



N° d'ordre : 03 / 2004 – E/PH

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
USTHB/ ALGER

FACULTE DE PHYSIQUE

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT d'Etat

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique

Par : **TRIBECHE Mouloud**

Sujet :

**Oscillations électrostatiques dans les plasmas poussiéreux
à charge variable**

Soutenue publiquement le : 14/ 06/ 2004, devant le Jury composé de :

A. TALEB	Professeur (USTHB)	Président
T. H. ZERGUINI	Professeur (USTHB)	Directeur de thèse
M. AMAOUCHE	Professeur (UAMB)	Examineur
S. BARHOUMI	Professeur (USTHB)	Examineur
M. DRIR	Professeur (USTHB)	Examineur
A. SMIDA	Professeur (USTHB)	Examineur

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	7
1 La physique des plasmas poussiéreux	15
1.1 Eléments de la théorie des plasmas	15
1.2 Propriétés des plasmas poussiéreux	18
1.3 Charge des grains de poussière	21
1.4 Ondes électrostatiques dans un plasma poussiéreux non magnétisé	25
1.5 Ondes électrostatiques de basses fréquences dans un plasma poussiéreux en présence d'un champ magnétique	28
1.5.1 Modes acoustiques ($k_x = 0$)	30
1.5.2 Modes cyclotroniques ($k_z \ll k_x$)	32
2 Etude des ondes acoustiques ioniques dans un plasma poussiéreux collisionnel et à charge variable	34
2.1 Présentation physique du problème	34
2.2 Equations de base du modèle	37
2.3 Cas où la charge du grain d'impureté est constante	40
2.4 Cas où la charge du grain d'impureté est fluctuante	41
2.5 L'équation de charge du grain d'impureté	42
2.6 Relation de dispersion	45
2.7 Résultats numériques et discussion	46
2.8 Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma poussiéreux à charge variable	53

3	Oscillations électrostatiques non linéaires dans les plasmas poussiéreux	56
3.1	Présentation physique du problème	56
3.2	Equation de Kortewg-de Vries	57
3.3	Equation de Kortewg-de Vries pour l'onde acoustique ionique	60
3.4	Onde acoustique poussiéreuse	61
3.5	Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma électroniquement appauvri	64
3.6	L'équation cinétique de Vlasov	67
3.7	Revue des ondes électroniques BGK	69
3.8	Modèle cinétique et équations de base	70
3.9	Cas des faibles amplitudes	74
3.10	Influence de l'appauvrissement électronique (electron depletion)	76
4	Oscillations électrostatiques non linéaires dans un plasma poussiéreux à charge variable	82
4.1	Présentation physique du problème	82
4.2	Equations de base du modèle à charge variable	84
4.3	Equation de la charge du grain de poussière	87
4.4	Analyse du cas faible amplitude	89
4.5	Simulation numérique et discussion des résultats	92
5	Ondes solitaires de Bernstein, Greene et Kruskal (DBGK) dans un plasma poussiéreux à charge variable	108
5.1	Présentation physique du problème	108
5.2	Formulation mathématique	109
5.3	Conditions d'existence des structures solitaires	110
5.4	Résultats numériques et discussion	112
6	Oscillations non linéaires dans un plasma poussiéreux thermique à charge variable	120
6.1	Présentation physique du problème	120
6.2	Equations de base du modèle	121
6.3	Existence des solitons	124
6.4	Résultats numériques et discussion	133

7 Oscillations électrostatiques non linéaires dans un plasma poussiéreux en présence d'électrons piégés non isothermiques	138
7.1 Présentation Physique du problème	138
7.2 Equations de base du modèle	139
7.3 Existence des structures localisées	142
7.4 Solution dans la limite des petites amplitudes	144
7.5 Résultats numériques et discussion	146
7.6 Les trous poussiéreux à charge variable	152
8 Equations de Zakharov modifiées dans un plasma poussiéreux à charge variable	158
8.1 Présentation physique du problème	158
8.2 Ondes de Langmuir	159
8.3 Couplage linéaire des ondes de Langmuir avec le mode de relaxation de la charge du grain de poussière	163
8.4 Equations de Zakharov dans un plasma à deux composantes	165
8.5 Le soliton de Langmuir	166
8.5.1 Instabilités paramétriques	168
8.6 Equations de Zakharov modifiées	173
8.6.1 La première équation modifiée de Zakharov	173
8.6.2 La seconde équation modifiée de Zakharov	173
8.6.3 Instabilités paramétriques	178
8.7 Solution stationnaire des équations modifiées de Zakharov	181
8.7.1 Cas de la charge fixe	181
8.7.2 Cas de la charge variable	184
9 Expansion de grains de poussière dans un plasma à deux températures ioniques, électroniquement appauvri	188
9.1 Présentation physique du problème	188
9.2 Formulation mathématique	189
9.3 Résultats numériques et discussion	190
9.3.1 Cas d'une seule espèce ionique	191

9.3.2 Cas de deux espèces ioniques	195
Conclusion	200
Bibliographie	207

Remerciements

Je remercie vivement le Professeur Taha Houssine ZERGUINI, mon directeur de thèse, pour m'avoir accueilli au sein de son groupe de recherche. Outre la confiance qu'il m'a témoignée en me laissant m'aventurer sur les sentiers de la physique non linéaire, il a constamment suivi la progression de mon travail. Ses précieux conseils, sa maîtrise scientifique et sa clairvoyance ont été d'un grand apport et ont permis de mener à bien et à terme ce travail de recherche. Qu'il trouve ici à travers ces quelques lignes l'expression de mon profond respect et de ma très haute considération.

Je remercie vivement le Professeur A. TALEB, du Laboratoire d'Electronique Quantique et Président du Conseil Scientifique de la Faculté de Physique, qui nous a honorés en acceptant de présider le jury de la présente thèse et dont j'ai énormément apprécié le cours de Physique Atomique.

J'exprime ma vive reconnaissance à Messieurs M. AMAOUCHE, Professeur à l'UAMB, A. SMIDA, Professeur à l'USTHB, S. BARHOUMI, Professeur à l'USTHB et Directeur Général de l'ANDRU, et M. Drir, Professeur et Vice- Recteur à l'USTHB, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté et porté à ce travail en acceptant de prendre part au jury de cette thèse. Je remercie le Professeur M. Drir pour ses encouragements sans cesse renouvelés.

Je remercie Mme F. CHAFA, Maître de Conférences à l'USTHB et chef de département de Physique Théorique, pour sa disponibilité et son inestimable amitié.

Je remercie M. DEBIANE, du Laboratoire de Mécanique des Fluides, pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues durant ces quelques dernières années.

Que tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et mes collègues de la Faculté de Physique trouvent ici l'expression de mon profond respect et de ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements vont également au Commandement de la Façade Maritime Ouest et aux membres du GPAN/2°RM pour m'avoir encouragé à garder le contact avec mon laboratoire de recherche durant mon service militaire.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon père, ma mère, mes frères et sœurs pour leur inestimable affection, leur soutien et leurs encouragements sans cesse renouvelés. Une pensée spéciale va à ma femme pour sa patience, sa compréhension et ses encouragements tout au long du présent travail. A ces derniers, j'exprime ma reconnaissance et mon profond amour.

Introduction

Il est communément admis que 99% de la matière de l'univers est à l'état plasma, un gaz électrifié dont les atomes sont dissociés en ions à charge positive et en électrons à charge négative. Les atmosphères, les nébuleuses et la majeure partie de l'hydrogène interstellaire sont à l'état plasma. Notre planète est elle même entourée d'un plasma à une distance comprise entre 90 et 500 km de sa surface. Cette couche facilite et rend possible les communications radio et est responsable de l'apparition des aurores boréales. Dans le voisinage immédiat de notre planète, les ceintures de Van Allen et le vent solaire sont autant d'autres exemples de l'abondance du plasma. D'un autre côté, dans notre vie de tous les jours, le nombre d'exemples de plasma est quelque peu limité et restreint. Nous citerons les gaz conducteurs à l'intérieur des tubes fluorescents tels les tubes à néon. Il est utile de noter que n'importe quel gaz ionisé n'est pas forcément un plasma. Un gaz présente toujours un certain degré d'ionisation. Ce n'est qu'au moment où la concentration des particules chargées provoque une charge d'espace capable de limiter le libre parcours moyen des ions et des électrons que les caractéristiques du gaz changent de manière notable. Un plasma se définit comme étant un gaz quasi-neutre composé de particules chargées et de particules neutres qui exhibent un comportement collectif. Lorsque les particules chargées se meuvent dans un plasma, des concentrations locales de charge positive et de charge négative sont générées au sein de ce plasma. Ces concentrations, et donc ces charges d'espace, donnent naissance à des champs électriques. En outre, le mouvement des particules chargées génère des courants et crée, par conséquent, des champs électromagnétiques. Ces champs électromagnétiques affectent et perturbent le mouvement d'autres particules chargées qui à leur tour peuvent influencer le reste des particules du plasma. En fait, toute perturbation affectant la neutralité d'un plasma provoque de forts champs électromagnétiques qui tendent à la restaurer. La façon la plus naturelle d'obtenir un plasma

est de chauffer un gaz jusqu'à ce que l'énergie moyenne des particules soit comparable à l'énergie d'ionisation de l'espèce considérée.

La définition d'un plasma telle que énoncée ci-dessus peut s'avérer, à bien des égards, incomplète et restrictive. En effet, un plasma réel contient toujours des impuretés chargées communément appelées poussières. La présence de ces extra particules, dont les dimensions sont de l'ordre du micron, rend la nature du système plasma beaucoup plus complexe et beaucoup plus difficile à cerner. Un plasma poussiéreux (*dusty, complex plasmas*) est un gaz de basse température, complètement ou partiellement ionisé, comprenant des électrons, des ions et une composante additionnelle de grains de poussière chargés et extrêmement massifs. Au cours de ces dernières années, les plasmas poussiéreux ont suscité un large et profond regain d'intérêt à cause de leur rôle, parfois prépondérant, dans certaines applications technologiques, spatiales et astrophysiques. Les plasmas poussiéreux sont présents dans différentes parties de notre système solaire, à savoir, le milieu interplanétaire, les nuages inter-stellaires, les queues et chevelures des comètes, les anneaux planétaires, les boucles solaires et les nuages moléculaires interstellaires (nébuleuses Orion, Coalsack, Horsehead, Eagle). Ils sont aussi présents dans les dispositifs de laboratoires et les procédés industriels. La lumière zodiacale, la troposphère arctique, la mésosphère polaire, les gaz d'échappement d'une fusée, la flamme d'une chandelle, ...etc sont autant d'autres exemples de plasmas poussiéreux. La présence de grains de poussière d'origine météoritique a d'ailleurs été détectée dans la mésosphère terrestre à des altitudes allant de 80 à 100 km grâce à des mesures directes de sonde. Au vu des nouveaux phénomènes qu'ils introduisent et font intervenir, tels que la fluctuation de la charge électrique, l'appauvrissement électronique et la dissipation anormale de l'énergie, ces grains de poussière massifs et hautement chargés peuvent modifier les propriétés intrinsèques du plasma traditionnel à deux composantes. De nouveaux modes et de nouvelles instabilités peuvent alors apparaître. En réalité, la physique des plasmas poussiéreux n'a connu son essor que grâce à la découverte de l'onde acoustique poussiéreuse (un nouveau mode), de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (mode acoustique ionique habituel modifié par la présence des grains de poussière ou impuretés) et à la cristallisation coulombienne des grains de poussière dans les plasmas fortement couplés (lorsque le rapport entre l'interaction de Coulomb et l'énergie thermique des grains excède une valeur critique de l'ordre de 170). Un grain de

poussière immergé dans un plasma acquiert une charge électrique qui peut valoir plusieurs milliers de fois celle de l'électron. La charge du grain de poussière provient généralement d'un concours de plusieurs processus physiques tels que la collection des électrons et des ions du plasma ambiant, l'émission photo-électronique dans les milieux radiatifs, l'émission électronique secondaire, l'émission par ions énergétiques,...etc. Dans les plasmas de laboratoire de basse température, la collection des électrons et des ions semble être le mécanisme de charge le plus dominant. Récemment, de nombreux travaux théoriques et expérimentaux sur les plasmas poussiéreux ont porté sur la variation de la charge des grains de poussière et les modifications que ce nouveau phénomène peut apporter. Pour cela, un formidable arsenal expérimental a été mis sur pied pour l'étude des ondes, des instabilités et du processus de charge dans les plasmas poussiéreux. Par ailleurs, les ondes acoustique et acoustique ionique poussiéreuses ont été intensément étudiées et ont donné, parfois, lieu à de larges débats contradictoires. Le phénomène de variation de la charge du grain modifie considérablement les conditions d'existence et de réalisation de ces deux "nouveaux" modes. De nos jours, la physique des plasmas complexes ou poussiéreux connaît une activité intense et particulière. Cet intérêt toujours croissant a donné lieu depuis le début des années 90 à une littérature considérable, riche et variée. Beaucoup de livres sont apparus au cours de ces dix dernières années traitant soit d'un aspect particulier soit donnant une vue d'ensemble. L'importance et l'impact d'une telle discipline en rapide évolution est à rechercher certainement dans les domaines de l'astrophysique et des décharges de basses températures utilisées dans les procédés industriels de traitement et de fabrication. La présente thèse est composée des chapitres suivants.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous définirons les concepts de base d'un plasma et introduirons les équations du modèle fluide standard que nous aurons à utiliser dans certaines parties de cette thèse. Nous décrirons ensuite les plasmas poussiéreux, rapporterons leurs propriétés et insisterons sur les phénomènes qui les caractérisent tels les processus de charge, l'appauvrissement électronique et l'apparition de nouveaux modes d'onde. Nous passerons en revue les différents modes électrostatiques susceptibles d'exister dans le cas d'un plasma poussiéreux en présence et en l'absence d'un champ magnétique.

