

N° d'ordre : 04/ 2007-E/ MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMÉDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat d'Etat

EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse: Équations aux dérivées partielles

Par

KESRI M'Hamed

THÈME

**STABILITE STRUCTURELLE DES PROBLEMES
DU CONTRÔLE OPTIMAL**

Soutenue publiquement le 24/04/2007, devant le jury composé de :

Mr. D. TENIOU	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. N. BENOUAR	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. E. TRELAT	Professeur	U.d'Orléans	Co-Directeur
Mr. J-M. CORON	Professeur	U.d'Orsay, Paris	Examineur.
Mr. R. BEBBOUCHI	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur
Mr. M. ABID	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur
Mr. Y. CHITOUR	Professeur	ESEC. Supelec, Paris	Invité

Re su me

Les thèmes de cette thèse portent sur l'analyse mathématique des problèmes du contrôle optimal, et des systèmes intégro-partiel différentiels non linéaires.

Dans la première partie, on introduit la notion de sous-optimalité et sur-optimalité. Ces notions nous servent en retour, à définir le concept de stabilité structurelle pour le contrôle optimal. Ce qui nous permet après avoir aussi introduire deux autres notions importantes (attracteur et source) d'énoncer et de démontrer que pour toute une classe de problèmes de contrôle optimal à horizon infini et de dimension une, tout équilibre optimal est un attracteur et entre chaque paire d'attracteurs il existe une source unique. Pour prouver ce résultat principal, l'idée utilise une transformation de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman sous la forme explicite. Le concept original pour la théorie du contrôle qu'on a décrit dans le deuxième chapitre de la thèse, nous permet aussi d'énoncer et de démontrer un théorème sur la stabilité structurelle du problème correspondant à la solution et la propriété générique, dans un sens topologique bien défini. La démonstration nécessite des outils de contrôle optimal et de l'analyse fonctionnelle.

Dans la deuxième partie, on étudie les solutions globales pour un système intégro-partiel différentiel non linéaire modélisant un problème physique important, il s'agit des amas stellaires. On énonce et on démontre dans cette partie un théorème concernant la stabilité de la masse totale du système. La démonstration utilise les propriétés des solutions trouvées dans le sixième chapitre de la thèse.

On conclut dans le dernier chapitre par une paire de conjectures en dimension supérieure, et des projets de recherche importants, généralisant des résultats de la thèse et d'autres voies de recherche.

Mots clés : Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, fonction valeur, problèmes de contrôle optimal, sous-optimal, sur-optimal, stabilité structurelle, système intégro-partiel différentiel, Equation de Liouville-Boltzmann, modèle de masse d'amas stellaire.

2000 **MSC** : 49J15, 49K15, 45K05, 76P05, 70H33, 42B10, 85A05

TRAVAUX PRESENTES DANS CETTE THESE

M. Kesri: Structural Stability Of Optimal control Problems. Communications on Pure and Applied Analysis, AIMS, Vol. 4, N°4, 2005, 743-756.

M. Kesri: Solutions globales du système intégro-différentiel non linéaire de Liouville-Boltzmann-Poisson et l'équation spectrale. Polish Academy Of Sciences, Col. Math., Vol. 106, N°2, 2006, 265-281.

Chapitre 1

Introduction

Dans la première partie de la thèse, on étudie le problème du contrôle optimal en horizon infini, $P(a)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), \dot{x}(t)) dt \\ x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ absolument continue} \\ x(0) = a \end{array} \right.$$

Une interprétation possible est : $x(t)$ est une valeur réelle du capital stock estimée à l'instant t , $\dot{x}(t)$ est le taux d'investissement; $G(x(t), \dot{x}(t))$ est le taux du revenu qui en résulte, $\delta > 0$ est un taux d'actualisation fixé et l'intégrale escomptée du revenu net, quant elle est maximisée, représente la présente valeur du capital stock initial a . Plus généralement, les problèmes du contrôle optimal en horizon infini, sont de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), u(t)) dt \\ \text{tel que:} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \\ x(t) \in I = \text{Intervalle} \end{array} \right.$$

Ce problème a une interprétation comme problème de gestion de ressources, avec $x(t)$ =état de ressource à l'instant t , $G(x(t), u(t))$ = rendement instantané du management $u(t)$ à l'état $x(t)$, $U(x(t))$ = ensemble des actions admissibles. Il n'y a pas de dépendance explicite du temps t , car le problème n'a pas la mémoire du passé. Par conséquent, on peut voir le

système en contrôle optimal, comme un système dynamique. Notre hypothèse principale est que l'espace d'état est d'une seule dimension: $x(t) \in \mathbb{R}$. Quoique un peu particulier, ce type de problème occupe une partie substantielle de la littérature ([21], [38]) simplement parce que la difficulté des problèmes de ce type décroît nettement avec le nombre de coordonnées m de $x(t)$ passant de 1 à 2,3... Par définition un ensemble de données (G, f, U, I) est considéré comme système de gestion de ressources (unidimensionnel), si

f : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application

$U(x) \subset \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{R}$) un sous ensemble de \mathbb{R}^n

G : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application

I un intervalle fermé, qui peut être infini.

\mathbb{R} est considéré comme l'espace (unidimensionnel) d'états de la ressource, \mathbb{R}^n l'espace contrôle (espace des actions possibles), $G(x, u)$ peut être interprétée comme rendement par unité de temps si la ressource est à l'état x et le management action est pris. Les actions u admissibles appartiennent à $U(x)$. Dans la plupart des cas, l'interprétation de x suppose que ce dernier soit un nombre positif, comme par exemple le niveau de stock de ressource d'être mesuré en tonnes. C'est la raison pour laquelle une restriction d'état $x \in I$ doit être ajoutée. Le taux de changement de la ressource x est supposé être gouverné par l'équation d'état $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ $t \geq 0$. Les chercheurs en économie mathématique paraissent avoir été les premiers à inclure systématiquement un horizon infini en le temps, dans leurs modélisation des systèmes dynamiques économiques. Comme expliqué dans [1] par Arrow et Kurtz: " The infinite horizon is an idealization of the fundamental point that the consequences of investment are very long-lived; any short horizon requires some methods of evaluating end-of-period capital stocks, and the only proper evaluation is their value in use in the subsequent future ". Le premier problème d'optimisation en économie, avec un système dynamique observé sur un intervalle de temps non borné, est dû à Ramsey ([58]) . Dans son travail, cet auteur considère d'abord un problème de Lagrange. Plus généralement, dans les modèles de croissance économique, la stabilité asymptotique globale des trajectoires optimales sera garantie seulement pour des valeurs pas trop élevées de $\delta \geq 0$, comme taux de remise positive, elle peut induire une instabilité (voir e.g. [10]).

Pour simplifier l'analyse, on considère seulement des fonctions $G(.,.)$ pour lesquelles l'investissement $\dot{x}(t) > 0$ pour $x(t)$ grand, et le désinvestissement $\dot{x}(t) < 0$ pour $-x(t)$ grand est non profitable, et par conséquent l'optimal stock contrôlé $x(t)$ décroît pour un stock initial $x(0)$ grand et croît pour un $-x(0)$ grand.

Si un problème $P(a)$, où P est donné par (G, δ) , admet une solution $x(t)$ ($t \geq 0$) pour tout a , alors cette trajectoire $x(.)$ optimale définit un système dynamique qui ressemble au graphe de la figure suivante:

... \longrightarrow attracteur et optimal \longleftarrow source mais non optimal \longrightarrow attracteur et optimal \longleftarrow ...

Le terme "système dynamique" est utilisé ici dans un sens moins restrictif qu'habituellement, parce qu'un problème $P(a)$ peut admettre plusieurs solutions, au moins pour des valeurs initiales différentes.

Il est prouvé (voir le théorème donné en chapitre 4) qu'il existe un sous-ensemble \mathcal{P}_1 de l'ensemble de tous les problèmes \mathcal{P} considérés, tel que:

1/ \mathcal{P}_1 est dense dans \mathcal{P} (de fait résiduel)

2/ \mathcal{P}_1 est structurellement stable.

Ici, un problème donné par (G, δ) est dit structurellement stable, si le système dynamique défini par un système (G', δ') légèrement perturbé, est homéomorphe à (G, δ) en coordonnées image.

Chaque problème $P = (G, \delta) \in \mathcal{P}_1$ définit un système dynamique qui ressemble au graphe de la figure ci-dessus, et $P(a)$ possède une solution unique sauf si a est une source. Si cependant a est un attracteur alors la solution correspondant à $P(a)$ est constante i.e. un équilibre.

C'est le contraire de ce qui se passe en systèmes dynamiques ordinaires i.e. ceux associés avec les EDO (voir par exemple [56]). Dans ces derniers (dans le cas régulier), le problème est uniquement solvable; le système structurellement stable ressemble à la figure ci-dessus, mais les sources sont des équilibres. Le phénomène de source pour laquelle la solution stationnaire est non optimale, reflète le caractère non local du problème $P(a)$, la "partie locale" et la "partie globale" de $P(a)$, sont nettement séparées dans l'algorithme proposé (voir chapitre 3) pour résoudre $P(a)$. On calcule la fonction valeur à l'aide de cet algorithme. Une fois elle est connue, le contrôle optimal $\dot{x}(t) = u(t)$ peut être calculé comme un feedback $u(x(t))$ à partir

de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Notons que le caractère non local du problème d'optimisation est contenu dans l'étape 3. Notons aussi que le principe du maximum (de Pontryagin) ne permet pas de détecter les attracteurs, ni de trier lesquels des "candidats à l'optimalité" calculés dans l'étape 1 sont optimaux. Ainsi, s'il y a plusieurs attracteurs, en général le principe du maximum ne suffit pas pour résoudre le problème (Il donne seulement une condition nécessaire). Par ailleurs, la programmation dynamique est non satisfaisante du fait que:

- a) C'est une procédure d'itération lente.
- b) Elle ne donne pas la dynamique du système sous-jacent.

Du point de vue économique, on peut dire que attracteurs et sources sont les plus importantes caractéristiques. Il est tenté de trouver une équation qui définit les sources en analogie avec l'équation de l'étape 1. Une telle équation cependant, semble ne pas exister.

La partie de la thèse consacrée à cette étude est structurée comme suit:

Chapitre2: Stabilité structurelle. Dans ce chapitre, on introduit la notion de stabilité structurelle pour le contrôle optimal. Après avoir montré l'existence de la solution, on définit une topologie sur l'ensemble des problèmes étudiés. A l'aide de cette topologie, la stabilité structurelle est bien définie.

Chapitre 3: Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Ce chapitre contient les fondements pour un algorithme, et aussi la démonstration du fait responsable que les sources ne sont pas optimales, à savoir que $J_+(a, \cdot)$ est décroissante et $J_-(a, \cdot)$ est croissante.

Chapitre 4: L'ensemble des problèmes structurellement stables qui est résiduel. On montre dans ce chapitre qu'il existe dans l'ensemble de tous les problèmes \mathcal{P} qu'on considère, un sous ensemble \mathcal{P}_1 qui est dense dans \mathcal{P} et structurellement stable. Ce théorème est le résultat principal de cette partie.

Pour la classe des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des systèmes intégral partiels différentiels, vu la complexité du système choisi comme équations d'état du problème (système intégral-partiel différentiel non linéaire), l'étude dans cette thèse se restreint à un problème de fonction objective nulle, en généralisant [39] aux domaines non bornés. Ce qui constitue la deuxième partie de la thèse. En effet, on étudie les solutions globales

pour un système intégro-partiel différentiel non linéaire modélisant un problème physique très important, il s'agit des amas stellaires. On démontre dans cette partie un résultat concernant la stabilité de la masse totale du système. Pour ce qui est de l'aspect physique, le problème étudié permet d'établir les lois physiques d'échange interstellaire, ainsi que la répartition des étoiles dans l'amas, et par suite dans la galaxie. Pour les amas fortement peuplés, et qui font l'objet de notre problème, de nouvelles techniques d'observation ont été développées, voir King [40]. Au début du siècle dernier, plusieurs chercheurs ont essayé de faire le lien entre la dynamique stellaire et la théorie cinétique des gaz d'une part, et de faire le rapprochement de la dynamique stellaire avec la physique des plasmas d'autre part [71], [27].

La modélisation du problème physique s'exprime par le système d'équations intégro-partiel différentiel:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{df}{dt}\right)_{renc.} \quad (1)$$

$$\Delta V = 4\pi G \int_{\vec{v}} f d\vec{v} \quad (2)$$

où f représente la fonction de distribution des étoiles, V le potentiel gravitationnel et $\left(\frac{df}{dt}\right)_{renc.}$ la variation de la distribution due aux rencontres des étoiles. Les amas d'étoiles ont de tout temps constitué un important sujet de recherche devant conduire à une meilleure connaissance de la galaxie. Ainsi, à coté de l'intérêt propre que présente leur étude ils ont particulièrement permis de démontrer l'importance de l'absorption interstellaire, et de mieux étudier la répartition des masses dans la galaxie. Bien que la symétrie structurelle de la plupart des amas ait toujours suggéré une très grande simplicité dans le problème dynamique qu'ils posent, de nombreuses questions n'ont pas encore eu de réponse définitive. A titre d'exemple, l'étude des processus physiques engendrant la formation des amas d'une part, et des phénomènes internes et externes déterminant l'évolution de ces systèmes d'autre part, constituent un problème dont l'étude est loin d'être achevée. En effet l'insuffisance des résultats obtenus dans la première partie ne permet pas d'avoir une idée complète. Et c'est ce qui a orienté les chercheurs vers la résolution de la seconde partie du problème pour laquelle les méthodes de travail sont bien avancées [57]. L'élaboration d'un modèle d'amas le plus proche de la réalité parmi l'ensemble des modèles théoriques d'évolution possible

constitue un problème d'actualité. Cette question n'est pas encore complètement élucidée et demande à être confrontée avec les observations [33]. Dans le but de répondre à cette question, l'étude théorique a conduit à l'élaboration de différents modèles d'amas, tenant compte le plus possible du caractère physique de ces systèmes stellaires. Les amas stellaires sont des regroupements d'étoiles dont les membres associés gravitationnellement, présentent des conditions de formation et d'évolution relativement semblables. Ils se classent en deux grandes catégories: la première représente les amas ouverts, situés dans le disque de la galaxie, la seconde catégorie, qui est l'objet de notre travail, représente les amas globulaires distribués dans le halo galactique. Les amas globulaires, pour la plupart sphériques, sont très peuplés, le nombre d'étoiles pouvant varier de $5 \cdot 10^4$ à $2 \cdot 10^7$. En moyenne, ils ont une masse chacun de l'ordre de $10^5 M_0$ où M_0 représente une masse solaire. Les diamètres de ces systèmes stellaires sont compris entre 10 et 200 parsecs, sachant qu'un parsec vaut $3,08 \cdot 10^{13}$ kilomètres. Ils se distinguent également des amas ouverts par le fait qu'ils contiennent le même type d'étoiles.

