N° d'ordre : 43/2012-M/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en mathématique

Spécialité : Modélisation Mathématique et analyse Numérique

par

BENAICHOUCHE NOUREDDINE

THEME

Inégalités de Carleman pour les équations paraboliques et application à la contrôlabilité.

Soutenu publiquement le 01/07/2012 devant le jury composé de :

O. ZAIR	Maître de conférences	à l' U.S.T.H.B	Présidente
D. TENIOU	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Directeur de Mémoire
A. HEMINNA	Professeur	à l' U.S.T.H.B	Examinateur
T. ALIZIANE	Maître de conférences	à l' U.S.T.H.B	Examinateur

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse Monsieur Djamel-Eddine Teniou pour son aide sans réserve durant la préparation et la rédaction de cette Thèse. Je lui adresse mes plus sincères remerciements pour sa disponibilité à mon égard et pour ses précieux conseils.

Je suis aussi très reconnaissant à Madame Ouahiba Zaîr d'avoir accepté de présider mon jury et à Messsieurs: Tarek Aliziane et Ammar Heminna d'avoir acceptés d'examiner ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail on présente des résultats sur la contrôlabilité de quelques systèmes d'équations aux derivées partielles paraboliques, notamment le système de réaction-diffusion. Tout au long de ce mémoire, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dénotera un ouvert borné, $O \subset \Omega$ le domaine de contrôle, T un nombre strictement positif qui représente le temps final de l'évolution et 1_O la fonction caractéristique de l'ouvert O. On rappelle les définitions de contrôlabilité qui seront utilisées dans la suite :

• On dit qu'un problème parabolique général de contrôle est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si, pour toute condition initiale y^0, on peut trouver une fonction contrôle v telle que l'état associé est amené à zéro à l'instant T.

• Pour des systèmes nonlinéaires il ne sera pas toujours possible de déduire des résultats de contrôlabilité (globale) à zéro. Il est donc habituel d'introduire le concept de contrôlabilité locale à zéro au temps T qui consiste, sous l'hypothèse supplémentaire que y^0 soit suffisament petit, à amener le système à zéro à l'instant T.

• Une question aussi trés intéressante est la contrôlabilité exacte aux trajectoires des mêmes systèmes ; c'est à dire, étant donnée une solution non contrôlée de notre système, est-il possible d'amener, à l'aide d'un contrôle, la solution du système contrôlé à cette trajectoire à l'instant T. De plus, cette dernière question semble être le problème le plus naturel à considérer.

Dans ce mémoire, on montrera de nouveaux résultats de contrôlabilité à zéro et la contrôlabilité aux trajectoires des systèmes nonlinéaires, aprés avoir établi des résultats de contrôlabilité à zéro appropriés pour des systèmes linéarisés associés.

Beaucoup de progrés ont été faits ces dernières années dans le cadre de la contrôlabilité des équations paraboliques. Dans un premier temps, tant que les conditions aux limites sont de type Dirichlet, la contrôlabilité à zéro du système

$$\left\{\begin{array}{lll} y_t - \triangle y = v 1_O & \text{dans} & Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur} & \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y^0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

a été démontrée, d'une part par G. Lebeau et L. Robbiano et d'autre part par A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov en utilisant une méthode qui peut s'adapter à des systémes assez generaux reposant sur des inégalités de Carleman globales. Ce type d'inégalités constitue une estimation trés importante du point de vue de la contrôlabilité. Plus précisément, les inégalités globales de Carleman impliquent en particulier l'observabilité pour le problème adjoint associé au problème de contrôle linéaire et il est bien connu que l'observabilité du problème adjoint entraîne la contrôlabilité à zéro.

Dans [3], E. Zuazua résout pour la première fois la contrôlabilité d'un système nonlinéaire, à l'aide d'un argument de point fixe. Depuis, des avancées fructueuses ont été faites dans ce domaine. Un exemple est le travail de C. Fabre, J.P. Puel et E. Zuazua dans [1], qui démontrent la contrôlabilité approchée du système de réaction-diffusion nonlinéaire (1).

Dans [4], E. Fernández-Cara et E. Zuazua ont étudié la contrôlabilité à zéro de systèmes nonlinéaires avec nonlinéarités "explosives". En fait, pour des f satisfaisant

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s \log^{\frac{3}{2}}(1+|s|)} = 0, \tag{2}$$

ils démontrent que le système

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = v1_O & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \ \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \ \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

est contrôlable à zéro.

Trés récemment et comme application du travail [5], A. Doubova et al. ont étendu dans [7] ce résultat à des nonlinéarités qui dépendent de l'état et du gradient de l'état. Ils ont déduit la contrôlabilité à zéro du système

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + F(y, \nabla y) = v1_O & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \ \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \ \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

pourvu que la dérivée de $F(s;p)$ par rapport à la premiére variable (resp. aux N dernières variables) soit strictement majoré à l'infini par $\log^{\frac{3}{2}}(1+|s|+|p|)$ (resp. $\log^{\frac{1}{2}}(1+|s|+|p|)$).

Ensuite, la contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de type Fourier (ou Robin) a été étudiée pour la première fois dans [15] où les auteurs ont résolu la contrôlabilité à zéro du système

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = v1_O & \text{dans } \ Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + \beta y = 0 & \text{sur } \ \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

pour des coéfficients $\beta \in C^1(\overline{\Sigma})$.

Nous donnons maintenant un aperçu du contenu des chapitres.

Le premier chapitre concerne quelques rappels sur l'optimisation convexe, problème d'évolution parabolique et les théorèmes des points fixes.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la contrôlabilité à zéro de l'équation linéaire de la chaleur.

Enfin, le troisième chapitre est consacré à l'étude de la contrôlabilité à zéro du système réaction-diffusion linéaire et semi-linéaire avec condition au bord de type Dirichlet et la contrôlabilité à zéro du système réaction-diffusion linéaire avec condition au bord de type Fourier, ainsi, la controlabilité exacte aux trajectoires du système réaction-diffusion semi-linéaire avec condition au bord de type Fourier.

Chapitre 1

Quelques rappels

1.1 Rappel d'optimisation convexe :

1.1.1 Quelques définitions

Donnons d'bord les définitions de fonctions convexes et de fonctions semi-continues inférieurement.

Définition 1.1.1 ***(Fonction convexe)***
Soit $J: K \subset X \to \mathbb{R}$, *où* X *est un espace vectoriel*
J *est dite convexe, si* K *est convexe et si :*
$\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1]: \ J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y)$
Elle est dite strictement convexe si K *est convexe et si :*
$\forall x, y \in K$ *et* $x \neq y$ $\forall t \in]0,1[: \ J(tx + (1-t)y) < tJ(x) + (1-t)J(y)$.

Définition 1.1.2 ***(Fonction semi-continue inférieurement)***
Soit X *un espace topologique et* $J: X \to]-\infty, +\infty]$
J *est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si :*
$\forall x \in X$ *et* $\forall \epsilon > 0, \exists V$, *voisinage de* x *tels que :*
$\forall y \in V, \qquad J(x) - \epsilon \leq J(y)$
On a : J *(s.c.i) au point* $a \Longleftrightarrow J(a) = \liminf_{x \to a} J(x)$.

On a l'équivalence entre :
- J *est (s.c.i)*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} : J(x) \leq \lambda\}$ *est fermé*
- *Epig* $J = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} : J(x) \leq \lambda\}$ *est fermé*
- *si* $x_n \to x$ *alors* $J(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(x_n)$.

Désormais, X sera un espace de Hilbert et X_{ad} est sous ensemble non vide de X.
En théorie du contrôle X_{ad} est l'espace des contrôles admissibles.
J etant une fonctionnelle sur X, on considére le probléme :
Trouver, $x^* \in X_{ad}$ / $J(x^*) = \alpha = \min_{x \in X_{ad}} J(x)$.

Théorème 1.1.1 *Soit* $X_{ad} \subset X$, *fermé, convexe. Si* J *est (s.c.i), convexe et coercive i.e* ($\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$)
alors : $\exists x^* \in X_{ad}$ / $J(x^*) = \alpha = \min_{x \in X_{ad}} J(x)$, *si* J *est strictement convexe alors* x^* *est unique.*

Preuve. Soit (x_n) une suite minimisante de X_{ad} i.e $J(x_n) \to \inf\limits_{x\in X_{ad}} J(x)$.Comme J est coercive, (x_n) est bornée, donc on peut extraire de (x_n) une sous suite (x_μ) telle que : $x_\mu \to \omega$ faiblement, X_{ad} est faiblement fermé, car il est convexe et fermé, donc $\omega \in X_{ad}$

J est faiblement s.c.i car elle est convexe et s.c.i donc :
$\liminf\limits_{\mu\to+\infty} J(x_\mu) \geq J(\omega)$,
d'où $\inf\limits_{x\in X_{ad}} J(x) \geq J(\omega)$, on conclut que $\inf\limits_{x\in X_{ad}} J(x) = J(\omega)$.
L'unicité (dans le cas où J est strictement convexe)
Soit y^*une autre solution, alors on a :
$tx^* + (1-t)y^* \in X_{ad}$, $\forall t \in]0,1[$
$J(tx^* + (1-t)y^*) < tJ(x^*) + (1-t)J(y^*) \leq J(y^*)$
d'où $J(tx^* + (1-t)y^*) < J(y^*)$
c'est absurde, donc $x^* = y^*$ ■

1.1.2 Caractérisation de l'optimum

On suppose que les hypothèses précédentes sont vérifiées et de plus que J est différentiable alors l'unique elément x^*est caractérisé par :

$$J'(x^*)(x - x^*) \geq 0 \qquad \forall x \in X_{ad} \tag{1.1}$$

On a : $J(tx + (1-t)x^*) \geq J(x^*) \qquad \forall t \in [0,1]$
Donc : $\frac{J(x^*+t(x-x^*)-J(x^*)}{t} \geq 0 \qquad \forall t \in]0,1[$
à la limite qand t tend vers zéro on obtient notre inégalité(1.1).
Réciproquement :
Puisque J est convexe on a : $\forall x, y \in X_{ad}$ et $\forall t \in (0,1)$
$J((1-t)y + tx) \leq (1-t)J(y) + tJ(x)$ donc
$\frac{J(y+t(x-y)-J(y)}{t} \leq J(x) - J(y)$
en passant à la limite on obtient
$J'(y)(x-y) \leq J(x) - J(y)$
pour $y = x^*$ on obtient $0 \leq J'(x^*)(x - x^*) \leq J(x) - J(x^*)$.
En particulier si X_{ad} est un sous espace on a : $J'(x^*) = 0$.

1.2 Problèmes d'évolutions paraboliques

1.2.1 Formulation du problème (P)

Données spaciales.

On se donne un couple d'espaces de Hilbert réels V, H séparables; on note :

$$\begin{cases} ((,)) \text{ le produit scalaire, } \|\| \text{ la norme de } V \\ (,) \text{ le produit scalaire, } || \text{ la norme de } H. \end{cases}$$

On suppose que V est dense dans H et l'on identifie H et son dual H'. Si V' désigne le dual de V (de norme $\|\|_*$), on a

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V', \tag{1.2}$$

chaque espace étant dense dans le suivant.
On note $W(V)$ l'espace $W(0,T;V,V') = \{u \in L^2(0,T;V) : u' \in L^2(0,T;V')\}$.

On a

$$W(V) \hookrightarrow C^0([0,T]\,;H) \tag{1.3}$$

La forme bilinéaire $\mathbf{a(t;u,v), t} \in [0,T]$.

Pour chaque $t \in [0,T]$, on se donne une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et l'on fait l'hypothése :

$$\begin{cases} \textit{pour tout } u,v \text{ la } \textit{fonction } t \to a(t;u,v) \textit{ est mesurable et il existe} \\ \textit{une constante } M = M(T) > 0 \textit{ telle que} \\ |a(t;u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \textit{pour tout} \quad u,v \in V. \end{cases} \tag{1.4}$$

Il en résulte que, pour chaque $t \in [0,T]$, la forme bilinéaire $a(t;u,v)$ définit un opérateur $\mathcal{A}(t)$ linéaire continue de $V \to V'$, par

$$\langle \mathcal{A}(t)u, v\rangle_{V',V} = a(t,u,v) \qquad \forall u,v \in V. \tag{1.5}$$

De la séparabilite de l'espace V et de l'hypothèse (1.4), on déduit que l'opérateur $\mathcal{A}(.)$: $t \longrightarrow \mathcal{A}(t)$ est linéaire continu de $L^2(0,T;V)$ dans $L^2(0,T;V')$.

On fait l'hypothèse de coercivité sur V par rapport à H suivante

$$\begin{cases} \textit{il existe } \lambda, \alpha \textit{ constantes, } \alpha > 0 \textit{ telle que} \\ a(t;u,u) + \lambda |u|^2 \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall u \in V. \end{cases} \tag{1.6}$$

Enfin, on désigne par $\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$ l'espace

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = \left\{ \begin{array}{c} u \in V; v \to a(t;u,v) \\ \textit{est continue sur } V \textit{ pour la topologie de } H \end{array} \right\} \tag{1.7}$$

C'est le domaine de $\mathcal{A}(t)$ dans H.

Exemple de formes bilinéaires $\mathbf{a(t;u,v)}$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontiére Γ supposée suffisament régulière.

Exemple 1.2.1 *On prend* $V = H_0^1(\Omega)$; $H = L^2(\Omega)$.

$$a(t;u,v) = a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall u,v \in V. \tag{1.8}$$

Alors, (1.2),....(1.7) ont lieu (avec $\lambda = 0$ dans (1.6)) ;
$u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$ équivalent à

$$u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \tag{1.9}$$

ce qui équivaut aussi à

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{1.10}$$

On note encore $(-\Delta)$ l'opérateur $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V')$.

Exemple 1.2.2 *On prend pour* V *un sous espace fermé de* $H^1(\Omega)$, *avec*

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$.
On pose $Q = \Omega \times]0, T[$ et

$$a(t; u, v) = \sum_{ij=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x,t) uv dx \tag{1.11}$$

avec les hypothèses suivantes :

$$a_{ij}, a_0 \in L^\infty(Q), \; i, j = 1, n, \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \\ \alpha > 0, \qquad \xi_i \in \mathbb{R} \;\; \text{p.p dans } Q. \end{cases} \tag{1.13}$$

Alors, pour λ assez grand et p.p $t \in (0, T)$ on a pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

$$a(t; u, v) + \lambda |u|^2 \geq \alpha \|u\|^2, \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.14}$$

Posons p.p $t \in (0, T)$

$$\mathcal{A}(t)u = -\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + a_0 u \tag{1.15}$$

$u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$ équivaut à

$$\begin{cases} \text{i)} \quad u \in V, \quad \mathcal{A}(t)u \in H = L^2(\Omega) \\ \text{ii)} \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}(t)uv dx = a(t; u, v), \qquad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.16}$$

Pour interpréter (1.16) ii), on peut écrire la formule de Green

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(t)uv dx = -\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_{A(t)}} . v d\sigma + a(t; u, v) \tag{1.17}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial n_{A(t)}} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \tag{1.18}$$

avec $\cos(n, x_i) = i^{éme}$ cosinus directeur de la normale extérieure n à Γ; $d\sigma$ élément d'aire de Γ.

Le probléme exact.

Si X est un espace de Banach, on note $L^p(X)$ l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$.
On se donne dans le cadre (1.2) :

$$u_0 \in H, \qquad f \in L^2(0, T; V'), \tag{1.19}$$

et l'on pose le :
Problème ($\mathcal{P}$).
Trouver u vérifiant

$$u \in W(V), \tag{1.20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(u(.), v) + a(.; u(.), v) = (f(.), v) \\ \text{au sens de } D'(]0, T[) \quad \text{pour tout } v \in V \end{array} \right. \tag{1.21}$$

$$u(0) = u_0 \tag{1.22}$$

i) D'aprés (1.2), la condition (1.22) a un sens.
ii) On note que

$$\frac{d}{dt}(u(.), v) = \left\langle \frac{d}{dt}u(.), v \right\rangle \qquad \forall v \in V \tag{1.23}$$

Reduction préliminaire.
Si l'on pose $u = we^{kt}$, w vérifie

$$(\frac{dw}{dt}(.), v) + a(.; w(.), v) + k(w(.), v) = (e^{-kt}f(.), v) \tag{1.24}$$

$$w(0) = u_0 \tag{1.25}$$

Si bien que quitte à changer u en ue^{kt} et à faire un choix de k, on peut supposer que (1.6) a lieu avec $\lambda = 0$.

Dans la suite, nous ferons donc l'hypothèse :

$$a(t; u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \qquad u \in V. \tag{1.26}$$

Remarquons qu'il est intéressant d"écrire l'équation (1.21) sous la forme vectorielle :

$$\frac{d}{dt}u(.) + \mathcal{A}(.)u(.) = f(.) \qquad \text{au sens de } L^2(V'). \tag{1.27}$$

1.2.2 L'existence et l'unicité de la solution du problème ($\mathcal{P}$).

Théorème 1.2.1 ***(J.L.Lions)***

On suppose V, H donnés vérifiant (1.2) et $a(t; u, v)$ vérifiant (1.4), (1.26), u_0, f donnés vérifiant (1.19), il éxiste une unique solution u du problème ($\mathcal{P}$), telle que

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

Preuve. L'unicité de la solution. Soit u_1, u_2 deux solutions distinctes du problème ($\mathcal{P}$), alors $w = u_1 - u_2$ vérifie $w \in W(V)$ et

$$\left\{ \begin{array}{c} (\frac{dw}{dt}(.), v) + a(.; w(.), v) = 0 \\ w(0) = 0. \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Alors en remplacent v par $w(t)$ dans (1.28) et en intégrant de 0 à t

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \int_0^t a(s; w(s), w(s))ds = 0 \tag{1.29}$$

et comme (1.26) a lieu, on a

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 < 0 \implies w(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T]. \tag{1.30}$$

L'existence de la solution. Comme V est séparable, alors il existe un ensemble dénombrable qui est dense dans V. On peut alors trouver une base $w_1, w_2, ..., w_m, ...$dans V dans le sens suivant :

$\forall m, w_1, w_2, ..., w_m$ sont linéairement indépendants et l'ensemble des combinaisons $\sum_{j\in I}\xi_j w_j$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ et I fini, est dense dans V .

On va définir une solution approchée du problème $(\mathcal{P})$ par

$$u_m(.) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(.)w_i, \tag{1.31}$$

où les g_{im} sont choisis tels que

$$(\frac{d}{dt}u_m(.), w_j) + a(.; u_m(.), w_j) = (f(.), w_j), \quad 1 \le j \le m \ , \tag{1.32}$$

et

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}w_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}w_i \longrightarrow u_0 \ \text{ dans } H \ \text{ quand } m \longrightarrow \infty \tag{1.33}$$

Le système (1.32), (1.33) est un système de m équations différentielles linéaires en $g_{im}(.)$ de la forme

$$\boldsymbol{W}_m\frac{d\boldsymbol{g}_m}{dt} + \boldsymbol{A}_m(.)\boldsymbol{g}_m = \boldsymbol{f}_m, \quad \boldsymbol{g}_m(0) = \{\xi_{im}\}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_m &= (w_i, w_j), \qquad \boldsymbol{A}_m(.) = a(.; w_i, w_j), \\ \boldsymbol{g}_m(.) &= \{g_{im}(.)\}, \quad \boldsymbol{f}_m(.) = \{(f(.), w_j)\}. \end{aligned}$$

Puisque le dét $\boldsymbol{W}_m \neq 0$, le problème (1.32), (1.33) admet une solution unique. On va montrer quand $m \longrightarrow \infty$, $u_m \longrightarrow u$, u étant une solution du problème $(\mathcal{P})$. En multipliant (1.32) par $g_{jm}(.)$ et en sommant sur j , on obtient

$$(\frac{d}{dt}u_m(.), u_m(.)) + a(.; u_m(.), u_m(.)) = (f(.), u_m(.))$$

qui est,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(.)\right|^2 + a(.; u_m(.), u_m(.)) = (f(.), u_m(.))$$

où en utilisant (1.26),

$$\begin{aligned} \left|u_m(T)\right|^2 + 2\alpha\int_0^T \left\|u_m(t)\right\|^2 dt &\le \left|u_{0m}\right|^2 + 2\int_0^T \left|(f(t), u_m(t))\right| dt \\ &\le \left|u_{0m}\right|^2 + 2\int_0^T \left\|f(t)\right\|_{V'} \left\|u_m(t)\right\| dt \\ &\le \left|u_{0m}\right|^2 + \alpha\int_0^T \left\|u_m(t)\right\|^2 dt + \frac{1}{\alpha}\int_0^T \left\|f(t)\right\|_{V'}^2 dt. \end{aligned}$$

Finalement (puisque $\left|u_{0m}\right| \le c\left|u_0\right|$, (1.33)),

$$\int_0^T \left\|u_m(t)\right\|^2 dt \le C\left(\left|u_0\right|^2 + \int_0^T \left\|f(t)\right\|_{V'}^2 dt\right). \tag{1.34}$$

Par conséquent $u_m(.)$ est une suite bornée dans $L^2(0, T; V)$ et on peut extraire une sous suite u_μ telle que

$$u_\mu \longrightarrow z \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; V). \tag{1.35}$$

Soit j fixé arbitrairement et $\mu > j$. Alors (1.32) est valable avec $m = \mu$. En multipliant les deux membres de (1.32) par φ où

$$\varphi \in C^1 [0, T] , \qquad \varphi(T) = 0, \tag{1.36}$$

et on intègre sur $(0, T)$. En posant $\varphi_j = \varphi w_j$, nous avons

$$\int_0^T \left[- \big(u_\mu(t), \varphi_j'(t)\big) + a(t; u_\mu(t), \varphi_j(t))\right] dt = \int_0^T \big(f(t), \varphi_j(t)\big)\, dt + \big(u_{0\mu}, \varphi_j(0)\big) . \tag{1.37}$$

En vertu de (1.35), on peut passer à limite dans (1.37). On obtient alors,

$$\int_0^T \left[- \big(z, \varphi_j'\big) + a(t; z, \varphi_j)\right] dt = \int_0^T \big(f, \varphi_j\big)\, dt + \big(u_0, \varphi_j(0)\big) . \tag{1.38}$$

Mais ce qui précède est vraie pour tout φ vérifiant (1.36). Par conséquent on peut prendre $\varphi \in \mathcal{D}(\,]0, T[)$ et donc (1.38) donne

$$\frac{d}{dt} (z(t), w_j) + a(t; z(t), w_j) = (f(t), w_j) \tag{1.39}$$

où les dérivées sont prises dans $\mathcal{D}'(\,]0, T[)$.

Mais dans (1.39) j est arbitraire et puisque l'ensemble des combinaisons linéaires finies des w_j est dense dans V. On déduit

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}(t)z = f \tag{1.40}$$

dans $\mathcal{D}'(0, T; V')$.

Donc,

$$\frac{dz}{dt} = f - \mathcal{A}(t)z \in L^2(0, T; V')$$

et par conséquent $z \in W(V)$. Cela nous permet d'intégrer par parties en t. Puis en tenant compte de (1.40) on obtient

$$(z(0), w_j)\, \varphi(0) = (u_0, w_j)\, \varphi(0) \qquad \forall j,\ \forall \varphi.$$

Donc, $(z(0), w_j) = (u_0, w_j)$ $\forall j$ et par conséquent on a $z(0) = u_0$. D'où z est une solution du problème $(\mathcal{P})$. On peut alors remplacer (1.35) par

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; V) \tag{1.41}$$

L'estimation (1.34) nous donne

$$\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt \le C \left(|u_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt \right) . \tag{1.42}$$

De plus, puisque $\frac{du}{dt} = f - \mathcal{A}(t)u$, on a avec (1.42) l'estimation

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0,T;V')}^2 \le C' \left(|u_0|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt \right) .$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ∎

Application.

Exemple 1.2.3 $H = L^2(\Omega) \qquad V = H_0^1(\Omega)$

$$a(t;u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$$

On obtient ainsi une solution faible u du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \quad \Omega, \end{cases}$$

tels que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$, où la solution est donnée par

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

avec $S(t)\varphi = \sum_i e^{-\lambda_i t}\left<\varphi_i,\varphi\right>_{L^2(\Omega)}\varphi_i$, où $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions propres correspondante.

Exemple 1.2.4 $H = L^2(\Omega) \qquad V = H_0^1(\Omega)$

$$a(t;u,v) = \sum_{ij=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega a_0(x,t)uvdx$$

avec les hypothèses suivantes :

$$a_{ij}, a_0 \in L^\infty(Q),\ i,j = 1,n,$$

$$\begin{cases} \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \\ \alpha > 0, \qquad \xi_i \in \mathbb{R} \quad p.p \text{ dans } Q. \end{cases}$$

On obtient ainsi une solution faible u du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u = f & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \quad \Omega, \end{cases}$$

telle que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$.

Exemple 1.2.5 $H = L^2(\Omega) \qquad V = H^1(\Omega)$

$$a(t;u,v) = \sum_{ij=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega a_0(x,t)uvdx$$

avec les hypothèses suivantes :

$$a_{ij}, a_0 \in L^\infty(Q),\ i,j = 1,n,$$

$$\begin{cases} \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \\ \alpha > 0, \qquad \xi_i \in \mathbb{R} \quad p.p \text{ dans } Q. \end{cases}$$

On obtient ainsi une solution faible u du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u = f & \textit{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial n_{A(t)}} = \sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i) = 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0 & \textit{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

telle que $u \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,; L^2(\Omega))$.

1.3 Les théorèmes du point fixe

1.3.1 Théorèmes du point fixe classique.

Définition 1.3.1 *Un point x d'un espace X est appelé un point fixe d'une fonction f : $X \to X$, si* $f(x) = x$

Théorème 1.3.1 ***(Théorème du point fixe de Schauder)***
Soit X un espace de Banach, M un sous ensemble convexe non vide de X, et $f : M \to M$ une fonction continue. Si de plus
• M est fermé, borné et f est compacte
où
• M est compacte,
alors f admet un point fixe.