Le deuxième chapitre de cette thèse sera consacré à l'étude de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW) dans le cas d'un plasma poussiéreux, collisionnel et à charge

variable. Pour cela, l'équation d'évolution de la charge du grain de poussière, en présence d'électrons maxwelliens et d'ions non-Boltzmaniens, sera établie de manière self-consistante et appropriée. La fonction de distribution collisionnelle ionique perturbée sera obtenue à partir de l'équation de Vlasov dans laquelle nous inclurons un terme de collision de Krook pour tenir compte de la collision particule neutre - particule chargée. Les courants de charge seront par la suite calculés au moyen de sections efficaces de charge collisionnelles. L'analyse habituelle de Fourier des équations de base de notre modèle nous permettra alors d'obtenir une relation de dispersion de troisième ordre qui rendra compte des effets du couplage linéaire de la relaxation de la charge du grain avec les modes acoustiques ioniques. Nous verrons alors que la fluctuation de la charge du grain de poussière induira un décalage de fréquence et donnera lieu à un nouveau mécanisme de dissipation de l'énergie de l'onde dite dissipation anormale. De plus, nous montrerons que la valeur critique du champ électrique nécessaire à l'excitation de l'onde acoustique ionique poussiéreuse est sensiblement dépendante du processus de charge du grain de poussière et des dimensions de ce dernier.

Le troisième chapitre de la présente thèse portera sur les modes électrostatiques de Bernstein, Greene et Kruskal de large amplitude dans les plasmas poussiéreux. Ces modes représentent les solutions stationnaires du système d'équations Vlasov-Poisson dans un repère de référence se mouvant avec une vitesse v_0 constante. Ces états d'équilibre peuvent correspondre, par exemple, à des perturbations sous forme de pulses isolés se propageant avec une vitesse v_0 . Notons au passage que le système d'équations Vlasov-Poisson reste invariant sous une transformation galiléenne. Notre étude a été motivée par le fait qu'au cours de ces dix dernières années, les observations spatiales ont révélé que la large bande des émissions électrostatiques provenant de l'espace était en fait constituée de plusieurs pulses de champ électrique bipolaires et isolés. Ces émissions étaient jusque là considérées comme étant de simples bruits électrostatiques aléatoires. D'autres découvertes dans la magnétosphère ont alors suivi. Les plasmas de la magnétosphère étant en général non collisionnels, des limites naturellement formées séparent celle-ci du vent solaire et la divisent en plusieurs régions de plasma avec différentes propriétés. Au travers de l'une de ces limites, existent souvent des "potential drops" au voisinage desquels est présente une puissance d'onde électrostatique accrue source de ces émissions électrostatiques. D'autres structures

de potentiel à profil solitaire consistantes avec les modes BGK ont par ailleurs été observés dans les plasmas voisins de la terre, dans l'ionosphère,...etc. Toutes ces découvertes ont alors suscité d'intenses investigations concernant les ondes électrostatiques solitaires et, en particulier, les modes de Bernstein, Greene et Kruskal. Cependant, hormis quelques indications concernant les ions négatifs, toutes ces investigations ont négligé l'aspect poussiéreux des plasmas en question et les nouveaux effets collectifs qui leur sont inhérents. Les grains de poussière étant abondants et omniprésents dans l'espace, nous avons alors décidé de reconsidérer les modes BGK et de les transposer dans les plasmas poussiéreux. Nous rappellerons d'abord une équation différentielle non linéaire classique connue sous le nom d'équation de Korteweg- de Vries. Cette dernière, à la fois non linéaire et dispersive, a déjà fait l'objet d'une intense investigation pour décrire le comportement non linéaire et la nature localisée des ondes acoustiques ioniques dans les plasmas traditionnels à deux composantes. Nous mettrons alors l'accent sur les modifications introduites par la présence des grains de poussière et verrons qu'en pareil cas l'équation de Korteweg- de Vries, contrairement au cas d'un plasma à deux composantes, peut admettre des solutions solitaires aussi bien de compression que de raréfaction. Nous définirons le système d'équations de Vlasov-Poisson et donnerons une revue succincte des ondes électroniques non linéaires telles que analysées par Bernstein, Greene et Kruskal. Nous introduirons alors les équations de base de notre modèle cinétique pour décrire un plasma constitué de trois faisceaux de particules froides en interaction. Nous prescrirons les fonctions de distribution, déduirons les densités de particules et leurs vitesses et, moyennant le système de Vlasov-Poisson, nous établirons l'équation de base des oscillations non linéaires de notre plasma poussiéreux. Le processus de charge du grain de poussière s'accompagne en général d'une diminution significative de la population électronique du plasma. D'ailleurs cet appauvrissement¹ a été mis en évidence lors de récentes expériences de laboratoire sur les ondes acoustiques poussiéreuses. De telles situations sont communes aussi bien dans les anneaux de Saturne que dans les décharges de laboratoire. Notre plasma pourra alors être perçu comme étant composé d'ions positifs et de grains de poussière chargés négativement². Nous rapporterons alors l'existence possible et les propriétés non linéaires

¹On parle aussi de déplétion électronique ($n_{e0} \simeq 0$).

²C'est comme si dans un plasma traditionnel les électrons devaient acquérir une charge de l'ordre de $10^4 e$.

d'un nouveau mode poussiéreux que nous appellerons, comme de coutume, mode BGK poussiéreux (DBGK). Cependant, la charge portée par les grains a été supposée constante, une hypothèse qui peut parfois s'avérer incorrecte.

L'objet du quatrième chapitre consistera à étendre notre analyse antérieure à des situations où les grains de poussière, en réponse aux oscillations plasma, exhibent des fluctuations de charge self-consistantes et à rechercher dans quelle mesure et sous quelles conditions la variation de la charge peut elle modifier de manière drastique les résultats et les conclusions du chapitre précédent. Pour ce faire, nous présenterons d'abord les équations de base de notre modèle. Nous établirons ensuite l'équation de la charge du grain de poussière dans le cadre de la théorie de la sonde. Les courants de charge électronique et ionique seront calculés moyennant les fonctions de distribution déjà prescrites et des sections efficaces collisionnelles appropriées. Nous utiliserons des équations de base similaires à celles du modèle cinétique déjà introduit dans le chapitre précédent. Cependant, la charge du grain de poussière n'étant plus constante, il nous sera alors nécessaire d'établir une autre équation qui tiendra compte du degré de liberté additionnelle de la dynamique de la charge du grain. Celle-ci deviendra une nouvelle variable dynamique dont nous tiendrons compte de manière self-consistante. Nous montrerons alors que la variation de la charge peut causer une dispersion et une dissipation, dites anormales, qui, de concert avec les non-linéarités du système, contribuent à la formation de structures cohérentes hautement localisées (Solitons) et dissipatives (Ondes de choc). L'existence de ces structures solitaires, essentiellement dues à une compétition entre les non-linéarités du système (Phénomènes de piégeage des particules) et la dynamique de la charge, dans un modèle de plasma froid comme le notre est en elle-même un important nouveau résultat. En réalité, le processus de la variation de la charge du grain de poussière agira comme s'il donnait naissance à une dispersion anormale³ capable de contrebalancer les non-linéarités du système.

Le cinquième chapitre sera consacré à l'étude des propriétés de ces structures non-linéaires, de leur dépendance vis-à-vis des paramètres du plasma et des conditions de leur existence. Pour cela, nous utiliserons la méthode du pseudo-potentiel ou potentiel de Sagdeev. Cependant, notre modèle peut paraître restrictif, car "démuni" de tout mou-

³Remarquons que c'est la première fois que le concept de dispersion anormale apparaît dans la littérature (voir nos articles).

vement thermique⁴. Nous verrons alors qu'une réinterprétation adéquate et appropriée pourra l'étendre à tout plasma poussiéreux non magnétisé.

L'objet du sixième chapitre sera de construire d'autres solutions stationnaires de l'équation de Vlasov pour modeler et tenir compte des effets thermiques dans un plasma poussiéreux à charge variable. Nous traiterons aussi bien le cas des faibles amplitudes que celui des grandes amplitudes. Nous tenterons alors de déceler les différences éventuelles entre le modèle thermique et celui froid déjà introduit précédemment. Cependant, la prise en compte des effets thermiques enrichit considérablement la nature des oscillations électrostatiques que peut produire un plasma. Ils affectent l'interaction onde-plasma⁵ et rendent possible le piégeage des électrons dans des puits de potentiel. Les particules piégées, représentées par des îlots à contours fermés dans l'espace des phases (lignes d'énergie constantes), ne peuvent être décrites par le traitement linéaire habituel de Landau ou de Van Kampen basé sur la théorie de Vlasov.

Au cours du septième chapitre, nous utiliserons alors la méthode de Schamel de construction des solutions d'équilibre de l'équation de Vlasov. Celle-ci permet l'incorporation de distributions plus physiques⁶ et décrit les solutions de l'équation de Vlasov en termes de constantes du mouvement. Nous rapporterons alors l'existence et la formation d'intéressantes entités non linéaires telles les solitons, les double couches et des structures à deux niveaux inédites et jamais mises en évidence. Nous terminerons notre chapitre en démontrant l'existence possible de trous poussiéreux à charge variable qui font intervenir le piégeage des grains de poussière.

Le huitième chapitre sera consacré aux équations modifiées de Zakharov reformulées dans le cas d'un plasma poussiéreux à charge variable. Classiquement, ces équations établies par Zakharov décrivent l'instabilité modulationnelle du condensât de Langmuir. Nous nous intéresserons aux modifications que l'on doit apporter à ces équations pour y inclure la dynamique d'une composante poussiéreuse à charge variable. Nous reconsidérerons alors le problème du couplage non linéaire des ondes de Langmuir avec des perturbations de densité ionique dans un plasma poussiéreux à charge variable. Nous ob-

⁴Un tel choix nous a été dicté par le souci de mettre en évidence les effets inhérents à la variation de la charge en les dissociant des autres mécanismes susceptibles d'agir concurremment.

⁵Phénomène Landau linéaire et non linéaire

⁶Notons au passage que l'inconvénient majeur de la méthode originelle de BGK réside dans le fait que celle-ci prévoit des fois des fonctions de distribution négatives.

tiendrons des équations de Zakharov modifiées en utilisant une approche à trois fluides, à deux échelles de temps et en prenant en compte la fluctuation de la charge du grain de poussière. Une analyse en modes normaux de ces deux équations couplées nous permettra alors d'obtenir une relation de dispersion utile pour l'étude des instabilités paramétriques. Nous aborderons ensuite le problème très important du collapse unidimensionnel⁷ du soliton de Langmuir dans un plasma poussiéreux à charge variable.

Le neuvième chapitre sera consacré à l'investigation numérique de l'expansion non linéaire d'un plasma poussiéreux électroniquement appauvri composé de grains froids et de deux espèces d'ions isothermiques de températures différentes.

Nous terminerons notre manuscrit par une conclusion concernant tous les travaux présentés dans la présente thèse et une présentation succincte de nos perspectives.

⁷Rappelons qu'il est généralement admis que le Soliton de Langmuir est stable à une dimension.

Chapitre 1

La physique des plasmas poussiéreux

1.1 Éléments de la théorie des plasmas

Un plasma peut être caractérisé par sa température électronique, notée T_e , et sa densité notée n_e . T_e et n_e peuvent varier respectivement de 0.1 à 10⁶eV et de 1 à 10¹⁸cm⁻³ selon la nature (astrophysique ou de laboratoire) et les différentes applications du plasma. Dans un plasma, la plus petite distance au delà de laquelle le champ électrique produit par une charge est écranté de façon significative s'appelle longueur de Debye λ_D . Cette distance peut être déduite de l'équation de Poisson autour d'une charge et en prenant une distribution de Boltzmann pour les électrons et les ions qui entourent la particule test. Pour un plasma de densité n_0 et de température T_e , cette distance vaut

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_0 e^2}} \quad (1.1)$$

Par conséquent, si L est une grandeur caractéristique de la dimension du plasma, elle devra vérifier la condition suivante

$$\lambda_D \ll L \quad (1.2)$$

Le nombre de particules chargées N_D que comporte une sphère de Debye est alors très grand

$$N_D = n_0 \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \gg 1 \quad (1.3)$$

et donc le caractère collectif du comportement des particules du plasma est important. Le second critère auquel doit satisfaire un gaz à l'état plasma a trait aux collisions des

particules chargées avec les neutres : les effets dus à l'interaction électromagnétique doivent prédominer devant ceux dus aux collisions binaires entre particules chargées et neutres. En d'autres termes, cela veut dire que le mouvement d'une particule chargée dans un plasma est déterminé, en premier lieu, par la présence d'une charge d'espace. Par conséquent, la fréquence caractéristique des oscillations- plasma ν et le temps de vol d'une particule chargée entre deux collisions avec les neutres τ doivent vérifier la condition suivante

$$\nu\tau > 1 \quad (1.4)$$

Dans un plasma, les électrons et les ions suivent des trajectoires aléatoires et se meuvent avec de grandes vitesses. Une charge positive quelconque, placée à l'origine de notre référentiel, attire les électrons et repousse les ions, créant ainsi un nuage électronique dans son voisinage immédiat. On parle alors d'écrantage de Debye, car au delà d'une certaine distance, appelée longueur de Debye, le champ électrique créé par cette charge test sera annihilé et ne sera plus ressenti par le reste des particules chargées. A l'aide de l'équation de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi e(n_e - n_i) \quad (1.5)$$

et moyennant les densités de particules suivantes

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) \quad (1.6)$$

$$n_i = n_{i0} \quad (1.7)$$

il est aisé de montrer (avec l'approximation $|e\phi/T_e| \ll 1$) que le potentiel ϕ s'écrit comme

$$\phi = \phi_0 \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda_D}\right) \quad (1.8)$$

avec

$$\lambda_D = \left(\frac{T_e}{4\pi n_{e0}e^2}\right)^{1/2} \quad (1.9)$$

Il apparaît alors que la décroissance du potentiel créé par une charge est plus rapide dans un plasma que dans le vide ($\propto \frac{1}{r}$) : c'est le phénomène d'écrantage (shielding).