Afin d'obtenir les équations fondamentales, Un amas peuplé d'un grand nombre N d'étoiles, peut être assimilé à un "nuage" de N masses ponctuelles. Cependant on est arrivé à un problème fondamental: le problème des N corps est classique en astronomie, et peut se formuler comme suit: trouver le mouvement de N points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Il a été posé, à l'origine, à propos du système solaire, et l'étude de ce cas a conduit au développement d'une branche de l'astronomie appelée mécanique céleste. N est alors petit, de l'ordre de 10 au plus. Au début du siècle dernier, on a découvert et étudié les systèmes stellaires: amas ouverts, amas globulaires, galaxies, dans lesquels N varie de 10^3 à 10^{12} . L'étude de ces systèmes constitue la dynamique stellaire. En raison de la grande valeur de N , et aussi parce que les observations sont beaucoup moins précises que dans le cas du système solaire, il n'est plus possible de suivre exactement l'orbite de chaque objet, et il faut recourir à une description statistique du système. Ainsi, bien que le problème soit formellement le même, les buts et les méthodes de la dynamique stellaire diffèrent profondément de ceux de la mécanique céleste, et les deux domaines ont peu de points communs. Pour décrire le système, on introduit une fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$: $f d\vec{r} d\vec{v}$ est par définition la masse contenue dans l'élément de volume $d\vec{r} d\vec{v}$ de

l'espace des phases. On déduit la densité spatiale (massique) ρ :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_{\vec{v}} f d\vec{v}$$

Si le potentiel du système est régulier (dérivée première continue), la fonction de distribution variera de façon continue et la cellule $d\vec{r}d\vec{v}$ subira une déformation continue le long des trajectoires décrites dans l'espace des phases suivant les équations du mouvement:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= -\nabla_{\vec{r}}V\end{aligned}$$

Si en particulier, la masse à l'intérieur de la cellule reste constante au cours du déplacement, l'évolution du système est donnée par l'équation de Boltzmann-Liouville:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (\text{I})$$

où $\vec{a} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ est le vecteur accélération produite par le potentiel moyen. Le potentiel gravitationnel V est obtenu par l'équation de Poisson:

$$\Delta_{\vec{r}}V = 4\pi G\rho \quad (\text{II})$$

On peut classer les systèmes stellaires en deux grandes catégories: les systèmes "sans collisions" et les systèmes "avec collision", "collisions" ou "rencontres" signifiant en réalité interactions entre étoiles passant à une certaine distance l'une de l'autre. Si pour les premiers (notre galaxie), l'équation (I) convient parfaitement, il n'en va plus de même pour les seconds, pour lesquels les rencontres modifieront le contenu de la cellule en déplacement au cours du temps. Pour tenir compte de tels effets, dus aux rencontres, il faut exprimer que le taux total de changement de la densité dans la cellule de l'espace des phases suivant le mouvement est égal au changement de cette densité dû aux rencontres. Un second membre doit donc être introduit dans l'équation de Liouville-Boltzmann: $(\frac{df}{dt})_{renc.}$, la forme du second membre dépendant de la forme de l'interaction des étoiles au cours de rencontres. L'évolution d'un amas comporte deux phases distinctes, une phase de mélange dynamique et une phase de relaxation. Le mélange dynamique conduit l'amas à l'état stationnaire. Dans le champ de potentiel régulier V , une étoile (corps d'épreuve), qui ne subirait pas de "rencontres"

avec d'autres étoiles (du champ), décrirait une trajectoire régulière. Par contre, si elle subit l'influence d'autres étoiles, sa trajectoire en sera altérée. D'une manière très générale voir Hénon ([28]). La présence de "rencontres" a pour conséquence de modifier les intégrales isolantes E et I , dès lors fonctions du temps, ce qui entraîne une modification de la fonction de distribution au cours du temps. L'étude mathématique du système (1) – (2), c'est à dire l'équation de Liouville-Boltzmann homogène couplée avec l'équation de Poisson, a été initiée par Coutrez ([11]). Il a obtenu l'équation spectrale en coordonnées générales. Par suite dans [2], Arseniev a démontré l'existence de solutions faibles, en dimension quelconque. Dans l'article [65], Ukai et Okabé ont établi l'existence et l'unicité de la solution classique. Ces résultats ont été poursuivis par Bardos et Degond ([4]) qui ont démontré l'existence et l'unicité de la solution régulière, à condition que les données initiales soient assez petites. Dans le même ordre d'idée, nous citons les travaux de Horst ([29]) où il démontre également l'existence globale de solutions, pour le système de Vlasov-Maxwell relativiste. Dans l'article [15], R.J. Diperna et J. L. Lions ont étudié le système de Vlasov-Maxwell dans ses formes classique et relativiste. Ils ont démontré la stabilité, ainsi que l'existence faible de la solution globale avec donnée initiale large. Le cas d'équation non homogène a été étudié par P. Degond et S. Mas-Gallic ([16]). Ils ont démontré l'existence de la solution pour l'équation de Fokker-Planck. Nous pouvons citer également les travaux liés à l'existence et l'unicité de solution régulière dûs à E. Horst-R. Hunze ([30]), S. Wollmann ([67]), J. Batt-M. Berestycki ([5]), et d'autres travaux sur l'équation de Boltzmann ([68]-[6]-[61]-[7]-[12]) et de Fokker-Planck ([3]-[17]-[59]-[22]-[47]-[48]-[13]-[49]-[50]-[51]).

La partie de la thèse consacrée à cette étude est structurée comme suit:

Chapitre 5: Equation spectrale. En introduisant des transformations intégrales de type Fourier adaptées au problème, on réduit la dimension d'espace dans lequel les équations sont données. Ce qui permet d'obtenir l'équation spectrale de laquelle on peut déduire les moments centrés [62].

Chapitre 6: Solutions globales. Dans ce chapitre, on démontre que les solutions de l'équation canonique des amas stellaires obtenue à l'état stationnaire sont globales. et que le problème de Cauchy n'est pas bien posé à l'origine...

Chapitre 7: Modèle de masse à l'infini. On démontre certaines propriétés pour les solutions de l'équation canonique des amas stellaires à l'état stationnaire qu'on a obtenu

dans le chapitre précédent. Ces résultats sont très utiles pour démontrer que, dans le cas de la symétrie sphérique, la masse totale de l'amas stellaire à l'état stationnaire et homogène est infinie. Ce théorème est le résultat principal de cette partie.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1: Introduction

Chapitre 2: Stabilité structurelle

2.1: Spécification de l'ensemble des problèmes

2.2: Spécification de la topologie

Chapitre 3: Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Chapitre 4: L'ensemble des problèmes structurellement stables qui est résiduel

Chapitre 5: Equation spectrale

5.1: Changement de coordonnées

5.2: Position du problème

5.3: Transformation intégrale

Chapitre 6: Solutions globales

6.1: Equations du problème

6.2: Solution générale et problème de Cauchy

Chapitre 7: Modèle de masse à l'infini

7.1: Modèles de structure d'amas

7.2: Propriétés des solutions globales

Chapitre 8: Conclusion

8.1: Conjectures

8.2: Projets de recherches

8.2.1: Théorie des jeux différentiables et problèmes de discontinuité

Objet du projet

Problématique

Description du projet

-Cadre conceptuel (Etat de la recherche sur la thématique)

-Problématique et hypothèse de travail

-Méthodologie: Outils d'analyse et techniques d'investigation

-Plan de travail pour la réalisation des tâches des projets qu'on propose

-Programme de recherche

8.2.2: Problème des moments pour la fonction de distribution

Chapitre 2

Stabilité structurelle

Les problèmes de contrôle optimal en horizon infini pour lesquels l'espace d'état est la demi-droite $X := [0, +\infty)$, sont de la forme suivante:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), u(t)) dt$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) , t \geq 0, \text{ p.p.}, \\ u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} , \text{ mesurable}, \\ u(t) \in U(x(t)), t \geq 0, \\ x(0) = a \end{array} \right.$$

Supposons que ce problème admet une solution optimale $(x(t), u(t))$ pour tout $a \in X$. Nous introduisons maintenant, la notion d'optimalité, sous-optimalité et sur-optimalité pour un état a . Ces notions servent en retour, à définir le concept de stabilité structurelle. Ici, un problème donné par (G, δ) est dit d'être structurellement stable, si le système dynamique défini par un système (G', δ') légèrement perturbé, est homéomorphe à (G, δ) en coordonnées image. Ce concept est défini plus loin (page suivante)

Définition $a \in X$ est appelé *optimal* respectivement au problème ci-dessus, s'il existe une trajectoire optimale $x(\cdot)$ telle que pour tout $t \geq 0$, $x(t) = a$.

Dans ce cas, a est aussi appelé *équilibre* et $x(\cdot)$ est dite *stationnaire*. S'il existe $x(\cdot)$ optimale telle que $x(0) = a$ et $x(t) > a$ pour tout $t > 0$, alors a est appelé *sous-optimal*. S'il existe $x(\cdot)$ optimale telle que $x(0) = a$ et $x(t) < a$ pour tout $t > 0$, alors a est appelé *sur-optimal*.

De très faibles conditions sur $G, f, U(\cdot)$ permettent de démontrer que si $x(0) = x(t) = a$ pour certains $x(\cdot)$ optimale et $t > 0$, alors a est optimal, ainsi que tout $x(s)$ pour $0 \leq s \leq t$. Il sera démontré ci-dessous, qu'un tel continuum d'équilibres est très invraisemblable c'est à dire structurellement instable. Il peut se produire cependant, qu'un état soit sous-optimal et sur-optimal à la fois et qu'une telle situation soit structurellement stable.

On définit maintenant un attracteur et une source en analogie avec la théorie des systèmes dynamiques. Il est cependant important de noter que, contrairement à ce qui se passe dans les systèmes dynamiques, un état a peut être une source sans être un équilibre.

Definition Un état a est appelé une *source* (respectivement au problème ci-dessus noté P) si pour un $\epsilon > 0$, tout état $b \in (a, a + \epsilon)$ est sous-optimal et tout état $b \in (a - \epsilon, a)$ est sur-optimal. Similairement, un état a est dit *attracteur* pour P , si pour un $\epsilon > 0$, tout état $b \in (a, a + \epsilon)$ est sur-optimal et tout état $b \in (a - \epsilon, a)$ est sous-optimal. Un état a est dit *critique* s'il est optimal ou bien une source.

Notons que de faibles conditions sur $G, f, U(\cdot)$ permettent de démontrer qu'un attracteur est optimal, tandis que les sources sont en général non optimales. C'est le résultat principal de cette partie.

Maintenant, on définit le concept de *stabilité structurelle* respectivement à une famille \mathcal{P} de problèmes de contrôle optimal P . Ici P dénote un problème avec variable d'état initiale a . Le problème à valeur initiale incluant la condition précédente $x(0) = a$ sera noté $P(a)$.

Definition Soit \mathcal{P} une famille de problèmes de contrôle optimal en horizon infini sur $X = \mathbb{R}$, muni d'une topologie τ .

1/ P et Q de \mathcal{P} sont dit *topologiquement équivalents*, s'il existe un homéomorphisme $h = h(P, Q) : X \rightarrow X$ tel que $a \in X$ est sous-optimal (resp.) optimal (resp.) sur-optimal pour P si et seulement si $h(a)$ est sous-optimal (resp.) optimal (resp.) sur-optimal pour Q .

2/ $P \in \mathcal{P}$ est dit *structurellement stable* dans (\mathcal{P}, τ) , s'il existe un voisinage \mathcal{V} de P dans \mathcal{P} tel que pour tout $Q \in \mathcal{V}$, P et Q sont topologiquement équivalents.

2.1 Spécification de l'ensemble des problèmes

On considère par la suite les problèmes du type suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = u(t), t \geq 0 \\ x(0) = a \\ u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable} \end{array} \right.$$

Un tel problème est spécifié par une paire $(G, \delta) = P$ et un état initial a . Si un état initial est fixé, le problème sera noté $P(a)$. La famille des problèmes $P(a)$ est notée $P = (G, \delta)$.

Definition Un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) est appelé un *attracteur (global)* pour G , si

$$1/ G(x, 0) \geq G(y, u) \text{ quand } b \leq x \leq y, 0 \leq u$$

$$2/ G(x, 0) \geq G(y, u) \text{ quand } y \leq x \leq a, 0 \geq u$$

Soit \mathcal{P} l'ensemble des problèmes $(G, \delta) = P$ tels que δ est un nombre positif et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui a des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre deux et satisfait:

1/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_2G(x, \cdot)$ est une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante. (D_2 est la dérivée partielle de G par rapport à u).

2/ G admet un attracteur global.

3/ $G(x, \cdot)$ majorée.

Note. La plupart des problèmes d'exploitation optimale de capital stocks (respectivement de ressources stocks), admettent des attracteurs globaux pour la fonction du revenu net.

Proposition 2.1.1: Tout $P(a)$, ($P \in \mathcal{P}, a \in \mathbb{R}$) admet une solution.

Démonstration:

Rappelons que pour $P = (G, \delta)$, $P(a)$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), \dot{x}(t)) dt \\ x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ absolument continue,} \\ x(0) = a \end{array} \right.$$

Soit $x(\cdot)$ une fonction absolument continue avec $x(0) = a$.

Posons

$$\mathcal{V}(x(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

La valeur de a (pour P) est

$$V(a) = \sup \{ \mathcal{V}(x(\cdot)) / x \text{ absolument continue, } x(0) = a \}$$

Par définition, il existe une suite de fonctions absolument continues $x_n(\cdot)$ ($n \in \mathbb{N}$) (dite suite maximisante), avec $x_n(0) = a$ et

$$V(a) = \lim_n \mathcal{V}(x_n(\cdot))$$

Ensuite, grace aux hypothèses sur G (principalement, G est strictement concave et propre par rapport à la seconde variable), on obtient que la suite $x_n(\cdot)$ est bornée dans $L^\infty([0, +\infty))$. D'autre part, G est supposée d'admettre un attracteur global, ce qui implique que la suite $x_n(\cdot)$ est bornée dans $L^\infty([0, +\infty))$. Par conséquent, la suite $x_n(\cdot)$ est bornée dans $W^{1,\infty}([0, +\infty))$, et donc, d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (voir [8]), cette suite converge (à sous-suite près) vers une fonction $x(\cdot)$, pour la topologie faible-*

On déduit de l'hypothèse de concavité de G que $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers $x(\cdot)$ qui est forcément solution de $P(a)$ et $\lim_n \mathcal{V}(x_n(\cdot)) = \mathcal{V}(x(\cdot))$ C.Q.F.D.

2.2 Spécification de topologie sur \mathcal{P}

Pour $(G, \delta) \in \mathcal{P}$, et des intervalles ouverts I, J tels que I contient un attracteur pour G , on pose

$$|G|_{I,J,2} = \sup_{x \in I, u \in J} \sum_{i+j \leq 2} |D_1^i D_2^j G(x, u)|$$

(D_i^j est la dérivée partielle d'ordre j par rapport à la i ème variable). Posons

$$\mathcal{V}(G, \delta, I, J, \epsilon) = \left\{ \begin{array}{l} (G', \delta') \in \mathcal{P} / |\delta - \delta'| < \epsilon, I \text{ contient un attracteur pour } G' \\ \text{et } |G - G'|_{I,J,2} < \epsilon \end{array} \right\}$$

$\mathcal{V}(G, \delta, I, J, \epsilon)$ forme une base de filtres de sous ensembles de \mathcal{P} contenant (G, δ) .

Soit τ la topologie générée par ces ensembles i.e. la topologie la plus fine telle que $\mathcal{V}(G, \delta, I, J, \epsilon)$ forme une base de voisinages de filtres.

τ est une topologie d'Hausdorff admettant une base dénombrable. C'est cette topologie qui sera considérée pour le reste de la thèse.

Chapitre 3

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Définition Soit $P = (G, \delta) \in \mathcal{P}$. Alors

$$V(a) = \sup \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), u(t)) dt \mid u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable,} \right. \\ \left. \dot{x} = u, \text{ p.p. et } x(0) = a \right\}$$

est appelée la valeur de a (pour P) et $V = V_P$ est appelée la fonction valeur.