1.3.2 Théorème du point fixe pour les fonctions multivoques.

Définition 1.3.2 ***(Fonction multivoque)***

Pour un ensemble Y, on note par $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties de Y.On appelle une fonction multivoque où multifonction de X dans Y toute fonction F de X dans $P(Y)$. On la note par $F : X \rightrightarrows Y$.

Définition 1.3.3 ***(hemi-continuité d'une fonction multivoque)***

Soient X, Y des espaces de Banach, F une multifonction de X dans Y. On dit que F est hemi-continue superieurement (hemi-continue inférieurement) dans X si pour chaque $y' \in Y'$, l'application univoque $x \longmapsto \sup\limits_{y \in F(x)} \langle y, y' \rangle$ est semi-continue superieurement dans X ('application univoque $x \longmapsto \sup\limits_{y \in F(x)} \langle y, y' \rangle$ est semi-continue inférieurement dans X) réspectivement.

Définition 1.3.4 ***(Point fixe d'une fonction multivoque)***
Un point x de l'espace X est appelé un point fixe d'une multifonction $F : X \rightrightarrows X$, si $x \in F(x)$.

Théorème 1.3.2 ***(Théorème du point fixe de Kakutani)***

Soit X un espace de Banach et F une multifonction de X dans lui même qui satisfait les hypothèses suivantes :

1. $F(x)$ est un ensemble convexe fermé non vide de X pour tout $x \in X$.

2. Il existe un convexe compact non vide $K \subset X$ tels que $F(K) \subset K$.

3. F est hemi-continue superieurement dans X .

Alors F admet un point fixe dans X.

Chapitre 2

Nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur

On considère le cas le plus simple celle de l'équation de la chaleur linéaire avec conditions de Dirichlet au bord et un contrôle distribué :

$$\begin{cases} y_t - \triangle y = v 1_O & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ici Ω est un ouvert borné de classe $C^2, O \subset \Omega$ est un sous ensemble ouvert non vide , 1_O est la fonction caractéristique de O, et T est un temps positif donné.

On suppose que l'état initial y^0est donné dans $L^2(\Omega)$ on éssaye de trouvé un contrôle $v \in L^2(O \times (0,T))$ tels que l'état associé $y = y(t,x)$ possède un comportement désiré au temps $t = T$.

Notre objectif dans cette section est d'analyser la propriété de contrôlabilité à zéro du système (2.1). On dit que le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps T si, pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in L^2(O \times (0,T))$ tel que le système (2.1) admet une solution $y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,; L^2(\Omega))$ qui satisfait

$$y(T) = 0 \ \text{ dans } \Omega. \tag{2.2}$$

Il sera expliqué plus loin que la contrôlabilité à zéro d'un système linéaire parabolique est, grosso modo, l'équivalent de l'observabilité des Etats adjoints associé. Plus précisément, pour chaque $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, nous considérons le système adjoint :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \triangle \varphi = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors le système (2.1) est controlable à zéro avec des contrôles dans $L^2(O \times (0,T))$ si et seulement s'il existe une constante C tels que

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt \qquad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega) \tag{2.4}$$

qui s'appelle l'inégalité d'observabilité.

A l'heure actuel, les outils les plus efficaces pour prouver des inégalités comme (2.4) pour les systèmes paraboliques sont les éstimations globales de Carleman. Elles ont la forme

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho\,|\varphi|^2\,dxdt \leq C\iint_{O\times(0,T)} \rho\,|\varphi|^2\,dxdt \tag{2.5}$$

ou $\rho = \rho(x,t)$ est une fonction continue et strictement positive pour $t \in (0,T)$.

2.1 Nulle contrôlabilité et observabilité.

Prenons à nouveau le cas le pus simple de l'équation de la chaleur linéaire avec conditions aux limites de Dirichlet et de contrôle distribué :

$$\begin{cases} y_t - \triangle y = v1_O & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T), \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times(0,T), \\ y(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Nous supposons que $O \subset\subset \Omega$ est un sous ensemble ouvert non vide (petit) et T un temps positif. Dans ce que suit, $n(x)$ le vecteur normal unitaire exterieur au point $x \in \partial\Omega$.

Nous supposons que l'état initial y^0est donné dans $L^2(\Omega)$, nous essayons de trouver un contrôle $v \in L^2(O\times(0,T)$ tels que l'état $y = y(t,x)$ possède un comportement désiré a l'instant $t = T$.

Rappelons que, dans ces hypothèses, le système (2.6) a une solution unique faible y tels que $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ qui dépend continument de y^0et v.

Notre objectif est de fournir des réponses aux questions suivantes.

Question 1 *La nulle contrôlabilité. Pour chaque y^0 peut-on trouver un contrôle $v \in L^2(O\times(0,T)$ tels que $y(T) = 0$ dans Ω ?*

Cette question sera affirmative dans cette section. Pour terminer nous allons introduire, pour chaque $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, le système adjoint

$$\begin{cases} -\varphi_t - \triangle\varphi = 0 & \text{dans} & Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans} & \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

et nous allons essayer de répondre a la question suivante.

Question 2 *L'inégalité d'observabilité. Pouvons nous trouver une constante $C > 0$ tels que, pour chaque $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, la solution associée à (2.7) satisfait*

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2\,dxdt \quad ? \tag{2.8}$$

Une réponse affirmative a la question 2 implique une réponse affirmative à la question 1.

C'est le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *L'inégalité d'observabilité (2.8) implique la contrôlabilité à zéro de (2.6).*

Preuve. On divise la démonstration en deux étapes. Premièrement on va construire une suite de contrôle $v_\epsilon \in L^2(O \times (0,T))$ avec $\epsilon > 0$ qui prouve la contrôlabilité approchée de (2.6).

Deuxièmement, on passe a la limite quand ϵ tend vers zéro et on conclut.

Etape 1 : Soit $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. On introduit la fonctionnelle J_ϵ avec

$$J_\epsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int \int_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + \epsilon \left\|\varphi^0\right\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

pour chaque $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. Ici φ est la solution de (2.7) associée à l'état initial φ^0. En utilisant (2.8), il n'est pas difficile de vérifie que $J_\epsilon$est strictement convexe, continue, et vérifie l'inégalité $\liminf\limits_{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty} \frac{J_\epsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \epsilon$, en effet, soit $\left\{\varphi_j^0\right\}$ une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty. \tag{2.10}$$

On note par $\left\{\varphi_j\right\}$ la suite correspondante de solution de (2.7). On pose

$$\hat{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}}, \quad \hat{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}}. \tag{2.11}$$

On a $\hat{\varphi}_j$ est solution de (2.7) avec condition initiale normalisée $\hat{\varphi}_j^0$. On a aussi,

$$\frac{J_\epsilon(\varphi_j^0)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}}{2} \int \int_{O\times(0,T)} \left|\hat{\varphi}_j\right|^2 dxdt + \epsilon + (\hat{\varphi}_j(0), y^0)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

On distingue les deux cas suivants :

Cas 1. $\liminf\limits_{j\longrightarrow+\infty} \int \int_{O\times(0,T)} \left|\hat{\varphi}_j\right|^2 dxdt > 0;$

Cas 2. $\liminf\limits_{j\longrightarrow+\infty} \int \int_{O\times(0,T)} \left|\hat{\varphi}_j\right|^2 dxdt = 0.$

Dans le premier cas, due à (2.10), le premier terme dans (2.12) tend vers $+\infty$ tandis que les deux autres restent bornés. On en déduit que

$$\liminf_{j\longrightarrow+\infty} \frac{J_\epsilon(\varphi_j^0)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

Analysons maintenant le deuxième cas. On considère une sous suite (encore notée par l'indice j pour simplifier la notation) telle que

$$\int \int_{O\times(0,T)} \left|\hat{\varphi}_j\right|^2 dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{quand } j \longrightarrow +\infty. \tag{2.13}$$

Par extraction d'une sous suite on peut en déduire que

$$\hat{\varphi}_j^0 \rightharpoonup \hat{\varphi}^0 \ \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) \tag{2.14}$$

Par conséquent

$$\hat{\varphi}_j \rightharpoonup \hat{\varphi} \ \text{ faiblement dans } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{2.15}$$

où $\hat{\varphi}$ est la solution de (2.7) avec condition initiale $\hat{\varphi}^0$. Selon (2.14) on déduit que

$$\hat{\varphi} \equiv 0 \ \text{ dans } O \times (0,T)$$

et, comme une conséquence de (2.5), que $\hat{\varphi}^0 \equiv 0$. Par conséquent, si (2.13) est vérifiée, nécessairement

$$\hat{\varphi}_j^0 \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{2.16}$$

D'où on en déduit que

$$\liminf_{j \longrightarrow +\infty} \frac{J_\epsilon(\varphi_j^0)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \geq \epsilon.$$

Alors J_ϵ possède un minimum unique $\varphi_\epsilon^0 \in L^2(\Omega)$ dont la solution associée est notée par φ_ϵ. Maintenant on va introduire le contrôle $v_\epsilon = \varphi_\epsilon 1_O$, et on note y_ϵ la solution de (2.6) associé à v_ϵ.

Soit y_1l'état final de la solution de (2.6) avec le contrôle nul. On remarque que le cas unique intéressant à étudier s'avère être quand $\|y_1\|_{L^2(\Omega)} > \epsilon$, puisque cela est équivalent à $\varphi_\epsilon^0 \neq 0$. En effet, si $\|y_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$ on a

$$J_\epsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int \int_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + \epsilon \left\|\varphi^0\right\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi^0, y_1)_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, d'où $\varphi_\epsilon^0 = 0$.

Inversement, si $\varphi_\epsilon^0 = 0$ on a $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J_\epsilon(\pm t\varphi^0)}{t} \geq 0$, pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, cela nous donne $\|y_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$.

Sous cette hypothèse, nous pouvons dériver les J_ϵ en φ_ϵ^0 et obtenir une condition nécéssaire pour J_ϵ pour atteindre un minimum au point φ_ϵ^0, cela est équivalent à :

$$\iint_{O\times(0,T)} \varphi_\epsilon \varphi \; dxdt \; + \epsilon(\frac{\varphi_\epsilon^0}{\|\varphi_\epsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0)_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{2.17}$$

pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$.

On utilise ce qui précède et (2.8) pour $\varphi^0 = \varphi_\epsilon^0$, on obtient $\|v_\epsilon\|_{L^2(O\times(0,T))} \leq \sqrt{C} \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}$, où C est la constante d'observabilité du système (2.8) .

Puisque les systèmes (2.6) et (2.7) sont en dualité, alors on a :

$$\iint_{O\times(0,T)} \varphi_\epsilon \varphi \; dxdt \; = (y_\epsilon(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} - (y^0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)} \tag{2.18}$$

qu'on va la combiner avec (2.17), on obtient

$$\|y_\epsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \tag{2.19}$$

Etape 2 : Puisque la suite $\{v_\epsilon\}$ est bornée dans $L^2(O \times (0,T))$, alors elle admet une sous suite qui converge faiblement vers un certain $v \in L^2(O \times (0,T))$. En utilisant l'éstimation parabolique on en déduit que, au moins pour une sous suite,

$$y_\epsilon \rightarrow y \text{ faiblement dans } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1((0,T); H^{-1}(\Omega)), \tag{2.20}$$

ou y est solution de (2.6) avec contrôle v. En particulier, ce qui donne la convergence faible de $\{y_\epsilon\}$ $(t \in [0,T])$ dans $L^2(\Omega)$ donc nous avons $y(T) = 0$. ■

Remarque 2.1.1 *A ce stade, certaines observations doivent être faites :*

1. Nous avons prouvé que (2.8) implique la contrôlabilité à zéro avec un contrôle qui satisfait
$$\|v\|_{L^2(O\times(0,T))} \leq \sqrt{C}\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.21}$$

ou C est la constante d'observabilité.

Inversement, si nous avons la contrôlabilité à zéro avec des contrôles $v \in L^2(O\times(0,T))$ qui satisfont
$$\|v\|_{L^2(O\times(0,T))} \leq \sqrt{C}\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.22}$$

pour une certaine constante $C > 0$, alors (2.8) est vérifié avec la même constante.

En effet, puisque les systèmes (2.1) et (2.3) sont en dualité alors
$$\iint_{O\times(0,T)} v\varphi dxdt = \left\langle \varphi^0, y(T)\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle \varphi(0), y^0\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

d'où on déduit
$$\left|\left\langle \varphi(0), y^0\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \sqrt{C}\left(\iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}$$

2. En raison de la linéarité, la contrôlabilité à zéro de (2.6) est équivalente à la contrôlabilité exacte aux trajectoires (incontrôlées). D'autre part, (2.1) est contrôlable à zéro si et seulement si, pour tout $\bar{y}^0 \in L^2(\Omega)$, on peut trouver un contôle $v \in L^2(O\times(0,T))$ tel que $y(T) = \bar{y}(T)$ dans Ω, où y est la solution de (2.1) associée à v, et $\bar{y}$ satisfait
$$\begin{cases} \bar{y}_t - \triangle\bar{y} = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T), \\ \bar{y} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times(0,T), \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

3. La contrôlabilité de (2.1) par (l'intérieure) implique un résultat de contrôlabilité par le bord pour le système :
$$\begin{cases} y_t - \triangle y = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T), \\ y = v1_\Gamma & \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega\times(0,T), \\ y(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$
où Γ est un ouvert non vide du bord. Pour démontrer cela, on agrandit Ω au voisinage de Γ en un ouvert $\widetilde{\Omega}$. On prend un petit ouvert $\widetilde{O} \subset \widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}$ à partir duquel on peut contrôler la solution $\widetilde{y}$ du problème sur $\widetilde{\Omega}$. La restriction de $\widetilde{y}$ à Ω est alors la solution de (2.24) et la trace de $\widetilde{y}$ sur le bord Γ donne le contrôle cherché.

Dans ce qui suit, pour les raisons indiquées ci-dessus, nous allons nous pencher sur la preuve de (2.8). Cela repose sur d'autres inégalités pour les solutions de (2.7) connues sous le nom d'inégalité globales de Carleman. Notons qu'une inégalité globale de Carleman générale a la forme
$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho^2\,|\varphi|^2\, dxdt \leq C\iint_{O\times(0,T)} \rho^2\,|\varphi|^2\, dxdt \tag{2.25}$$

ou $\rho = \rho(x,t)$ est une fonction poids continue et strictement positive. Pour une fonction ρ qui satisfait $\rho > 0$ dans $\overline{\Omega} \times (0,T)$. Nous serons alors en mesure de déduire (2.25) et ensuite des estimations, comme

$$\int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt \leq C \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt \tag{2.26}$$

Ceci combiné avec les propriétés de dissipation des solutions de (2.7), conduira à (2.8). Plus de détails sont donnés ci-dessous.

2.2 L'inégalité globale de Carleman pour l'équation de la chaleur linéaire et ses conséquences.

Le premier resultat important que l'on montre est une inégalite globale de Carleman pour les solutions faibles des problèmes rétrogrades qui s'ecrivent sous la forme :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \triangle\varphi = f & \text{dans} & Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans} & \Omega, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(Q)$.

La preuve de l'estimation de Carleman pour les équations paraboliques est basée sur la construction de fonctions appropriées dont le gradient est non nul dans le complément de la région d'observation.

Lemme 2.2.1 *Soit ω un ouvert tels que $\omega \subset O$ (ω peut être une petite boule ouverte) alors il existe un $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tels que*

$$\begin{array}{ll} \eta^0(x) > 0 & \forall x \in \Omega \\ \eta^0(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \\ |\nabla\eta^0(x)| \neq 0 & \forall x \in \overline{\Omega - \omega}. \end{array}$$

Preuve. Ω est un ouvert régulier, On peut d'abord choisir une fonction $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$ tels que $\Omega = \{v \in \mathbb{R}^n : \theta(x) > 0\}$ et $\nabla\theta \neq 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega$. Cela peut être fait localement, puis on l'étend globalement en utilisant la partition de l'unité.

D'aprés le théorème de Morse il existe une suite de fonction de Morse θ_k(ie ses gradients s'annulent seulement pour un nombre fini de points) tels que $\theta_k \longrightarrow \theta$ dans $C^2(\overline{\Omega})$. Par ailleurs, on peut prendre $\theta_k > 0$ lorsque $\theta > 0$ sur Ω .

On définit $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla\theta(x) = 0\}$ comme l'ensemble des points critiques de θ. Comme $|\nabla\theta| \neq 0 \ \forall x \in \partial\Omega$, alors il existe un voisinage ouvert V de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$ tels que

$$\forall x \in \overline{V}, \qquad |\nabla\theta(x)| > \delta.$$

Soit $\varphi \in D(V)$ tel que $\varphi(x) = 1 \ \ \forall x \in \partial\Omega$ et $0 \leq \varphi \leq 1$. On pose

$$\mu_k(x) = \theta_k(x) + \varphi(x)(\theta(x) - \theta_k(x)).$$

Alors on a :

$\mu_k(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,\ \mu_k(x) > 0 \ \ \forall \in \Omega$ et en plus

$$\forall x \in \overline{\Omega - V} \ \ ; \ \nabla \mu_k(x) = \nabla \theta_k(x).$$

Maintenant si $x \in \Omega \cap V$, on a

$$\nabla \mu_k(x) = \nabla \theta_k(x) + \varphi(x)(\nabla \theta(x) - \nabla \theta_k(x)) + \nabla \varphi(x)(\theta(x) - \theta_k(x))$$

De sorte que pour $k \geq k_0$; avec k_0 suffisement grand on a :

$$\begin{aligned} |\nabla \mu_k(x)| &\geq |\nabla \theta_k(x)| - 2 \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|\theta - \theta_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \\ &\geq \delta - 2 \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|\theta - \theta_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \geq \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant on va choisir un certain $k \geq k_0$ et on pose $\mu(x) = \mu_k(x)$. Alors μ est une fonction de Morse car les points ou le gradient s'annule sont parmi les points où $\nabla\theta_k$ s'annule. De plus, on a $\mu(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega$.

Soit maintenant $x_1, x_2, ..., x_n$ les points critiques de μ. Alors pour tout $i = 1, ..., r$ on a $x_i \in \Omega - \overline{V}$. On peut trouver r chemins réguliers disjoints l_1 , l_2 ...., l_r tels que pour tout
$i = 1, .., r,$

$$\begin{aligned} l_i &\in C^\infty([0,1]\,;\mathbb{R}^n) \\ l_i(t) &\in \Omega - \overline{V} \quad \forall t \in [0,1] \\ l_i(t_1) &\neq l_i(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in [0,1] \quad t_1 \neq t_2 \\ l_i(1) &= x_i \ \ et l_i(0) \in \omega_0 \ \ ; \quad \forall s,t \in [0,1] \ ; l_i(s) \neq l_j(t) \ \ ou \quad i \neq j \end{aligned}$$

et on peut trouver r fonctions $f_1, f_2, ..., f_r$ telles que pour tout $i = 1, ..., r$

$$\begin{aligned} f_i &\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \\ \frac{dl_i}{dt}(t) &= f_i(l_i(t)) \ ,\forall t \in]0,1[\,. \end{aligned}$$

Maintenant pour tout $i = 1, ..., r$ on peut trouver des voisinages ouverts W_i des ensembles$\{l_i(t)\ ; t \in [0,1]\}$
tels que

$$W_i \subset \Omega - \overline{V}\, et\ W_i \cap W_j = \varnothing \quad \text{si} \ \ i \neq j\ .$$

Alors on peut prendre les fonctions $e_i \in D(W_i)$ tels que $e_i(l_i(t)) = 1\ ;\ \forall t \in [0,1]$
et on pose

$$g_i(x) = e_i(x) f_i(x).$$

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = g_i(x(t)) \quad ; \quad \forall t \in]0,1[\\ x(0) = x \end{cases}$$

On note par $S_t^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'opérateur qui fait correspondre à x le point $x(t)$. Alors on a :

$$S_1^i(l_i(0)) = x_i, \ \ i = 1, ..., r$$

on définit maintenant

$$S(x) = S_1^1 \circ \; S_1^2 \circ ..... \circ \; S_1^r(x)$$

on peut voir que si $x \in \Omega - (\cup_{i=1}^{i=r} W_i)$ alors $S(x) = x$ et donc

$$\forall x \in V \;, \quad S(x) = x.$$

d'autre part, chaque S_1^i est un difféomorphisme de Ω dans lui même ainsi S et ∇S sont inversibles.

On pose maintenant

$$\eta^0(x) = \mu(S(x)).$$

Alors on a $\eta^0(x) = 0$; $\forall x \in \partial\Omega$. En plus comme ∇S est inversible, si $\nabla\eta^0(x) = 0$, cela signifie que $S(x) \in \{x_1, x_2, ..., x_r\}$. Mais on sait que $S_1^i = I_d$ sur $\Omega - W_j$ afin que

$$S(l_i(0)) = S_1^i(l_i(0)) = x.$$

Comme S est un difféomorphisme, on voit que :

$$S(x) \in \{x_1, x_2, ..., x_r\} \Longrightarrow x \in \{l_1(0), l_2(0), ...l_r(0)\} \Longrightarrow x \in \omega$$

et par conséquent

$$\nabla\eta^0(x) = 0 \Rightarrow x \in \omega,$$

et enfin η^0satisfait toute les conditions du lemme. Ceci achève la preuve du lemme 2.2.1. ■

2.2.1 Inégalité globale de Carleman.

Nous allons maintenant utiliser la fonction donnée par le lemme 2.2.1 pour construire des fonctions de poids. Soit ω un ouvert non vide tels que $\omega \subset\subset O$. On pose

$$\begin{aligned} \alpha(x,t) &= \frac{e^{2\lambda m \left\|\eta^0\right\|_\infty} - e^{\lambda(m\left\|\eta^0\right\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)} \\ \xi(x,t) &= \frac{e^{\lambda(m\left\|\eta^0\right\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)} \end{aligned} \tag{2.27}$$

pour $(x,t) \in Q$, où η_0 donnée par le lemme 2.2.1 pour cet ω et $m > 1$.

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cette section.

Lemme 2.2.2 *Il existe trois constantes $\lambda_1 = C(\Omega, O) \geq 1$, $s_1 = C(\Omega, O)(T + T^2)$, et $C_1(\Omega, O)$ tels que pour tout $\lambda > \lambda_1$ et tout $s > s_1$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} & s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2) dxdt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla q\right|^2 dxdt \\ & + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|q\right|^2 dxdt \\ \leq \; & C_1 \left(\iint_Q e^{-2s\alpha} \left|q_t + \Delta q\right|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|q\right|^2 dxdt \right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

pour tout $q \in C^2(\overline{Q})$ avec $q = 0$ sur Σ .

Dans ce qui suit, $C(\Omega, O)$ ou simplement C designera une constante qui dépendra seulement de Ω et O.

Avant de donner la preuve du lemme 2.2.2, nous déduisons l'inégalité d'observabilité (2.4) (et, en conséquence, la controlabilté à zéro de (2.1)). Ceci peut être faite en trois étapes.

Etape 1 Par densité des fonctions régulières dans l'espace des solutions de (2.7) avec $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, nous allons d'abord observé que l'inégalité de Carleman ci-dessus est vérifiée par ces fonctions.

Ainsi, en fixant $\lambda = \lambda_1$, nous obtenons

$$\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \, dxdt \leq C \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \, dxdt \tag{2.29}$$

pour tout $s \geq s_1$.

Etape 2 En utilisant les inégalités

$$e^{-2s_1\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \geq e^{-2C(\Omega,O)(1+\frac{1}{T})} \frac{1}{T^6} \qquad \text{dans } \Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}) \tag{2.30}$$

et

$$e^{-2s_1\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \leq e^{-C(\Omega,O)(1+\frac{1}{T})} \frac{1}{T^6} \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{2.31}$$

Nous obtenons

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt \leq C \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt \tag{2.32}$$

avec une constante $C(\Omega, O, T)$ de la forme $e^{C(\Omega,O)(1+\frac{1}{T})}$.

Etape 3. A partir de l'équation verifie par φ on obtient

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.33}$$

pour tout $t \in (0,T)$. En intégrant dans l'intervalle $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$, on obtient l'inégalité suivante

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{T} \iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt$$

Ceci, combiné avec (2.32), donne l'inégalité d'observabilité (2.8).

Compte tenu du théorème 2.1.1, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *Le système (2.6) est controlable à zéro avec un contrôle $v \in L^2(O \times (0,T))$ qui vérifie*

$$\|v\|_{L^2(O\times(0,T))} \leq C \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.34}$$

où la constante C est de la forme $e^{C(\Omega,O)(1+\frac{1}{T})}$.

Remarque 2.2.1 *le coût du contrôle de la chaleur explose quand le temps tend vers 0, ce qu'on retrouve dans la forme de la constante C donnée dans le théorème 2.2.1.*

Preuve. (lemme 2.2.2) On va diviser la preuve en trois étapes.

Etape 1. Etablissement d'une inégalité pour une fonction auxiliaire. Dans cette étape, on obtient une équation différentielle qui est satisfaite par une nouvelle fonction ψ.

Ainsi, on va introduire les nouvelles fonctions $\psi = e^{-s\alpha}q$ et $g = e^{-s\alpha}f$, où on note $f = q_t + \Delta q$.

