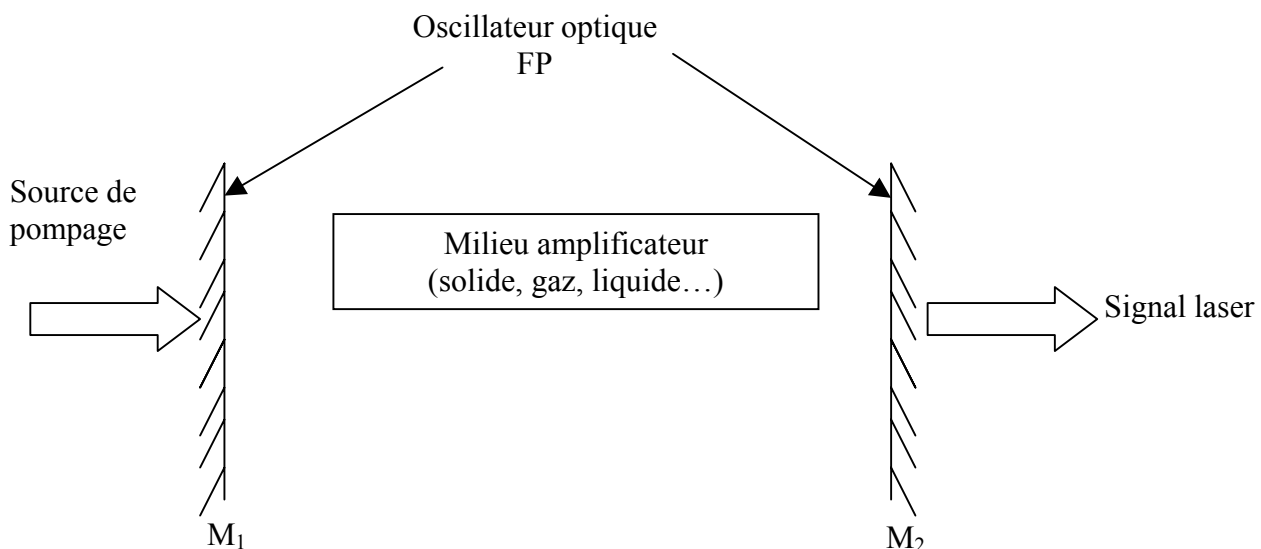


Introduction

Avant de donner brièvement les différents procédés de modulation utilisés dans le cas du laser à CO_2 , nous allons d'abord rappeler comment on obtient l'effet laser.

Le laser est un dispositif qui transforme de l'énergie incohérente (fournie par le pompage) en un rayonnement cohérent, directif, de grande pureté spectrale, avec un rendement dépassant rarement les 30%. Pour obtenir ce rayonnement cohérent, on place un milieu amplificateur (source de l'émission du rayonnement) dans un oscillateur optique, formé par une cavité à deux miroirs, de type Fabry – Pérot. L'oscillateur va donner au rayonnement émis par le milieu, des caractéristiques spatio-temporelles de cohérence, dues également aux propriétés de l'émission stimulée dans le milieu amplificateur, contrairement aux sources de rayonnements classiques où l'émission est spontanée, sans cohérence ni dans le temps, ni dans l'espace.



Figure(I.1) : Schéma de principe d'un laser.

L'émission laser a lieu quand le gain dû à l'émission stimulée l'emporte sur les pertes dans la cavité. L'énergie emmagasinée dans le milieu amplificateur (fournie d'une manière indirecte par le pompage) sera émise sous forme d'un signal continu ou pulsé.

Ces impulsions pourront être géantes ou courtes selon les applications souhaitées et les techniques de modulation utilisées. Ces techniques peuvent être actives ou passives comme nous allons le voir.

I.1 La modulation active

La modulation est une variation des pertes dans le dispositif laser. Cette variation peut être interne par l'insertion de milieux absorbants à l'intérieur de la cavité, on dira dans ce cas qu'elle est passive, ou externe, imposée par l'expérimentateur à l'aide de dispositifs faits de matériaux non linéaires. Dans ce cas on dira qu'elle est active. Dans cette dernière, le niveau de pertes est élevé par l'insertion d'un élément actif. A cet instant, une importante inversion de population est créée dans le milieu amplificateur. Elle est largement supérieure à celle nécessaire pour avoir l'oscillation laser. Le développement d'une impulsion s'effectue en abaissant le niveau des pertes, lesquelles sont commandées par un signal extérieur appliqué au cristal, qu'il soit de type électro-optique, acousto-optique, ou opto-mécanique (miroir tournant), l'impulsion est émise, emportant avec elle, toute l'énergie emmagasinée par le milieu. L'opération peut être répétée à volonté.

Nous allons à présent énumérer les différentes techniques actives.

I.1.1 La technique électro-optique

Elle est à la base de deux types de fonctionnement : le Q-switching et le mode-locking dans les lasers. Plusieurs cristaux tels que : GaAs (Galium Arsenic), CdTe (Cadmium Tellure), ZnTe (Zinc Tellure) peuvent être utilisés comme des modulateurs électro-optiques pour les lasers à CO₂ [Dul64].

D'une manière générale, lorsqu'un cristal est soumis à un champ électromagnétique, son indice de réfraction est modifié. Ceci permet de moduler la phase et l'amplitude de l'onde lumineuse traversant le cristal. Deux configurations sont généralement utilisées : la configuration transversale et la configuration longitudinale selon que le champ est appliqué perpendiculairement ou longitudinalement par rapport à la direction de propagation du faisceau lumineux. Cette technique a été utilisée avec le cristal GaAs par Gordon et ses collaborateurs [Gor70]. Différentes géométries de la cavité ont été employées pour étudier l'effet des pertes sur les caractéristiques spectrales du Q-Switch. De plus elle a été utilisée pour étudier le chaos [Per94], en utilisant le CdTe comme modulateur.

I.1.2 La technique acousto-optique

L'effet acousto-optique est obtenu en propageant des ondes acoustiques issues d'un générateur à haute fréquence dans un milieu. Cela crée des zones de compression et de dilatation et donc des variations de la densité moléculaire du milieu qui se traduisent par une modification de l'indice de réfraction. Cette modification va générer une diffraction de l'onde lumineuse traversant le milieu et par conséquent des modulations de l'intensité, de la phase et de la fréquence, sont réalisées.

Le fonctionnement d'un laser à CO₂ monomode stabilisé en fréquence, dont les pertes sont modulées par un modulateur acousto - optique a été étudié dans les références [Lep91, ch96]. Les auteurs ont montré que le comportement dynamique du laser était caractérisé par une variation des effets paramétriques qui débouchent sur le chaos, obtenu après une cascade de dédoublement de période.

I.1.3 La contre réaction (feedback)

Cette méthode consiste à réinjecter une partie du signal à l'intérieur de la cavité laser à l'aide d'un miroir ou d'une lame partiellement réfléchissante. Cette méthode permet de générer et de contrôler les différents types de fonctionnement [Amr99].

Les comportements dynamiques d'un laser à CO₂ avec feedback ont été étudiés [Pen90], en associant également un modulateur dans la cavité. Dans ce modèle, le système est décrit par trois équations différentielles couplées, une pour l'intensité du champ, la deuxième pour l'inversion de population et la dernière pour la tension appliquée sur le modulateur. On observe une bifurcation de Pitchfork au-dessus de la région de la bifurcation de Hopf pour les forts taux de feedback, caractérisée par une boucle hystérésis, dont la largeur s'accroît avec le taux du feedback. En effet, il a été montré théoriquement et expérimentalement [Are86] que l'introduction d'un feedback négatif fournit un troisième degré de liberté. Cela est suffisant pour avoir un comportement chaotique quand la constante de feedback est de l'ordre du taux de relaxation de l'inversion de population.

I.2 La modulation passive

Cette méthode consiste à insérer un milieu absorbant, à l'intérieur de la cavité. Ce milieu présente une absorption maximale à la longueur d'onde du laser, conduisant à un niveau élevé des pertes. Avec l'augmentation de l'intensité laser, l'absorption du milieu diminue.

Une impulsion se développe au moment de la saturation de l'absorption. Après l'émission de l'impulsion, le milieu absorbant retrouve ses propriétés grâce à ses propres mécanismes de désexcitation et ce cycle d'absorption et d'émission se répète de lui-même.

C'est cette méthode qui fait l'objet de notre travail. D'une part pour sa simplicité et sa large utilisation et d'autre part, à cause de la difficulté que nous avons rencontrée pour nous procurer des éléments actifs sur le marché à la longueur d'onde 10.6 μm .

De nombreux gaz peuvent être utilisés comme absorbants saturables. Nous citons dans le tableau (1.1) ci-dessous les différents absorbants saturables utilisés pour les lasers à CO_2 , en indiquant les gammes de longueur d'onde pour lesquelles la raie laser est absorbée. Pour le groupe A, des composés halogénés, l'absorption a lieu autour de la bande de 10.6 μm (10^0 - 10^1), alors que pour le groupe B des dérivés benzyliques, l'absorption se situe autour de 9.6 μm (10^0 - 10^2).

D'autres absorbants n'ont pas été cités dans le tableau tels que : le CH_3I [Ari78], le CO_2 chauffé [Ber77, Ani90] et la vapeur de CH_3OH qui absorbe autour de 9.6 μm [Eri70].

On peut également modifier les propriétés de l'absorbant saturable, en appliquant des champs électriques. On peut citer :

- La technique de Stark [Lan69] : l'application d'un champ électrique continu (dc) sur l'absorbant conduit à une levée de dégénérescence des sous-niveaux d'énergie de la molécule, conduisant à un changement de son coefficient d'absorption.
- La méthode de résonance (radiofréquence) [Ari78] : elle consiste à appliquer un champ radiofréquence, qui modifie le nombre de molécules interagissant avec le champ infrarouge.

Après avoir présenté les diverses méthodes de modulation du laser, nous allons nous limiter à partir de maintenant à la méthode passive.

Raies Laser

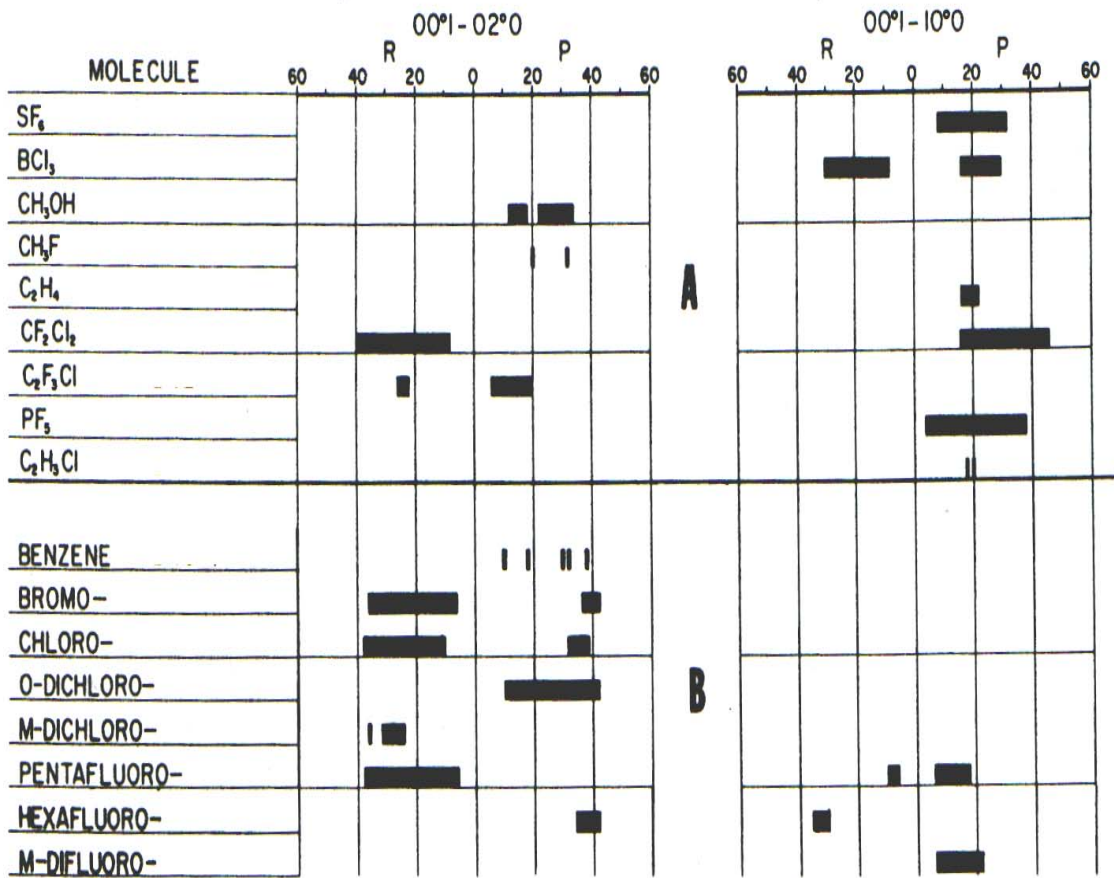


Tableau (1.1) : Différents absorbants saturables utilisables pour les lasers à CO₂ [Jer74].

Chapitre I

Les Techniques de Modulation

Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons les principales étapes de la théorie semi classique qui nous a servi à construire le modèle théorique. Nous suivons une méthode identique à celle de P.Mandel [Man84]. Elle consiste à décrire le champ d'une manière classique à l'aide des équations de Maxwell et le milieu amplificateur, en utilisant la théorie quantique. Deux approximations sont faites, celle des champs tournants et l'approximation que les grandeurs de notre système ont des amplitudes lentement variables dans le temps [Hak85]. Dans le but d'étudier la dynamique du laser modulé par un absorbant saturable, nous reformulons le modèle, en rajoutant un terme de couplage entre le champ et l'absorbant saturable à l'équation du champ et deux équations, une pour l'inversion de population et l'autre pour la polarisation du milieu absorbant.

II.1 Equation du champ

Les équations de Maxwell pour un milieu non magnétisé, de polarisation \vec{p} s'écrivent :

[Hak85,Kel98]

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1a})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.1b})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{II.1c})$$

Où \vec{E}, \vec{H} sont respectivement les champs électrique et magnétique.

\vec{D}, \vec{B} sont respectivement les inductions électrique et magnétique dans le milieu.

La densité de courant est donnée par la relation $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, où σ est la conductivité du milieu. $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du milieu, ϵ_0 est la perméabilité électrique du vide.

A partir des équations de Maxwell (II.1), nous obtenons l'équation d'onde suivante :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (\text{II.2})$$

Cette équation montre que la polarisation est un terme source pour le champ, ce même champ qui lui a donné naissance.

II.2 Equations pour le milieu amplificateur :

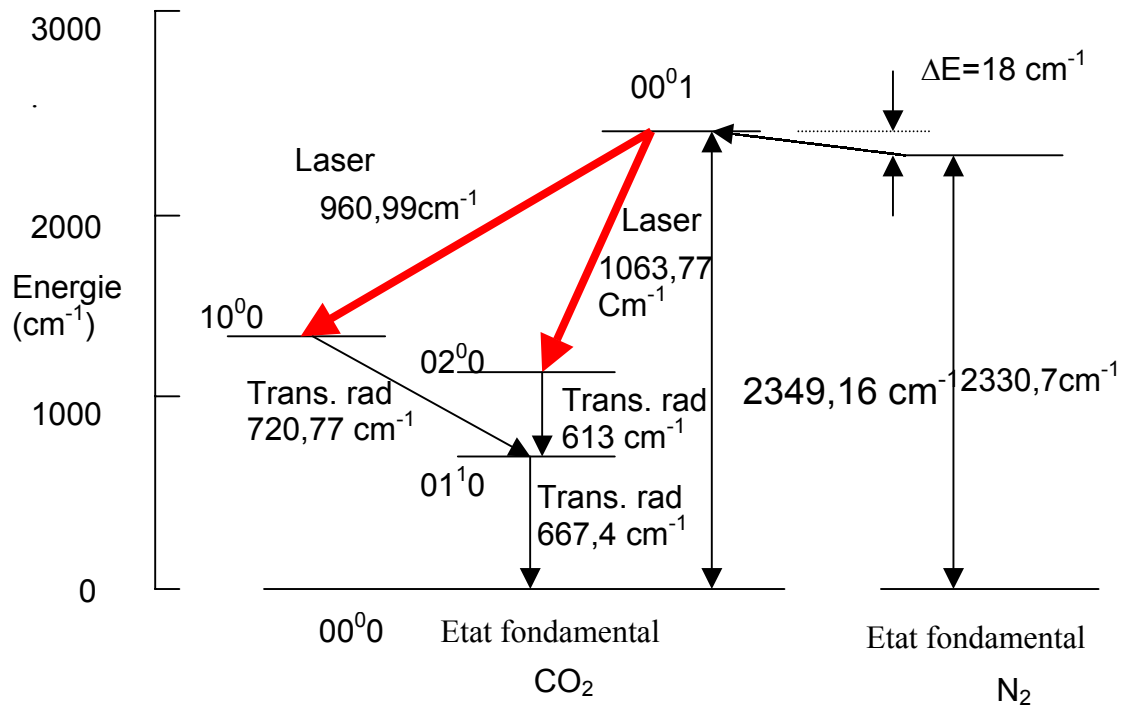
Avant d'écrire les équations pour le milieu, nous rappelons le diagramme énergétique du centre actif, dans notre cas la molécule CO_2 , et le rôle des différents gaz constituant le mélange gazeux .

2.1) Diagramme énergétique de la molécule CO_2

La molécule est triatomique et possède quatre modes de vibrations [Dul64]:

Un mode symétrique à la fréquence de 1388 cm^{-1} , un mode asymétrique de fréquence 234 cm^{-1} et un mode de déformation doublement dégénéré à la fréquence de 667 cm^{-1} .

A chaque état vibrationnel de la molécule CO_2 correspond un ensemble de niveaux rotationnels caractérisés par un nombre quantique J .



Figure(II.1): Diagramme des niveaux d'énergie de la molécule CO_2 et de la molécule N_2 .

La transition laser a lieu entre deux niveaux de vibration-rotation de la molécule CO_2 obéissant aux règles de sélection suivantes : $\Delta j = 0, \pm 1$. La transition entre le niveau supérieur (00^01) et le niveau inférieur (10^00) ($\Delta j = +1$) est centrée autour de $10,6 \mu\text{m}$ et celle entre le niveau (00^01) et le niveau (02^00) ($\Delta j = -1$) est centrée autour de $9,6 \mu\text{m}$ comme le montre la figure (II.1).

L'excitation des molécules CO_2 se fait par une décharge électrique dans le mélange gazeux. Cependant, cette excitation n'est pas sélective. Elle peut conduire à l'excitation vers d'autres niveaux supérieurs. Néanmoins ces molécules excitées relaxent rapidement vers le niveau (00^0_1) par collisions résonnantes. Pour améliorer l'efficacité de pompage, on rajoute dans le mélange gazeux, de l'azote N_2 excité dans le niveau $V=1$, situé à 18 cm^{-1} du niveau (00^0_1) de la molécule CO_2 . Ce niveau métastable dont la transition vers le niveau fondamental est interdite, ne peut pas se désexciter de façon radiative. Par conséquent sa désexcitation se fait par collision résonnante avec les molécules CO_2 . L'addition de l'hélium au mélange $\text{CO}_2 - \text{N}_2$, permet d'augmenter la relaxation du niveau (10^0_0) c'est à dire le dépeuplement du niveau inférieur de la transition laser. Tous ces transferts d'énergie et de relaxation se font très rapidement comparativement aux durées de vie des niveaux qui interviennent dans la transition laser et n'influent donc pas sur la dynamique.

Par conséquent, nous allons approximer cette molécule par un système à deux niveaux. Nous rajoutons par la suite phénoménologiquement, d'une part les relaxations de la molécule CO_2 dues à ses collisions avec son environnement et d'autre part l'influence du pompage.

2.2) Equation d'évolution de la polarisation pour un système à deux niveaux :

D'une manière générale, l'équation de Shrodinger pour un système perturbé, est donnée par :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \quad (\text{II.3})$$

Où H est l'hamiltonien du système donné par : $H=H^0+H^s$

$$\text{Où } H^0 \text{ est l'hamiltonien non perturbé du système tel que : } H^0 \vec{\varphi}_j = w_j \vec{\varphi}_j \quad (\text{II.4})$$

$\vec{\varphi}_j$ sont les fonctions d'onde propres du système non perturbé

$$\vec{\varphi}_j(\vec{\chi}, t) = \exp\left(\frac{-i w_j t}{\hbar}\right) \vec{\varphi}_j(\vec{\chi}), \quad j=1, 2 \quad (\text{II.5})$$

w_j sont les valeurs propres correspondantes,

et H^s est l'hamiltonien de perturbation externe donné dans le cadre de l'approximation

dipolaire par :

$$H^s = - e \vec{\chi} \vec{E}(t) \quad (\text{II.6})$$

$-e \vec{\chi}$ est le moment dipolaire induit dans le milieu par le champ électrique.