Il existe une théorie dite "théorie fluide" qui considère le plasma comme un fluide se

mouvant avec une vitesse \mathbf{u} . La masse et la quantité de mouvement d'un volume V de plasma de densité massique ρ_m sont données par

$$M = \int_V \rho_m dV \quad (1.10)$$

$$\mathbf{P} = \int_V \rho_m \mathbf{u} dV \quad (1.11)$$

Les équations fluides se déduisent alors des lois de conservation de la masse et de l'impulsion

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_m dV \quad (1.12)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_m \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (1.13)$$

\mathbf{F} représente l'ensemble des forces externes (pesanteur, pression, forces électromagnétiques) qui s'exercent sur l'élément fluide de volume V . L'application du théorème de la divergence et de celui du gradient permet d'obtenir les deux équations fluides suivantes

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}) = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla p}{m_\alpha n_\alpha} + \mathbf{g} \quad (1.15)$$

$\alpha = i, e$ dénote l'espèce de particules considérée et \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{g} et p représentent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, l'accélération de la pesanteur et la pression. La première équation, dite équation de continuité pour un fluide, représente la conservation de la masse. La seconde, dite équation de mouvement, rend compte de l'ensemble des forces externes auxquelles est assujettie le fluide. Dans le but d'avoir autant d'équations que d'inconnues, nous complétons le système précédent à l'aide de trois équations supplémentaires : une équation d'état qui relie la pression et la densité

$$\frac{d(p_\alpha n_\alpha^{-\gamma})}{dt} = 0 \quad (1.16)$$

et deux équations de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.18)$$

qui relie \mathbf{E} et \mathbf{B} . Les deux autres équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.20)$$

où ρ_c est maintenant la densité de charge électrique, n'apportent pas d'informations supplémentaires et peuvent être considérées comme conditions initiales des deux premières.

1.2 Propriétés des plasmas poussiéreux

Un plasma poussiéreux est composé de molécules de gaz neutres, d'électrons, d'ions et de grains de poussière chargés et massifs (comparés aux ions). Une telle mixture de plasma et de poussière possède trois échelles de longueur caractéristiques. Ce sont le rayon du grain de poussière a , la longueur de Debye poussiéreuse λ_D , et la distance moyenne inter-granulaire d . Cette dernière est liée à la densité numérique n_d des grains par la relation $n_d d^3 \sim 1$. La longueur de Debye λ_D d'un plasma poussiéreux est donnée [4] par

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} \quad (1.21)$$

où $\lambda_{De,i} = (T_{e,i}/4\pi n_{e,i} e^2)^{1/2}$ représente la longueur de Debye électronique (ionique), $T_e(T_i)$ la température électronique (ionique) exprimée en unité d'énergie, $n_{e0}(n_{i0})$ la densité électronique (ionique) à l'équilibre et e est la charge élémentaire. Dans le cas où $T_e \sim T_i$ et $n_{e0} \sim n_{i0}$, λ_{De} est de l'ordre de λ_{Di} tandis que pour $T_e \gg T_i$ et $n_{i0} > n_{e0}$, nous avons $\lambda_D \sim \lambda_{Di} \gg \lambda_{De}$. Dans un plasma poussiéreux typique, a est généralement très petit devant λ_D . Lorsque $a \ll \lambda_D < d$, le grain de poussière peut être traité d'un point de vue dynamique de la particule, et dans ce cas nous parlons de plasma poussiéreux contenant des grains de poussière isolés. D'un autre côté, les effets collectifs entre grains chargés deviennent importants et significatifs lorsque $a \ll d < \lambda_D$. Dans ce cas, les particules de poussière chargées peuvent être assimilées à des particules ponctuelles massives semblables à des ions à charge multiple dans un plasma à plusieurs espèces. La condition de quasi-

neutralité de la charge électrique dans un plasma poussiéreux dont les grains portent une charge négative s'écrit sous la forme

$$n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0}n_{d0} \quad (1.22)$$

n_{j0} est la densité numérique des particules d'espèce $j(e, i, d)$ et Z_{d0} le nombre de charges non perturbées résidant sur la surface du grain. Lorsque la majeure partie des électrons du plasma ambiant est collectée par les grains de poussière, la condition de quasi-neutralité précédente (1.22) peut être réécrite sous la forme $n_{i0} \simeq Z_{d0}n_{d0} \gg n_{e0}$. Cependant, il est important de noter que l'appauvrissement électronique ($n_{e0} \rightarrow 0$) ne peut être complet [5] étant donné que la valeur minimale du rapport entre les densités électronique et ionique est égale à $(m_e/m_i)^{1/2}$ lorsque le potentiel de la surface du grain tend vers zéro. Dans ce cas, le plasma poussiéreux peut être approximativement considéré comme un plasma à deux composantes comprenant des grains de poussière chargés négativement entourés d'ions à charge positive. Une telle situation est aussi bien commune dans les anneaux de Saturne que dans les décharges de laboratoire. D'un autre côté, dans les plasmas poussiéreux thermiques ou irradiés à l'aide de rayons ultraviolets, les grains émettent des électrons et, par conséquent, peuvent acquérir une charge positive. Dans ce cas, le rôle d'écrantage des grains positifs sera assuré par les électrons et à l'équilibre nous aurons $n_{e0} \simeq Z_{d0}n_{d0}$. Dans le cas d'une géométrie sphérique, la solution de l'équation de Poisson linéarisée

$$\nabla^2 \phi_d - \frac{1}{\lambda_d^2} \phi_d = 0 \quad (1.23)$$

est donnée par [1]

$$\phi_d(r) = \phi_g(r_0) \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r-r_0}{\lambda_d}\right) \quad (1.24)$$

ϕ_d est dit potentiel de Debye-Hückel ou potentiel de Yukawa, $\phi_g(r_0)$ est le potentiel du grain à $r = r_0$ et la longueur de Debye effective du plasma poussiéreux est donnée par [6] (incluant les effets de la fluctuation de la charge du grain)

$$\lambda_d = \frac{\lambda_D}{(1 + f_d \nu_2 / \nu_1)^{1/2}} \quad (1.25)$$

où

$$f = 4\pi n_{d0} \lambda_D^2 a \quad (1.26)$$

$$\nu_1 = \left(a/\sqrt{2\pi} \right) [(\omega_{pi}/\lambda_{Di}) + (\omega_{pe}/\lambda_{De}) \exp(e\phi_s/T_e)] \quad (1.27)$$

est la fréquence de relaxation de la charge du grain due aux variations du potentiel ϕ_s de la surface du grain

$$\nu_2 = \left(a/\sqrt{2\pi} \right) [(\omega_{pi}/\lambda_{Di}) (1 - e\phi_s/T_i) + (\omega_{pe}/\lambda_{De}) \exp(e\phi_s/T_e)] \quad (1.28)$$

est la fréquence associée aux variations des courants de charge dues à l'existence du potentiel oscillant et ω_{pi} (ω_{pe}) représente la fréquence plasma ionique (électronique). Le terme $f_d \nu_2 / \nu_1$ est due à la fluctuation de la charge électrique du grain de poussière [7]. Dans un plasma poussiéreux, les grains de poussière peuvent être soit faiblement ou fortement corrélés

$$\Gamma = \frac{q_{d0}^2}{dT_d} \exp(-\kappa)$$

où $q_{d0} = -Z_{d0}e$, T_d est la température des grains et $\kappa = d/\lambda_d$. Un plasma poussiéreux peut être considéré faiblement corrélé aussi longtemps que $\Gamma \leq 1$. Toutefois, lorsque $\Gamma \gg 1$ et $\kappa \leq 1$, des micro-sphères de poussière chargées interagissent fortement et la formation de réseaux de Coulomb devient alors possible. Les plasmas poussiéreux fortement couplés sont créés dans les décharges dans les plasmas de laboratoire à basses températures pour l'étude de la formation et de la dynamique des cristaux poussiéreux. On peut aussi les trouver dans les expériences d'implosion par laser et dans les systèmes colloïdaux. Il arrive souvent que des arguments selon lesquels un plasma poussiéreux est similaire à un plasma à plusieurs espèces d'ions soient présentés. Cependant, cette assertion doit être réfutée car la présence, dans un plasma, de grains de poussière chargés et massifs produit de nouveaux phénomènes collectifs sur des échelles de temps et de longueur complètement différentes de celles du plasma habituel à deux composantes (électrons + ions). A titre d'exemple, citons l'onde acoustique poussiéreuse (DAW) [8] pour laquelle la masse du grain fournit l'inertie alors que les forces de rappel proviennent de la pression des électrons et des ions considérés, pour la circonstance, de masse négligeable¹. Dans les décharges de laboratoire, la fréquence

¹Ceci est dû au fait que la fréquence de l'onde DA est extrêmement basse.

de la DWA varie typiquement de 10 à 20 Hz et des images vidéo du front d'onde de la DWA sont réalisables [9]. En outre, la dynamique de la fluctuation de la charge du grain [10], [7] ainsi que les interactions entre grains peuvent donner lieu à de nouveaux effets collectifs [11]. Les distributions de masse et de forme du grain peuvent également introduire de nouveaux effets [12]. Par ailleurs, il existe dans les plasmas poussiéreux une onde dite de réseaux [13] dont la contrepartie n'existe que dans les solides [14]. De plus, les plasmas poussiéreux peuvent supporter une grande variété de structures non linéaires telles que les ondes de choc acoustiques poussiéreuses [15], les ondes de choc acoustiques ioniques poussiéreuses [16], les cônes de Mach [17] et les structures en vortex [18]. Notons enfin que dans un plasma poussiéreux fortement couplé, il est possible d'avoir de nouvelles forces d'attraction (wakefield [19], interaction dipolaire [20]) et des phénomènes de transition de phase relatifs aux cristaux poussiéreux [21]. Ces derniers, à l'inverse de ceux de l'état solide, peuvent avoir des propriétés inhabituelles : la charge du grain peut atteindre des milliers de fois la charge élémentaire, des énergies d'interaction de l'ordre de 900 eV et des épaisseurs de réseau de l'ordre du millimètre.

1.3 Charge des grains de poussière

La charge d'une particule de poussière trouve son origine dans une variété de processus. Parmi ces derniers, nous citerons le bombardement de la surface du grain à l'aide des électrons et des ions du plasma de base, l'émission photo-électronique sous l'effet d'un rayonnement ultraviolet, l'émission d'ions (ion sputtering), la production d'électrons secondaires [22]- [25]...etc. Dans les plasmas de laboratoire de basses températures, la charge des particules de poussière est principalement négative lorsque les électrons du plasma sont collectés par la surface du grain et donc perdus par le plasma de base. Le processus de charge dépend des sections efficaces de charge. Celles ci sont déterminées à partir du paramètre d'impact d'une particule approchant la surface d'un grain à une distance plus petite que les dimensions de cette particule. Leurs expressions, pour les électrons et les ions, sont données respectivement par

$$\sigma_e(q_d, v) = \pi a^2 \left(1 + \frac{2eq_d}{am_e v^2} \right) \quad (1.29)$$

et

$$\sigma_i(q_d, v) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2eq_d}{am_i v^2} \right) \quad (1.30)$$

pour $v^2 > 2e|q_d|/am_e = v_*^2$ alors que pour $v^2 < v_*^2$, $\sigma_e(q_d, v)$ est simplement nulle. Ici, $v = |\mathbf{v}|$ et q_d est la charge du grain de poussière. Les électrons doivent avoir une vitesse minimale v_* pour pouvoir atteindre la surface du grain. L'équation d'évolution de la charge du grain de poussière est alors donnée par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_d \cdot \nabla \right) q_d = I_e + I_i = I_d(q_d) \quad (1.31)$$

où

$$I_d(q_d) = \sum_{s=e,i} q_s \int v \sigma_s(q_d, v) f_s(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \quad (1.32)$$

est le courant plasma de charge, \mathbf{v}_d est la vitesse du grain, $q_{e(i)} = -e(e)$ et $f_s(\mathbf{v})$ représente la fonction de distribution des vitesses de la particule d'espèce s . Lorsque le plasma est en équilibre thermodynamique, la fonction de distribution des vitesses f_s peut être approximée par une distribution maxwellienne f_{s0} donnée par

$$f_{s0} = n_{s0} \left(\frac{1}{2\pi v_{ts}^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{2v_{ts}^2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 \right] \quad (1.33)$$

\mathbf{v}_0 représente la vitesse de dérive entre le plasma de base et les grains de poussière, n_{s0} la densité à l'équilibre des particules d'espèce s et $v_{ts} = (T_s/m_s)^{1/2}$ leur vitesse thermique correspondante. En supposant les vitesses de dérive des électrons et des ions beaucoup plus petites que leurs vitesses thermiques respectives, les expressions des courants électronique et ionique à l'équilibre sont données par [1]

$$I_{e0} = -\pi a^2 e \left(\frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} n_{e0} \exp \left(\frac{eq_{d0}}{aT_e} \right) \quad (1.34)$$

et

$$I_{i0} = \pi a^2 e \left(\frac{8T_i}{\pi m_i} \right)^{1/2} n_{i0} \left(1 - \frac{eq_{d0}}{aT_i} \right) \quad (1.35)$$

D'un autre côté, si la vitesse de dérive v_0 des ions est plus grande que la vitesse thermique ionique, alors l'expression approximée du courant ionique est donnée par

$$I_{i0} \simeq \pi a^2 e n_{i0} v_0 \left(1 - \frac{2e\phi_g}{m_i v_{i0}^2} \right) \quad (1.36)$$