Si $(x(\cdot), u(\cdot))$ est optimale, alors

$$V(x(0)) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x(t), u(t)) dt$$

Dans ce cas V , restreinte à $X := x([0, +\infty))$ est continûment différentiable et satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\delta V(a) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (G(a, u) + \dot{V}(a)u), \quad a \in x([0, +\infty)) \quad (\text{HJB})$$

Si e est un équilibre, il satisfait l'équation d'équilibre

$$G(e, 0) = \max_{u \in \mathbb{R}} (G(e, u) + \frac{u}{\delta} \frac{d}{dx} G(x, 0)_{x=e}) \quad (\text{E})$$

(voir [60]).

Notons que l'équation (HJB) est une équation différentielle implicite pour la fonction valeur (que nous allons transformer en une équation explicite ci-dessous), tandis que l'équation d'équilibre (E) est une équation "algébrique" pour $e \in X$.

Si e vérifie (E) , alors

$$g_P(e) := \delta D_2 G(e, 0) + D_1 G(e, 0) = 0$$

Definition: $P = (G, \delta) \in \mathcal{P}$ est dit *dégénéré* s'il existe $a \in X$ tel que

$$g_P(a) = \dot{g}_P(a) = 0$$

Nous allons transformer l'équation (HJB) en une équation différentielle explicite pour V (plus précisément: une paire d'EDO). Cela est l'étape essentielle pour la résolution numérique du problème à l'aide d'un algorithme ci-dessous.

Comme par hypothèse, la dérivée de $G(a, \cdot)$ est une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante, elle possède une inverse $H(a, \cdot)$ qui est elle-même une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante.

De là, l'équation

$$D_2 G(a, u) + \dot{V}(a)u = 0$$

admet une solution unique $u(a) = H(a, -\dot{V}(a))$ et l'équation (HJB) prend la forme

$$\begin{aligned} \delta V(a) &= \max_u (G(a, u) + \dot{V}(a)u) \\ &= G(a, H(a, -\dot{V}(a))) + \dot{V}(a)H(a, -\dot{V}(a)) \end{aligned}$$

Posons

$$I(a, y) := G(a, H(a, y)) - yH(a, y)$$

Donc

$$D_2 I(a, y) = -H(a, y)$$

Par conséquent, $I(a, \cdot)$ est une fonction strictement convexe qui admet un minimum unique et $\lim_{y \rightarrow -\infty} I(a, y) = +\infty$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} I(a, y) = +\infty$ et $I(a, y)$ atteint sa valeur minimale quand $H(a, y) = 0$ i.e. en $y = D_2 G(a, 0)$ et $I(a, D_2 G(a, 0)) = G(a, 0)$.

L'image de $I(a, \cdot)$ est l'intervalle $[G(a, 0), +\infty)$ et pour tout $w > G(a, 0)$, l'équation

$$I(a, y) = w$$

admet précisément deux solutions :

$$y_+ > D_2G(a, 0), \quad y_- < D_2G(a, 0)$$

Posons

$$J_+(a, w) = y_+, \quad J_-(a, w) = y_-,$$

$$J_{\pm}(a, G(a, 0)) = D_2G(a, 0)$$

Ainsi $J_+(a, \cdot)$ prend ses valeurs dans $[D_2G(a, 0), +\infty)$ et $J_-(a, \cdot)$ dans $(-\infty, D_2G(a, 0)]$.

Rappelons que

$$I(a, -\dot{V}(a)) = \delta V(a)$$

Par conséquent, on a soit

$$-\dot{V}(a) = J_+(a, \delta V(a)),$$

soit

$$-\dot{V}(a) = J_-(a, \delta V(a)),$$

En fonction du signe du contrôle optimal $u(a) = H(a, -\dot{V}(a))$:

Si a est sous-optimal alors $u(a) > 0$ et

$$\begin{aligned} D_2G(a, 0) &> D_2G(a, u(a)) \\ &= -\dot{V}(a) \end{aligned}$$

et

$$\dot{V}(a) = -J_-(a, \delta V(a))$$

Si a est sur-optimal, alors $u(a) < 0$ et

$$\begin{aligned} D_2G(a, 0) &< D_2G(a, u(a)) \\ &= -\dot{V}(a) \end{aligned}$$

et

$$\dot{V}(a) = -J_+(a, \delta V(a))$$

En résumé, on a le résultat suivant.

Proposition 3.1 (Problème à valeur initiale pour la fonction-valeur)

1°/ Si a est sous-optimal (resp. sur-optimal) alors

$$\dot{V}(a) = -J_-(a, \delta V(a)) \text{ (resp. } \dot{V}(a) = -J_+(a, \delta V(a))\text{)}.$$

Si a est optimal alors

$$V(a) = \frac{1}{\delta} G(a, 0) \text{ et } \delta D_2 G(a, 0) + D_1 G(a, 0) = 0$$

2°/ $J_+(a, \cdot)$ est strictement croissante, $J_-(a, \cdot)$ est strictement décroissante, et $J \pm (a, v)$ est continûment différentiable excepté pour $v = G(a, 0)$.

Notation Soit \mathcal{P}_1 l'ensemble des $P \in \mathcal{P}$ tels que P est non dégénéré et tout a qui est optimal pour P , est un attracteur.

Proposition 3.2 Tout $P \in \mathcal{P}_1$ n'a qu'un nombre fini d'attracteurs

$e_1 < e_2 < \dots < e_l$ et entre chaque paire d'attracteurs $e_i < e_{i+1}$ il y a une source unique s_i . La dynamique de P ressemble à

$$\dots \longrightarrow e_i \longleftarrow s_i \longrightarrow e_{i+1} \longleftarrow \dots$$

Démonstration Si P est non dégénéré il admet au plus un nombre fini d'états optimaux $e_1 < e_2 < \dots < e_l$. Comme $P \in \mathcal{P}_1$, ce sont tous des attracteurs. Entre deux attracteurs, la trajectoire optimale contrôlée a changé de direction précisément une fois, i.e. à la source. C.Q.F.D.

Pour résoudre $P(a)$, nous proposons l'algorithme suivant:

Algorithme

1. Résoudre

$$\delta D_2 G(e, 0) + D_1 G(e, 0) = 0$$

ayant pour "candidats à l'optimalité" e_1, e_2, \dots, e_l . (D_i est la dérivée partielle par rapport à la variable d'ordre i)

2. Résoudre tous les problèmes à valeurs initiales possibles de la forme

$$\dot{V}_i(x) = -J_-(x, \delta V_i(x)) \text{ pour } x \leq e_i, \quad \dot{V}_i(x) = -J_+(x, \delta V_i(x)) \text{ pour } x \geq e_i$$

$$V_i(e_i) = \frac{1}{\delta} G(e_i, 0), \quad 1 \leq i \leq l$$

Appeler V_i candidats pour la fonction valeur. J_{\pm} sont les deux champs de vecteurs dérivés de l'équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman. Puisque c'est une EDO implicite pour la fonction valeur, elle définit plusieurs champs de vecteurs. Il y a cependant seulement deux champs si $G(x, \cdot)$ est concave, et c'est ce que nous supposons.

3. Calculer $V(x) = \max(V_i(x), 1 \leq i \leq l)$

V est la fonction valeur. Une fois qu'elle est connue, le contrôle optimal $\dot{x}(t) = u(t)$ peut être calculé sous forme feedback $u(x(t))$ à partir de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Proposition 3.3 L'algorithme ci-dessus converge pour $P \in \mathcal{P}_1$.

Démonstration Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ l'ensemble des candidats à l'optimalité et V_i la solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{V}(a) = -J_-(a, \delta V(a)) \text{ pour } x < a_i \\ \dot{V}(a) = -J_+(a, \delta V(a)) \text{ pour } x > a_i \\ V(a) = \frac{1}{\delta} G(a_i, 0) \end{cases}$$

Soit $a_{i_1} < s < a_{i_2}$ et supposons que le domaine de V_{i_1} contient $[a_{i_1}, s]$, le domaine de V_{i_2} contient $[s, a_{i_2}]$ et $V_{i_1}(s) = V_{i_2}(s)$. Alors, puisque $J_+(x, v) > J_-(x, v)$ il n'y a pas d'état x excepté $x = s$ où $V_{i_1}(x) = V_{i_2}(x)$. Alors

$$\max(V_{i_1}, V_{i_2})(x) = \begin{cases} V_{i_1}(x) \text{ pour } x \leq s \\ V_{i_2}(x) \text{ pour } x \geq s \end{cases}$$

Par conséquent $W := \max_{1 \leq i \leq n} V_i$ est une fonction continue qui est deux fois continûment différentiable excepté au plus en un nombre fini de points. De plus W satisfait l'équation (HJB)

$$\delta W(x) = \sup_u (G(x, u) + \dot{W}(x)u),$$

à l'exception d'au plus un nombre fini de points. Donc, si $x(\cdot)$ est absolument continue et bornée, alors

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} W(x(t)) - W(x(0)) &= \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{-\delta s} W(x(s))) ds \\ &= \int_0^t e^{-\delta s} (-\delta W(x(s)) + \dot{W}(x(s))\dot{x}(s)) ds \\ &\leq - \int_0^t e^{-\delta s} G(x(s), \dot{x}(s)) ds \end{aligned}$$

Par passage à la limite avec $t \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\delta s} G(x(s), \dot{x}(s)) ds \leq W(x(0))$$

Ceci montre que $W \geq V$ où V est la fonction valeur de $P \in \mathcal{P}_1$. D'autre part, si $W(a) = V_i(a)$ et $x(t)$ est optimale avec $x(0) = a$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a_{i+1}$, alors

$$\delta V_i(x(t)) = G(x(t), \dot{x}(t)) + \dot{V}_i(x(t))\dot{x}(t)$$

et $W(x(t)) = V_i(x(t))$ est la valeur pour P de $x(t)$. C.Q.F.D.

Proposition 3.4 Soit $P \in \mathcal{P}_1$. Alors $P(a)$ admet une solution unique sauf lorsque a est une source.

Démonstration Supposons a optimal. Alors a est un attracteur. Ceci implique l'existence de y^+ , y^- optimales telles que $\lim_{t \rightarrow \infty} y^+(t) = a = \lim_{t \rightarrow \infty} y^-(t)$, y^+ est strictement décroissante et y^- est strictement croissante. Si x est optimale, $x(0) = a$ et $x(\cdot)$ prend une valeur différente de a alors il existe une continuité d'états optimaux à partir de a . Cela est impossible puisque P est non dégénéré. Donc $x(\cdot)$ est une constante égale à a .

Supposons maintenant a sous-optimal (et non optimal). Alors

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(x(t)) \\ &= H(x(t), -\dot{V}(x(t))), \quad (t \geq 0).\end{aligned}$$

Comme V résout l'équation différentielle de la forme

$$\dot{V}(b) = -J_-(b, \delta V(b))$$

et $J_-(\cdot, \cdot)$ est continûment différentiable sauf si b est optimal ou une source, V est deux fois continûment différentiable et en particulier $H(y, -\dot{V}(y))$ est une fonction Lipschitzienne. Le problème à valeur initiale

$$\dot{x} = H(x, -\dot{V}(x))$$

est donc uniquement solvable. Le même argument est valable avec J_+ au lieu de J_- si a est sur-optimal. C.Q.F.d.

Exemple. Considérons

$$G(x, u) = g(x) - u^2$$

Alors

$$H(x, v) = -\frac{1}{2}v, I(x, y) = g(x) + \frac{1}{4}y^2$$

et donc

$$J_{\pm}(x, w) = 2\sqrt{w - g(x)}$$

L'équation des candidats à l'optimalité est simplement

$$\dot{g}(x) = 0$$

$[s_1, s_2]$ est un attracteur pour G si et seulement si la fonction g est décroissante pour $x \geq s_2$ et croissante pour $x \leq s_1$. Par conséquent si g est un polynôme, pour avoir un attracteur il est nécessaire et suffisant pour g d'être de la forme

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2k}x^{2k}, \text{ avec } a_{2k} < 0.$$

En particulier $G(x, u) = x^\alpha - |u|^\beta$ montre que la théorie peut (et doit) être étendue à couvrir des cas sans attracteurs, i.e. où la trajectoire optimale peut décroître infiniment.

Chapitre 4

L'ensemble des problèmes structurellement stables qui est résiduel

Rappelons tout d'abord ce qu'est un ensemble résiduel:

Définition: Un sous-ensemble d'un espace topologique est dit résiduel s'il est intersection dénombrable de sous-ensembles ouverts denses.

On rappelle que \mathcal{P}_1 est l'ensemble $P \in \mathcal{P}$ tel que P est non dégénéré et tout état qui est optimal pour P , est un attracteur. L'objectif de ce chapitre est de prouver le résultat suivant.

Théorème 4.1 Tout $P \in \mathcal{P}_1$ est structurellement stable et \mathcal{P}_1 est résiduel.

Démonstration La démonstration découle des propositions 4.1 à 4.5 ci-dessous.

Proposition 4.1 Supposons $P \in \mathcal{P}$ non dégénéré et a une source pour P qui n'est pas optimale. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage \mathcal{V} de P tel que pour tout $Q \in \mathcal{V}$ il y a une source b pour Q dans $[a - \epsilon, a + \epsilon]$. Cette source est unique si $\epsilon > 0$ est choisi suffisamment petit.

Pour démontrer cette proposition, on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 4.1: Soit a une source non optimale pour $P \in \mathcal{P}$, supposons que P admet une solution optimale et croissante dans $[a - \epsilon, a]$ avec $\epsilon > 0$. Alors $[a - \epsilon, a]$ est un ensemble d'équilibres.

Preuve: Par l'hypothèse que a est une source, il existe alors une solution optimale et décroissante dans $[a - \epsilon, a]$. Donc P admet deux solutions optimales dans le même interval $[a - \epsilon, a]$, avec une qui est croissante et l'autre décroissante. Et d'après la monotonie des solutions optimales (voir [43]), on déduit que $[a - \epsilon, a]$ est un ensemble d'équilibres.

Le résultat de ce lemme contredit l'hypothèse que P est non dégénéré.

Démonstration de la Proposition 4.1: S'il y avait une suite de problèmes P_n convergeant vers P tel que pour tout n , P_n est sans aucune source dans $[a - \epsilon, a + \epsilon]$, alors pour tout n , il existe $(x_n(\cdot), u_n(\cdot))$ optimale avec $u_n(\cdot)$ ne changeant pas de signe lorsque $x_n(t) \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$, disons $u_n(t) \geq 0$ ou bien $x_n(t)$ croissante dans $[a - \epsilon, a + \epsilon]$.

$x_n(\cdot)$ converge vers une fonction x qui est optimale pour P . Puisque a est une source, nous avons dans $[a - \epsilon, a]$ deux fonctions x et x^* , x croissante et x^* décroissante et toutes les deux optimales pour P .

Cela implique d'après le lemme précédent que, $[a - \epsilon, a]$ est un ensemble d'équilibres, contrairement à notre hypothèse que P est non dégénéré. Ce qui prouve que pour $\epsilon > 0$ donné, il existe un voisinage \mathcal{V} de P tel que tout $Q \in \mathcal{V}$ admet une source dans $[a - \epsilon, a + \epsilon]$. Maintenant, choisissons $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ ne contient pas de candidats à l'optimalité (cela est possible puisque a est supposé être optimal). Supposons: Pour une certaine suite de problèmes $P_n \in \mathcal{P}$ convergeant vers P , il existe des sources $a_n < b_n$ dans $[a - \epsilon, a + \epsilon]$. Cela impliquerait qu'il existe un état $c_n \in [a_n, b_n]$, qui est optimal pour P_n . Une sous-suite de c_n doit converger vers une solution c de l'équation (E), laquelle serait un candidat pour optimalité, contradiction de notre choix de ϵ . Ce qui prouve que pour tout n il existe une seule source (donc la source est unique pour Q si ϵ est choisi suffisamment petit).