Dans le cas du système à deux niveaux, la fonction d'onde du système perturbé est donnée par :

$$\Psi(\vec{\chi}, t) = c_1(t) \vec{\varphi}_1(\vec{\chi}, t) + c_2(t) \vec{\varphi}_2(\vec{\chi}, t) \quad (\text{II.7})$$

où les coefficients $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont donnés par:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} E(t) H_{12}^s C_2 \quad (\text{II.8a})$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} E(t) H_{21}^s C_1 \quad (\text{II.8b})$$

$$\text{avec } H_{nm}^s = \int \Phi_n^*(e\vec{\chi}) \Phi_m d\chi^3 \exp(-i w_{nm}) \quad (\text{II.9})$$

où $w_{nm} = w_n - w_m$ est la fréquence de la transition entre les deux niveaux.

$$H_{11}^s = H_{22}^s = 0 \quad (\text{La molécule CO}_2 \text{ n a pas de moment dipolaire permanent})$$

Le moment dipolaire de la molécule, induit par le champ, est défini par :

$$\vec{p} = \int \Psi^*(\vec{\chi}, t) (-e\vec{\chi}) \Psi(\vec{\chi}, t) d\chi \quad (\text{II.10})$$

Tenant compte de l'équation (II.7), il peut être exprimé par :

$$\vec{p} = -c_1 c_2 \exp(-i\bar{w}t) \vec{\mathfrak{G}}_{12} - c_1 c_2^* \exp(i\bar{w}t) \vec{\mathfrak{G}}_{21} \quad (\text{II.11})$$

$$\text{tel que : } \vec{\mathfrak{G}}_{jk} = \int \Phi_j^*(e\vec{\chi}) \Phi_k d\chi^3 \quad \text{et } \bar{w} = (w_2 - w_1)/\hbar, \quad j = k = 1, 2$$

$$\text{Si on pose : } \alpha(t) = c_1^* c_2 \exp(-i\bar{w}t) \quad (\text{II.12})$$

L'équation (II.11) peut être réécrite sous la forme :

$$\vec{P} = -\alpha(t) \vec{\mathfrak{G}}_{12} - \alpha^*(t) \vec{\mathfrak{G}}_{21} = \vec{P}^+ + \vec{P}^- \quad (\text{II.13})$$

où $\alpha(t)$ est la valeur moyenne du moment dipolaire. Son évolution est liée à celle des coefficient C_1, C_2 par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -i\bar{w} \alpha(t) + c_1^* \frac{\partial c_2}{\partial t} \exp(-i\bar{w}t) + \frac{\partial c_1^*}{\partial t} c_2 \exp(i\bar{w}t) \quad (\text{II.14})$$

En substituant les équations (II.8.a,b) dans l'équation (II.14), on obtient :

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = -i\bar{w} \alpha(t) - \frac{1}{i\hbar} \vec{E}(t) \vec{\mathfrak{G}}_{12} \underbrace{\left(|c_2(t)|^2 - |c_1(t)|^2 \right)}_{d(t)} \quad (\text{II.15})$$

Cependant, il existe d'autres perturbations (environnement de la molécule) qui influent sur la durée de vie des niveaux de notre système. On peut les exprimer par le terme $-\gamma_{\perp} \alpha(t)$

Par conséquent, l'évolution de $\alpha(t)$ prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -i \overline{\omega} \alpha(t) - \gamma_{\perp} \alpha(t) - \frac{1}{i\hbar} \overline{E}(t) \overline{\mathfrak{G}}_{21} d(t) \quad (\text{II.16})$$

2.3) Equation d'évolution de l'inversion de population

Dans l'équation (II.15) apparaît une nouvelle grandeur qui n'est autre que l'inversion de population. Celle-ci s'écrit :

$$d(t) = |c_2(t)|^2 - |c_1(t)|^2$$

Sa dérivée est donnée par la relation : $\dot{d} = c_2^* \dot{c}_2 + \dot{c}_2^* c_2 - c_1^* \dot{c}_1 - \dot{c}_1^* c_1$ (II.17)

Tenant compte des équations (II.8.a, b), elle devient :

$$\dot{d} = \frac{2}{i\hbar} \overline{E}(t) \left(\overline{\mathfrak{G}}_{21} \alpha^* - \alpha \overline{\mathfrak{G}}_{12} \right) \quad (\text{II.18})$$

D'autres interactions peuvent avoir lieu entre la molécule et son environnement qui donnent lieu à la relaxation de l'inversion de population d vers sa valeur d'équilibre d_0 (en l'absence du champ) avec un temps caractéristique T . L'équation (II.18) devient :

$$\dot{d} = \frac{2}{i\hbar} \overline{E}(t) \left(\overline{\mathfrak{G}}_{21} \alpha^* - \alpha \overline{\mathfrak{G}}_{12} \right) + \frac{d_0 - d}{T} \quad (\text{II.19})$$

(.) : Dérivée par rapport au temps, (*) : complexe conjugué.

II.3 Quantités macroscopiques du champ, du moment dipolaire et de l'inversion de population :

Pour chaque molécule ou centre actif d'indice μ dans le milieu, nous réécrivons les équations (II.16) et (II.19) sous la forme suivante :

$$\dot{\alpha}_{\mu} = \left(-i \overline{\omega} - \gamma \right) \alpha_{\mu} - \frac{1}{i\hbar} \overline{E}(\chi_{\mu}, t) \overline{\mathfrak{G}}_{21} d_{\mu} \quad (\text{II.20})$$

$$\dot{d}_{\mu} = \left(\frac{d_0 - d_{\mu}}{T} \right) + \frac{2}{i\hbar} \overline{E}(\chi_{\mu}, t) \left(\overline{\mathfrak{G}}_{21} \alpha_{\mu}^* - \overline{\mathfrak{G}}_{12} \alpha_{\mu} \right) \quad (\text{II.21})$$

La polarisation et l'inversion de population macroscopiques sont définies par :

$$\vec{P}(\vec{\chi}, t) = \sum_{\mu} \delta(\vec{\chi} - \vec{\chi}_{\mu}) \vec{P}_{\mu} \quad (\text{II.22})$$

$$D(\vec{\chi}, t) = \sum_{\mu} \delta(\vec{\chi} - \vec{\chi}_{\mu}) d_{\mu} \quad (\text{II.23})$$

La sommation sur l'indice μ porte sur tous les centres actifs que comportent le milieu et δ est la fonction de Dirac. On obtient alors :

$$\frac{d\vec{P}^+(\vec{\chi}, t)}{dt} = (-i\omega - \gamma) \vec{P}^+(\vec{\chi}, t) + \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{E}(\vec{\chi}, t) \mathfrak{G}_{21} \right] \mathfrak{G}_{12} D(\vec{\chi}, t) \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{dD(\vec{\chi}, t)}{dt} = \frac{D_0 - D(\vec{\chi}, t)}{T} - \frac{2}{i\hbar} \vec{E}(\vec{\chi}, t) (\vec{P}^- - \vec{P}^+) \quad (\text{II.25})$$

Le champ électrique E devient alors :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\vec{E}} = \mu_0 \left(\ddot{\vec{P}}^+ + \ddot{\vec{P}}^- \right) \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Où } \vec{P}^+ = -\sum_{\mu} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\mu}) \mathfrak{G}_{12} \alpha_{\mu}(t) = \vec{P}^{-*}$$

II.4 Equations semi classiques dans un résonateur

Dans un résonateur Fabry-Perot (F.P) tel que celui utilisé dans notre cas , le champ électrique est représenté par la somme d'ondes stationnaires $\vec{u}_{\lambda}(\vec{\chi})$:

$$\vec{E}(\vec{\chi}, t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda}(t) \vec{u}_{\lambda}(\vec{\chi}) \quad (\text{II.27})$$

Où $E_{\lambda}(t)$ est le terme du champ dépendant du temps

Les fonctions U_{λ} sont les modes propres du résonateur et obéissent à la relation

$$\int \vec{u}_{\lambda}(\vec{\chi}) \cdot \vec{u}_{\lambda'}(\vec{\chi}) d^3 \chi = \delta_{\lambda \lambda'} \quad (\text{II.28})$$

Où $\delta_{\lambda\lambda'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \lambda' \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \lambda' \end{cases}$ symbole de Kronecker.

On peut prendre pour u_λ les polynômes de Hermite-Gauss dans le cas d'une symétrie rectangulaire, où les polynômes de Laguerre-Gauss dans le cas d'une symétrie axiale [Tat03].

4.1) Approximation du champ tournant

On va décomposer le champ en ses deux parties positive et négative :

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) .$$

$$\text{Ces parties sont définies par : } E_\lambda^+(t) = A_\lambda(t) \exp(-i w_\lambda t) \quad (\text{II.29a})$$

$$E_\lambda^-(t) = A_\lambda^*(t) \exp(i w_\lambda t) \quad (\text{II.29b})$$

On fait de même pour la polarisation : $P_\lambda = P_\lambda^+ + P_\lambda^-$,

$$P_\lambda = - \sum_\mu \overrightarrow{U}_\lambda(\overleftarrow{\chi}_\mu) \overleftarrow{\mathfrak{G}}_{12} \alpha_\mu(t) + \text{C.C} \quad (\text{II.30})$$

C.C signifie complexe conjugué.

Nous introduisons les décompositions (II.27) et (II.30) dans l'équation du champ et après plusieurs étapes de calcul nous obtenons:

$$w_\lambda^2 E_\lambda^\pm + \dot{E}_\lambda^\pm + \sum_\lambda \left(\frac{\sigma_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon_0} \right) E_\lambda^\pm = - \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \right) \ddot{P}_\lambda^\pm \quad (\text{II.31})$$

Les équations de la polarisation et de l'inversion de population deviennent :

$$\dot{\alpha}_\mu = (-i \bar{w} - \gamma) \alpha_\mu - \frac{1}{i\hbar} d_\mu \sum_\lambda E_\lambda^+(t) \overrightarrow{U}_\lambda(\overleftarrow{\chi}_\mu) \overleftarrow{\mathfrak{G}}_{21} \quad (\text{II.32})$$

$$\dot{d}_\mu = \frac{d_0 - d_\mu}{T} + \frac{2}{i\hbar} \left(\alpha_\mu^* \sum_\lambda E_\lambda^+(t) \overrightarrow{U}_\lambda(\overleftarrow{\chi}_\mu) \overleftarrow{\mathfrak{G}}_{21} - \alpha_\mu \sum_\lambda E_\lambda^-(t) \overrightarrow{U}_\lambda(\overleftarrow{\chi}_\mu) \overleftarrow{\mathfrak{G}}_{12} \right) . \quad (\text{II.33})$$

4.2) Approximation des amplitudes lentement variables :

On décompose l'amplitude du champ en un terme lentement variable et un terme oscillant :

$$E^\mp(t) = A^\pm(t) \exp(\pm i w_\lambda t) \quad (\text{II.34})$$

En utilisant l'approximation : $\left| \frac{dA_\lambda}{dt} \right| \ll |\omega_\lambda A_\lambda|$ (II.35)

Cela nous permet de réécrire l'équation du champ sous la forme suivante :

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) E_\lambda^+ + \left(\frac{i\bar{w}}{2\varepsilon_0} \right) P_\lambda^+ \quad \text{avec} \quad \kappa_\lambda = \frac{\sigma_\lambda}{2\varepsilon_0} \quad (\text{II.36})$$

Les équations de l'inversion de population et de la polarisation demeurent inchangées.

II.5 Equations normalisées

Nous allons introduire des variables adimensionnelles b_λ et b_λ^* [Hak 85] à la place des amplitudes E_λ^+ et E_λ^- des modes de la cavité :

$$E_\lambda^+ = i \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}} b_\lambda \quad (\text{II.37a})$$

$$E_\lambda^- = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}} b_\lambda^* \quad (\text{II.37b})$$

$|b_\lambda|^2$ n'est autre que le nombre de photons, car la quantité $\hbar\omega_\lambda$ est l'énergie du photon.

Par conséquent, le champ peut être exprimé par :

$$\vec{E}(\vec{\chi}, t) = \sum_\lambda b_\lambda(t) \vec{u}_\lambda(\vec{\chi}) N_\lambda + C.C \quad (\text{II.38})$$

Où b_λ est l'amplitude adimensionnelle du mode et $N_\lambda = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}$

L'équation (II.36) du champ peut être exprimée, en introduisant une constante de couplage $g_{\mu\lambda}$ décrivant l'interaction entre le milieu et le champ par :

$$\dot{b}_\lambda^+ = (-i\omega - \kappa_\lambda) b_\lambda^+ - i \sum_\mu g_{\mu\lambda} \alpha_\mu \quad (\text{II.39})$$

Cette équation décrit l'évolution temporelle de l'amplitude du champ. Le premier terme $[-(-i\omega)]$ décrit l'oscillation. Le deuxième terme $[-(-\kappa_\lambda)]$ décrit l'amortissement dans la cavité en l'absence d'interaction du champ avec le milieu. Le dernier terme montre comment les moments dipolaires servent de terme source à l'oscillation du champ, par l'intermédiaire de la constante de couplage $g_{\mu\lambda}$.

Cette constante est définie par : $g_{\mu\lambda} = i\mathfrak{G}_{21} \overrightarrow{U}_{\lambda}(\overrightarrow{\chi}_{\mu}) \sqrt{\frac{\omega_{\lambda}}{2\hbar\epsilon_0}}$

De la même sorte, nous réécrivons les équations du milieu :

$$\dot{\alpha}_{\mu} = (-i\omega - \gamma)\alpha_{\mu} + i \sum_{\lambda} (g_{\mu\lambda} b_{\lambda} d_{\mu}) \quad (\text{II.40a})$$

$$\dot{d}_{\mu} = \frac{d_0 - d_{\mu}}{T} + 2i \sum_{\lambda} (g_{\mu\lambda}^* \alpha_{\mu} b_{\lambda}^* - g_{\mu\lambda} \alpha_{\mu}^* b_{\lambda}) \quad (\text{II.40b})$$

L'équation (II.40a) indique le changement temporel du moment dipolaire, provenant de l'oscillation et de l'amortissement des moments dipolaires en l'absence d'interaction avec le champ électrique. Le dernier terme montre comment le champ génère le moment dipolaire. L'équation (II.40b) montre l'évolution temporelle de l'inversion de population due à sa relaxation causée par les processus incohérents (premier terme) et le deuxième terme montre l'interaction cohérente entre le champ et le milieu amplificateur.

Les équations (II.39, 40 a .b) permettent d'étudier la dynamique des systèmes lasers.

Nous allons à présent tenir compte de la présence de l'absorbant saturable.

II.6 Modèle du laser avec un absorbant saturable (LAS)

Le formalisme précédant est utilisé pour décrire l'évolution de la population, de la polarisation et de l'intensité du champ du milieu amplificateur. Nous reformulons les équations décrivant la dynamique du système LAS, en rajoutant dans l'équation du champ un terme qui décrit les interactions entre le rayonnement et le milieu absorbant et deux équations pour l'évolution de la polarisation et de l'inversion de population dans le milieu absorbant.

Nous supposons que le milieu absorbant (les molécules de SF₆ dans notre cas) est un système à deux niveaux. Ce milieu présente une absorption à la longueur d'onde émise par le laser. A l'équilibre, le niveau inférieur est plus peuplé que le niveau supérieur. Les molécules de l'état inférieur sont excitées par l'absorption du rayonnement laser.

Nous ajoutons à l'équation du champ (II.39) un terme décrivant l'interaction entre le champ et le milieu absorbant comme suit :

$$\dot{b} = (-i\omega - k)b - i \sum_{\mu} g_{\mu}^* \alpha_{\mu} - i \sum_{\mu} \overline{g}_{\mu}^* \overline{\alpha}_{\mu} \quad (\text{II.41})$$

Avec :

$g_{\mu} = 0$	ailleurs que dans le milieu amplificateur.
$\neq 0$	dans le milieu amplificateur.
$\overline{g}_{\mu} \neq 0$	dans l'absorbant.
$= 0$	ailleurs que dans l'absorbant.

Où \overline{g}_{μ} est la constante de couplage rayonnement- milieu absorbant.

Les équations de la polarisation et de l'inversion de population du milieu amplificateur pour un fonctionnement monomode, sont :

$$\dot{\alpha}_{\mu} = (-i \overline{w}_{\mu} - \gamma) \alpha_{\mu} + i g_{\mu} d_{\mu} b \quad (\text{II.42a})$$

$$\dot{d}_{\mu} = \gamma_{//} (d_0 - d_{\mu}) + 2i (g_{\mu}^* \alpha_{\mu} b - g_{\mu} \alpha_{\mu}^* b) \quad (\text{II.42b})$$

De la même manière, la polarisation et l'inversion de population de l'absorbant saturable s'écrivent :

$$\dot{\overline{\alpha}}_{\mu} = (-i \overline{w}'_{\mu} - \gamma) \overline{\alpha}_{\mu} + i \overline{g}_{\mu} \overline{d}_{\mu} b \quad (\text{II.42c})$$

$$\dot{\overline{d}}_{\mu} = \overline{\gamma}_{//} (\overline{d}_0 - \overline{d}_{\mu}) + 2i (\overline{g}_{\mu}^* \overline{\alpha}_{\mu} b^* - \overline{g}_{\mu} \overline{\alpha}_{\mu} b) \quad (\text{II.42d})$$

Où $\overline{\gamma}_{//}$ est le taux de relaxation de l'inversion de population du milieu absorbant,

\overline{w}'_{μ} est la fréquence de la transition moléculaire dans le milieu absorbant.

Du fait que les deux milieux sont considérés homogènes, les centres actifs ont les mêmes caractéristiques, l'équation (II.41) peut être réécrite :

$$\left[i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \kappa \right) - w \right] b = N g^* \alpha + \overline{N} \overline{g}^* \overline{\alpha} \quad (\text{II.43a})$$

Où N , \overline{N} sont respectivement les nombres des centres actifs dans le milieu amplificateur et dans le milieu absorbant.

Ainsi les équations (II.42 a, b, c, d) des deux milieux deviennent :

$$\left[i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \gamma \right) - \bar{w} \right] \alpha = -g d b \quad (\text{II.43b})$$

$$i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \gamma_{//} \right) d = i \gamma_{//} \sigma - 2g^* \alpha b^* + 2g \alpha^* b \quad (\text{II.43c})$$

$$\left[i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \gamma \right) - \bar{w}' \right] \bar{g}^* \bar{\alpha} = -|\bar{g}|^2 \bar{d} b \quad (\text{II.43d})$$

$$i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \bar{\gamma}_{//} \right) \bar{d} = i \bar{\gamma}_{//} \bar{\sigma} - 2\bar{g}^* \alpha b^* + 2\bar{g} \alpha^* b \quad (\text{II.43e})$$

Où $d_0 = \sigma$ est l'inversion de population créée dans le milieu amplificateur par le mécanisme de pompage en l'absence du rayonnement. $\bar{d}_0 = \bar{\sigma}$ est l'inversion de population à l'équilibre dans le milieu absorbant en l'absence du rayonnement laser.

Pour mettre le système sous une forme simplifiée, nous allons à présent introduire des variables adimensionnelles [**Man84**] dans les équations du champ, de l'inversion de population et de la polarisation des deux milieux.

$$b = \left[\frac{\gamma_{//} \gamma}{4|g|^2} \right]^{\frac{1}{2}} (E_R(t) - i E_I(t)) e^{-i\omega t}$$

$$g^* \alpha = \sigma \left[\frac{|g|^2 \gamma_{//}}{4\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} (P_R(t) + i P_I(t)) e^{-i\omega t} \quad (\text{II.44})$$

$$\bar{g}^* \bar{\alpha} = \bar{\sigma} \left[\frac{\gamma_{//} \gamma}{|g|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{|g|^2}{2\gamma} (\bar{P}_R(t) + i \bar{P}_I(t)) e^{-i\omega t}$$

$$d = \sigma D$$

$$\bar{d} = \bar{\sigma} \bar{D}$$

Après une longue manipulation des calculs (voir annexe(A)). Nous obtenons, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire, un système de huit équations différentielles :

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_R &= -E_R + A P_I + \bar{A} \bar{P}_I \\
 \dot{E}_I &= -E_I + A P_R + \bar{A} \bar{P}_R \\
 \dot{P}_R &= d(-P_R + \Delta P_I + D E_I) \\
 \dot{P}_I &= d(-P_I + \Delta P_R + D E_R) \\
 \dot{D} &= \delta(-D + 1 - P_I E_R - E_I P_R) \\
 \dot{\bar{P}}_R &= \bar{d}(-\bar{P}_R - \bar{\Delta} \bar{E}_I + \bar{D} \bar{E}_I) \\
 \dot{\bar{P}}_I &= \bar{d}(-\bar{P}_I + \bar{\Delta} \bar{P}_R + \bar{D} \bar{E}_R) \\
 \dot{\bar{D}} &= \bar{\delta}(-\bar{D} + 1 - a(\bar{P}_I E_R + E_I \bar{P}_R))
 \end{aligned} \tag{II.45}$$

Où $d = \frac{\gamma}{k}$, $\delta = \frac{\gamma_{//}}{k}$, $\bar{d} = \frac{\bar{\gamma}}{k}$, $\bar{\delta} = \frac{\bar{\gamma}_{//}}{k}$ sont respectivement les taux de relaxation de la polarisation et de l'inversion de population du milieu amplificateur, et ceux du milieu absorbant, normalisés au taux de relaxation du champ .

$\Delta = \frac{\omega - \bar{\omega}}{\gamma}$ est le désaccord entre les fréquences du champ et celle de la raie moléculaire, normalisé par rapport au taux de relaxation de la polarisation

$\bar{\Delta} = \frac{\omega - \bar{\omega}'}{\gamma}$ est le désaccord entre les fréquences du champ et de la transition dans le milieu

absorbant, normalisé par rapport au taux de relaxation de la polarisation $a = \frac{|g|^2 \gamma_{//} \gamma}{|\bar{g}|^2 \bar{\gamma}_{//} \bar{\gamma}}$ est

le rapport entre les intensités de saturation du milieu absorbant et celle du milieu amplificateur.

$A = \frac{|g|^2 N \sigma}{k \gamma}$, $\bar{A} = \frac{|g|^2 \bar{N} \bar{\sigma}}{k \bar{\gamma}}$ sont respectivement les paramètres de pompage du milieu

amplificateur et de l'absorbant saturable.

Ce système d'équations (II.45) nous servira dans les prochains chapitres à décrire les différents fonctionnements dynamique du laser à CO_2 avec un absorbant saturable. Plusieurs approximations peuvent être faites qui permettent de réduire le nombre d'équations. Tout d'abord nous considérons le cas résonnant où les fréquences d'oscillations du champ, de l'émission laser et de l'absorption du milieu sont égales. Dans ce cas le système (II.45) se réduit à un système de cinq équations que l'on étudiera dans le quatrième chapitre.

D'un autre côté, une élimination adiabatique des polarisations (ce qui est souvent le cas pour le laser à CO_2) réduit encore le système de cinq équations à trois équations. Bien qu'à chaque réduction la dynamique soit moins riche, néanmoins elle reste suffisante pour expliquer les divers phénomènes observés dans le laser à CO_2 avec un absorbant saturable.

Dans chaque cas nous déterminerons les états stationnaires du système et étudierons leur stabilité linéaire afin de distinguer les différents régimes de fonctionnement de notre système.