On a :

$\nabla\alpha = -\nabla\xi = -\lambda\nabla\eta^0\xi$

$\Delta\alpha = -\lambda\Delta\eta^0\xi - \lambda^2 \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi$

$\nabla\psi = (s\lambda\nabla\eta^0\xi q + \nabla q)e^{-s\alpha}$

$\Delta\psi = (s\lambda\xi\Delta\eta^0 q + s\lambda^2 \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi q + 2s\lambda\xi\nabla\eta^0.\nabla q + \Delta q + s^2\lambda^2\xi^2 \left|\nabla\eta^0\right|^2 q)e^{-s\alpha}$

$\psi_t = (-s\alpha_t q + q_t)e^{-s\alpha}$

Puis on obtient facilement que

$$M_1\psi + M_2\psi = g_{s,\lambda} \tag{2.35}$$

où

$$\begin{aligned} M_1\psi &= -2s\lambda^2 \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi\psi - 2s\lambda\xi\nabla\eta^0.\nabla\psi + \psi_t \\ M_2\psi &= s^2\lambda^2 \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi^2\psi + \Delta\psi + s\alpha_t\psi \end{aligned} \tag{2.36}$$

et

$$g_{s,\lambda} = g + s\lambda\Delta\eta^0\xi\psi - s\lambda^2 \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi\psi \tag{2.37}$$

Pour simplifier la notation, on notera $(M_i\psi)_j$ ($1 \le i \le 2$ et $1 \le j \le 3$) le j^{eme} terme de l'expréssion $M_i\psi$ donnée en (2.36).

Avec les notations précédentes, on a de (2.35)

$$\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)} + 2\sum_{i,j=1}^{3}((M_1\psi)_i, (M_2\psi)_j)_{L^2(Q)} = \|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q)} \tag{2.38}$$

Etape 2. Les premières éstimations. Dans cette étape, nous allons développer les neuf termes qui apparaissent dans $((M_1\psi), (M_2\psi))_{L^2(Q)}$. Pour cela, nous intégrons par parties à plusieurs reprises par rapport aux variables d'espace et de temps, donc les dérivées des fonctions poids seront impliquées. En fait nous utilisons les éstimations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_i\alpha &= -\partial_i\xi = -\lambda\partial_i\eta^0\xi \le C\lambda\xi \\ \alpha_t &= \frac{-(T-2t)}{t(T-t)}\alpha \le CT\xi^2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

où C est une constante qui dépend seulement de Ω et O.

La dernière inégalité découle du fait que

$$e^{2\lambda m\left\|\eta^0\right\|_\infty} \le e^{2\lambda(m\left\|\eta^0\right\|_\infty + \eta^0(x))} \tag{2.40}$$

Premièrement, nous avons

$$((M_1\psi)_1,(M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} = -2s^3\lambda^4 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^4 \xi^3 |\psi|^2\, dxdt = A \tag{2.41}$$

et

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= -2s^3\lambda^3 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi^3(\nabla\eta^0.\nabla\psi)\psi dxdt \\ &= 3s^3\lambda^4 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^4 \xi^3 |\psi|^2\, dxdt \\ &\quad + s^3\lambda^3 \iint_Q \Delta\eta^0 \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi^3 |\psi|^2\, dxdt \\ &\quad + 2s^3\lambda^3 \sum_{i,j=1}^{N} \iint_Q \partial_i\eta^0\partial_{ij}\eta^0\partial_j\eta^0\xi^3 |\psi|^2\, dxdt \\ &= B_1 + B_2 + B_3\end{aligned} \tag{2.42}$$

Nous avons clairement que $A + B_1 \geq 0$. D'aprés les propriétés de η^0 on a $|\nabla\eta^0| > 0$ sur $\overline{\Omega - \omega}$, alors il existe une ceraine constante $C > 0$ tels que $|\nabla\eta^0| \geq C$ sur $\overline{\Omega - \omega}$, donc

$$\begin{aligned}A + B_1 &= s^3\lambda^4 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^4 \xi^3 |\psi|^2\, dxdt \\ &\geq Cs^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2\, dxdt - Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3 |\psi|^2\, dxdt \\ &= \widetilde{A} - \widetilde{B}\end{aligned} \tag{2.43}$$

pour une certaine constante $C = C(\Omega, O)$. Les termes B_2, B_3 sont majorées par $\frac{C}{\lambda}s^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2\, dxdt$ car $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ alors pour λ suffisement large, où tout simplement en prenant $\lambda > C$ on a

$$\widetilde{A} + B_2 + B_3 \geq Cs^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2\, dxdt. \tag{2.44}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_3,(M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= s^2\lambda^2 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi^2\psi_t\psi dxdt \\ &= -s^2\lambda^2 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi\xi_t |\psi|^2\, dxdt\end{aligned} \tag{2.45}$$

qui, en vertu de (2.39), est bornée par

$$Cs^2\lambda^2 T \iint_Q \xi^3 |\psi|^2\, dxdt \tag{2.46}$$

ce terme est majoré par

$$Cs^3\lambda^2 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt \tag{2.47}$$

pour $s \geq C(\Omega, O)T$, alors pour $\lambda \geq C(\Omega, T)$ et $s \geq C(\Omega, O)T$, on a

$$\widetilde{A} + B_2 + B_3 + ((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \geq Cs^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt. \tag{2.48}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \\ &\geq Cs^3\lambda^4 \iint_Q \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt - Cs^3\lambda^4 \iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3 |\psi|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{2.49}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} ((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda^2 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi\Delta\psi\psi dxdt \\ &= 2s\lambda^2 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\ &\quad +4s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{N} \iint_Q \partial_i\eta^0\partial_{ij}\eta^0\xi\partial_j\psi\psi dxdt \\ &\quad +2s\lambda^3 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi(\nabla\eta^0.\nabla\psi)\psi dxdt \\ &= C_1 + C_2 + C_3. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Pour C_2 et C_3 nous avons

$$C_2 \leq Cs\lambda^4 \iint_Q \xi \, |\psi|^2 \, dxdt + Cs \iint_Q \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt. \tag{2.51}$$

et

$$C_3 \leq Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2 |\psi|^2 \, dxdt + C\lambda^2 \iint_Q |\nabla\psi|^2 \, dxdt. \tag{2.52}$$

Par conséquent, en prenant $s \geq CT^2$, on trouve que

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &\geq 2s\lambda^2 \iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt \\ &\quad -Cs^2\lambda^4 \iint_Q \xi^2 |\psi|^2 \, dxdt \\ &\quad -C \iint_Q (s\xi + \lambda^2) \, |\nabla\psi|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Nous avons aussi

$$
\begin{aligned}
((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda\iint_Q \xi(\nabla\eta^0.\nabla\psi)\Delta\psi dxdt \\
&= -2s\lambda\iint_\Sigma \frac{\partial\eta^0}{\partial n}\xi\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt \\
&\quad +2s\lambda\sum_{ij=1}^{N}\iint_Q \partial_{ij}\eta^0\xi\partial_i\psi\partial_j\psi dxdt \qquad (2.54)\\
&\quad +2s\lambda^2\iint_Q \xi\left|\nabla\eta^0.\nabla\psi\right|^2 dxdt \\
&\quad +s\lambda\iint_Q \xi\nabla\eta^0.\nabla\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt \\
&= D_1+D_2+D_3+D_4.
\end{aligned}
$$

Notons que D_3 est un terme positif. Par ailleurs,

$$
D_2 \leq Cs\lambda\iint_Q \xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt. \qquad (2.55)
$$

En vertu des propriétés satisfaites par η^0et ψ on a $\partial\Omega\subset\left\{x\in\overline{\Omega}:\eta^0(x)=0\right\}$ et $\partial\Omega\subset\left\{x\in\overline{\Omega}:\psi(x,t)=0\ \ \forall t\in(0,T)\right\}$, alors on a $\nabla\eta^0=\frac{\partial\eta^0}{\partial n}n$, $\frac{\partial\eta^0}{\partial n}\leq 0$ sur $\partial\Omega$
et $\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial n}n$ sur Σ.
Aprés certains calculs, nous voyons aussi que

$$
\begin{aligned}
D_4 &= s\lambda\iint_Q \xi\nabla\eta^0.\nabla\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt \\
&= s\lambda\iint_\Sigma \frac{\partial\eta^0}{\partial n}\xi\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 d\sigma dt \\
&\quad -s\lambda^2\iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt \qquad (2.56)\\
&\quad -s\lambda\iint_Q \Delta\eta^0\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt \\
&= D_{41}+D_{42}+D_{43}.
\end{aligned}
$$

On remarque que $D_1+D_{41}\geq 0$ et D_{43} peut être borné de la même manière que D_2.
Et par conséquent,

$$
\begin{aligned}
D_1+D_2+D_3+D_4 &\geq -s\lambda^2\iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt \qquad (2.57)\\
&\quad -Cs\lambda\iint_Q \xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

En outre, on a que

$$((M_1\psi)_3,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} = \iint_Q \psi_t \Delta\psi dxdt = 0. \tag{2.58}$$

De (2.53)-(2.58), on déduit que

$$\begin{aligned}(M_1\psi,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= ((M_1\psi)_1+(M_1\psi)_2+(M_1\psi)_3,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} \\ &\geq s\lambda^2\iint_Q \left|\nabla\eta^0\right|^2 \xi \left|\nabla\psi\right|^2 dxdt - Cs^2\lambda^4\iint_Q \xi^2 \left|\psi\right|^2 dxdt \\ &\quad -C\iint_Q (s\lambda\xi+\lambda^2)\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt\end{aligned} \tag{2.59}$$

pour $\lambda \geq 1$ et $s \geq CT^2$.
Ainsi, on a pour $\lambda \geq C(\Omega,O)$ et $s \geq C(\Omega,O)T^2$:

$$\begin{aligned}&(M_1\psi,(M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} \geq Cs\lambda^2\iint_Q \xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt - Cs^2\lambda^4\iint_Q \xi^2\left|\psi\right|^2 dxdt \\ &-Cs\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} \xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.60}$$

On considère maintenant le produit scalaire

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_1,(M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= -2s^2\lambda^2\iint_Q \alpha_t\left|\nabla\eta^0\right|^2\xi\left|\psi\right|^2 dxdt \\ &\leq Cs^2\lambda^2T\iint_Q \xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Ce dernier terme est absorbé par $\tilde{A}$ si on prend $\lambda \geq 1$ et $s \geq CT$.

De plus,

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= -2s^2\lambda\iint_Q \alpha_t\xi(\nabla\eta^0.\nabla\psi)\psi dxdt \\ &= s^2\lambda^2\iint_Q \alpha_t\left|\nabla\eta^0\right|^2\xi\left|\psi\right|^2 dxdt \\ &\quad +s^2\lambda\iint_Q \nabla\alpha_t.\nabla\eta^0\xi\left|\psi\right|^2 dxdt \\ &\quad +s^2\lambda\iint_Q \alpha_t\Delta\eta^0\xi\left|\psi\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.62}$$

A partir de (2.27), on peut vérifier que les trois précédents termes peuvent être bornés par (si $\lambda \geq 1$)

$$Cs^2\lambda^2T\iint_Q \xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt. \tag{2.63}$$

Donc, on a

$$((M_1\psi)_2,(M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \geq -Cs^2\lambda^2T\iint_Q \xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt. \tag{2.64}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}((M_1\psi)_3,(M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= s\iint_Q \alpha_t\psi_t\psi dxdt \qquad (2.65)\\ &= -\frac{1}{2}s\iint_Q \alpha_{tt}\left|\psi\right|^2 dxdt \leq CsT^2\iint_Q \xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Puisque,

$$\alpha_{tt} \leq C\xi^2(1+T^2\xi) \leq CT^2\xi^3. \tag{2.66}$$

De (2.61)-(2.65), on déduit pour $\lambda \geq C(\Omega, O)$ et $s \geq C(\Omega, O)T$ que

$$\begin{aligned}(M_1\psi,(M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= ((M_1\psi)_1+(M_1\psi)_2+(M_1\psi)_3,(M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \qquad (2.67)\\ &\geq -Cs^3\lambda^2\iint_Q \xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Prenant en compte (2.49),(2.60), et (2.67), on obtient

$$\begin{aligned}(M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(Q)} \geq\ & C\iint_Q (s\lambda^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2+s^3\lambda^4\xi^3\left|\psi\right|^2)dxdt \qquad (2.68)\\ &-C\iint_{\omega\times(0,T)}(s\lambda^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2+s^3\lambda^4\xi^3\left|\psi\right|^2)dxdt.\end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \geq C(\Omega, O)$ et $s \geq C(\Omega, O)(T+T^2)$.En utilisant (2.38), ce qui donne

$$\begin{aligned}&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)}+\iint_Q (s\lambda^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2+s^3\lambda^4\xi^3\left|\psi\right|^2)dxdt\\ \leq\ & C\left(\|g_{s,\lambda}\|^2_{L^2(Q)}+\iint_{\omega\times(0,T)}(s\lambda^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2+s^3\lambda^4\xi^3\left|\psi\right|^2)dxdt\right) \qquad (2.69)\\ \leq\ & C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|f\right|^2 dxdt+s^2\lambda^4\iint_Q \xi^2\left|\psi\right|^2 dxdt\right.\\ &\left.+s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt+s^3\lambda^4\iint_{\omega\times(0,T)}\xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt\right).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}&\|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)}+\iint_Q (s\lambda^2\xi\left|\nabla\psi\right|^2+s^3\lambda^4\xi^3\left|\psi\right|^2)dxdt\\ \leq\ & C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|f\right|^2 dxdt+s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)}\xi\left|\nabla\psi\right|^2 dxdt\right. \qquad (2.70)\\ &\left.+s^3\lambda^4\iint_{\omega\times(0,T)}\xi^3\left|\psi\right|^2 dxdt\right)\end{aligned}$$

pour $\lambda \geq C(\Omega, O)$ et $s \geq C(\Omega, O)(T + T^2)$.

Etape 3. Les éstimations indirectes et la conclusion.

L'étape finale consistera à ajouter des intégrales de $|\Delta\psi|^2$et $|\psi|^2$ sur le côté gauche de (2.70). Ceci, peut être fait en utilisant les expréssions des $M_i\psi$ $(i = 1, 2)$.

En effet, à partir de (2.36) et de l'inégalité $\xi^{-1} \leq CT^2$, nous avons

$$\begin{aligned} s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt &\leq C\left(s\lambda^2\iint_Q \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt\right. \\ &\left.+s\lambda^4\iint_Q \xi|\psi|^2\,dxdt + \|M_1\psi\|^2_{L^2(Q)}\right) \end{aligned} \tag{2.71}$$

et

$$\begin{aligned} s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt &\leq C\left(s^3\lambda^4\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt\right. \\ &\left.+sT^2\iint_Q \xi^3|\psi|^2\,dxdt + \|M_2\psi\|^2_{L^2(Q)}\right) \end{aligned} \tag{2.72}$$

pour $s \geq CT^2$. En conséquence, on déduit de (2.69) que

$$\begin{aligned} &\iint_Q (s^{-1}\xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2) + s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)dxdt \\ \leq\ &C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dxdt + s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt\right. \\ &\left.+s^3\lambda^4\iint_{\omega\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt\right). \end{aligned} \tag{2.73}$$

pour tout $\lambda \geq C(\Omega, O)$ et $s \geq C(\Omega, O)(T + T^2)$.

Maintenant on va éliminer la deuxième intégrale du second membre. A cet effet on introduit une fonction $\theta = \theta(x)$, avec

$$\theta \in C_c^2(O), \quad \theta = 1 \ \text{ dans } \ \omega, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tag{2.74}$$

on a

$$\begin{aligned} s\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} \xi|\nabla\psi|^2\,dxdt &\leq s\lambda^2\iint_{O\times(0,T)} \theta\xi|\nabla\psi|^2\,dxdt \\ &= -s\lambda^2\iint_{O\times(0,T)} \theta\xi\Delta\psi\psi dxdt \\ &\quad -s\lambda^2\iint_{O\times(0,T)} \xi(\nabla\theta.\nabla\psi)\psi dxdt \\ &\quad -s\lambda^3\iint_{O\times(0,T)} \theta\xi(\nabla\eta^0.\nabla\psi)\psi dxdt \\ &\leq \epsilon s^{-1}\iint_{O\times(0,T)} \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt \\ &\quad +C\left(s^3\lambda^4\iint_{O\times(0,T)} \xi^3|\psi|^2\,dxdt + s\lambda^4\iint_{O\times(0,T)} \xi|\psi|^2\,dxdt\right) \end{aligned} \tag{2.75}$$

pour une constante ϵ assez petite $\epsilon = \epsilon(\Omega, O)$ et où nous avons utilisé le fait que $\lambda \geq 1$. Ainsi, nous pouvons éliminer l'intégrale de $|\nabla\psi|^2$ du second membre de (2.73), le prix à payer étant l'ajout du terme en $|\psi|^2$au second membre sur $O \times (0, T)$.

De (2.73) et cette remarque, nous déduisons

$$\begin{aligned} & \iint_Q (s^{-1}\xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2) + s\lambda^2\xi\,|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3\,|\psi|^2)dxdt \\ \leq \;& C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\,|f|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_{O\times(0,T)}\xi^3\,|\psi|^2\,dxdt\right) \end{aligned} \tag{2.76}$$

pour $\lambda \geq C(\Omega, O)$ et $s \geq C(\Omega, O)(T + T^2)$.

Finalement on va revenir de nouveau à notre fonction d'origine, qui a été donnée par $q = e^{s\alpha}\psi$. Pour l'instant, on a

$$\begin{aligned} & s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}\,|\psi_t|^2\,dxdt + s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}\,|\Delta\psi|^2\,dxdt \\ & +s\lambda^2\iint_Q \xi\,|\nabla\psi|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt \\ \leq \;& C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\,|f|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

En utilisant que

$$\nabla q = e^{s\alpha}(\nabla\psi - s\lambda\nabla\eta^0\xi\psi), \tag{2.78}$$

on trouve

$$\begin{aligned} s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla q|^2\,dxdt \;\leq\; & Cs\lambda^2\iint_Q \xi\,|\nabla\psi|^2\,dxdt \\ & +Cs^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Par conséquent, on peut ajouter l'intégrale précédent de $|\nabla q|^2$ au premier membre de (2.77) :

$$\begin{aligned} & s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}\,|\psi_t|^2\,dxdt + s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}\,|\Delta\psi|^2\,dxdt \\ & +s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla q|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt \\ \leq \;& C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\,|f|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3\,|q|^2\,dxdt\right) \end{aligned} \tag{2.80}$$

Pour Δq on utilise l'identité suivante

$$\Delta\psi = (s\lambda\xi\Delta\eta^0 q + s\lambda^2\left|\nabla\eta^0\right|^2\xi q + 2s\lambda\xi\nabla\eta^0.\nabla q + \Delta q + s^2\lambda^2\xi^2\left|\nabla\eta^0\right|^2 q)e^{-s\alpha} \tag{2.81}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta q|^2\,dxdt \;\le\; & C(s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt \\ & +s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\,dxdt + s\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\,dxdt \quad (2.82) \\ & +s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt). \end{aligned}$$

Enfin, pour q_t on obtient

$$\begin{aligned} & s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}|q_t|^2\,dxdt \quad (2.83) \\ \le\; & C\left(s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt + sT^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\right), \end{aligned}$$

où nous avons utiliser l'identité $q_t = e^{s\alpha}(\psi_t + s\alpha_t\psi)$. Ainsi, en prenant $\lambda \ge 1$ et $s \ge C(\Omega,T)(T+T^2)$, nous somme en mesure de présenter tout les termes impliquant $|\Delta q|^2$ et $|q_t|^2$ du côté gauche de l'inégalité (2.77), en effet

$$\begin{aligned} & s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|q_t|^2+|\Delta q|^2)dxdt + s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt \\ \le\; & C_1\Bigg(s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2\,dxdt + s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\,dxdt + s\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|q|^2\,dxdt \\ & +s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\Bigg) \quad (2.84) \\ & +C_2\left(s^{-1}\iint_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2\,dxdt + sT^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\right) \\ \le\; & C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}|f|^2\,dxdt + s^3\lambda^4\iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2\,dxdt\right). \end{aligned}$$

Cela donne (2.28) et conclut la preuve du lemme. ■

2.3 Nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec un terme d'ordre zéro et un terme de premier ordre sous forme de divergence.

Il y'a beaucoup d'autres systèmes similaires pour lesquelles des propriétés de contrôlabilité à zéro peuvent être réalisées comme avant. Nous évoquons certains d'entre eux. Nous allons maintenant essayer d'appliquer l'inégalité de Carleman obtenue dans le paragraphe précédent à d'autres systèmes ou à l'équation de la chaleur avec un terme d'ordre zéro et un terme de premier ordre sous la forme de divergence. Plus precisement, nous voudrions prouver la contrôlabilité à zéro du système

$$\begin{cases} y_t - \triangle y + \nabla.(B(x,t)y) + a(x,t)y = v1_O & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.85)$$

où $y^0 \in L^2(\Omega)$, $a \in L^\infty(Q)$, et $B \in L^\infty(Q)^N$.
Dans ce cas, le système adjoint est le suivant :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \triangle\varphi - B(x,t).\nabla\varphi + a(x,t)\varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.86}$$

Un résultat similaire au Théorème 2.1.1 est valable pour les systèmes (2.85) et (2.86). En conséquence, ce que nous avons à faire est de prouver une inégalité d'observabilité pour les solutions de (2.86).

Dans ce cas, le lemme 2.2.2 présente une première éstimation de même type que (2.28) (avec q remplacé par φ), avec deux termes en plus dans le deuxième membre, à savoir,

$$C\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|a\varphi\right|^2 dxdt \quad et \quad C\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|B.\nabla\varphi\right|^2 dxdt. \tag{2.87}$$

En effet,

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|\varphi_t + \Delta\varphi\right|^2 dxdt \\ \leq\ & C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|a\varphi\right|^2 dxdt + \iint_Q e^{-2s\alpha}\left|B.\nabla\varphi\right|^2 dxdt\right), \end{aligned} \tag{2.88}$$

à partir de l'inégalité $\xi^{-1} \leq CT^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_Q e^{-2s\alpha}\left|a\varphi\right|^2 dxdt &\leq C\iint_Q e^{-2s\alpha}(\xi^{-1}\left\|a\right\|_\infty^{\frac{2}{3}})^3\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt \\ &\leq (CT^2\left\|a\right\|_\infty^{\frac{2}{3}})^3\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt \end{aligned} \tag{2.89}$$

et,

$$\begin{aligned} \iint_Q e^{-2s\alpha}\left|B.\nabla\varphi\right|^2 dxdt &\leq C\iint_Q e^{-2s\alpha}(\xi^{-1}\left\|B\right\|_\infty^2)\xi\nabla\varphi^2 dxdt \\ &\leq CT^2\left\|B\right\|_\infty^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\nabla\varphi^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.90}$$

A partir de (2.89) et (2.90), on a pour $s \geq C(\Omega, O)T^2(\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|B\|_\infty^2)$ et $\lambda \geq C(\Omega, O)$

$$\begin{aligned} &C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|a\varphi\right|^2 dxdt + \iint_Q e^{-2s\alpha}\left|B.\nabla\varphi\right|^2 dxdt\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2}s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\nabla\varphi^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Ainsi, en fixant $\lambda = C(\Omega, O)$, nous obtenons

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}\left|\varphi\right|^2 dxdt \leq C\iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}\left|\varphi\right|^2 dxdt \tag{2.92}$$

pour tout $s \geq C(\Omega, O)(T + T^2 + T^2(\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|B\|_\infty^2))$.

En raisonnant comme nous l'avons fait lorsque nous avons prouvé l'inégalité d'observabilité pour les solutions de l'équation (2.3), on trouve

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt \leq C(\Omega, O, T, a, B) \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt, \tag{2.93}$$

avec une constante

$$C(\Omega, O, T, a, B) = e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|_\infty^2)}. \tag{2.94}$$

D'autre part, la dissipativité de φ donne l'inégalité suivante

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2) \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{2.95}$$

d'où, on tire l'inégalité

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{CT(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)} \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{2.96}$$

pour tout $t \in (0, T)$. En intégrant dans l'intervalle $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$ on obtient l'inégalité suivante

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{T} e^{CT(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)} \iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt. \tag{2.97}$$

En combinant (2.93) et (2.97), on obtient

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|_\infty^2+T(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)} \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt \tag{2.98}$$

pour toute solution de (2.86) associée à une donnée finale φ^0. Comme mentionné ci-dessus (voir théorème 2.1.1), ce qui implique la contrôlabilité à zéro de (2.85).

Théorème 2.3.1 *Le système (2.85) est contrôlable à zéro, avec un contrôle v satisfaisant*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, O, T, a, B) \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.99}$$

où

$$C(\Omega, O, T, a, B) = e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|_\infty^2+T(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2))}. \tag{2.100}$$

Chapitre 3

Contrôlabilité de l'équation de réaction-diffusion

3.1 Nulle contrôlabilité de l'équation de réaction-diffusion linéaire avec conditions au bord de type Dirichlet.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer la contrôlabilité à zéro, avec des contrôles distribués, de l'équation de la chaleur linéaire avec des termes d'ordre zéro et des termes du premier ordre et des coéfficients dans $L^\infty(Q)$, i.e,

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B(x,t).\nabla y + a(x,t)y = v1_O & \text{dans} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $y^0 \in L^2(\Omega),\ a \in L^\infty(Q)$, et $B \in L^\infty(Q)^N$. Pour y parvenir, nous allons montrer une inégalité d'observabilité pour le système adjoint

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi - \nabla.(\varphi B(x,t)) + a(x,t)\varphi = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

Plus precisement, nous allons montrer que

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int\int_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt \tag{3.3}$$

$$C = C(\Omega, O, T, a, B) = e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|^2_\infty+T(\|a\|_\infty+\|B\|^2_\infty)).} \tag{3.4}$$

pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ et pour une certaine constante $C = C(\Omega, O, T, a, B)$. A cet effet, nous allons utiliser le lemme suivant qui établit une inégalité de Carleman appropriée.