La proposition précédente a le corollaire suivant:

Proposition 4.2 Tout $P \in \mathcal{P}_1$ est structurellement stable.

Démonstration Soit $P \in \mathcal{P}_1$. Il y a un nombre fini de candidats à l'optimalité

$$x_- < a_1 < a_2 < \dots < a_n < x_+$$

Parmi lesquels, on note les optimaux

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_m}$$

Soit $\epsilon > 0$ petit tel que

$$a_{i_{-1}} < a_i - \epsilon < a_i < a_i + \epsilon < a_{i_{+1}} \text{ pour tout } i.$$

Il y a entre a_{i_j} et $a_{i_{j+1}}$ une unique source $a_{i_j}^*$ pour P . Choisissons $\epsilon > 0$ petit tel que

$$a_{i_j} < a_{i_j}^* - \epsilon < a_{i_j}^* < a_{i_j}^* + \epsilon < a_{i_{j+1}}.$$

Il existe un voisinage \mathcal{V} de P suffisamment petit tel qu'on a précisément n candidats $a_j(Q)$ pour $Q \in \mathcal{V}$ satisfaisant

$$|a_i - a_i(Q)| < \epsilon \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

D'après la proposition précédente, on peut supposer que \mathcal{V} est suffisamment petit de sorte que pour tout j , l'intervalle $[a_{i_j}^* - \epsilon, a_{i_j}^* + \epsilon]$ contient une unique source $a_{i_j}^*(Q)$ pour Q . Pour chaque j , $a_{i_j}^*(Q)$ diffuse (puisque c'est une source) deux fonctions optimales x_Q^+, x_Q^- avec x_Q^+ croissante et x_Q^- décroissante. Soit

$$x^+(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_Q^+(t), \quad x^-(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_Q^-(t).$$

Alors $x^+(\infty)$ et $x^-(\infty)$ sont deux optimales pour Q , et par conséquent appartiennent à l'ensemble $a_i(Q)$. Soit \mathcal{V} choisi suffisamment petit de sorte que $a_i(Q)$ est non optimal pour Q à moins que $i = i_j$ pour un certain $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, ceci est possible car

$$V(a_i) > \frac{1}{\delta} G(a_i, 0)$$

si a_i est non optimal pour $P = (G, \delta)$ et puisque $V = V_Q$ dépend continûment de Q . Il s'ensuit que seulement les $a_{i_j}(Q)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ peuvent être optimaux pour $Q \in \mathcal{V}$. Puisque $a_{i_j}(Q)$ est entre deux sources de Q ; $a_{i_{j-1}}^*(Q)$ et $a_{i_j}^*(Q)$ il existe un état optimal entre $a_{i_{j-1}}^*(Q)$ et $a_{i_j}^*(Q)$ à savoir $x^-(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_Q^-(t) = a_{i_j}(Q)$. Ceci prouve que les $a_{i_j}(Q)$, $a_{i_j}^*(Q)$ dépendent continûment de Q . Par conséquent P est structurellement stable.

Proposition 4.3 L'ensemble $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1 = \{P \in \mathcal{P} \text{ tel que } P \notin \mathcal{P}_1\}$ est fermé.

Démonstration Pour vérifier que $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$ est fermé, considérons une suite de problèmes P_n dans $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$, telle que $\lim_n P_n = P \in \mathcal{P}$.

Supposons d'abord, que, pour tout n , P_n est dégénéré. Ceci implique que pour tout n il existe un état a_n tel que

$$g_{P_n}(a_n) = 0 \text{ and } \dot{g}_{P_n}(a_n) = 0$$

D'après notre hypothèse, comme a_n est un candidat à l'optimalité pour P_n :

$$x_- \leq a_n \leq x^+$$

et on peut supposer que

$$\lim_n a_n = a$$

(Par passage éventuellement à une sous-suite P_{n_k}). La topologie sur \mathcal{P} a été définie de telle manière que

$$\lim_n g_{P_n} = g_P, \quad \lim_n \dot{g}_{P_n} = \dot{g}_P.$$

uniformément sur tout borné de \mathbb{R} . Il s'ensuit que

$$g_P(a) = 0 \text{ et } \dot{g}_P(a) = 0$$

i.e. P est dégénéré.

Supposons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un état a_n , qui est optimal mais n'est pas un attracteur pour P_n . Alors

$$x_- \leq a_n \leq x^+$$

et nous pouvons supposer que

$$\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Puisque nous voulons montrer que P est soit dégénéré, soit admet un état optimal qui n'est pas un attracteur, on peut supposer que P est non dégénéré. Comme l'ensemble des problèmes dégénérés est fermé, on peut aussi supposer que pour tout n , P_n est non dégénéré. Puisque a_n est optimal mais non un attracteur, soit il y a des états sous-optimaux proches de a_n dans $(a_n, +\infty)$, soit il y a des états sur-optimaux proches de a_n dans $(-\infty, a_n)$. Par passage éventuellement à une sous-suite, on peut supposer que l'un des cas se produit pour tout n . Comme les deux cas sont similaires, nous supposons que le premier cas est vérifié pour tout n . On a donc le diagramme suivant sur la droite réelle

$$\dots a_n \rightarrow b_n \dots$$

Cela veut dire: il existe un état b_n qui est optimal pour P_n et tel que tout $c \in (a_n, b_n)$ est sous-optimal pour P_n . Evidemment, on peut supposer que $\lim_n b_n = b \in \mathbb{R}$.

Comme

$$\frac{1}{\delta_n} G_n(b_n, 0) = V_{P_n}(b_n)$$

il s'ensuit que

$$\frac{1}{\delta} G(b, 0) = V_P(b)$$

cela veut dire: b est optimal pour P . Si $a = b$,

alors

$$g_P(a) = \dot{g}_P(a) = 0$$

ce qui est impossible puisque P est non dégénéré. Par conséquent $a < b$. Nous voulons que le diagramme suivant dans la droite réelle soit vrai pour P

$$\dots a \rightarrow b \dots$$

Cela veut dire: chaque état $c \in (a, b)$ est sous-optimal pour P . Notons que cela implique que a est optimal pour P mais non un attracteur. Pour cette raison, il suffit de prouver que (a, b) contient des états qui sont sous-optimaux pour P . Soit $c \in (a, b)$. Il existe une fonction $x_n(\cdot)$ qui est optimale pour P_n avec $x_n(0) = c$. $x_n(\cdot)$ converge uniformément sur des sous-ensembles bornés de $[0, +\infty)$ vers une fonction x qui est optimale pour P . Comme tous les $x_n(\cdot)$ sont croissants, $x(\cdot)$ l'est aussi. On peut supposer, sans perdre de généralité, qu'il existe $c \in (a, b)$ qui est optimal pour P . Ceci implique que x est strictement croissante. Dans tous les cas, il y a des états sous-optimaux dans (a, b) arbitrairement proches de a . Par conséquent a est un état qui est optimal pour P , mais non un attracteur. C.Q.F.D.

Proposition 4.4 L'ensemble des problèmes $P \in \mathcal{P}$ non dégénérés, est dense dans \mathcal{P} .

Proposition 4.5 L'ensemble des problèmes $P \in \mathcal{P}$ tel que tout état a qui est optimal pour P , est un attracteur, est dense dans \mathcal{P} .

Démonstration de la proposition 4.4 Soit $P = (G, \delta) \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$, et posons $P_\epsilon = (G^\epsilon, \delta)$ avec

$$G^\epsilon(x, u) = G(x, u) + \epsilon u.$$

Alors $P_\epsilon \in \mathcal{P}$ si ϵ est suffisamment petit. Et on a:

$$\begin{aligned} g_P(x) &= D_1G(x, 0) + \delta D_2G(x, 0) \\ g_{P_\epsilon}(x) &= D_1G(x, 0) + \delta D_2G(x, 0) + \delta\epsilon \\ &= g_P(x) + \delta\epsilon \end{aligned}$$

Par conséquent P_ϵ est dégénéré si et seulement s'il existe x tel que

$$g_P(x) = -\delta\epsilon \text{ et } g'_P(x) = 0$$

i.e. si $-\delta\epsilon$ est une valeur critique pour g_P . D'après le théorème de Sard (voir [23], ou [39]) l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle. Donc il existe $\epsilon > 0$ arbitrairement petit tel que g_{P_ϵ} est non dégénéré. Par conséquent l'ensemble des $P \in \mathcal{P}$ qui ne sont pas dégénérés est dense dans \mathcal{P} .

Démonstration de la proposition 4.5 On démontre que L'ensemble des problèmes $P \in \mathcal{P}$ tel que tout état a qui est optimal pour P , est un attracteur, est dense dans \mathcal{P} .

Soit $P \in \mathcal{P}$ ayant un état a , qui est optimal mais n'est pas un attracteur. Il suffit de démontrer qu'il existe une suite de problèmes

P_n dans \mathcal{P}_1 tel que $\lim_n P_n = P$. D'après la proposition 3.4 on peut supposer que P est non dégénéré. Soient

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{i-1} < a_i$$

les états optimaux pour P et a_i n'est pas un attracteur. Soit $\epsilon > 0$ petit tel que

$$a_{i-1} < a_{i-1} + \epsilon < a_i < a_{i+1} - \epsilon < a_{i+1}$$

Il suffit d'établir une suite de problèmes P_n tels que $\lim_n P_n = P$ et P_n n'admet pas un état optimal $b \in [a_{i-1} - \epsilon, a_{i+1} + \epsilon]$.

(Ayant établi une telle suite, on peut utiliser une induction sur le nombre d'attracteurs non optimaux pour produire $P_n \in \mathcal{P}_1$ qui approche P). Maintenant si a_i est optimal mais n'est pas un attracteur, deux cas peuvent se présenter:

- soit tout $b \in (a_i, a_{i+1})$ est sous-optimal,
- soit tout $b \in (a_{i-1}, a_i)$ est sur-optimal

Nous allons traiter uniquement le premier cas, l'argument cependant s'applique aussi bien au deuxième cas. Soit

$$G\eta(x, u) := G(x, u) + \eta(x - a_i)^2, \text{ et } P_\eta = (G_\eta, \delta).$$

L'inverse $H(x, \cdot)$ de $G_\eta(x, \cdot)$ est indépendant de η et d'après la section précédente:

$$\begin{aligned} I_\eta(a, y) &:= G_\eta(a, H(a, y)) - yH(a, y) \\ &= G(a, H(a, y)) - yH(a, y) + \eta(a - a_i)^2 \\ &= I(a, y) + \eta(a - a_i)^2 \end{aligned}$$

Pour la fonction valeur V_η de P_η , on obtient

$$I(a, -\dot{V}_\eta(a)) + \eta(a - a_i)^2 = \delta V_\eta(a)$$

or

$$-\dot{V}_\eta(a) = J_\pm(a, \delta V_\eta(a) - \eta(a - a_i)^2)$$

Pour petit $a > a_i$, par hypothèse a est sous-optimal et alors

$$\dot{V}_\eta(a) = -J_-(a, \delta V_\eta(a) - \eta(a - a_i)^2)$$

Cela veut dire que $V_\eta(\cdot)$ résout

$$\dot{v}(a) = -J_-(a, \delta v - \eta(a - a_i)^2)$$

Par la proposition 3.1,

$$-J_-(a, \delta v - \eta(a - a_i)^2) > -J_-(a, \delta v)$$

Evidemment, pour $a > a_i$

$$\begin{aligned} V_\eta(a) &\geq V(a) + \frac{1}{\delta}\eta(a - a_i)^2 \\ &> V(a) \end{aligned}$$

Par conséquent, tant que $a \in (a_i, a_{i+1})$

$$V_\eta(a) > V(a)$$

et

$$\dot{V}_\eta(a) < \dot{V}(a)$$

Ceci cependant, implique

$$\begin{aligned} V_\eta(a_i) &> V(a_i) \\ &= \frac{1}{\delta}G(a_i, 0) \\ &= \frac{1}{\delta}G_\eta(a_i, 0) \end{aligned}$$

Par conséquent a_i n'est plus optimal pour P_η , $\eta > 0$. De plus, puisque pour $a \in (a_i, a_{i+1})$

$$V(a) > \frac{1}{\delta}G(a, 0)$$

et

$$V_\eta(a) \geq V(a) + \frac{1}{\delta}\eta(a - a_i)^2$$

aussi

$$\begin{aligned} V_\eta(a) &> \frac{1}{\delta}G(a, 0) + \frac{1}{\delta}\eta(a - a_i)^2 \\ &= \frac{1}{\delta}G_\eta(a, 0) \end{aligned}$$

Cela veut dire: $a \in (a_i, a_{i+1})$ est non optimal pour P_η , $\eta > 0$.

Pour la même raison $a \in (a_{i-1}, a_i)$ est non optimal pour P_η , $\eta > 0$, dans le cas où tout $b \in (a_{i-1}, a_i)$ est sur-optimal.

Dans le cas où tout $b \in (a_{i-1}, a_i)$ est sous-optimal, on change G_η en

$$G_\eta^*(x, u) = \begin{cases} G_\eta(x, u) & \text{for } x > a_i \\ G(x, u) & \text{for } x < a_i \end{cases}$$

Il est évident que $a \in (a_{i-1}, a_i)$ est non optimal pour (G_η^*, δ) . Puisque $\eta > 0$ était arbitraire, la démonstration du théorème est complète.

Chapitre 5

Equation spectrale

5.1 Changement de coordonnées

Soient f une fonction de distribution, $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Sa densité $\rho(\vec{r}, t)$ est donnée par :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_{\vec{v}} f d\vec{v}$$

On suppose que f est intégrable sur l'espace vitesse et on désigne par $\phi(\vec{r}, \vec{w}, t)$ sa transformée de Fourier usuelle sur cet espace.

Donc :

$$\phi(\vec{r}, \vec{w}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{R^3} f(\vec{r}, \vec{v}, t) \exp(i\vec{w}\vec{v}) d\vec{v}$$

On désigne par r la distance radiale d'un point massif représentatif d'une étoile, sa vitesse se décompose en deux vitesses radiale et transversale notées respectivement par \vec{v}_r et \vec{v}_T . On note leurs modules respectivement v_r et v_T .

A cet effet on a :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_T \text{ implique } \vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_T$$

A partir des expressions de \vec{v} et \vec{w} , on déduit que \vec{v}_r et \vec{w}_r sont parallèles (ils sont sur le même axe radial). Mais les vecteurs \vec{v}_T et \vec{w}_T appartiennent au même plan perpendiculaire à l'axe radial de \vec{v}_r et \vec{w}_r . On note α l'angle formé par ces deux vecteurs.

Le problème étudié étant un problème à symétrie sphérique, sur l'espace des positions ainsi que sur le plan des vitesses transversales, alors la fonction de distribution f ne dépend

que de la distance radiale r , la vitesse radiale v_r , la vitesse transversale v_T et du temps t . De même, le potentiel V ne dépend que de r et de t .

