 \leq q \leq 10\}$  à chacune des dix unités. On considère le profit  $a(x)$  comme la mesure de performance principale, mais un plan  $x$  est inacceptable s'il existe un plan  $y$  où les niveaux d'emplois sont au moins bons pour  $x$  pour chaque unité, et meilleur pour  $y$  que  $x$  au moins pour une unité. D'un point de vue mathématique, le problème  $P$  est difficile et aussi c'est un problème de l'optimisation globale car la région des solutions réalisable (i.e l'ensemble des solutions efficaces) est en général non convexe d'où il peut avoir plusieurs optimum

locaux qui ne sont pas globaux. Pour une introduction à la littérature sur l'optimisation globale (voir [3];[17] - [30]).

A travers les années, différentes procédures pour la résolution du problème  $P$  sont suggérées. Le premier algorithme qui a essayé de résoudre  $P$  a été schématiquement décrit par Philip [31]. Cette méthode est basée sur les coupes planes. Après, Isermann et Steuer [22] ont souligné une procédure similaire pour le cas spécial de la minimisation d'une fonction objective du problème MOLP sur l'ensemble des solutions efficaces  $E$ . mais aucun des acteurs n'a utilisés les aspects d'implémentation des algorithmes. Ecker et Song [14] ont développé une méthode détaillée pour résoudre  $P$ , basée sur l'approche de Philip. Mais parmi les auteurs qui ont fourni le plus d'efforts pour étudier le problème  $P$  est Benson. En plus des études théoriques comme dans [28] où il analyse la structure mathématique du problème, Benson a proposé différentes approches que celles précédemment employées. Parmi d'autres, dans Benson [4] et Benson [5] deux algorithmes de relaxations sont suggérés. Plus récemment Sayin [35] a proposé l'algorithme Branch and Bound pour résoudre le problème  $P$ .

A cause des difficultés rencontrées en général pour résoudre  $P$ , quelques procédures spéciales ont été développées (voir par exemple [2]; [6]) et quelques méthodes heuristiques pour approximer la solution optimale sont encore proposées (voir [22]; [45]).

En résumé, les algorithmes existants pour résoudre le problème  $P$  peuvent être classés en plusieurs groupe selon leur principe de fonctionnement, citons:

- les algorithmes de recherche de sommets adjacents.
- les algorithmes de recherche de sommets non adjacents.
- les algorithmes basés sur la méthode de séparation et d'évaluation;
- les algorithmes basés sur la méthode de relaxation lagrangienne;
- les algorithmes basés sur la méthode dual et de bi-section [45].

### 3.1 Résultats de base

On adopte les notations suivantes :

$\mathbb{R}_+^p = \{x \in \mathbb{R}^p / x \geq 0\}$ ,  $\mathbb{R}_{++}^p = \{x \in \mathbb{R}^p / x > 0\}$   $\mathbb{R}_-^p$ ,  $\mathbb{R}_{--}^p$  désigne l'ensemble des  $\mathbb{R}^p$  vecteurs colonnes,  $\mathbb{R}_-^p$ ,  $\mathbb{R}_{--}^p$  sont définies de la même manière que  $\mathbb{R}_+^p$ ,  $\mathbb{R}_{++}^p$  par analogie.

On notera également avec des signification évidente  $\mathbb{R}_+^p, \mathbb{R}_{++}^p; \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_{--}^p$ ,  $e$  désignera un vecteur dont toute les composantes égale à un ; sa dimension est fixée par le contexte. Soit un problème MOLP : "max"  $Cx$ ,  $C$  c'est la matrice des  $p \times n$  coefficients de  $p$  critères et  $S$  l'ensemble des solutions admissibles  $\subseteq \mathbb{R}_+^n$  (supposé non vide et borné).

**Définition 3.1.1.** l'ensemble  $Y = \{y/y \in \mathbb{R}^p : y = Cx \text{ pour } x \in S\}$  est appelé l'ensemble des résultats. L'ensemble  $Y^{\leq} = Y + \mathbb{R}_-^p = \{y/y \in \mathbb{R}^p : y \leq Cx \text{ pour } x \in S\}$ , est appelé l'ensemble des résultats inférieurs et  $Y^{<} = Y + \mathbb{R}_{--}^p = \{y/y \in \mathbb{R}^p : y < Cx \text{ pour } x \in S\}$  est appelé l'ensemble des résultats strictement inférieurs.

**Définition 3.1.2.** Un point  $y \in Y$  est dit solution non dominée du problème MOLP si  $Y \cap (y + \mathbb{R}_+^p) = \{y\}$  .. on note dans ce chapitre l'ensemble des solutions non dominées par  $Y_E$ . Un point  $y \in Y$  est dit faiblement non dominé si  $Y \cap (y + \mathbb{R}_{++}^p) = \emptyset$ . L'ensemble des solutions faiblement non dominées est notée  $Y_w$ .

**Définition 3.1.3.** Pour  $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^p$  et  $x \in S$ ; la fonction

$$g_\lambda(x) = \max\{\lambda Cx' / x' \in S, Cx' \geq Cx\} - \lambda Cx \quad (3.1)$$

est dite fonction lacune ("gap function"). Quand  $y = e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ ,  $g_\lambda$  est notée par  $g$ .

Il est clair que  $x \in E$ , l'ensemble des solutions efficaces du problèmes (MOLP), si et seulement si  $g_{\lambda(x)=0}$ . Nous citons dans le théorème suivant quelque caractéristiques, connues de l'ensemble des solutions efficaces  $E$  du problème (MOLP) (voir [9]; [26]).

**Théorème 3.1 (30).** l'ensemble des solutions efficaces du problème (MOLP) est tel que

$$\begin{aligned} E &= \{x/ x \in S; \exists \lambda \in \mathbb{R}_{p++} \text{ tel que } \lambda Cx \geq \lambda Cx', \forall x' \in S\} \\ &= \{x/ x \in S; \exists x' \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Cx' \geq 0, Cx' \neq 0; Ax' = 0; x_i \geq 0 \text{ pour } i \text{ avec } x_i = 0\} \\ &= \{x/ x \in S; \exists (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}_{p++} \times \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n+} \text{ tel que } \lambda C - \mu A + \gamma = 0, \gamma x = 0\} \\ &= \{x/ x \in S; \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_{p++} \times \mathbb{R}_m \text{ tel que } \lambda C - \mu A \leq 0, \lambda Cx - \mu b = 0\} \\ &= \{x/ x \in S; g_\lambda(x) = 0\} \end{aligned}$$

De plus il existe  $M > 0$  tel que  $\mathbb{R}_{p++}$  peut être remplacé par le simplexe de dimension  $(p - 1)$  défini par :  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}_{p+} / \lambda > e; \lambda e = M\}$

**Théorème 3.2 (30).** : l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire multi-objectif continu est connexe. Deux sommets quelconques dans  $E$  sont reliés par un chemin formé d'arêtes (une arêtes efficace est une arête dans  $S$  contenu dans  $E$ )

Le problème d'optimisation d'un critère sur l'ensemble des solutions d'un problème MOLP peut être formulé d'une manière générale par :

$$(P) \begin{cases} \max f(x) \\ s.c \ x \in E \end{cases} \quad (3.2)$$

Où  $E$  est l'ensemble des solutions efficaces du problème.

$$(MOLP) \begin{cases} \text{"max"} \ Cx \\ s.c \ x \in S \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ ;  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Définissons le problème relaxé

$$(P_R) \begin{cases} \max f(x) \\ s.c \ x \in S \end{cases} \quad (3.4)$$

1 Cas continu:

## 3.2 L'algorithme de recherche de points extrêmes non adjacents [5]

Soit  $S_{ex}$  l'ensemble de solutions extrêmes du polyèdre  $S$ . Admettons que  $S_{ex} \neq \phi$ . Alors à partir de [18], le problème  $P$  possède une solution qui appartient à  $S_{ex}$ . Soit  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p / e\lambda \leq M, \lambda \geq e\}$  où  $e \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur de composantes toutes égales à 1 et  $M$  un nombre réel positif. Pour  $M$  suffisamment large, à partir de la Ref [15],  $x^\circ$  appartient à  $E_{si}$  et seulement si il existe au moins  $\lambda^\circ \in \Lambda$  tel que  $x^\circ$  est solution optimale pour le problème de la somme pondérée  $(P_\lambda) \max \lambda Cx$  telque  $x \in S$  Admettons que  $M$  soit choisi de manière à être assez large pour garantir cette propriété. Alors le problème  $(P)$  peut être écrit de manière équivalente comme un problème d'optimisation à contrainte infinie donné par :

$$(PI) \begin{cases} \theta = \max \ dx \\ s.c \ \lambda Cx \geq \lambda C\hat{x} \text{ pour } 0\hat{x} \in S \\ x \in S \\ \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

Où  $x$  et  $\lambda$  sont des variables.

Pour montrer comment l'algorithme fonctionne, nous ajoutons quelques notations additionnelles :

Pour chaque  $k \geq 0$  soit  $x^j, j = 0, 1, \dots, k$ , les éléments distincts de  $E \cap S_{ex}$  générés par l'algorithme dans l'étape initiale et dans les itérations  $0, 1, \dots, k - 1$  respectivement.

Soit:  $LB_k = \max\{dx^j / j = 0, 1, \dots, k\}$ .

Et considérons le problème relaxé du problème  $(PI)$  donné par  $(PI_r)$ .

$$(PI_r) \begin{cases} \max dx \\ s.c \ \lambda Cx \geq \lambda Cx^j, j = 0, 1, \dots, k \\ x \in S \\ \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

Finalement, pour chaque  $x^j, j = 0, 1, \dots, k$  soit  $\lambda^j$  un vecteur dans  $\Lambda$  tel que:  $(x^j, \lambda^j)$  est solution admissible pour le problème  $(PI_r)$

Admettons que  $k \geq 0$ . Pour trouver un point extrême efficace distinct de  $x^j, j = 0, 1, \dots, k$ .

L'itération  $k$  exécute les étapes suivantes:

-Premièrement, il cherche un couple  $x, \lambda$  qui est solution réalisable pour  $(PI_r)$  et qui satisfait  $dx > LB_k$

-Si un tel point  $x$  n'existe pas, alors chaque point  $(x^j, \lambda^j)$  tel que  $\hat{j} \in \{0, 1, \dots, k\}$  et  $dx^{\hat{j}} = LB_k$  est solution optimale pour le problème  $(PI_r)$ .

-De plus, pour un certain  $\bar{\lambda}^j \in \Lambda$ , où  $\bar{\lambda}^j$  peut ou ne peut pas être égale à  $\lambda^j$ , comme  $x^j \in E$ ,  $(x^j, \bar{\lambda}^j)$ , est réalisable pour  $(PI)$  et aussi optimale pour  $(PI_r)$ .

-Comme le problème  $(PI_r)$  est une relaxation du problème  $(PI)$  ceci implique que  $(x^j, \bar{\lambda}^j)$  est solution optimale du problème  $(PI)$  tel que  $x^j$  est optimale dans le problème  $(P)$ , et l'algorithme termine.

-Après l'algorithme note la solution par  $\bar{x}^{k+1}, \bar{j}^{k+1}$

-puis l'algorithme utilise le point  $x^{k+1}, \bar{\lambda}^{k+1}$  pour trouver un nouveau point extrême efficace  $x^{k+1}$  pour le problème  $(P)$ .

### 3.2.1 L'algorithme

Pour chaque  $w = 1, 2, \dots, n$  soit  $A^w$  la colonne  $w$  de la matrice  $A$ . Soit  $e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ .

**Etape0:(initialisation)** trouver un point , poser  $k = 0$ , et aller à l'itération  $k$ .

**Itération**  $k, k \geq 0$

**Etape k1 :** Soit  $LB_k = \max\{dx^j / j = 0,1,\dots,k\}$

Trouver une solution réalisable  $x, \lambda$  pour le système d'équation et inéquation donné par

$$(S) \begin{cases} \lambda Cx \geq \lambda Cx^j, j = 0,1,\dots,k \\ x \in X \\ \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

Tel que  $dx > LB_k$  . Si aucune solution n'existe, alors stop :  $x^{\hat{j}}$  est solution optimale pour le problème  $(P)$  pour chaque  $\hat{j} \in \{0,1,\dots,k\}$  tel que  $LB_k = dx^{\hat{j}}$  Sinon, soit  $(\bar{x}^{k+1}, \bar{\lambda}^{k+1})$  une solution trouvée et continuer

**Etape k2 :** Résoudre le problème de programmation linéaire donné par :

$$(TESTk) \begin{cases} \max e^T Cx \\ s.c - Cx \geq -C\bar{x}^{k+1}, \\ x \in S \\ \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

Où  $x$  et  $\lambda$  sont des variables.