Lemme 3.1.1 *Il existe $\lambda_2 = C(\Omega, O)$, $s_2 = C(\Omega, O)(T + T^2)$, $C_2 = C_2(\Omega, O)$ tels que , pour tout $\lambda \geq \lambda_2$ et $s \geq s_2$, on a*

$$
\begin{aligned}
& s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla q\right|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|q\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C_2 \left(s^3\lambda^4 \int\int_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|q\right|^2 dxdt \right. \\
& \left. + \iint_Q e^{-2s\alpha} \left|F_0\right|^2 dxdt + s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 \left|F\right|^2 dxdt \right)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

pour toute fonction $q \in C^1(\overline{Q})$ avec $q = 0$ sur Σ et $q_t + \Delta q = F_0 + \nabla.F$, où $F_0 \in L^2(Q)$, $F \in L^2(Q)^N$. Ici, α et ξ sont les fonctions définies, ci-dessus.

Pour l'instant, nous supposons que le lemme 3.1.1 est vrai et en déduire une inégalité d'observabilité de type (3.3) pour les solutions de (3.2).

Fixant $\lambda = \lambda_2$ et en appliquant le lemme 3.1.1 à φ, nous avons

$$
\begin{aligned}
& s \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C_2 \left(s^3 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \right. \\
& \left. + \left\|a\right\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \left|\varphi\right|^2 dxdt + s^2 \left\|B\right\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 \left|\varphi\right|^2 dxdt \right)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

pour tout $s \geq s_2$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \ \leq\ & C_2 \left(s^3 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \right. \\
& + (\left\|a\right\|_\infty^{\frac{2}{3}} T^2)^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \\
& \left. + s^2 \left\|B\right\|_\infty^2 T^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \right)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

pour tout $s \geq s_2$. On a l'inégalité suivante

$$
\begin{aligned}
& C \left((\left\|a\right\|_\infty^{\frac{2}{3}} T^2)^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt + s^2 \left\|B\right\|_\infty^2 T^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \right) \\
\leq\ & \frac{1}{2} s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

pour tout $s \geq s_3 = C(T + T^2 + T^2(\left\|a\right\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \left\|B\right\|_\infty^2)$, et par conséquent, on a

$$
\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \left|\varphi\right|^2 dxdt \leq C \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \left|\varphi\right|^2 dxdt. \tag{3.9}
$$

pour tout $s \geq s_3$. On montre maintenant que

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt \leq e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|_\infty^2)} \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt. \tag{3.10}$$

On a

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leq 2^6 T^{-6} \exp(-CsT^{-2}) \qquad \forall (x,t) \in \overline{Q} \tag{3.11}$$

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq \left(\frac{16}{3}\right)^3 T^{-6} \exp(-CsT^{-2}) \qquad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}) \tag{3.12}$$

quand $s \geq s_3$. Dés maintenant, on fixe s, avec $s = s_3$. En tenant compte (3.11) et (3.12) et revenant à (3.9) on déduit que (3.10) est satisfaite pour toute solution de (3.2).

On montre maintenant que

$$\|\varphi(.,T/4)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{C(\frac{1}{T}+T\|a\|_\infty+T\|B\|_\infty^2)} \iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt. \tag{3.13}$$

En multipliant (3.2) par φ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx = -\int_\Omega \varphi B.\nabla\varphi dx - \int_\Omega a\,|\varphi|^2 \, dx \qquad \forall t \geq 0.$$

Donc,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \leq (2\,\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(2\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)t}\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx\right) \geq 0 \tag{3.14}$$

pour tout $t \geq 0$. En intégrant cette inégalité par rapport au temps dans $\left[\frac{T}{4}, t\right]$, où $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega |\varphi|^2 \, dx &\geq e^{(2\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)(T/4-t)} \int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx \\ &\geq e^{-(\|a\|_\infty+\frac{1}{2}\|B\|_\infty^2)T} \int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx \end{aligned} \right. \tag{3.15}$$

pour tout $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$. En intégrant (3.15) de nouveau par rapport à t, on trouve que

$$\frac{T}{2}\int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx \leq e^{(\|a\|_\infty+\frac{1}{2}\|B\|_\infty^2)T} \iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt, \tag{3.16}$$

d'où on déduit (3.13).

Finalement, on montre que

$$\int_\Omega |\varphi(x,0)|^2 \, dx \leq e^{CT(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)} \int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx. \tag{3.17}$$

Pour prouver (3.17), il suffit d'intégrer (3.14) dans l'intervalle de temps $[0, T/4]$, et on trouve

$$\int_\Omega |\varphi(x,0)|^2 \, dx \leq e^{(2\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2)\frac{T}{4}} \int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx$$

et donc (3.17) a lieu. L'inégalité (3.17), (3.13) et (3.10) mènent à l'inégalité d'observabilité (3.3).

Théorème 3.1.1 *Le système (3.1) est contrôlable à zéro avec un contrôle v satisfaiant*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, O, T, a, B) \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.18}$$

où

$$C(\Omega, O, T, a, B) = e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|_\infty^2+T(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2))}. \tag{3.19}$$

Preuve. (lemme 3.1.1) Soit $q = q(x,t)$ satisfaisant l'hypothèse énoncée ci-dessus et on pose $q_0 = q\,|_{t=T}$. Alors q peut être considérée comme une solution par transposition du système

$$\begin{cases} q_t + \Delta q = F_0 + \nabla.F & \text{dans } Q, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T) = q^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

En d'autres termes, pour chaque $G \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ on doit avoir

$$\int_0^T \langle G(t), q(t)\rangle\, dt = -\int_0^T \langle F_0(t) + \nabla.F(t), z(t)\rangle\, dt + \left(q^0, z(T)\right)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.21}$$

où z est la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = G & \text{dans } Q, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.22}$$

Ici, $\langle ; \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Soit s et λ comme dans le lemme 2.2.2. On introduit le problème d'ordre quatre suivant, qui sera justifié ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p) + s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 q = -s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 p 1_O & \text{dans } Q, \\ p = 0, \quad e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ (e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p)(0) = (e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p)(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ici, on a utilisé les notations $\mathcal{L}q \equiv q_t - \Delta q$, $\quad \mathcal{L}^*q \equiv -q_t - \Delta q$. Le problème (3.23) possède exactement une seule solution (faible) p avec

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}(\xi^{-1}(|p_t|^2 + |\Delta p|^2) + \xi\,|\nabla p|^2 + \xi^3\,|p|^2) dxdt < +\infty. \tag{3.24}$$

En effet, soit P_0 le sous espace vectoriel

$$P_0 = \left\{z \in C^2(\overline{Q}) : z = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma\right\} \tag{3.25}$$

et on pose

$$\begin{cases} \kappa(p,p') = \displaystyle\iint_Q e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p\mathcal{L}^*p' dxdt \\ +s^3\lambda^4 \displaystyle\iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 pp' dxdt \qquad \forall p, p' \in P_0 \end{cases} \tag{3.26}$$

et

$$l(p) = -s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 qpdxdt \qquad \forall p \in P_0. \tag{3.27}$$

Alors $\kappa(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique positive dans P_0.

Soit P le complété de P_0 pour la norme $\|p\|_P = \kappa(p,p)^{\frac{1}{2}}$. Alors P est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\kappa(.,.)$ et, compte tenu de l'inégalité de Carleman (2.28), nous avons que les fonctions de P verifient (3.24). Il est clair aussi à partir de (2.28) que l est une forme linéaire continue sur P :

$$|l(p)| \leq C\left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \|p\|_P \qquad \forall p \in P. \tag{3.28}$$

En conséquence, à partir du lemme de Lax-Milgram, l'équation variationnelle suivante possède exactement une solution $p \in P$:

$$\kappa(p,p') = l(p') \qquad \forall p' \in P. \tag{3.29}$$

Il est facile de voir que l'unique solution de (3.29) est aussi une solution de (3.23) au sens des distributions.

Bien sûr, l'espace P et la fonction p dépendent du choix de s et de λ.

Maintenant, on pose

$$\widehat{z} = -e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^* p, \qquad \widehat{u} = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 p 1_O. \tag{3.30}$$

On voit aisément à partir de (3.23) que $\widehat{z}$ est, avec $\widehat{u}$, une solution au problème de contrôlabilité à zéro suivant :

$$\begin{cases} \widehat{z}_t - \Delta\widehat{z} = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 q \ + \hat{u}1_O & \text{dans } Q, \\ \widehat{z} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \widehat{z}(0) = \widehat{z}(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.31}$$

Pour le moment, on supposera qu'il existe deux nombres positifs $\widetilde{s} = \widetilde{s}(\Omega, O)$ et $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\Omega, O)$, tels que

$$\begin{aligned} &s^{-3}\lambda^{-4}\iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\widehat{u}|^2 dxdt + \iint_Q e^{2s\alpha}|\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla\widehat{z}|^2 dxdt \\ \leq \ & Cs^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 dxdt \end{aligned} \tag{3.32}$$

pour tout $s \geq \widetilde{s}(T+T^2)$ et $\lambda \geq \widetilde{\lambda}$.

Maintenant, on va montrer l'inégalité (3.5). Tout d'abord, on va obtenir une éstimation du deuxième terme du premier membre de l'inégalité (3.5). Compte tenu de (3.21) on prend $G = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 q + \widehat{u}1_O$, on a

$$s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 dxdt = -\iint_{O\times(0,T)} q\widehat{u}dxdt + \int_0^T \langle F_0(t) + \nabla.F(t), \widehat{z}(t)\rangle\, dt. \tag{3.33}$$

par conséquent,

$$
\begin{aligned}
& s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 \, dxdt \\
\leq \; & \left(s^3\lambda^4 \int\int_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(s^{-3}\lambda^{-4} \iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3} |\widehat{u}|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.34) \\
& + \left(s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 |F|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2} |\nabla\widehat{z}|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité $ab \leq \epsilon a^2 + C_\epsilon b^2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 \, dxdt \\
\leq \; & C\left(s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 \, dxdt + \iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 \, dxdt\right. \\
& \left. + s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 |F|^2 \, dxdt\right) \qquad (3.35) \\
& + \epsilon\left(s^{-3}\lambda^{-4} \iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3} |\widehat{u}|^2 \, dxdt + \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 \, dxdt\right. \\
& \left. + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2} |\nabla\widehat{z}|^2 \, dxdt\right).
\end{aligned}
$$

Pour ϵ assez petit et en utilisant (3.32), on aura l'inégalité

$$
\begin{aligned}
s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 \, dxdt \; \leq \; & C\left(s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2 \, dxdt\right. \qquad (3.36) \\
& \left. + \iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 \, dxdt + s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 |F|^2 \, dxdt\right)
\end{aligned}
$$

pour $s \geq \widetilde{s}(T+T^2)$ et $\lambda \geq \widetilde{\lambda}$.

Passons maintenant à l'éstimation du premier terme du premier membre de (3.20). A cet effet, on multiplie l'équation (3.20) par $s\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi q$ et on intègre dans l'espace et dans le temps. Cela donne

$$
\begin{aligned}
& s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi |\nabla q|^2 \, dxdt + s\frac{\lambda^2}{2} \iint_Q ((e^{-2s\alpha}\xi)_t - \Delta(e^{-2s\alpha}\xi)) |q|^2 \, dxdt \qquad (3.37) \\
= \; & s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}(\xi F_0 q - \xi F.\nabla q) dxdt - s\lambda^2 \iint_Q F.\nabla(e^{-2s\alpha}\xi) q dxdt \, .
\end{aligned}
$$

Ensuite, on utilise les éstimations

$$
\begin{aligned}
\left|(e^{-2s\alpha}\xi)_t\right| \; & \leq \; Ce^{-2s\alpha}(sT\xi^3 + T\xi^2) \leq Cs^2 e^{-2s\alpha}\xi^3 \qquad (3.38) \\
\left|\Delta e^{-2s\alpha}\xi\right| \; & \leq \; Cs^2\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi^3
\end{aligned}
$$

pour $s \geq C(T+T^2)$, alors on a

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \left| \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi F_0 q dxdt \right| &\leq C \left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dxdt \right. \\ &\left. + s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} |F_0|^2 dxdt \right), \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \left| \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi F.\nabla q dxdt \right| &\leq Cs\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |F|^2 dxdt \\ &+ \frac{1}{2} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \left| \iint_Q F.\nabla(e^{-2s\alpha}\xi) q dxdt \right| &\leq C \left(s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |F|^2 dxdt \right. \\ &\left. + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dxdt \right), \end{aligned} \tag{3.41}$$

et

$$s\frac{\lambda^2}{2} \left| \iint_Q ((e^{-2s\alpha}\xi)_t - \Delta(e^{-2s\alpha}\xi)) |q|^2 dxdt \right| \leq C \left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dxdt \right). \tag{3.42}$$

A partir de (3.37), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 dxdt &\leq C \left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dxdt \right. \\ &+ \iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 dxdt \\ &\left. + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |F|^2 dxdt \right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Pour $s \geq C(T+T^2)$.
Ceci, combiné avec (3.36), donne (3.5).
Nous allons enfin prouver l'inégalité (3.32).
On commence par multiplier l'équation (3.23) par p, on a donc

$$\kappa(p,p) = -s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 pq dxdt, \tag{3.44}$$

qui, va être combiné avec l'inégalité de Carleman (1.14), on obtient

$$s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |p|^2 dxdt \leq C\kappa(p,p) \tag{3.45}$$

d'où on déduit l'inégalité suivante

$$s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |p|^2\, dxdt \leq Cs^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |q|^2\, dxdt. \tag{3.46}$$

Ce qui donne l'inégalité voulue pour les deux premiers termes du premier membre de (3.32).

Pour estimer le terme du premier ordre de (3.32), on multiplie l'équation (3.31) par $s^{-2}\lambda^{-2}e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{z}$. Ensuite, on intègre par parties par rapport à la variable d'espace et on a

$$\begin{aligned}
& s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{z}\widehat{z}_t dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\nabla\widehat{z}\right|^2 dxdt \\
& -2s^{-1}\lambda^{-1}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}\nabla\eta^0.\nabla\widehat{z}\widehat{z}dxdt \\
& -2s^{-2}\lambda^{-1}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\nabla\eta^0.\nabla\widehat{z}\widehat{z}dxdt \\
= \;& s\lambda^2\iint_Q \xi q\widehat{z}dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{u}\widehat{z}dxdt.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Cette fois, on intègre par parties le premier terme du premier membre de (3.31), par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
& s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{z}\widehat{z}_t dxdt \\
= \;& -\frac{1}{2}s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q (e^{2s\alpha}\xi^{-2})_t\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt \\
\leq \;& Cs^{-1}\lambda^{-2}T\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt \leq C\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.48}$$

pour $s \geq CT$ et $\lambda \geq 1$.

Enfin, on utilise l'inégalité de Young pour les autres termes de (3.47) et on obtient

$$\begin{aligned}
& -2s^{-1}\lambda^{-1}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}\nabla\eta^0.\nabla\widehat{z}\widehat{z}dxdt \\
& -2s^{-2}\lambda^{-1}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\nabla\eta^0.\nabla\widehat{z}\widehat{z}dxdt \\
\leq \;& C\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\nabla\widehat{z}\right|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$s\lambda^2\iint_Q \xi q\widehat{z}dxdt \leq C\left(\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\left|q\right|^2 dxdt\right), \tag{3.50}$$

et

$$\begin{aligned}
& s^{-2}\lambda^{-2}\iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{u}\widehat{z}dxdt \\
\leq \;& C\left(\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-4}\iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}\left|\widehat{u}\right|^2 dxdt\right)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

pour $s \geq CT^2$.

En conclusion, on en déduit (3.32) directement à partir de (3.47). ■

3.2 Nulle contrôlabilité de l'équation de réaction-diffusion semi-linéaire avec conditions au bord de type Dirichlet.

3.2.1 Nulle contrôlabilité de l'équation de la chaleur semi-linéaire avec des non-linéarités dont les termes d'ordre zéro et d'ordre un.

A l'aide du lemme 3.1.1, théorème 3.1.1, et certaines variantes, nous pouvons maintenant montrer la contrôlabilité à zéro à d'autres systèmes paraboliques non linéaires .

On va considèrer le système parabolique de la forme

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y, \nabla y) = v 1_O & \text{dans} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.52}$$

où on suppose que $y^0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega),\ v \in L^\infty(O \times (0,T))$ et

$$f : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

est localement Lipschitzienne .

Notre objectif dans cette section est d'analyser la propriété de contrôlabilité à zéro du système (3.52). On dit que le système (3.52) est contrôlable à zéro au temps T si, pour tout $y^0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, il existe $v \in L^\infty(O \times (0,T))$ tels que le système (3.52) admet une solution $y \in C^0([0,T]\,; L^2(\Omega))$ qui satisfait

$$y(T) = 0 \ \text{ dans } \Omega. \tag{3.53}$$

Remarquons que, sous l'hypothèse ci-dessus, on peut écrire

$$f(s,p) = f(0,0) + g(s,p)s + G(s,p).p \qquad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \tag{3.54}$$

pour certaines fonctions g et G appartenant à L^∞_{loc}. Ce sont respectivement données par

$$g(s,p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(\lambda s, \lambda p) d\lambda, \quad G_i(s,p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(\lambda s, \lambda p) d\lambda \quad \text{pour } 1 \le i \le N.$$

Notre résultat est le suivant :

Théorème 3.2.1 *Supposons que f est localement Lipschitzienne, $f(0,0) = 0$, et*

$$\lim_{|(s,p)| \to \infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1 + |s| + |p|)} = 0 \quad et \quad \lim_{|(s,p)| \to \infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1 + |s| + |p|)} = 0. \tag{3.55}$$

Alors, (3.52) est contrôlable à zéro en tout temps $T > 0$.

La preuve sera donnée un peu plus bas.

Remarque 3.2.1 *Ce résultat généralise au moins deux cas qui ont été étudiés de façon non exhaustive avant. En premier lieu, le cas de la fonction f globalement Lipschitzienne, i.e. lorsque $g \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ et $G \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)^N$. Deuxièmement, le cas où $G \equiv 0$ et $g = g(s)$ avec g satisfait*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|g(s)|}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0$$

Remarque 3.2.2 *Si on suppose que $y^0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, $f(0,0) = 0$, et*

$$f(s,p) = g(s,p)s + G(s,p).p \qquad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

pour certaines fonctions g et G satisfaisant $|g| \leq C$ et $|G| \leq C$, le système (3.52) est contrôlable à zéro avec un contrôle v qui vérifie

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq K \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}$$

où $K = \exp\{C \left(1 + \frac{1}{T} + \|g\|_\infty^{2/3} + T\|g\|_\infty + (1+T)\|G\|_\infty\right)$

3.2.2 Une inégalité d'observabilité affinée.

Pour l'analyse de la contrôlabilité du problème non-linéaire (3.52), on a besoin d'une version affinée de l'inégalité d'observabilité de (3.3) cela sera fourni le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 *Pour tout $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ et $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, alors la solution φ de (3.2) satisfait :*

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp\{CK(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)\} \left(\int\int_{O\times(0,T)} |\varphi|\, dxdt\right)^2 \tag{3.56}$$

où

$$K(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + T + (T + T^{1/2})\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1+T)\|B\|_\infty. \tag{3.57}$$

Preuve. Soit O' un ouvert non vide tel que $O' \subset\subset O$. D'aprés l'inégalité (3.3) appliquée à O' et à l'intervalle de temps $[T/4, 3T/4]$, on déduit que

$$\|\varphi(.,T/4)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{CK'(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)} \int\int_{O'\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2\, dxdt \tag{3.58}$$

où φ est la solution de (3.1) associée à $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, $K'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ est donnée par

$$K'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|B\|_\infty^2 + T(\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)$$

et C est une nouvelle constante ne dépendant que de O'(voir l'inégalité (3.3)). Utilisant (3.14), on obtient

$$\int_\Omega |\varphi(x,0)|^2\, dx \leq e^{(2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)\frac{T}{4}} \int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2\, dx$$

et en combinant ceci avec (3.58), on trouve que

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp\{CK'(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)\} \int\int_{O'\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2\, dxdt\ . \tag{3.59}$$

■

A ce stade, on va utiliser un résultat technique, lié à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur (3.2).

Lemme 3.2.1 *Soient O_i, T_i, r_i et γ_i $(i = 0, 1)$ donnés, avec*

$$\begin{cases} O' \subset O_0 \subset\subset O_1 \subset O, & 0 \leq T_1 < T_0 < T/2, \quad 1 \leq r_1 < r_0 < \infty \\ 1 \leq \gamma_1 < \gamma_0 < \infty, & \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_0} + \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \left(\int_{T_0}^{T-T_0} \left(\int_{O_0} |\varphi|^{r_0}\, dx\right)^{\frac{\gamma_0}{r_0}} dt\right)^{\frac{1}{\gamma_0}} \\ \leq CT^\lambda H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left(\int_{T_1}^{T-T_1} \left(\int_{O_1} |\varphi|^{r_1}\, dx\right)^{\frac{\gamma_1}{r_1}} dt\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \end{cases} \tag{3.60}$$

pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, avec $C = C(\Omega, O_i, \gamma_i, r_i, N)$, $\lambda = \lambda(\gamma_i, r_i, N)$ et

$$H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = 1 + \frac{T^{1/2}}{T_0 - T_1} + T^{1/2}(1 + \|a\|_\infty) + (1 + T^{1/2}) \|B\|_\infty . \tag{3.61}$$

La preuve de ce lemme est donnée dans [7].

On va maintenant appliquer ce lemme avec (3.59). A cet effet, on pose $r_0 = \gamma_0 = 2$ et on introduit les nombres γ_i et r_i données par les égalités

$$\frac{1}{\gamma_i} = \frac{1}{r_i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2(N+2)} \qquad 1 \leq i \leq N+2.$$

On a $\gamma_{N+1}, r_{N+1} > 1$ et $\gamma_{N+2} = r_{N+2} = 1$. Maintenant, on pose $\delta = T/4(N+2)$. Par conséquent,

$$[T/4 - (N+2)\delta, 3T/4 + (N+2)\delta] = [0, T] .$$

On introduit une famille d'ouverts O_i tels que

$$O' = O_0 \subset\subset O_1 \subset\subset O_2 \subset\subset ...... \subset\subset O_{N+1} \subset\subset O_{N+2} = O.$$

Pour $0 \leq i \leq N+1$, on peut utiliser l'inégalité (3.60) avec $O_0, O_1, T_0, T_1, r_0, r_1, \gamma_0$ et γ_1 remplacées respectivement par O_i, O_{i+1},$T/4 - i\delta, T/4 - (i+1)\delta, r_i, r_{i+1}, \gamma_i$ et γ_{i+1}. L'ensemble de ces inégalités donne

$$\left(\iint_{O' \times (T/4, 3T/4)} |\varphi|^2\, dxdt\right)^{1/2} \leq CT^\alpha H(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)^\beta \left(\iint_{O \times (0,T)} |\varphi|\, dxdt\right), \tag{3.62}$$

où $\beta = N + 2$ et α est la somme des λ_i. Si on combine les inégalités (3.59) et (3.62), on obtient (3.56). Ceci achève la preuve du théorème 3.2.2.

3.2.3 un résultat technique.

Avant de donner la preuve du théorème 3.2.1, on va présenter un résultat technique.

On considère le problème linéaire

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B.\nabla y + ay = F & \text{dans} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.63}$$

où y^0 et F sont données, $a \in L^\infty(Q)$, et $B \in L^\infty(Q)^N$. On a le lemme suivant :

Lemme 3.2.2 *Supposons que* $F \in L^q(Q)$ *avec*

$$q > N + 2$$

$y^0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *avec* $p > N,\ a \in L^\infty(Q),$ *et* $B \in L^\infty(Q)^N$. *Alors la solution* y *de (3.63) vérifie*

$$\begin{cases} y \in L^q(0,T; W^{2,\beta}(\Omega)), \quad \partial_t y \in L^q(0,T; L^\beta(\Omega)), \\ \qquad \text{avec} \ \ \beta = \min(p,q) > N. \end{cases} \tag{3.64}$$

et

$$\begin{aligned} & \|y\|_{L^q(0,T;W^{2,\beta}(\Omega))} + \| \ \partial_t y\|_{L^q(0,T;L^\beta(\Omega))} \\ \leq \ & C(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left(\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|F\|_q \right). \end{aligned} \tag{3.65}$$

De plus, on a aussi $y \in C^0([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ *et*

$$\|y\|_{C^0([0,T];W^{1,\infty})} \leq M(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left(\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|F\|_q \right)$$

$$M(\Omega, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = \exp\left\{ M_0 \left(1 + T + (T + T^{1/2}) \|a\|_\infty + (T + T^{1/2}) \|B\|_\infty^2 \right) \right\} \tag{3.66}$$

et M_0 *est une constante positive ne dépendant que de* Ω.

La preuve de ce lemme est donnée dans [15].

3.2.4 Un résultat de nulle contrôlabilité pour le système linéaire.

On va considérer le système linéaire (3.1) où $a \in L^\infty(Q),\ B \in L^\infty(Q)^N$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$. Alors nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.2.1 *Supposons que* $T > 0,\ a \in L^\infty(Q),\ B \in L^\infty(Q)^N$ *et* $y^0 \in L^2(\Omega)$. *Alors, il existe un contrôle* $\widehat{v} \in L^\infty(O \times (0,T))$ *tel que la solution correspondante à (3.1) satisfait*

$$\widehat{y}(x,T) = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{3.67}$$

De plus, $\widehat{v}$ *peut être choisi de manière que*

$$\|\widehat{v}\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq \exp\left\{ CK(\Omega, O, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \right\} \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.68}$$

où $K(\Omega, O, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ *est donnée par (3.57).*

Preuve. Pour tout $\epsilon > 0$. On introduit la fonctionnelle J_ϵ avec

$$J_\epsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \left(\int \int_{O\times(0,T)} |\varphi| \, dxdt \right)^2 + \epsilon \left\|\varphi^0\right\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)}. \tag{3.69}$$

Ici, φ est la solution du système (3.2) associé à $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. $J_\epsilon$est une fonctionnelle continue, strictement convexe dans $L^2(\Omega)$, et qui verifie $\liminf\limits_{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty} \frac{J_\epsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \epsilon$, et par conséquen$\varphi^0$t, $J_\epsilon$admet un minimum unique $\varphi_\epsilon^0 \in L^2(\Omega)$.