D'où l'expression de la fonction ϕ dans les nouvelles coordonnées :

$$\phi(r, w_r, w_T, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{v_r=-\infty}^{+\infty} \int_{v_T=0}^{+\infty} \{f(r, v_r, v_T, t) v_T \exp \{i(w_r v_r + w_T v_T \cos \alpha)\}\} d\alpha dv_r dv_T$$

Inversement, on obtient la fonction de distribution f sous la forme:

$$f(r, v_r, v_T, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{w_r=-\infty}^{+\infty} \int_{w_T=0}^{+\infty} \{\phi(r, w_r, w_T, t) w_T \exp \{i(w_r v_r + w_T v_T \cos \alpha)\}\} d\alpha dw_r dw_T$$

Proposition 5.1.1 : Avec les notations précédentes on a, pour tout w_T, v_T dans \mathbb{R} ,

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \exp \{i w_T v_T \cos \alpha\} d\alpha = 2\pi J_0(w_T v_T).$$

avec J_0 la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Démonstration :

On simplifie l'intégrale, après deux changements de variables consécutifs, ce qui donne le résultat .

A l'aide de cette proposition, les expressions de ϕ et de f dans les nouvelles coordonnées décrites précédemment, deviennent :

$$\phi(r, w_r, w_T, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{v_r} \int_{v_T} f(r, v_r, v_T, t) v_T \exp \{i w_r v_r\} J_0(w_T v_T) dv_r dv_T$$

$$f(r, v_r, v_T, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{w_r} \int_{w_T} \phi(r, w_r, w_T, t) w_T \exp \{-i w_r v_r\} J_0(-w_T v_T) dw_r dw_T$$

5.2 Position du problème

On considère le système d'équations composé d'une équation aux dérivées partielles (5.2.1) non linéaire (équation de Liouville-Boltzmann) du premier ordre, et d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (5.2.2) (équation de Poisson), suivant:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \nabla_{\vec{v}} f \cdot \nabla_{\vec{r}} V = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\Delta_{\vec{r}} V = 4\pi G \int_{\vec{v}} f d\vec{v} \quad (5.2.2)$$

Les inconnues du système sont la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ et le potentiel $V(\vec{r}, t)$ correspondant.

La méthode de résolution utilisée dans ce chapitre consiste à appliquer la transformation de Fourier qu'on note $\mathcal{F}_{\vec{v}}$ au système (5.2.1) – (5.2.2).

De ce fait, la solution f doit vérifier que f , $\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f$ et $\nabla_{\vec{v}} f \nabla_{\vec{r}} V$ soient intégrables sur l'espace des vitesses \mathbb{R}^3 .

Notons par:

$L^1(\mathbb{R}^3)$, (resp. $L^\infty(\mathbb{R}^3)$), resp. $C^0(\mathbb{R}^3)$, resp. $C^1(\mathbb{R}^3)$) l'espace des fonctions intégrables, (resp. continues et bornées, resp. continues et nulles à l'infinie, resp. de classe C^1) sur \mathbb{R}^3 .

Posons:

$$E = \{f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3) / v_i f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3), \frac{\partial f}{\partial v_i} \in L^1(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3\}$$

D'après les propriétés de la transformation de Fourier (voir par exemple [66]), on a:

$f \in E$ implique $\mathcal{F}_{\vec{v}}(f) = \phi$ avec $\phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^3)$ de plus $\phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ et $w_i \phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour $i=1,2,3$.

On pose:

$$F = \{\phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3) / w_i \phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3\}$$

Par conséquent $\mathcal{F}_{\vec{v}}$ agit de l'espace E dans F .

Dans le cas d'une donnée initiale assez petite f_0 du système (5.2.1)-(5.2.2), d'après [19] on a l'existence d'une solution f qui vérifie $f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ ainsi que ses dérivées partielles premières.

Dans ce cas, on peut prendre:

$$E = \{f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3) / v_i f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3\}$$

L'équation de Liouville-Boltzmann dans le cas de la symétrie sphérique a été obtenue par Ogorodnikov [55], et s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0 \quad (5.2.3)$$

Et puisque

$$\rho(\vec{r}, t) = (2\pi)^{3/2} \phi(\vec{r}, 0, 0, t),$$

donc on peut aussi avoir l'équation de Poisson sous la forme :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right\} = 2(2\pi)^{5/2} G \int_{v_r} \int_{v_T} f(\vec{r}, v_r, v_T, t) v_T dv_r dv_T \quad (5.2.4)$$

5.3 Transformation intégrale

Pour l'étude de notre problème on utilisera dans ce chapitre une transformation intégrale de type Fourier notée \mathcal{F}_v , définie de la même manière que dans la section 5.1. Outre la linéarité, cette transformation a les propriétés suivantes :

Propriétés 5.3.1 : La transformation \mathcal{F}_v vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathcal{F}_v \left\{ v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_T} \right\} &= 2i \frac{\partial}{\partial w_T} \mathcal{F}_v(f) + i w_T \frac{\partial^2}{\partial w_r \partial w_T} \mathcal{F}_v(f) \\ \text{b)} \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} &= i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2}{\partial w_T^2} \mathcal{F}_v(f) + \frac{i w_r}{r w_T} \frac{\partial}{\partial w_T} \mathcal{F}_v(f) \\ \text{c)} \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} &= -i w_r \frac{\partial V}{\partial r} \mathcal{F}_v(f). \end{aligned}$$

Démonstration :

a) On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v \left\{ v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{v_r} \int_{v_T} v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_T} J_0 \exp\{i w_r v_r\} v_T dv_r dv_T \\ &= -i (2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w_r} \int_{v_r} \exp\{i w_r v_r\} dv_r \int_{v_T} v_T^2 J_0 \frac{\partial f}{\partial v_T} dv_T \end{aligned}$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{v_T} v_T^2 J_0 \frac{\partial f}{\partial v_T} dv_T &= \int_{v_T} \frac{\partial}{\partial v_T} (v_T^2 J_0 f) dv_T - \int_{v_T} (2v_T J_0 f + v_T^2 f \frac{\partial J_0}{\partial v_T}) dv_T \\ &= v_T^2 J_0 f \Big|_0^{+\infty} - \int_{v_T} (2v_T J_0 f + v_T^2 f \frac{\partial J_0}{\partial v_T}) dv_T \end{aligned}$$

Supposons que $v_T^2 f$ tend vers 0 quand v_T tend vers l'infini, on déduit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_v \left\{ v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) &= -i (2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w_T} \int \int_{v_r v_T} v_T J_0 f \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T + \\
&= -i (2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w_T} \int \int_{v_r v_T} w_T v_T^2 f \exp(iw_r v_r) \\
&\quad J_0' (w_T v_T) dv_r dv_T
\end{aligned}$$

d'où le résultat a).

b) On a:

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) = \frac{1}{r} (2\pi)^{-1/2} \int \int_{v_r v_T} v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp\{iw_r v_r\} v_T dv_r dv_T$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int \int_{v_r v_T} v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp\{iw_r v_r\} v_T dv_r dv_T &= \int_{v_T} (v_T^2 f \exp\{iw_r v_r\} J_0 v_T) \Big|_{-\infty}^{+\infty} dv_T - \\
&\quad \int \int_{v_r v_T} v_T^3 f J_0 \exp\{iw_r v_r\} iw_r dv_r dv_T
\end{aligned}$$

Sachant que f tend vers 0 quand v_r tend vers l'infini, on aura :

$$\int \int_{v_r v_T} v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T = - \int \int_{v_r v_T} v_T^3 f J_0 \exp(iw_r v_r) iw_r dv_r dv_T$$

En utilisant la formule de Bessel d'ordre un voir [69], on obtient :

$$w_T v_T J_1' (w_T v_T) + J_1 (w_T v_T) = w_T v_T J_0 (w_T v_T)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\int \int_{v_r v_T} v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T &= -iw_r \int \int_{v_r v_T} v_T^3 f \left\{ J_1' + \frac{1}{w_T v_T} J_1 \right\} \\
&\quad \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T \\
&= -iw_r \int \int_{v_r v_T} f \frac{v_T^2}{w_T} J_1 (w_T v_T) \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T - \\
&\quad iw_r \int \int_{v_r v_T} v_T^2 f J_1' (w_T v_T) \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T
\end{aligned}$$

Et d'après la deuxième formule de Bessel d'ordre un, on a :

$$J_0' (w_T v_T) = -J_1 (w_T v_T)$$

Ce qui entraîne que:

$$J_1'(w_T v_T) = -J_0''(w_T v_T),$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_{v_r} \int_{v_T} v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T &= iw_r \int_{v_r} \int_{v_T} f \frac{v_T^2}{w_T} J_0'(w_T v_T) \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T + \\ &w_r \int_{v_r} \int_{v_T} v_T^2 f J_1''(w_T v_T) \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T, \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété b).

c) On a:

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{v_r} \int_{v_T} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0(w_T v_T) \exp\{iw_r v_r\} v_T dv_r dv_T$$

Tenant compte du fait que $\frac{\partial V}{\partial r}$ ne dépend pas de v_r et v_T , après intégration par parties, on obtient:

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) = -iw_r \frac{\partial V}{\partial r} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{v_r} \int_{v_T} v_T f J_0 \exp\{iw_r v_r\} dv_r dv_T \right)$$

C'est à dire

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = -iw_r \frac{\partial V}{\partial r} \mathcal{F}_v(f).$$

Propriété 5.3.2 :

Pour $w_T = 0$, on a :

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = 2i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2}{\partial w_T^2} \mathcal{F}_v(f)$$

De plus $\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\}$ est continue en $w_T = 0$.

Démonstration :

En intégrant par parties, et sachant que f tend vers 0 quand v_r tend vers l'infini, on aura :

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, 0, t) = -\frac{2}{r} (2\pi)^{-1/2} iw_r \int_{v_r} \int_{v_T} v_T^3 f \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T$$

On déduit l'égalité du résultat.

Pour la continuité on a :

$J_1(w_T v_T) / w_T$ qui tend vers $v_T/2$ quand w_T tend vers 0, et d'après la démonstration de la

propriété 5.3.1.b) on aura :

$\frac{i w_r}{r w_T} \frac{\partial}{\partial w_T} \mathcal{F}_v(f)$ qui tend vers $i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2}{\partial w_T^2} \mathcal{F}_v(f)$ quand w_T tend vers 0. Ce qui montre la continuité.

Théorème 5.3.1:

Dans le cas du problème à symétrie sphérique l'équation de Liouville-Boltzmann (5.2.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial w_r} + i \frac{\partial V}{\partial r} w_r \phi + i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_T^2} + \frac{i w_r}{r w_T} \frac{\partial \phi}{\partial w_T} - \frac{i}{r} w_T \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_r \partial w_T} - \frac{2i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial w_r} = 0$$

appelée équation spectrale en coordonnées sphériques, la fonction ϕ est dite fonction caractéristique.

Démonstration :

L'équation initiale (5.2.3) devient par application de la transformation linéaire \mathcal{F}_v :

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + \mathcal{F}_v \left\{ v_r \frac{\partial f}{\partial r} \right\} - \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} + \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} - \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} \right\} = 0 \quad (5.3.1)$$

On a

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_v \{f\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.3.2)$$

Et par calcul, on trouve :

$$\mathcal{F}_v \left\{ v_r \frac{\partial f}{\partial r} \right\} = -i \frac{\partial^2}{\partial r \partial w_r} \mathcal{F}_v \{f\} = -i \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial w_r} \quad (5.3.3)$$

En vertu des propriétés 5.3.1.a), b), c) de \mathcal{F}_v les trois derniers termes de l'égalité (5.3.1) s'expriment comme suit :

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v} \right\} = -i w_r \frac{\partial V}{\partial r} \phi \quad (5.3.4)$$

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_T^2} + \frac{i w_r}{r w_T} \frac{\partial \phi}{\partial w_T} \quad (5.3.5)$$

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} \right\} = \frac{2i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial w_r} + \frac{i}{r} w_T \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_r \partial w_T} \quad (5.3.6)$$

Des égalités (5.3.2) – (5.3.6) on déduit que l'équation de Liouville-Boltzmann, après transformation par \mathcal{F}_v , s'écrit sous la forme de l'équation trouvée dans le théorème.

Dans le cas où $w_T = 0$, en vertu de la propriété 5.3.2, l'équation (5.2.1) s'écrit après transformation par \mathcal{F}_v sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial w_r} + i \frac{\partial V}{\partial r} w_r \phi + 2i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_T^2} - 2 \frac{i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial w_r} = 0$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Chapitre 6

Solutions globales

6.1 Equations du problème

Le problème général est le suivant. Soit la fonction de distribution totale:

$$f = \sum f_i ,$$

où chacune des fonctions f_i ($i = 1, \dots, n$) représente la distribution des points représentatifs d'étoiles de masse m_j dans l'espace des phases (\vec{r}, \vec{v}) .

Chacune de ces fonctions de distributions doit satisfaire un système intégro-différentiel formé de:

1) L'équation de Liouville-Boltzmann avec second membre:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} - \nabla_{\vec{r}} V \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = \sum \left(\frac{df_i}{dt} \right)_{renc.}$$

où le second membre représente la somme des taux de changement de f_i ($i = 1, \dots, n$) sous l'effet des rencontres avec les différentes masses.

2) L'équation de Poisson:

$$\Delta_{\vec{r}} V = 4\pi G \sum_{j=1}^n \rho_j , (j = 1, \dots, n)$$

où

$$\rho_j = m_j \int_{\vec{v}} f_j d\vec{v}$$

représente les densités massiques ρ_j ($j = 1, \dots, n$) relatives aux masses m_j ($j = 1, \dots, n$).

Remarque 6.1.1: L'étude du problème dans le cas de la symétrie sphérique des amas avec une seule masse moyenne stellaire ne facilite pas la résolution du système associée. Le système ainsi considéré reste toujours non linéaire par rapport aux fonctions f et V . La résolution analytique des deux équations reste un problème ouvert présentant des difficultés majeures. De plus, toutes les études classiques de l'évolution des amas basées sur la statistique nécessitent des hypothèses plus ou moins contraignantes (voir par exemple [63]). Il y a trois types de problèmes:

1°/ Cas d'un type particulier de potentiel.

2°/ Cas d'une fonction de distribution particulière sans référence à l'équation de Liouville-Boltzmann, l'équation de Poisson donnant le potentiel.

3°/ Cas d'une fonction de distribution vérifiant l'équation de Liouville-Boltzmann sans second membre, l'équation de Poisson donnant le potentiel.

Le modèle étudié fait partie des problèmes du troisième type. Il a l'avantage de conduire à une équation canonique sans constantes.

Des propriétés pour les solutions de cette équation seront démontrées vers la fin de cette partie.

Le modèle découle du principe de l'équilibre dynamique, ce qui revient à supposer que l'équation de Liouville-Boltzmann est sans second membre:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla_{\vec{r}} V \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

Une "rencontre" se traduit pour une cellule infinitésimale en mouvement dans l'espace des phases, par une capture ou une évansion d'étoiles et s'exprime par:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{renc.} = c - e$$

En effet il s'agit d'une interaction et non d'une collision. Dans les régions à forte densité de l'amas, en vertu du principe d'équilibre dynamique, on peut considérer que l'effet cumulatif des rencontres à l'intérieur de la cellule est nul: les évansions et captures étant (statistiquement) compensées en moyenne. De l'hypothèse de l'équilibre dynamique, on déduit que:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{renc.} = 0$$

D'après les études théoriques de Lyndell-Bell ([52]) et les résultats numériques de Hénon ([32]), le mélange dynamique conduit toujours l'amas à l'état stationnaire, c'est à dire, à un

état tel que la fonction de distribution ne dépend pas explicitement du temps:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

En conclusion, l'équation de Liouville-Boltzmann s'écrit à l'état stationnaire et homogène sous la forme:

$$\vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla_{\vec{r}} V \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

6.2 Solution générale et problème de Cauchy

Rappelons l'équation de Liouville-Boltzmann dans le cas de la symétrie sphérique telle qu'elle a été obtenue par Ogorodnikov, à l'état stationnaire:

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} = 0 \quad (6.2.1)$$

Désignons par:

ρ la densité spatiale (*massique*) de l'amas, sachant qu'elle a pour expression:

$$\rho(\vec{r}, t) = \int_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

$I^2 = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\|^2$ le carré du moment cinétique d'un point massique représentant l'étoile de masse m en mouvements dans l'espace des phases $\{(\vec{r}, \vec{v})\}$.