Chapitre II

Elaboration du Modèle Théorique

Récemment un modèle mathématique a été développé [Sou99] pour prédire les régimes d'émission d'un laser TEA à CO₂ avec le SF₆ comme absorbant saturable. Le régime chaotique est obtenu à travers le scénario du doublement de période pour les basses pressions de l'absorbant saturable.

Dans ce chapitre, nous allons décrire la dynamique du LSA dans l'approximation des équations de bilan, à partir du modèle élaboré au chapitre précédent.

III.1 Elimination adiabatique des polarisations (modèle à 3 équations)

Cette procédure consiste à éliminer les variables rapides pour étudier le système dans l'échelle des temps des variables lentes. Cela réduit le nombre de degré de liberté du système. Dans le cas du laser à CO₂, faisant partie des lasers de classe B, la polarisation relaxe rapidement par rapport au champ et par rapport à l'inversion de population [Opp86], c'est à dire :

$$\frac{dP}{dt}=0, \frac{d\bar{P}}{dt}=0$$

Ces expressions sont injectées dans notre système d'équations (II.45) afin de le réduire à cinq équations (voir chapitre IV). En négligeant ensuite les effets de phases, on obtient:

$$\frac{dI}{dt}=2I(-1+AD+\bar{A}\bar{D}) \quad (\text{III.1.a})$$

$$\frac{dD}{dt}=\delta(-D+1-DI) \quad (\text{III.1.b})$$

$$\frac{d\bar{D}}{dt}=\bar{\delta}(-\bar{D}+1-a\bar{D}I) \quad (\text{III.1.c})$$

Nous avons posé que l'intensité du champ électrique est donnée par : $I=E^2$

La résolution analytique de ce système d'équations est impossible, à cause de la présence des termes non-linéaires. Un traitement numérique en revanche est faisable. Il va nous

III.2 Détermination de l'état stationnaire :

Comme nous l'avons signalé plus haut, le système d'équations (III.1) n'a pas de solutions analytiques à cause de la présence de termes non linéaires dans les membres de droite. Plutôt que de se lancer directement dans une intégration numérique hasardeuse, il est préférable d'abord de déterminer les états de fonctionnements permanents (points fixes, solutions périodiques,..) vers lesquels tendrait le système. Ensuite faire l'analyse de stabilité linéaire. Cela nous donnerait une première image du fonctionnement du système. Ensuite à partir de ces états permanents et prenant en compte l'effet de termes non linéaires supplémentaires, on suit l'étude du fonctionnement dynamique du système .

L'état stationnaire est obtenu en annulant les dérivées temporelles de notre système :

$$\left(\frac{dI}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{d\bar{D}}{dt} = 0 \right)$$

L'équation (III.1.a) nous donne:

$$I_{ST} \left(-1 + A D_{ST} + \bar{A} \bar{D}_{ST} \right) = 0 \quad (III.2)$$

L'équation (III.2) nous conduit à poser

- Soit $I_{ST} = 0 = I_0$, par conséquent nous avons dans ce cas : $D_{ST} = \bar{D}_{ST} = 1$ signifiant que le laser n'oscille pas (état éteint)

- où $A D_{ST} + \bar{A} \bar{D}_{ST} = 1$

et les équations (III.1.b) et (III.1.c) donnent dans ce cas

$$D_{ST} = \frac{1}{1+I_{ST}} \quad , \quad \bar{D}_{ST} = \frac{1}{1+aI_{ST}} \quad (III.3.a)$$

L'injection des relations (III.3.a) dans l'équation (III.2) nous donne

$$aI_{ST}^2 + \left(1 + a - aA - \bar{A} \right) I_{ST} + 1 - A - \bar{A} = 0 \quad (III.3.b)$$

Cette équation admet deux solutions:

$$I_{\pm} = \frac{1}{2a} (aA + \bar{A} - a - 1 \pm \sqrt{\Delta}), \quad (III.3.c)$$

avec $\Delta = (a+1-aA-\bar{A})^2 - 4a(1-A-\bar{A})$ et la condition que I est positive ($I > 0$).

Pour $a > 0$ nous tirons les conclusions suivantes, illustrées sur le diagramme de la figure (III.1) :

$$\begin{array}{lll}
 \left\{ \begin{array}{l} p < 0 \quad (A > 1 - \bar{A}) \\ s > 0 \quad (aA > 1 + a - \bar{A}) \end{array} \right. & I_+ > 0, I_- < 0 & 1 \text{ état stationnaire} \\
 \left\{ \begin{array}{l} p > 0 \quad (A < 1 - \bar{A}) \\ s > 0 \quad (aA > 1 + a - \bar{A}) \end{array} \right. & I_+ > 0, I_- > 0 & 3 \text{ états stationnaires} \\
 \left\{ \begin{array}{l} p > 0 \quad (A < 1 - \bar{A}) \\ s < 0 \quad (aA < 1 + a - \bar{A}) \end{array} \right. & I_+ < 0, I_- < 0 & (\text{Pas d'états stationnaires} \\ & & \text{non triviaux}). \\
 \left\{ \begin{array}{l} P < 0 \quad (A > 1 - \bar{A}) \\ s < 0 \quad (aA < 1 + a - \bar{A}) \end{array} \right. & I_+ > 0, I_- < 0 & 1 \text{ état stationnaire.}
 \end{array}$$

Nous avons tracé ci- dessous, le diagramme de l'état stationnaire dans le plan $(-\bar{A}, A)$, dans le cas des systèmes LAS pour lesquels l'intensité de saturation du milieu absorbant est comparable ($a=2$) à celle du milieu amplificateur (figure (III.1)). L'intersection des deux droites est donnée par le point $\left(\frac{1}{1-a}, \frac{a}{a-1}\right)$.

Nous distinguons sur ce diagramme plusieurs régions qui résument les résultats suivants :

- Région 1 : les trois solutions stationnaires I_0 , et I_{\pm} coexistent, donnant lieu au phénomène de la bistabilité.
- Régions 2 : seule l'intensité I_+ existe.
- Région 3 : seul l'état stationnaire trivial existe.

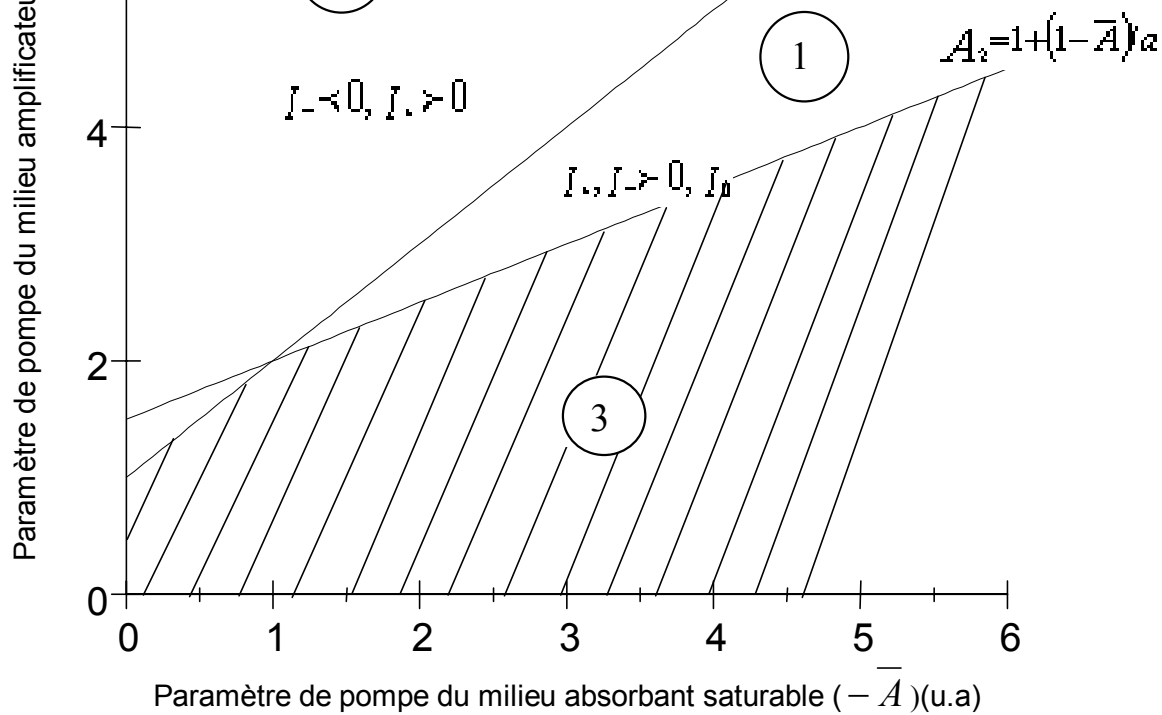


Figure III.1 : Diagramme de bifurcation de l'état stationnaire

Pour illustrer qualitativement le fonctionnement dynamique de notre système, nous avons tracé dans les différentes régions, les évolutions temporelles de l'intensité. Pour cela nous intégrons numériquement notre système à l'aide de la méthode Runge-Kutta. Nous avons supposé que le taux de relaxation de l'inversion de population du milieu amplificateur et celui du milieu absorbant sont égaux $\delta = \bar{\delta} = 3 \cdot 10^{-4}$ et nous avons pris le taux de relaxation du champ égal à 10^8 sec^{-1} . Les figures (III.2), (III.3) illustrent ces différents comportements de fonctionnement.

Ceci signifie qu'aux faibles paramètres de pompe du milieu absorbant c'est à dire aux très basses pressions de l'absorbant saturable, le milieu absorbant n'a pas d'influence sur le fonctionnement dynamique du système. Dans ces conditions, le fonctionnement est similaire à celui d'un laser sans absorbant saturable.

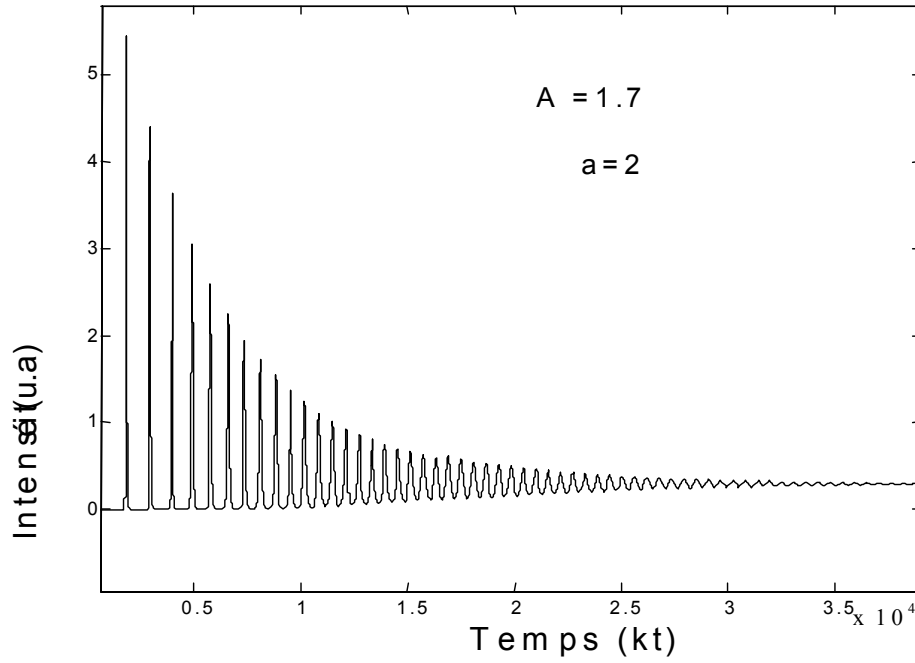
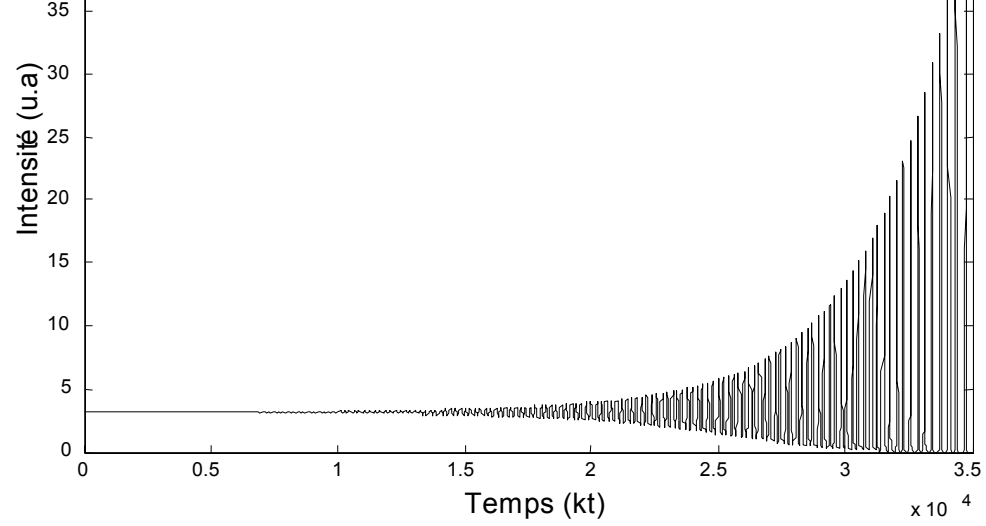


Figure III.2 Allure temporelle de l'intensité dans la région 2.
 ($\delta = \bar{\delta} = 3.10^{-4}$, $\bar{A} = -0.5$).

La figure (III.3) nous montre une instabilité de l'état stationnaire tendant vers un fonctionnement pulsé dans le cas où $-\bar{A} > \frac{1}{1-a}$. Ce fonctionnement est caractérisé par une période tendant vers l'infini comme l'illustre la figure (III.4).



$$\delta = \bar{\delta} = 3 \cdot 10^{-4}, \bar{A} = -3.4375$$

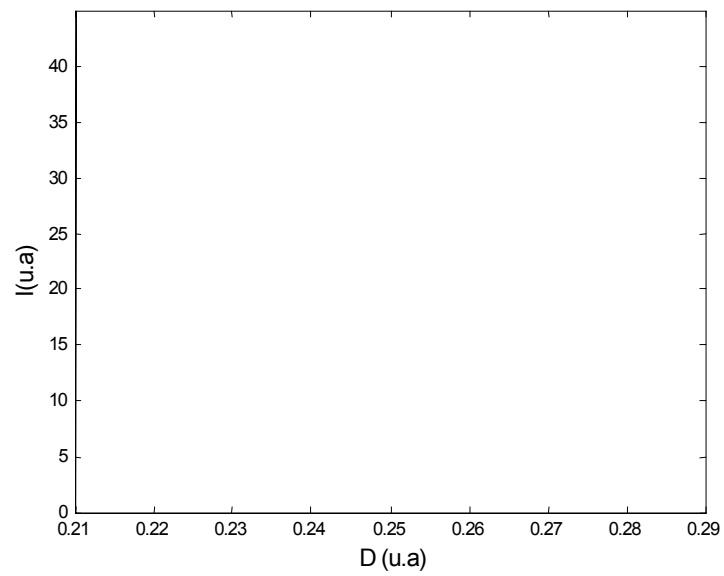


Figure III.4 : *Portrait de phase dans la région 2.*

$$(\delta = \bar{\delta} = 3 \cdot 10^{-4}, \bar{A} = -3.4375).$$

appele *jump phenomena* .

En fait la solution stationnaire I_- est toujours négative sauf dans la région 1 où coexistent les trois solutions, c'est le phénomène de la bistabilité (laser éteint - allumé, *on-off bistability*). Il est intéressant d'étudier la largeur de ce phénomène en fonction des caractéristiques des milieux absorbant et amplificateur.

Pour avoir le seuil de l'instabilité de la solution I_+ , nous ferons une analyse de la stabilité linéaire, en cherchant le point de la bifurcation de Hopf.

III.3 Influence du rapport de saturation sur le phénomène de la bistabilité

Pour voir cette influence, nous allons tracer les intensités stationnaires en fonction du paramètre de pompe du milieu amplificateur A pour différentes valeurs du rapport de saturation a . voir figure (III.5).

On remarque que la coexistence des trois solutions stationnaires I_{\pm} et I_0 dépend des paramètres a et \bar{A} . Ce phénomène est appelé la bistabilité . Nous l'avons signalé dans le paragraphe précédent. Sa largeur s'accroît avec l'augmentation du paramètre a .

Cela signifie que le milieu amplificateur atteint son état stationnaire avant que le milieu absorbant ne soit saturé. Par conséquent, on peut conclure que le phénomène de la bistabilité s'observe plus facilement dans les systèmes LSA qui sont caractérisés par une relaxation rapide de l'inversion de population de l'absorbant saturable par rapport au milieu amplificateur. Il faut également s'attendre à un phénomène d'hystérésis traduisant le passage du fonctionnement laser d'un état stationnaire vers un autre état stationnaire.

Ce comportement bistable a été mis en évidence expérimentalement dans un laser CO_2 oscillant sur la raie 10P (20) avec le SF_6 comme milieu absorbant [Rus81].

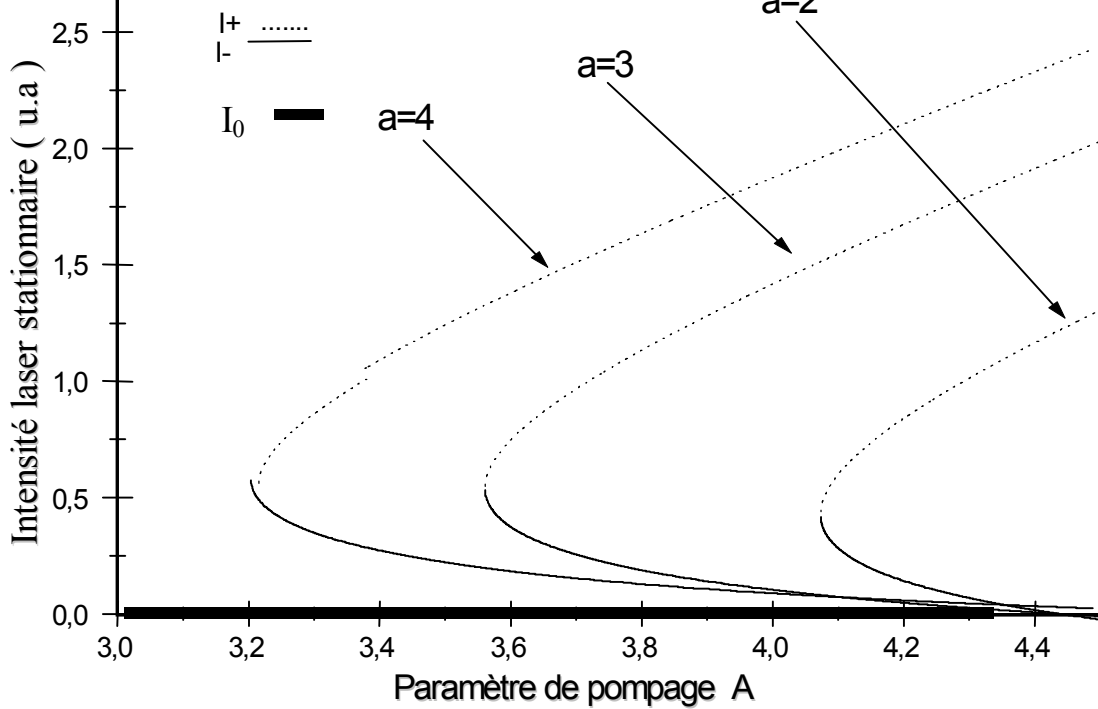


Figure (III.5): l'intensité stationnaire en fonction du paramètre de pompe A
 ($\bar{A} = -3.4375$).

III.4 Analyse de la stabilité linéaire

Cette analyse va nous servir à déterminer le seuil d'instabilité des états stationnaires. Pour cela, nous considérons de petites perturbations (i, d, \bar{d}) autour de l'état stationnaire :

$$D = D_{ST} + d, \bar{D} = \bar{D}_{ST} + \bar{d}, I = I_{ST} + i \quad (III.4)$$

L'injection de (III.4) dans (III.1) conduit à :

$$\frac{d}{dt} i = 2(-1 + A D_{ST} + \bar{A} \bar{D}_{ST}) i + A I_{ST} d + \bar{A} I_{ST} \bar{d} \quad (III.5.a)$$

que nous pouvons mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ d \\ \bar{d} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} i \\ d \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 2(-I+A+\bar{A}) & 2A I_{ST} & 2\bar{A} I_{ST} \\ -\delta D_{ST} & \frac{-\delta}{D_{ST}} & \mathbf{0} \\ -\bar{\delta} a D_{ST} & \mathbf{0} & \frac{-\bar{\delta}}{D_{ST}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Les solutions du système (III.6) sont une combinaison des termes de la forme $\exp(\lambda_i t)$ où λ_i sont des valeurs propres de la matrice L. Selon le signe des parties réelles de ces valeurs propres, les perturbations croissent où s'amortissent dans le temps. Ainsi si toutes les parties réelles de λ_i sont négatives, l'état stationnaire est stable.

En revanche si $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ pour une seule valeur propre, l'état stationnaire est instable.

Examinons à présent la stabilité des états stationnaires I_0 , I_+ et I_- , en recherchant les valeurs propres λ_i qui sont données par l'équation caractéristique : $\det(L - \lambda I) = 0$, qui conduit à :

$$a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (\text{III.7})$$

- Pour $I_{ST} = I_0 = 0$, on obtient deux valeurs propres toujours négatives

($\lambda_1 = -\delta$, $\lambda_2 = -\bar{\delta}$) et la troisième est donnée par $\lambda = 2(A + \bar{A} - 1)$. Ce qui nous permet de dire que la valeur stationnaire $I_{ST} = 0$ est instable si $A + \bar{A} > 1$. Au-dessus de ce seuil, le laser peut évoluer vers l'état stationnaire $I_{ST} = I_+$ défini par l'expression (III.3.c).