Et comme J_ϵ est une fonction continue et convexe, alors elle est sous différentiable en tout point $\varphi^0 \neq 0$ et son sous différentiel ∂J_ϵest donnés par :

$$\begin{array}{c}\partial J_\epsilon(\varphi^0) = \Big\{\xi \in L^2(\Omega) : \exists v \in \left(\int\int_{O\times(0,T)} |\varphi|\, dxdt\right) \text{sgn}(\varphi)1_O \text{ qui satisfait} \\ \left\langle \xi, \theta^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\int_{O\times(0,T)} v\theta dxdt + \frac{\epsilon}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \left\langle \varphi^0, \theta^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \theta(0), y^0 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \text{pour tout } \theta^0 \text{ et } \theta \text{ la solution de (3.2) avec condition initiale } \theta^0, \Big\}\end{array} \tag{3.70}$$

avec sgn est définit par :

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

On prend $\epsilon < \|y_1\|_{L^2(\Omega)}$ tels que y_1 est la solution de (3.1) avec contrôle nul. Sous cette hypothèse, $\varphi_\epsilon^0 \neq 0$ et comme J_ϵ atteint son minimum en φ_ϵ^0 alors $0 \in \partial J_\epsilon(\varphi_\epsilon^0)$. A partir de (3.70), il existe un $\widehat{v_\epsilon} \in \left(\int\int_{O\times(0,T)} |\varphi_\epsilon|\, dxdt\right)\text{sgn}(\varphi_\epsilon)1_O$ tels que $\forall \varphi^0 \in L^2(\Omega)$

$$\left(\int\int_{O\times(0,T)} \widehat{v_\epsilon}\varphi dxdt\right) + \epsilon(\frac{\varphi_\epsilon^0}{\|\varphi_\epsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0)_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), y^0)_{L^2(\Omega)} = 0\ . \tag{3.71}$$

où φ est la solution de(3.1) avec condition initiale φ^0. Puisque les systèmes (3.1) et (3.2) sont en dualité, alors on a :

$$\int\int_{O\times(0,T)} \widehat{v_\epsilon}\varphi dxdt = (\widehat{y_\epsilon}(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} - (y^0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}$$

qu'on va la combiner avec (3.71), on obtient

$$\|\widehat{y_\epsilon}(T)\| \leq \epsilon. \tag{3.72}$$

On voit facilement que

$$\|\widehat{v_\epsilon}\|_{L^\infty(O\times(0,T))} = \int\int_{O\times(0,T)} |\varphi_\epsilon|\, dxdt \leq CK(\Omega, O, T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.73}$$

pour tout $\epsilon > 0$. En effet, l'égalité

$$\|\widehat{v_\epsilon}\|_{L^\infty(O\times(0,T))} = \int\int_{O\times(0,T)} |\varphi_\epsilon|\, dxdt$$

est déduite de (3.70). D'autre part, puisque

$$J_\epsilon(\varphi_\epsilon^0) \leq J_\epsilon(0) = 0$$

on voit qu à partir de (3.69) on a

$$\frac{1}{2}\left(\int\int_{O\times(0,T)} |\varphi_\epsilon|\, dxdt\right)^2 \leq -\int_\Omega \varphi_\epsilon(x,0)y^0(x)dx \leq \|\varphi_\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega)} \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}$$

En tenant compte de (3.56) et (3.57), l'inégalité (3.73) a lieu.

Puisque $\widehat{v_\epsilon}$ est uniformement borné dans $L^\infty(O\times(0,T))$ pour une sous suite appropriée, on doit avoir

$$\widehat{v_\epsilon} \longrightarrow \widehat{v} \quad \text{faiblement-} * \text{ dans } L^\infty(O\times(0,T)) \tag{3.74}$$

où $\widehat{v} \in L^\infty(O\times(0,T))$ satisfait (3.68). Par conséquent,

$$\widehat{y_\epsilon}(T) \longrightarrow \widehat{y}(T) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

où $\widehat{y}$ est la solution de (3.1) associé à $\widehat{v}$. Puisque on a (3.72) pour tout $\epsilon > 0$, alors on a (3.67). ■

Preuve du théorème 3.2.1. On va maintenant démontrer le théorème 3.2.1. D'abord, observons que nous pouvons supposer dans ce théorème que $y^0 \in W^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, avec $p > N$. En effet, il suffit de poser $v = 0$ pour $t \in [0,\delta]$ et on travaille dans l'intervalle de temps $[\delta, T]$, regardant $y(.,\delta)$ comme l'état initial. Par commodité, on supposera dans la première étape que g et G sont continues.

Cas où g et G sont continues.

Soit y^0donnée dans $W^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, avec $p > N$. On supposera que

$$g \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad G \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^N \tag{3.75}$$

et (3.55) est satisfaite. Il est alors clair que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ telle que

$$|g(s,p)|^{2/3} + |G(s,p)|^2 \le C_\epsilon + \epsilon \log(1+|s|+|p|) \quad \forall (s,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N. \tag{3.76}$$

On pose $Z = C^0([0,T]\,;W^{1,\infty}(\Omega))$ et soit $R > 0$ une constante que l'on déterminera plus tard. On va utiliser deux fonctions de troncature $T_R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{T}_R : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, qui sont définies par

$$T_R(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \le R \\ R.\text{sgn}(s) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\mathbf{T}_R(p) = (T_R(p_i))_{1\le i\le N} \qquad \forall p \in \mathbb{R}^N.$$

Pour chaque $z \in Z$, on va considérer les système linéaires correspondants

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + g(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))y + G(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)).\nabla y = v1_O & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(x,0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.77}$$

On va associer à z une famille $U(z)$ de contrôles appartenant à L^∞qui servent à mener les solutions à zéro. Observons que (3.77) est de la forme (3.1) avec

$$\begin{cases} a = a_z = g(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \in L^\infty(Q) \\ B = B_z = G(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \in L^\infty(Q)^N. \end{cases} \tag{3.78}$$

Par conséquent, on peut appliquer la proposition 3.2.1 à (3.77). En fait, on va appliquer ce résultat dans un intervalle de temps adéquat $(0, T_z)$, où

$$T_z = \min\left\{T, \|g(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\|_\infty^{-2/3}, \|g(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\|_\infty^{-1/3}\right\}. \tag{3.79}$$

D'aprés la proposition 3.2.1, on déduit directement l'existence d'un contrôle $\widehat{v}_z \in L^\infty(O\times(0,T_z))$ tel que la solution de (3.77) dans $\Omega\times(0,T_z)$ avec $v = \widehat{v}_z$ satisfait

$$\widehat{y}_z(x, T_z) = 0$$

et en plus,

$$\|\widehat{v}_z\|_{L^\infty(O\times(0,T_z))} \leq e^{[CK(\Omega,O,T_z,a_z,B_z)]} \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}$$

où K est donnée par (3.57) et a_z, B_z sont données par (3.78).

Soient $\widetilde{v}_z$ et $\widetilde{y}_z$ les extensions par zéro de $\widehat{v}_z$ et $\widehat{y}_z$ réspectivement dans Q. Il est clair que $\widetilde{y}_z$ est la solution correspondante de (3.77) associée à $\widetilde{v}_z$ et

$$\widetilde{y}_z(x,T) = 0. \tag{3.80}$$

D'aprés la définition de T_z, on voit que

$$\|\widetilde{v}_z\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq e^{C(1+\|a_z\|_\infty^{2/3}+\|B_z\|_\infty^2)} \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.81}$$

où C est une constante positive qui dépend de Ω, O et T.

D'autre part, à partir de (3.75) et le lemme 3.2.2 on obtient que

$$\widehat{y}_z \in C^0\left([0,T_z]\,; W^{1,\infty}(\Omega)\right)$$

et

$$\|\widehat{y}_z\|_{C^0([0,T_z];W^{1,\infty}(\Omega))} \leq M(\Omega, T_z, \|a_z\|_\infty, \|B_z\|_\infty) \left(\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|\widehat{v}_z\|_{L^\infty(O\times(0,T_z))}\right)$$

M est donnée par (3.66). Reprenant en compte la définition de T_z, l'estimation (3.81) et la définition de $\widetilde{y}_z$, on trouve que $\widetilde{y}_z \in Z$ et

$$\|\widetilde{y}_z\|_Z \leq e^{C(1+\|a_z\|_\infty^{2/3}+\|B_z\|_\infty^2)} \left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \tag{3.82}$$

où $C = C(\Omega, O, T)$.

Les estimations (3.81) et (3.82) peuvent être écrites sous la forme

$$\|\widetilde{v}_z\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq C_1(\Omega, O, T, z) \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.83}$$

$$\|\widetilde{y}_z\|_Z \leq C_1(\Omega, O, T, z) \left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \tag{3.84}$$

où

$$C_1(\Omega, O, T, z) = e^{C(1+\|a_z\|_\infty^{2/3}+\|B_z\|_\infty^2)}. \tag{3.85}$$

Pour tout $v \in L^\infty(O \times (0,T))$, soit $y_v \in Z$ la solution de (3.77) dans Q avec second membre v (afin de simplifier la notation, nous omettons la dépendance de z). On va maintenant de poser pour chaque $z \in Z$

$$U(z) = \left\{v \in L^\infty(O \times (0,T)) : y_v(T) = 0, \|v\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq C_1(\Omega, O, T, z) \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}\right\}$$

et

$$\Lambda(z) = \left\{y_v : v \in U(z), \quad \|y_v\|_Z \leq C_1(\Omega, O, T, z) \left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right\} \tag{3.86}$$

De cette façon, nous avons été en mesure d'introduire une multifonction sur Z

$$z \longrightarrow \Lambda(z).$$

On va démontrer que cette multifonction possède au moins un point fixe y. On va également démontrer que, pour un certain R, chaque point fixe de Λ vérifie

$$\|y\|_Z \leq R. \tag{3.87}$$

Evidemment, cela implique l'existence d'un contrôle $v \in L^\infty(O \times (0,T))$ tel que (3.52) a une solution qui satisfait (3.53).

On va voir maintenant que le théorème du point fixe de Kakutani peut être appliqué à Λ. D'abord, a partir de (3.83) et (3.84), on déduit que pour chaque $z \in Z$, $\Lambda(z)$ est un ensemble non vide. Par ailleurs, il est facile de vérifier que $\Lambda(z)$ est un convexe fermé uniformément borné de Z. Grace à l'hypothèse de régularité sur y^0 et le lemme 3.2.2, alors on a (3.64) (ici $\beta = p$) et l'estimation

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;W^{2,p}(\Omega))} + \| \partial_t y\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq C\left(\Omega, O, T, R, \|y^0\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right),$$

(où $C\left(\Omega, O, T, R, \|y^0\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right)$ est indépendante de z) pour tout $y \in \Lambda(z)$. Puisque $p > N$, on peut appliquer les résultats de compacité bien connus et de conclure qu'il existe un compact $K \subset Z$ (qui dépend de R) tel que

$$\Lambda(z) \subset K \qquad \forall z \in Z \tag{3.88}$$

(Voir [16]).

On va maintenant de démontrer que la multifonction $z \longrightarrow \Lambda(z)$ est hemi-continue superieurement, i.e.

$$B_{\alpha,\mu} = \left\{ z \in Z : \sup_{y \in \Lambda(z)} \langle \mu, y \rangle \geq \alpha \right\}$$

est un ensemble fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\mu \in Z'$. Soit $\{z_n\}$ une suite dans $B_{\alpha,\mu}$ telle que $z_n \longrightarrow z$ dans Z. Notre objectif est de prouver que $z \in B_{\alpha,\mu}$. Compte tenu de l'hypothèse de continuité de g et de G, on a

$$g(T_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) \longrightarrow g(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \text{ dans } L^\infty(Q),$$

et

$$G(T_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) \longrightarrow G(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)) \quad \text{dans } L^\infty(Q)^N.$$

Comme tous les ensembles $\Lambda(z_n)$ sont compacts et satisfont (3.88), on déduit que

$$\alpha \leq \sup_{y \in \Lambda(z_n)} \langle \mu, y \rangle = \langle \mu, y_n \rangle \tag{3.89}$$

pour un certain $y_n \in \Lambda(z_n)$. A partir de la définition de $\Lambda(z_n)$ et $U(z_n)$, il doit exister un $v_n \in L^\infty(O \times (0,T))$ tel que

$$\partial_t y_n - \Delta y_n + g(T_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)) y_n + G(T_R(z_n), \mathbf{T}_R(\nabla z_n)).\nabla y_n = v_n 1_O \text{ dans } Q.$$

De plus,

$$\|v_n\|_{L^\infty(O \times (0,T))} \leq C_1(\Omega, O, T, z_n) \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|y_n\|_Z \leq C_1(\Omega, O, T, z_n) \left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

d'où y_n(resp. v_n) est uniformement bornée dans Z (resp. $L^\infty(O\times(0,T))$). Par conséquent, il existe au moins une sous suite :

$$y_n \longrightarrow \widehat{y} \;\; \text{fortement dans } Z$$

(rappelons que (3.88) est satisfaite) et

$$v_n \longrightarrow \widehat{v} \;\; \text{faiblement } \; -* \;\; \text{dans } L^\infty(O\times(0,T)).$$

Maintenant, il n'est pas difficile de vérifier que

$$\begin{cases} \partial_t\widehat{y} - \Delta\widehat{y} + g(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z))\widehat{y} + G(T_R(z), \mathbf{T}_R(\nabla z)).\nabla\widehat{y} = \widehat{v}1_O & \text{dans } Q, \\ \widehat{y} = 0 & \text{sur } \;\Sigma, \\ \widehat{y}(x,0) = y^0, \;\; \widehat{y}(x,T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

i.e. que $\widehat{v} \in U(z)$ et $\widehat{y} \in \Lambda(z)$. Par conséquent, on peut passer à la limite dans (3.89) et on déduit que

$$\alpha \leq \langle \mu, \widehat{y}\rangle \leq \sup_{y\in\Lambda(z)} \langle \mu, y\rangle$$

celà veut dire que, $z \in B_{\alpha,\mu}$, ce qui prouve que $z \longrightarrow \Lambda(z)$ est hemi-continue superieurement.

En conséquence, pour tout $R > 0$ fixé le théorème de Kakutani peut être appliqué, assurant l'existence du point fixe de Λ. Nous allons terminer la preuve en démontrant que nous pouvons choisir R de manière que tout point fixe de Λ satisfait (3.87).

Ainsi, soit y un point fixe de Λ associé au contrôle $v \in U(y)$. Alors, (3.84), (3.85) et (3.76) mènent à l'estimation

$$\begin{aligned} \|y\|_Z &\leq \exp\left[C\left(1 + \|g(T_R(y), \mathbf{T}_R(\nabla y))\|_\infty^{2/3} + \|G(T_R(y), \mathbf{T}_R(\nabla y))\|_\infty^2\right)\right]\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &\leq \exp\left[C\left(1 + C_\epsilon + \epsilon\log(1+2R)\right)\right]\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &= \exp\left[C\left(1 + C_\epsilon\right)\right]\;(1+2R)^{C\epsilon}\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

où $C = C(\Omega, O, T)$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{2C}$, on trouve que

$$\|y\|_Z \leq C(1+2R)^{1/2}\left\|y^0\right\|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

d'où (3.87) est satisfaite quand R est assez grand. On a démontré le théorème 3.2.1 dans le cas oú les données sont réguliéres.

Le cas général.

On suppose maintenant que f est localement lipschitzienne et satisfait (3.54) (avec $f(0,0) = 0$) et (3.55). On va introduire une fonction $\rho \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho \geq 0$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, supp$\rho \subset \overline{B}(0,1)$ et

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \rho(s,p)dsdp = 1.$$

On considère les fonctions ρ_n, g_n et G_n $(n \geq 1)$, avec

$$\rho_n(s,p) = \frac{1}{n^{N+1}}\rho(ns,np) \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

$$g_n = \rho_n * g, \qquad G_n = \rho_n * G.$$

Alors il n'est pas difficile de vérifier que les propriétés suivantes de g_n et G_n sont satisfaites :

1. $g_n \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ et $G_n \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)^N \quad \forall n \geq 1$.
2. Si on pose $f_n(s,p) = g_n(s,p)s + G_n(s,p).p$ pour tout $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, alors

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{uniformement dans tout compact de } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

3. Pour tout $M > 0$ donnée, il existe $C(M) > 0$ telles que

$$\sup_{|(s,p)| \leq M} (|g_n(s,p)| + |G_n(s,p)|) \leq C(M) \quad \forall n \geq 1$$

4. Les fonctions g_n et G_n vérifient (3.55) uniformement en n, ça veut dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M(\epsilon) > 0$ tel que

$$\begin{cases} |g_n(s,p)| \leq \epsilon \log^{3/2}(1 + |s| + |p|), \\ |G_n(s,p)| \leq \epsilon \log^{1/2}(1 + |s| + |p|) \end{cases} \tag{3.90}$$

quand $|(s,p)| \geq M(\epsilon)$ pour tout $n \geq 1$.

Pour tout n, on peut argumenter comme dans le premier cas et on peut trouver un contrôle $v_n \in L^\infty(O \times (0,T))$ tel que le système

$$\begin{cases} y_{nt} - \Delta y_n + f(y_n, \nabla y_n) = v_n 1_O & \text{dans} \quad Q, \\ y_n = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ y_n(0) = y^0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.91}$$

possède au moins une solution $y_n \in Z$ qui satisfait

$$y_n(x,T) = 0.$$

A partir des propriétés satisfaites par g_n et G_n et grâce à des estimations obtenues dans le premier cas on en déduit que

$$\|v_n\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq C, \qquad \|y_n\|_Z \leq C \quad \forall n \geq 1.$$

En fait, le lemme 3.2.2 permet d'écrire que $y_n \in K$ pour tout n, avec k étant un compact fixe dans Z. En conséquence, on peut supposer que, au moins pour une sous-suite,

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{faiblement } - * \text{ dans } L^\infty(O \times (0,T))$$

$$y_n \longrightarrow y \quad \text{fortement dans } Z.$$

Ainsi, passant à la limite dans (3.91), on peut trouver un contrôle $v \in L^\infty(O \times (0,T))$ tel que le système (3.52) possède une solution y qui satisfait (3.53). Ceci, achève la preuve du théorème 3.2.1. ∎

Remarque 3.2.3 *Dans le théorème 3.2.1, on peut considérer ainsi un terme plus général non linéaire de la forme $f(x,t;s,p)$, avec $(x,t) \in Q$ et $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Les hypothèses sur f doivent être les suivantes dans ce cas :*

1. $f(x,t;0,0) = 0 \quad \forall (x,t) \in Q$,
2. $f(.;s,p) \in L^\infty(Q) \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,
3. $f(x,t;.)$ *est localement Lipschitziénne, pour (x,t) p.p. dans Q avec des constantes de Lipschitz indépendantes de (x,t) dans les ensembles bornés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,*
4. $f(.;s,p) = g(.;s,p)s + G(.;s,p).p$ *pour tout $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, avec*

$$\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{|g(x,t;s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} = 0 \quad et \quad \lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{|G(x,t;s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} = 0.$$

uniformement dans $(x,t) \in Q$.

Remarque 3.2.4 *La contrôlabilité à zéro de (3.52) implique un résultat de contrôlabilité par le bord pour le système :*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y, \nabla y) = 0 & \textit{dans} \quad Q, \\ y = v 1_\Gamma & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \textit{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.92}$$

où Γ *est un ouvert non vide du bord .*

Pour démontrer cela, il suffit de considérer un ouvert G de bord ∂G de classe C^2 tel que $\Omega \subset G$ et $\partial\Omega \cap G = \Gamma$. On prend un petit ouvert $O \subset G \diagdown \overline{\Omega}$. Supposons, pour simplifier, que $y^0 \in W^{2,p}(G) \cap H_0^1(G)$ pour un certain $p > N$. Il existe une fonction $\widetilde{y}^0 \in W^{2,p}(G) \cap H_0^1(G)$ telle que $\widetilde{y}^0 = y^0$ et

$$\left\| \widetilde{y}^0 \right\|_{W^{2,p}(G)} \leq C \left\| y^0 \right\|_{W^{2,p}(\Omega)} .$$

Soit $\widetilde{v} \in L^\infty(O \times (0, T))$ un contrôle déterminé par le théorème 3.2.1 tel que

$$\begin{cases} \widetilde{y}_t - \Delta \widetilde{y} + f(\widetilde{y}, \nabla \widetilde{y}) = \widetilde{v} 1_O & \text{dans} \quad G \times (0, T), \\ \widetilde{y} = 0 & \text{sur} \quad \partial G \times (0, T), \\ \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}^0 & \text{dans} \quad G, \end{cases}$$

possède une solution unique $\widetilde{y} \in C^0([0, T] ; W^{1,\infty}(G)$ avec

$$\widetilde{y}(T) = 0 \quad \text{dans} \quad G.$$

La restriction de $\widetilde{y}$ à Ω est alors la solution de (3.92) et la trace de $\widetilde{y}$ sur le bord Γ donne le contrôle cherché.

3.2.5 Un résultat de contrôlabilité exacte aux trajectoires pour le système semilinéaire.

Théorème 3.2.3 *Supposons que* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *est localement Lipschitziénne, et verifie*

$$\begin{aligned} &\lim_{|(s,p)| \to \infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p) d\lambda \right| = 0, \\ &\lim_{|(s,p)| \to \infty} \frac{1}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(s_0 + \lambda s, p_0 + \lambda p) d\lambda \right| = 0, \end{aligned} \tag{3.93}$$

uniformement dans $(s_0, p_0) \in K$*, pour tout compact* $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$*. Soit* y^* *une solution de (3.52) dans* $C^0([0, T] ; W^{1,\infty}(\Omega))$*, correspondante aux données* $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*,* $v^* \in L^\infty(O \times (0, T))$*.*

Il existe un contrôle $v \in L^\infty(O \times (0, T))$ *et un état* $y \in C^0([0, T] ; W^{1,\infty}(\Omega))$ *telle que*

$$y(T) = y^*(T) \quad \textit{dans}\ \Omega. \tag{3.94}$$

Preuve. On pose $y = y^* + w$. On va chercher un contrôle $u \in L^\infty(O \times (0, T))$ tel que la solution de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + F(x, t; w, \nabla w) = u 1_O & \text{dans} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ w(0) = y^0 - y_0^* & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.95}$$

vérifie

$$w(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Ici F est donnée par

$$F(x, t; s, p) = f(y^*(x, t) + s, \nabla y^*(x, t) + p) - f(y^*(x, t), \nabla y^*(x, t)),$$

pour tout $(x, t) \in Q$ et $(s, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. La preuve de ce théorème sera achevée si on vérifie que le contrôle u existe.

Notons que

$$F(x, t; s, p) = \widetilde{g}(x, t; s, p)s + \widetilde{G}(x, t; s, p).p,$$

où

$$\widetilde{g}(x, t; s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(y^*(x, t) + \lambda s, \nabla y^*(x, t) + \lambda p)d\lambda$$

et

$$\widetilde{G}(x, t; s, p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(y^*(x, t) + \lambda s, \nabla y^*(x, t) + \lambda p)d\lambda \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N.$$

Ainsi, compte tenu de (3.93) et du fait que $y^* \in C^0([0, T]\,; W^{1,\infty}(\Omega))$, il est clair que F satisfait les hypothèses de la remarque (3.2.3). Cela est suffisant pour s'assurer que u existe. ■

3.3 Nulle contrôlabilité de l'équation de réaction-diffusion linéaire avec conditions au bord de type Fourier.

3.3.1 Contrôlabilité de l'équation de la chaleur linéaire avec conditions au bord de type fourier.

Dans cette paragraphe, nous allons montrer la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur linéaire avec conditions au bord de type Fourier de la forme $\frac{\partial y}{\partial n} + \beta y = 0$ (il serait raisonnable de supposer $\beta \geq 0$, mais cela ne sera pas nécéssaire). Pour la preuve de la contrôlabilité à zéro, un outil essentiel sera une nouvelle inégalité de Carleman pour les solutions faibles de l'équation de la chaleur classique avec conditions aux limites non homgènes de Neumann.

On considère le système

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B.\nabla y + ay = v1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + \beta y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.96}$$

Ici, on va supposer que les coéfficients a, B et satisfont

$$a \in L^\infty(Q), \quad B \in L^\infty(Q)^N \quad \beta \in L^\infty(\Sigma) \tag{3.97}$$

Le premier résultat que l'on montre est une inégalité globale de Carleman pour les solutions faibles de problèmes rétrogrades qui s'ecrivent sous la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} -\varphi_t - \Delta\varphi = f_1 + \nabla.f_2 & \text{dans } Q, \\ (\nabla\varphi + f_2).n = f_3 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans } \ \Omega, \end{array}\right. \tag{3.98}$$

avec $f_1 \in L^2(Q)$, $f_2 \in L^2(Q)^N$, $f_3 \in L^2(\Sigma)$. On peut réaliser que, pour des solutions $\varphi \in L^2(Q)$, la condition au bord a 'a priori' un sens puisque $\nabla\varphi + f_2 \in L^2(Q)^N$ et $\nabla.(\nabla\varphi + f_2) \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$.