Pour chaque solution optimale  $x^*$ . Si  $e^T Cx^* \neq e^T C\bar{x}^{k+1}$  aller à l'étape k5 sinon continuer.

**Etape k3 :**

$$I = \{w / x_w^{k+1} > 0\}$$

$$\text{Et soit } w^{k+1} = \bigcup_{w \in I} \{A^w\}$$

Si  $w^{k+1}$  est un ensemble linéairement indépendant, poser  $x^{k+1} = \bar{a}^{k+1}$  et  $k = k + 1$  et aller à l'itération  $k$ . sinon continuer.

**Etape k4 :** soit  $\bar{u}^{k+1} \in \mathbb{R}^p$  variable dual optimale correspondant aux contraintes (1) dans le programme linéaire  $(TESTk)$ . Trouver la valeur optimale  $v$  du programme linéaire  $(P_\lambda)$

$$\begin{cases} \max \lambda Cx \\ s.c Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Avec  $(\lambda = (e + \bar{\mu}^{k+1}))$ . Soit  $x^{k+1}$  une solution optimale de base quelconque pour le programme linéaire donné par

$$(FACEk) \begin{cases} \max dx \\ s.c (e + \bar{\mu}^{k+1})^T Cx = \nu, \end{cases}$$

Soit  $k = k + 1$  et aller à l'itération  $k$ .

**Etape k5 :** Soit  $x^{k+1}$  une solution de base optimale quelconque pour le programme linéaire  $(P_\lambda)$  avec  $\lambda = \bar{\lambda}^{k+1}$ . Poser  $k = k + 1$ , aller à l'itération  $k$ .

### 3.3 Méthode d'Ecker et Song [14]

Dans cette méthode les auteurs ont résolu le problème de maximiser une fonction linéaire  $f(x) = dx$  sur l'ensemble des solution efficace  $E$  Soit

$$(P) \begin{cases} \max f(x) = dx \\ s.c \ x \in E, \end{cases}$$

Où  $d \in \mathbb{R}^p$

On résume la méthode par ce qui suit : étant donné un point efficace courant  $\hat{x}$ , s'il n'existe pas une arrête efficace adjacente qui donne une augmentation dans la fonction  $f(x) = dx$ , alors une coupe plane  $dx = d\hat{x}$  est utilisée pour obtenir un programme multi-objectif linéaire  $\overline{MOLP}$  défini comme suit :

$$\overline{MOLP} \begin{cases} \max Z_k = C^k x, & k = 1, \dots, p \\ s.c \ x \in \bar{S}, \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec l'ensemble des solutions admissibles réduit  $\bar{S} = \{x \in S / dx \geq d\bar{x}\}$  et l'ensemble des solutions efficaces  $\bar{E}$  Pour trouver un point efficace meilleur, on résout le problème  $(Ii)$  défini comme suit :

$$(Ii) \begin{cases} \max C^i x, & k = 1, \dots, p \\ s.c \ x \in \bar{S}, \end{cases} \quad (3.6)$$

Sur l'ensemble des solutions admissible réduit  $\overline{MOLP}$  séquentiellement pour  $i$  s'il existe un  $x^i \in \bar{E}$  qui est une solution optimale de  $(Ii)$  pour un certain  $i$  et  $dx^i > d\hat{x}$ , alors on peut choisir  $x^i$  comme point efficace courant.

En pivotant sur l'ensemble des solutions admissibles réduit nous permet de trouver un point efficace meilleur ou de montrer que le point efficace courant est optimal pour  $(P)$ .

#### 3.3.1 L'algorithme d'Ecker et Song

**Etape 0 :** Trouver une solution optimale de  $(Pr)$ . Pour tester si  $x^*$  est efficace, il suffit de résoudre le problème  $(Px^*)$  suivant:

$$(Px^*) \begin{cases} \max e\psi, \\ \text{s.c. } Cx = \psi + Cx^* \\ x \in S, \\ \psi \geq 0. \end{cases}$$

- ◇ Si  $\psi = 0$ , alors  $x^* \in E$  et  $x^*$  est une solution optimale de  $P$ .
- ◇ Sinon, soit  $\tilde{x}$  une solution optimale du Problem
  - Si  $d\tilde{x} = dx^*$ , alors  $\tilde{x}$  est une solution optimale de  $P$
  - Sinon, aller à l'étape 1.

**Etape 1 :** Ajuster sur un tableau au simplex initial de  $(Pr)$  à la solution  $\tilde{x}$  (optimale pour  $(Px^*)$ .)

**Etape 2 :** au point extrême efficace courant; Soit  $\tilde{x}$ . Trouver si possible une arête efficace adjacente qui améliore la valeur de la fonction  $f(x) = dx$ .

-s'il n'y a aucune arête efficace qui rapporte un augmentation en valeur de la fonction objectif  $f(x)$ . Alors passer à l'étape 3.

-Autrement, pivoter au prochain point extrême  $\tilde{x}$  de l'arête efficace choisie et faire une autre itération de l'étape 2.

**Etape 3 :** ajouter la ligne qui représente la coupe  $dx = d\tilde{x}$  et une variable d'écart  $x_{n+1}$  pour obtenir un tableau simplex  $\bar{T}\bar{x}$  correspondant à  $\tilde{x}$  comme point extrême dans  $\bar{S}$ .

**Etape 4 :** appliquer les étape 4-1 à 4-4.

**4-1** soit  $j = 1$ .

**4-2a** trouver une solution optimale  $x^j$  de  $(Ij)$  qui est une solution extrême efficace du problème  $\overline{MOLP}$ .

**4-2b** si  $dx^j > d\tilde{x}$ , soit  $x^j$  un nouveau point extrême efficace; faire  $\tilde{x} = x^j$ . Ajuster le tableau courant pour correspondre à  $x^j$  comme point extrême dans  $S$ . Aller à l'étape 2.

**4-2c** si  $dx^j = d\tilde{x}$  et s'il y'a une arête efficace adjacente  $[x^j, \bar{x}]$  rapportant une augmentation de  $dx$ , alors utiliser  $\bar{x}$  comme nouveau point efficace courant  $\tilde{x}$ . Aller à l'étape 2.

**4-2d** si  $j \leq k - 1$ , faire  $j = j + 1$  et aller à l'étape 4-2a.

**4-3a** si  $dx < 0$  pour tout  $x$  non nul, alors le sous-ensemble de  $S$   $F = \{x \in S / dx = d\tilde{x}\}$  (qui est une face de  $S$ ) est inclus dans  $E$ .

Pivoter dans le domaine  $F$  en cherchant un point  $y$  qui a une arête efficace adjacente dans  $S$ , rapportant une augmentation de  $dx$ . Si un tel  $y$  n'existe pas, alors le point courant  $\tilde{x}$

est une solution optimale de  $(P)$ .

**4-3b** Si  $dx \geq 0$  pour un certain  $x$  non inclus, alors ce n'est pas nécessairement que toutes les faces sont dans  $\bar{E}$ .

Pivotant sur  $F$  suivant les arêtes efficaces en cherchant un point  $y$  qui a une arête efficace adjacente et rapportant une augmentation de  $dx$ . Si un tel  $y$  n'existe pas, alors le point  $\tilde{x}$  est solution optimale de  $P$ .

**4-4** s'il y a une telle arête  $[y, \tilde{x}]$ , alors utiliser  $\tilde{x}$  comme un nouveau point efficace courant. Aller à l'étape 2.

### 3.4 Méthode de Yamamoto [45]

Dans cette méthode on cherche à résoudre le problème  $(P)$  où  $f$  est quasi convexe. Soit  $S_v$  l'ensemble des sommets du problème  $S$ . Pour  $x, x' \in S_v$ ,  $[x, x']$  représente l'arête reliant  $x$  et  $x'$ . Pour  $S_v \cap E$  soit  $N_E(x) = \{x' \in S_v \cap E; [x, x'] \subset E\}$  i.e l'ensemble des sommets efficaces à liés par  $x$  par une arête efficace.

En utilisant la quasi-convexité de  $f$ , on a :

**Lemme 3.1.** soit  $S_v \cap E$  et supposons que  $\{x' \in N_E(x), f(x') > f(x)\} = \emptyset$ . Alors,  $x$  est un maximum local pour le problème  $(P)$ .

#### 3.4.1 L'algorithme

Nous notons par  $H_+^k = \{x \in \mathbb{R}^n / ax \geq \alpha\}$  et  $H_-^k = \{x \in \mathbb{R}^n / ax \leq \alpha\}$  les deux demi-espaces déterminés par l'hyperplan  $H^k = \{x \in \mathbb{R}^n / ax = \alpha\}$ ;  $H_{++}^k$  et  $H_{--}^k$  sont leurs intérieurs respectivement.

##### Etape 1 (initialisation)

Poser  $k = k' = 0$ ,  $S^0 = S$  et trouver  $x^0 \in S_v \cap E$ . Si  $N_E(x^0) = \emptyset$  alors  $x^0$  est une solution optimale de  $P$ . Sinon aller à l'étape 2.

##### Etape 2 (boucle $(k')$ )

**2.1** Si  $\{x' \in N_E(x^{k'}), f(x) > f(x^{k'})\} = \emptyset$ , choisir  $x^{k'+1}$  de cet ensemble, faire  $k' = k' + 1$  et aller à 2.1.

**2.2** Sinon, soit  $S^{k'} = \{f(x) \leq f(x^{k'})\}$  et aller à l'étape 3 (boucle  $(k)$ ).

##### Etape 3 (boucle $(k)$ ) :

**3.1** Trouver  $v^k \in \arg \max\{f(x/x \in S^k)\}$ , si  $f(x^{k'}) \geq f(v^k) - \varepsilon$ , pour  $\varepsilon > 0$  alors arrêter avec  $x^{k'}$  comme une  $\varepsilon$ -approximation de la solution optimale du problème (P). Sinon aller à 3.2.

**3.2** Trouver un hyperplan support  $H^k$  de  $S^{k'}$  tel que  $S^{k'} \subseteq H^k_+ v^k \in H^k_-$ .

**3.3** S'il existe une arête efficace  $[u', u'']$  telle que  $[u', u''] \cap H^k \neq \emptyset$  et  $\max\{f(u'), f(u'')\} \geq f(x^{k'})$ , alors soit  $x^{k'+1}$  celui des  $u'$  et  $u''$  donnant la valeur de la fonction objectif la plus grande. Faire  $k' = k' + 1$  et aller à l'étape 2 (boucle ( $k'$ )). Sinon, aller à (3.4).

**3.4** faire,  $S^{k+1} = S^k \cap H^k_+$ ,  $k = k + 1$  et aller à 3.1 (boucle ( $k$ )).

L'algorithme génère une séquence de sommets efficaces  $x^0, x^1, \dots$ , et les polytopes  $S^0, S^1, \dots$  tel que  $S = S^0 \supseteq S^1 \supseteq S^2, \dots$

### 3.5 Méthode de Jesus. M. Jorge [23]

**Définition 3.5.1.** Nous dirons qu'un sous-ensemble  $J' \subseteq J = \{1, \dots, n\}$  est un ensemble descripteur pour une face  $F$  si et seulement si,  $F = F(J')$  ou  $F(J') = \{x \in X/x_j = 0, \forall j \in J'\}$ . Ayant en tête la représentation des contraintes linéaires de  $X$ , il est clair que :  $F(J') = \{x \in \mathbb{R}_+^n/A^{J-J'} x_{J-J'} = x'_{J'} = 0\}$

**Définition 3.5.2.** Nous dirons qu'un sous-ensemble  $J' \subseteq J$  est un ensemble descripteur maximal si et seulement si il n'existe pas de sous-ensembles  $J'' \subseteq J$  qui contient  $J'$  comme sous-ensembles stricts et vérifie  $F(J'') = F(J')$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & sx \\ s.c & \lambda C + uA + s = 0 \\ & Ax - by = 0 \\ & dx - dy \geq 1 \\ & x, s \geq 0, \lambda \geq e, y \geq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Le problème (3.7) est un programme bilinéaire disjoint simplifié qui est borné inférieurement par 0.