- Pour $I_{ST} = I_{\pm}$, Les coefficients de l'équation caractéristique sont définis par :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{\delta}{D_{ST}} + \frac{\bar{\delta}}{D_{ST}}, \quad a_3 = \frac{\delta \bar{\delta}}{D_{ST} \bar{D}_{ST}} + A \delta I_{ST} D_{ST} + \bar{A} a \bar{\delta} \bar{D}_{ST} I_{ST},$$

être vérifiées pour que l'équation caractéristique (III.7) admette des valeurs propres dont les parties réelles sont négatives. Les deux premières inégalités sont toujours vérifiées. Pour la dernière inégalité, nous traçons ci-dessous sa variation en fonction du paramètre de pompe du milieu amplificateur, pour $a = 2$, $\bar{A} = -3.4375$, $\delta = \bar{\delta} = 0.0003$.

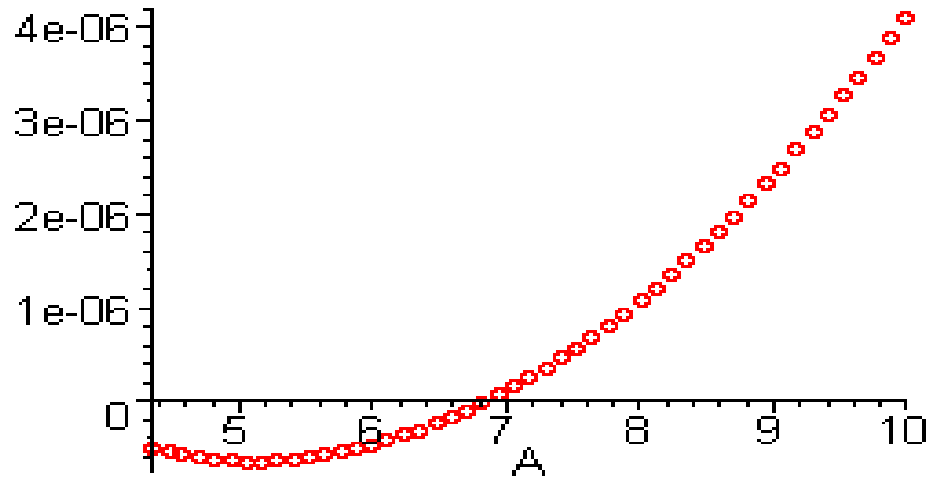


Figure (III.6) : la variation $(a_2a_3 - a_1a_4)$ en fonction du paramètre de pompage du milieu amplificateur A .

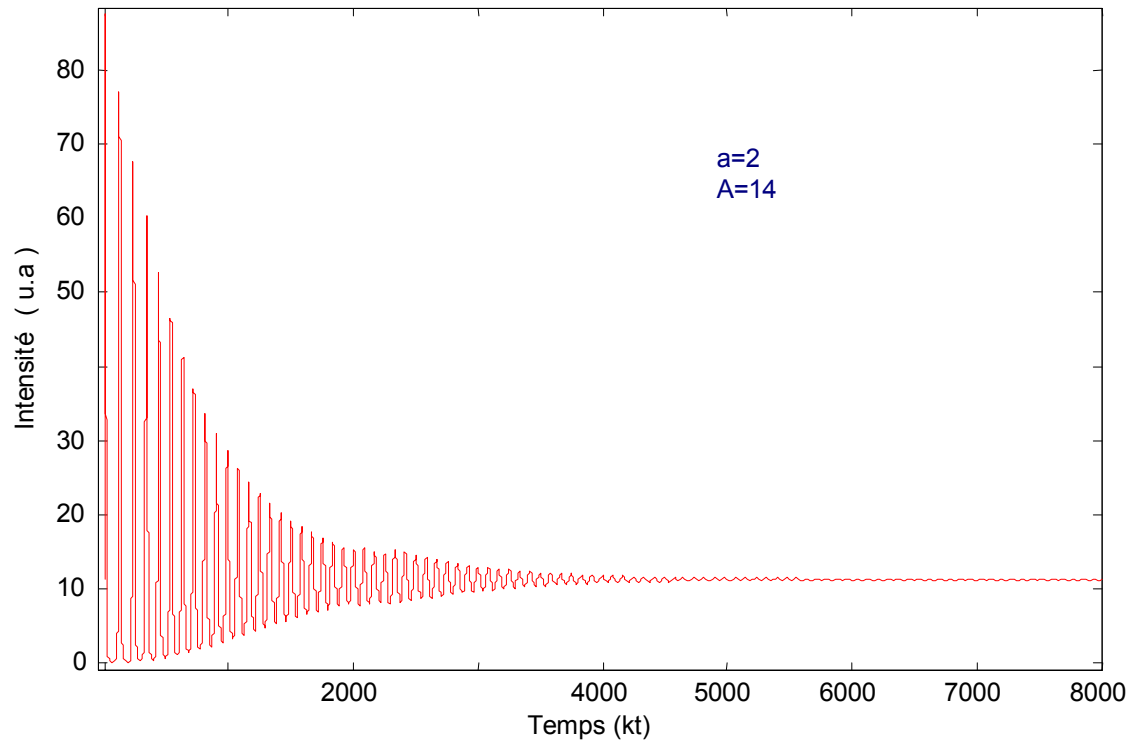
L'état stationnaire I_+ dont l'intensité est donnée par l'expression (III.3c), perd sa stabilité pour une valeur du paramètre de pompe du milieu amplificateur inférieure à 6.85 avec les valeurs des paramètres données ci-dessus.

Nous allons obtenir, d'une autre manière, les conditions nécessaires pour l'apparition d'une bifurcation de Hopf. Nous posons que l'équation (III.7) admet deux solutions complexes conjuguées [Has81].

$$(I_+ - I_+(A_H)) / (a I_+ (A_H) + I_+) - (a I_+ (A_H) + I_+ (A_H) + 2)$$

Cette expression nous servira à déterminer le seuil d'instabilité de l'état stationnaire I_+ dans le cas où le taux de relaxation de l'inversion de population du milieu amplificateur et celui du milieu absorbant sont identiques.

A titre d'exemple, la valeur du paramètre de pompage du milieu amplificateur A_H est égale à 6.9 pour les valeurs suivantes des paramètres : $a=2, \bar{A}=-3.4375, \delta = \bar{\delta} = 0.0003$.



Figure(III.7) Allure temporelle de l'intensité au-delà du point de bifurcation de Hopf (Fonctionnement continu, $\delta = \bar{\delta} = 3.10^{-4}$, $\bar{A} = -3.4375$)

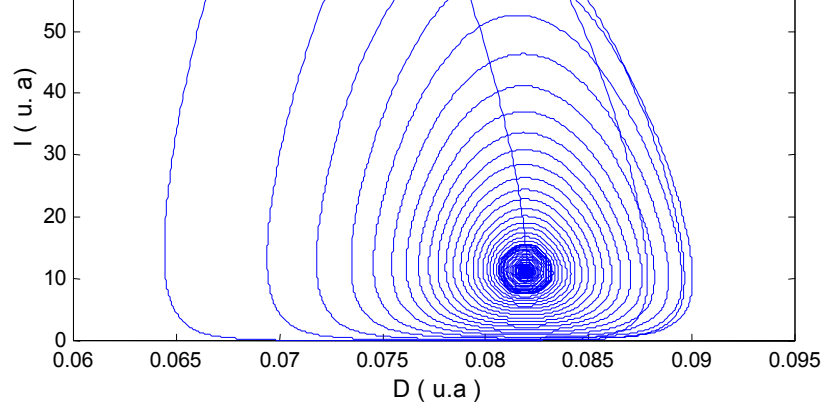


Figure (III.8) *Portrait de phase*

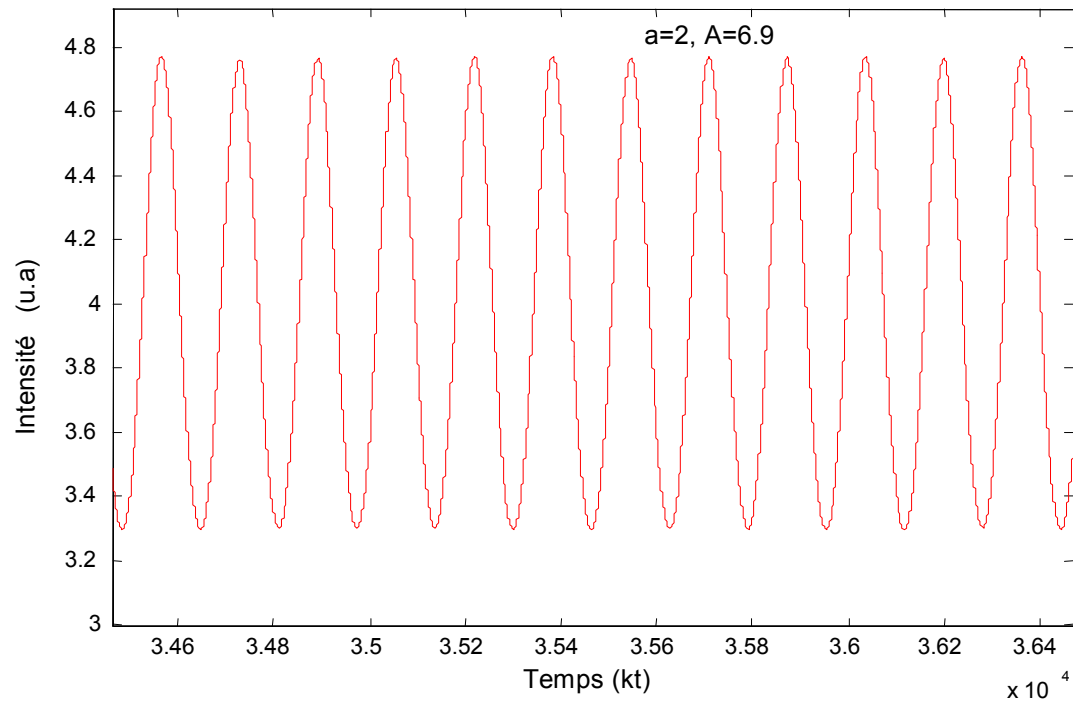


Figure (III.9) *Allure temporelle de l'intensité au seuil d'instabilité*
(Point de bifurcation de Hopf) $\bar{A} = -3.4375$.

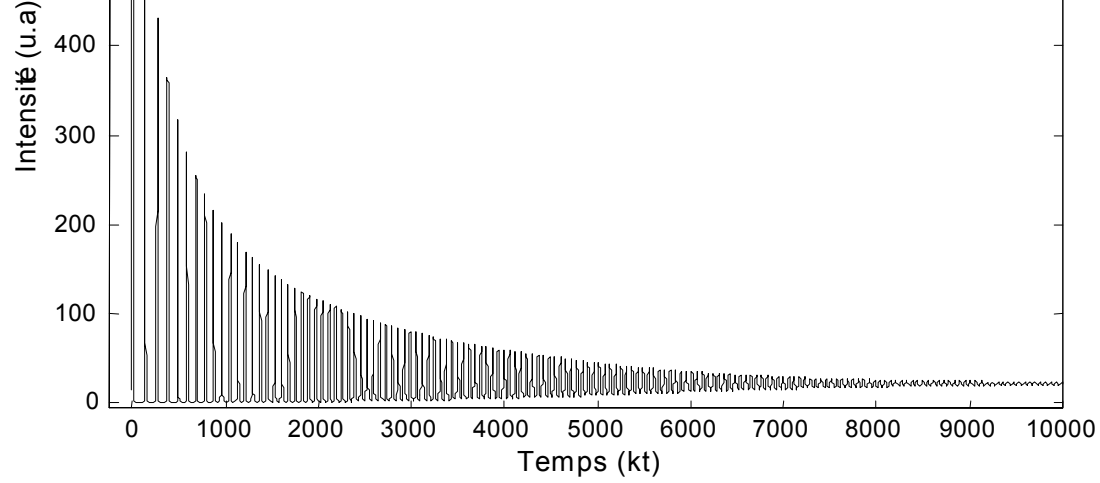
Par conséquent, l'augmentation du paramètre de pompe du milieu amplificateur ramène le système d'un fonctionnement pulsé à un fonctionnement continu, en passant par un fonctionnement d'oscillations harmoniques, comme le montre la figure (III.9), survenu après une bifurcation de Hopf. L'amplitude décroît avec l'augmentation du paramètre de pompe du milieu amplificateur donnant lieu à un fonctionnement continu.

III.5 Influence du paramètre de saturation sur le fonctionnement dynamique :

Le domaine du fonctionnement instable croît lorsqu'on augmente le paramètre de saturation. Les comportements dynamiques dans ce domaine diffèrent de ceux obtenus précédemment avec un faible paramètre de saturation $a=2$.

L'amplitude des pulsations diminue avec l'augmentation du paramètre de pompe du milieu amplificateur. Cela donne lieu à un fonctionnement continu, voir la figure (III.10), pour un paramètre de pompe du milieu amplificateur au delà du point de la bifurcation de Hopf. Le comportement chaotique est aussi observé près de la transition OFF- pulsé (figure (III.11)).

Par conséquent, quand on augmente le paramètre de saturation, le système passe d'un fonctionnement d'oscillations harmoniques à un fonctionnement pulsé, près de la bifurcation de Hopf.



Figure(III.10) : *L'allure temporelle d'intensité (fonctionnement continu)*

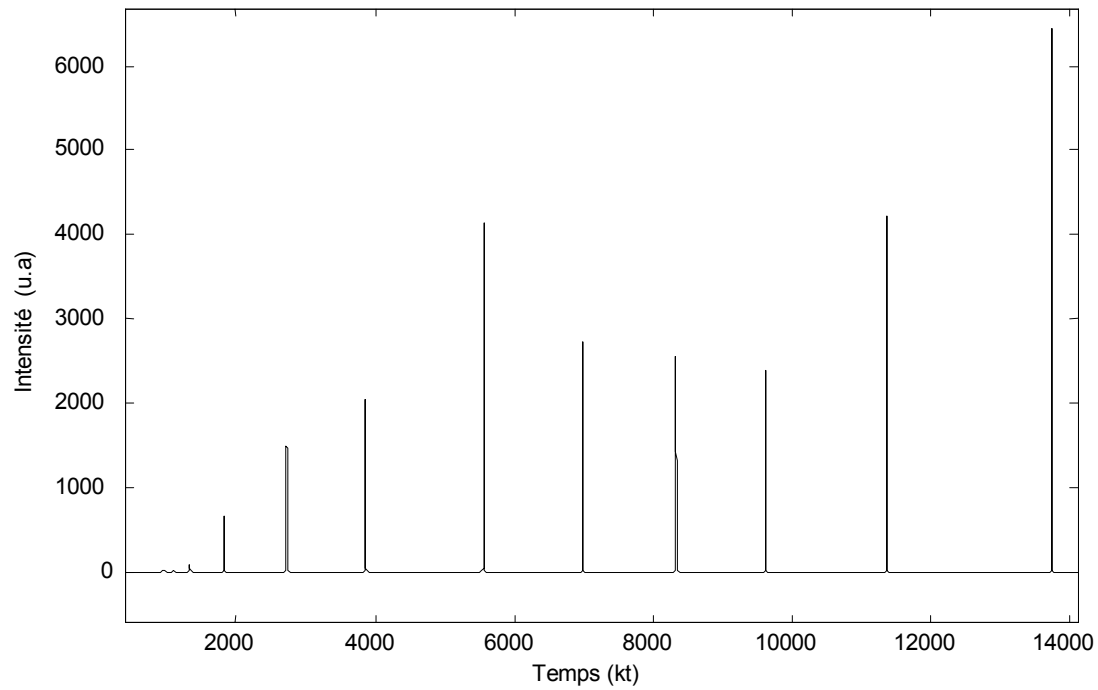


Figure (III.11) : *L'allure temporelle de l'intensité (Fonctionnement POS chaotique).*

tel que l'hélium à l'absorbant saturable.

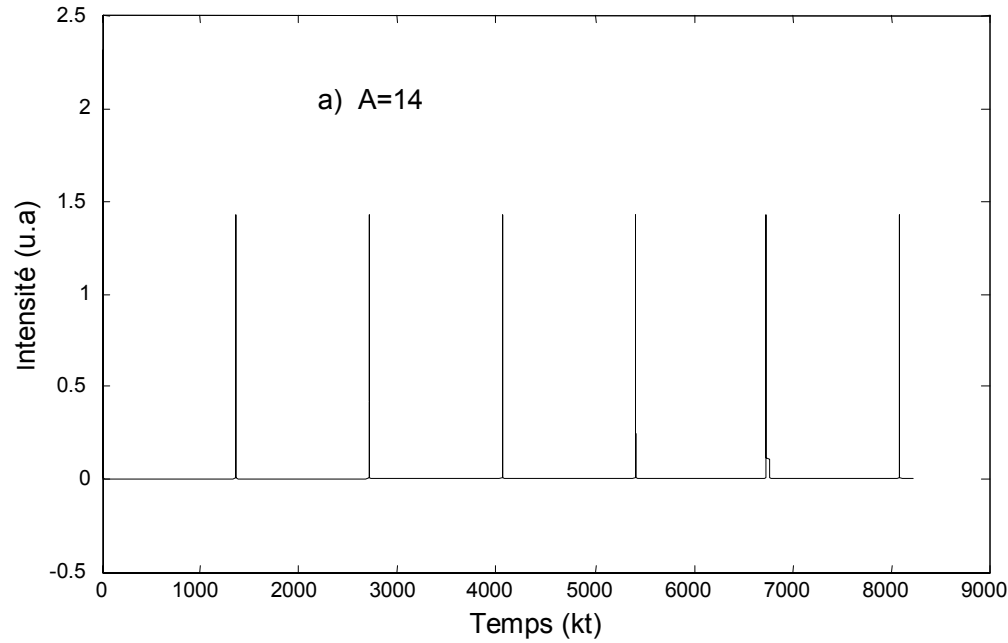
Dans le cas d'inégalité entre les deux taux de relaxation des inversions de populations des deux milieux, le seuil d'instabilité est donné par l'expression suivante :

$$A_H = \frac{a_3 I_+^3(A_H) + a_2 I_+^2(A_H) + a_1 I_+(A_H) + a_0}{2\delta^2 I_+(A_H)} \quad (\text{III.9})$$

avec $a_0 = \delta(\delta + \bar{\delta})$, $a_1 = (\delta^2(a+2) + \delta\bar{\delta}(2a+1) + 2\delta a\bar{A})$

$a_2 = \delta(2\bar{\delta}a + \delta + \bar{\delta}a^2 + 2\delta a)$, $a_3 = -\bar{\delta}(\delta^2a + \delta\bar{\delta}a^2)$

Cette expression généralise le cas étudié dans le paragraphe précédent et à notre connaissance, c'est un résultat nouveau par rapport aux autres études consacrées au système LAS.



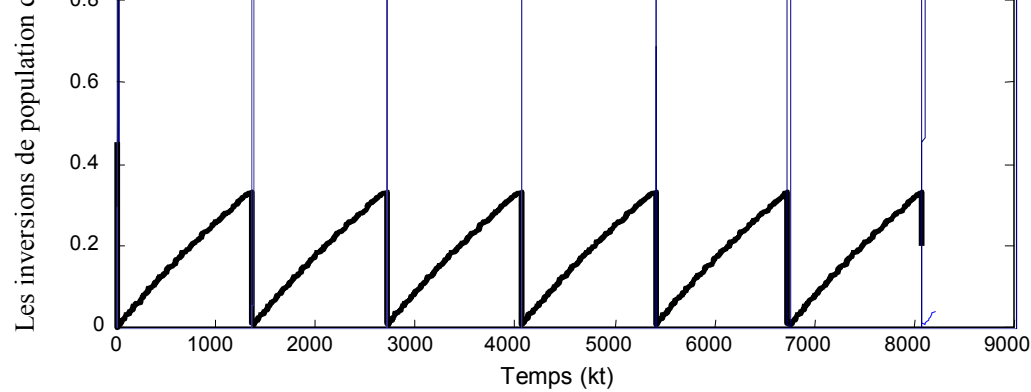


Figure III.12. a) Allure temporelle de l'intensité
b) Allures temporelles des inversions de populations des deux milieux. $a = 2$, $\bar{A} = -3.4375$, $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$, $\bar{\delta} = 4 \cdot 10^{-1}$.

La figure (III.12.a) donne l'évolution temporelle de l'intensité qui montre un fonctionnement impulsionnel. La figure (III.12.b) montre l'évolution temporelle des inversions de population des deux milieux. Elles montrent la commutation entre les deux inversions de populations de deux milieux et l'émergence de l'impulsion laser. voir figure(III.13). C'est cela le fonctionnement Q-switch. Lorsqu'on augmente le paramètre de pompage du milieu amplificateur, le taux de répétition des impulsions augmente.

Le passage du fonctionnement pulsé au fonctionnement continu pour des gains forts, est fortement lié au taux de relaxation de l'inversion de population de l'absorbant saturable.

Comme nous l'avons signalé au chapitre précédent, l'absorption diminue avec l'augmentation de l'intensité laser. Ceci entraîne à la limite une absorption nulle pour des intensités élevées, conduisant à un fonctionnement continu.