On présente maintenant le résultat suivant :

Lemme 3.3.1 *Si f_1, f_2, f_3 vérifient les hypothèses ci-dessus, il existe quatre constantes $\overline{\lambda}, \sigma_1, \sigma_2$ et C qui dépendent seulement de Ω et O telles que, pour tout $\lambda \geq \overline{\lambda}$, tout $s \geq \overline{s} = \sigma_1(e^{\sigma_2\lambda}T + T^2)$ et tout $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, la solution faible de (3.98) satisfait*

$$\begin{aligned} & s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt + s^2\lambda^3 \int\int_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2\left|\varphi\right|^2 d\sigma dt \\ \leq \ & C\left(s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt \right. \\ & \left. + \iint_Q e^{-2s\alpha}(\left|f_1\right|^2 + s^2\lambda^2\xi^2\left|f_2\right|^2)dxdt + s\lambda \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi\left|f_3\right|^2 d\sigma dt \right) \end{aligned} \tag{3.99}$$

Les fonctions poids $\alpha = \alpha(x,t)$ et $\xi = \xi(x,t)$ sont données par

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda\left\|\eta^0\right\|_\infty} - e^{\lambda\eta^0(x)}}{t(T-t)}, \qquad \xi(x,t) = \frac{e^{\lambda\eta^0(x)}}{t(T-t)}. \tag{3.100}$$

La preuve sera donnée aprés l'énnoncé du lemme 3.3.2

Comme conséquence du lemme 3.3.1, on peut déduire une inégalité d'observabilité pour le système adjoint associé à (3.96). Plus précisement, on considère le système rétrograde

$$\left\{\begin{array}{ll} -\varphi_t - \Delta\varphi - \nabla.(\varphi B(x,t)) + a(x,t)\varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ (\nabla\varphi + \varphi B(x,t)).n + \beta(x,t)\varphi = 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.101}$$

où $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. On verra que pour une cetaine K de la forme

$$K = e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)}, \tag{3.102}$$

la solution de (3.101) satisfait

$$\int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} \left|\varphi\right|^2 dxdt \leq K \iint_{O\times(0,T)} \left|\varphi\right|^2 dxdt. \tag{3.103}$$

Remarque 3.3.1 *En fait, (3.103) n'est pas la seule façon de dire que (3.101) est observable. Il est plus fréquent d'utiliser d'autres inégalités de la forme*

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt \tag{3.104}$$

pour une certaine constante C. L'éstimation (3.104) peut être déduite par (3.103) et l'inégalité de l'energie satisfaite par φ.

Le deuxième résultat essentiél de cette pargraphe concerne la contrôlabilité à zéro de (3.96). Le résultat est le suivant

Théorème 3.3.1 *Supposons que (3.97) est satisfaite. Alors, pour chaque $T > 0$, (3.96) est contrôlable à zéro au temps T avec des contrôles $v \in L^2(O \times (0,T))$ tels que*

$$\|v\|_{L^2(O\times(0,T))} \leq H \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.105}$$

avec une constante H de la forme

$$H = e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|^{\frac{2}{3}}+\|B\|^2_\infty+\|\beta\|^2_\infty+T(\|a\|+\|B\|^2_\infty+\|\beta\|^2_\infty))} \tag{3.106}$$

pour un certain $C = C(\Omega, O)$.

Dans la démonstration du théorème 3.3.1, l'outil essenssiel est l'éstimation (3.103). Cela, découle d'un principe qui affirme que la contrôlabilité à zéro de (3.96) avec des contrôles dans $L^2(O \times (0,T))$ est équivalente à l'observabilité de (3.101). Plus de détails seront être donnés ci-dessous.

Pour la preuve du lemme 3.3.1, nous aurons besoin d'un résultat auxiliaire : une inégalité de Carleman pour les solutions de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites homgènes de Neuman. Ceci est donnée dans le résultat suivant :

Lemme 3.3.2 *Soit $f \in L^2(Q)$. Il existe λ^*, σ^* et C qui dépendent seulement de Ω et O tels que, pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, tout $s \geq \sigma^*(e^{4\lambda\left\|\eta^0\right\|_\infty}T + T^2)$ et pour tout $q^0 \in L^2(\Omega)$, la solution du système*

$$\begin{cases} -q_t - \Delta q = f(x,t) & \textit{dans } Q, \\ \frac{\partial q}{\partial n} = 0 & \textit{sur } \ \Sigma, \\ q(T) = q^0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.107}$$

satisfait

$$\begin{aligned} & s^{-1}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)dxdt + \\ & s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \, |\nabla q|^2 \, dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \, |q|^2 \, dxdt \\ \leq \ & C\left(\iint_Q e^{-2s\alpha} \, |f|^2 \, dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \, |q|^2 \, dxdt.\right). \end{aligned} \tag{3.108}$$

La preuve du lemme 3.3.2 est longue et ressemble à celle du lemme 2.2.2. Nous n'allons donc pas la donner (voir [8]).

Preuve du lemme 3.3.1. On peut considérer φ comme solution par transposition de (2.49). Cela, signifie que φ est la fonction unique dans $L^2(Q)$ qui vérifie

$$\begin{aligned} \iint_Q \varphi h dxdt &= \iint_Q f_1(x,t) z dxdt - \iint_Q f_2(x,t).\nabla z dxdt + \\ &\quad \iint_\Sigma f_3(x,t) z d\sigma dt + \int_\Omega \varphi^0(x) z(x,T) dx \\ \forall h &\in L^2(Q), \end{aligned} \tag{3.109}$$

où z est, pour chaque $h \in L^2(Q)$ la solution du problème

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = h(x,t) & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.110}$$

On va d'abord estimer le deuxième terme du premier membre de (3.99) i.e.

$$s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 dxdt. \tag{3.111}$$

Nous allons voir que le terme (3.111) est borné par le deuxième membre de (3.99), i.e.

$$\begin{aligned} &s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 dxdt \\ \leq\ & C\left(s^3\lambda^4 \int\int_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right. \\ &\left. + \iint_Q e^{-2s\alpha}(|f_1|^2 + s^2\lambda^2\xi^2 |f_2|^2) dxdt + s\lambda \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi |f_3|^2 d\sigma dt \right) \end{aligned} \tag{3.112}$$

pour des λ et s appropriés.

Ensuite, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \frac{1}{2}\left(\iint_Q e^{2s\alpha}|z|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-4}\iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|v|^2 dxdt\right) \\ \text{réstreint à } v \in L^2(Q) \text{ et} \\ \begin{cases} z_t + \Delta z = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3\varphi + v1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) = 0,\ z(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{3.113}$$

Ici, s et λ sont choisis comme dans le lemme 3.3.2. En vertu du principe de Lagrange, on est amené au système d'optimalité, qui est du quatrième ordre en espace et second ordre en temps :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p) + s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 p 1_O = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3\varphi & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial n}(e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ (e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p)(0) = (e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^*p)(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.114}$$

$\mathcal{L} = \partial_t - \Delta$ et $\mathcal{L}^* = -\partial_t - \Delta$. Alors, on peut montrer que (3.114) donc (3.113 aussi) admet une seule solution p et que

$$\widehat{v} = -s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3 p 1_O \qquad \text{et} \quad \widehat{z} = e^{-2s\alpha}\mathcal{L}^* p \tag{3.115}$$

résolvent le problème 3.113). On montre que (3.114) a une solution faible unique. A cet effet, nous allons réecrire ce problème comme une équation variationnelle et en appliquant le théorème de Lax-Milgram. Maintenant on introduit l'espace

$$X_0 = \left\{z \in C^2(\overline{Q}) : \tfrac{\partial z}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \Sigma\right\}$$

et la norme $\| \|_{X_0}$,avec

$$\|q\|_{X_0}^2 = \iint_Q e^{-2s\alpha} \left|\mathcal{L}^* q\right|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|q\right|^2 dxdt \tag{3.116}$$

pour tout $q \in X_0$.

Due au lemme 3.3.2, $\| \|_{X_0}$ est une norme dans X_0. Soit X le complété de X_0 pour la norme $\| \|_{X_0}$. Alors X est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.;.)_X$, avec

$$(p;q)_X = \iint_Q e^{-2s\alpha}(\mathcal{L}^* p)(\mathcal{L}^* q)dxdt + s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 pqdxdt. \tag{3.117}$$

Avec cette notation, le système (3.114) est équivalent à trouver une fonction $p \in X$ tels que

$$(p;q)_X = l(q) \qquad \forall q \in X \tag{3.118}$$

où $l(q) = s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \varphi q dxdt \qquad \forall q \in X.$

Bien sur, (3.117) est équivalent à un autre problème extrémal

$$\begin{cases} \min(\frac{1}{2}(q;q)_X - l(q)) \\ \text{réstreint à } q \in X. \end{cases} \tag{3.119}$$

En vertu du lemme 3.3.2 on peut facilement vérifier que $l \in X$. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram et en déduit qu'il existe une solution unique de (3.114).

En choisissant

$$h = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3\varphi + \widehat{v}1_O$$

dans (3.109). Cela donne

$$\begin{aligned} s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \quad &= \quad \iint_Q f_1(x,t)\widehat{z}dxdt - \iint_Q f_2(x,t).\nabla\widehat{z}dxdt \\ &\quad + \iint_\Sigma f_3(x,t)\widehat{z}d\sigma dt - \iint_{O\times(0,T)} \varphi\widehat{v}dx \end{aligned} \tag{3.120}$$

(rappelons que $\widehat{v}$ et $\widehat{z}$ sont données par (3.115)). L'idée de la preuve de (3.112) est de borner $\widehat{z}$, $\nabla\widehat{z}$ et $\widehat{v}$ dans Q et la trace de $\widehat{z}$ sur Σ dans les termes du second membre de 3.120). A cet effet, on va d'abord multiplié l'équation (3.114) par p et intégrer dans Q, ce qui donne

$$\|p\|_X^2 \leq \|l\|_{X'}^2 \|p\|_X \tag{3.121}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \|p\|_X^2 &= \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 \, dxdt + s^{-3}\lambda^{-4} \iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3} |\widehat{v}|^2 \, dxdt \\ &\leq Cs^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 \, dxdt, \end{aligned} \tag{3.122}$$

pour $\lambda \geq \overline{\lambda}(\Omega, O)$ et $s \geq \overline{\sigma}(\Omega, O)(e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty}T + T^2)$. Cela donne les majorations voulues de $\widehat{z}$ et $\widehat{v}1_O$. Maintenant, on multiplie l'équation satisfaite par $\widehat{z}$ par $s^{-2}\lambda^{-2}e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{z}$ et on intègre dans Q. Aprés une intègration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\frac{\partial}{\partial t} |\widehat{z}|^2 \, dxdt + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2} |\nabla\widehat{z}|^2 \, dxdt \\ &-s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}\nabla\eta^0.\nabla |\widehat{z}|^2 \, dxdt \\ &-2s^{-2}\lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}(\nabla\eta^0.\nabla\widehat{z})\widehat{z}dxdt \\ = \; & s\lambda^2 \iint_Q \xi\varphi\widehat{z}dxdt + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{v}\widehat{z}dxdt, \end{aligned} \tag{3.123}$$

d'où

$$\begin{aligned} &s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2} |\nabla\widehat{z}|^2 \, dxdt - s^{-1}\lambda^{-1} \iint_\Sigma e^{2s\alpha}\xi^{-1}\frac{\partial\eta^0}{\partial n} |\widehat{z}|^2 \, d\sigma dt \\ = \; & \frac{1}{2}s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q \frac{\partial}{\partial t}(e^{2s\alpha}\xi^{-2}) |\widehat{z}|^2 \, dxdt \\ &-s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q \nabla.(e^{2s\alpha}\xi^{-1}\nabla\eta^0). |\widehat{z}|^2 \, dxdt \\ &+2s^{-2}\lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}(\nabla\eta^0.\nabla\widehat{z})\widehat{z}dxdt \\ &+s\lambda^2 \iint_Q \xi\varphi\widehat{z}dxdt + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{v}\widehat{z}dxdt. \end{aligned} \tag{3.124}$$

On a besoin maintenant certaines éstimations concernant les fonctions poids afin de préserver explicitement les majorations en s, λ et T. On nôte que

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{2s\alpha}\xi^{-2}) \leq CTse^{2s\alpha}e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty} \tag{3.125}$$

lorsque $s \geq CT^2$. D'une façon générale, de remarquer que, pour tout m fixé, on a

$$\left|\nabla(e^{2s\alpha}\xi^m\right| \leq C_m(\Omega, O)s\lambda e^{2s\alpha}\xi^{m+1} \tag{3.126}$$

quand $s \geq CT^2$. En effet, on a

$$\nabla(e^{2s\alpha}\xi^m) = e^{2s\alpha}\lambda\nabla\eta^0\xi^m(2s\xi + m) \leq C(\Omega, O)e^{2s\alpha}\lambda\xi^m(s\xi + 1) \tag{3.127}$$

et, en tenant compte du fait que

$$Cs\xi \geq 1 \quad \text{pour} \quad s \geq \frac{T^2}{4C}, \tag{3.128}$$

on obtient directement (3.126).
Revenant à (3.124), on obtient

$$\begin{aligned}
& s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\nabla\widehat{z}\right|^2 dxdt - s^{-1}\lambda^{-1}\iint_\Sigma e^{2s\alpha}\xi^{-1}\frac{\partial\eta^0}{\partial n}\left|\widehat{z}\right|^2 d\sigma dt \\
\leq\ & C(\Omega, O)\Bigg(Ts^{-1}\lambda^{-2}e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty}\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt \\
& + \iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + s^{-1}\lambda^{-1}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt \\
& + s^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + s^2\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2\left|\varphi\right|^2 dxdt \\
& + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-4}\left|\widehat{v}\right|^2 dxdt\Bigg) + \frac{1}{2}s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\nabla\widehat{z}\right|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

où on prend $s \geq CT^2$. Maintenant, en tenant compte de (3.128) et on déduit

$$\begin{aligned}
& s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\nabla\widehat{z}\right|^2 dxdt - s^{-1}\lambda^{-1}\iint_\Sigma e^{2s\alpha}\xi^{-1}\frac{\partial\eta^0}{\partial n}\left|\widehat{z}\right|^2 d\sigma dt \\
\leq\ & C(\Omega, O)\Bigg(\iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt \\
& + s^{-3}\lambda^{-4}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-3}\left|\widehat{v}\right|^2 dxdt\Bigg),
\end{aligned} \tag{3.130}$$

pour tout $s \geq C(\Omega, O)(e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty}T + T^2)$ et pour tout $\lambda \geq C(\Omega, O)$.

A partir du lemme 2.2.1, cela donne une éstimation du gradient et la trace de $\widehat{z}$ en fonction de $\widehat{z}$, $v1_O$ et φ. Compte tenu de (3.122), on a maintenant

$$\begin{aligned}
& \iint_Q e^{2s\alpha}\left|\widehat{z}\right|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\left|\nabla\widehat{z}\right|^2 dxdt \\
& + s^{-1}\lambda^{-1}\iint_\Sigma e^{2s\alpha}\xi^{-1}\left|\widehat{z}\right|^2 d\sigma dt + s^{-3}\lambda^{-4}\iint_{O\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}\left|\widehat{v}\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C(\Omega, O)s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\left|\varphi\right|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{3.131}$$

pour $s \geq C(\Omega, O)(e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty}T + T^2)$ et $\lambda \geq C(\Omega, O)$.
Il suffit de combiner cette inégalité et l'identité (3.120) pour en déduire (3.112).

Montrons maintenant que

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt \quad \leq \quad & C(\Omega, O)\left(\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt \right. \\ & + s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 \left|f_2\right|^2 dxdt \\ & + s\lambda \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi \left|f_3\right|^2 d\sigma dt \\ & \left. + s^3\lambda^4 \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt \right). \end{aligned} \tag{3.132}$$

A cet effet, nous allons maintenant utiliser non seulement que φ est une solution par transposition, mais une solution faible. Rapelons la définition d'une solution faible : on dit que φ est une solution faible de (3.98) si elle satisfait

$$\begin{cases} \varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,;L^2(\Omega)) \\ \langle -\varphi_t, u\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} + \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla u dx = \int_\Omega f_1(x,t) u dx \\ - \int_\Omega f_2(x,t).\nabla u dx + \int_\Sigma f_3(x,t) u d\sigma \\ p.p \text{ dans } (0,T), \quad \forall u \in H^1(\Omega), \\ \varphi(T) = \varphi^0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.133}$$

prenons

$$u = s\lambda^2 e^{-2s\alpha(.,t)}\xi(.,t)\varphi(.,t) \tag{3.134}$$

dans (3.133). Ensuite, on intégre dans $(0,T)$ et on effectue des intégrations par partie de la même façon qu'on a fait avant. On obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \frac{\partial}{\partial t}\left|\varphi\right|^2 dxdt + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt \\ & + s\lambda^2 \iint_Q \nabla\varphi.\nabla(e^{-2s\alpha}\xi)\varphi dxdt \\ = \quad & s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi f_1\varphi dxdt - s\lambda^2 \iint_Q f_2.\nabla(e^{-2s\alpha}\xi\varphi) dxdt \ + s\lambda^2 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi f_3\varphi d\sigma dt. \end{aligned} \tag{3.135}$$

On intégre par partie encore une fois et on obtient

$$\begin{aligned} & s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt \\ = \quad & -\frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q (e^{-2s\alpha}\xi)_t \left|\varphi\right|^2 dxdt - s\lambda^2 \iint_Q \nabla\varphi.\nabla(e^{-2s\alpha}\xi)\varphi dxdt \\ & + s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi f_1\varphi dxdt - s\lambda^2 \iint_Q f_2.\nabla(e^{-2s\alpha}\xi)\varphi dxdt \\ & - s\lambda^2 \iint_Q f_2.\nabla\varphi e^{-2s\alpha}\xi dxdt + s\lambda^2 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi f_3\varphi d\sigma dt. \end{aligned} \tag{3.136}$$

Compte tenu de (3.126), on obtient

$$\begin{aligned}
& s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C(\Omega, O)\left(Ts^2\lambda^2 e^{2\lambda\left\|\eta^0\right\|_\infty}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt\right. \\
& +s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt + \iint_Q e^{-2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt \\
& +s^2\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 \left|\varphi\right|^2 dxdt + s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|f_2\right|^2 dxdt \\
& \left.+s\lambda \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi \left|f_3\right|^2 d\sigma dt + s\lambda^3\iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi \left|\varphi\right|^2 d\sigma dt\right) \\
& +\frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{3.137}$$

où on prend $s \geq CT^2$ et $\lambda \geq C$.
En faisant plusieurs simplifications, on voit que

$$\begin{aligned}
& s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt \\
\leq\ & C\left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt\right. \\
& +\iint_Q e^{-2s\alpha}\left|f_1\right|^2 dxdt + s^2\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 \left|f_2\right|^2 dxdt \\
& \left.+s\lambda \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi \left|f_3\right|^2 d\sigma dt + s\lambda^3\iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi \left|\varphi\right|^2 d\sigma dt\right),
\end{aligned} \tag{3.138}$$

pour $s \geq C(e^{2\lambda\left\|\eta^0\right\|_\infty}T + T^2)$ et $\lambda \geq C$, d'où (3.132) se déduit facilement.
Estimons la trace de φ en fonction de φ et $\nabla\varphi$. On note que

$$\begin{aligned}
& -s^2\lambda^3 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2(\nabla\eta^0.\nabla\varphi)\varphi dxdt \\
=\ & -\frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2\frac{\partial\eta^0}{\partial n}\left|\varphi\right|^2 d\sigma dt \\
& +\frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_Q \nabla.(e^{-2s\alpha}\xi^2\nabla\eta^0)\left|\varphi\right|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.139}$$

En tenant compte du lemme 2.2.1, on en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned}
& s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2 \left|\varphi\right|^2 d\sigma dt \\
\leq\ & Cs^2\lambda^3 \iint_Q \left|\nabla.(e^{-2s\alpha}\xi^2\nabla\eta^0)\right| \left|\varphi\right|^2 dxdt \\
& +C\left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt + s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt\right) \\
\leq\ & C\left(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 \left|\varphi\right|^2 dxdt + s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi \left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt\right),
\end{aligned} \tag{3.140}$$

avec $s \geq C(T^2 + T)$ et $\lambda \geq C$.

Cette dernière inégalité avec (3.112) et (3.138), donnent (3.99) et permet d'achever la preuve du lemme 3.3.1. ■

3.3.2 Démonstration du théorème 3.3.1

Cette partie est consacrée à démontrer le théorème 3.3.1. Ce sera une conséquence de l'inégalité de Carleman (3.99).

On va commencer avec une majoration explicite de la solution faible du problème linéaire

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B(x,t).\nabla y + a(x,t)y = f(x,t) & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + \beta(x,t)y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.141}$$

où $f \in L^2(Q), y^0 \in L^2(Q)$ et (3.97) est remplie. Ensuite, on va utiliser ce résultat en combinant avec (3.99) pour en déduire l'inégalité d'observabilité (3.103) pour les solutions de (3.101). Enfin, nous allons mettre fin à la démonstration du théorème 3.3.1 d'une manière classique, en utilisant cette inégalité d'observabilité.

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses précédentes, la solution faible de (3.141) satisfait l'éstimation suivante*

$$\|y\|_Y \leq e^{CT(1+\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2)}(\|f\|_{L^2(Q)} + \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.142}$$

pour une certaine constante $C > 0$. Ici, $Y = L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$

Preuve. L'existence et l'unicité d'une solution de (3.141) est bien connue. Par ailleurs, l'identité suivante peut être déduite pour chaque $t \in (0,T)$ d'une manière standard :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |y(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla y(x,t)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} \beta(x,t)\,|y(x,t)|^2\,d\sigma \\ &+ \int_\Omega B(x,t).\nabla y(x,t)y(x,t)dx + \int_\Omega a(x,t)\,|y(x,t)|^2\,dx \\ = &\int_\Omega f(x,t)y(x,t)dx. \end{aligned} \tag{3.143}$$

Nous allons maintenant utiliser l'éstimation de la trace pour les fonctions de $H^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} |u|^2\,d\sigma \leq C\left(\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (|u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ \forall u \in H^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.144}$$

pour une certaine constante positive $C = C(\Omega, O)$. Cette inégalité peut être prouver en la faisant valoir d'abord pour des fonctions régulières, puis en passant à la limite.

Compte tenu de (3.143) et (3.144), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|y(x,t)|^2\,dx+\int_{\Omega}|\nabla y(x,t)|^2\,dx\\
\leq\ & -\int_{\Omega}B(x,t).\nabla y(x,t)y(x,t)dx-\int_{\Omega}a(x,t)\,|y(x,t)|^2\,dx\\
&+\int_{\Omega}f(x,t)y(x,t)dx+C\,\|\beta\|_{\infty}\,\|y(.,t)\|_{H^1(\Omega)}\,\|y(.,t)\|_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned}\tag{3.145}$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,\|y(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|y(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)}\\
\leq\ & C((1+\|a\|_{\infty}+\|B\|^2_{\infty}+\|\beta\|^2_{\infty})\,\|y(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|f(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}\tag{3.146}$$

pour tout $t\in(0,T)$. A partir de ces éstimations et le lemme de Gronwall on obtient (3.142).

Ceci termine la preuve. ■

L'éstimation d'observabilité annoncée est démontré dans le resultat suivant :

Proposition 3.3.2 *Pour chaque $\varphi^0\in L^2(\Omega)$ la solution associée à (3.101) vérifie l'inégalité d'observabilité*

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\varphi|^2\,dxdt\leq K\iint_{O\times(0,T)}|\varphi|^2\,dxdt,\tag{3.147}$$

pour une constante K de la forme

$$K=e^{C(1+\frac{1}{T}+\|a\|_{\infty}^{\frac{2}{3}}+\|B\|^2_{\infty}+\|\beta\|^2_{\infty})}.\tag{3.148}$$

Preuve. Soit $\varphi^0\in L^2(\Omega)$. Si on prend dans (3.99),

$$f_1=-a\varphi\in L^2(Q),\,f_2=\varphi B\in L^2(Q)^N,\,f_3=-\beta\varphi\in L^2(\Sigma).$$

Ainsi, on peut appliquer le lemme 3.3.1 à φ et en déduire que

$$\begin{aligned}
&s\lambda^2\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi\,|\nabla\varphi|^2\,dxdt+s^3\lambda^4\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt+s^2\lambda^3\int\int_{\Sigma}e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\varphi|^2\,d\sigma dt\\
\leq\ & C\left(\|a\|^2_{\infty}\iint_Q e^{-2s\alpha}\,|\varphi|^2\,dxdt+s^2\lambda^2\,\|B\|^2_{\infty}\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2\,|\varphi|^2\,dxdt\right.\\
&\left.+s\lambda\,\|\beta\|^2_{\infty}\iint_{\Sigma}e^{-2s\alpha}\xi\,|\varphi|^2\,d\sigma dt+s^3\lambda^4\iint_{O\times(0,T)}e^{-2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt\right)
\end{aligned}\tag{3.149}$$

pour tout $\lambda\geq\overline{\lambda}$ et tout $s\geq\overline{\sigma}(e^{4\lambda\|\eta^0\|_{\infty}}T+T^2)$.

On va essayer d'éliminer les termes globaux du premier membre de cette inégalité en faisant un choix convenable du paramètre s

Prenant $s \geq CT^2(\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|B\|_\infty^2)$,on voit que

$$\begin{aligned} & C\left(\|a\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 \, dxdt + s^2\lambda^2 \|B\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2 |\varphi|^2 \, dxdt \right) \\ \leq \;& \frac{1}{2}s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{3.150}$$

D'autre part, on prend $s \geq CT^2 \|\beta\|_\infty^2$, on trouve que

$$Cs\lambda \|\beta\|_\infty^2 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi |\varphi|^2 \, d\sigma dt \leq \frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2 |\varphi|^2 \, d\sigma dt. \tag{3.151}$$

Tout cela mène à l'éstimation

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 \, dxdt \leq C \iint_{O\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3 |\varphi|^2 \, dxdt, \tag{3.152}$$

qui est vraie pour $\lambda \geq \overline{\lambda}$ et $s \geq \overline{\sigma}(e^{4\lambda\|\eta^0\|_\infty}T + T^2(1 + \|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|B\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2)$.