Pour des valeurs quelconques et arbitraires de v_0 , l'expression de I_{i0} est quelque peu compliquée. A l'équilibre

$$I_{e0} + I_{i0} = 0 \quad (1.37)$$

et il devient alors possible d'obtenir à partir des équations (1.34) et (1.35) la relation

$$v_{te} \exp(e\phi_g/T_e) = \frac{n_{i0}}{n_{e0}} v_{ti} \left(1 - \frac{e\phi_g}{T_i} \right) \quad (1.38)$$

à partir de laquelle il est possible de déterminer le potentiel ϕ_g de la surface d'un grain de poussière isolé. Initialement, les électrons animés de vitesses thermiques nettement plus grandes que celles des ions sont les premiers à être collectés par le grain de poussière. Ce dernier étant électriquement flottant, sa surface acquiert un potentiel ϕ_g négatif qui repoussera les électrons et accentuera la collection des ions. Une sphère immergée dans un plasma thermalisé d'hydrogène sera portée à un potentiel $\phi_g = -2.51T/e$ ($T_e = T_i = T$ et $n_{i0} = n_{e0}$). La charge moyenne d'un grain de poussière, q_d , est reliée à son potentiel de surface ϕ_g par

$$q_d = C_g \phi_g \quad (1.39)$$

C_g est la capacité du grain. Cette dernière, dans le cas d'un grain isolé et de forme sphérique, est simplement égale au rayon a du grain et donc $q_d = a\phi_g$. Ce modèle est applicable à des grains suffisamment éloignés l'un de l'autre (en comparaison avec la longueur de Debye λ_D du plasma poussiéreux). D'un autre côté, lorsque la distance entre grains est comparable ou plus petite que λ_D , les grains de poussière sont dits "étroitement entassés". Dans ce cas, la différence $\Phi = \phi_g - \phi_0$ entre le potentiel ϕ_g de la surface du grain et le potentiel ϕ_0 du plasma est plus petit que dans le cas où $d \gg \lambda_D$, et conséquemment la charge moyenne du grain $q_d = \Phi a$ est plus petite que celle d'un grain isolé. Dans ce cas, il convient de remplacer dans l'équation (1.38) ϕ_g par Φ et utiliser la relation $n_{i0}/n_{e0} = (1 - q_d n_{d0}/en_{e0})$ pour obtenir les variations de Φ en fonction de la densité du

plasma ambiant pour une densité n_{d0} fixe. Barkan et ses collaborateurs [26] ont réalisé une expérience de laboratoire sur la charge de grains de poussière dans une colonne de plasma magnétisé et complètement ionisé. En faisant varier le rapport d/λ_d , ils ont mis en évidence la réduction de la charge des grains "entassés" ($d/\lambda_d < 1$). Les grains de poussière peuvent aussi acquérir une charge positive. Dans un gaz inerte avec des grains de poussière dispersés, ces derniers sont chargés positivement [27] soit par émission photo-électronique [induite par des rayons ultraviolets (UV)], ou par émission thermionique (dans le cas de grains chauffés de manière radiative, à l'aide d'un laser par exemple). Chacun de ces deux mécanismes nécessite des grains de poussière de basses fonctions travail W . Nous citerons, à titre d'exemple, les métaux Ag, Cu, Al, Ca, Cs ($W \sim 2.18 - 3.50$ eV) et les oxydes de métaux dont les fonctions de travail W varient 1 à 4 eV. Nous allons d'abord nous intéresser au cas de grains de poussière chargés positivement par émission photoélectrique d'électrons en présence d'un flux de photons UV d'énergie $W < \frac{h}{2\pi}\nu < I$, où h est la constante de Planck, ν la fréquence et I le potentiel d'ionisation d'un gaz inerte. Pour un flux de photons unidirectionnel, le courant dû à la photo-émission électronique est donné par

$$I_{ph} = e\pi a^2 Q_{abs} Y J \exp(-e\phi_p/T_{pe}) \quad (1.40)$$

où Q_{abs} représente l'efficacité d'absorption des rayons ultraviolets ($Q_{abs} \sim 1$ pour $2\pi a/\lambda > 1$, λ étant la longueur d'onde du rayonnement ultraviolet), Y le taux de production des photo- électrons, T_{pe} leur température moyenne exprimé en unité d'énergie, J le flux de photons du rayonnement ultraviolet et ϕ_p le potentiel de la surface du grain. Le terme en exponentielle de l'équation (1.40) prend en compte le fait que les photo- électrons possèdent suffisamment d'énergie pour vaincre la barrière de potentiel du grain de poussière de charge positive et dont la surface est portée au potentiel ϕ_p . Par ailleurs, le courant de charge électronique d'un grain de poussière à charge positive, dans le cadre de la théorie de la sonde, est donné par

$$I_{pe} = -(8\pi)^{1/2} en_{e0}v_{te}a^2 \left(1 + \frac{e\phi_p}{T_e}\right) \quad (1.41)$$

En posant $I_{ph} + I_{pe} = 0$, la charge d'équilibre Z_d du grain est alors donnée par

$$Z_d (1 + bZ_d) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{Q_{abs} Y J}{n_{d0} v_{te}} \exp(-bZ_d T_e / T_{pe}) \quad (1.42)$$

Dans le cas de l'émission thermionique, la charge du grain est déterminée à partir de

$$y(y+1) \exp(\tau y) = \sqrt{2\pi} \frac{b}{e v_{te} n_{d0}} A_0 T_g^3 \exp\left(-\frac{W}{T_g}\right) \quad (1.43)$$

où $b = e^2 / a T_e$, $y = e\phi_p / T_e$, $\tau = T_e / T_g$, $A_0 = 4\pi e m_e / h$. T_g est la température du grain de poussière et h représente la constante de Planck. De récentes expériences sur la station spatiale MIR ont pu générer, sous l'effet des radiations solaires et dans un environnement de micro-gravité, un plasma poussiéreux avec des grains chargés positivement. Par ailleurs, une expérience de laboratoire a permis de mesurer des charges moyennes, acquises par émission photo-électrique, de l'ordre de $5.3 (\pm 1.6) \cdot 10^4 e$ pour des grains de zinc et de $4.1 (\pm 1.0) \cdot 10^4 e$ pour des grains de graphite.

1.4 Ondes électrostatiques dans un plasma poussiéreux non magnétisé

La présence de grains de poussière chargés dans un plasma à deux composantes (électrons + ions) peut modifier et altérer la propagation, l'instabilité, la diffusion, etc... des ondes susceptibles de se propager dans un tel plasma. Ces modifications peuvent être attribuées à la distribution aléatoire et non homogène des grains de poussière dans le plasma et à la déviation par rapport à la condition de quasi-neutralité conventionnelle d'un plasma à deux composantes. D'un autre côté, de nouveaux modes associés uniquement à la dynamique des grains de poussière peuvent apparaître. Au cours du meeting de Capri sur les plasmas poussiéreux (Juillet 89), Shukla [1] a proposé de prendre en considération la dynamique des grains de poussière dans un plasma où les vitesses des ions et des électrons sont distribuées selon la loi de Boltzmann. A un tel cas de figure, correspondent des ondes acoustiques poussiéreuses (DAW) de vitesse de phase $v_p = \omega/k$ extrêmement petite (en comparaison avec les vitesses thermiques des électrons et des ions) et de faible fréquence ($\omega \sim$ dizaines de Hz, plus petite que la fréquence plasma poussiéreuse dans les

décharges à basse température). Les forces de rappel proviennent des pressions électronique et ionique alors que la masse des grains fournit l'inertie pour maintenir et entretenir ces ondes acoustiques poussiéreuses. Ces dernières, de longueur d'onde $2\pi/k$ de l'ordre de 0.6 cm, apparaissent sur une échelle de temps suffisamment longue à telle enseigne que leur front d'onde est perceptible à l'œil nu. Les spectres d'ondes d'un plasma poussiéreux sont obtenus grâce à l'analyse de Fourier des équations de Vlasov, de Poisson et de Maxwell auxquelles il faut adjoindre l'équation de charge du grain de poussière. La réponse du plasma poussiéreux dans le potentiel électrostatique de l'onde ϕ est alors donnée par

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \phi = 0 \quad (1.44)$$

où

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \chi_e + \chi_i + \chi_d + \chi_{qe} + \chi_{qi} \quad (1.45)$$

est la constante diélectrique. χ_e , χ_i , et χ_d représentent les susceptibilités électronique, ionique et poussiéreuse et χ_{ds} la susceptibilité linéaire associée à la fluctuation de la charge du grain de poussière. Dans un plasma poussiéreux, les ions et les électrons sont faiblement couplés. Pour $\omega/k \ll v_{te}, v_{ti}$, nous avons [1]

$$\begin{aligned} \chi_e &\approx \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \\ \chi_i &\approx \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \end{aligned} \quad (1.46)$$

dans le cas d'électrons et d'ions distribués selon la loi de Boltzmann, i.e., les perturbations de densité correspondantes sont données respectivement par $n_{e0}e\phi/T_e$ et $-n_{i0}e\phi/T_i$. Lorsque les grains de poussière sont faiblement couplés, nous obtenons pour $\omega/k \gg v_{td}$

$$\chi_d \approx -\frac{\omega_{pd}^2}{\omega(\omega + i\nu_d) - 3k^2 v_{td}^2} \quad (1.47)$$

où $v_{td} = (T_d/m_d)^{1/2}$ est la vitesse thermique des grains de poussière, ν_d la fréquence effective de collision des grains et $\omega_{pd} = (4\pi Z_{d0}^2 e^2 n_{d0}/m_d)^{1/2}$ est la fréquence plasma

poussiéreuse. Dans le cas de grains chargés négativement, nous avons

$$\chi_{qe} + \chi_{qi} = \frac{f_d \nu_2}{k^2 \lambda_D^2 (\nu_1 - i\omega)} \quad (1.48)$$

Pour $\nu_d, kv_{td} \ll |\omega| \ll \nu_1$, nous obtenons alors la fréquence de l'onde acoustique poussiéreuse

$$\omega = \frac{k \lambda_d \omega_{pd}}{(1 + k^2 \lambda_d^2)^{1/2}} \quad (1.49)$$

laquelle, pour $f_d \nu_2 / \nu_1 \ll 1$ et $k^2 \lambda_D^2 \ll 1$, se réduit à

$$\omega = k C_D \quad (1.50)$$

où

$$C_D = Z_{d0} (n_{d0}/n_{i0})^{1/2} (T_i/m_d)^{1/2} \left(1 + \frac{n_{e0} T_i}{n_{i0} T_e} \right)^{1/2} \quad (1.51)$$

est la vitesse acoustique poussiéreuse. A l'aide de l'expression précédente, il devient alors possible d'estimer la vitesse de phase de l'onde $v_p = \omega/k$ connaissant les paramètres du plasma. Dans l'expérience de Chu et al. [1], [28], de paramètres $a \simeq 1\mu\text{m}$, $m_d \simeq 4 \times 10^{-12}\text{g}$, $T_e = 2.6\text{eV}$, $T_i = 0.26\text{eV}$, $T_d = 10^{-2}T_e$, $Z_{d0} \sim 8100$, distance moyenne entre grains $\sim 300\mu\text{m}$, $n_{d0} \sim 3.7 \times 10^4\text{cm}^{-3}$, $n_{e0} \sim 5 \times 10^9\text{cm}^{-3}$, une vitesse de phase $v_p = f_w \times \lambda_w = 12\text{Hz} \times 0.5\text{cm} = 6\text{cm/s}$ a été mesurée. Cette dernière est en bon accord avec celle que l'on pourrait prédire en utilisant l'expression (1.50) et qui prévoit une vitesse de phase $v_p = \omega/k$ de l'ordre de 7cm/s . De plus, dans le cas de plasmas avec $n_{e0}T_i \ll n_{i0}T_e$, nous avons $C_D = Z_{d0} (T_i/m_d)^{1/2} (n_{d0}/n_{i0})$. Pour des grains de rayon $\sim 5\mu\text{m}$, de masse $m_d \approx 10^{-12}\text{Kg}$, de charge $Z_{d0} \approx 4 \times 10^4$ et de densité $n_{d0}/n_{i0} \approx 10^{-8}$, nous obtenons alors $C_D \sim 8\text{cm/s}$. Cette valeur est en bon accord avec la valeur expérimentale [9] $v_p \sim 9\text{cm/s}$. Par conséquent, pour $\lambda_w \approx 0.6\text{cm}$, la fréquence de l'onde acoustique poussiéreuse est de l'ordre de $f_w \sim 15\text{Hz}$. L'atténuation spatiale d'une onde acoustique poussiéreuse dans un plasma collisionnel peut être déterminée à partir de la relation établie par Pieper et Goree [29]

$$k^2 = \frac{1}{\lambda_d^2} \frac{\omega (\omega + i\nu_d)}{[\omega_{pd}^2 - \omega (\omega + i\nu_d)]} \quad (1.52)$$

où $k = k_r + ik_i$, k_r (k_i) représente la partie réelle (imaginaire) du nombre d'onde et ω est réelle. Considérons maintenant l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW) dont le domaine de fréquences est donnée par $kv_{td}, kv_{ti}, \omega_{pd} \ll |\omega| \ll kv_{te}, \omega_{pi}$ où ω_{pi} représente la fréquence plasma ionique. Sur de telles échelles temporelles, les électrons suivent une distribution de Boltzmann alors que les ions et les grains de poussière sont, respectivement, inertiels et immobiles. Dans ce cas de figure, la susceptibilité ionique est donnée par [30]

$$\chi_i \approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + i\nu_i) - 3k^2v_{ti}^2} \quad (1.53)$$

où ν_i est la fréquence de collision ion- grain de poussière/ particule neutre. En négligeant les effets de la fluctuation de la charge, la fréquence de l'onde DIA est donnée par la relation [31]

$$\omega = \frac{k\lambda_{De}\omega_{pi}}{(1 + k^2\lambda_{De}^2)^{1/2}} \quad (1.54)$$

Pour $k^2\lambda_{De}^2 \ll 1$, (1.54) se réduit à

$$\omega = kC_s \quad (1.55)$$

où $C_s = (n_{i0}/n_{e0})^{1/2} (T_e/m_i)^{1/2}$ est la vitesse acoustique ionique modifiée par la présence, dans le plasma, de grains de poussière. L'équation (1.55) indique que la vitesse de phase, ω/k , de l'onde DIA augmente avec la concentration relative des grains (dans un plasma poussiéreux $n_{i0} > n_{e0}$). Barkan et al. [26] ont mené une série d'expériences dans le but d'étudier la propagation et l'amortissement des ondes DIA. Ils ont alors trouvé que la vitesse de phase de ces dernières augmente conformément à la relation (1.55). Les valeurs des fréquences mesurées varient, selon la valeur du rapport $Z_d n_{d0}/n_{i0}$, de 3 à 5 kHz.