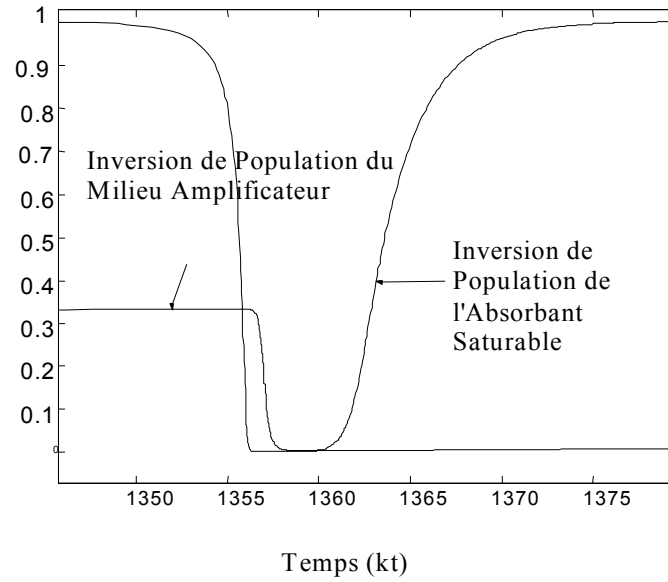
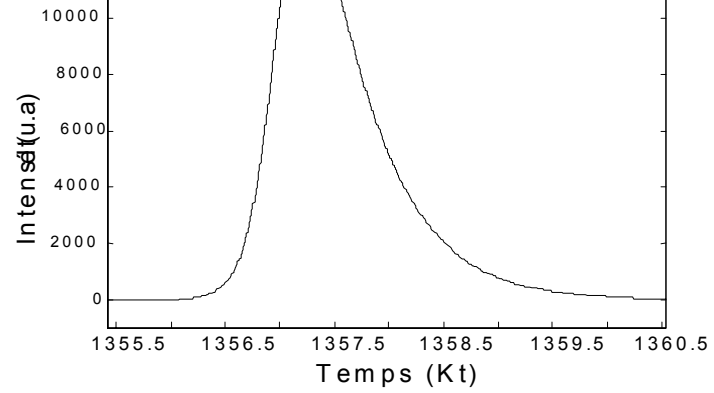


Figure (III.13) : les allures temporelles des inversions de populations des deux milieux et de l'intensité pour un petit intervalle de temps pour les mêmes valeurs des paramètres que pour les figures (III.12.a.b).

des milieux amplificateur et absorbant et dans le cas résonnant. Nous avons trouvé que pour les faibles valeurs du paramètre de pompage de l'absorbant saturable, le laser présente un fonctionnement continu quelque soit la valeur du paramètre de pompage du milieu amplificateur.

On observe un passage d'un fonctionnement continu à un fonctionnement pulsé, quand on augmente le paramètre de pompage de l'absorbant saturable.

Aux grandes valeurs du paramètre de pompage du milieu absorbant, un changement de comportement est observé. On passe d'un fonctionnement pulsé à un fonctionnement continu à travers une bifurcation de Hopf, en faisant varier le paramètre de pompage du milieu amplificateur.

Nous avons également étudié l'influence du taux de relaxation de l'inversion de population du milieu absorbant sur le fonctionnement dynamique. Nous avons constaté que le fonctionnement pulsé se maintient quelque soit le paramètre de pompage du milieu amplificateur.

Le modèle des équations de bilan ne suffit plus pour étudier le comportement de notre système au point de bifurcation de Hopf. Nous allons dans le chapitre suivant tenir compte des polarisations des deux milieux pour déterminer l'amplitude et la période de la solution oscillante, émergente au point de la bifurcation de Hopf.

Chapitre III

Equations de Bilan (Rate Equations)

Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié la dynamique du système LSA avec l'élimination adiabatique des polarisations. Cependant cette approximation n'est plus valable pour les systèmes LSA fonctionnant à hautes pressions dans les deux milieux où les temps de relaxation des polarisations (qui dépendent de la pression) deviennent comparables aux taux de relaxation du champ et de l'inversion de population.

A présent nous allons tenir compte des polarisations des milieux, ce qui donnera lieu à une dynamique plus complexe que celle traitée dans le cadre précédent de l'approximation des équations de bilan. On se limitera dans ce chapitre à l'étude de la stabilité de l'état trivial, bien que le modèle permet une étude générale de tous les états stationnaires. Pour cela nous adoptons la démarche suivie par P.Mandel [Man84].

Nous allons examiner la dynamique du LSA dans sa globalité et nous traiterons le système dans le cas résonnant (égalité de la fréquence d'oscillation de la cavité laser, de la fréquence d'émission du milieu amplificateur et de la fréquence d'absorption des atomes dans l'absorbant saturable), $\Delta = \bar{\Delta} = 0$. Ce qui nous conduit à négliger les phases $E_I = P_R = \bar{P}_R = 0$. Par conséquent, le système (II.45) peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= -E + A P + \bar{A} \bar{P} \\
 \dot{P} &= d (-p + D E) \\
 \dot{\bar{P}} &= \bar{d} (-\bar{p} + \bar{D} E) \\
 \dot{D} &= \delta (-D + 1 - P E) \\
 \dot{\bar{D}} &= \bar{\delta} (-\bar{D} + 1 - a \bar{P} E)
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Les différents paramètres ont été définis au premier chapitre.

IV.1 L'état stationnaire

En régime stationnaire, les variations temporelles de toutes les variables gouvernant notre système sont nulles ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). On obtient (voir annexe C):

- Un état stationnaire trivial donné par : $I_{St} = I_0 = 0 = 1 - D_{St} = 1 - \bar{D}_{St} = P_{St} = \bar{P}_{St}$
- Deux états stationnaires non triviaux définis par :

$$I_{\pm} = \frac{1}{2a} (aA + \bar{A} - a - 1 \pm \sqrt{(a+1-aA-\bar{A})^2 - 4a(1-A-\bar{A})}) \quad , \tag{IV.2}$$

$$D_{ST} = \frac{1}{1+I_{ST}}, \quad \bar{D}_{ST} = \frac{1}{1+aI_{ST}}$$

$$P_{ST} = \frac{\sqrt{I_{ST}}}{1+I_{ST}}, \quad \bar{P}_{ST} = \frac{\sqrt{I_{ST}}}{1+aI_{ST}}$$

IV.2- Analyse de stabilité linéaire

La stabilité linéaire des solutions stationnaires est étudiée, en considérant de petites perturbations autour de l'état stationnaire :

$$D = D_{ST} + d, \quad \bar{D} = \bar{D}_{ST} + \bar{d}, \quad I = I_{ST} + i, \quad P = p_{ST} + p, \quad \bar{P} = \bar{p}_{ST} + \bar{p} \quad (\text{IV.3})$$

Nous injectons ces expressions dans le système d'équations (IV.1). Nous obtenons la matrice de stabilité linéaire suivante:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & A & \bar{A} & 0 & 0 \\ \frac{d}{1+I_{ST}} & -d & 0 & d\sqrt{I_{ST}} & 0 \\ \frac{\bar{d}}{1+aI_{ST}} & 0 & -\bar{d} & 0 & \bar{d}\sqrt{I_{ST}} \\ \frac{-\delta\sqrt{I_{ST}}}{1+I_{ST}} & -\delta\sqrt{I_{ST}} & 0 & -\delta & 0 \\ \frac{-a\bar{\delta}\sqrt{I_{ST}}}{1+aI_{ST}} & 0 & -a\bar{\delta}\sqrt{I_{ST}} & 0 & -\bar{\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

L'analyse de la stabilité linéaire de la solution triviale

Nous allons analyser la stabilité de la solution triviale ($I_{ST} = I_0 = 0$). Le but de cette étude est juste d'étudier le transfert de la stabilité entre cet état et l'état ON où le laser s'allume.

Pour simplifier le problème nous supposons l'égalité entre le taux de relaxation de l'inversion de population du milieu amplificateur et celui de l'absorbant saturable. La matrice L, pour la solution stationnaire $I_{ST} = 0$ s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} -1 & A & \bar{A} & 0 & 0 \\ d & -d & 0 & 0 & 0 \\ \bar{d} & 0 & -\bar{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$\lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{IV.6})$$

et les coefficients a_i sont donnés par :

$$a_0 = -d \bar{d} \delta^2 (A + \bar{A} - 1), \quad a_1 = -(dA + \bar{d} \bar{A} - d - \bar{d}) \delta^2 - 2d \bar{d} (A + \bar{A} - 1) \delta$$

$$a_2 = (d + \bar{d} + 1) \delta^2 - 2(dA + \bar{d} \bar{A} - d - \bar{d}) \delta + d \bar{d} (1 - A - \bar{A})$$

$$a_3 = -dA - \bar{d} \bar{A} + 2\delta(d + \bar{d} + 1) + \delta^2 + d + \bar{d} + d\bar{d}, \quad a_4 = d + \bar{d} + 2\delta + 1$$

.

Les scénarios vers le chaos surviennent la plupart du temps par une déstabilisation d'un régime périodique qui survient près d'une bifurcation de Hopf. Or un système accepte une bifurcation de hopf si son équation caractéristique admet une paire de valeurs propres complexes conjuguées.

Pour obtenir le point de bifurcation de hopf, nous considérerons que l'équation caractéristique précédente possède deux solutions purement imaginaires conjuguées. Ceci nous entraîne à poser $\lambda = \pm i\phi$ dans l'équation (IV.6). En séparant la partie réelle de la partie imaginaire, nous obtenons un système de deux équations :

$$\phi^4 + b_2 \phi^2 + b_0 = 0 \quad (\text{IV.7.a})$$

$$c_4 \phi^4 + c_2 \phi^2 + c_0 = 0 \quad (\text{IV.7.b})$$

Les coefficients b_i, c_i sont donnés par :

$$b_0 = -(dA + \bar{d}\bar{A} - d - \bar{d})\delta^2 - 2d\bar{d}(A + \bar{A} - 1)\delta$$

$$b_2 = dA + \bar{d}\bar{A} - 2\delta(d + \bar{d} + 1) - \delta^2 - d - \bar{d} - d\bar{d}$$

$$c_0 = -d\bar{d}\delta^2(A + \bar{A} - 1)$$

$$c_2 = -(d + \bar{d} + 1)\delta^2 + 2(dA + \bar{d}\bar{A} - d\bar{d} - d - \bar{d})\delta - d\bar{d}(1 - A - \bar{A})$$

$$c_4 = d + \bar{d} + 2\delta + 1$$

Les calculs analytiques ont été faits avec le logiciel Maple.

Par l'identification des deux polynômes, nous déterminons le point de bifurcation de Hopf par l'expression :

$$\begin{cases} A_c = \frac{2\delta^3 + 4(\bar{d} + 1 + d)\delta^2 + 2(2d\bar{d} + 2d + 2\bar{d} + \bar{d}^2 + 1)\delta - \bar{A}\bar{d}(1 + \bar{d}) + \bar{d}(1 + \bar{d}) + d(\bar{d}^2 + \bar{d}(d + 2) + d + 1)}{d(1 + \bar{d})} \\ \bar{A}_c = \frac{\bar{d}(1 + d)}{\bar{d} - d} \end{cases} \quad (\text{IV.8.a, b})$$

Dans le cas du laser à CO_2 , le taux de relaxation de l'inversion de population est petit. Cette approximation $\delta \approx 0$ nous permet de réécrire le point de bifurcation sous une nouvelle forme simplifiée:

$$A_c = (1 - \bar{A}) \frac{\bar{d}(d + 1)}{d(d + 1)} + \frac{\bar{d} + 1}{d + 1} (1 + d + \bar{d}) \quad (\text{IV.9})$$

$$\bar{A}_c = \frac{\bar{d}(d + 1)}{\bar{d} - d} \quad (\text{IV.10})$$

D'autre part, les polarisations des milieux sont des variables rapides avec des taux de relaxation de grandes valeurs. Dans la limite asymptotique $d \rightarrow \infty$ et \bar{d} de l'ordre de d , $\bar{d} = ld$. Les paramètres A_c et \bar{A}_c s'écrivent :

$$\bar{A}_c \cong \frac{l}{l - 1} = 0(d) \quad (\text{IV.11})$$

$$A_c \cong -\bar{A}l^2 + ld(1 + l), \text{ et si } \bar{A} = 0(d) \quad (\text{IV.12})$$

Nous allons poser que : $A=d A', \bar{A}=d \bar{A}'$ et étudier l'évolution du système dans l'échelle de temps des polarisations pour déterminer l'amplitude de la solution émergente au point de bifurcation de Hopf.

IV.3 -Détermination de l'amplitude et de la fréquence des solutions émergentes près du point de Hopf

Nous rappelons que nous avons déjà montré dans le cas des rate équations, que le comportement de la solution émergente près de la bifurcation de Hopf était périodique. Nous allons à présent trouver l'amplitude, la fréquence de cette solution et la direction de la bifurcation. Pour cela, changeons d'échelle de temps $t' = d t$. Le système devient :

$$\begin{aligned}
 E_i &= A' P + \bar{A}' \bar{p} - \xi E \\
 p_i &= -p + D E \\
 D_i &= \xi \delta (-D+1-pE) \\
 \bar{p}_i &= l(-\bar{p} + \bar{D} E) \\
 \bar{D}_i &= \xi \bar{\delta} (-\bar{D}+1-a \bar{p} E)
 \end{aligned}
 \tag{IV.13}$$

où $\xi = d^{-1}$

Nous recherchons une solution périodique (2π) du système sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} E \\ P \\ \bar{P} \\ D \\ \bar{D} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \begin{pmatrix} E_i(T) \\ p_i(T) \\ \bar{p}_i(T) \\ D_i(T) \\ \bar{D}_i(T) \end{pmatrix}
 \tag{IV.14}$$

$$\text{Où } T \cong \sigma(\xi) t' = (\sigma + \xi \sigma_1 + \xi^2 \sigma_2 + \dots) t'
 \tag{IV.15}$$

où $\sigma(\xi)$ est la fréquence d'oscillation.

Nous introduisons les équations (IV.14) et (IV.15) dans les équations différentielles du système (IV.1) et la linéarisation à l'ordre 0 par rapport à ξ , nous donne le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{T}{\sigma}\right)} = \sigma \frac{\partial E}{\partial T} = A' p + \bar{A}' \bar{p}$$

$$\sigma \frac{\partial p}{\partial T} = -p + ED \quad (\text{IV.16})$$

$$\sigma \frac{\partial \bar{p}}{\partial T} = l(-\bar{p} + E\bar{D})$$

$$\sigma \frac{\partial D}{\partial T} = \sigma \frac{\partial \bar{D}}{\partial T} = 0 \quad \text{c'est à dire } D=c, \bar{D}=\bar{c} \text{ (les inversions de population sont des constantes).}$$

Le système (IV.16) conduit à l'équation caractéristique suivante :

$$-\lambda^3 - (1+l)\lambda^2 + (c A' + \bar{c} \bar{A}' - l)\lambda + l(c A' + \bar{c} \bar{A}') = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Le système d'équations (IV.16) pourrait posséder des solutions périodiques pourvu que l'équation caractéristique admette de racines complexes conjuguées $\lambda = \pm i\omega$. En séparant la partie réelle de la partie imaginaire, cela nous permet d'obtenir le système de deux équations suivant :

$$\omega^2 = - \frac{c A' + \bar{c} \bar{A}'}{1+l} \quad (\text{IV.18.a})$$

$$l^2(1 - \bar{c} \bar{A}') + l - c A' = 0 \quad (\text{IV.18.b})$$

Si ces dernières équations sont vérifiées, la solution périodique du système (IV.17) est définie par :

$$\begin{pmatrix} E \\ P \\ \bar{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix} e^{i T} + \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \mu^* \\ \eta^* \end{pmatrix} e^{-i T}, \quad (\text{IV.19})$$

où $\begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix}$ est le vecteur propre de la matrice du système (IV.16) avec la valeur propre $i\omega$

et α est l'amplitude de l'oscillation périodique.

Nous obtenons l'amplitude d'oscillation et sa fréquence (voir annexe D) :

$$c = 1 - \frac{A' + l^2 \bar{A}' + l(l+1)}{A' (1 - a l^2)} \quad (\text{IV.20.a})$$

$$\bar{c} = 1 + \frac{a \bar{A}' + l^2 \bar{A}' - l(l+1)}{\bar{A}'(1 - al^2)} \quad (\text{IV.20.b})$$

$$\alpha \alpha^* = \frac{l-1}{2l(a l^2 - 1)} \left(\bar{A}' + l^2 \bar{A}' - l(l+1) \right) \quad (\text{IV.20.c})$$

A partir de l'équation de l'amplitude du champ (IV.20.c), nous pouvons dire qu'il existe un fonctionnement périodique si et seulement si $\bar{A}' > l(l+1) - l^2 \bar{A}'$ et $al^2 > 1$. Dans ce cas la bifurcation est sur-critique. Elle est sous critique si $\bar{A}' < l(l+1) - l^2 \bar{A}'$ et $al^2 < 1$ [Hal91].

Le carré de la fréquence d'oscillation est donné par la relation :

$$\sigma^2 = \frac{al(l-1)}{1-al^2} \left(\bar{A}' - \frac{\bar{A}'(1-l) + l(1-a)}{a(1-l)} \right) \quad (\text{IV.21})$$

En remplaçant les paramètres par leurs expressions, nous obtenons :

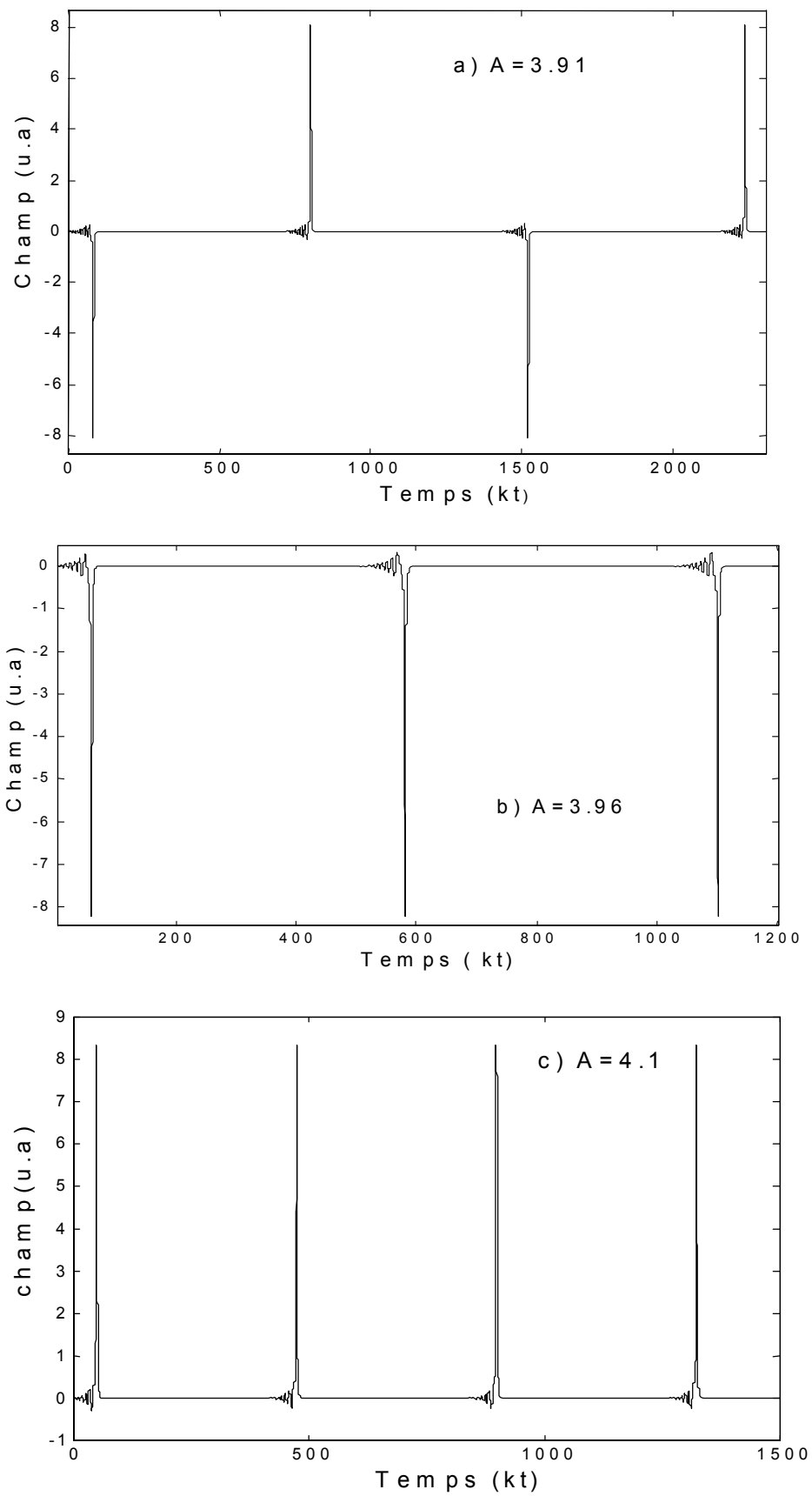
$$\sigma^2 = \frac{la(1+l)}{al^2-1}, \text{ avec } l = \frac{\bar{d}}{d} = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \quad (\text{IV.22})$$

IV.4 Régime transitoire

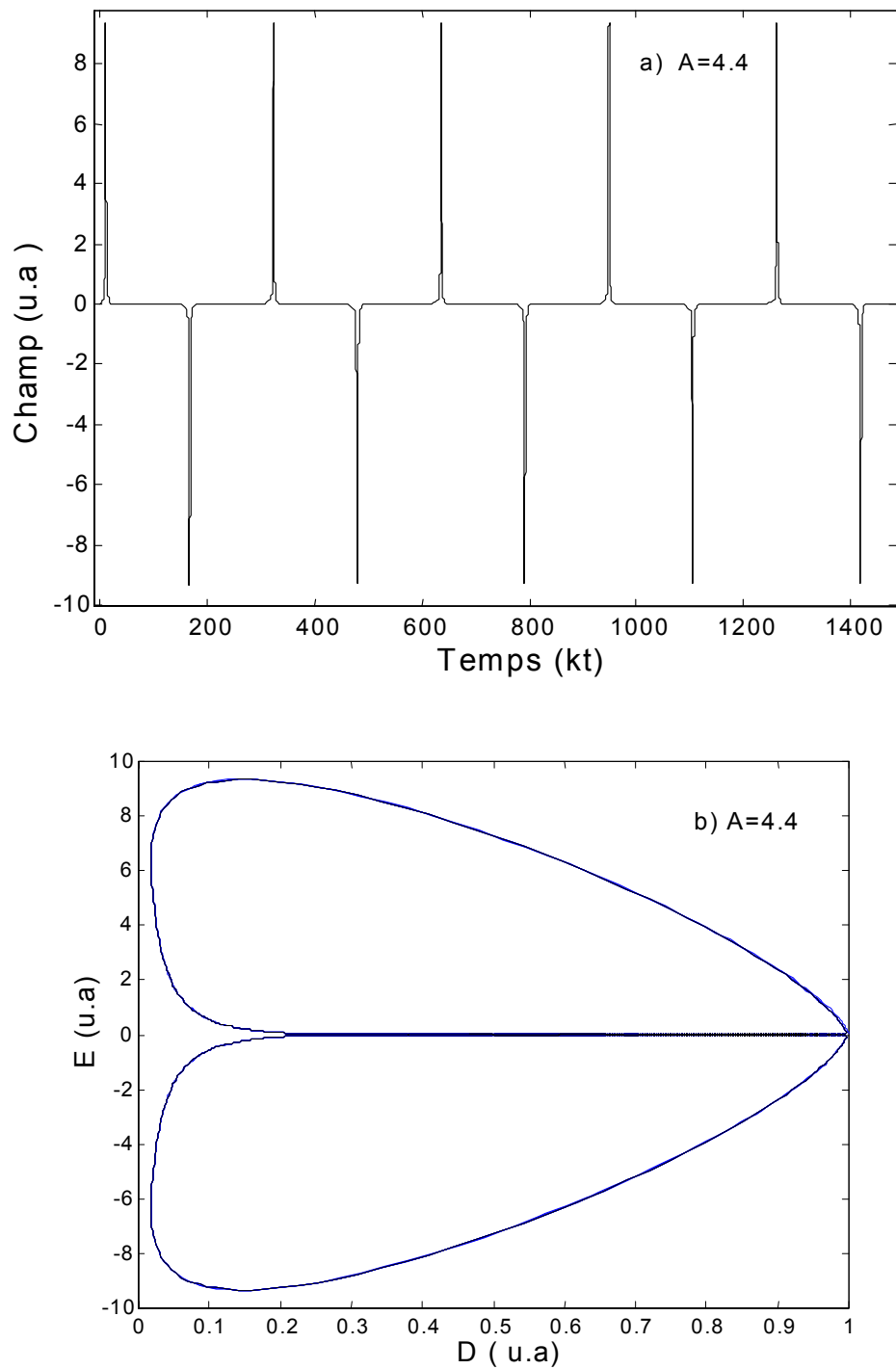
Après avoir étudié la stabilité de la solution triviale, obtenu l'amplitude et la fréquence des oscillations périodiques émergentes au point de la bifurcation de Hopf, nous allons suivre la dynamique à l'aide des allures temporelles des intensités et des portraits de phases, calculés numériquement par la méthode Runge- Kutta .