$E = mv^2/2 + V$ son énergie mécanique totale.

Proposition 6.2.1:

L'équation précédente admet une solution du type:

$$f = K \exp \left\{ -a_0 E - a'_0 \frac{I^2}{2} \right\}.$$

Cette solution sera utilisée dans le cas d'un amas stellaire limité "voir chapitre suivant", et la densité ρ s'écrit:

$$\rho(r) = \frac{K \exp(-a_0 V(r)) (2\pi)^{\frac{3}{2}}}{a_0^{\frac{3}{2}} (1 + \mu^2 r^2)}$$

avec

$$K \in \mathbb{R}, a_0 \in \mathbb{R}^+, a'_0 \in \mathbb{R}^+, \mu^2 = \frac{a'_0}{a_0}.$$

Démonstration:

La démonstration consiste à montrer que l'équation (6.2.1) admet une solution à variables séparées du type:

$$f(r, v_r, v_T) = F(v_r)G(r, v_T) \quad (6.2.2)$$

En effet, si on remplace f dans l'équation (6.2.1) par l'égalité (6.2.2), on obtient:

$$v_r \frac{\partial(FG)}{\partial r} + \left(\frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) \frac{\partial(FG)}{\partial v_r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial(FG)}{\partial v_T} = 0$$

Après simplification, la dernière équation s'écrit:

$$F v_r \frac{\partial G}{\partial r} + \left(\frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) G \frac{dF}{dv_r} - \frac{v_r v_T}{r} F \frac{\partial G}{\partial v_T} = 0$$

D'où, après division par $v_r F G$ (supposé non nul),

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial r} + \left(\frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) \frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r} - \frac{v_T}{r} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial v_T} = 0 \quad (6.2.3)$$

Deux cas peuvent se présenter:

i) Cas où $\left(\frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) = 0$:

Ce qui entraîne:

$$V(r) = v_T^2 \log r + C_0,$$

où C_0 est une constante.

D'autre part l'équation (6.2.1) devient dans ce cas:

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} = 0$$

D'où

$$f(r, v_r, v_T) = F(v_r)\psi(rv_T) + G(v_r).$$

avec F, G et ψ des fonctions arbitraires.

ii) Cas où $\left(\frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) \neq 0$:

Dans ce cas le seul terme dépendant de v_r dans l'équation (6.2.3) est $\frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r}$, il ne peut être qu'une constante (car indépendant de v_r).

D'où on pose:

$$\frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r} = C \quad (6.2.4)$$

avec C constante.

Après résolution de cette équation on obtient:

$$F(v_r) = K \exp \frac{C}{2} v_r^2; \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Tenant compte de la condition

$$\lim F(v_r) = 0, \text{ quand } v_r \rightarrow +\infty,$$

on déduit que $C < 0$, par suite on pose:

$$C = -a_0, a_0 \in \mathbb{R}_*^+$$

Ce qui implique:

$$F(v_r) = K \exp \frac{-a_0}{2} v_r^2$$

Revenons à l'équation (6.2.3) pour chercher l'expression de G . En effet, de (6.2.3), après simplification par rG , on obtient:

$$r \frac{\partial G}{\partial r} + (v_T^2 G - rG \frac{dV}{dr}) \frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r} - v_T \frac{\partial G}{\partial v_T} = 0$$

En utilisant (6.2.4), on aura:

$$r \frac{\partial G}{\partial r} - v_T \frac{\partial G}{\partial v_T} = a_0 (v_T^2 - r \frac{dV}{dr}) G \quad (6.2.5)$$

L'équation caractéristique de (6.2.5) s'écrit:

$$\frac{dr}{r} = - \frac{dv_T}{v_T} = \frac{dG}{a_0 (v_T^2 - r \frac{dV}{dr}) G} \quad (6.2.6)$$

Recherche des intégrales premières:

1°) De la double égalité (6.2.6), on a:

$$\frac{dr}{r} = - \frac{dv_T}{v_T}$$

D'où

$$rv_T = cste$$

Donc l'intégrale première correspondante s'écrit:

$$\kappa(r, v_T) = rv_T$$

2°) Cherchons une autre intégrale première à partir de (6.2.6), en introduisant le triplet (λ, μ, ν) tel que

$$\lambda r - \mu v_T + \nu a_0(v_T^2 - r \frac{dV}{dr})G = 0$$

Si on prend

$$\nu = \frac{1}{G},$$

On obtient

$$\lambda r - \mu v_T + a_0 v_T^2 - a_0 r \frac{dV}{dr} = 0$$

Si de plus

$$\lambda = a_0 \frac{dV}{dr},$$

On aura

$$r a_0 \frac{dV}{dr} - \mu v_T + a_0 v_T^2 - a_0 r \frac{dV}{dr} = 0$$

D'où on aura nécessairement

$$\mu = a_0 v_T$$

Soit U une intégrale première du système, alors:

$$dU = \lambda dr + \mu dv_T + \nu dG$$

D'où

$$dU = a_0 \frac{dV}{dr} dr + a_0 v_T dv_T + \frac{dG}{G}$$

Et finalement

$$U(r, v_T, G) = \log G + g(r, v_T)$$

Avec

$$g(r, v_T) = a_0 V(r) + \frac{1}{2} a_0 v_T^2$$

On aura:

$$U(r, v_T, G) = a_0 V + \frac{1}{2} a_0 v_T^2 + \log G$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles (6.2.5) est telle que:

$$\Phi \left\{ \psi(rv_T), \frac{1}{2}a_0(v_T^2 + 2V) + \log G \right\} = 0 \quad (6.2.7)$$

Où Φ et ψ sont des fonctions arbitraires.

A partir de (6.2.7), on obtient;

$$\log G = -\frac{1}{2}a_0(v_T^2 + 2V) + \psi(rv_T)$$

Ce qui entraîne que:

$$G(r, v_T) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}a_0(v_T^2 + 2V) + \psi(rv_T) \right\}$$

Par conséquent,

$$f(r, v_r, v_T) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2}a_0(v_r^2 + v_T^2 + 2V) \right\} \exp \{ \psi(rv_T) \}$$

Sachant que $E = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_T^2) + V$ et $I^2 = r^2v_T^2$, ψ est choisie de telle sorte qu'on aura bien f qui s'écrit sous la forme:

$$f = K \exp \left\{ -a_0E - a'_0 \frac{I^2}{2} \right\}.$$

Avec

$$K \in R, a_0 \in R^+, a'_0 \in R^+.$$

Pour trouver l'expression de la densité ρ , on a d'après **5.2**:

$$\rho(r, t) = 2\pi \int_{v_r} \int_{v_T} f(r, v_r, v_T, t) v_T dv_r dv_T$$

On remplace f par son expression qu'on a trouvée. Ensuite on intègre, et on aura le résultat.

Remarque 6.2.1:

Les constantes a_0 et a'_0 intervenant dans l'exponentielle

$$f(E, I^2) = K \exp \left\{ -a_0 E - \frac{1}{2} a'_0 I^2 \right\}$$

doivent avoir les dimensions suivantes:

$$a_0 \text{ a pour dimension } [L^{-2}T^2]$$

$$a'_0 : [L^{-4}T^2]$$

L étant l'unité de longueur du déplacement, T celle du temps.

L'équation de Poisson en symétrie sphérique et à l'état stationnaire s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dV}{dr} \right\} = 4\pi G\rho$$

Afin d'introduire des variables adimensionnelles dans cette équation, posons:

$$x = \mu r$$

$$U(x) = a_0 V(r)$$

L'équation de Poisson devient donc:

$$\frac{\mu^2}{x^2} \frac{d}{d(\frac{x}{\mu})} \left\{ \frac{x^2}{\mu^2} \frac{1}{a_0} \frac{dU}{d(\frac{x}{\mu})} \right\} = \frac{4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp(-U)}{a_0^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\mu^2}{2} x^2)}$$

D'où:

$$\mu^2 \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\} = \frac{4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp(-U)}{a_0(1 + x^2)}$$

Si on pose:

$$\lambda = \frac{4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2 a_0^{\frac{1}{2}}}$$

On obtient:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\} = \lambda \frac{\exp(-U)}{1 + x^2}$$

On définit sur $C^2(\mathbb{R}^*)$, l'opérateur L par:

$$L(U) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\}$$

Théorème 6.2.1:

Considérons le système associé au problème à symétrie sphérique :

$$(S) \begin{cases} L(U) = \lambda \frac{\exp(-U)}{1+x^2}, \text{ avec } \lambda = \frac{4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2 a_0^{\frac{1}{2}}} \\ U(x_0) = C_1 \\ U'(x_0) = C_2 \end{cases}$$

Posons: $a_1 = x_0(C_1 - \ln \lambda)$, $a_2 = x_0 C_2 + \ln \lambda - C_1$.

Pour: $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, le système (S) possède une solution unique de classe \mathcal{C}^2 sur $[x_0, +\infty[$, qui s'écrit sous la forme:

$$U(x) = \frac{z(x)}{x} + \ln \lambda$$

Démonstration:

Le système (S) est équivalent au système:

$$(S') \begin{cases} U(x) = \frac{z(x)}{x} + \lg \lambda \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{x \exp(-\frac{z}{x})}{1+x^2} \\ z(x_0) = a_1 \\ z'(x_0) = a_2 \end{cases}$$

Ce dernier admet une solution unique de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle fini $[x_0, R[$.

Il suffit de montrer que toute solution du système suivant est prolongeable sur $[x_0, +\infty[$.

Pour cela, démontrons que, pour tout $R > 0$, la solution X est bornée sur $[x_0, R[$.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = F(x, X) \\ X(x_0) = (a_1, a_2) \end{cases}$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1 = z$, $x_2 = z'$ et $F(x, X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x \exp(-\frac{x_1}{x}) \end{pmatrix}$.

En effet,

Soit $X(x)$ une solution de ce système , alors pour tout x dans $[x_0, R[$, on a:

$$x_2(x) = x_2(x_0) + \int_{x_0}^x x_2'(s) ds$$

D'où

$$x_2(x) = x_2(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{s \exp\left(-\frac{x_1(s)}{s}\right)}{1 + s^2} ds$$

Donc

$$|x_2(x)| < a_2 + \int_{x_0}^x \exp\left(-\frac{x_1(s)}{s}\right) ds$$

Ce qui implique qu'il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$|x_2(x)| < a_2 + C(R - x_0)$$

En effet, il suffit de noter que $x_1(\cdot)$ est convexe (car d'après (S') , sa dérivée seconde est positive), et donc, soit $x_1(\cdot)$ est bornée sur $[x_0, R]$, soit $x_1(s) \rightarrow +\infty$ quand $s \rightarrow R$ par valeurs inférieures .

Posons

$$a_2 + C(R - x_0) = M_1.$$

Alors

$$\exists \xi \in [x_0, x] \text{ tq. } |x_1(x) - x_1(x_0)| = |(R - x_0)x'_1(\xi)|$$

Donc

$$|x_1(x) - x_1(x_0)| \leq (R - x_0)M_1$$

D'où

$$|x_1(x)| \leq |x_1(x_0)| + (R - x_0)M_1,$$

posons

$$|x_1(x_0)| + (R - x_0)M_1 = M_2, \max(M_1, M_2) = M$$

Donc

$$|x_1(x)| + |x_2(x)| \leq 2M$$

Par conséquent $\|X(x)\|$ est bornée sur $[x_0, R[$.

Donc $X(x)$ est prolongeable à $[x_0, +\infty[$. C.Q.F.D.

Remarque 6.2.2:

Le problème de cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{t \exp(-\frac{x}{t})}{1+t^2} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = a \end{cases}$$

n'est pas bien posé.

En effet, posons

$$F(t, x) = \frac{t \exp(-\frac{x}{t})}{1+t^2}$$

Alors

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim F(t, x)$ n'existe pas quand (t, x) tend vers $(0, x_0)$

En effet,

si $x_0 \neq 0$:

Pour $A_n = (-\frac{x_0}{n}, x_0)$, on a: quand n tend vers $+\infty$, $F(A_n)$ tend vers $signe(-x_0)\infty$.

Si $x_0 = 0$:

Pour $A_n = (-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, on a: quand n tend vers $+\infty$, $F(A_n)$ tend vers $-\infty$.

Donc F ne peut être prolongée par continuité à \mathbb{R}^2 .

Par conséquent, puisqu'on étudie le problème en équilibre dynamique c'est à dire l'équation de Liouville-Boltzmann sans second membre, nous avons considéré un modèle permettant des interactions entre particules (étoiles) sans collision, il existe alors $r_0, r_0 > 0$ tel que, la fonction de distribution f s'annule à l'intérieur de l'intervalle $[0, r_0]$.

Chapitre 7

Modèle de masse à l'infini

7.1 Modèles de structure d'amas

Pour l'obtention des modèles réalistes d'amas, il est nécessaire de limiter ces systèmes stellaires dans l'espace, comme le prouvent entre autres les travaux d'observation de King ([40]), Peterson et King ([57]) et les travaux théoriques de King ([41]). Ceci signifie donc qu'en chaque point de l'amas, il existe une vitesse limite (finie) ou d'évasion, suffisante pour que l'étoile dotée de cette vitesse atteigne la frontière de l'amas imposée par la force de marée de la voie lactée. Le rayon limite d'un amas, qui se déplace dans le champ général de la galaxie, est la distance radiale pour laquelle l'attraction exercée par l'amas sur l'étoile est équilibrée par l'attraction des masses extérieures à l'amas. Ce rayon est estimé au moyen de l'expression:

$$r_{lim.} = M^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}}$$

où M est la masse de l'amas et K dépend du champ gravitationnel. L'expression de K a été donnée par King (1962) dans le cas des amas globulaires et ouverts (voir [41]). Ceci dit, il faut tenir compte du concept de "vitesse d'évasion" dans la construction de la fonction de distribution. Dans l'espace des phases, ceci revient à introduire, à la vitesse d'évasion, un mur parfaitement absorbant quelle que soit la position de l'étoile dans l'amas. Toute étoile atteignant cette vitesse limite ne fait plus partie de l'amas et s'enfonce aussitôt dans le champ galactique.

7.2 Propriétés des solutions globales

Rappelons le système du chapitre précédent:

$$(S') \begin{cases} U(x) = \frac{z(x)}{x} + \lg \lambda \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{x \exp(-\frac{z}{x})}{1+x^2} \\ z(x_0) = a_1 \\ z'(x_0) = a_2 \end{cases}$$

Proposition 7.2.1:

Les solutions $z(x)$ dans le système (S') vérifient:

1/ $\frac{z}{x}$ est non bornée

2/ $\lim z(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$

3/ La fonction $\exp(-\frac{z}{x})$ tend vers zéro moins rapidement que $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$

Démonstration:

1/ On suppose que $\frac{z}{x}$ est bornée sur $]0, +\infty[$; alors :

Il existe une constante $A > 0$ t.q. $\frac{z}{x} < A$ pour tout x positif.