1.5 Ondes électrostatiques de basses fréquences dans un plasma poussiéreux en présence d'un champ magnétique

Au cours de cette section, nous rapporterons l'essentiel des travaux d'un groupe de chercheurs de l'université de l'Iowa [32]. La relation de dispersion linéaire des ondes électrostatiques de basses fréquences dans un plasma poussiéreux magnétisé a été obtenue à

l'aide du modèle fluide que D'Angelo a introduit au début des années 90 [33]. Le terme "basses fréquences" désigne des fréquences de l'ordre de, ou plus petites que f_{ci} et f_{pi} , la gyrofréquence et la fréquence plasma de l'ion. Cette approche détermine le nombre de modes possibles mais ne donne pas, en général, d'informations précises concernant l'accroissement ou l'amortissement de l'onde. Considérons un plasma uniforme à trois composantes (électrons + ions + grains de poussière chargés) immergé dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B} orienté suivant l'axe z d'un système de coordonnées cartésiennes. Chaque espèce α est caractérisée par une masse m_α , une charge $q_\alpha = eZ_\alpha$, une densité n_α , une température T_α , une vitesse thermique $v_{t\alpha} = (T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$, une gyrofréquence $\omega_{c\alpha} = eZ_\alpha B/m_\alpha$ et un gyrorayon $\rho_\alpha = v_{t\alpha}/\omega_{c\alpha}$, où $\alpha = (e, i, d)$ désigne respectivement les électrons, les ions et les grains de poussière. Tous les grains sont supposés avoir la même masse et la même charge négative. Les trois composantes du plasma peuvent alors être décrites par leurs équations de continuité

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (1.56)$$

et de mouvement

$$n_\alpha m_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + n_\alpha m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha + T_\alpha \nabla n_\alpha + q_\alpha n_\alpha \nabla \phi - q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

Dans le cas des basses fréquences, l'inertie de l'électron peut être négligée et son mouvement entièrement pris le long du champ magnétique \mathbf{B} . Cela équivaut à dire que les électrons sont en équilibre thermodynamique, i.e., $T_e \nabla n_e = en_e \nabla \phi$. En plus des deux équations (1.56) et (1.57), la condition de quasi-neutralité de la charge électrique est utilisée aussi bien à l'équilibre qu'à l'état perturbé. L'analyse linéaire standard par la méthode des perturbations est alors effectuée autour d'un état d'équilibre uniforme, sans dérive, avec un champ électrique $\mathbf{E}_0 = -(\nabla \phi)_0 = 0$ et des densités d'équilibre n_{e0} , n_{i0} et n_{d0} . En supposant que les quantités d'ordre 1 varient en $\exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)]$, la relation de dispersion suivante est alors obtenue

$$\frac{G}{\xi_i^2 - G} + \varepsilon Z_{d0}^2 \mu_{i/d} \frac{H}{\xi_i^2 - \tau_{d/i} \mu_{i/d} H} - \tau_{i/e} (1 - \varepsilon Z_{d0}) = 0 \quad (1.58)$$

où

$$G = \left(\frac{\xi_i^2}{\xi_i^2 - 1} \right) k_x^2 \rho_i^2 + k_z^2 \rho_i^2 \quad (1.59)$$

et

$$H = \left(\frac{\xi_i^2}{\xi_i^2 - (\xi_i/\xi_d)^2} \right) k_x^2 \rho_i^2 + k_z^2 \rho_i^2 \quad (1.60)$$

$\xi_i = \omega/\omega_{ci}$, $\xi_d = \omega/\omega_{cd}$, $\mu_{i/d} = m_i/m_d$, $\tau_{d/i} = T_d/T_i$, $\tau_{i/e} = T_i/T_e$ et $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0}$. La quantité εZ_{d0} représente la fraction de charge négative par unité de volume contenue par les grains. En l'absence de poussière, $\varepsilon = 0$, la relation de dispersion (1.58) admet les deux racines habituelles. Celles ci correspondent à l'onde acoustique ionique et l'onde électrostatique cyclotronique ionique. Dans le cas $\varepsilon \neq 0$ (présence de poussière), la relation de dispersion (1.58) prévoit l'existence de quatre racines positives en ω/ω_{ci} associées aux quatre modes suivants : cyclotronique ionique (EIC), acoustique ionique (IA), acoustique poussiéreux (DA) et cyclotronique poussiéreux (EDC). Ces solutions peuvent être obtenues numériquement pour des valeurs arbitraires du rapport k_x/k_z . Cependant, il est beaucoup plus instructif de rechercher les racines "pures", i.e., celles qui correspondent aux modes qui se propagent parallèlement (modes acoustiques) et perpendiculairement (modes cyclotroniques) au champ magnétique \mathbf{B} .

1.5.1 Modes acoustiques ($k_x = 0$)

On obtient d'abord les relations de dispersion des modes acoustiques, valables dans la limite des grandes longueurs d'onde $k\lambda_{De} \ll 1$ et $k\lambda_{Dd} \ll 1$, où $\lambda_{De(d)}$ est la longueur de Debye électronique (poussiéreuse).

- **Mode acoustique ionique poussiéreux (DIA) ($\omega \gg k_z C_d$)**

C'est l'onde acoustique ionique habituelle avec, cependant, quelques modifications introduites par la présence de grains de poussière chargés négativement [33], [31]. Le grain, dans ce cas, peut être considéré comme fond neutralisant et immobile ($m_d \rightarrow \infty$). La relation de dispersion (1.58) devient alors

$$\frac{\omega}{k_z} = \left[\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_e}{m_i (1 - \varepsilon Z_{d0})} \right]^{1/2} = C_S \quad (1.61)$$

C_S est la vitesse acoustique ionique modifiée. Notons que la vitesse de phase de l'onde, ω/k_z , augmente à mesure que la concentration relative des grains, ε , augmente. Pour s'en rendre compte, il suffit de linéariser l'équation de mouvement des ions et de l'écrire sous la forme

$$m_i n_{i0} \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = - \left(T_i + \frac{T_e}{1 - \varepsilon Z_{d0}} \right) \frac{\partial n_{i1}}{\partial x} \quad (1.62)$$

où la relation de Boltzmann a été utilisée pour exprimer le champ électrique de l'onde E_1 en termes de $\partial n_{e1}/\partial t$. Le terme $m_i n_{i0} \partial v_{i1}/\partial t$ est la force par unité de volume agissant sur un élément fluide ionique en présence de la perturbation de l'onde. Le terme de droite est la force acoustique de rappel par unité de volume. Cette dernière augmente à mesure que la valeur de ε augmente. Un accroissement de la force de rappel donne alors lieu à une augmentation de la vitesse de phase de l'onde. Physiquement, comme le nombre d'électrons collectés par la surface des grains va en augmentant, il y en aura de moins en moins de "disponibles" pour contrecarrer et neutraliser les perturbations de la charge d'espace ionique. D'ailleurs, le terme $T_e/(1 - \varepsilon Z_{d0})$, comme noté par certains auteurs, peut être perçu comme une température électronique effective.

• **Mode acoustique poussiéreux (DA)** ($\omega \ll k_z C_i$)

C'est un mode acoustique de très basse fréquence. Par conséquent, les grains de poussière prennent part à sa dynamique et l'inertie des électrons et des ions peut être négligée. La relation de dispersion est alors donnée par [8]

$$\frac{\omega}{k_z} = \left[\frac{T_d}{m_d} + \varepsilon Z_{d0}^2 \frac{T_i}{m_d} + \frac{1}{1 + (1 - \varepsilon Z_{d0}) T_i/T_e} \right]^{1/2} = C_D \quad (1.63)$$

où C_D représente la vitesse acoustique poussiéreuse. Pour ce mode, l'inertie est fournie par les grains de poussière alors que la force de rappel est due aux pressions électronique et ionique. Un tel résultat peut être aisément obtenu en linéarisant l'équation de mouvement du grain (avec $T_d = 0$)

$$m_d n_{d0} \frac{\partial v_{d1}}{\partial t} = - \left(T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} + T_i \frac{\partial n_{i1}}{\partial x} \right) \quad (1.64)$$

1.5.2 Modes cyclotroniques ($k_z \ll k_x$)

Ce sont des modes qui se propagent presque perpendiculairement au champ magnétique \mathbf{B} avec, toutefois, une valeur finie de k_z . L'hypothèse selon laquelle les électrons gardent leur équilibre thermodynamique le long de \mathbf{B} reste alors correcte.

- **Mode électrostatique cyclotronique ionique poussiéreux (EDIC) ($\omega \sim \omega_{ci}$)**

Il s'agit du mode électrostatique cyclotronique ionique habituel modifié par la présence, dans le plasma, des grains de poussière. Pour $\omega \sim \omega_{ci}$, les grains de poussière peuvent être considérés immobiles et la relation de dispersion se réduit à

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k_x^2 \left[\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_e}{m_i(1 - \varepsilon Z_{d0})} \right] \quad (1.65)$$

La relation (1.65) indique que la fréquence de l'onde croît à mesure que ε augmente.

- **Mode cyclotronique poussiéreux (EDC) ($\omega \ll \omega_{ci}$)**

Dans ce cas, la dynamique des grains de poussière magnétisés doit être prise en compte tandis que les ions peuvent être considérés en équilibre thermodynamique le long du champ magnétique \mathbf{B} en réponse au très faible champ électrique E_z . La relation de dispersion est alors donnée par

$$\omega^2 = \omega_{cd}^2 + k_x^2 \left[\frac{T_d}{m_d} + \varepsilon Z_{d0}^2 \frac{T_i}{m_d} \frac{1}{1 + \frac{T_i}{T_e}(1 - \varepsilon Z_{d0})} \right] \quad (1.66)$$

En résumé, les quatre relations de dispersion précédentes peuvent être réécrites sous la forme compacte suivante

- **DIA**

$$\omega^2 = k_z^2 C_S^2 \quad (1.67)$$

- **DA**

$$\omega^2 = k_z^2 C_D^2 \quad (1.68)$$

- **EDIC**

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k_x^2 C_S^2 \quad (1.69)$$

• EDC

$$\omega^2 = \omega_{cd}^2 + k_x^2 C_D^2 \quad (1.70)$$

Les expressions de C_S et C_D sont données par les équations (1.61) et (1.63). Les modes décrits par les équations (1.67) et (1.69) sont des modes pour lesquels la dynamique du grain ne joue aucun rôle. Toutefois, l'effet de ce grain peut être très important dans l'excitation de ces ondes. Les modes DA (1.68) et EDC (1.70) sont les nouveaux modes poussiéreux de basse fréquence.

Chapitre 2

Etude des ondes acoustiques ioniques dans un plasma poussiéreux collisionnel et à charge variable

2.1 Présentation physique du problème

Généralement, lorsque des ions négatifs sont introduits dans un plasma constitué d'électrons et d'ions positifs, les modes d'onde de ce plasma sont modifiés et de nouveaux modes apparaissent. A titre d'exemple, la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique prévoit deux modes de propagation, l'un "rapide" et l'autre "lent", lorsque des ions négatifs sont présents dans le plasma [34]. Des effets similaires peuvent se produire et survenir dans les plasmas poussiéreux (dusty plasmas). Ces derniers sont composés d'électrons, d'ions positifs et de grains de poussière massifs chargés négativement. La présence de ces grains d'impureté peut affecter de manière significative le comportement du plasma dans lequel ils sont immergés. L'équilibre de la charge du plasma est modifié et la condition de quasi-neutralité de la charge devient alors $n_i = n_e + Z_d n_d$, où n_α ($\alpha = e, i, d$) représente la densité de l'espèce α et Z_d le nombre de charges du grain. Différents modes d'onde sont alors possibles selon que les grains de poussière sont statiques ou mobiles. Récemment, la recherche dans les plasmas poussiéreux a été étendue à l'étude des processus collectifs, *i.e.*, les ondes et les instabilités [35], [36]. La présence de grains de poussière chargés peut avoir une influence significative sur les caractéristiques des modes

d'onde habituels du plasma. Cette influence peut se manifester et être ressentie même à des fréquences où les grains de poussière constituent simplement une composante qui prend part au maintien de la quasi-neutralité et de l'équilibre de la charge du plasma (un fond neutralisant). D'un autre côté, lorsque la gamme de fréquences considérées est bien en deçà des fréquences caractéristiques typiques d'un plasma à deux composantes (électrons+ions), de nouveaux modes, dits modes poussiéreux, apparaissent dans les relations de dispersion déduites de la théorie cinétique ou des équations fluides des trois espèces présentes dans le plasma (électrons + ions + grains de poussière chargés). Certains de ces nouveaux modes sont similaires et semblables à ceux déjà trouvés dans les plasmas d'ions négatifs avec, cependant, d'importantes différences uniques aux plasmas poussiéreux. Rao et al. [37] ont été les premiers à avoir analysé le cas où la dynamique des grains de poussière était importante. Ils ont alors montré, et pour la première fois, l'existence d'un nouveau mode acoustique de très basse fréquence qu'ils ont baptisé onde acoustique poussiéreuse (dust acoustic wave, DAW). Shukla et Silin [31] ont étudié le mode acoustique ionique poussiéreux (DIAW) qui représente en fait le mode acoustique ionique habituel modifié par la présence de grains d'impureté immobiles et chargés négativement. Celle-ci augmente la vitesse de phase des ondes DIA et par conséquent réduit de manière significative l'amortissement Landau [31], [33]. Ceci a été confirmé par Rosenberg [38] qui a utilisé la théorie de Vlasov pour analyser l'instabilité DIA excitée grâce à une dérive des électrons par rapport aux ions. Dans le cas des plasmas poussiéreux magnétisés, D'Angelo a montré qu'en plus des modes acoustiques ioniques, deux autres modes cyclotroniques ioniques de nature électrostatique sont possibles : un mode électrostatique cyclotronique ionique poussiéreux (EDIC)¹ et un mode électrostatique cyclotronique poussiéreux (EDC), de très basse fréquence, associé à la dynamique des grains de poussière. Par ailleurs, les plasmas poussiéreux dans la nature ont tendance à être composés de grains de formes et de dimensions très variées. Cela veut dire que la masse et la charge électrique diffèrent d'un grain à un autre. De plus, la charge d'un grain peut ne pas être constante. Celle-ci devient alors une nouvelle variable dynamique évoluant au cours du temps. Les électrons et les ions sont collectés par les grains d'impureté qui, à cause de la grande mobilité des électrons, tendent à acquérir une charge négative. L'émission secondaire dans les plasmas énergé-