**Théorème 3.5.1.** le programme (3.7) est borné, avec valeur optimale 0 si et seulement si et seulement si  $\exists F \in E^f$  et  $\exists \hat{x} \in F$  tel que  $d\hat{x} > \alpha$ .

**Théorème 3.5.2.** Si le programme (3.7) est borné, avec une valeur optimale strictement positive alors  $dx \leq \alpha, \forall x \in E$ .

**Théorème 3.5.3.** Admettons que  $E \neq \emptyset$ . Si le programme (3.7) est irréalisable alors il n'existe pas de  $x \in X$  tel que  $dx > \alpha$ .

### 3.5.1 L'algorithme

#### Etape 0 (initialisation)

Si  $E = \emptyset$ , stop.  $P$  n'a pas de solution réalisable. Sinon, soit  $i = 0$  et  $x^0 = dx$ ,  $\alpha^0 = dx$  est une solution efficace initiale.

**Etape 1 (exploration)** Résoudre le problème de programmation bilinéaire suivant  $T_i$

$$T_i \begin{cases} \min & sx \\ s.c & \lambda C + uA + s = 0 \\ & Ax - by = 0 \\ & dx - \alpha^i y \geq 1 \\ & x, s \geq 0, \lambda \geq e, y \geq 1 \end{cases}$$

#### Etape 2 (règle d'arrêt)

Si le programme  $T_i$  est irréalisable ou borné avec une valeur optimale strictement positive, stop.

La valeur optimale de  $P$  est  $\alpha^i$ .

Sinon (programme  $T_i$  est borné, avec valeur optimale 0) continuer.

#### Etape 3: (progression).

Soit  $(\bar{\lambda}^i, \bar{u}^i, \bar{s}^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i)$  une solution optimale pour  $T_i$ . Poser  $J^i = \{j \in J / \bar{S}_j^i > 0\}$

Résoudre le problème  $P^i \equiv \max\{dx/x \in F(J^i)\}$

Si  $P^i$  est non borné, stop. Le problème  $P$  est non borné.

Sinon, soit  $\hat{x}^{i+1}$  un point extrême optimal de  $P_i$  et poser  $\alpha^{i+1} = d\hat{x}^{i+1}$ , poser  $i = i + 1$  et aller à l'étape 1.

### 3.5.2 illustration [23]

Considérons le problème de programmation multi-objectif linéaire  $M$  suivant :

$$\begin{cases} VMAX & x \\ s.c & x \in X \end{cases}$$

Où  $x$  est le polyèdre donné par

$$\left\{ x_i \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'ensemble réalisable  $X$  est montré dans la figure 1. Il est clair que l'ensemble des solutions efficaces  $E$  est l'arête entre  $x^2 = (3,2,1)^t$  et  $x^3 = (2,3,1)^t$ . Le problème  $P$  que nous voulons résoudre est le suivant:

$$\max\{(-1, 0, 0)x / x \in E\}$$

Graphiquement, il est facile de voir, que la valeur maximum de  $-x_1$  sur  $X$  est égale à 0. Mais la valeur optimale de  $P$  est -2 qui s'achève au sommet  $x^3$ . Pour des besoins algo-

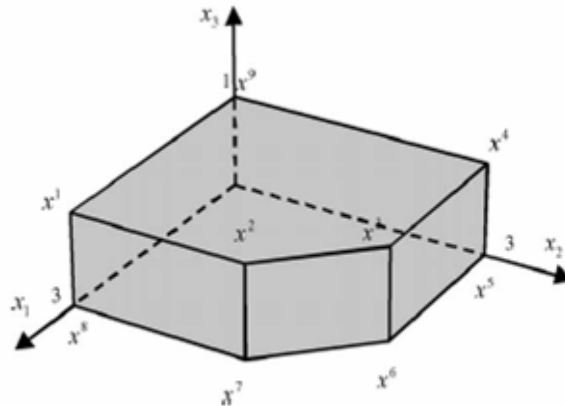


FIG. 3.1 – L'ensemble réalisable  $X$

riethmiques qui nécessite une description de la région réalisable  $X$  dans la forme standard.

Ceci est accompli en ajoutant les variables d'écart  $x_4$  à  $x_7$ ,

d'où les matrices à considérer sont:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Etape0:**

En utilisant la méthode d'Ecker-Kouada on calcule la solution efficace  $\hat{x}^0$  donné par  $(3,2,1)^t$ , ce point est le sommet  $x^2$ .

On pose  $i = 0$  et  $\alpha^0 = -3$ .

### Iteration 0

#### Etape 1:

En réalisant le problème de programmation bilinéaire  $T_0$ , on obtient le fait qu'il est borné, avec valeur objective optimale (globale) 0. La solution optimale est donnée par  $(\bar{\lambda}^0, \bar{u}^0, \bar{s}^0, \bar{x}^0, \bar{y}^0)$ , où  $\bar{\lambda}^0 = (1,1,1)$ ,  $\bar{u}^0 = (-1,0,0, -1)$ ,  $\bar{s}^0 = (0,0,0,1,0,0,1)$ ,  $\bar{x}^0 = (2,3,1,0,0,1,0)$ , et  $\bar{y}^0 = 1$ .

#### Etape 3:

D'où  $J^0 = \{4,7\}$ , qui est l'ensemble descripteur maximal associé à l'arête joignant les sommets  $x^2$  et  $x^3$ .

Maintenant on résout le problème:  $P^0 \equiv \max dx/x \in F(J^*)$ .

On trouve que la solution optimale pour  $P^0$  est  $x^3 = (2,3,1)$ , avec valeur objective optimale  $\alpha^i = -2$

On pose  $i = 1$  et aller à l'itération 1.

### Itération 1 :

#### Etape 1 :

On résout le problème bilinéaire  $T_1$ . Dans ce cas on obtient le fait que  $T_1$  est borné mais avec valeur objective optimale (globale) égale à 1. En particulier, l'une de ses solutions optimales est donnée par

$(\bar{\lambda}^1, \bar{u}^1, \bar{s}^1, \bar{x}^1, \bar{y}^1)$ , où  $\bar{\lambda}^1 = (1,1,1)$ ,  $\bar{u}^1 = (-1,0,0, -1)$ ,  $\bar{s}^1 = (0,0,0,1,0,0,1)$ ,  $\bar{x}^1 = (1,3,1,1,2,0,0)$ , et  $\bar{y}^1 = 1$ .

#### Etape 2 :

Comme la valeur optimale de la fonction objective de  $T_1$  est strictement positive, on fait stop. Le point extrême  $x^3 = (2,3,1)$  est solution optimale pour le problème  $P$ , qui a une valeur objective optimale égale à  $\alpha^1 = 2$ .

### 2-Cas entier:

### 3.6 Méthode de CHAABANE [10]

Considérons le problème MOILP défini comme suit :

$$(P(D)) \begin{cases} \text{"max"} & Z_i = C^i x, \quad i = 1, \dots, p \\ \text{s.c} & x \in D. \end{cases}$$

Où  $D = S \cap \mathbb{Z}^n$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ ,  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m, p \geq 2$ ,  $C^1, C^2, \dots, C^p \in \mathbb{Z}^n$  sont des vecteurs lignes,  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs. On suppose que  $D$  est non vide et que  $S$  est un polyèdre convexe et borné. L'ensemble de toutes les solutions efficaces entières du problème  $(P(D))$  est noté  $E$ . Le problème principal étudié est décrit par :

$$(PI) \begin{cases} \max & f(x) = dx \\ \text{s.c} & x \in E. \end{cases}$$

Où  $d$  est un vecteur ligne de dimension  $n$  qui a pour  $j^{eme}$  composante le nombre entier  $d_j$ . Soit le problème relaxé :

$$(PR) \begin{cases} \max & f(x) = dx \\ \text{s.c} & x \in D. \end{cases}$$

$$(Pi(D)), i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

Et le problème

$$(Pi(D)) \begin{cases} \max & Z_i = C^i x, \\ \text{s.c} & x \in D. \end{cases}$$

On utilisera tout au long de cette partie les notations déjà introduites dans ce chapitre et quelques nouvelles notations supplémentaires.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  sont les critères initiaux et  $f$  le critère principal ;

$S_1$  qui est la région tronquée courante de  $S$  obtenue par les coupes successives de Gomory introduites en optimisant le problème  $P_1(D)$ ;  $D_1 = S_1 \cap \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres rationnels;

$(Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_p^1)$  est le premier  $p$ -uplet non dominé correspondant à la solution optimale  $X$  du problème  $(P(D))$ , obtenue dans  $S_1$ . On a  $Z_i^1 = C^i X_1$  pour  $i = 1, 2, \dots, p$ .

pour  $k \geq 1$  on a :

- ◇  $X_k \in \mathbb{Z}^{n_k}$  est une solution optimale entière obtenue dans la région  $S_k$  en résolvant le problème  $(P_1(D_k))$

- ◇  $B^k$  est la base associée à la solution  $X_k$
- ◇  $a_{k,j} \mathbb{Q}^{m_k \times 1}$  est le vecteur d'activité de  $x_{k,j}$  correspondant à la région courante  $S_k$
- ◇  $I_k = \{j / \text{le vecteur } a_{k,j} \text{ est une colonne de la base } B_k\}$  (les indices correspondants aux variables de base)
- ◇  $N_k = \{j / \text{le vecteur } a_{k,j} \text{ n'est pas une colonne de la base } B_k\}$  (les indices des variables hors base)
- ◇  $y_{k,j} = (y_{k,ij}) = (b_k)_{-1} a_{k,j}$  où  $y_{k,j} \in \mathbb{Q}^{m_k \times 1}$
- ◇  $\Gamma_k = \{j \in N_k / Z_{1,j}^k - C_j^1 \geq 0 \text{ et } f_j^k - d_j \leq 0\}$ , où  $Z_{1,j}^k = C_{B_k}^1 y_{k,j}$ ;  $C_{B_k}^1$  est Le vecteur coût des variables de base associés à  $B_k$  dans  $C_1$  et  $C_j^1$  représente la  $j^{eme}$  composante du vecteur  $C_1$ ,  $f_j^k = d_{B_k}$  est le vecteur coût des variables de base associées à  $B_k$  dans d
- ◇ pour  $k \geq 2$ , on a :

$$D_k = \{x \in \mathbb{R}^{n_k} / A_k x = b_k, A_k \in \mathbb{Q}^{m_k \times n_k}, b_k \in \mathbb{Q}^{m_k}, (m_k, n_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, m_k \neq 0, n_k \neq 0, x \geq 0\}.$$

Où  $S_k$  est la région tronquée courante obtenue après avoir appliqué la coupe

$$\sum_{j \in N_{k-1} \setminus \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1, \text{ avec } j_{k-1} \in \Gamma_{k-1} \text{ ou bien la coupe } dx \geq dX_k \text{ et les coupes de Gomory}$$

si nécessaire  $D_k = S_k \cap \mathbb{Z}^{n_k}$ .

### 3.6.1 Test d'efficacité

Le théorème suivant est utilisé dans les différentes étapes de l'algorithme pour tester l'efficacité d'une solution réalisable donnée du problème (P).

**Théorème 3.6.1.** [10] Soit  $X^*$  un élément arbitraire de la région  $D$ .  $X^* \in E$  si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif  $\theta$  est nulle dans le problème de programmation linéaire mixte suivant :

$$(P(X^*)) \begin{cases} \max & \theta = \sum_{i=1}^p \psi_i \\ \text{s.c} & Cx - I\psi = Cx^* \\ & x \in D \\ & \psi_i \in \mathbb{R}^+ \forall i. \end{cases}$$

Où  $C$  est une matrice  $p \times n$ , dont la  $i_{eme}$  ligne correspond à  $C^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $I$  est la matrice identité ( $p \times p$ ) et  $\psi = (\psi_i)_{i=1, \dots, p}$ .

**Proposition 3.6.1.** Un point  $x^0$  qui est l'unique solution du problème de programmation linéaire en nombre entiers

$$(P_i(D)) \begin{cases} \max & Z_i = c^i x \\ \text{s.c} & x \in D \end{cases}$$

est efficace pour  $(P(D))$ .

### 3.6.2 L'algorithme

**Etape1 :**

Nous résolvant le problème relaxé  $(P_r)$ . Soit  $x^*$  une solution optimale. Cette solution est testée pour l'efficacité en résolvant le problème  $(P(x^*))$  mentionné dans le théorème précédent. Si elle est efficace, alors elle est aussi une solution de  $P$  et l'algorithme se termine.