D'où on aura:

$$\frac{x \exp(-\frac{z}{x})}{1+x^2} > \frac{x \exp -A}{1+x^2}$$

Donc

$$z' > \frac{1}{2}(\exp -A) \lg(1+x^2) + C_1$$

avec C_1 une constante.

Ce qui implique

$$z' > (\exp -A) \lg x + C_1$$

En intégrant, on aura

$$z > C_1 x + (\exp -A)(x \lg x - x) + C_2$$

où C_2 est une constante.

D'où

$$\frac{z}{x} > C_1 + (\exp -A)(\lg x - 1) + \frac{C_2}{x}$$

Comme la fonction $\lg x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors on a une contradiction

Donc la fonction $\frac{z}{x}$ ne peut être bornée .

2/ De 1/ on déduit que z est non bornée. Et comme z'' positif quelque soit x positif, alors z est une fonction convexe. Par conséquent on a

$$\lim z(x) = +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

3°/ d'après 2°/ $\exists a \in]0, +\infty[$ t.q. :

$\forall x \in]0, +\infty[$ on a $\frac{z}{x}$ qui est positive, donc:

$$\frac{x \exp(-\frac{z}{x})}{1+x^2} < \frac{x}{1+x^2}, \forall x > a.$$

D'où, $\forall x > a$ on a:

$$\int_a^x z''(t) dt < \int_a^x \frac{t dt}{1+t^2}$$

Ce qui donne

$$z'(x) - z'(a) < \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2)$$

En intégrant encore une fois, on aura:

$$z(x) - z(a) < \frac{1}{2} \int_a^x \ln(1+t^2) dt + x(z'(x) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2)) - a(z'(a) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2))$$

On pose

$$C = z(a) - a(z'(a) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2))$$

On aura

$$z(x) < \frac{1}{2} \int_1^x \ln(1+t^2) dt + P + C$$

avec $P = \frac{1}{2} \int_a^1 \ln(1+t^2) dt$

D'où

$$z(x) < \frac{1}{2} \int_1^x \ln(2t^2) dt + P + C$$

Donc

$$z(x) < P + C + \frac{x}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + x \ln x - x + 1$$

On pose

$$A = P + C - \frac{1}{2} \ln 2 + 1 \text{ et } B = \frac{1}{2} \ln 2 - 1$$

On aura

$$z(x) < A + x(\ln x + B); \forall x > a$$

D'où

$$\frac{z}{x} < \frac{A}{x} + \ln x + B$$

Mais au voisinage de l'infini, on a:

$$\frac{A}{x} + \ln x + B < \ln x + C$$

avec C constante.

Donc

$$\exp\left(-\frac{z}{x}\right) > \exp(-C - \ln x)$$

Pour tout x au voisinage de l'infini.

Et par conséquent on a:

$$\exp\left(-\frac{z}{x}\right) > \frac{\exp(-C)}{x}$$

Pour x assez grand.

Le théorème principal de cette partie est le suivant.

Théorème 7.2.1:

Dans le cas de la symétrie sphérique, la masse totale de l'amas à l'état stationnaire et homogène est infinie.

Démonstration:

On a:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{x \exp\left(-\frac{z}{x}\right)}{1 + x^2}$$

Divisons par x , et pour λ une constante réelle on aura:

$$\frac{1}{x^2} \left\{ \frac{dz}{dx} + x \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} \right\} = \frac{\lambda \exp\left(-\frac{z}{x}\right)}{\lambda (1 + x^2)}$$

D'où

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dz}{dx} \frac{1}{x} + x^2 \left\{ -\frac{z}{x} \right\} \right\} = \lambda \frac{\exp\left(-\frac{z}{x} - \ln \lambda\right)}{1 + x^2}$$

Multiplions par μ^2 , on aura:

$$\frac{\mu^2}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\} = \mu^2 \lambda \frac{\exp(-U)}{1 + x^2}$$

avec

$$\lambda = \frac{4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2 a_0^{\frac{1}{2}}} \text{ et } U(x) = \frac{z(x)}{x} + \lg \lambda$$

Ensuite divisons par a_0 , on aura:

$$\frac{\mu^2}{x^2} \frac{d}{d(\frac{x}{\mu})} \left\{ \frac{x^2}{\mu^2} \frac{1}{a_0} \frac{dU}{d(\frac{x}{\mu})} \right\} = \frac{\mu^2 \exp(-U) 4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{a_0(1+x^2)\mu^2 a_0^{\frac{3}{2}}}$$

Sachant que

$$U = a_0 V \text{ et } x = \mu r$$

Donc

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dV}{dr} \right\} = \frac{4\pi GK(2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp(-a_0 V)}{a_0^{\frac{3}{2}} (1 + \mu^2 r^2)}$$

mais

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dV}{dr} \right\} \text{ et } \rho = \frac{K \exp(-a_0 V) (2\pi)^{\frac{3}{2}}}{a_0^{\frac{3}{2}} (1 + \mu^2 r^2)}$$

On retrouve bien l'équation de Poisson qui donne la densité ρ en fonction du potentiel

V . Et en conclusion on trouve:

$$\rho = \frac{1}{4\pi G} \frac{z'' \mu^2}{x a_0}.$$

D'autre part, sachant que l'élément de masse dM du système est donné par:

$$dM = \rho dv$$

(avec dv étant l'élément de volume de l'espace des positions (\vec{r})).

Donc

$$dM = \rho 4\pi r^2 dr$$

D'où

$$dM = \left\{ \frac{1}{4\pi G} \frac{z'' \mu^2}{x a_0} \right\} \left\{ 4\pi \left(\frac{x^2}{\mu^2}\right) d\left(\frac{x}{\mu}\right) \right\}$$

Ce qui donne

$$dM = \frac{x z''}{G a_0 \mu} dx$$

En intégrant sur l'espace des positions, on déduit la valeur de la masse M :

$$GM a_0 \mu = \int_{r_0}^{+\infty} x z'' dx$$

C'est à dire

$$M = \frac{1}{Ga_0\mu} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{x^2 \exp(-\frac{z}{x})}{1+x^2} dx$$

Et d'après 3/ de la proposition 6.2.1, on a $\exp(-\frac{z}{x})$ qui décroît moins rapidement que $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini.

Donc l'intégrale

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{x^2 \exp(-\frac{z}{x})}{1+x^2} dx$$

est divergente car :

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

diverge. Cela implique que $M = +\infty$, donc la masse est infinie.

Chapitre 8

Conclusion

On a montré dans cette thèse qu'il existe dans l'ensemble de tous les problèmes \mathcal{P} qu'on considère, un sous-ensemble \mathcal{P}_1 qui est dense dans \mathcal{P} et structurellement stable.

Chaque $P = (G, \delta) \in \mathcal{P}_1$ définit un système dynamique qui ressemble au graphe de la figure donnée en section 1, et $P(a)$ possède une solution unique sauf si a est une source. Si cependant a est un attracteur alors la solution correspondant à $P(a)$ est constante i.e. un équilibre.

C'est le contraire de ce qui se passe pour des systèmes dynamiques ordinaires i.e. ceux associés avec les EDO (voir par exemple [56]). Dans ces derniers (dans le cas régulier), le problème est uniquement solvable; le système structurellement stable ressemble à la figure donnée dans le chapitre 1, mais les sources sont des équilibres. Le phénomène de source pour laquelle la solution stationnaire est non optimale, reflète le caractère non local du problème $P(a)$, la "partie locale" et la "partie globale" de $P(a)$, sont nettement séparées dans l'algorithme proposé dans le chapitre 3 pour résoudre $P(a)$. La proposition 4.5 donnée dans le chapitre 4 pourrait surprendre, puisque la proposition correspondante dans la théorie des systèmes dynamiques et des EDO est fausse.

8.1 Conjectures

1. On conjecture que le résultat principal de la première partie, théorème 4.1 continue à être vrai, si des contraintes régulières sur le contrôle

$$a(x(t)) \leq \dot{x}(t) \leq b(x(t))$$

sont introduites, aussi bien que des contraintes sur l'état

$$\alpha \leq x(t).$$

2. On conjecture que, dans \mathbb{R}^2 , les trajectoires optimales bornées tendent vers des cycles limites attracteurs ou bien des points attracteurs, si le problème est structurellement stable. (En particulier: les états stationnaires optimaux sont des attracteurs). On conjecture que l'ensemble des systèmes qui sont structurellement stables est résiduel.

8.2 Projets de recherches

On termine la thèse par des projets de recherches, sur des généralisations des résultats qu'on a obtenus et d'autres voies de recherches:

1°/ Stabilité structurelle en théorie des jeux:

1.1°/ On pose le même problème dans le cadre de la théorie des jeux différentiables, en donnant un sens bien précis aux notions de structures topologiques et l'étude de l'équation d'Issacs.

1.2°/ Problèmes de Stackelberg.

1.3°/ Problèmes de poursuite-évasion.

2°/ Réfléchir à des applications concrètes par exemple en économie mathématique.

3°/ Etude du problème de discontinuité des solutions.

4°/ les deux problèmes de l'équation spectrale sur le problème d'amas et de plasma.

5°/ Equations des moments de la fonction de distribution:

5.1°/ Cas de la symétrie sphérique.

5.2°/ Cas des systèmes de moments relativistes subordonnés à l'équation de Boltzmann relativiste.

8.2.1 Théorie des jeux différentiables et problèmes de discontinuité

Objet du projet

Etude d'une classe de problèmes du contrôle optimal, en premier lieu, sur la généricité et la stabilité pour l'existence de stratégies optimales, d'abord pour un modèle macro-économique de placement en bourse d'actions à long terme, ensuite généralisation aux jeux différentiables, commençant par des problèmes de Stackelberg, allant aux problèmes de poursuite-évasion, en parallèle, l'étude des solutions du point de vue discontinuité pour des problèmes du contrôle optimal généralisant ceux en question, conclusion avec des problèmes d'équations d'état les systèmes intègro-partiel différentiels tels que les systèmes de Liouville-Boltzmann-Poisson.

Problématique

On a considéré d'abord des problèmes mathématiques pour un seul individu. Dans le cas de plusieurs individus, la problématique est que même si on suppose que la solution existe, on doit étudier la stabilité structurelle du problème correspondant, dans un sens que l'on définit et en conformité avec la réalité physique. Il s'agit donc de trouver un ensemble le plus grand possible dans l'espace des problèmes étudiés, ne contenant que des éléments structurellement stables, et définissant un système dynamique similaire, en un sens moins restrictif que le sens usuel. On pose le même problème dans le cadre de la théorie des jeux différentiables avec les problèmes de Stackelberg, en donnant un sens bien précis aux notions de structures topologiques.

Du point de vue discontinuité des solutions, la notion classique de solution d'une équation différentielle ordinaire contrôlée, exige qu'elle soit absolument continue. Si le taux de variation dans le temps de la solution est une fonction linéaire de la commande, et si le critère d'optimisation est aussi linéaire en la commande, alors on n'a pas forcément existence d'une solution absolument continue du problème de contrôle optimal. En effet, afin que l'existence d'une solution du problème soit garantie on introduit certaines bornes pour le contrôle. La convexité et la compacité de l'ensemble des contrôles (admissibles) entraînent alors l'existence d'une solution commande qui prend ses valeurs dans les extrémités du

domaine, exception faite pour certaines trajectoires/contrôles dites singulières. La description complète d'une solution est en général très difficile sinon impossible en ce qui concerne l'endroit et l'instant du temps où le contrôle commute d'une extrémité du domaine à l'autre. Le problème est de montrer qu'on peut résoudre le problème sans les bornes .

Description du projet

Cadre conceptuel (Etat de la recherche sur la thématique) Ce projet de recherches s'insère dans le cadre général de l'étude de problèmes de contrôle optimal (aspects théoriques ou applicatifs). Concernant l'équation d'Hamilton-Jacobi, l'algorithme de type séparatif développé dans cette thèse est différent des études standards sur ce thème, où les auteurs utilisent en général la notion de solution de viscosité. Les outils théoriques utilisés dans cette thèse (notions d'attracteurs, de sources, de stabilité structurelle) apportent une vision nouvelle de ce type de problèmes, qui diffère de la théorie correspondante développée dans la théorie des équations différentielles ordinaires (cf. les travaux de J. Palis, Jr. W. de Melo [8]). En ce qui concerne la théorie des jeux différentielles, jusqu'à présent on s'est surtout intéressé à l'équation d'Issacs qui généralise l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, avec le principe d'optimalité.

Problématique et hypothèse de travail - Enoncé de la question principale et des questions secondaires

- Hypothèse argumentées des réponses à la question principale et aux questions secondaires

-Question principale: Peut-on avoir une solution pour une classe de contrôles non bornées?

-Question secondaire: Peut-on trouver un ensemble résiduel des problèmes structurellement stables parmi les problèmes du type Stackelberg avec bord?

-La réponse à la question principale est oui, car on a donc deux raisons pour enlever les bornes du contrôle:

1. L'espoir que ça simplifie le problème.
2. Ils n'existe pas de bornes intrinsèques qui correspondent au caractère du problème.

Il existe comme exemple d'application en économie un problème d'investissement optimal, ou il paraît parfois qu'un investissement qui a lieu à des instants bien précis décrit

mieux un processus réel qu'un investissement qui se développe continûment par intervalles, comme dans le principe du bang bang. (Ne suffit il pas de signer un chèque pour réaliser un investissement?)

-La réponse à la question secondaire, est oui si on arrive à résoudre la question principale, car par la suite on peut essayer de faire tendre les bornes vers l'infini par exemple.

Méthodologie: Outils d'analyse et techniques d'investigation On se pose la question: "comment pourrions-nous vérifier nos hypothèses"

On répond de la manière suivante:

Comme dans le cas classique les deux outils principaux qu'on utilise pour résoudre un problème du contrôle optimal sont:

- (1) Le principe du maximum dit de Pontryaguin.
- (2) L'équation d'optimalité dite de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Il faut certainement généraliser ces deux outils afin qu'ils puissent servir dans des cas avec solutions discontinues. Ce qui n'est fait que très particulièrement dans la littérature. La manière d'arriver à des généralisations utiles cependant sera d'attaquer certains problèmes concrets avant d'aborder les problèmes de Stackelberg.

On propose donc:

(a) Etude de la littérature consacrée aux applications du contrôle optimal (par exemple à l'économie), pour en tirer une collection des problèmes dans lesquels le contrôle n'entre que linéairement (comme dans le problème cité auparavant en problématique et hypothèse de travail) et qui n'admettent pas de bornes à priori naturels pour la variable du contrôle. (Dans ce cas on parle souvent de contrôle du type impulsif).

(b) Etude de l'application du principe du maximum et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman à la résolution des problèmes "classiques" au moyen d'un livre introductoire.

(c) Résolution des problèmes choisis aux solutions discontinues en parallèle avec la généralisation appropriée des outils classiques (principe du maximum et équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman)

Plan de travail pour la réalisation des tâches des projets qu'on propose On rappelle que dans cette thèse on a abouti en première étape, à la démonstration que les

solutions pour une classe de problèmes du contrôle optimal qu'on étudie, définissent dans un sens moins restrictif qu'usuel, un système dynamique, tel que tout équilibre optimal est un attracteur et entre chaque paire d'attracteurs il existe une source unique. Cette propriété, on montre qu'elle est au moins générique. Ensuite, après qu'on a bien défini la notion de stabilité structurelle, qui est une notion nouvelle et originale pour la théorie du contrôle optimal. On a démontré que le problème correspondant à la solution est structurellement stable. En deuxième étape, on a étudié le problème avec équation d'état comme système intégral-différentiel. Pour commencer, on avait étudié d'abord indépendamment de tout le reste une équation d'état d'un problème avec un rayon non limité, on avait abouti à l'interprétation que la masse dans ce cas est infinie.