¹C'est en fait le mode électrostatique cyclotronique ionique habituel modifié par le fait qu'une partie de la charge négative du plasma a été collectée par la surface de grains d'impureté immobiles.

tiques et l'émission photo-électronique dans les plasmas radiatifs peuvent aussi contribuer à la charge du grain et donner ainsi lieu à l'apparition de grains chargés positivement. Les premiers travaux expérimentaux dans les plasmas poussiéreux ont porté essentiellement sur la mesure de la charge électrique individuelle des grains de poussière. Les résultats expérimentaux étaient comparables à ceux du modèle standard de la charge des grains d'impureté due à la collection des électrons et des ions du plasma de base. Dans ce modèle, un grain d'impureté est assimilé à une sphère conductrice de rayon a , portée à un potentiel V_s relativement au plasma de base. La charge q_d du grain peut alors être calculée grâce à la relation $q_d = C_g V_s = 4\pi\epsilon_0 a V_s$, où C_g représente la capacité du grain d'impureté. Le potentiel d'équilibre à la surface du grain est alors déterminé par la relation $I_e + I_i \simeq 0$, où I_e et I_i représentent respectivement les courants de charge électronique et ionique. Dans un plasma d'hydrogène, avec $T_e = T_i = T$, cette condition donne la relation $V_s = -2.5T/e$. A titre d'exemple, pour $T = 1\text{eV}$, un grain d'impureté de rayon $a = 1\mu\text{m}$ et de masse $m_d \approx 10^{12}m_{\text{proton}}$ acquiert une charge négative correspondant à la charge d'environ 1800 électrons.

Récemment le mode acoustique ionique poussiéreux a été analysé par Merlino [39] et plus tard par Ostrikov *et al.* [40] dans le cas de la charge variable. Cependant, le processus de charge du grain de poussière n'a pas été décrit de manière rigoureuse : les courants de charge dans un plasma poussiéreux collisionnel, comprenant des ions non-Boltzmaniens et en présence d'une onde acoustique ionique poussiéreuse ont été calculés moyennant l'hypothèse selon laquelle les ions, à l'instar des électrons, recouvrent leur équilibre thermodynamique. De plus, Merlino n'a pas pris en compte les phénomènes de capture et d'émission des électrons et des protons par les grains de poussière. L'applicabilité de son analyse aux expériences de laboratoire peut donc s'avérer restreinte et limitée. Le but du présent chapitre est d'étudier l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW) dans le cas d'un plasma poussiéreux, collisionnel et à charge variable. Pour cela, l'équation de la charge du grain d'impureté, en présence d'ions non-Boltzmaniens, sera établie de manière self-consistante. Les fonctions de distribution collisionnelles perturbées seront obtenues à partir de l'équation de Vlasov dans laquelle nous inclurons un terme de collision de Krook pour tenir compte de la collision particule neutre- particule chargée. Les courants de charge seront par la suite calculés au moyen de sections efficaces de charge collisionnelles.

L'analyse habituelle de Fourier des équations de base de notre modèle nous permettra alors d'obtenir une relation de dispersion de troisième ordre. Nous verrons alors que le phénomène de variation de la charge du grain peut modifier de manière significative les conditions d'existence et de réalisation de l'onde DIA.

2.2 Equations de base du modèle

Nous allons maintenant introduire les équations de base de notre modèle. Pour cela, nous considérons un plasma composé d'électrons, d'ions et de grains d'impureté de densités respectives n_e , n_i et n_d . Les grains d'impureté sont supposés sphériques, de même charge q_d , de même rayon a et de même masse m_d . Des atomes de gaz neutres de densité N sont présents dans le plasma. Les grains d'impureté, chargés négativement $q_d = -eZ_d$, sont plus massifs que le reste des particules du plasma et peuvent donc être considérés immobiles. Les électrons de température T_e et les ions de température T_i font des collisions avec les atomes neutres (considérés stationnaires) à des fréquences respectives $\nu_{en} = N\sigma_{en}v_{te}$ et $\nu_{in} = N\sigma_{in}v_{ti}$ où $\sigma_{e(i)n}$ représente la section efficace de collision électron (ion)- atome neutre et $v_{te(i)}$ la vitesse thermique de l'électron (ion). Le plasma est soumis à l'action d'un champ électrique E . Les ions et les électrons peuvent alors être décrits par les équations de continuité et de mouvement suivantes [39]

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = -\beta_e (n_e - n_{e0}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = -\beta_i (n_i - n_{i0}) \quad (2.2)$$

$$T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + en_e E = -\nu_e^{eff} n_e m_e v_e \quad (2.3)$$

$$n_i m_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + n_i m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} - en_i E = -\nu_i^{eff} n_i m_i v_i \quad (2.4)$$

Le système d'équations précédent est complété par la condition de quasi-neutralité de la charge

$$n_i = n_e + Z_d n_d \quad (2.5)$$

Les électrons et les ions font des collisions aussi bien avec les atomes neutres qu'avec les grains de poussière. La fréquence électronique (ionique) de collision effective est alors écrite sous la forme

$$\nu_e^{eff} = \nu_{en} + \nu_e^{el} + \nu_e^{ch} \quad (2.6)$$

et

$$\nu_i^{eff} = \nu_{in} + \nu_i^{el} + \nu_i^{ch} \quad (2.7)$$

où $\nu_{e(i)}^{el}$ représente la fréquence de la collision coulombienne élastique entre un électron (un ion) et un grain de poussière et $\nu_{e(i)}^{ch}$ la fréquence effective des collisions qui contribuent à la charge du grain de poussière. Des termes de perte ou termes puits, caractérisés par des coefficients $\beta_{e,i}$, ont été introduits pour tenir compte des variations possibles des densités électronique et ionique induites par le processus de charge du grain de poussière. Les coefficients $\beta_{e,i}$ peuvent être perçus comme des fréquences de capture des électrons et des ions par la surface du grain de poussière. Les expressions de $\beta_{e,i}$ sont données dans la référence [40]. Ce modèle est inspiré par ce qui est habituellement écrit dans le cas des collisions entre les électrons, les ions et les particules neutres [41]. Des termes additionnels, tels ceux décrivant l'ionisation, la recombinaison volumique et la diffusion, peuvent être introduits dans les équations (2.1) et (2.2). Les équations (2.1)-(2.5) sont linéarisées autour d'un état d'équilibre uniforme ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$) et indépendant du temps ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Toutes les grandeurs macroscopiques du plasma sont alors écrites sous la forme d'une valeur d'équilibre d'ordre zéro (affecté de l'indice zéro) et d'une valeur fluctuante d'ordre un (affectée du symbole \sim). A l'ordre zéro, les équations (2.2) et (2.4) donnent

$$E_0 = -\frac{\nu_e^{eff} m_e v_{e0}}{e} = \frac{\nu_i^{eff} m_i v_{i0}}{e} \quad (2.8)$$

E_0 est le champ électrique d'ordre zéro et v_{e0} , v_{i0} représentent les vitesses de dérive à l'équilibre des électrons et des ions. A l'équilibre, la condition de quasi-neutralité de la charge donne

$$n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0} n_{d0} \quad (2.9)$$

Cette dernière peut être réécrite sous la forme

$$n_{e0} = (1 - \varepsilon Z_{d0}) n_{i0} \quad (2.10)$$

où $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0}$. La quantité $\varepsilon Z_{d0} = (n_{d0}/n_{i0}) Z_{d0} = [n_{d0}/(n_{e0} + Z_{d0}n_{d0})] Z_{d0}$ représente la fraction de la charge négative totale par unité de volume contenue dans les grains d'impureté. Les quantités d'ordre un sont proportionnelles à $e^{i(kx-\omega t)}$. k et ω représentent respectivement le vecteur d'onde et la fréquence d'oscillation de la quantité d'ordre un considérée. En posant

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\tilde{n}_i}{n_{i0}} \quad (2.11)$$

$$\tilde{\xi}_e = \frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} \quad (2.12)$$

nous obtenons à partir des équations (2.1), (2.2) les relations

$$\tilde{v}_i = \frac{\Omega_i}{K} \tilde{\xi}_i \quad (2.13)$$

$$\tilde{v}_e = \frac{\Omega_e}{K} \tilde{\xi}_e \quad (2.14)$$

avec

$$\Omega_{i,e} = \omega - kv_{i0,e0} + i\beta_{i,e} \quad (2.15)$$

Les équations (2.13) et (2.14) sont alors insérées dans les formes linéarisées des équations (2.3) et (2.4) pour obtenir

$$\tilde{\xi}_i = \frac{ie}{m_i \Omega_i} \frac{k}{(\Omega_i - i\beta_i + i\nu_i^{eff}) - k^2 T_i/m_i} \tilde{E} \quad (2.16)$$

et

$$\tilde{\xi}_e = -\frac{ie}{m_e} \frac{k}{i\nu_e^{eff} \Omega_e - k^2 T_e/m_e} \tilde{E} \quad (2.17)$$

Les grains d'impureté étant immobiles, la quantité de premier ordre \tilde{n}_d est par conséquent nul. A l'aide de l'équation (2.5), il est alors aisé de montrer que

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_e + \tilde{Z}_d n_{d0} \quad (2.18)$$

La quantité \tilde{Z}_d d'ordre un rend compte de la fluctuation de la charge du grain d'impureté en réponse aux perturbations du plasma. L'équation (2.18) peut être réécrite sous la forme

suivante

$$\tilde{\xi}_i = \tilde{\xi}_e \frac{n_{e0}}{n_{i0}} + \tilde{Z}_d \frac{n_{d0}}{n_{i0}} = (1 - \varepsilon Z_{d0}) \tilde{\xi}_e + \varepsilon \tilde{Z}_d \quad (2.19)$$

L'équation précédente est la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique poussièreuse (DIA). Elle lie le vecteur d'onde \mathbf{k} de l'instabilité à sa fréquence ω . Dans ce qui va suivre, nous allons d'abord considérer de manière succincte le cas où la charge du grain d'impureté est constante ($\tilde{Z}_d = 0$, $\beta_{e,i} = 0$) pour ensuite analyser le cas où la charge du grain est fluctuante.

2.3 Cas où la charge du grain d'impureté est constante

En annulant respectivement les valeurs de \tilde{Z}_d , β_e et β_i et en portant les expressions (2.16) et (2.17) dans l'équation (2.19), nous obtenons la relation de dispersion suivante

$$(1 - \varepsilon Z_{d0}) \left[\Omega_i (\Omega_i - i\nu_i) - k^2 \frac{T_i}{m_i} \right] - k^2 \frac{T_e}{m_i} + i \frac{m_e}{m_i} \nu_e \Omega_e = 0 \quad (2.20)$$

En définissant la vitesse de dérive relative comme

$$u_0 = v_{e0} - v_{i0} \quad (2.21)$$

l'équation (2.20) peut être réécrite sous la forme suivante

$$(1 - \varepsilon Z_{d0}) \left[\Omega (\Omega + i\nu_i) - k^2 \frac{T_i}{m_i} \right] - k^2 \frac{T_e}{m_i} + i \frac{m_e}{m_i} \nu_e (\Omega - k u_0) = 0 \quad (2.22)$$

où, dans le souci de ne pas encombrer les écritures, nous avons remplacé Ω_i par Ω . En posant

$$\Omega = \Omega_r + i\gamma \quad (2.23)$$

l'équation (2.22) peut être aisément résolue pour obtenir la fréquence réelle Ω_r (dans le repère de l'ion) et le taux d'instabilité γ . En portant (2.23) dans (2.22) et en annulant

simultanément les parties réelle et imaginaire, nous obtenons

$$(1 - \varepsilon Z_{d0}) [m_i (\Omega_r^2 - \gamma^2 - \gamma \nu_i) - k^2 T_i] - k^2 T_e - m_e \nu_e \gamma = 0 \quad (2.24)$$

et

$$\gamma = -\frac{1}{2}\nu_i - \frac{1}{2}\nu_e \frac{m_e}{m_i (1 - \varepsilon Z_{d0})} \left(1 - \frac{u_0}{\Omega_r/k}\right) = 0 \quad (2.25)$$

En général, la relation de dispersion (2.22) est résolue numériquement. Cependant, les relations (2.24) et (2.25) peuvent s'avérer très utiles lors de l'analyse des conditions de la stabilité marginale ($\gamma \simeq 0$). Notons que la validité de la relation de dispersion précédente peut être aisément vérifiée en considérant le cas limite $\varepsilon Z_{d0} = 0$, i.e., en l'absence de tout grain d'impureté. La relation (2.25) se réduit alors au taux d'instabilité d'une onde acoustique ionique dans le cas collisionnel.