Prenant en compte les propriétés des fonctions poids ainsi que le choix de s et λ que nous avons fait, il n'est pas difficile de vérifier que la fonction

$$t \longmapsto e^{\left(-2s\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(t)\right)} \min_{x\in\overline{\Omega}}\xi(t)^3$$

atteint son minimum dans $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$ en $\frac{T}{4}$ et que la fonction

$$t \longmapsto e^{\left(-2s\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(t)\right)} \max_{x\in\overline{\Omega}}\xi(t)^3$$

atteint son maximum dans $(0,T)$ en $\frac{T}{2}$. Avec cela, l'inégalité de Carleman précédente donne directement

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt \;\; \leq \;\; & Ce^{\left(-2s(\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(x,\frac{T}{2}) - \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(x,\frac{T}{4}))\right)} \\ & \times \min_{x\in\overline{\Omega}}\xi(x,\frac{T}{4})^{-3} \max_{x\in\overline{\Omega}}\xi(x,\frac{T}{2})^3 \iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt, \end{aligned} \tag{3.153}$$

pour le même choix de paramètre s et λ.

Maintenant, on prend $\lambda = \overline{\lambda}$ et $s = \overline{s} = \overline{\sigma}(e^{4\overline{\lambda}\|\eta^0\|_\infty}T + T^2(1 + \|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|B\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2)$, on a

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi|^2 \, dxdt \leq C(\Omega,O)e^{C(\Omega,O)\overline{s}/T^2} \int\int_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt, \tag{3.154}$$

ce qui donne (3.147) et (3.148).

Ceci termine la preuve de la proposition 3.3.2 ■

Nous allons maintenant terminer la preuve du théorème 3.3.1

On va introduire une fonction $\eta \in C^\infty(0,T)$, avec

$$\begin{cases} \eta(t) = 1 & \text{pour } \; t \in (0, \frac{T}{4}), \\ \eta(t) = 0 & \text{pour } \; t \in (\frac{3T}{4}, T) \\ |\eta'(t)| \leq \frac{C}{T} & \text{pour } \; t \in (0,T). \end{cases} \tag{3.155}$$

Soit χ la solution faible du système

$$\begin{cases} \chi_t - \Delta\chi + B(x,t).\nabla\chi + a(x,t)\chi = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial\chi}{\partial n} + \beta(x,t)\chi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \chi(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.156}$$

et posons $y = w + \eta\chi$. Si y est l'état associé à v, i.e. la solution de (3.96), alors w satisfait

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + B(x,t).\nabla w + a(x,t)w = -\eta'(t)\chi + v1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \beta(x,t)w = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ w(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.157}$$

Notre tache est de trouver un contrôle $v \in L^2(O \times (0,T))$ tel que la solution associée à (3.157) satisfait

$$w(T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3.158}$$

Aprés cela, il suffit de prendre $y = w + \eta\chi$ nous aurons prouvé notre résultat avec un contrôle dans $L^2(O \times (0,T))$.

Pour chaque $\epsilon > 0$, On considère la fonctionnelle J_ϵ, avec

$$\begin{cases} J_\epsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2}\displaystyle\iint_{O\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dxdt + \epsilon \left\|\varphi^0\right\|_{L^2(\Omega)} - \iint_Q \eta'\chi\varphi dxdt \\ \forall\varphi^0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.159}$$

où, pour chaque $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, φ est la solution de (3.101) associée à φ^0.

La fonctionnelle

$$\varphi^0 \longmapsto J_\epsilon(\varphi^0)$$

est continue, strictement convexe et coercive dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, elle possède un unique minimum φ^0_ϵ et il n'est pas difficile de verifier que $\varphi^0_\epsilon = 0$ si et seulement si la solution $\widetilde{w}$ de (3.157) associée à $v = 0$ satisfait $\|\widetilde{w}(.,T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$.

On désigne par φ_ϵ la solution de (3.101) associée à φ^0_ϵ, posons

$$v_\epsilon = \varphi_\epsilon 1_O$$

et on note par w_ϵ la solution de (3.157) associée au contrôle v_ϵ. Alors

$$\|w_\epsilon(.,T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon. \tag{3.160}$$

En effet, il n'est pas restrictif de supposer que $\varphi^0_\epsilon \neq 0$. Et par conséquent, J_ϵ est différentiable en φ^0_ϵ et

$$(J'_\epsilon(\varphi^0_\epsilon), \varphi^0) = 0 \qquad \forall\varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

Cela veut dire,

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{O\times(0,T)} \varphi_\epsilon\varphi \; dxdt \; + \epsilon\left(\frac{\varphi^0_\epsilon}{\|\varphi^0_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0\right)_{L^2(\Omega)} - \iint_Q \eta'\chi\varphi dxdt = 0 \\ \forall\varphi^0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.161}$$

Et comme

$$\iint_{O\times(0,T)} \varphi_\epsilon \varphi \, dxdt - \iint_Q \eta' \chi \varphi dxdt = (w_\epsilon(.,T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.162}$$

alors, on a

$$(w_\epsilon(.,T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} = -\epsilon(\frac{\varphi_\epsilon^0}{\|\varphi_\epsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega), \tag{3.163}$$

ce qui implique (3.160).
Et comme

$J_\epsilon(\varphi_\epsilon^0) \leq J_\epsilon(0) = 0$, on a aussi

$$\begin{aligned} &\|v_\epsilon\|^2_{L^2(O\times(0,T))} \\ \leq\ &\left(\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\varphi_\epsilon|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\eta'\chi|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.164}$$

A partir de la proposition 3.3.2 et la définition de v_ϵ, on déduit maintenant que

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2(O\times(0,T))} \leq \frac{C}{T} K^{\frac{1}{2}} \|v_\epsilon\|_{L^2(Q)} \left(\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\chi|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.165}$$

et, en utilisant la proposition 3.3.1, alors on a

$$\|v_\epsilon\|_{L^2(O\times(0,T))} \leq CK^{\frac{1}{2}} \|\chi\|_Y \leq H \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.166}$$

où la constante H est donnée dans (3.106).
Par conséquent, $v_\epsilon 1_O$ et w_ϵ sont uniformément bornés dans les espaces $L^2(Q)$ et

$$Z = \{w \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) : w_t \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))\},$$

respectivement. On peut donc extraire une sous suite qui converge faiblement à un contrôle $v1_O$ et une sous suite (avec le même indice) de w_ϵ qui converge faiblement vers la solution w de (3.157), avec

$$w(T) = 0 \qquad \text{dans } \Omega.$$

Nous avons donc démontrer l'existence d'un contrôle $v \in L^2(Q)$ tels que (3.105) et (3.158) sont satisfaites.
Ceci termine la démonstration du théorème 3.3.1.

3.4 Contrôlabilité exacte aux trajectoires de l'équation de réaction-diffusion semilinéaire avec conditions au bord de type Fourier.

A l'aide des résultats établis dans la partie précédente, on va démontrer la contrôlabilité exacte (globale) aux trajectoires du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_t - \Delta y + F(y, \nabla y) = v1_O & \text{dans} & Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + f(y) = 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans} & \Omega. \end{array} \right. \tag{3.167}$$

Dans ce cas, on considèrera $y^0 \in L^\infty(\Omega)$ et deux fonctions $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il est raisonnable de supposer que f ne décroit pas et que $f(0) = 0$.

L'objectif principal de cette partie est d'analyser les propriétés de contrôlabilité du système non-linéaire (3.167). On fixe une trajectoire non contrôlée du système (3.167) :

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \Delta\overline{y} + F(\overline{y}, \nabla\overline{y}) = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial\overline{y}}{\partial n} + f(\overline{y}) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \overline{y}(0) = \overline{y}^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.168}$$

Les hypothèses que l'on impose à cette trajectoire sont :

$$\overline{y} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q), \quad \overline{y}^0 \in L^\infty(\Omega). \tag{3.169}$$

Il sera dit que (3.167) est exactement contrôlable aux trajectoires au temps T si, pour toute solution de (3.168) et de tout $y^0 \in L^\infty(\Omega)$, il existe des contrôles $v \in L^2(O \times (0,T))$ et des solutions associées $y \in C^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ telles que

$$y(T) = \overline{y}(T) \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.170}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.4.1 *Supposons que F et f sont deux fonctions localement Lipschitziennes qui verifient*

$$\begin{aligned} \lim_{|s|\to\infty} \frac{|F(s,p) - F(r,p)|}{|s-r|\log^{3/2}(1+|s-r|)} &= 0 \\ \textit{uniformement en } (r,p) &\in [-K,K]\times\mathbb{R}^N \qquad \forall K > 0 \end{aligned} \tag{3.171}$$

$$\begin{cases} \forall L > 0, \exists M > 0 \textit{ tel que} \\ |F(s,p) - F(r,p)| \le M\,|s-r|\,, \qquad |F(s,p) - F(s,q)| \le M\,|p-q| \\ \forall (s,r,p,q) \in [-L,L]^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.172}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s) - f(r)|}{|s-r|\log^{1/2}(1+|s-r|)} &= 0 \\ \textit{uniformement en } r &\in [-K,K] \quad \forall K > 0. \end{aligned} \tag{3.173}$$

Alors, pour chaque $T > 0$, on a la contrôlabilité exacte aux trajectoires $\overline{y}$ qui verifient (3.169) avec des contrôles $v \in L^\infty(O \times (0,T))$.

Avant de commencer la preuve du théorème 3.4.1, on a besoin d'un résultat de contrôlabilité à zéro pour le système linéaire (3.96) avec des contrôles dans $L^\infty(O \times (0,T))$.

3.4.1 Un résultat de nulle contrôlabilité pour le système linéaire.

Proposition 3.4.1 *Pour tout $T > 0$, le système (3.96) est contrôlable à zéro avec des contrôles dans $L^\infty(O \times (0;T))$. De plus, on peut trouver les contrôles v satisfaisant*

$$\|v\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \le e^{C(\Omega,O)K(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty,\|\beta\|_\infty)} \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.174}$$

$$K = 1 + 1/T + \|a\|_\infty^{2/3} + \|B\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2 + T(1 + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2). \tag{3.175}$$

Pour la démonstration de la proposition 3.4.1, nous aurons besoin d'un résultat de régularité locale pour les solutions de l'équation linéaire de la chaleur avec des coéfficients a, B dans $L^\infty(Q)$.

Lemme 3.4.1 *Notons* Y *l'espace* $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$*. Soit* $y \in Y$ *solution de l'équation*

$$y_t - \Delta y + a(x,t)y + B(x,t).\nabla y = f, \tag{3.176}$$

où $a \in L^\infty(Q), B \in L^\infty(Q)^N$ *et* $f \in L^2(Q)$*. Soit* $\omega \subset \Omega$ *un ouvert non vide et on suppose que* $f \in L^\infty(\omega \times (0,T))$*. Alors,*

$$y \in L^\infty(\delta, T; W^{1,\infty}(\omega'))$$

pour tout $\delta \in (0,T)$ *et tout ouvert non vide* $\omega' \subset \omega$*. Il existe une constante* $C(\omega')$ *telle que l'estimation suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(\delta,T;W^{1,\infty}(O'))} \leq\ & C(\omega')(T^{1/2}+T^{N/2}) \times \\ & \left(1+\delta^{-1}+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty\right)^{N+1}\Big(\|y\|_Y+\|f\|_{L^\infty(\omega\times(0,T))}\Big). \end{aligned} \tag{3.177}$$

La régularité précédente reste vraie pour $\delta = 0$ *si, à côté de (3.176), on a* $y(x,0) = 0$ *dans* Ω*. Dans ce cas, on a une estimation similaire à (3.177) sans* δ*.*

La preuve de ce lemme se trouve dans [10]

Preuve de la proposition 3.4.1. Nous introduisons d'abord un contrôle $L^2(O\times(0,T))$ qui conduit la solution de (3.96) à zéro au temps T . Dans une deuxième étape, en utilisant un argument de régularité conduira au contrôle L^∞ désiré.

Soit $y^0 \in L^2(\Omega)$ et soient O' et O'' deux ouverts avec $O'' \subset\subset O' \subset\subset O$. Alors, si l'on utilise le théorème 3.3.1 avec domaine de contrôle O', on déduit qu'il existe un contrôle $\widetilde{v} \in L^2(O''\times(0,T))$ tel que la solution $\widetilde{y}$ de (3.96) vérifie $\widetilde{y}(T) = 0$ et on a l'estimation

$$\|\widetilde{v}\|_{L^2(O''\times(0,T)} \leq e^{C(\Omega,O)K(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty,\|\beta\|_\infty)}\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.178}$$

avec K de la forme (3.175).

On introduit maintenant une fonction de trancature $\eta \in C^\infty([0,T])$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 1 \quad \text{dans } (0,T/4), \quad \eta(t)=0 \quad \text{dans } (3T/4,T) \\ 0 &\leq |\eta(t)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\eta'(t)| \leq \frac{C}{T} \quad \text{dans } (0,T) \end{aligned}$$

et on considère χ du système

$$\begin{cases} \chi_t - \Delta\chi + B.\nabla\chi + a\chi = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial\chi}{\partial n} + \beta\chi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \chi(0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors, $\widetilde{w} = \widetilde{y} - \eta\chi$ satisfait

$$\begin{cases} \widetilde{w}_t - \Delta\widetilde{w} + B.\nabla\widetilde{w} + a\widetilde{w} = -\eta'(t)\chi + \widetilde{v}1_{O''} & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial\widetilde{w}}{\partial n} + \beta\widetilde{w} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \widetilde{w}(0) = 0, \quad \widetilde{w}(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.179}$$

Notre objectif est de construire un contrôle $v \in L^\infty(O \times (0,T)$ qui conduit la solution de (3.175) à zéro au temps $t = T$.

On considère ensuite un ouvert O_0 avec $O' \subset\subset O_0 \subset\subset O$ et une fonction de trancature ξ qui vérifie

$$\xi \in C_0^2(O_0) \quad \text{et} \quad \xi \equiv 1 \quad \text{dans } O'.$$

Alor, si on pose $w = (1-\xi)\widetilde{w}$ on a :

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + B.\nabla w + aw = -\eta'(t)\chi + v1_O & \text{dans } \; Q, \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w = 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ w(0) = 0, \quad w(T) = 0 & \text{dans } \quad \Omega, \end{cases}$$

avec

$$v = \eta'\xi\chi + 2\nabla\xi.\nabla\widetilde{w} + \Delta\xi\widetilde{w} - B.\nabla\xi\widetilde{w}. \tag{3.180}$$

Remarquons que supp$v \subset O \times [0,T]$. Par conséquent, si on démontre que $v \in L^\infty(O \times (0,T))$, on aura que la solution $y = w + \eta\chi$ (avec ce v) résout le problème de contrôlabilité à zéro de (3.96).

Ainsi, on vérifie que $v \in L^\infty(O \times (0,T))$ et on estime sa norme dans cette espace :

• La régularité du premier terme du second membre de (3.180) est déduite par la régularité interieure de χ non seulement en espace mais aussi en temps. D'aprés le lemme 3.4.1 avec $\omega = O$ on déduit que $\chi \in L^\infty(O_0 \times (\delta,T))$ avec supp$\xi \subset O_0 \subset\subset O$ (nous avons même $\chi \in L^\infty((\delta,T) \times W^{1,\infty}_{loc}(O)))$ et

$$\|\chi\|_{L^\infty(O_0\times(\delta,T))} \le C(T^{1/2} + T^{N/2})(1 + \delta^{-1} + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)^{N+1} \|\chi\|_Y .$$

par conséquent, si on prend $\delta = T/8$, puisque $\eta' \equiv 0$ dans $(0,T/4)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\eta'\xi\chi\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \;\; \le \;\; & CT^{-1}(T^{1/2} + T^{N/2}) \times \\ & (1 + T^{-1} + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)^{N+1} \|\chi\|_Y . \end{aligned}$$

• La régularité des trois autres termes du second membre de (3.180) est déduite de la régularité interieure en espace de $\widetilde{w}$. On introduit O_1avec $O_0 \subset\subset O_1 \subset\subset O$ et on applique le lemme 3.4.1 avec $\omega = O_1 \backslash \overline{O''}$. On obtient $\widetilde{w} \in L^\infty((0,T) \times W^{1,\infty}(O_0 \backslash \overline{O'}))$ et l'estimation

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}\|_{L^\infty((0,T)\times W^{1,\infty}(O_0\backslash\overline{O'}))} \;\; \le \;\; & C(T^{1/2} + T^{N/2}) \times \\ & (1 + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)^{N+2}(\|\widetilde{w}\|_Y . + \|\eta'\chi\|_{L^\infty(O_1\times(0,T))}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \|2\nabla\xi.\nabla\widetilde{w} + \Delta\xi\widetilde{w} - B.\nabla\xi\widetilde{w}\|_{L^\infty(O\times(0,T)} \le C(T^{1/2} + T^{N/2})\times \\ (1 + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)^{N+2}(\|\widetilde{w}\|_Y + \|\eta'\chi\|_{L^\infty(O_1\times(0,T))}). \end{cases}$$

Rassemblant les éstimations précédentes, nous obtenons que $v \in L^\infty(O \times (0,T))$ et

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \;\; \le \;\; & C(1 + T^{N-1}) \times \\ & (1 + T^{-1} + \|a\|_\infty + \|B\|_\infty)^{2N+3}(\|\widetilde{w}\|_Y + \|\chi\|_Y). \end{aligned} \tag{3.181}$$

A ce point, notons que pour tout $f \in L^2(Q)$ et pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$ la solution du système linéaire

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + B.\nabla y + ay = f & \text{dans } \; Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + \beta y = 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.182}$$

satisfait

$$\|y\|_Y \leq e^{CT(1+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)}(\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}).$$

Ceci peut être utilisé pour estimer $\|\widetilde{w}\|_Y$ et $\|\chi\|_Y$ en fonction de $\|\widetilde{v}\|_{L^2(O\times(0,T))}$ et $\|y^0\|_{L^2(\Omega)}$. Compte tenu de (3.181), on voit que

$$\|v\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq L(\|\widetilde{v}\|_{L^2(O''\times(0,T))} + \left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)}), \tag{3.183}$$

où

$$\begin{aligned} L &= CT^{-1}(1+T^{N-1})(1+T^{-1}+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty)^{2N+3}\times \\ &\quad \exp\left\{CT(1+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)\right\}. \end{aligned}$$

En combinant cette estimation et (3.178), on obtient finalement que

$$\|v\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq e^{C(\Omega,O)K(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty,\|\beta\|_\infty)}\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.184}$$

où K est donné par (3.175).

Ceci, achève la preuve de la proposition 3.4.1. ■

Un autre résultat que l'on utilisera pour démontrer le théorème 3.4.1 est une estimation L^∞ des solutions du système (3.96)

Proposition 3.4.2 *Supposons que $f \in L^\infty(Q)$, $y^0 \in L^\infty(\Omega)$ et que les coéfficients a, B, β sont dans L^∞. Alors $y \in L^\infty(Q)$ et on a*

$$\|y\|_\infty \leq e^{CT(1+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)}(\left\|y^0\right\|_\infty + \|f\|_\infty) \tag{3.185}$$

avec une constante C ne dépendant que de Ω.

Preuve. On va considérer deux situations différentes :

Cas 1- On va d'abord supposer que $a \geq 1$ et $\beta \geq 0$ et on va établir (3.185) dans ce cas. En fait, on va montrer que, sous ces hypothèses,

$$\|y\|_\infty \leq \left\|y^0\right\|_\infty + \|f\|_\infty \tag{3.186}$$

En effet, on va introduire le système

$$\left\{\begin{array}{lll} z_t - \Delta z + B(x,t).\nabla z + a(x,t)z = h & \text{dans} & Q, \\ \frac{\partial z}{\partial n} + \beta(x,t)z = k & \text{sur} & \Sigma, \\ z(0) = z^0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right.$$

où $h \in L^\infty(Q)$, k$\in L^\infty(\Sigma)$ et $z^0 \in L^\infty(\Omega)$ et on va montrer que, si h, z^0 et k sont positives, alors c'est aussi le cas pour z.

En effet, en multipliant l'équation satisfaite par z par $z_-(.,t)$ (la partie négative de $z(.,t)$ pour chaque $t \in (0,T)$) et en intégrant par partie sur Ω, aprés plusieurs simplifications, on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |z_-(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla z_-(x,t)|^2\,dx \\ &+\int_{\partial\Omega}(\beta(x,t)\,|(z_-(x,t)|^2 - k(x,t))z_-(x,t))d\sigma + \int_\Omega a(x,t)\,|z_-(x,t)|^2\,dx \\ = &\int_\Omega h(x,t)z_-(x,t)dx - \int_\Omega B(x,t).\nabla z_-(x,t)z_-(x,t)dx. \end{aligned}$$

A partir de cette identité, en vu de la positivité de a, h, β et k , on déduit facilement que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |z_-(x,t)|^2\, dx \leq \|B\|_\infty^2 \int_{\Omega} |z_-(x,t)|^2\, dx$$

d'où $z \geq 0$ dans Q.

Maintenant, soit $M > 0$ suffisament large (choisi ci-dessous). La fonction $z = M - y$ satisfait

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + B(x,t).\nabla z + a(x,t)z = a(x,t)M \ - f & \text{dans } \ Q, \\ \frac{\partial z}{\partial n} + \beta(x,t)z = \beta(x,t)M & \text{sur } \quad \Sigma, \\ z(0) = M - y^0 & \text{dans } \ \Omega, \end{cases}$$

Par conséquent, si on prend

$$M \geq \max\left\{ \|f\|_{L^\infty(Q)}, \left\|y^0\right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\},$$

on peut appliquer l'argument précédent et en déduire que $y \leq M$. De même manière, on peut déduire que $y \geq -M$ et, par conséquent, $|y| \leq M$. Cela prouve que lorsque $a \geq 1$ et $\beta \geq 0$, l'estimation (3.186) a lieu.

Cas 2- On va maintenant prouver (3.185) pour des coéfficients L^∞.

Soit $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$ une fonction qui satisfait

$$\begin{aligned} \gamma \ &\geq \ 0 \ \text{ dans } \Omega, & \frac{\partial \gamma}{\partial n} &\leq - \|\beta\|_\infty \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \quad \|\gamma\|_\infty \leq 1, \\ \|\nabla\gamma\|_\infty \ &\leq \ C\|\beta\|_\infty, & \left\|D^2\gamma\right\|_\infty &\leq C\|\beta\|_\infty^2. \end{aligned} \tag{3.187}$$

Nous donnons ici une preuve de l'existence d'une telle fonction γ. A cet effet, soit $\delta > 0$ un paramètre (dépendant de Ω) tels que

$$x \in \Omega_\delta \mapsto \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

est C^2, avec $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \delta\}$. On distingue deux cas.

Supposons d'abord que $\|\beta\|_\infty \geq 1/\delta$. Ensuite on prend $\gamma(x) \equiv 1$ dans $\Omega\backslash\Omega_\delta$, $\gamma(x) = \|\beta\|_\infty \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ dans Ω_ϵ avec $\epsilon = 1/(2\|\beta\|_\infty)$ et une régularisation de γ dans $\Omega_\delta\backslash\Omega_\epsilon$. Cela donne les propriétés souhaitées de γ.

D'autre part, si $\|\beta\|_\infty < 1/\delta$, on prend $\gamma(x) = \delta\|\beta\|_\infty$ dans $\Omega\backslash\Omega_\delta$, $\gamma(x) = \|\beta\|_\infty \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ dans $\Omega_{\delta/2}$ et une régularisation de γ dans $\Omega_\delta\backslash\Omega_{\delta/2}$. Cela fournit également une fonction désirée dans ce cas.