Autrement, on va à l'étape 2.

**Etape 2 :**

Soit  $f_{opt} = -\infty$ . On résout le problème  $(P_1(D))$ . (On peut alternativement considérer n'importe quel problème  $(P_i(D); i = 2,3,\dots,p)$  au lieu de  $(P_1(D))$ )

**2.1** Si  $J_1 = \{j \in N_1 / Z_{i,j}^1 - C_j^1 = 0\} = \emptyset$ , alors la solution optimale trouvé  $X_1$  est unique et elle est efficace. Poser  $f_{opt} = dX_1$ ,  $X_{opt} = X_1$  et aller à l'étape 3.

**2.2** Si  $J_1 \neq \emptyset$ , alors la solution optimale  $X_1$  du problème  $(P_1(D))$  peut ne pas être unique, tester l'efficacité de  $X_1$ ; si  $X_1$  n'est pas efficace aller à l'étape 3, sinon, soit  $f_{opt} = dX_1$  et  $X_{opt} = X_1$  aller aussi à l'étape 3.

**Etape 3 :**

Faire  $k = 1$  et exécuter le sous-étapes suivantes :

**3.1** construire l'ensemble  $\Gamma_k = \{j \in N_k / Z_{k,j}^k - C_j^1 \geq 0 \text{ et } f_j^1 - d_j \leq 0\}$

- Si  $\Gamma_k = \emptyset$ , alors aller à l'étape 3.2. et la coupe devient celle de Dantzig  $\sum_{j \in N_k} x_j \geq 1$

-Autrement, soit  $\gamma = \Gamma_k$  aller à **(a)**.

**(a)** Si  $\gamma = \emptyset$ , alors soit  $j_k \in \Gamma_k$  et aller à la sous étape 3.2. Autrement, sélectionner  $j_k \in \gamma$  et calculer, la partie entière de  $\min_{i \in I_k} \{ \frac{x_{k,j}}{y_{k,i,j_k}} > 0 \}$ .

-si  $\theta_{j_k}^0 = 0$ , alors il n'y a aucune solution réalisable entière sur l'arête  $E_{j_k}$ , faire  $\gamma = \gamma \setminus \{j_k\}$  et aller à **(a)**

-Autrement, si  $\theta_{j_k}^0 = 0$ , alors aller à **(b)**.

(b) Si  $X_k$  est efficace et  $dX_k \geq f_{opt}$ . Calculer la valeur du paramètre  $B_k$  défini dans l'équation  $B_k = (d_{j_k}^k - \sum_{i \in I_k} d_i^k \times y_{k,ij_k})$ . Si cette valeur n'est pas égale à zéro, alors aller à (c), autrement faire  $\gamma = \gamma \setminus \{j_k\}$  et aller à (a). Si  $X_k$  n'est pas efficace ou  $dX_k < f_{opt}$ , alors aller à (c) (l'arête doit être explorée quelle que soit la valeur de  $B_k$ ).

(c) Explorer l'arête  $E_{j_k}$ , en recherchant les solutions réalisables de  $(P_1(D))$  correspondant à  $\theta$  et tester pour l'efficacité à partir de  $\theta = \theta_{j_k}^0$  jusqu'à  $\theta = 0$  ( $\theta$  est un nombre entier positif). Dès qu'une solution efficace  $X'_k$  vérifiant  $dX'_k \geq f_{opt}$  est trouvée pour une valeur de  $\theta$ , remplacer  $X_{opt}$  par  $X'_k$  et  $f_{opt}$  par  $dX'_k$  et aller à la sous-étape 3.2. S'il n'y a aucune solution efficace entière sur l'arête, alors faire  $\gamma = \gamma \setminus \{j_k\}$  et aller à (a).

**3.2** Soit  $k = k + 1$ . La nouvelle région tronquée  $D_k$  est obtenue comme sous-ensemble de  $D_{k-1}$  en appliquant la coupe  $dx \geq f_{opt}$  (une coupe de type II) puis en utilisant la méthode dual du simplexe et la méthode des coupe de Gomory autant de fois que nécessaire pour trouver une nouvelle solution optimale  $X_k$ . Faire  $X_{opt} = X_k$  et  $f_{opt} = dX_k$  et aller à la sous-étape 3.1.

**3.3** Soit  $k = k + 1$ . La nouvelle région tronquée  $D_k$  est obtenue comme sous-ensemble de  $D_{k-1}$  (ou  $D$  si  $k = 1$ ) en appliquant la coupe dual de Dantzig ou la coupe de type 1 puis en utilisant la méthode dual du simplexe et la méthode des coupe de Gomory autant de fois que nécessaire pour trouver une nouvelle solution optimale  $X_k$  soit  $f^k = dX_k$ .

Si la solution  $X_k$  est efficace et  $X_k > f_{opt}$ , faire  $X_{opt} = X_k$  et  $f_{opt} = dX_k$  et aller à la sous-étape 3.1. Sinon aller à la sous-étape 3.1, sans mise à jour de  $X_{opt}$  et  $f_{opt}$ .

**Etape terminale :** La procédure prend fin, ou bien à la première étape si la solution  $X^0$  est efficace, ou lorsque l'impossibilité des opérations de pivot indique que la région courante ne contient aucun point entier réalisable. La solution optimale est alors  $X_{opt}$  et sa valeur sur le critère  $f$  est  $f_{opt}$ .

### 3.6.3 Illustration

Considérons l'exemple suivant

$$(M) \begin{cases} \text{"max"} & Z_1 = x_1 + 2x_2 \\ \text{"max"} & Z_2 = 3x_1 - 2x_2 \\ \text{"max"} & Z_3 = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 \leq 11 \\ & 2x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.8)$$

Le problème principal est

$$(P) \begin{cases} \max & w = -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.c} & x_1, x_2 \in E \end{cases}$$

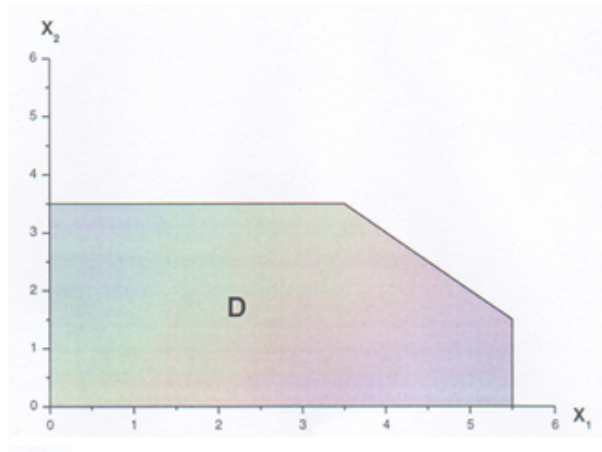


FIG. 3.2 – *Domaine d'admissibilité*  $D_1 = D = S \cap \mathbb{Z}^2$

**Etape 1** Le problème relaxé ( $P_R$ ) est résolu. La valeur optimale de  $f$  est  $f^0 = 0$  pour  $x^* = (0,0)$  qui n'est pas efficace pour le problème (3-7). Aller à l'étape2.

**Etape 2** Nous résolvons le problème ( $P_1(D)$ ) et posons  $f_{opt} = -\infty$ . Les résultats de la résolution du problème ( $P_1(S)$ ) sont récapitulés dans le Tableau 3.1.

Base	Valeur de variable de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	4	1	0	1	0	0	-1
$x_4$	3	0	0	-2	1	0	2
$x_2$	3	0	1	0	0	0	1
$x_5$	1	0	0	0	0	1	-2
$Z_{1,j}^1 - c_j^1$	10	0	0	1	0	0	1
$w_j^1 - d_j^1$	-17	0	0	-2	0	0	-1

TAB. 3.1 – Tableau optimal correspondant à  $X_1$

La solution optimale  $X_1 = (4,3)$  est unique; elle est ainsi efficace (proposition. On la considère comme une première solution efficace correspondant à  $dX_1 = -17$ , d'où  $f_{opt} = -17$  et  $X_{opt} = (4,3)$ .

$K = 1$ ;  $I_1 = \{1,2,4,5\}, N_1 = \{3,6\}$ ; On pose  $\gamma = \Gamma_1 = \{3,6\}$  Soit  $j_1 = 3 \in \gamma$  comme  $X_1$  est efficace et  $dX_1 = -17 \geq f_{opt} = -17$ , on calcule la valeur de  $\beta_1$ ;  $\beta_1 = 0 - [(-2)(-1) + (-3)(0)] = 2 > 0$ . Nous commençons à explorer l'arête  $E_3$ ; on calcule  $\theta_3^0 = [\min\{\frac{4}{1}\}] = 4$ .

Pour  $\theta = 4$  ( la plus grande valeur de  $\theta$  rapportant une augmentation de  $f$ ), la solution correspondante sur l'arête  $E_3$  est :

$$\begin{cases} x_1^1 = 4 - 4(1) = 0 \\ x_4^1 = 3 - 4(1) = 0 \\ x_2^1 = 3 - 4(0) = 0 \\ x_5^1 = 1 - 4(0) = 0 \\ x_3^1 = 4 \\ x_6^1 = 0 \end{cases}$$

La solution  $X'_1 = (0,3)$  est examinée pour son efficacité et nous obtenons  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ ;  $\theta^* = 0$ . Donc,  $X'_1$  est efficace.

On calcule  $f(X'_1) = (-2, -3)(0,3)' = -9$  Comme  $f'_1 \geq f_{opt} = -17$ , alors  $f_{opt=-9}$  et  $X_{opt} = (0,3)$ .

Soit  $\mathbf{k} := \mathbf{k} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$ . On coupe par  $-2x_1 - 3x_2 \geq -9$  (voir Fig 3.3).

Après avoir ajusté le tableau ci-dessus à la région d'admissibilité réduite, et après l'application de la méthode dual simplexe et de la coupe de Gomory, la solution optimale est  $X_2 = (0,3)$ . qui est efficace. Elle correspond à  $f(X_2) = -2$ ;  $f_{opt} = -9$  et  $X_{opt} = (0,3)$  (voir tableau 3.2).  $I_2 = \{1,2,3,4,5\}, N_2 = \{6,7\}$ .

Soit  $\Gamma_1 = \{j \in N_2 / z_{1,j}^2 - c_j^1 \geq 0 \text{ et } \phi_j^2 - d_j \leq 0\} = \{6,7\} \neq \emptyset$ .

Soit  $\gamma = \Gamma_2$ .

Soit  $j_2 = 6$ ;  $\theta_6^0 = 3$ . comme  $X_2$  est efficace et  $dX_2 = f_{opt} = -9$ , on calcule la valeur de  $\beta_2$ ;  $\beta_2 = 0 - [(-2)(\frac{-3}{2}) + (-3)(1)] = 0$ . On n'explore pas  $E_{j_2}$ .

Soit  $\gamma = \gamma \setminus \gamma_6$  et considérant le second indice  $j_2 = 7 \in \gamma$ ;  $\theta_7^0 = [\min\{\frac{0}{\frac{1}{2}}\}] = 0$ .

Nous constatons qu'aucune solution efficace entière n'existe dans cette direction.

Base	Valeur de variable de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	0	1	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_4$	11	0	0	0	1	0	3	-1
$x_2$	3	0	1	0	0	0	1	0
$x_5$	1	0	0	0	0	1	-2	0
$x_3$	4	0	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$Z_{1,j}^2 - c_j^1$	6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$w_j^2 - d_j^2$	-9	0	0	0	0	0	0	-1

TAB. 3.2 – Tableau optimal correspondant à  $X_2$

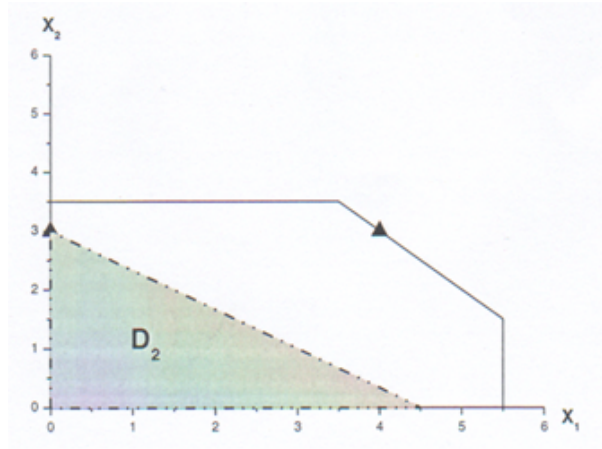


FIG. 3.3 – Le domaine réduit  $D_2 = S_2 \cap \mathbb{Z}^2$

$\gamma = \gamma \setminus \{7\} = \emptyset$ ; il n'y a donc aucune arête incidente contenant une solution efficace.