2.4 Cas où la charge du grain d'impureté est fluctuante

On se propose maintenant d'analyser en détail le cas où la charge du grain d'impureté fluctue au cours du temps. Cette fluctuation de charge peut être due à différents processus : collections de particules chargées (ions + électrons) du plasma ambiant, photo-ionisation, émission d'électrons secondaires...etc. Dans les plasmas de laboratoire de basses températures, la collection de particules chargées est le phénomène de charge le plus dominant. Dans ce cas, les grains d'impureté sont chargés par des courants électronique et ionique locaux. Leurs charges peuvent alors fluctuer en présence de perturbations de densité ou de potentiel. Par conséquent, l'interaction du processus de charge avec les oscillations collectives du plasma peut revêtir une grande importance lors de l'analyse des plasmas poussiéreux. Dans les études les plus récentes, le modèle de la sonde électrostatique, appliqué au grain d'impureté, a été largement utilisé [42]. Le grain d'impureté est alors supposé être un conducteur sphérique à la surface duquel les électrons et les ions sont absorbés suite à la différence de potentiel électrostatique existant entre le plasma local et la surface du grain. Au voisinage immédiat du grain, les électrons et les ions sont supposés être en équilibre thermodynamique local en dépit de la présence des perturbations.

Un autre modèle suppose des électrons en équilibre thermodynamique et des ions froids monoénergétiques. Dans chaque cas, les courants de charge sont calculés dans le cadre de la théorie de la sonde électrostatique. L'effet des oscillations collectives du plasma sur le processus de charge du grain d'impureté est alors comptabilisé de manière passive à travers les densités de particule et le potentiel électrostatique qui apparaissent dans les expressions de ces courants de grain prédéterminés. En se basant sur l'argument selon lequel le grain est bien isolé et l'équilibre thermique des particules non affecté par les perturbations du plasma, les courants de grain sont alors calculés sans tenir compte de manière self-consistante du reste du mouvement du plasma. Il est par conséquent recommandé, lors de l'application de ces modèles, de faire très attention et de tenir compte des différentes échelles temporelles des quantités perturbées [43], [44], [45]. En particulier, la perturbation peut être telle que les électrons et les ions s'éloignent de leur équilibre thermodynamique. A titre d'exemple, considérons des ondes de haute fréquence dans la gamme des oscillations électroniques (qui sont beaucoup plus petites que le temps de relaxation de la charge) dans un plasma faiblement collisionnel. Dans ce cas, les ions, relativement lourds, ne répondent pas à ce type de perturbations tandis que les électrons s'écartent de leur équilibre thermique. D'un autre côté, dans le cas d'ondes acoustiques ioniques de basses fréquences, les électrons perturbés, à l'inverse des ions, trouvent tout le temps nécessaire pour revenir à leur équilibre thermique initial. Par ailleurs, le taux de relaxation de la charge du grain peut être du même ordre de grandeur que la fréquence acoustique ionique. C'est pourquoi, la présence de grains d'impureté dans le plasma peut affecter de manière significative la dispersion de ces ondes.

2.5 L'équation de charge du grain d'impureté

On se propose maintenant de considérer le couplage linéaire de l'onde acoustique ionique avec le processus de relaxation de la charge du grain d'impureté. Pour cela, nous ferons appel à la théorie cinétique pour, d'une part, suppléer aux imperfections constatées des modèles de charge cités ci-dessus et, d'autre part, traiter le problème de manière self-consistante. Les grains d'impureté sont en général beaucoup plus lourds que le reste des particules du plasma. Par conséquent, leur dynamique sera caractérisée

par une échelle temporelle relativement importante. Il est alors raisonnable de les traiter comme composante immobile mais non stationnaire. Les courants de charge du grain en régime permanent (courants non perturbés) seront calculés en supposant en équilibre thermique les porteurs de charge électroniques et ioniques. En présence des ondes acoustiques ioniques, les électrons peuvent être raisonnablement supposés en équilibre thermique. La perturbation du courant de charge électronique peut alors être obtenue en développant la perturbation du potentiel et de la densité électronique à partir de la formule exacte du courant de grain dû à des électrons en équilibre thermique. Dans le cadre du modèle de la sonde électrostatique appliqué à un grain d'impureté immobile et chargé par des courants plasma, l'équation d'évolution de la charge q_d du grain s'écrit sous la forme [43]

$$\frac{dq_d}{dt} = I_e + I_i = I_e + I_{i0} + \tilde{I}_i \quad (2.26)$$

Le courant de charge électronique I_e et le courant de charge ionique à l'équilibre I_{i0} sont donnés respectivement par

$$I_e = -\pi a^2 e \left(\frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} n_e \exp \left[\frac{e(\phi_g - \phi)}{T_e} \right] \quad (2.27)$$

$$I_{i0} = -\pi a^2 e \sqrt{\frac{8T_i}{\pi m_i}} n_{i0} \left(1 - \frac{e(\phi_g - \phi_0)}{T_i} \right) \quad (2.28)$$

où l'indice "0" dénote des quantités non perturbées, a désigne le rayon du grain d'impureté, $m_{e,i}$, $T_{e,i}$ et $n_{e,i}$ sont la masse, la température et la densité des électrons et des ions respectivement, $\phi_g - \phi$ est la différence de potentiel entre la surface du grain et le plasma local. La charge non perturbée q_{d0} du grain de poussière est alors donnée par

$$q_{d0} = C_g (\phi_g - \phi_0) < 0 \quad (2.29)$$

où $C_g = a(1 + a/\lambda_{De})$ représente la capacité d'un grain de rayon a et λ_{De} est la longueur de Debye. En l'absence de toute perturbation, les courants de charge électronique et ionique sont égaux et la surface du grain de poussière est portée à un potentiel dit potentiel flottant. q_{d0} peut être considéré comme étant la charge d'équilibre moyenne du grain d'impureté et \tilde{I}_i représente la perturbation du courant de charge ionique due à la présence

des fluctuations acoustiques ioniques. La charge totale du grain sera donc composée de q_{d0} et d'une partie fluctuante \tilde{q}_d régie par l'équation d'évolution suivante

$$\frac{\partial \tilde{q}_d}{\partial t} + \eta \tilde{q}_d = - |I_{e0}| \frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} + \tilde{I}_i = - |I_{e0}| \frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} + e \int_0^\infty \tilde{f}_i v \sigma(v, q_{d0}) d^3v \quad (2.30)$$

où $f_i = f_{i0} + \tilde{f}_i$ désigne la fonction de distribution des vitesses de l'ion et \tilde{n}_e la perturbation de la densité électronique. La section efficace de collision $\sigma(v, q_{d0})$ d'un ion avec un grain de poussière est donnée par

$$\sigma(v, q_{d0}) = \pi a^2 (1 - 2eq_{d0}/m_i C_g v^2) \quad (2.31)$$

Le taux de charge η est donné par [40]

$$\eta = \frac{\alpha + 1}{\alpha \gamma} \beta_e = \frac{\alpha + 1}{\alpha \gamma} \frac{n_{i0}}{n_{e0}} \beta_i = a \omega_{pi}^2 (\alpha + 1) / \sqrt{2\pi} (T_i/m_i)^{1/2} \quad (2.32)$$

avec

$$\alpha = \frac{T_e + T_i}{T_e} + \frac{Z_{d0} e^2}{a T_e} + 1 \quad (2.33)$$

et

$$\gamma = \frac{n_{d0} T_e}{n_{e0} e^2} + 1 \quad (2.34)$$

La fonction de distribution perturbée de l'ion \tilde{f}_i peut être obtenue à partir de l'équation de Vlasov dans laquelle nous incluons un terme de collision de *Krook* pour décrire et comptabiliser les collisions entre les ions et les atomes neutres présents dans le plasma. La fonction de distribution perturbée \tilde{f}_i , solution de l'équation de l'équation de Vlasov [46]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = \frac{f_n - f}{\tau} \quad (2.35)$$

est alors donnée par

$$\tilde{f}_i = i [(-e\tilde{E}/m_i \partial_{v_x} f_{i0} + \nu_r \tilde{f}_n) / (\omega - kv_x + i\nu_r)] \quad (2.36)$$

\tilde{E} et \tilde{f}_n représentent respectivement le champ électrique perturbé du plasma associé à l'onde acoustique ionique et la fonction de distribution perturbée des vitesses des atomes

neutres. ν_r est la fréquence de collision. Dans l'équation (2.35) de Vlasov, les quantités perturbées de premier ordre sont supposées varier en $e^{i(kx-\omega t)}$. Pour simplifier, nous avons omis de tenir compte des collisions ion- grain d'impureté. Leur prise en compte aurait nécessité l'inclusion dans l'équation de Vlasov d'un opérateur de collision de type Boltzmann. De plus, à mesure que la pression du gaz d'atomes neutres augmente, la collision ion- particule neutre prévaut sur toute autre collision. La densité électronique totale, pour les raisons citées ci dessus, est décrite par la distribution de Maxwell- Boltzmann

$$n_e = n_{e0} e^{e\phi/T_e} \quad (2.37)$$

La densité perturbée est alors donnée par

$$\tilde{n}_e = n_{e0} \frac{e\tilde{\phi}}{T_e} \quad (2.38)$$

En utilisant les équations (2.30)-(2.36), nous obtenons finalement l'équation de charge suivante

$$\frac{\partial \tilde{Z}_d}{\partial t} + \eta \tilde{Z}_d = \frac{|I_{e0}|}{e} \frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} - 8\pi e I_{i0} \frac{[1 + (1 - eq_{d0}/C_g T_i)^{-1}]}{3m_i} \frac{(\tilde{n}_i - \tilde{n}_e - \tilde{Z}_d n_{d0})}{(\omega + i\nu_r)^2} \quad (2.39)$$

que l'on peut réduire à

$$\tilde{Z}_d = \frac{|I_{e0}|/e(\omega + i\nu_r)^2 + n_{e0}\Delta}{(\eta - i\omega)(\omega + i\nu_r)^2 - n_{d0}\Delta} \tilde{\xi}_e - \frac{n_{i0}\Delta}{(\eta - i\omega)(\omega + i\nu_r)^2 - n_{d0}\Delta} \tilde{\xi}_i \quad (2.40)$$

avec

$$\Delta = 8\pi e I_{i0} \frac{[1 + (1 - eq_{d0}/C_g T_i)^{-1}]}{3m_i} \quad (2.41)$$

2.6 Relation de dispersion

En utilisant les équations (2.16)-(2.40), nous déduisons aisément la relation de dispersion suivante [47]

$$\frac{m_e[-i\nu_e^{eff}(\Omega - ku_0 + i\beta_e) + k^2 T_e/m_e]}{m_i[(\Omega + i\beta_i)(\Omega + i\nu_i^{eff}) - k^2 T_i/m_i]} = \frac{(1 - \varepsilon Z_{d0})(\eta - i\Omega - ikv_{i0}) + \varepsilon \frac{|I_{e0}|}{e}}{(\eta - i\Omega - ikv_{i0})} \quad (2.42)$$

où

$$\Omega = \omega - kv_{i0} \quad (2.43)$$

et

$$u_0 = v_{e0} - v_{i0} \quad (2.44)$$

En posant $\Omega = \Omega_r + i\gamma$, l'équation (2.42) peut être résolue pour obtenir les expressions de la fréquence réelle Ω_r et du taux d'accroissement γ . De nouveaux termes additionnels dus à la fluctuation de la charge du grain de poussière et à la capture/émission des électrons et des ions peuvent alors apparaître. Nous verrons alors que l'onde DIA peut croître ou décroître selon les valeurs relatives de ν_i , ν_e , β_i et β_e et la nature de la charge du grain d'impureté.

2.7 Résultats numériques et discussion

Dans cette section, la relation de dispersion, polynôme de degré 3, est résolue analytiquement pour l'étude des variations de la partie imaginaire γ ou taux d'accroissement et de la partie réelle Ω_r ou fréquence du mode. Les paramètres que nous utilisons sont généralement représentatifs des conditions expérimentales dans les plasmas poussiéreux de laboratoire. Nous choisissons alors [39]

$$\begin{aligned} m_i &= 40 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg} \\ T_e &= 2 \text{eV} \\ T_i &= 0.1 \text{eV} \\ \sigma_{en} &= 2 \times 10^{-20} \text{m}^2 \\ \sigma_{in} &= 5 \times 10^{-19} \text{m}^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pour des raisons de commodité, nous exprimons la densité des atomes neutres N en termes de la pression P en millitorr

$$N \text{ (m}^{-3}\text{)} = 3 \times 10^{19} P \text{ (mtorr)} \quad (2.46)$$

Les fréquences de collision ionique et électronique deviennent alors

$$\nu_i \text{ (s}^{-1}\text{)} = 7.35 \times 10^3 P \text{ (mtorr)} \quad (2.47)$$

$$\nu_e \text{ (s}^{-1}\text{)} = 3.5 \times 10^3 P \text{ (mtorr)} \quad (2.48)$$

La vitesse de dérive relative peut alors s'exprimer en termes du champ électrique E_0 et de la pression P

$$u_0 \text{ (m/s)} = -5 \times 10^5 \frac{E_0 \text{ (v/m)}}{P \text{ (mtorr)}} \quad (2.49)$$

En collectant les différents paramètres numériques, la relation de dispersion (2.42) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & m_e [-i\nu_e^{eff} (\Omega - ku_0 + i\beta_e) + k^2 T_e / m_e] (\eta - i\Omega - ikv_{i0}) \\ & = m_i [(\Omega + i\beta_i) (\Omega + i\nu_i^{eff}) - k^2 T_i / m_i] (1 - \varepsilon Z_{d0}) (\eta - i\Omega - ikv_{i0}) + \varepsilon \frac{|I_{e0}|}{e} \end{aligned} \quad (2.50)$$

k est le vecteur d'onde en m^{-1} , P est la pression du gaz d'atomes neutres, E_0 est le champ électrique stationnaire en V/m . La quantité εZ_{d0} représente la fraction de la charge négative totale par unité de volume portée par les grains de poussière (pour des grains de poussière chargés négativement $0 \leq \varepsilon Z_{d0} \leq 1$, les cas limites $\varepsilon Z_{d0} = 1$ et $\varepsilon Z_{d0} = 0$ correspondent respectivement au cas où toute la charge négative est portée par les grains de poussière et à celui d'un plasma sans grains de poussière). Nous choisissons d'abord les mêmes paramètres que ceux déjà utilisés par le groupe de l'université de l'Iowa qui a déjà analysé le cas de grains de poussière à charge constante, à savoir $E_0 = 250 \text{V/m}$, $P = 10 \text{mtorr}$, $T_i = 0.1 \text{eV}$ (ligne continue), $T_e = 2 \text{eV}$ et $\varepsilon Z_{d0} = 0.5$. Nous retrouvons des résultats comparables à ceux de ce groupe à l'exception d'un léger décalage de la fréquence de l'onde Ω_r (fig.1) et d'une diminution du taux d'instabilité γ (fig.2).