On pose maintenant, $\widehat{y} = e^{\gamma(x)}y$. Alors, $\widehat{y}$ satisfait

$$\begin{cases} \widehat{y}_t - \Delta\widehat{y} + \widehat{B}(x,t).\nabla\widehat{y} + \widehat{a}(x,t)\widehat{y} = e^{\gamma(x)}f & \text{dans } \ Q, \\ \frac{\partial \widehat{y}}{\partial n} + \widehat{\beta}(x,t)\widehat{y} = 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ \widehat{y}(0) = e^{\gamma(x)}y^0 & \text{dans } \ \Omega, \end{cases} \tag{3.188}$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{a} \ &= \ a + \Delta\gamma - |\nabla\gamma|^2 - B.\nabla\gamma, \\ \widehat{B} \ &= \ B + 2\nabla\gamma, \quad \widehat{\beta} = \beta - \frac{\partial\gamma}{\partial n} \geq 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Remarquons que, à partir de l'inégalité (3.187) satisfaite par γ, on sait que

$$\begin{array}{rcl} \left|a+\Delta\gamma-|\nabla\gamma|^2-B.\nabla\gamma\right| & \leq & C_1(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2) \quad \text{dans } Q \\ \text{pour un certain } C_1 & > & 0. \end{array}$$

Maintenant, on pose

$$\widetilde{y}=e^{-(C_1(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)+1)t}\widehat{y}.$$

Alors $\widetilde{y}$ satisfait

$$\begin{cases} \widetilde{y}_t-\Delta\widetilde{y}+(B(x,t)+2\nabla\gamma(x)).\nabla\widetilde{y}+\widetilde{a}(x,t)\widetilde{y}=\widetilde{f} & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial n}+\widetilde{\beta}(x,t)\widetilde{y}=0 & \text{sur } \Sigma, \\ \widetilde{y}(0)=e^{\gamma(x)}y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{a} & = & a+\Delta\gamma-|\nabla\gamma|^2-B.\nabla\gamma+C_1(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)+1, \\ \widetilde{f} & = & e^{-(C_1(\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)+1)t+\gamma(x)}f \\ \text{et } \widetilde{\beta} & = & \widehat{\beta}. \end{array}$$

Puisque $\widetilde{a}\geq 1$ et $\widetilde{\beta}\geq 0$. On peut appliquer le cas 1 à $\widetilde{y}$. Cela donne les estimations

$$\|y\|_\infty\leq\|\widetilde{y}\|_\infty\leq e^{CT(1+\|a\|_\infty+\|B\|_\infty^2+\|\beta\|_\infty^2)}(\left\|y^0\right\|_\infty+\|f\|_\infty),$$

d'où on déduit (3.185). ■

Preuve du théorème 3.4.1. Soit $y^0\in L^\infty(\Omega)$ et $\overline{y}$ être donné et supposons que $\overline{y}$ satisfait (3.168) et (3.169) au sens faible. On considère le système non-linéaire

$$\begin{cases} w_t-\Delta w+F_1(w,\nabla w,x,t)w+F_2(\nabla w,x,t).\nabla w=v1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial w}{\partial n}+F_3(w;x,t)w=0 & \text{sur } \Sigma, \\ w(0)=y^0-\overline{y}(0) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.189}$$

où on a utilisé la notation

$$F_1(s,p;x,t)=\frac{F(\overline{y}(x,t)+s,\nabla\overline{y}(x,t)+p)-F(\overline{y}(x,t),\nabla\overline{y}(x,t)+p)}{s} \tag{3.190}$$

$$F_2=(F_{21},F_{22},....,F_{2N}),\qquad F_{2j}(p;x,t)=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial p_j}(\overline{y}(x,t),\nabla\overline{y}(x,t)+\lambda p)d\lambda \tag{3.191}$$

et

$$F_3(s;x,t)=\frac{f(\overline{y}(x,t)+s)-f(\overline{y}(x,t))}{s} \tag{3.192}$$

pour $s\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{R}^N$.

On va démontrer qu'il existe un contrôle $v\in L^\infty(O\times(0,T))$ et une solution associée à (3.189) telle que

$$w(x,T)=0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.193}$$

Avec ce contrôle et l'état $y=w+\overline{y}$, on aura résolu le problème de contrôlabilité pour (3.167) et on aura ainsi prouvé le théorème 3.4.1. On se restreint (par densité) au cas où les fonctions F et f ont une dérivée continue.

Le cas où F et f sont C^1

L'idée de la preuve est bien connue : nous introduisons une fonction multivoque appropriée et on vérifie qu'elle possède au moins un point fixe, ce sera une solution au problème de contrôlabilité à zéro associé à (3.189).

Pour chaque $R > 0$, on considère la fonction

$$M_R(s) = \begin{cases} -R & \text{si } \; s < -R \\ s & \text{si } \; -R \leq s \leq R \\ R & \text{si } \; s > R. \end{cases}$$

On note par Z l'espace de Hilbert $Z = L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et on pose pour chaque $R > 0$ et chaque $z \in Z$

$$\begin{aligned} a_{R,z}(x,t) &= F_1(M_R(z(x,t)), \nabla z(x,t); x, t), \\ B_z(x,t) &= F_2(\nabla z(x,t); x, t), \end{aligned}$$

et

$$\beta_{R,z}(x,t) = F_3(M_R(z(x,t)); x, t).$$

On considère la contrôlabilité du problème linéaire

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + a_{R,z}(x,t)w + B_z(x,t).\nabla w = v1_O & \text{dans } \; Q, \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \beta_{R,z}(x,t)w = 0 & \text{sur } \; \Sigma, \\ w(0) = y^0 - \overline{y}(0) & \text{dans } \; \Omega, \end{cases} \tag{3.194}$$

et avec (3.193).

A partir de (3.169), (3.172) et le fait que $f \in C^1(\mathbb{R})$, on a

$$a_{R,z} \in L^\infty(Q), \qquad B_z \in L^\infty(Q)^N \quad \text{et} \quad \beta_{R,z} \in L^\infty(\Sigma).$$

Par conséquent, compte tenu de la proposition 3.4.1, (3.193), (3.194) peut être résolu avec des contrôles dans $L^\infty(O \times (0,T))$.

On pose $T_R = \min\left\{T, a_R^{-1/3}\right\} > 0$, où

$$a_R = \sup_{|s| \leq R, \; p \in \mathbb{R}^N} \; \sup_{(x,t) \in Q} ess \, |F_1(s,p;x,t)| \, .$$

On peut suivre les étapes de la section 3.3 et de construire un contrôle $v_{R,z} \in L^\infty(O \times (0,T_R))$ tels que la solution $w_{R,z}$ de (3.194) dans $\Omega \times (0,T_R)$ vérifie

$$w_{R,z}(x,T_R) = 0 \;\; \text{dans } \Omega.$$

Les éstimations que nous avons pu établir dans les propositions 3.4.1 et 3.4.2 écrites pour $v_{R,z}$ et $w_{R,z}$ avec le temps T_R donnent maintenant

$$\|v_{R,z}\|_{L^\infty(O \times (0,T_R))} \leq C_R \left\|w^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.195}$$

$$\|w_{R,z}\|_{L^2((0,T_R);H^1(\Omega))} \leq C_R \left\|w^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.196}$$

$$\|w_{R,z}\|_{L^\infty(\Omega \times (0,T_R))} \leq C_R \left\|w^0\right\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.197}$$

où

$$C_R = \exp\left\{C(\Omega, O, T)(1 + a_R^{2/3} + \overline{B}^2 + \beta_R^2)\right\},$$

$$\overline{B} = \sup_{p\in\mathbb{R}^N} \sup_{(x,t)\in Q} ess \left|F_2(p;x,t)\right|$$

$$\beta_R = \sup_{|s|\leq R} \sup_{(x,t)\in\Sigma} ess \left|F_3(s;x,t)\right|.$$

En fait, les éstimations obtenues dans la section précédente impliquent (3.195)-(3.197) avec C_R remplcée par $C_R(z)$, où

$$C_R(z) = \exp\Big\{C(\Omega,O)(1+T_R^{-1}+T_R+\|a_{R,z}\|_\infty^{2/3}+\|B_z\|_\infty^2 \\ +\left\|\beta_{R,z}\right\|_\infty^2+T_R(\|a_{R,z}\|_\infty+\|B_z\|_\infty^2+\left\|\beta_{R,z}\right\|_\infty^2))\Big\};$$

mais en tenant compte des définitions de $T_R, a_R, \overline{B}$, et β_R il est clair que $C_R(z) \leq C_R$ pour tout $z \in Z$.

On peut maintenant prolonger par zéro les fonctions $v_{R,z}$ et $w_{R,z}$ pour $t \in (T_R, T)$. De cette façon, on a construit un contrôle $v_{R,z}$ et un état associé $w_{R,z}$ satisfaisant (3.193)-(3.194) et

$$\|v_{R,z}\|_{L^\infty(O\times(0,T))} \leq C_R\|w_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.198}$$

$$\|w_{R,z}\|_Z \leq C_R\|w_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.199}$$

$$\|w_{R,z}\|_\infty \leq C_R\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.200}$$

Nous allons maintenant introduire une multifonction menant à la solution à notre problème de contrôlabilité.

Nous considérons d'abord l'ensemble des contrôles admissibles $A_R(z)$. Par définition, c'est l'ensemble de contrôles $v_{R,z} \in L^\infty(O\times(0,T))$ qui mènent la solution de (3.194) à zéro au temps T et satisfait (3.198). Ensuite, pour chaque $z \in Z$, on note par $\Lambda_R(z)$ l'ensemble des états $w_{R,z}$, associés aux contrôles $v_{R,z} \in A_R(z)$ satisfaisant en plus (3.199) et (3.200). Compte tenu des arguments ci-dessus, $\Lambda_R(z)$ est un sous ensemble non vide de Z.

Le plan du reste de la preuve est le suivant :

– Nous allons d'abord voir que, pour chaque $R > 0$, Λ_R possède un point fixe w_R. Ce sera déduite par le théorème de Kakutani.

– Ensuite, nous allons trouver $R > 0$ (assez grand) tel que $M_R(w_R) = w_R$. A ce niveau, l'utilisation de la proposition 3.4.2 sera cruciale.

En conséquence, pour$R$ assez grand, le point fixe w_R de Λ_R sera, avec un certain $v_R \in L^\infty(O\times(0,T))$,une solution de (3.193)-(3.194).

Il reste à vérifier que le théorème de Kakutani peut être appliquée à Λ_R.

On a que $\Lambda_R(z)$ est un ensemble fermé convexe non vide de Z pour tout $z \in Z$.

Montrons que Λ_R est une multifonction d'un compact sur lui même. En fait, nous allons voir que Λ_R est une multifonction de Z dans un ensemble compact convexe fixe K_R.

Notre argument est le suivant : On choisit une suite arbitraire $\{x_n\}$ dans Z et une autre suite $\{w_n\}$ avec $w_n \in \Lambda_R(x_n)$ pour tout n et on prouve que $\{w_n\}$ possède une sous suite qui converge fortement.

Soient $\{x_n\}$ et $\{w_n\}$ deux suites données. D'aprés (3.198)-(3.200), les équations satisfaites par les fonctions w_n et le fait que $\|a_{R,z_n}\|_\infty \leq a_R$, $\|B_{z_n}\|_\infty \leq \overline{B}$ et $\left\|\beta_{R,z_n}\right\|_\infty \leq \beta_R$ pour tout $n \geq 1$, on déduit l'existence des sous suites $\{x_{n'}\}$ et $\{w_{n'}\}$ tels que

$$w_{n'} \longrightarrow w \qquad \text{faiblement dans } Z,$$

$$\begin{aligned} w_{n',t} &\longrightarrow w_t \qquad \text{faiblement dans } L^2(0,T);H^{-1}(\Omega)) \\ v_{n'} &\longrightarrow v \qquad \text{faiblement-} * \text{ dans } L^\infty(Q) \end{aligned}$$

quand $n' \longrightarrow \infty$. On peut supposer que les coéfficients associés à $z_{n'}$ convergent faiblement-$*$dans $L^\infty(Q)$ et $L^\infty(\Sigma)$. Ainsi, nous pouvons passer à la limite dans les formulations faibles satisfaites par $w_{n'}$ et on déduit que w et v satisfont

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + a(x,t)w + \theta(x,t) = v1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \beta(x,t)w = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ w(0) = w^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

pour certain $a \in L^\infty(Q)$ et $\beta \in L^\infty(\Sigma)$ où $\theta \in L^2(Q)$ est la limite faible de $B_{z_{n'}}.\nabla w_{n'}$ dans $L^2(Q)$. Après soustraction des équations satisfaites par les fonctions $w_{n'}$ et w, on trouve que

$$\begin{cases} (w_{n'} - w)_t - \Delta(w_{n'} - w) = a(x,t)w - a_{R,z_{n'}}(x,t)w_{n'} \\ \qquad +\theta(x,t) - B_{z_{n'}}(x,t).\nabla w_{n'} + (v_{n'} - v)1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial(w_{n'}-w)}{\partial n} + \beta_{R,z_{n'}}w_{n'} - \beta(x,t)w = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ (w_{n'} - w)(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega |(w_{n'} - w)(x,T)|^2\,dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla(w_{n'} - w)(x,s)|^2\,dxds \\ = &\int_0^T\int_{\partial\Omega} (\beta w - \beta_{R,z_{n'}}w_{n'})(w_{n'} - w)(x,s)d\sigma ds \\ &+\int_0^T\int_\Omega (aw - a_{R,z_{n'}}w_{n'})(w_{n'} - w)(x,s)dxds \\ &+\int_0^T\int_\Omega (\theta - B_{z_{n'}}.\nabla w_{n'})(w_{n'} - w)(x,s)dxds \\ &+\int_0^T\int_O (v_{n'} - v)(w_{n'} - w)(x,s)dxds. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant vérifier que tous les termes du second membre de cette dernière égalité tendent vers zéro. Entre autres, cela implique que

$$w_{n'} \longrightarrow w \qquad \text{fortement dans } Z. \tag{3.201}$$

- Le premier terme du deuxième membre converge vers zéro, puisque

$$w_{n'} \longrightarrow w \qquad \text{fortement dans } L^2(\Sigma)$$

et par conséquent

$$\beta_{R,z_{n'}}w_{n'} \longrightarrow \beta w \quad \text{faiblement dans } L^2(\Sigma).$$

En effet, la convergence forte de $w_{n'}$ est une conséquence immédiate de l'injection compacte de l'espace

$$\left\{z \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) : z_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\}$$

dans $L^2(0,T;H^s(\Omega))$ pour tout $s \in (1/2,1)$ et le fait que l'opérateur trace est bien défini, linéaire et continue de $L^2(0,T;H^s(\Omega))$ dans $L^2(\Sigma)$.

• La convergence des trois autres termes du second membre est une conséquence de la convergence faible dans $L^2(Q)$ de $a_{R,z_{n'}}, w_{n'}$ et $B_{z_{n'}}.\nabla w_{n'}$, la convergence faible dans $L^2(O \times (0,T))$ de $v_{n'}$ et la convergence forte de $w_{n'}$ dans $L^2(Q)$.

Nous avons donc vu que $\{w_n\}$ possède une sous suite fortement convergente et, par conséquent, Λ_R est une multifonction de l'espace Z dans un ensemble compact fixe.

Il reste à vérifier que Λ_R est hemi-continue superieurement. Ainsi, supposons que $\sigma \in Z'$ et soit $\{z_n\}$ une suite donnée, avec $z_n \longrightarrow z$ fortement dans Z on doit prouver que

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{w\in\Lambda_R(z_n)} \langle\sigma, w\rangle_{Z',Z} \le \sup_{w\in\Lambda_R(z)} \langle\sigma, w\rangle_{Z',Z}$$

Soit $\{z_{n'}\}$ une sous suite de $\{z_n\}$ telle que

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{w\in\Lambda_R(z_n)} \langle\sigma, w\rangle_{Z',Z} = \limsup_{n'\longrightarrow+\infty} \sup_{w\in\Lambda_R(z_{n'})} \langle\sigma, w\rangle_{Z',Z} .$$

Puisque chaque $\Lambda_R(z_{n'})$ est compact de Z, pour chaque n' on a

$$\sup_{w\in\Lambda_R(z_{n'})} \langle\sigma, w\rangle_{Z',Z} . = \langle\sigma, w_{n'}\rangle_{Z',Z} .$$

pour certain $w_{n'} \in \Lambda_R(z_{n'})$. D'autre part, puisque tout les états $w_{n'}$ appartiennent au même compact K_R, au moins pour une nouvelle sous suite (encore une fois indéxée par n'), on doit avoir (3.201). On va maintenant prouver que $w \in \Lambda_R(z)$. Ceci achèvera la démonstration de l'hémi-continuité superieure de Λ_R.

En effet, on peut supposer que les limites faibles des coéfficients associés à $z_{n'}$ sont $a_{R,z}, B_z$ et $\beta_{R,z}$, puisque $z_{n'}$ converge fortement vers z dans Z et par conséquent les coéfficients $a_{R,z_{n'}}, B_{z_{n'}}$ et $\beta_{R,z_{n'}}$ convergent presque partout (remarquons que nous utilisons ici la régularité de F et f).

D'autre part, on peut supposer que les contrôles $v_{n'}$ convergent $\star-$ faiblement vers une fonction v dans $L^\infty(O \times (0,T))$. Alors, w résout (3.194) et $w(T) = 0$. En outre, puisque l'inégalité (3.198) indépendante de n, v satisfait aussi (3.198). Par suite, $v \in A_R(z)$. Par conséquent, w est la solution de (3.194) associée au contrôle v. Ceci montre que $w \in \Lambda_R(z)$ et par conséquent, Λ_R est hemi-continue supérieurement.

Compte tenu de ces arguments, le théorème de Kakutani peut être appliqué et on en déduit que, pour chaque $R > 0$, Λ_R possède au moins un point fixe w_R qui appartient à Z et $L^\infty(Q)$.

Notre objectif maintenant est de trouver un $R > 0$ tel que

$$\|w_R\|_\infty \le R.$$

Ce sera une conséquence des estimations que nous savons pour w_R et les propriétés satisfaites par les fonctions F_i.

A partir de (3.200), on obtient

$$\|w_R\|_\infty \le e^{C(\Omega,O,T)(1+a_R^{2/3}+\overline{B}^2+\beta_R^2)} \left\|w^0\right\|_\infty . \tag{3.202}$$

D'autre part, à partir de (3.172)-(3.173) il est également clair que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ tels que

$$\left(\sup_{(x,t)\in Q} ess\, |F_1(s,p;x,t)|\right)^{2/3} \le \epsilon \log(1+|s|) + C_\epsilon \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}^N$$

$$\left(\sup_{(x,t)\in Q} ess\,|F_2(p;x,t)|\right)^2 \leq C_\epsilon \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \tag{3.203}$$

$$\left(\sup_{(x,t)\in \Sigma} ess\,|F_1(s;x,t)|\right)^2 \leq \epsilon\log(1+|s|) + C_\epsilon \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, il est vrai aussi que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ (indépendante de R) tels que

$$a_R^{2/3} + \overline{B}^2 + \beta_R^2 \leq \epsilon\log(1+R) + C_\epsilon$$

Ces estimations avec (3.202) et les définitions de a_R, B et β_R mènent à l'inégalité suivante :

$$\|w_R\|_\infty \leq C(\Omega, O, T, \epsilon)(1+R)^{C(\Omega,O,T)\epsilon}\left\|w^0\right\|_\infty.$$

En conséquence, en prenant $\epsilon > 0$ assez petit pour satisfaire $C(\Omega, O, T)\epsilon < 1$, nous pouvons nous assurer que, pour $R > 0$ suffisamment grand (dépendant de Ω, O, T et $\|y^0 - \overline{y}^0\|_{L^\infty(\Omega)}$), on a

$$\|w_R\|_\infty \leq R.$$

Ceci termine la preuve du théorème 3.4.1 lorsque f et F sont des fonctions de classe C^1.

Le cas géneral.

On va maintenant supposer que les fonctions f et F sont localement lipschiziennes satisfaisant (3.171)-(3.173).

On va introduire les fonctions $\rho^1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N), \rho^2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\rho^3 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, avec $\rho^j \geq 0$, supp$\rho^1 \subset \overline{B}((0,0);1)$, supp$\rho^2 \subset \overline{B}(0;1)$, supp$\rho^3 \subset [-1,1]$ et

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \rho^1(s,p)dsdp = \int_{\mathbb{R}^N} \rho^2(p)dp = \int_{\mathbb{R}} \rho^3(s)ds = 1$$

Considérons, pour chaque $n \geq 1$, les suites de fonctions régularisantes associées

$$\rho_n^1(s,p) = n^{N+1}\rho^1(ns,np), \qquad \rho_n^2(p) = n^N\rho^2(np), \qquad \forall(s,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$$

et

$$\rho_n^3(s) = n^N\rho^3(ns), \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

et la suite régularisante

$$F_{i,n} = \rho_n^i * F_i \qquad (i = 1,2,3)$$

(les fonctions F_1, F_2 et F_3 ont été définies dans ((3.190)-(3.192)).

Ces fonctions satisfont les conditions suivantes :

• pour chaque $n \geq 1$, $F_{1n} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times Q \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_{2n} : \mathbb{R}^N\times Q \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $F_{3n} : \mathbb{R}\times\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de Caratheodory

• Si on pose

$$F_n(s,p;x,t) = F_{1,n}(s,p;x,t)s + F_{2,n}(p;x,t).p$$

et

$$f_n(s;x,t) = F_{3,n}(s;x,t)s,$$

alors les propriétés asymptotiques (3.172) et (3.203) restent vraies uniformement en n. Autrement dit, pour tout $L > 0$, il existe $M > 0$ (indépendante de n) tele que

$$\begin{cases} |F_n(s,p) - F_n(r,p)| \leq M\,|s-r|\,, \qquad |F_n(s,p) - F_n(s,q)| \leq M\,|p-q| \\ \forall(s,r,p,q) \in [-L,L]^2\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N. \end{cases}$$

En outre, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ tels que

$$\begin{cases} \left(\sup_{(x,t)\in Q} ess\, |F_{1n}(s,p;x,t)| \right)^{2/3} \leq \epsilon \log(1+|s|) + C_\epsilon \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}^N \\ \left(\sup_{(x,t)\in Q} ess\, |F_{2n}(p;x,t)| \right)^{2} \leq C_\epsilon \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \\ \left(\sup_{(x,t)\in \Sigma} ess\, |F_{3n}(s;x,t)| \right)^{2} \leq \epsilon \log(1+|s|) + C_\epsilon \quad \forall s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

pour tout $n \geq 1$.

- D'aprés les définitions de F_n et f_n, on a aussi que

$$F_n(z_n, \nabla z_n; .) \longrightarrow F_1(z, \nabla z; .)z + F_2(\nabla z; .).\nabla z \qquad \text{faiblement dans } L^2(Q)$$

et

$$f_n(z_n; .) \longrightarrow F_3(z; .)z \qquad \text{faiblement } -* \text{ dans } L^\infty(\Sigma)$$

quand

$$z_n \longrightarrow z \quad \text{faiblement } -* \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ et fortement dans } L^2((0,T); H^1(\Omega))$$

En conséquence, nous pouvons affirmer comme dans le cas où F **et** f sont C^1 et en déduire que, pour chaque n, il existe un contrôle $v_n \in L^\infty(O \times (0,T))$ tel que

$$\begin{cases} w_{n,t} - \Delta w_n + F_n(w_n, \nabla w_n; x, t) = v_n 1_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial w_n}{\partial n} + f_n(w_n; x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ w_n(0) = w^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.204}$$

et

$$w_n(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.205}$$

Compte tenu des propriétés satisfaites par les fonctions F_{in}, les estimations que nous avons établi dans le cas où F **et** f sont C^1et indépendantes de n. Par conséquent, au moins pour une sous-suite, nous avons également

$$v_n \longrightarrow v \qquad \text{faiblement - } * \text{ dans } L^\infty(O \times (0,T))$$

$$w_{n,t} \longrightarrow w_t \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

et

$$w_n \longrightarrow w \qquad \text{faiblement } -* \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ et fortement dans } L^2((0,T); H^1(\Omega))$$

Nous pouvons donc passer à la limite de (3.204) et de trouver un contrôle $v \in L^\infty(O \times (0,T))$ tel que la solution associée à (3.189) satisfait (3.193). Ceci achève la preuve du théorème 3.4.1. ■

Remarque 3.4.1 *La démonstration du théorème 3.4.1 peut être également réalisée en appliquant un autre point fixe. Plus précisément, on peut d'abord introduire un petit paramètre $\epsilon > 0$ et de trouver un contrôle v de tel sorte que la solution de (3.167) satisfait*

$$\|y(.;T) - \overline{y}(.;T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

On résoud le problème de contrôlabilité approché du système linéaire (3.189) avec un contrôle de norme minimale dans $L^p(O\times(0,T))$ pour un p assez grand, et, ensuite, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Puisque toute les éstimations qu'on peut établir sont uniformes par rapport à ϵ, on peut passer à la limite quand $\epsilon \longrightarrow 0$ et en déduire le résultat désiré.

Perspectives

Nous avons, au cours de cet humble travail, traité la contrôlabilité à zéro et la contrôlabilité exacte aux trajectoires de l'équation de la chaleur avec conditions au bord de type Dirichlet et de type Fourier dans le cas linéaire et semi linéaire.

Dans le travail présenté sur les conditions sur F et f pour l'équation de réaction-diffusion non linéaire avec conditions au bord de type Fourier ne permettent pas de donner un résultat de contrôlabilité à zéro, l'une de notre perspective et de chercher des condittions sur F et f pour que le système soit contrôlable à zéro .

Bibliographie

[1] C. Fabre, J.P. Puel and E. Zuazua, Approximate controllability of the semilinear heat équation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh, 125A* (1995), 31-61.

[2] A. Fursikov and O.Yu. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, *Lecture Notes #34*, Seoul National University, Korea, 1996.

[3] E. Zuazua, Exact boundary controllability for the semilinear wave équation, in "*Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*", Vol. X, H. Brezis and J.L. Lions eds., Pitman, 1991, 357-391.

[4] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire*, 17 (2000), no. 5, 583-616.

[5] O. Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, Carleman estimate for a parabolic équation in a Sobolev space of negative order and its applications, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 218, Dekker, New York (2001).

[6] Jacques Louis Lions, *Numerical Analysis of Partial Differential Equations*, Springer (1967).

[7] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and E. Zuazua, On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient, *SIAM J. Control Optim.*, 41 (2002), pp. 798–819.

[8] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, and J.-P. Puel, Null controllability of the heat equation with Fourier boundary conditions : The linear case, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12 (2006), pp. 442–465.

[9] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, and J.-P. Puel, Exact controllability to the trajectories of the heat equation with Fourier boundary conditions : The semilinear case, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12 (2006), pp. 466–483.

[10] Sergio Guerrero Rodriguez, *Thèse de doctorat*, Résultats sur la contrôlabilité exacte aux trajectoires de quelques systèmes paraboliques non-linéaires, 2004.

[11] Jean-Pierre Aubin, Hélène Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser Boston, 1990.

[12] Fernández-Cara E and Guerrero S 2006 Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability *SIAM J. Control Optim.* 45 1399–446.

[13] Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Edition 2005.

[14] Lions, J. L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[15] O.A Ladyzenskaya, V.A Solonnikov and N.N Uraltzeva, *Linear and Quasilinear Equations Parabolic Type*, Nauka, Moskow, 1967.

[16] J.Simon, Compact sets in the spaces $L^p(0,T;B)$, *Annali di Matematica Pura ed Aplicata*, **IV,** Vol. CXLVI (1987), pp 65-96.