Pour  $\mathbf{k}=3$ . On coupe le domaine courant par  $\sum_{j \in N_2 \setminus \{7\}} x_j \geq 1 \Leftrightarrow x_6 \geq 1$ .

A partir de la troisième ligne de la matrice du simplexe dans le tableau 3.2, nous pouvons écrire l'équation  $x_2 + x_6 = 3 \Rightarrow x_6 = 3 - x_2 \Leftrightarrow 3 - x_2 \geq 1 \Leftrightarrow x_2 \leq 2$  (voir Fig 3.4).

Nous ajoutons cette contrainte à la dernière ligne du tableau 3.3 et appliquons la

méthode dual simplexe pour obtenir le tableau 3.3. La solution trouvée est  $X_3 = (1.2)'$  et après résolution du problème  $(P(X_3))$  pour tester l'efficacité, on trouve que  $\psi_1 = 4, \psi_2 = 4, \psi_3 = 0, x_1 = 3, x_2 = 3$  et  $\theta^* = 8$ , par conséquent  $X_3$  n'est pas efficace.

On a  $I_3 = \{1,2,3,4,5,6,7\}, N_3 = \{8,9\}$ .

$\Gamma_3 = \{9\} \in \gamma \neq \emptyset$ . Soit  $\gamma = \Gamma_3$ .

Soit  $j_3 = 9 \in \gamma$  et calculons  $\theta_9^0 = [\min\{\frac{1}{1}\}] = 1$ . Pour  $\theta = 1$ . la solution

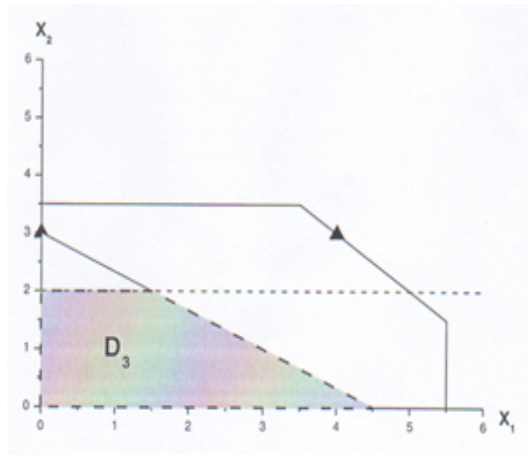


FIG. 3.4 – Le domaine réduit  $D_3 = S_3 \cap \mathbb{Z}^2$

réalisable correspondant à l'arête  $E_9$  est  $X'_3 = (0,2)$ , qui n'est pas efficace ( car  $\psi_1 = 4, \psi_2 = 4, \psi_3 = 0, x_1 = 3, x_2 = 3$  et  $\theta^* = 8$ , ). On fait  $\gamma = \Gamma \setminus \{9\} = \emptyset$ .

Soit  $k=4$  et coupons par  $x_8 \geq 1$  ou d'une manière équivalente,  $x_2 \leq 1$ ; nous obtenons:

Base	Valeur de variable de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_1$	1	1	0	0	0	0	0	0	-2	1
$x_4$	9	0	0	0	1	0	0	0	4	-2
$x_2$	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$x_5$	3	0	0	0	0	1	0	0	-2	0
$x_3$	4	0	0	1	0	0	0	0	1	-1
$x_6$	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0
$x_7$	1	0	0	0	0	0	0	1	1	-2
$Z_{1,j}^3 - c_j^1$	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$w_j^3 - d_j^3$	-8	0	0	0	0	0	0	0	1	-2

TAB. 3.3 – Tableau optimal correspondant à  $X_3$

La région réduite comme montré dans la figure 3.5

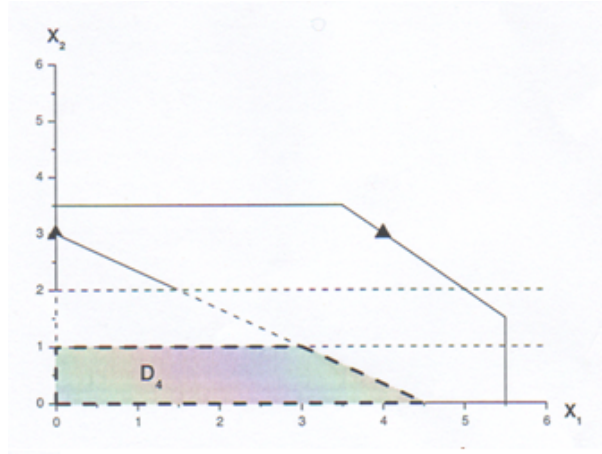


FIG. 3.5 – Le domaine réduit  $D_4 = S_4 \cap \mathbb{Z}^2$

$X_4 = \{3,1\}$ , non efficace (car  $\theta^* = 8 \neq 0$ ).

$I_4 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ,  $N_4 = \{9,10\}$ ;  $\Gamma_4 = \{9\} \neq \emptyset$ . Soit  $\gamma = \Gamma_4$  et  $j_4 = 9 \in \gamma$ ;  $\theta_9^0 = [\min\{\frac{0}{1}\}] = 0$ . Nous n'obtenons aucune solution réalisable entière dans cette direction.

$\gamma = \gamma \setminus \{9\}$

Soit  $k=5$ ; nous coupons par  $\sum_{j \in N_4 \setminus \{9\}} x_j \geq 1 \Leftrightarrow x_{10} \geq 1$ . ce qui est équivalent à  $x_2 \leq 0$  (comme montré dans Fig. 3.6).

Base	Valeur de variable de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
$x_1$	3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-2
$x_4$	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4
$x_2$	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$x_5$	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2
$x_3$	3	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
$x_6$	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
$x_7$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	1
$x_8$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
$Z_{1,j}^4 - c_j^1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$w_j^4 - d_j^4$	-9	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	1

TAB. 3.4 – Tableau correspondant à  $X_4$

En ajoutons cette contrainte à la dernière ligne du tableau précédent et en résolvant le nouveau problème, nous obtenons le Tableau 3.5.  $X_5 = (4,0)$ , ( $\theta^* = 13 \neq 0$ ) qui n'est pas efficace.

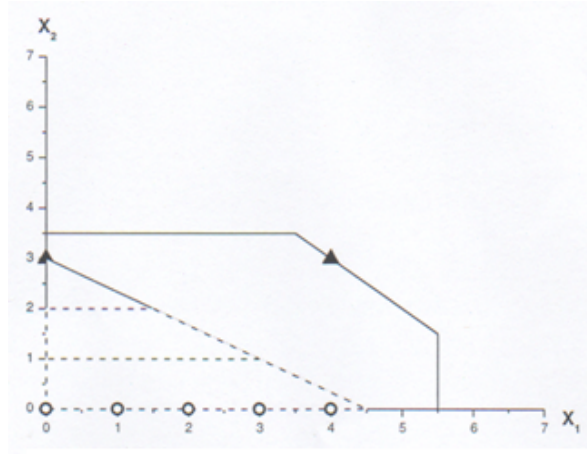


FIG. 3.6 – Le domaine réduit à intervalle de l'axe  $X_1$

Base	Valeur de variable de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
$x_1$	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1
$x_4$	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	-2
$x_2$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$x_5$	7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	0
$x_3$	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
$x_6$	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1
$x_9$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
$x_8$	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0
$x_{10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
$x_7$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-2
$Z_{1,j}^5 - c_j^1$	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$w_j^5 - d_j^5$	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2

TAB. 3.5 – Tableau optimal correspondant à  $X_5$

$I_5 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, N_5 = \{11,12\}; \Gamma_5 = \{12\} \neq \emptyset$ . Soit  $\gamma = \Gamma_5$  et prenons  $: j_5 = 12 \in \gamma$ ; on a  $\theta_1^0 = \lfloor \min\{\frac{4}{1}\} \rfloor = 4$ .

Pour  $\theta = 4, X'_5(4) = (0,0)$  ( $\theta^* = 18 \neq 0$ )  $\Rightarrow X'_5(4)$  n'est pas efficace ;

Pour  $\theta = 3, X'_5(3) = (1,0)$  ( $\theta^* = 16 \neq 0$ )  $\Rightarrow X'_5(3)$  n'est pas efficace ;

Pour  $\theta = 2, X'_5(2) = (2,0)$  ( $\theta^* = 13 \neq 0$ )  $\Rightarrow X'_5(2)$  n'est pas efficace ;

Pour  $\theta = 1, X'_5(1)$  n'est pas efficace. Aucune des solutions sur l'arête  $E_{12}$  n'est efficace.

$\gamma = \gamma \setminus \{12\} = \emptyset$ .

Soit  $\mathbf{k}=\mathbf{6}$ ; coupons par  $x_{11} \geq 1 \Leftrightarrow x_2 \leq -1$  hors de la région réalisable; l'algorithme se termine. La solution optimale est  $f_{opt} = -9$  et  $X_{opt} = (0,3)'$ .

# Chapitre 4

## Étude comparative

### Introduction

Dans ce chapitre nous étudions et comparons les deux méthodes les plus récentes sur le problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de programmation multi objectif dans le cas entier.

### 4.1 Méthode de Jesus M Jorge [24]

#### 4.1.1 Notation et résultat de base

Soit  $x, y$  deux vecteurs  $n$ -dimensionnel.

(i)  $x \leq y \Leftrightarrow x_j \leq y_j \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

(ii)  $x \leq y \Leftrightarrow x \leq y$  et  $x \neq y$ .

(iii)  $\mathbb{Z}_+^n$  est l'ensemble  $\{x \in \mathbb{Z}^n / x \geq 0\}$ .

(iv)  $C^{\geq}$  est utilisé pour représenter le cône polaire semi-positif du cône généré par les lignes de  $C$ , c'est-à-dire  $\{d \in \mathbb{R}^n / Cd \geq 0\} \cup \{0\}$ ,

(v)  $B^k = \{0, 1\}^k$

(vi)  $e$  est vecteur colonne des uns de dimension appropriée.

Le problème MOILP est formulé sans perte de généralité comme :

$$VMAX\{Cx / x \in S\} \quad (M)$$

Où  $S \equiv \{x \in \mathbb{Z}_+^n / Ax \leq b\}$  est l'ensemble réalisable du problème, avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $C$  est une matrice  $k \times m$  définissant un nombre  $k \geq 2$  de fonctions objectives.  $E$

l'ensemble de solutions efficaces du problème  $(M)$  :

**Théorème 4.1.1.** [40]  $\bar{x} \in E$  si et seulement si  $(\bar{x} + C^{\geq}) \cap S = \{\bar{x}\}$

Considérons le problème suivant défini comme

$$\max\{vx / x \in E\} \quad (P)$$

Où  $v$  est un vecteur réel  $n$ -dimensionnel. Soit le problème relaxé

$$\max\{vx / x \in S\} \quad (R)$$

Qui peut être résolu en utilisant des techniques standard de programmation linéaire en nombre entiers.

### 4.1.2 Formulation de l'algorithme

D'un point de vue théorique, pour la formulation de l'algorithme nous avons besoin du fait que l'ensemble réalisable  $S$  soit borné.

**Etape 0. Initialisation.**

Soit  $v^{inf} = -\infty$ ,  $v^{sup} = +\infty$  et  $l = 1$ .

Résoudre  $R \equiv \max\{vx / x \in S\}$ .

Si  $R$  est non réalisable = stop,  $P$  est non réalisable. Sinon soit  $x^l$  une solution optimale de  $R$ .

**Etape1 :**

Si  $x^l \in E = STOP$ .  $x^{inf} = x^l$ , est une solution optimale de  $P$ .

Sinon, poser  $v^{sup} = vx^l$  et aller à l'étape 2.

**Etape2 :**

Trouver  $\hat{x}^l \in E$  tel que son vecteur critère domine  $Cx^l$  et soit  $\bar{x}^l$  une solution optimale du problème.

$$Tl \equiv \{\max vx / Cx = C\hat{x}^l, x \in S\}$$

Si  $vx > v^{inf}$  poser  $v^{inf} = v\hat{x}^l$  et  $x^{inc} = \bar{x}^l$ .