Il s'agit maintenant de construire un algorithme plus générale.

Programme de recherche On Propose donc:

-Etude de la littérature consacrée aux applications du contrôle optimal (par exemple à l'économie), pour en tirer une collection des problèmes de contrôle du type impulsive, c'est à dire dans lesquels le contrôle n'entre que linéairement (comme dans le problème cité auparavant en problématique et hypothèse de travail) et qui n'admettent pas de bornes à priori naturels pour la variable du contrôle.

-Etude de l'application du principe du maximum et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman à la résolution des problèmes "classiques" au moyen d'un livre introductoire.

-Résolution des problèmes choisis aux solutions discontinues en parallèle avec la généralisation appropriée des outils classiques (principe du maximum et équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman).

-Solutions des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman concrètes sans contraintes sur la contrôle, avec des polynômes de degré pair petits. Simulation sur ordinateur.

-Etude du contrôle linéaire, donc des solutions du problème du contrôle optimal discontinues. Est-ce qu'il existe une solution?

-Tirer l'idée pour l'énoncé et la démonstration d'un théorème sur l'existence d'un ensemble résiduel des problèmes structurellement stables parmi les problèmes avec contraintes de type Stackelberg.

8.2.2 Problème des moments pour la fonction de distribution

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré une description cinétique d'un système de particules (étoiles). Les particules sont alors décrites par une fonction de distribution qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}_+$, de la position $x \in \mathbb{R}^3$ et de la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$. Par conséquent, une simulation numérique d'une équation cinétique nécessite la discrétisation de 7 variables. Elle est donc souvent très coûteuse en terme de temps CPU et de mémoire.

Un second niveau de description couramment utilisé est la description fluide. Les particules sont alors décrites par la densité ρ , la vitesse v et la température T . Ces grandeurs macroscopiques ne dépendent que du temps t et de la position x et satisfont les équations hydrodynamiques (équation d'Euler ou de Navier-Stokes). Cependant, ces équations supposent que le système étudié est proche de l'équilibre thermodynamique, ce qui n'est bien sûr pas toujours réalisé.

Il est donc nécessaire de développer des méthodes intermédiaires entre les modèles cinétiques et les modèles fluides. Principalement deux approches sont utilisées: les développements asymptotiques (méthodes de Hilbert et de Chapman-Enskog) et les méthodes de moments.

Les méthodes de Hilbert et de Chapman-Enskog sont utilisées lorsque le libre parcours moyen est petit par rapport à la longueur caractéristique du système. Elles supposent que la fonction de distribution peut être développée autour d'une maxwellienne. Ces deux méthodes supposent que le système est proche de l'équilibre.

Les méthodes de moments sont obtenues à partir du choix d'un espace vectoriel M de dimension finie de fonctions polynômiales de la vitesse v . Le système d'équations s'obtient en multipliant l'équation de Boltzmann par une base de l'espace M et en intégrant par rapport à la variable de vitesse. Les inconnues sont les intégrales de la fonction de distribution contre les éléments de la base de M . Par exemple, si $M = \langle \{1, v, |v|^2\} \rangle$, on obtient les équations locales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les flux et les intégrales de l'opérateur de collision font intervenir des termes qui, en général, ne peuvent pas s'exprimer en fonction des inconnues. Pour fermer le système, un choix de la fonction de distribution est nécessaire. Dans [24,25] Grad a proposé de fermer le système par le développement en polynômes de Hermite. Dans le cas relativiste

c'est à dire l'équation de Boltzmann relativiste, l'étude a été faite dans le cas de système à 14 moments dans [9,18,19,42,54]. Dreyer et Weiss [18] se sont également intéressés à la limite classique de tels systèmes. Cependant, la détermination rigoureuse des espaces de moments qui sont compatibles avec la transformation de Lorenz n'a pas encore été considérée. Dans le cas relativiste, un espace de moments M est un espace vectoriel de dimension finie constitué de fonctions polynômiales de la quantité de mouvement p et de l'énergie $\varepsilon(p)$. Comme dans le cas classique, on souhaite que le système obtenu généralise les équations de l'hydrodynamique relativiste. Par conséquent, l'espace M doit satisfaire

$$1, p, \varepsilon(p) \in M.$$

En mécanique classique, les changements de référentiels s'effectuent à l'aide des transformations de Galilée. En relativité restreinte, ils s'effectuent grâce aux transformations de Lorenz. Dans le cas des systèmes de moments relativistes, le problème de la réalisabilité des moments reste ouvert. Seul le cas du système $(1, p, \varepsilon(p))$ a été considéré (cf. [26,20]). Dans le cas classique, le problème de la réalisabilité des moments a été étudié par Junk[34].

Comme perspectives de travail: trouver et résoudre le système d'équations aux moments en utilisant l'équation spectrale obtenue dans cette thèse. On pourra s'inspirer par exemple des travaux de F. Lefèvre et Y. Talpaert [62].

Bibliographie:

- [1] K. Arrow, M. Kurz: Public Investment. The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. The Johns Hopkins Press.1970.
- [2] A.A. Arsen'ev: Global existence of weak solution of Vlasov's systems of equations. Zh. Vychisl.Mat.i.Mat.Fiz.15, (1975), 136-147.
- [3] A. Arsen'ev-O.E. Buryac: On the connexion between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation. Math; USSR Sbornik. Vol.69, N°2, p.465-478,(1991).
- [4] C. Bardos-P. Degond: Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data. Ann. Inst.Henri Poincaré, Vol.2, n°2, 1985, PP. 101-118.
- [5] J. Batt-M. Berestycki: Locally isotropic time-periodic and cylindrically symmetric stationary solutions of the Vlasov-Poisson system. Rapport de recherche du C.M.A, (Paris); 87-10 1987
- [6] C. Bardos-F.Golse-D.Levermore: Fluid dynamics limits of kinetic equations II; convergence proofs for the Boltzmann equation. Comm. on Pure and Appl. Math. 46, p.667-753, (1993).
- [7] A. Bobylev-A. Palczewski-J. Schneider: A consistency result for a discretevelocity model of the Boltzmann equation. Institut of Applied Mathematics, Warsaw University, (1995).
- [8] H. Brezis: Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

- [9] G. Boillat, T. Ruggeri: Maximum wave velocity in the moments system of a relativistic gas. *Contin. Mech. Thermaodyn.* 11:107-111, 1999.
- [10] D.A. Carlson, A. Haure: *Infinite Horizon Optimal Control, Theory and Application. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer.1987.
- [11] R. Coutrez: *Communication de l'observatoire Royal de Belgeque*, N^o 15, 1950a.
- [12] R.E. Caflish-L. Pareschi: An implicit Monte Carlo method for rarefied gas dynamics I: The space homogeneous case. *J. Computational Physics*, 154, p.90-116, (1999).
- [13] S.Cordier-B. Lusquin Desreux and S.Sabry: Numerical approximation of the Vlasov-Fokker-Planck-Lorentz model, *ESAIM: Proceed. CEM PACS1999*, (2001).
- [14] E. Coddington, N. Levinson: *Theory of ordinary differential equation.* Mc. Graw-Hill Book company New York; 1955.
- [15] R.J. Diperna-J.L. Lions: Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. *Comm. Pure Appl. Math.* 52, 729-757 (1989).
- [16] Degond-S.Mas. Gallic: Existence of solutions and diffusion approximation for a model Fokker-Plank equation. *Transport theory and statistical physics*, 16 (4-6), 589-636 (1987).
- [17] L. Desvillettes-S.Mischler: About the splitting algorithm for Boltzmann and BGK equations. *J. Math.Models Methods Appl. Sci* 6, N)8,1079-1101, (1996).
- [18] W. Dreyer, W. Weiss: The classical limit of relativistic extended thermodynamics. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 45: 401-418, 1986.
- [19] S. R. De Groot, W. A. Wan Leeuwen, Ch. G. Van Weert: *Relativistic kinetic theory, principles and applications.* North-Holland, 1980.
- [20] M. Escobedo, S. Mischler, M. A. Valle: Homogeneous Boltzmann equation in quantum relativistic kinetic theory. *Electron. J. Differ. Equ. Monogr.* 4, 2003.
- [21] G.Feichtinger-R.F. Hartl: *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse.* De Gruyter.1986.

- [22] F. Filbert: Semi-Lagrangian method for the Vlasov equation, (1999).
- [23] M. Golubitsky, V. Guillemin: Stable mappings and their singularities. Springer Verlag, 1973.
- [24] H. Grad: The kinetic theory of rarefied gases. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2: 331-407, 1949.
- [25] H. Grad: Principles of the kinetic theory of gases. *Handbuch der physik*, Bd. 12, 205-294, Springer-Verlag, 1958.
- [26] R. Glassey, W. Strauss: Asymptotic stability of the relativistic Maxwellian. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 29: 301-347, 1993.
- [27] F. Hohl: Thesis, college of William and Mary, Williamsburg, Virginia, 1967; voir aussi F. Hohl, *FEIX M.R.*, *Astrophys. J.*, 1967, 147-1164; F. Hohl, NASA, Technical Report TR R-209, 1969.
- [28] M. Henon: In *Dynamical structure and Evolution of Stellar Syst.*, ed. Obs. Genève.
- [29] Horst: Global solutions of the relativistic Vlasov-Maxwell system of plasma physics. *Habilitationsschrift*, Univ. Munchen,(1984).
- [30] E. Horst-R. Hunze: Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation, *Math. Meth. Appl. Sci.* 6, 262-279 (1984).
- [31] M. Hirsch: *Differential Topology*. Springer, 1976.
- [32] M. Hénon: L'évolution initiale d'un amas sphérique, *Annales d'Astrophysique*, Vol. 27, (Février1964), P. 83. Voir aussi : Henon M. :*Bull. Astr.*,série 3 vol.3,241.(1968).
- [33] I. Iben, R.T. Rood: *AP. J.*, 159, 605. 1970. Voir aussi I. King: *Astron. J.* 71,64, 1966.
- [34] M. Junk: Maximum entropy for reduced moment problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 10: 1001-1025, 2000.
- [35] Jeans: *Mont. Not. R. Astr. Soc.* , 76,70, 1915.

- [36] M. Kesri: Structural Stability Of Optimal control Problems. Communications on Pure and Applied Analysis, AIMS, Vol. 4, N°4, 2005, 743-756.
- [37] M. Kesri: Solutions globales du système intégro-différentiel non linéaire de Liouville-Boltzmann-Poisson et l'équation spectrale. Colloquium Mathematicum, Vol. 106, N°2, 2006, 265-281.
- [38] C. Klarke. The optimal management of renewable resources. Mathematical Bioeconomics. John Wiley.1976.
- [39] M. Kesri: Sur un système intégro-différentiel non linéaire de Liouville-Boltzmann-Poisson. Communication à la 3ème Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique et ses applications, Béjaia, 21-22-23 Mai 2002.
- [40] I. King: Dynamics of stellar systems. Symp. N°9, U.A.I., 99. 1975.
- [41] I. King: Astron. J., 71-64, (1966).
- [42] M. Kunik, S. Qamar, G. Warnecke: Kinetic schemes for the relativistic gas dynamics. Numer. Math., 97: 159-191, 2004.
- [43] M. Kesri: Equation de la dynamique stellaire en symétrie sphérique I. Communication au 2ème Coloque National en Analyse Mathématique Appliquée. Tébessa, 7-8-9 Mai 2000.
- [44] M. Kesri: Equation de la dynamique stellaire en symétrie sphérique. 3ème Colloque Nationale d'Analyse Mathématique Appliquée, Université de Guelma 21-22-23 Octobre 2002.
- [45] M. Kesri: Sur un système intégro-différentiel en dynamique stellaire. Congrès national de mathématiques/99, Annaba 17-18-19 Mai 1999
- [46] M. Kesri: Etude du système intégro-différentiel de Liouville-Boltzmann. International. Colloquium on non -Linear Analysis , Fès (Morocco) 9-14 Mai 1994
- [47] M.Lemou: Numerical Algorithm for Axisymmetric Fokker-Planck Landau Operators, Journal of computational Physics 157,762-786, (2000)

- [48] B. Lucquin Desreux: Diffusion of electrons by multicharged ions. *Math.Mod.Meth.Appl.Sci* 10, 3,409-490, (2000).
- [49] O. Larroche: Kinetic simulations of fuel ion transport in ICF target implosions. *Eur. Phys. J. D27*, 131-146, (2003).
- [50] O. Laroche: An efficient explicit numerical scheme for hot fusion particle slowing-down in the Fokker-Planck formalism, 34th Anomalous Absorption conference, (2004).
- [51] M. Lemou-L. Mieussens: Fast impact scheme for the Fokker-Planck-Landau equation, CRAS Paris,ser.I 338, (2004).
- [52] Lynden-Bell: *Mont. Not. R. Astr. Soc.* , 124,I , 1962 a.
- [53] Lynden-Bell: *Mont. Not. R. Astr. Soc.* , 124,279, 1962 b.
- [54] I. Muller, T. Ruggeri: Rational extended thermodynamics. Second edition. Springer Tracts in Natural Philosophy, 37. Springer-Verlag New York, 1998.
- [55] K. Ogorodnikov: Dynamics of stellar systems, translated from the Russian by JB. Sykes, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [56] J. Palis-Jr. W.de Melo: Geometric Theory of Dynamical Systems. Springer.1980.
- [57] C.J. Peterson, I. King: *Astr. J.*, 80, 427, 1975.
- [58] F. Ramsey: A mathematical Theory of saving. *Economic Journal*, Vol. 39, pp. 543-559.
- [59] J.Shaeffer: Convergence of a difference scheme for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in one dimension, *SIAM J. of Num. Anal.*, Vol.35, p.1149, (1998).
- [60] M. Sieveking: Present values of one dimensional autonomous resources. Optimal control Theory and Economic Analysis3. C.Feichtinger (editor). Elsevier science Publ.(North Holland).1988.
- [61] Z.Tan-P.L.Varghese: The $\Delta - \epsilon$ method for the Boltzmann equation. *J.Comput. Phys.*, Vol.110,(1994).

- [62] Y. Talpaert and F. Lefèvre: Etude hydrodynamique des amas stellaires à symétrie sphérique I, Bull. Acad. Roy. Belg. 58 (1972), 759.
- [63] Y. Talpaert: Structure et evolution des amas stellaires dans la phase de relaxation, Bull. Acad. Roy. Belg. 58 (1972), 1135.
- [64] E.Trélat: Contrôle optimal: théorie & applications.Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.
- [65] S. Ukai-T. Okabe: On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation.(Osaka J. Math.,Vol.15, 1978, pp. 245-261).
- [66] Vo-Khac Khoan: Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles. Tome II, Vuibert, 1972.
- [67] S. Wollman: Existence and uniqueness theory of the Vlasov-Poisson system with application to the problem with cylindrical symmetry. J. Math. Appl. , 90, (1982), 138-170.
- [68] B. Wennberg: Stability and exponential convergence in L^p for the spatially homogeneous Boltzmann equation. Nonlinear Analysis,Theory, Methods and Applications, N°8, p.935-964, 20 (1993).
- [69] G. N. Watson: Theory of Bessel functions. University press of Cambridge. Second Edition, 1966.
- [70] A. Winter: The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. P. 93-97. Princeton. 1947.
- [71] Symposium on computer simulation of plasma and many body problems. Williamsburg, Virginia (USA), April 19-21, 1967. NASA. Sp-153. Available from CFSTI, Springfield, Virginia 22151, USA.