On verra ainsi les changements qualitatifs du système et la route prise par la solution lorsqu'elle évolue d'un état stable vers un état quelconque, à la limite vers l'état chaotique .Aussi surprenant, que cela est vrai, il existe uniquement un nombre limité de chemins menant au chaos sont : le dédoublement de période [ch96], l'apparition séquentielle de fréquences incommensurables [Are90] et les intermittences[Are87].

Généralement, pour les systèmes caractérisés par plus d'un paramètre de contrôle l'approche du chaos se fait à travers une route mixte de ces trois scénarios de base.



Figure(IV.1. a, b, c): Allures temporelles du champ.



Figure(IV.2) : a) Allure temporelle du champ
b) Portrait de phase.

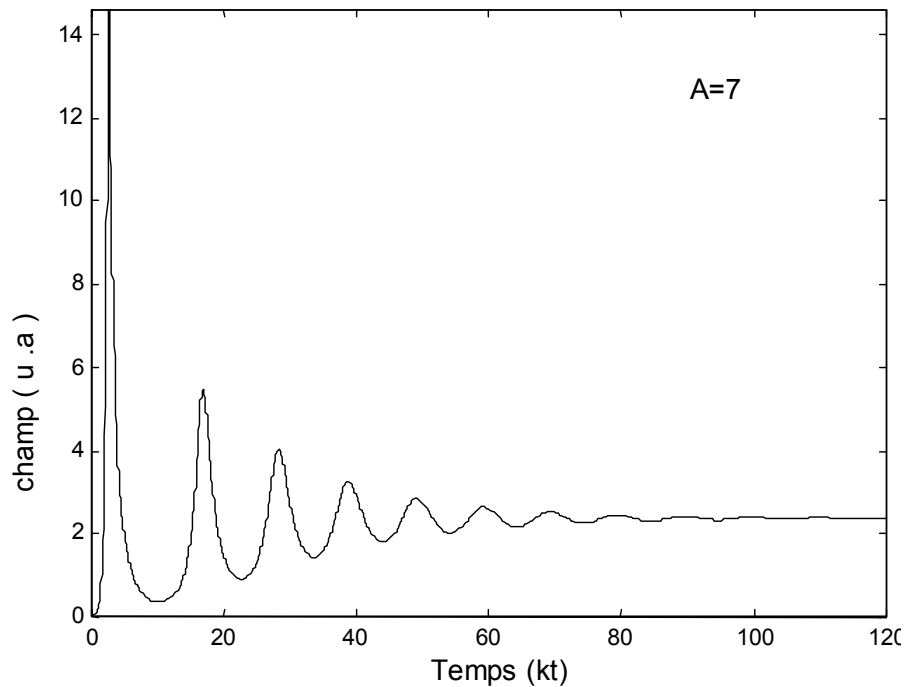


Figure (IV.3) : Allure temporelle du champ pour $A=7$
(déstabilisation de I_0 vers I_+)

La figure (IV.1.a) montre au dessus du seuil des oscillations symétriques (des pics positifs et négatifs), qui deviennent asymétriques (seuls persistent les pics négatifs, où les pics positifs), quand on augmente le paramètre de pompe du milieu amplificateur comme le montrent les figures (IV.1.b,c). Cependant, ces oscillations sont accompagnées par des oscillations de relaxation autour de l'état trivial qui disparaissent, quand on s'approche du point de Hopf. On observe alors un fonctionnement périodique comme on peut le voir sur la figure(IV.2).

L'augmentation du paramètre de pompe ramène le système au fonctionnement continu I_+ , défini par les expressions (IV.2), comme l'illustre la figure(IV.3).

Ces comportements diffèrent de ceux obtenus dans le cadre de l'approximation des rates équations. On observe une précipitation de l'intensité I_+ vers l'état trivial I_0 , saut de I_+ vers I_0 (jump phenomena).[Hend02,03] .

IV.5 Conclusion

Le fait de tenir compte des polarisations des milieux amplificateur et absorbant nous a donné une dynamique plus complexe que celle étudiée dans le cadre des équations de bilan. Cette complexité est illustrée par les différents comportements émergeant via la déstabilisation de l'état trivial. Nous avons étudié l'effet du paramètre de pompage du milieu amplificateur sur la symétrie des allures temporelles du champ.

La présence d'autres états stationnaires I_+ rend encore plus complexe la dynamique de notre système et son étude plus poussée dépasse largement le cadre de cette thèse de Magister et sera entreprise dans d'autres études à l'avenir. A présent, nous allons décrire le dispositif expérimental réalisé et donner quelques résultats expérimentaux.

Chapitre IV

Les Systèmes LAS sans l'Élimination Adiabatique des Polarisation

Introduction

La génération d'impulsions laser courtes dans le domaine infrarouge à $10.6\mu\text{m}$ n'est pas chose aisée, contrairement à ce qui passe dans d'autres domaines, comme le visible et le proche infrarouge. La raison essentielle de cette difficulté est de trouver les composants actifs dans cette gamme à $10.6\mu\text{m}$.

Néanmoins, pour les applications dans le domaine médical, industriel et de l'environnement, la réalisation de sources laser à CO_2 pulsées, peu puissantes utilisant la technique passive est suffisante.

Ce travail expérimental est le premier dans notre laboratoire. Il a comme objectif, la maîtrise de la génération d'impulsions et la compréhension du fonctionnement dynamique du laser à CO_2 avec un absorbant saturable.

V.1- Description du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental comprend (voir figure(V.1)):

- ◆ Un tube à décharge pour le milieu amplificateur
- ◆ Un oscillateur optique.
- ◆ Un banc de remplissage et de pompage du tube amplificateur.
- ◆ La cellule contenant l'absorbant saturable avec son système de vide et de remplissage.

Le tube à décharge en Pyrex, a un diamètre de 11 mm et une longueur utile à la décharge d'un mètre. Ses extrémités sont terminées par des embouts en duralium, taillés à l'angle de Brewster de $67,38^\circ$ et fermées par des lames en ZnSe. Le refroidissement du tube, enfermé dans une jacquette en verre, est assuré par un écoulement d'eau en circuit fermé.

Un manomètre à mercure en U est intercalé entre le tube et la bouteille contenant le mélange, préalablement remplie aux pressions désirées. Il nous permet de mesurer la pression du mélange du gaz injecté. L'excitation du milieu amplificateur est réalisée par une décharge électrique, délivrée par une alimentation haute tension, laquelle est reliée en série avec une résistance ballast de $300\text{K}\Omega$ pour stabiliser le courant d'excitation.

Pour améliorer la puissance du laser, nous refroidissons la cathode par un ventilateur.

L'oscillateur est une cavité Fabry-Perot constituée d'un miroir d'entrée M_1 en cuivre-nickel, revêtu d'une mince couche d'or, de rayon de courbure R_1 de 5 m et un diamètre de 25 mm . Il présente une réflexion à la longueur d'onde $10.6\mu\text{m}$, avec un coefficient de réflexion de 97,5%. Il est monté sur une céramique piézo-électrique qui permet de faire varier la longueur de la cavité de telle sorte que le mode oscillant se déplace le long de la plage d'accrochage de la raie de transition.

Le miroir de sortie M_2 identique au précédent, a un diamètre de 46 mm.

La distance entre les miroirs est de 1.7m. Ils sont montés sur des supports micro-contrôle maintenus par trois barres en Invar qui assurent la stabilité en longueur de la cavité. L'alignement des miroirs avec le tube, posé sur une table en marbre de faible coefficient de dilatation, est fait à l'aide d'un laser He-Ne fonctionnant dans le visible à 6328 \AA .

A propos de la stabilité du résonateur : la cavité est stable géométriquement si seulement si ses paramètres satisfont au critère de stabilité [Tar81] :

$$0 < g_1 g_2 < 1 \quad \text{Où} \quad g_1 = \frac{1}{1 - L/R_1}, \quad g_2 = \frac{1}{1 - L/R_2} .$$

R_1, R_2 sont les rayons de courbure des deux miroirs et L est la longueur de la cavité.

Dans notre cas le produit est égale à 0.4365 et donc satisfait au critère précédent .

L'écart en fréquence entre modes longitudinaux est donné par $\Delta\nu = c/2L$. Il est égal à 88.23 MHz. Par conséquent, un seul mode longitudinal pourra osciller car l'intervalle spectrale est largement supérieur à la largeur de la raie amplificatrice, dont l'élargissement se situe entre 50 et 90 MHz pour les pressions optimales du gaz utilisées. La figure (V.2) permet de comprendre comment on peut obtenir un fonctionnement monomode. L'oscillation ne peut pas avoir lieu que sur le mode q , dont le gain excède le niveau de pertes.

Le système de pompage : Le vide est assuré par une pompe primaire Alcatel qui peut atteindre un vide de 10^{-3} torr et une pompe secondaire à diffusion d'huile, refroidie par une circulation d'eau en circuit fermé, pouvant atteindre un vide de 10^{-7} torr.

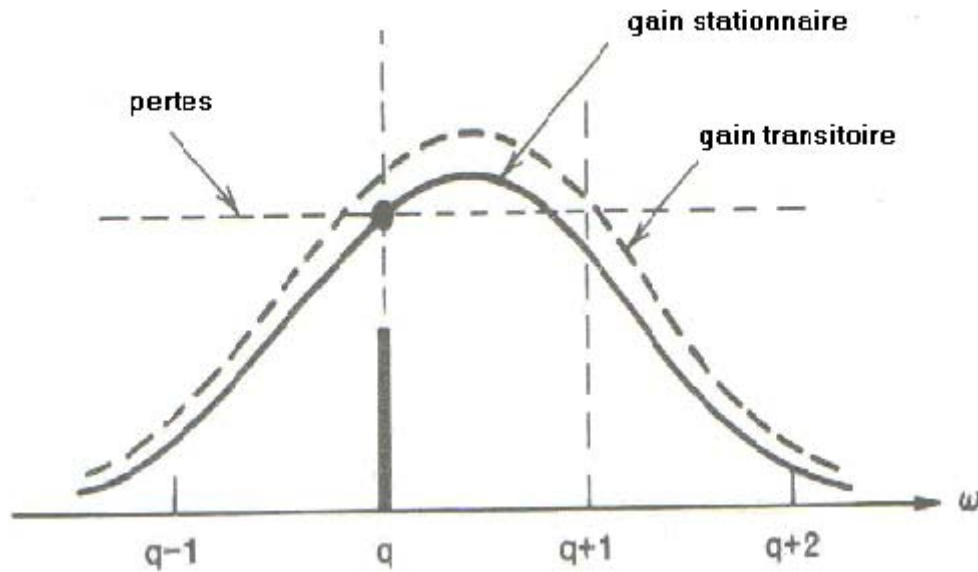


Figure (V.2) : Le fonctionnement mono-mode longitudinal d'un laser avec un élargissement homogène *ISie861*.

Le banc de remplissage est constitué de trois bouteilles contenant les différents gaz (CO_2 , He, N_2), reliées à une enceinte en métal où se mélangent les différents gaz .

Un manomètre à mercure en U nous permet de mesurer les pressions partielles de différents gaz. Les proportions des gaz utilisées sont respectivement 1 : 1: 4 pour le mélange $\text{CO}_2:\text{N}_2$: He .

Le système de détection comprend :

- Un Joule- mètre de type Gentec ED-200 pour mesurer et optimiser l'énergie du faisceau laser. Il a un temps de réponse de 10ms. Il est modulé par un chopper de 4 HZ.
- Un détecteur quantique à jonction Cd -Hg -Te. Ce détecteur nous permet de visualiser la structure du signal. Il est composé d'une double jonction. Sa surface sensible est de $300 \mu\text{m}$.Il présente un temps de réponse de l'ordre de 1ns, dans le domaine spectral de 9 à $12 \mu\text{m}$, avec un rendement de 55% et une détectivité de $3.10^{10} \text{ cm Hz}^{1/2} .\text{W}^{-1}$. Le détecteur est refroidi à l'azote liquide (77K^0). Il est choppé à 125 Hz afin d'éviter de le saturer et de le détériorer.

- Un oscilloscope numérique, modèle Tektronix (DIGITL PHOSPHOR OSCILLOSCOPE) TDS 3052 à deux canaux, de bande passante de 500 MHz, est utilisé pour visualiser les allures temporelles du signal.

IV.2- Caractérisation du laser

Avant d'insérer la cuve contenant l'absorbant saturable, on doit déterminer les conditions optimales de fonctionnement de notre laser, comme la pression et le courant de décharge.

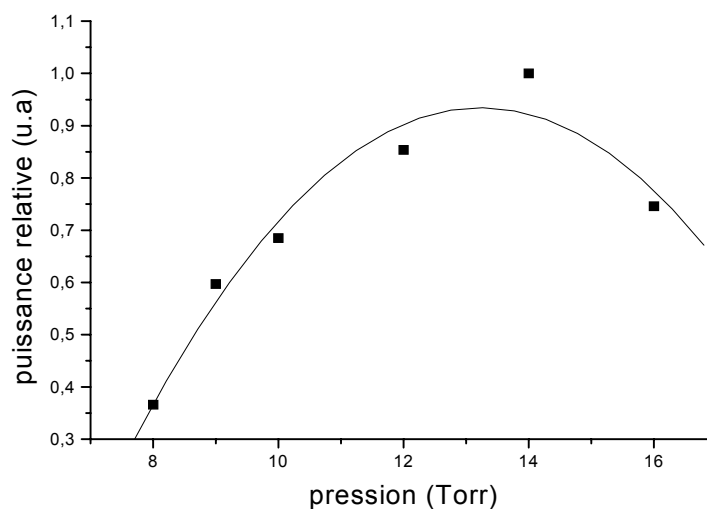


Figure (V.3) : La puissance relative du laser en fonction de la pression du mélange.

La figure (V.3) représente la variation de la puissance laser relative en fonction de la pression du mélange. Nous constatons une augmentation de la puissance avec la pression jusqu'à une valeur optimale de 13 torr puis elle décroît.

Dans la figure (V.4), nous illustrons la variation de la puissance relative en fonction du courant de décharge pour la valeur optimale de 13 torr de la pression totale du mélange.

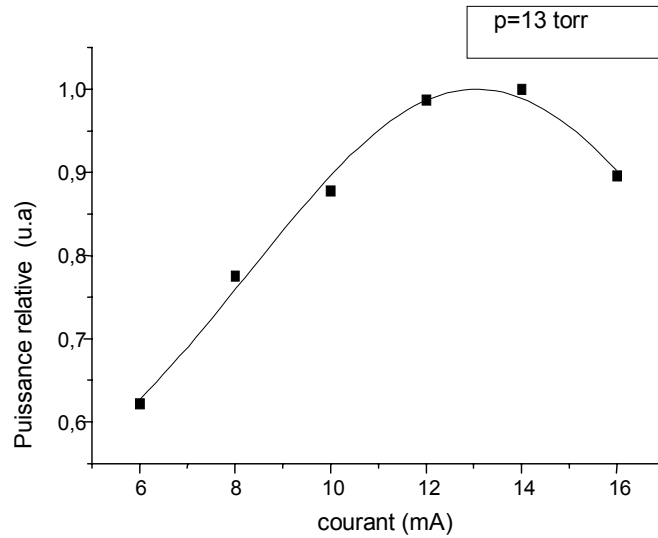


Figure (V.4): La puissance relative du laser en fonction du courant de décharge pour la pression optimale de 13 torr.

Nous remarquons une augmentation de la puissance avec le courant. Cependant, elle décroît après une valeur optimale de 13 mA. Cette décroissance peut s'expliquer par une réduction de l'inversion de population due à l'augmentation de la température, qui provoque une dégradation du milieu amplificateur due à la dissociation de la molécule CO_2 .

Ainsi donc les conditions de fonctionnement optimal pour notre laser sont données par le couple de valeurs (13 Torr ,13 mA)

Les rayons du faisceau gaussien respectivement sur les miroirs M_1 , M_2 sont donnés par :

$$w_{1,2}^2 = \left(\frac{\lambda R_1}{\pi} \right)^2 \left(\frac{(R_{2,1} - L)L}{(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)} \right).$$

Dans notre cas, le diamètre du faisceau sur les deux miroirs est égal à 5.53 mm.

Le beam waist du faisceau correspond à la valeur minimale est donné par l'expression :

$$w_0^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}.$$

Les deux miroirs ont des rayons de courbures égaux. Par conséquent, le diamètre du faisceau au milieu de la cavité est donné par : $2w_0 = 4.41 \text{ mm}$.

La détermination des largeurs du faisceau est importante car la dynamique temporelle observée laisse présager une compétition entre les modes de la cavité. Un fonctionnement près au seuil permettra de minimiser cette compétition. De même que l'émission en mode fondamental TEM_{00} peut être observée en insérant un diaphragme avec une ouverture adéquate à l'intérieur de la cavité qui va créer des pertes supplémentaires pour les modes transverses. Cette ouverture adéquate peut être déterminée, à la lumière des études précédentes sur les cavités diaphragmées [Kel85]. Elle doit être inférieure à $1.3 w$ où w est la largeur du faisceau, pour que les pertes par diffraction soient significatives.

V.3- Absorbant saturable comprend :

- ◆ Une cellule en Pyrex, de diamètre 24 mm et d'une longueur de 10 cm. Ses extrémités sont fermées par des lames en Na Cl qui ont une épaisseur de 5.5mm .
- ◆ Un système de pompage, constitué d'une pompe primaire et d'une pompe secondaire, afin d'assurer le vide dans la cellule.
- ◆ Une jauge Macleod, intercalée entre la bouteille contenant le gaz et la cellule, nous permet de mesurer la pression du SF_6 injecté dans la cellule.

Nous allons donner dans ce qui suit les propriétés spectroscopiques de l'absorbant saturable: la molécule SF_6 (hexa fluor sulfure).

V.4- Propriétés spectroscopiques du SF_6

Le diagramme énergétique des niveaux, donné à la figure (V.5), est constitué de :

- Le niveau fondamental (0).
- Le premier niveau excité (1) dont le mode de vibration de ν_3 donne une bande d'absorption à $10.6 \mu m$.
- Les niveaux excités (2) qui transfèrent leur énergie vibrationnelle vers le niveau (1) par collisions.

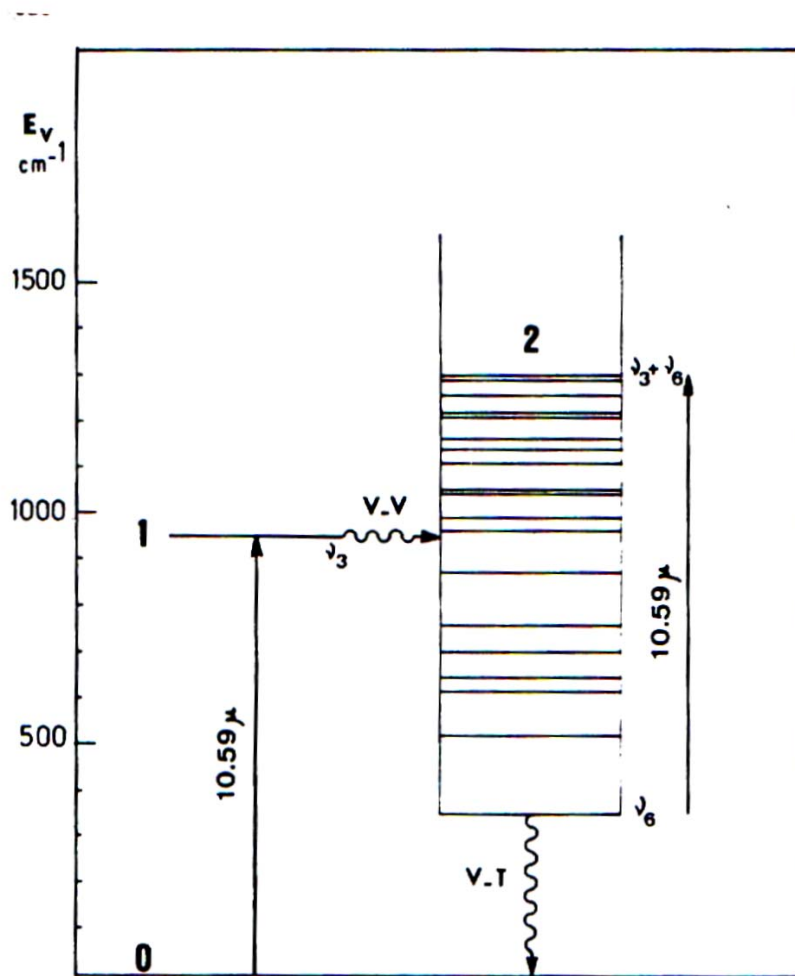


Figure (V.5) : Le diagramme énergétique de la molécule SF₆ [Hen70].

$$(\nu_3 \cong 965 \text{ cm}^{-1}, \nu_6 \cong 363 \text{ cm}^{-1})$$

Le coefficient d'absorption du SF₆ est égal à $(0.46 \pm 0.02) \text{ cm}^{-1} \text{ torr}^{-1}$ [Hen70].