Si  $v^{inf} = v^{sup} = STOP$ .  $x^{inc}$  est une solution optimale de  $P$ .

**Etape 3 :**

Soit  $R_l \equiv \max\{vx / x \in S - \bigcup_{s=1}^l D_s\}$ , où  $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n / C\bar{x}^s \geq Cx\}$ ,

Si  $R_l$  est non réalisable = STOP.  $x^{inc}$  est une solution optimale de  $P$ .

Sinon, soit  $x^{l+1}$  une solution optimale de  $R_l$

Si  $v x^{l+1} \leq v^{inf} = STOP$ . est une solution optimale de  $P$ .

Sinon, poser  $l = l + 1$  et aller à l'étape 1.

### 4.1.3 Illustration

Soit  $M \equiv \max\{(x_1 - 2x_2, -x_1 + 4x_2) / x \in S\}$  où  $S$  est donnée par

$$\{x \in \mathbb{Z}_+^2 / -2x_1 + x_2, x_1 \leq 3, x_2 \leq 2\}$$

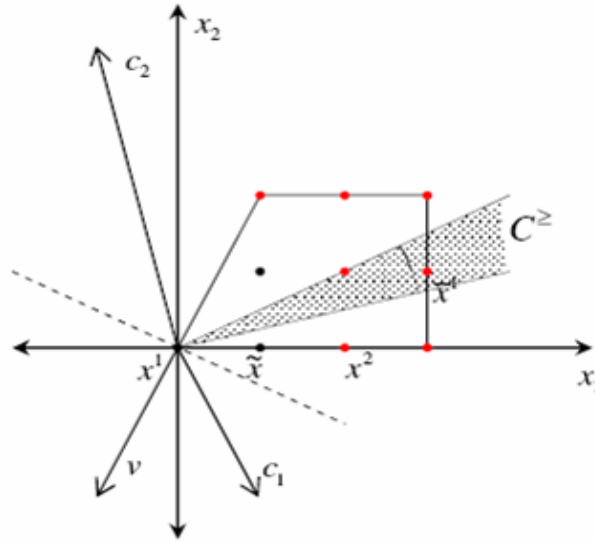


FIG. 4.1

Dans cet exemple, il est facile de voir que  $S$  contient 10 points réalisables (voir Fig 4.1).

En utilisant la caractérisation de l'efficacité dans le théorème 4.1.1, on peut montrer que sept points sont efficaces. Particulièrement, l'ensemble efficace  $E$  est donnée par :

$$E = \{(2, 1), (3, 0), (2, 0), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

On veut résoudre le problème  $P$  donné par :

$$\max\{-x_1 - 2x_2 / x \in E\}$$

Graphiquement, il est facile de voir que la valeur optimale de  $P$  est -2, qui est atteinte à la solution efficace  $(2,0)$ .

L'application de l'algorithme donne ce qui suit : **Etape 0**

On prend  $v^{inf} = -\infty$ ,  $v^{sup} = +\infty$ , et  $l = 1$ . Après avoir résolu  $\{C_i x / x \in S\} (i = 1, 2)$  on pose  $F = (-3, -3)'$

$R \equiv \max\{vx / x \in S\}$  est résolu donnant  $x^1 = (0,0)'$  comme solution optimale. Soit  $Z^1 = Cx^1 = (0, 0)$  son image dans l'espace des critères.

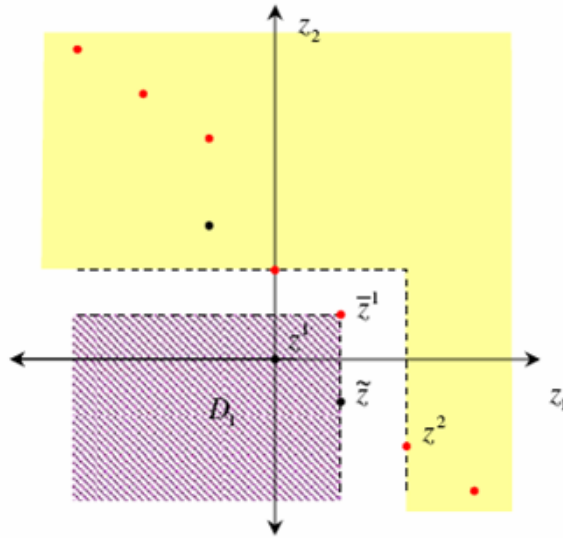


FIG. 4.2

**Itération 1 :**

**Etape 1 :**

Afin de tester l'efficacité de  $x^1$  on résout le problème  $EK(x^1)$ ,

ie:  $\max\{es / Cx - Is = Cx^1, x \in S, s \geq 0\}$ .

La valeur optimale de  $EK(x^1)$ , est 2 qui s'achève au point  $\hat{x}^1 = (3, 1)$  d'où  $\hat{x}^1 \in E$  et  $\hat{x}^1 \notin E$  puisque  $C\hat{x}^1 \geq Cx^1$ .

On pose  $v^{sup} = vx^1 = 0$

**Etape 2 :**

On résout  $T_1$  définit comme

$$\max\{vx / Cx = C\hat{x}^1, x \in S\}$$

On trouve,  $\bar{x}^1 = \hat{x}^1$ . Soit  $\bar{Z}^1 = \bar{x}^1 = (1, 1)'$

Puisque  $-5v\bar{x}^1 > v^{inf} = -\infty$ , on pose  $v^{inf} = v\bar{x}^1 = -5$  et  $x^{inc} = \bar{x}^1$ .

**Etape 3 :**

La solution optimale de  $R'_1$

$$\max\{vx / Cx \geq \text{diag}(C\bar{x}^s + e)Iy^1 + \text{diag}(M)(e - y^1), ey^1, x \in S, y^1 \in B^2\}$$

est  $x^2 = (2, 0)'$ ,  $Z^2 = Cx^2 = (2, -2)'$  et  $vx^2 = -2$ .

**Itération 2 :**

**Etape 1 :**

Quand le problème  $EK(x^2)$

$$\max\{es / Cx - Is = Cx^2, x \in S, s \geq 0\}$$

Est résolu, il donne 0 comme valeur optimale donc  $x^2 \in E$ . Ceci termine l'algorithme avec  $x^{inc} = x^2$  comme solution optimale de  $P$ .

## 4.2 Méthode de Chaabane [9]

Soit le problème MOILP définit comme suit :

$$M \begin{cases} \max Z_i = C^i x, & i = 1, \dots, p \\ \text{s.c } x \in D \end{cases}$$

Où  $D = S \cap \mathbb{Z}^n$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ ,  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $p \geq 2$ ,  $C^1, \dots, C^p \in \mathbb{Z}^n$  sont des vecteur lignes,  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs. L'ensemble des solutions efficaces du problème  $M$  est noté  $E$ . Soit  $\psi$  une application linéaire :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longrightarrow (C^1, C^2, \dots, C^p). \end{aligned}$$

On a  $\psi(S) = \{Z \in \mathbb{R}^p / Z = (C^1x, C^2x, \dots, C^px), x \in S\}$  L'efficacité et la non dominance sont définis comme suit :

**Définition 4.2.1.** Un point  $\hat{x} \in D$  est une solution efficace si et seulement si il n'existe pas de  $x \in D$  tel que  $Z_i(x) \geq Z_i(\hat{x})$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$  et  $Z_i(x) > Z_i(\hat{x})$  pour au moins  $i$ . Autrement  $\hat{x}$  n'est pas efficace et  $(Z_1(\hat{x}), \dots, Z_p(\hat{x}))$  est dit dominé.

Le problème central que nous étudions est :

$$P \begin{cases} \max w = dx, \\ s.c \ x \in E. \end{cases}$$

Où  $d$  est un vecteur ligne  $n$ -dimensionnel et entier. Soit le problème relaxé

$$P_R \begin{cases} \max w = dx, \\ s.c \ x \in D. \end{cases}$$

### 4.2.1 Résultats préliminaires

Dans cette section on présente les résultats théoriques sur lesquels est basé l'algorithme.

**Théorème 4.2.1.** Si  $\hat{x}$  est une solution du problème

$$P_\lambda \begin{cases} \max Z_\lambda = \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x), \\ s.c \ x \in S. \end{cases}$$

$\lambda > 0$ , alors  $\hat{x}$  est une solution efficace.

Si  $\hat{x}$  est une solution efficace et  $\psi(S)$  est convexe, alors il existe un vecteur  $\lambda$  à composantes  $\lambda_k > 0$  tel que  $\hat{x}$  est solution du problème  $(P_\lambda)$

**Teste de l'efficacité :**

**Théorème 4.2.2.** soit  $x^*$  un élément arbitraire de la région  $D$ .  $x^* \in E$  si et seulement si la valeur optimale de la fonction objective  $\theta$  est nulle dans le problème de la programmation linéaire entier mixte suivant :

$$(P(x^*)) \begin{cases} \max \theta = \sum_{i=1}^p \psi_i, \\ s.c \begin{cases} CX - I\psi = CX^*, \\ X \in D; \psi_i \text{ sont des variables réelles } \geq 0, \forall i \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $C$  est la matrice  $m \times n$ ,  $C^i$ ,  $i = 1, \dots, p$  est la  $i^{eme}$  ligne,  $I$  la matrice d'identité  $p \times p$  et  $\psi = (\psi_i) i = 1, \dots, p$ .

### Coupe de type I :

Soit  $D_k$  la région réalisable courante à l'iteration  $k$ .

- ◇  $X_k$  est l'une des solutions optimales entières du problème  $(P_\lambda)$  obtenu dans  $D_k$ ,
- ◇  $B_k$  est la base associée avec la solution  $x_k$ ,
- ◇  $a_{kj}$  est le vecteur activité de  $x_{kj}$  selon la région courante  $D_k$ ,
- ◇  $I_k = \{j/ \text{ le vecteur } a_{k,j} \text{ est une colonne de la base } B_k, \}$  (indices de variables de base),
- ◇  $N_k = \{j/ \text{ le vecteur } a_{k,j} \text{ est une colonne de la base } B_k, \}$  (indices de variables hors base),
- ◇  $Y_{k,j} = (y_{k,ij}) = (B_k)^{-1}a_{kj}$ .

**Définition 4.2.2.** Soit  $j_k \in N_k$ . Une arête  $E_{j_k}$  incidente à la solution  $x_k$  est définie comme l'ensemble

$$E_{j_k} = \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_{k,j} - \theta_{j_k} y_{k,ij_k}, \text{ pour } i \in I_k \\ (x_i) \in D_k / \begin{array}{l} x_{j_k} = \theta_{j_k} \\ x_\alpha = 0 \text{ pour tout } \alpha \in N_k \setminus \{j_k\} \end{array} \end{array} \right\}.$$

Où  $0 < \theta_{j_k} \leq \min_{i \in I_k} \left\{ \frac{x_{k,j}}{y_{k,ij_k}}; y_{k,ij_k} > 0 \right\}$ ,  $\theta_{j_k}$  est entier positif et  $\theta_{j_k} \times y_{k,ij_k}$  sont des entiers pour tout  $i \in I_k$  si tel valeurs entières existent.

**Théorème 4.2.3.** soit  $x_1$  une solution du problème  $(P_\lambda)$ . Toutes les solutions réalisables du problème  $(P_\lambda)$  alterne à  $x_1$  sur l'arête  $E_{j_1}$  de la région  $D$  (ou la région tronquée  $D_1$ ) émanant d'elle dans la direction du vecteur  $a_{1,j_1}$ ,  $j_1$  se situe dans le demi espace

$$\sum_{j \in N_1 \setminus \{j_1\}} x_j < 1.$$

## 4.2.2 L'algorithme

Dans cet algorithme, un ensemble noté  $Sol_{eff}$  est construit. Il contient toutes les solutions efficaces rencontrées lors de l'optimisation du critère  $w$ .

### Etape 1

La première étape consiste à résoudre le problème

$$(P_R) \left\{ \begin{array}{l} \max w = dx \\ s.c \ x \in D \end{array} \right.$$



- ◇  $B_k$  est la base associée avec la solution  $x_k$ ,
- ◇ Sinon, soit  $x_k$  une solution optimale de  $(P_\lambda^k)$ .
- ◇ Si  $x_k$  est efficace, alors  $Sol_{eff} = Sol_{eff} \cup \{x_k\}$ ,  $X_{opt} = X_k$ ,  $w_{opt} = dX_{opt}$  et aller à l'étape 3.
- ◇ Sinon aller à l'étape 4.