L'intensité de saturation du SF₆ est gouvernée par la relaxation du niveau inférieur ν_6 caractérisé par un taux de relaxation, qui dépend de la température. A la température ambiante la population du niveau inférieur est égale à la moitié de celle du niveau fondamental. Le taux de relaxation du SF₆ est égal à $4 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1} \text{ torr}^{-1}$ [Yor76].

En outre, l'intensité de saturation varie linéairement avec la pression, impliquant que le temps de relaxation du niveau inférieur ν_6 est proportionnel à la pression. Elle est donnée par [Hen70,Har85]: $I_s = (6 \pm 1.5) w.cm^{-2}.torr^{-1}$ pour les lasers fonctionnant en continu.

La figure (V.6) illustre le spectre d'absorption du SF₆ d'un rayonnement émis dans la bande à 10.6 μm . On remarque que la température a peu d'influence sur cette absorption.

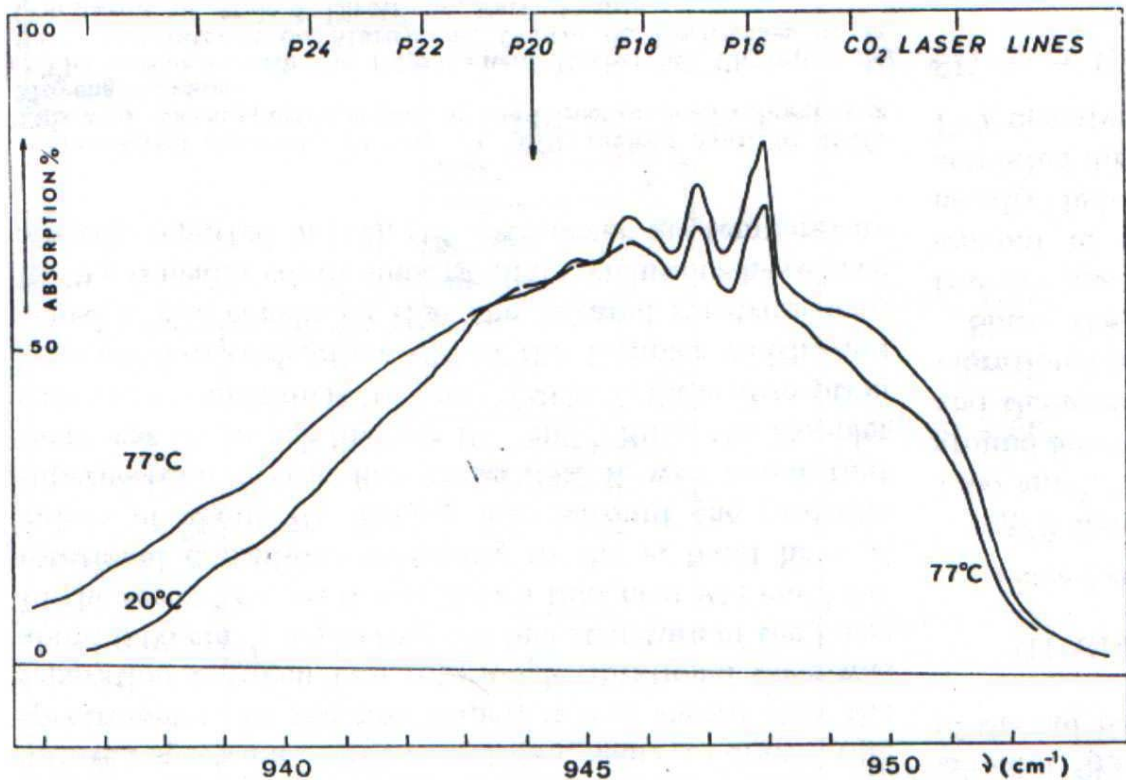


Figure (V.6) : Spectre d'absorption du SF₆ autour de 10.6 μm pour deux valeurs différentes de la température [Hen70].

V.5- Résultats expérimentaux

5.1) Introduction :

La dynamique de fonctionnement de notre laser CO₂ avec un absorbant saturable dépend, dans notre cas, de plusieurs paramètres. Il serait illusoire de vouloir l'étudier en variant tous les paramètres à la fois, car cela nous donnerait une dynamique complexe impossible à comprendre. Aussi avons nous délibérément choisi de nous limiter à l'influence d'un ou deux paramètres : le courant de décharge et la pression du mélange gazeux.

L'étude précédente de l'optimisation du fonctionnement de notre laser sans absorbant saturable avait montré que les conditions optimales en pression et courant sont (13 torr, 13mA). Néanmoins l'introduction de l'absorbant saturable va générer des pertes que nous avons compensées par l'augmentation du gain à travers une augmentation du courant pour avoir un signal suffisant pour être détecté.

Vu la longueur de notre cavité qui donne un ISL (Intervalle Spectrale Libre) de 88 MHz et la largeur de Doppler à la pression de fonctionnement de notre laser de 60 MHz, il est probable que nous aurons un défilement de modes axiaux.

Nous allons nous intéresser dans un premier temps à l'évolution temporelle de l'intensité du laser avant d'introduire l'absorbant saturable. Nous présenterons par la suite les résultats avec l'absorbant saturable. Nous donnerons également les résultats obtenus avec un diaphragme introduit à l'intérieur de la cavité pour limiter l'influence des modes transverses.

5.2) Laser sans absorbant saturable :

La figure (V.7) présente l'évolution temporelle de l'intensité du laser fonctionnant en continu. Les oscillations dont la période est de 8ms correspondent à la fréquence du chopper utilisé (125 Hz). La largeur à mi-hauteur de ces oscillations varie de 3 ms à 4ms.

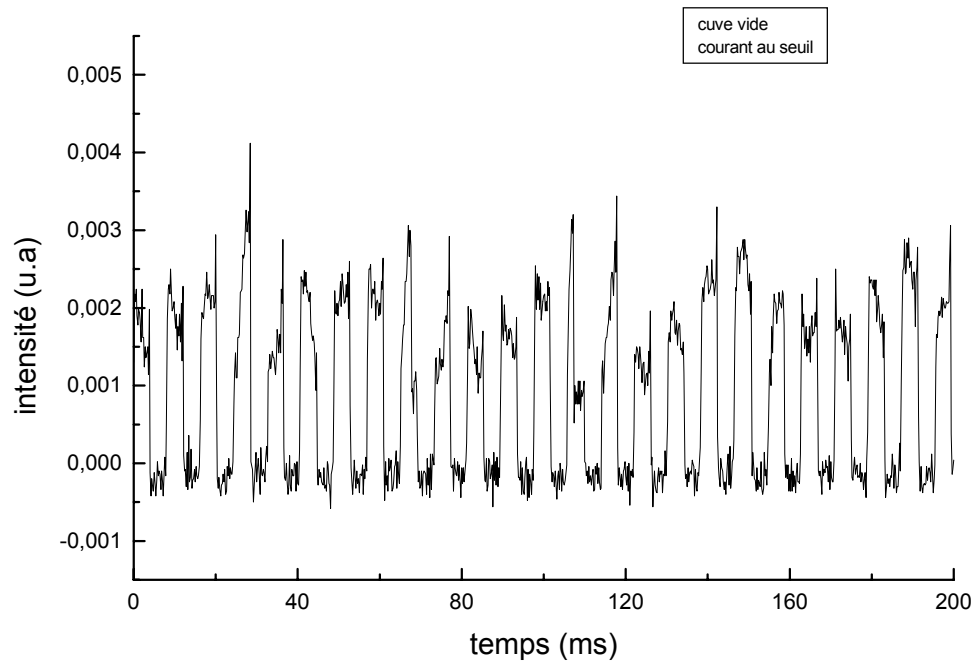
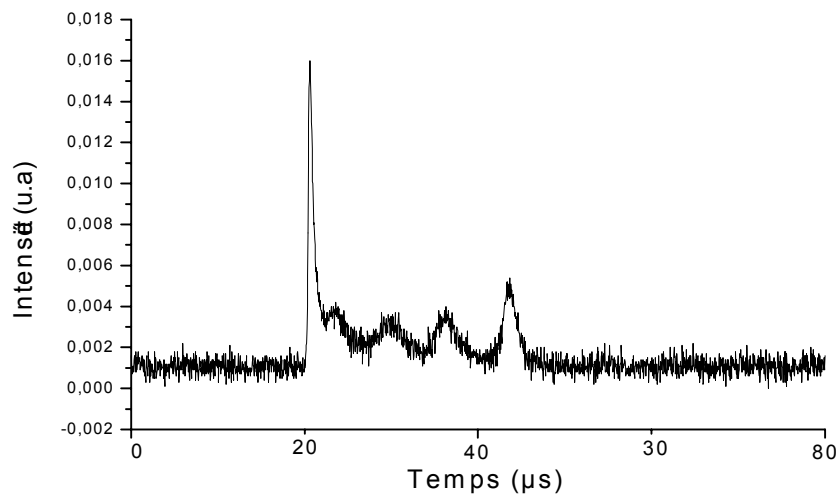
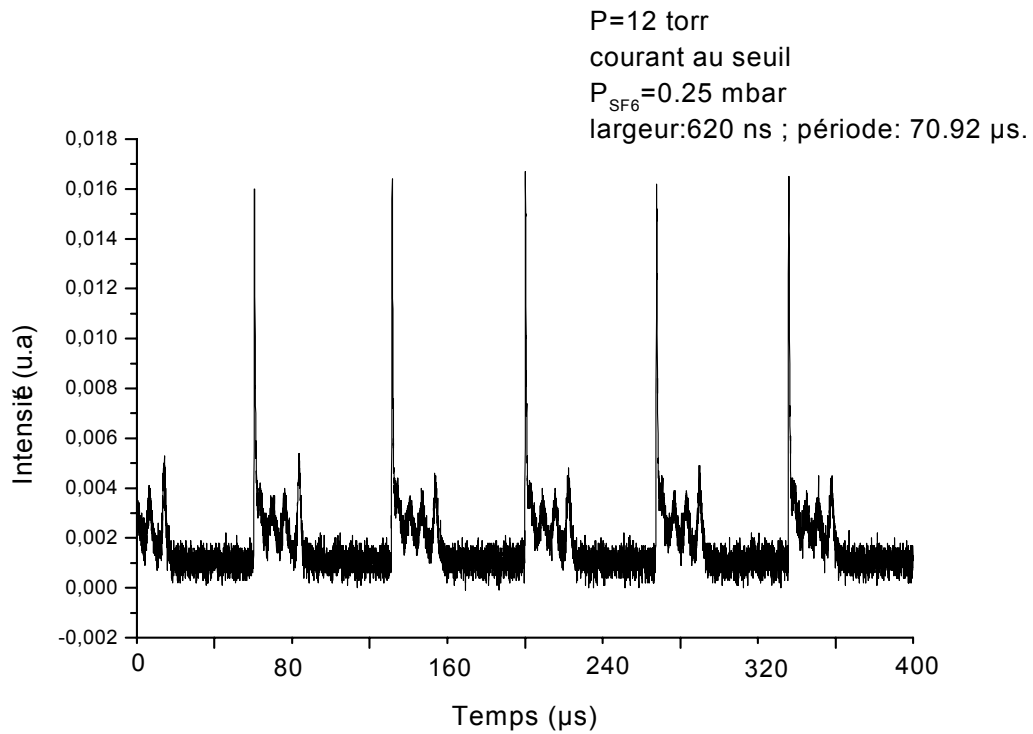


Figure (V.7) : Allure temporelle de l'intensité du laser sans absorbant saturable.

5.3) Laser avec absorbant saturable

La figure (V.8.a) montre un fonctionnement pulsé pour une pression de 0.25 m bar du SF6. Ce régime est appelé 'Répétitif Q-Switching'. Nous remarquons que ces impulsions, de durée de vie de 620 ns, sont accompagnées par des pics de faible intensité comme le montre clairement la figure (V.8.b) . Le taux de répétition de ces impulsions est de 70 μ s.



Figure(V.8.a, b) :Allure temporelle de l'intensité

Comme la variation de la pression et du courant influence sur les pertes et le gain, on peut supposer que l'apparition de ces pics est due au caractère multi- modes transverses et

multi-raies du laser. Une étude plus approfondie de ces effets sera faite ultérieurement. Par ailleurs nous avons constaté une évolution des pics dans le temps. Les figures (V.9.a,b) présentent, dans les mêmes conditions **dans le temps**, l'allure temporelle de l'intensité. Ceci est dû certainement à la compétition entre modes où à l'évolution de la cinétique dans l'absorbant saturable.

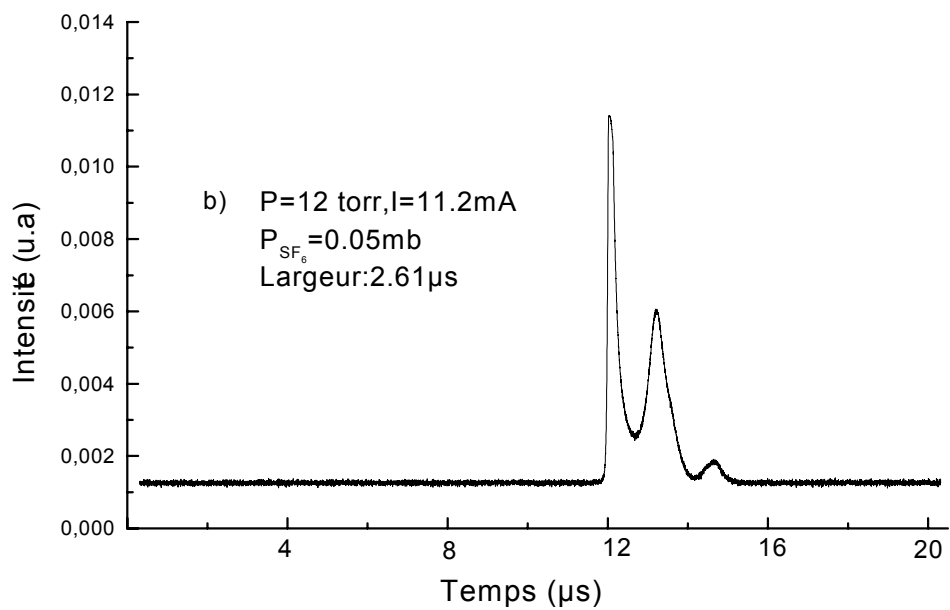
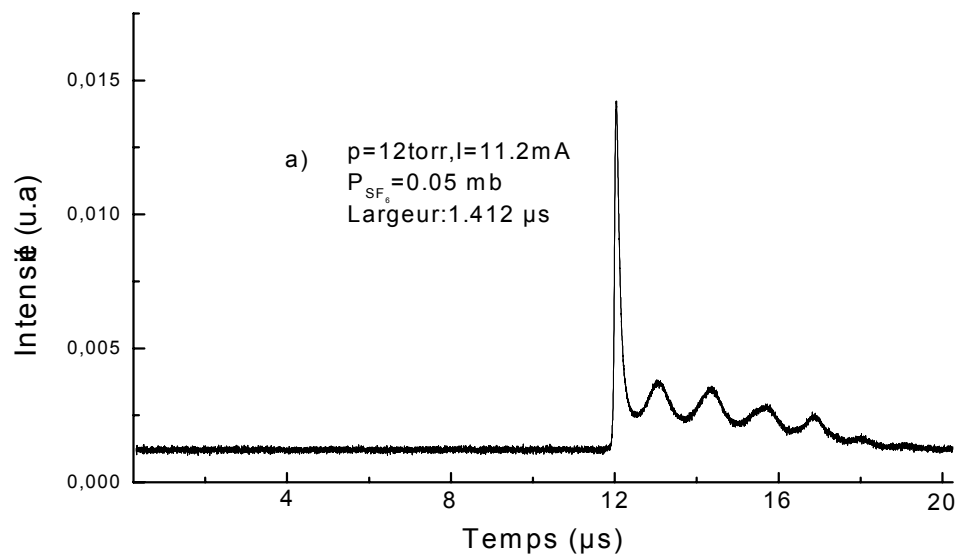


Figure (V.9.a,b) : L'évolution temporelle de l'intensité.

Il y a lieu néanmoins de signaler la difficulté que nous avons rencontrée dans nos manipulations : nous ne pouvons pas contrôler la pression de l'absorbant lors de l'injection, la mesure se fait à posteriori.

Nous espérons régler ce problème, avec l'acquisition d'un système permettant de mesurer la pression dynamique, car nous avons noté que notre laser n'oscille plus au delà d'une certaine pression de l'absorbant saturable. D'un autre côté, nous notons que le fonctionnement impulsionnel est obtenu pour une certaine gamme de pression. En effet, l'augmentation de pression cause des pertes supplémentaires et par conséquent une durée plus longue est nécessaire pour que le gain puisse excéder ces pertes et atteindre le seuil d'oscillation. Cette longue durée donne lieu à une inversion de population maximale dans le milieu amplificateur avant que l'impulsion ne soit émise.

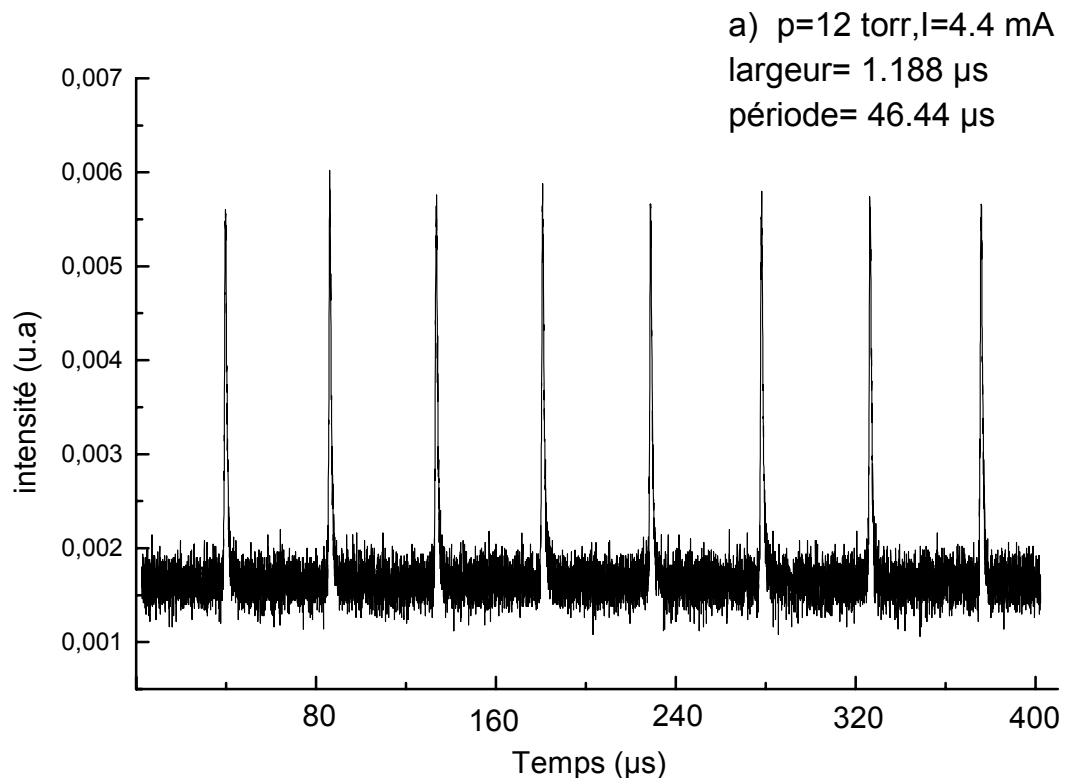
Nous avons constaté aussi que le fonctionnement pulsé se stabilise quand nous augmentons la pression de l'absorbant saturable jusqu' autour de 0.3 m bar.

5.4) L'effet du diaphragme :

Dans la section précédente, nous avons étudié le fonctionnement dynamique sans éliminer les modes transverses de la cavité qui peuvent être à l'origine de l'apparition des pics secondaires accompagnant chaque impulsion.

Dans cette section, nous relevons les allures temporelles de l'intensité, en introduisant un diaphragme à l'intérieur de la cavité. Il permet d'éliminer les modes transverses. Nous constatons que le fait de fermer le diaphragme fait disparaître les pics secondaires comme le montrent les figures (V.10. a ,b ,c).

Comme nous l'avons signalé plus haut, le taux de répétition des impulsions dépend du courant de décharge. Une augmentation de la période de 46.44 μs des impulsions à une période de 69.05 μs est observée, en augmentant le courant de 4.4 mA à 7.6 mA, dans les mêmes conditions, comme les illustrent respectivement les figure (V.10. a), (V.10.b).