**Etape 4** On explore toutes les arêtes  $E_{jk}$  incidente à  $X_k$ . Soit  $J_k = \{j \in N_k / Z_{\lambda,j} - c_j = 0\}$ .

- ◇ Si  $J_k \neq \emptyset$  alors soit  $\gamma = J_k$  et aller à l'étape 4.1.
- ◇ Sinon aller à l'étape 5.

**4.1** Si  $\gamma = \emptyset$  alors, soit  $j_k \in J_k$  et aller à l'étape 6. Sinon sélectionner  $j_k \in J_k$  et calculer  $\theta_{jk}^0$ , la partie entière de  $\min\{\frac{x_{k,j}}{y_{k,ij_k}} / y_{k,ij_k} > 0\}$

- ◇  $\theta_{jk}^0 = 0$ , alors il n'existe aucune solution entière sur l'arête  $E_{jk}$ ; poser  $\gamma = \gamma / \{j_k\}$  et aller à la sous étape 4.1
- ◇ Sinon, si  $\theta_{jk}^0 \geq 1$ , aller à la sous étape 4.2

**4.2** Sur l'arête  $E_{jk}$  chercher une solution entière de  $(P_\lambda^k)$  correspondant à  $\theta$  commençant de  $\theta = 1$  jusqu'à  $\theta_{jk}^0$  ( $\theta$  est un entier positif) et tester pour l'efficacité.

Si une solution efficace entière est rencontrée, soit,  $X'_k$ , et si elle est telle que  $dX' > w_{opt}$ , poser  $Sol_{eff} = Sol_{eff} \cup \{X'_k\}$ ,  $X_{opt} = X'_k$  et  $w_{opt} = dX'_k$ ; aller à l'étape 3. S'il n'existe aucune solution efficace entière sur cette arête poser  $\gamma = \gamma / \{j_k\}$  et aller à la sous étape 4.1.

**Etape 5** Soit  $k = k + 1$ . La nouvelle région tronquée est  $D^k$ , obtenue comme un sous ensemble de  $D^{k-1}$  (ou  $D$ , si  $k = 1$ ) en appliquant une coupe de type I et en utilisant la méthode dual simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire pour obtenir une nouvelle solution optimale  $X_k$ . Si cette solution est efficace ( faire le teste) et  $dX_k > w_{opt}$ , faire  $Sol_{eff} = Sol_{eff} \cup \{X_k\}$ ,  $X_{opt} = X_k$ ,  $w_{opt} = dX_{opt}$ . Aller à l'étape 4.

**Etape 6 (étape finale)** la solution optimale est donc  $X_{opt}$  et la valeur du critère correspondant est  $w_{opt}$ . La liste des solutions efficaces parcourues améliorant  $w$  est  $Sol_{eff}$ .

### 4.2.3 Exemple

Considérons le problème MOILP suivant :

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \text{'' max '' } Z_1 = x_1 - 3x_2 \\ \text{'' max '' } Z_2 = x_1 + 3x_2 \\ s.c \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ \quad \quad x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ \quad \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Le problème principal est

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max w = -3x_1 - 2x_2 \\ s.c \quad x_1, x_2 \in E \end{array} \right.$$

On prend les bornes inférieures des deux fonctions objectifs  $-M_1 = -12$ ,  $-M_2 = 0$  et  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  les poids de la somme pondérée  $Z_\lambda = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 = x_1$  dans le problème  $(P_\lambda^0)$ .

**Etape 1**  $w \leq 0$ , donc la solution optimale du problème relaxé  $(P_R)$  est  $(0,0)$  qui n'est pas efficace.

**Etape 2** Posons  $k = 0$ ,  $H^0 = D$  et cherchons une première solution efficace en résolvant le problème

$$(P_\lambda^0) \left\{ \begin{array}{l} \max Z_\lambda = x_1 \\ s.c \quad (x_1, x_2) \in H^0 \end{array} \right.$$

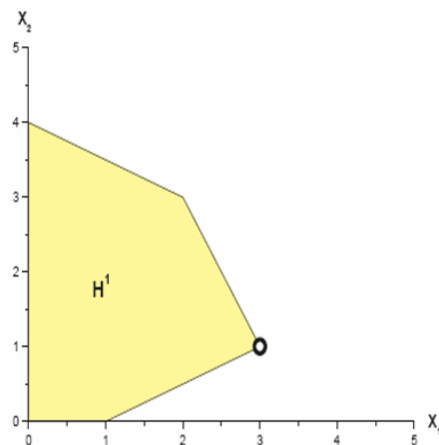


FIG. 4.3 – Région d'admissibilité  $H^1$



Considérons le nouveau problème

$$H^1 = H^0 \cap \left\{ x \in D / \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 13y_1^1 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 + 7y_1^2 \leq 0 \\ y_1^1 + y_1^2 \geq 1 \\ y_1^1 \leq 1 \\ y_1^2 \leq 1 \\ y_1^1 \in \mathbb{N} \\ y_1^2 \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

On a

$$(P_\lambda^1) \begin{cases} \max & Z_\lambda = x_1 \\ \text{s.c} & (x_1, x_2) \in H^1 \\ & -3x_1 - 2x_2 \geq -11 + 1 \end{cases}$$

La solution du problème est  $X_1 = (2,2)'$  qui est efficace et le vecteur non dominé correspondant est  $(-4,8)'$ .

Comme  $X_1$  est efficace et  $dX_1 > w_{opt}$ , on pose  $Sol_{eff} = Sol_{eff} \cup \{(2,2)'\}$ ,  $X_{opt} = (2,2)'$  et  $w_{opt} = dX_1 = -10$ .

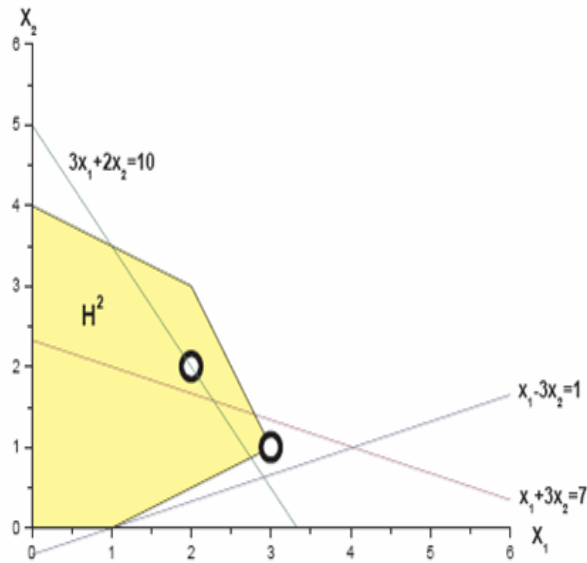


FIG. 4.4 – La région réduite  $H^2 \cup \{(0,1)'\}$

**Etape 4** Soit  $k = k + 1$  : le problème suivant à résoudre est :

$$(P_\lambda^2) \begin{cases} \max & Z_\lambda = x_1 \\ \text{s.c} & s \in H^2 \\ & -3x_1 - 2x_2 \geq -10 + 1 \end{cases}$$

$$H^2 = H^1 \cap \left\{ x \in D / \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 9y_1^2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 + 9y_2^2 \leq 0 \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \\ y_1^2, y_2^2 \leq 1 \\ y_1^2, y_2^2 \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Nous avons  $X' = (1,0)'$ , qui est efficace. Nous avons  $dX' > w_{opt}$ , on pose  $X_{opt} = (1,0)$  et  $w_{opt} = dX' = -3$ .

**Remarque 4.2.3.1.** La solution  $X_2 = (1,0)'$  n'est pas unique ; on peut trouver en premier lieu la solution  $X_k = (1,3)'$  puis on explorant une arête incidente à cette solution, on revient à  $X'_2 = (1,0)'$  qui est efficace.

**Etape 5 :**  $K = 3$  on résout le nouveau problème :

$$(P_\lambda^3) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad Z_\lambda = x_1 \\ s.c \quad x_1, x_2 \in H^3 \\ \quad \quad -3x_1 - 2x_2 \geq -3 + 1 \end{array} \right.$$

$$H^3 = H^2 \cap \left\{ x \in D / \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 14y_1^3 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 + 2y_2^3 \leq 0 \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \\ y_1^3, y_2^3 \leq 1 \\ y_1^3, y_2^3 \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Le problème devient impossible i.e. la partie restante notée  $D'$  (voir Fig 4.5) ne contient aucun entier. Par conséquent la procédure prend fin avec  $X_{opt} = (1,0)'$  solution du problème  $P$  et  $w_{opt} = -3$ .

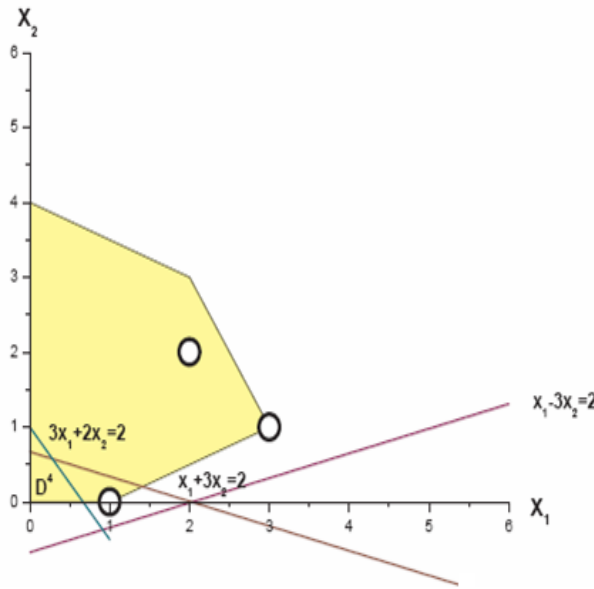


FIG. 4.5 – La région réduite  $D' \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$

### 4.3 Comparaison des deux méthodes

Dans sa méthode Jesus M Jorge procède comme suit dans l'étape 1 l'algorithme teste l'efficacité de la solution  $x_i$ , terminant, s'il trouve qu'elle est efficace, ou en obtenant dans l'étape 2 une solution efficace  $\hat{x}^l$  tel que son vecteur critère domine  $Cx^l$ . Les deux procédures peuvent être effectivement faite en résolvant le problème mixte suivant, inspiré par le test donné [13] :

$$\max\{es / Cx - Is = Cx^l, x \in S, s \geq 0\} \quad (EK(x^l))$$

Si la valeur optimale de  $EK(x^l)$  est 0, alors  $x^l \in E$ . Sinon, chaque solution optimale  $\hat{x}^l$  de  $EK(x^l)$  est prouvée être une solution efficace de  $M$  et son vecteur critère domine  $Cx^l$  ie  $C\hat{x}^l \geq Cx^l$ . Dans l'étape 2, dans le but de trouver une solution de  $P$  dans l'espace de décision, nous devons résoudre le problème:

$$\max\{vx / Cx = C\hat{x}^l, x \in F\} \quad (T_1)$$

Pour ce problème, au moins une solution initiale existe, qui est  $\hat{x}^l$  et qui doit être optimale. Dans l'étape 3 on donne une nouvelle solution non générée précédemment et non dominée

par aucune des solutions efficaces trouvées et ceci grâce à la résolution du problème:

$$R_l \equiv \max\{vx/x \in F - \bigcup_{s=1}^l D_s\}.$$

Vu la difficulté du problème  $R_l$  un problème équivalent est donné qui est :

$$R'_l \equiv \max\{vx/ Cx \geq \text{diag}(C\bar{x}^s + e)(y^s) + \text{diag}(F)(e - y^s), ey^s \geq 1, x \in S, y^s \in B^k, s \in \{1, \dots, l\}\}$$

Où  $\text{diag}(\cdot)$  est une matrice diagonale.  $F$  est un vecteur où chaque composante  $F_i (i = 1, \dots, k)$  est une borne inférieure de la  $i^{\text{eme}}$  fonction objective du problème  $M$ . En pratique,  $F_i$  est pris comme la valeur optimale du problème linéaire  $\min C_i x / Ax \leq b, x \geq 0$  Où  $C_i$  est la  $i^{\text{eme}}$  ligne de  $C$ . Par contre la méthode de Chaabane procède comme suit:

On part d'une solution efficace  $X_0$  obtenue en résolvant le problème  $(P_\lambda^0)$  si elle existe.

$$(P_\lambda^0) \begin{cases} \max & Z_\lambda = \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x) \\ \text{s.c} & x \in D. \end{cases}$$

En initialisant  $w_{opt}$  à la valeur du critère principal en cette solution efficace ( $X_{opt} = X_0$ ) puis, pour  $k \geq 1$  on résout itérativement des problèmes du type :

$$(P_\lambda^k) \begin{cases} \max & Z_\lambda = \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x) \\ \text{s.c} & x \in D^k. \end{cases}$$

Où  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  et  $D^k$  est une nouvelle région d'admissibilité réduite définie par:

$$D^k = (D / (\bigcup_{\nu=0}^{k-1} \Delta_\nu)) \cap D_{X_{opt}}$$

Avec  $\Delta_\nu = \{x \in \mathbb{Z}^n / Cx \leq Cx_\nu\}$ ;  $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$  sont des solutions efficaces du problème  $(P(D))$  obtenues en résolvant les problèmes  $(P_\lambda^0), (P_\lambda^1), \dots, (P_\lambda^{k-1})$  respectivement, et  $D_{X_{opt}} = \{x \in D / dx \leq dX_{opt}\}$ . Les solutions des problèmes  $(P_\lambda^\nu), \nu = \{0, \dots, k-1\}$  sont testées pour l'efficacité; si une solution est trouvée non efficace, on procède à l'exploration des arêtes incidentes à cette solution. Une fois qu'une solution efficace est trouvée, on élimine toutes les solutions moins bonnes sur le critère principal en résolvant un nouveau problème  $(P_\lambda^k)$  défini sur la nouvelle région réduite  $S^k$ . Si aucune solution efficace n'est trouvée sur les arêtes incidentes, on choisit une arête contenant le plus grand nombre

possible de solutions admissibles et on la coupe de la région courante en utilisant une coupe de type I. La région d'admissibilité est réduite d'une itération à une autre jusqu'à ce que le domaine réduit devienne vide.

# Conclusion et perspectives

Dans la vie quotidienne toute action que nous entreprenons nécessite une réflexion particulière dans le but de déterminer une stratégie qui consiste en la détermination de tous les paramètres possibles la décrivant et de prévoir le ou les objectifs à optimiser. En général, il y a toujours plusieurs objectifs à vouloir atteindre et à maximiser simultanément ce qui est impossible d'où l'idée de solution de compromis qui est propre aux problèmes d'optimisation multi-objectifs. L'optimisation multi-objectifs n'a pas encore fait toutes ses preuves que se soit du point de vue Applications ou du point de vue théorique et recherche, de sorte que beaucoup de pistes de recherche sont encore ouvertes et les champs d'applications sont très fertiles et ne demandent qu'à être exploités. Dans certaines situations le décideur préfère optimiser un critère tout à fait différent des autres critères du problème multi-objectif et ce sur l'ensemble des solutions efficaces de ce dernier. C'est ce qu'on appelle l'optimisation sur l'ensemble des solutions efficaces et c'est sur cette classe de problèmes, notée par  $P$ , que nous avons axé notre travail. Dans ce mémoire, on a procédé de la manière suivante: d'abord rappeler les notions de bases de la programmation linéaire continue et en nombres entiers, puis le cadre général de notre travail qu'est la programmation multi-objectifs où, nous avons donnée la terminologie et quelques notions de bases, ainsi que la caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces. Dans le troisième chapitre nous avons fait une synthèse de quelques méthodes de résolution du problème  $P$  dans le cas continu et discret. Et en dernier lieu nous avons comparé d'une manière qualitative deux méthodes les plus récentes pour la résolution du problème  $P$  dans le cas discret. La première méthode chronologiquement parlant, c'est celle de CHAABANE où il est montré que le problème principal  $P$  est résolu itérativement en cherchant des solutions des problèmes à contraintes dans la direction de la fonction ob-

jectif principale  $w$ , en utilisant des procédures de la programmation linéaire en nombres entiers sans pour autant énumérer toutes les solutions efficaces. La deuxième méthode celle de J M Jorge qui procède presque de la même manière que celle de CHAABANE à quelques différences près que nous avons abordés dans le chapitre quatre.

La question reste ouverte et en perspectives, nous souhaiterons qu'à l'avenir, sera réalisée une étude beaucoup plus poussée de ces méthodes où il y'aura en plus une étude quantitative et expérimentale pour déterminer la méthode la plus performante, et même trouver une autre méthode pour le problème  $P$ . La même chose est souhaitable pour les méthodes étudiées dans le chapitre trois. Aussi on souhaite à l'avenir étudier le problème de l'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multi-objectifs non linéaire.

# Bibliographie

- [1] H.P Benson and S. , Sayin. A face search heuristic algorithm for optimizing over the efficient set. *Naval research logistics*, 40:103–116, 1993.
- [2] H.P Benson and S. , Sayin. optimization over the efficient set: four special cases. *Journal of optimization theory and application*, 80(1):3–18, 1994.
- [3] H.P. Benson. On the convergence of two branch and bound algorithms for non convex programming problems. *Journal of optimization theory and applications*, 36:129–134, 1982.
- [4] H.P. Benson. An all-linear programming relaxation algorithm for optimizing over the efficient set. *Journal of global optimization*, 1:83–104, 1991.
- [5] H.P. Benson. A finite, non adjacent extreme-point search algorithm for optimizing over the efficient set. *Journal of optimization theory and applications*, 73(1):47–64, 1992.
- [6] H.P. Benson. A bisection extreme point search algorithm case. *journal of blobal optimization*, 3:95–111, 1993.
- [7] H.P Benson and D. Lee. Outcome-based algorithm for optimizing over the set of a biriteria linear programming problem. *journal of optimization theory and application*, 88(1):77–105, 1996.
- [8] S. Bolintineanu. Minimisation of a quasi-concave function over the efficient set. *Mathematical Programming*, 61:89–110, 1993.
- [9] D. Chaabane. A method for ptimizing over the integer efficient set in the criteria spece. *ROAD*, 1:33–46, 2006.
- [10] D. Chaabane. Optimizing a linear function over an integer efficient set. *European Journal of Operational Research*, 174:1140–1161, 2006.

- 
- [11] R. Dakin. A tree search algorithm for mixed integer programming problems. *computer Journal*, 8:250–255, 1965.
- [12] G. B. Dantzig. *Linear programming and extention*. Princeton University Press, 1963.
- [13] J Ecker and I. Kouada. Finding efficient points for linear multiple objective programs. *Mathematecal programming*, 8:375–377, 1975.
- [14] J. Ecker and J. Song. Optimizing a linear function over an efficient set. *Journal of optimization and applications*, 83(3):541–563, 1994.
- [15] A. M. Geoffrion. proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:618–630, 1968.
- [16] R. E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear prgrams. *Bulletin of AMS*, 64:275–278, 1958.
- [17] R. Horst. An algorithm for non convex programming problems. *mathematical programming*, 10:312–321, 1976.
- [18] R. Horst. A general class of branch and bound methods in global optimization with some new approaches for concave minimization. *Journal of optimization theory and applications*, 51:27–291, 1986.
- [19] R. Horst. Deterministic global optimization, recent advances and new fields of applications. *Naval Research logistics*, 37:433–471, 1990.
- [20] R. Horst and H. Tuy. *Global optimization: Deterministic approaches*. spring-verlag, Berlin, Germany, 1990.
- [21] R. Hosrt. Deterministic global optimization with partitions sets whose feasibility is not known: application to concave minimization reverse convex constraints, dc programming and lipschitzian optimization. *Journal of optimization theory and applications*, 58:11–37, 1988.
- [22] H Isermann and R. Steuer. computational experience concerning payoff tables and minimum criterion values over the efficient set. *European journal of operational research*, 33:91–97, 1987.
- [23] M.J. Jesus. A bilinear algorithm for a linear function over the efficient set of a multiple objective linear programming problems. *Journal of global optimization*, 31:1–16, 2005.

- [24] Jesus M. Jorge. An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set. *EJOR*, 2008.
- [25] A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28:497–520, 1960.
- [26] G.P. MC Cornick. Compatibility of global solutions to factorable non convex programming, part i: convex understanding problems. *mathematical programming*, 10:147–175, 1976.
- [27] N.C. Nguyen. *An algorithm for optimizing a linear function over the integer efficient set*. korad-Zuse-Zentrum für informations technik berlin, Nov 1992.
- [28] Benson H. P. Optimization over the efficient set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98:562–580, 1984.
- [29] P.M. Pardalos and J.B. Rosen. Methods of global concave minimization bibliographic survey. *Siam Review*, 28:367–379, 1986.
- [30] P.M. Pardalos and J.B. Rosen. *Constrained global optimization: Algorithms and applications*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1987.
- [31] J. Philip. Algorithms for the vector maximization problem. *mathematical programming*, 2:207–229, 1972.
- [32] S.S. Rao. *Engineering optimization: theory and practice*. Wiley, 1996.
- [33] B. Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica, Paris, 1985.
- [34] M. Sakarovitch. *Optimisation combinatoire. Méthodes mathématiques et algorithmiques Tome 1: Graphes et programmation Linéaire; Tome 2: Programmation Discrète*. Hermann, Paris, 1984.
- [35] S. Sayin. Optimizing over the efficient set using a top-down search of faces. *operation research*, 48:65–72, 2000.
- [36] I. Yamamoto y. Shingen, M. Tabahashin. Minimum maximal flow problem. *an optimization*, 25:425–443, 2003.
- [37] M. Simonnard. *Programmation Linéaire: technique du calcul économique*. Paris, 1972.

- 
- [38] R. Steuer. *Multiple criteria optimization: theory, computation and applications*. John Wiley, New York, 1985.
- [39] H. A. Taha. *Integer programming theory, applications and computations*. Academic Press, 1975.
- [40] EL-G. Talbi. *Méthahéuristiques pour l'optimisation combinatoire Multiobjectifs: Etat de l'art*. Université de Lille, 1999.
- [41] P. Vincke Vanderpooten, D. Description and analysis of some representative interactive multicriteria procedures. *Mathematical and computer modeling*, 12:1221–1238, 1989.
- [42] P. Vincke. *L'aide Multicritère à la Décision*. Editions de l'université de Bruxelles, 1989.
- [43] D.J. White. The maximization of a function over the efficient set via a penalty function approach. *European journal of operational research*, 94:143–153, 1996.
- [44] D.J. White and W.T. Scherer. A system engineering design experiment at the university of virginia, in: Proceedings of the national council of systems engineering. pages 527–533, Seattle, Washington, 1992. annual conference.
- [45] Y. Yamamoto. *Optimization over the efficient set: overview*. Kleurer academic publishers, 2001.

Le résumé(abstract)

# *Résumé*

Dans le cadre de l'optimisation vectorielle post-optimale, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'état de l'art de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions d'un problème multi-objectifs *Eff* dites efficaces. Notre premier objectif fut le rappel des notions fondamentales sur la programmation linéaire continue, discrète et à objectifs multiples en passant en revue l'important de la littérature existante dans ce domaine. Ensuite, notre attention s'est focalisée sur la maîtrise des concepts de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces *Eff* en présentant les méthodes célèbres existantes dans la littérature dues à Yamamoto, Ecker-Song, Benson. Une étude qualitative sur les deux méthodes les plus récentes sur le problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de programmation multi objectif dans le cas entier dues à Jesus M. Jorge et Djamel Chaabane donnant ainsi beaucoup de perspectives quant au développement d'autres approches de résolution de ce problème réputé difficile.

# *Abstract*

In the context of post-optimale vector optimization, we are particularly interested in the state of the art of optimizing a linear function over the set of solutions of a multi-objective problem *Eff* called efficient. Our first goal was a reminder of the basics on continuous, discrete linear programming, and multiple objectives by reviewing the important of literature in this field. Then our attention was focused on mastering the concepts of optimizing a linear function over the set of solutions efficient *Eff* by presenting the existing methods known in the literature due to Yamamoto, Ecker-Song, Benson. A qualitative study on the two newest methods on the problem of optimizing a linear function over the efficient solutions of a problem of multi-objective programming in the world where due to Jesus M JORRGE and Djamel CHAABANE giving many opportunities for the development of alternative approaches to solving this problem Known difficult.