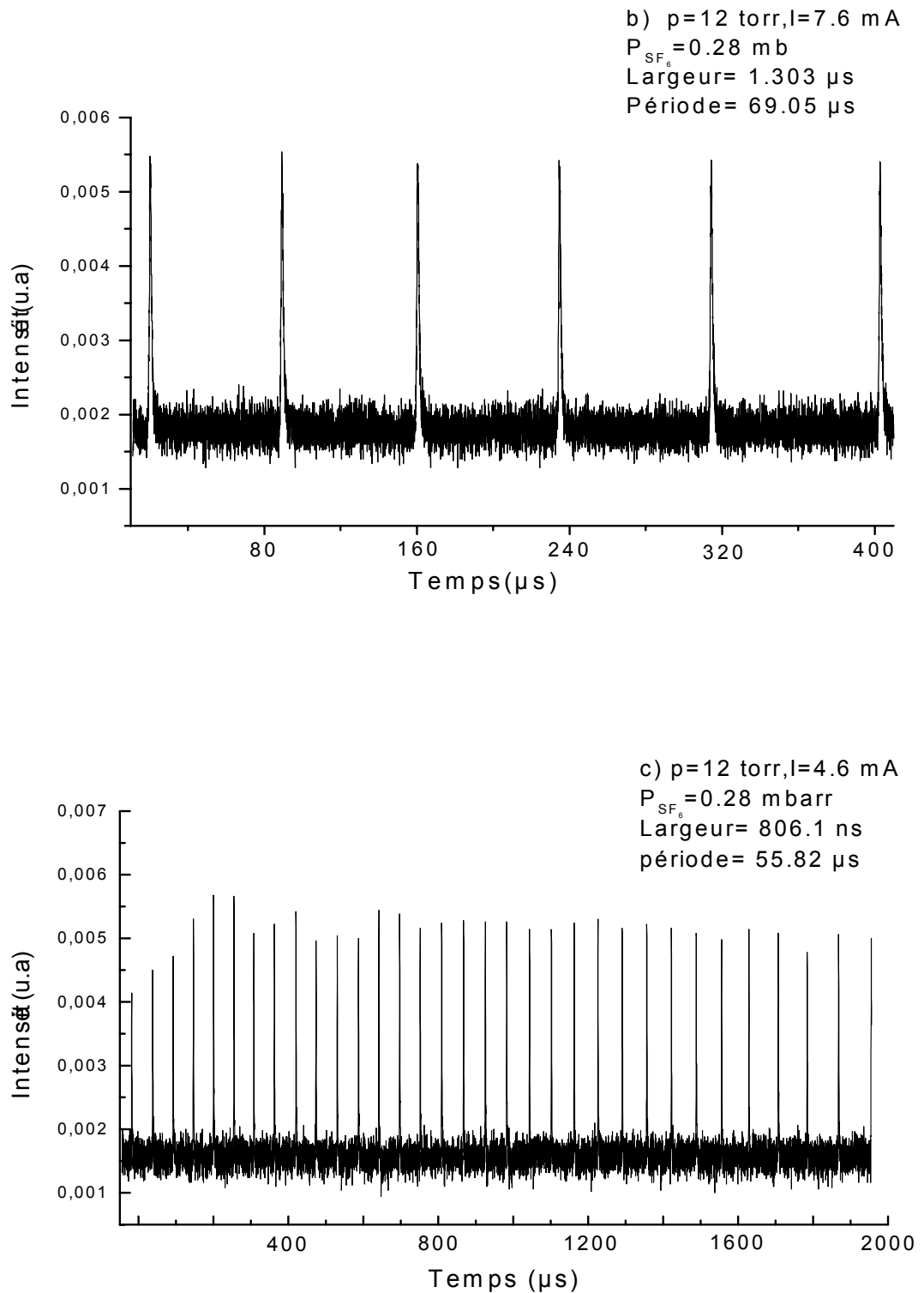


Figure (V.10. a, b, c) : Allures temporelles de l'intensité du laser avec un diaphragme introduit dans la cavité, pour différentes valeurs du courant de décharge.

V.6 Conclusion

La réalisation d'un laser à CO₂ scellé avec un absorbant saturable est une première dans notre laboratoire.

Les premiers résultats obtenus de la modulation passive de ce laser par l'insertion d'un absorbant saturable, la molécule SF₆ dans notre cas, a donné lieu à un fonctionnement impulsionnel résultant du phénomène Q-Switch .

Nous avons étudié l'influence de quelques paramètres sur ce fonctionnement impulsionnel très complexe à cause de nombreux facteurs intervenant dans la forme de ces signaux tels que les modes transverses et les différentes raies oscillantes du laser.

A cet effet, nous avons introduit un diaphragme à l'intérieur de la cavité pour éliminer les modes transverses et favoriser le fonctionnement sur le mode fondamental. Ceci nous a permis effectivement d'éliminer les pics secondaires .Dans ces conditions, nous avons également mis en évidence l'influence du courant de décharge sur le taux de répétition de ces impulsions. L'étude expérimentale n'est qu'à ses débuts. Elle laisse présager de nombreux résultats pour l'avenir qui feront l'objet d'autres travaux de thèse .

Chapitre V

Etude Expérimentale

Annexe A :

Dans cette annexe, nous présentons le détail de calculs afin de passer du système (II.43) au système (II.45). Nous avons (le système d'équations (II.44)) :

$$b = \left[\frac{\gamma_{//} \gamma}{4|g|^2} \right]^{\frac{1}{2}} (E_R(t) - i E_I(t)) e^{-i\omega t} \quad (1.a)$$

$$g^* \alpha = \sigma \left[\frac{|g|^2 \gamma_{//}}{4\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} (P_R(t) + i P_I(t)) e^{-i\omega t} \quad (1.b)$$

$$\bar{g}^* \bar{\alpha} = \bar{\sigma} \left[\frac{\gamma_{//} \gamma}{|g|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{|g|^2}{2\gamma} (\bar{P}_R(t) + i \bar{P}_I(t)) e^{-i\omega t} \quad (1.c)$$

$$d = \sigma D \quad (1.d)$$

$$\bar{d} = \bar{\sigma} \bar{D} \quad (1.e)$$

Le champ est donné par :

$$\left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa \right) - \omega \right] b = N g^* \alpha + \bar{N} \bar{g}^* \bar{\alpha}$$

Nous introduisons les variables adimensionnelles (1.a – 1.c) dans l'équation du champ, nous obtenons :

$$(i k - \omega)(E_R - i E_I) e^{-i\omega t} + i \partial_t (E_R - i E_I) e^{-i\omega t} = \sqrt{\frac{4|g|^2}{\gamma_{//} \gamma}} \left(N \sigma \sqrt{\frac{|g|^2 \gamma_{//}}{4 \gamma}} (P_R + i P_I) + \bar{N} \bar{\sigma} \frac{|g|^2}{2\gamma} \sqrt{\frac{\gamma_{//}}{|g|^2}} (\bar{P}_R + i \bar{P}_I) \right) e^{-i\omega t}$$

$$(k E_I - \omega E_R) e^{-i\omega t} + i(k E_R + \omega E_I) e^{-i\omega t} + i \partial_t (E_R e^{-i\omega t}) + \partial_t (E_I e^{-i\omega t}) = \frac{N \sigma |g|^2}{\gamma_{\perp}} (P_R + i P_I) e^{-i\omega t} + \frac{\bar{N} \bar{\sigma}}{\gamma_{\perp}} |g|^2 (P_R + i P_I) e^{-i\omega t}$$

$$(k E_I - \omega E_R) + i(k E_R + \omega E_I) + i(\partial_t E_R - \omega E_I) + (\partial_t E_I + \omega E_R) = \frac{N \sigma |g|^2}{\gamma_{\perp}} (P_R + i P_I) + \frac{\bar{N} \bar{\sigma}}{\gamma_{\perp}} |g|^2 (P_R + i P_I)$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire, on obtient deux équations :

$$\text{Partie imaginaire : } \frac{\partial E_R}{\partial (k t)} + E_R = \frac{N \sigma |g|^2}{k \gamma} P_I + \frac{\bar{N} \bar{\sigma} |g|^2}{k \gamma} \bar{P}_I$$

$$\dot{E}_R = -E_R + A P_I + \bar{A} \bar{P}_I \quad (\text{A.1})$$

$$\text{avec } t' = k t, \quad A = \frac{N\sigma |g|^2}{k\gamma}, \quad \bar{A} = \frac{\bar{N}\bar{\sigma} \bar{|g|^2}}{k\gamma}$$

$$\underline{\text{Partie réelle}} : \left(\frac{\partial}{\partial (k t)} + 1 \right) E_I = \left(\frac{N\sigma |g|^2}{k\gamma} P_R + \bar{N}\bar{\sigma} \frac{\bar{|g|^2}}{k\gamma} \bar{P}_R \right)$$

$$\dot{E}_I = -E_I + A P_R + \bar{A} \bar{P}_R \quad (\text{A.2})$$

La polarisation du milieu amplificateur est donnée par :

$$\left[i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \gamma \right) - \bar{\omega} \right] g^* \alpha = -|g|^2 d b$$

En injectant (1.b) et (1.c) dans l'équation de la polarisation du milieu amplificateur, nous obtenons :

$$\left[i \left(\frac{\delta}{\delta t} + \gamma \right) - \bar{\omega} \right] \sigma \left(\frac{|g|^2 \gamma''}{4\gamma} \right)^{1/2} (P_R + i P_I) e^{-i\omega t} = -|g|^2 \sigma D \left(\frac{\gamma'' \gamma}{4|g|^2} \right)^{1/2} (E_R - i E_I) e^{-i\omega t}$$

$$i \partial_t ((P_R + i P_I) e^{-i\omega t}) - (\bar{\omega} P_R + \gamma P_I) e^{-i\omega t} + i(\gamma P_R - P_I \bar{\omega}) e^{-i\omega t} = -\gamma D (E_R - i E_I) e^{-i\omega t}$$

$$(i(\partial_t P_R + \omega P_I) + (-\partial_t P_I + \omega P_R)) e^{-i\omega t} - (\bar{\omega} P_R + \gamma P_I) e^{-i\omega t} + i(\gamma P_R - P_I \bar{\omega}) e^{-i\omega t} = -\gamma D (E_R - i E_I) e^{-i\omega t}$$

On sépare la partie réelle de la partie imaginaire :

Partie réelle :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial (k t)} + \frac{\gamma}{k} \right) P_I + \left(\frac{\omega - \bar{\omega}}{k} \right) P_R &= \frac{\gamma}{k} D E_R \\ \frac{\partial P_I}{\partial t'} &= \frac{\gamma}{k} (-P_I + \Delta P_R + D E_R) \\ \frac{\partial P_I}{\partial t'} &= d (-P_I + \Delta P_R + D E_R) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Avec } \Delta = \frac{\omega - \bar{\omega}}{\gamma}, d = \frac{\gamma}{k}$$

Partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
 & ((\partial_t P_R + \omega P_I)) + (\gamma P_R - P_I \bar{\omega}) = +\gamma E_I D_0 \\
 & \frac{\partial P_R}{\partial (k t)} = \frac{\gamma}{k} (-P_R + D E_I - \Delta P_I) \\
 & \frac{\partial P_R}{\partial t'} = d (-P_R + D E_I - \Delta P_I)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

La Polarisation du milieu absorbant est donnée par :

$$\left[\left(i \frac{\delta}{\delta t} + \gamma \right) - \bar{\omega}' \right] \bar{\alpha} = -\bar{g} \bar{d} b$$

On fait les mêmes calculs que pour les équations du milieu amplificateur :

$$\left[\left(i \frac{\delta}{\delta t} + \gamma \right) - \bar{\omega}' \right] \sigma \left(\frac{|g|^2 \bar{\gamma}''}{4\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{P}_R + i \bar{P}_I) e^{-i\omega t} = -|g|^2 \bar{\sigma} \bar{D} \left(\frac{\bar{\gamma}'' \bar{\gamma}}{4|g|^2} \right)^{\frac{1}{2}} (E_R - i E_I) e^{-i\omega t}$$

$$i \partial_t ((\bar{P}_R + i \bar{P}_I) e^{-i\omega t}) - (\bar{\omega}' \bar{P}_R + \bar{\gamma} \bar{P}_I) e^{-i\omega t} + i (\bar{\gamma} \bar{P}_R - \bar{P}_I \bar{\omega}') e^{-i\omega t} = -\bar{\gamma} \bar{D} (E_R - i E_I) e^{-i\omega t}$$

$$(i (\partial_t \bar{P}_R + \omega \bar{P}_I) + (-\partial_t \bar{P}_I + \omega \bar{P}_R)) e^{-i\omega t} - (\bar{\omega}' \bar{P}_R + \bar{\gamma} \bar{P}_I) e^{-i\omega t} + i (\bar{\gamma} \bar{P}_R - \bar{P}_I \bar{\omega}') e^{-i\omega t} = -\bar{\gamma} \bar{D} (E_R - i E_I) e^{-i\omega t}$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire :

Partie réelle :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial (k t)} - \frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \bar{P}_I + \left(\frac{\omega - \bar{\omega}'}{k} \right) \bar{P}_R = \frac{\bar{\gamma}}{k} \bar{D} E_R \\
 & \frac{\partial \bar{P}_I}{\partial t'} = \frac{\bar{\gamma}}{k} (-\bar{P}_I + \bar{\Delta} \bar{P}_R + \bar{D} E_R) \\
 & \frac{\partial \bar{P}_I}{\partial t'} = \bar{d} (-\bar{P}_I + \bar{\Delta} \bar{P}_R + \bar{D} E_R)
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\text{avec } \bar{\Delta} = \frac{\omega - \bar{\omega}'}{\gamma}, \bar{d} = \frac{\bar{\gamma}}{k}$$

Partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
 & ((\partial_t \bar{P}_R + \omega \bar{P}_I)) + (\bar{\gamma} \bar{P}_R - \bar{P}_I \bar{\omega}') = \bar{\gamma} \bar{D} E_I \\
 & \frac{\partial \bar{P}_R}{\partial t'} = \bar{d} (-\bar{P}_R + \bar{D} \bar{P}_I - \bar{\Delta} \bar{P}_I)
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

L'inversion de population du milieu amplificateur est donnée par :

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\gamma''} \right) d = i \gamma'' \sigma - 2 \left(g^* \alpha b - g \alpha^* b^* \right)$$

L'injection de (1.b-1.d) dans l'équation de l'inversion de population du milieu amplificateur, nous donne :

$$\begin{aligned} i(\partial_t + \gamma'') \sigma D &= i \gamma'' \sigma - 2 \left(\frac{\sigma \gamma''}{4} \right) (2i(E_R P_I + E_I P_R)) \\ \partial_t D &= \gamma'' (-D + 1 - E_R P_I - E_I P_R) \\ \frac{\partial D}{\partial(kt)} &= \frac{\gamma''}{k} (-D + 1 - E_R P_I - E_I P_R) \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \delta (-D + 1 - E_R P_I - P_I P_R) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

L'inversion de population du milieu absorbant est donnée par :

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\gamma''} \right) \overline{d} = i \overline{\gamma''} \overline{\sigma} - 2 \left(\overline{g^* \alpha b} - \overline{g \alpha^* b^*} \right)$$

L'insertion de (1.b, c, e) dans l'équation de l'inversion de population de l'absorbant saturable nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} i(\partial_t + \overline{\gamma''}) \overline{\sigma} \overline{D} &= i \overline{\gamma''} \overline{\sigma} - 2 \left(\frac{\overline{\sigma} \overline{\gamma''} |\overline{g}|^2}{4 \overline{\gamma} |\overline{g}|^2} \right) (2i(E_R \overline{P}_I + E_I \overline{P}_R)) \\ \frac{\partial \overline{D}}{\partial(kt)} &= \frac{\overline{\gamma''}}{k} \left(-\overline{D} + 1 - a (E_R \overline{P}_I + E_I \overline{P}_R) \right) \\ \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} &= \overline{\delta} \left(-\overline{D} + 1 - a (E_R \overline{P}_I + E_I \overline{P}_R) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Annexe B :

Critère de stabilité de Routh-Hurwitz :

Le critère de stabilité de Routh-Hurwitz est une méthode pour déterminer si toutes les racines de l'équation caractéristique ont leur partie réelle négative ou non. On applique ce critère en se servant de déterminants formés à partir des coefficients de l'équation caractéristique. On suppose que le premier coefficient a_n est positif. Les déterminants Δ_i pour $i=1,2,\dots,n-1$ sont les mineurs principaux du déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_0 & \text{si } n \text{ impair} & 0 & \dots & 0 \\ & & & a_1 & \text{si } n \text{ pair} & & & \\ a_0 & a_{n-2} & \dots & a_1 & \text{si } n \text{ impair} & 0 & \dots & 0 \\ & & & a_0 & \text{si } n \text{ pair} & & & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & & & & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & & & & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Les déterminants ainsi formés s'écrivent comme suit :

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} + a_n a_{n-1} a_{n-5} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-4} a_{n-1}^2$$

et ainsi de suite jusqu'à Δ_{n-1} .

Toutes les racines de l'équation caractéristique ont leur partie réelle négative si et seulement si $\Delta_i > 0$ pour $i=1, 2, \dots, n$.

Annexe C₂: Détermination de l'état stationnaire du système (IV.1)

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= -E + AP + \bar{A}\bar{P} \\
 \dot{p} &= d (-p + D E) \\
 \dot{\bar{p}} &= d (-\bar{p} + \bar{D} E) \\
 \dot{D} &= \delta (-D + 1 - PE) \\
 \dot{\bar{D}} &= \delta (-\bar{D} + 1 - a\bar{P}E)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dans le cas stationnaire, les équations sont réécrites comme suit :

$$E_{ST} = A P_{ST} + \bar{A} \bar{P}_{ST} \tag{2.1}$$

$$P_{ST} = D_{ST} E_{ST} \tag{2.2}$$

$$\bar{P}_{ST} = \bar{D}_{ST} E_{ST} \tag{2.3}$$

$$D_{ST} = 1 - E_{ST} P_{ST} \tag{2.4}$$

$$\bar{D}_{ST} = 1 - a E_{ST} \bar{P}_{ST} \tag{2.5}$$

La combinaison des équations (2.2) et (2.4) nous permet de tirer :

$$D_{ST} = \frac{1}{1 + I_{ST}} \tag{3.1}$$

Avec $I_{ST} = E_{ST}^2$

Les équations (2.3) et (2.5) nous donnent :

$$\bar{D}_{ST} = \frac{1}{1 + a I_{ST}} \tag{3.2}$$

Nous substituons respectivement (3.1) dans (2.2) et (3.2) dans (2.3), on obtient :

$$P_{ST} = \frac{\sqrt{I_{ST}}}{1 + I_{ST}} \tag{3.3}$$

$$\bar{P}_{ST} = \frac{\sqrt{I_{ST}}}{1 + a I_{ST}} \tag{3.4}$$

Nous injectons les expressions (3.3) et (3.4) dans (2.1), nous obtenons :

$$\text{Soit : } E_{St} = 0. \text{ par conséquent } D_{St} = \bar{D}_{St} = 1 - P_{St} = 1 - \bar{P}_{St} = 1 \tag{4}$$

$$\text{Où : } a I_{ST}^2 + (1 + a - aA - \bar{A}) I_{ST} + 1 - A - \bar{A} = 0 \tag{5}$$

Elle admet deux solutions :

$$I_{\pm} = \frac{1}{2a} (aA + \bar{A} - a - 1 \pm \sqrt{(a+1-aA-\bar{A})^2 - 4a(1-A-\bar{A})}) \tag{6}$$

Annexe D :

- Détermination du Vecteur propre de la matrice du système (IV.16)

$$\frac{\partial E}{\partial T} = A' p + \bar{A}' \bar{p} \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = -p + ED \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial T} = l \left(-\bar{p} + E \bar{D} \right) \quad (1.c)$$

La matrice du système s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & A' & \bar{A}' \\ c & -1 & 0 \\ l\bar{c} & 0 & -l \end{pmatrix} \quad (2)$$

Nous avons posé que : $D = c$, $\bar{D} = \bar{c}$

Le vecteur propre $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix}$ avec la valeur propre $i\omega$ est défini par la relation suivante :

$$(L - i\omega I) \varphi = 0 \quad (3)$$

Où I est la matrice unitaire.

En tenant compte de (2) nous obtenons :

$$-i\omega\alpha + A'\mu + \bar{A}'\eta = 0 \quad (4.a)$$

$$c\alpha - (1+i\omega)\mu = 0 \quad (4.b)$$

$$l\bar{c}\alpha - (l+i\omega)\eta = 0 \quad (4.c)$$

Nous tirons respectivement de l'équation (4.b) et de l'équation (4.c) les expressions :

$$\eta = \frac{c\alpha}{1+i\omega} \quad (5.a)$$

$$\eta = \frac{l\bar{c}\alpha}{l+i\omega} \quad (5.b)$$

- Pour déterminer l'amplitude d'oscillations, considérons notre système d'équations différentielles à l'ordre 1 par rapport à ξ . Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi \sigma \frac{\partial E}{\partial T} &= \xi \sigma \frac{\partial P}{\partial T} = \xi \sigma \frac{\partial \bar{P}}{\partial T} = 0 \\ \sigma \frac{\partial D_\xi}{\partial T} &= \delta (-D_l + 1 - E_l p_l) \\ \sigma \frac{\partial \bar{D}_\xi}{\partial T} &= \bar{\delta} (-\bar{D}_l + 1 - a E_l \bar{p}_l) \end{aligned} \quad (6)$$

En tenant compte de (IV.15), nous obtenons :

$$\left(\delta + \sigma \frac{\partial}{\partial T} \right) D_\xi = \delta (1 - E^* P - E P^*) \quad (7.a)$$

$$\left(\bar{\delta} + \sigma \frac{\partial}{\partial T} \right) \bar{D}_\xi = \bar{\delta} (1 - a E^* P - a E P^*) \quad (7.b)$$

Nous remarquons que les inversions de population D_ξ, \bar{D}_ξ restent constantes dans le temps

T si et seulement si :

$$c + (\beta + \beta^*) \alpha \alpha^* - 1 = 0 \quad (8.a)$$

$$\bar{c} + (\chi + \chi^*) \alpha \alpha^* - 1 = 0 \quad (8.b)$$

En tenant compte de (IV.18.b), nous obtenons :

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{A' + l^2 \bar{A}' + l(l+1)}{A' (1 - a l^2)} \\ \bar{c} &= 1 + \frac{a A' + l^2 \bar{A}' - l(l+1)}{\bar{A}' (1 - a l^2)} \\ \alpha \alpha^* &= \frac{l-1}{2l(a l^2 - 1)} \left(A' + l^2 \bar{A}' - l(l+1) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Annexes