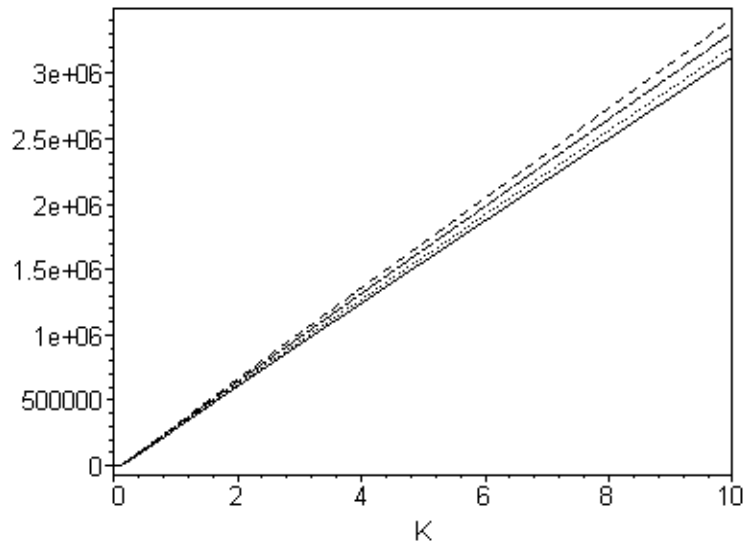


Fig.1- Fréquence de l'onde dans le repère de l'ion [$-\Omega_r$ (s^{-1})] en fonction du vecteur d'onde k (cm^{-1}) pour différentes valeurs de la température ionique ($T_i = 0.1$ eV, 0.3 eV, 0.6 eV, 0.9 eV) avec $\varepsilon Z_{d0} = 0.5$, $E_0 = 250$ V/m, $P = 10$ mtorr, $T_e = 2$ eV, $a = 10^{-4}$ cm, $n_{d0} = 10^5$ cm^{-3} , $m_i = 40m_p$. T_i augmente de bas vers le haut.

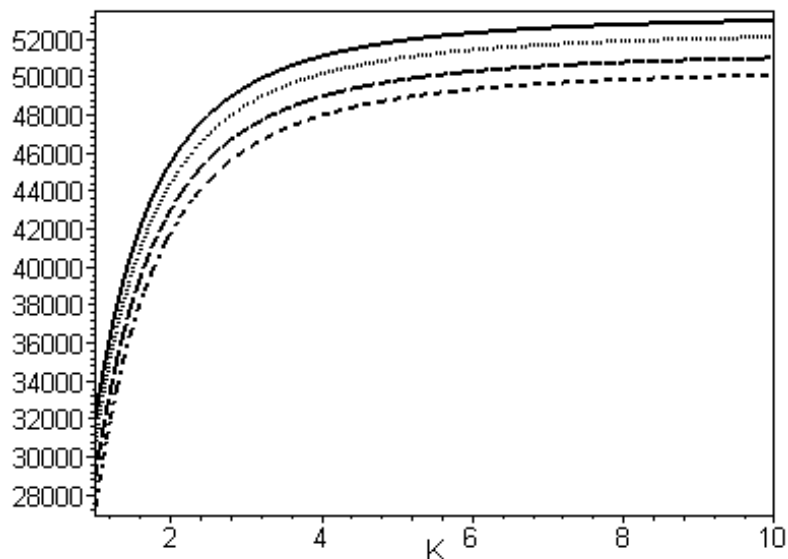


Fig.2- Taux de croissance de l'onde γ (s^{-1}) en fonction du vecteur d'onde k (cm^{-1}) pour différentes valeurs de la température ionique. Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles de la figure précédente. T_i augmente de haut vers le bas.

Cette légère différence, du reste largement prévue par de récents travaux théoriques et expérimentaux [1]- [3], est due essentiellement au fait que notre modèle tient compte d'une part de la fluctuation de la charge du grain d'impureté ($\eta = 37.21\text{s}^{-1}$) et d'autre part de la capture électronique et ionique ($\beta_e = 525.90\text{s}^{-1}$ et $\beta_i = 262.95\text{s}^{-1}$). Notons que le taux d'accroissement γ décroît lorsque la valeur du vecteur d'onde k décroît. Ceci est essentiellement dû au fait qu'à mesure que la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ croît, l'effet de l'amortissement collisionnel ion-particule neutre devient plus significatif. Par exemple, pour $P = 10\text{mtorr}$, le libre parcours moyen de la collision ion-particule neutre est égal à $\lambda_{in} = (N\sigma_{in})^{-1} \simeq 0.66\text{cm}$ tandis que pour $k = 20\text{m}^{-1}$ et $k = 10^{-3}\text{m}^{-1}$ correspondent respectivement des longueurs d'onde de l'ordre de 30 cm et 0.6 cm. Pour $k \gg 100\text{m}^{-1}$, $\lambda_{in} > \lambda$ et par conséquent les effets de l'amortissement collisionnel ne seront pas aussi importants que pour les faibles k 's. En outre, les figures (1) et (2) indiquent qu'une augmentation de la température ionique T_i [0.1eV(ligne continue), 0.3eV(pointillés), 0.6eV(tirets), 0.9eV(mixte)], qui s'accompagne d'une réduction du taux de charge η [37.21s^{-1} , 23.52s^{-1} , 18.79s^{-1} , 7.11s^{-1}] et d'un accroissement de β_e [525.90s^{-1} , 870.10s^{-1} , 1216.09s^{-1} , 1483.51s^{-1}] et de β_i [262.95s^{-1} , 435.05s^{-1} , 608.04s^{-1} , 741.75s^{-1}], accentue le décalage (augmentation) de la fréquence de l'onde et la diminution du taux d'instabilité.

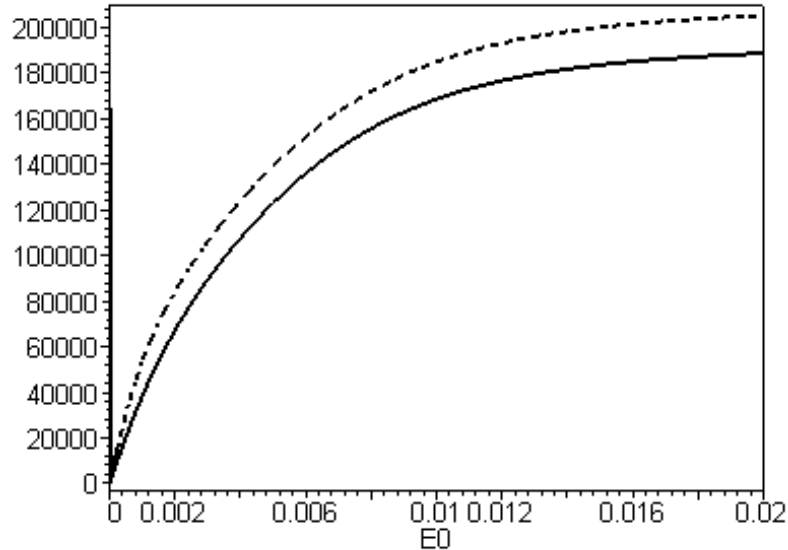


Fig.3- Taux de croissance de l'onde $\gamma(\text{s}^{-1})$ en fonction de $E_0(\text{unités cgs})$, avec $k = 0.63 \text{ cm}^{-1}$, $\varepsilon Z_{d0} = 0.5$, $P = 10 \text{ mtorr}$, $T_e = 2 \text{ eV}$, $a = 10^{-4} \text{ cm}$, $n_{d0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$, $m_i = 40 m_p$.
 $T_i = 0.1\text{eV}$ (ligne continue), 0.8eV (ligne mixte).

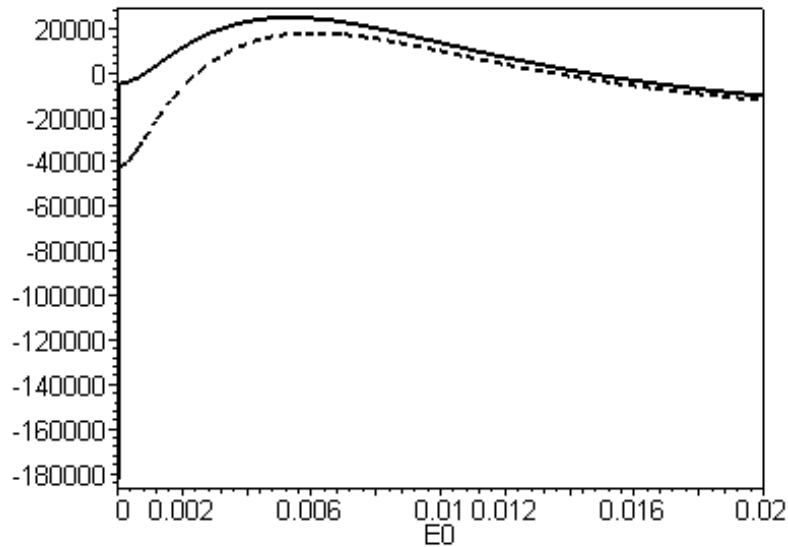


Fig.4- Fréquence de l'onde dans le repère de l'ion $[-\Omega_r (s^{-1})]$ en fonction de E_0 (unités cgs). Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles utilisées dans la figure précédente.

Ce résultat revêt une grande importance pour l'excitation du mode DIA. Les grandes vitesses de phase réduisent l'amortissement Landau ionique et, par conséquent, induisent une diminution de la vitesse de dérive électronique critique nécessaire à l'excitation du mode DIA. Ce résultat a déjà été prévu et confirmé par Rosenberg [38], [39] qui a montré que pour $\varepsilon Z_{d0} \sim 0.8$, la vitesse de dérive critique des électrons est dix fois moins importante que celle requise dans un plasma habituel à deux composantes (électrons + ions) avec $T_e = T_i$. Nous allons maintenant investir l'un des aspects les plus importants de notre simulation. Nous savons que pour exciter le mode DIA, le plasma doit être au préalable soumis à l'action d'un champ électrique externe E_0 (voire Eq.(2.8)). Ce dernier imprime aux électrons un mouvement de dérive de vitesse v_{e0} relativement aux ions et donc draine une densité de courant électrique à l'intérieur du plasma. Cette densité de courant est responsable de l'excitation du mode DIA, d'où l'appellation : onde acoustique ionique poussiéreuse induite par un courant. Cependant, comme tout phénomène physique induit, l'apparition du mode DIA requiert une vitesse de dérive relative minimale. Cette vitesse critique, au delà de laquelle le mode DIA apparaît, dépend fortement du champ électrique stationnaire appliqué. Il est donc naturel et plus commode d'analyser le phénomène d'apparition du mode DIA en termes de champ électrique. La valeur de ce dernier peut être fixée et ajustée selon les conditions que peut requérir une expérience de laboratoire. La

figure (3) montre l'effet déstabilisant dû à l'augmentation du champ électrique E_0 à εZ_{d0} et k fixés ($\varepsilon Z_{d0} = 0.5$, $k = 0.63\text{cm}^{-1}$). Le taux d'instabilité γ de l'onde croît à mesure que l'intensité du champ électrique appliqué E_0 augmente. Le résultat le plus significatif a trait à l'effet de la relaxation de la charge du grain d'impureté sur le champ électrique critique E_{0c} requis pour exciter le mode DIA. Les valeurs de E_{0c} peuvent être déduites à partir de la figure (3) à $\gamma = 0$, point de transition entre l'amortissement ($\gamma < 0$) et l'accroissement ($\gamma > 0$), appelé aussi point de stabilité marginale. Une augmentation du taux de charge η , et donc une diminution des fréquences de capture β_e et β_i , réduit de manière significative la valeur du champ électrique critique E_{0c} : $T_i = 0.1\text{eV}$ (ligne continue), $\eta = 37.21\text{s}^{-1}$, $\beta_e = 525.90\text{s}^{-1}$, $\beta_i = 262.95\text{s}^{-1} \rightarrow E_{0c} \sim 26.4\text{V.m}^{-1}$ et $T_i = 0.8\text{eV}$ (ligne mixte), $\eta = 17.52\text{s}^{-1}$, $\beta_e = 1400.06\text{s}^{-1}$, $\beta_i = 700.03\text{s}^{-1} \rightarrow E_{0c} \sim 75\text{V.m}^{-1}$. Dans la limite des grandes valeurs de η , nous trouvons que le mode est instable sur toute la gamme des vecteurs d'onde k et de très faibles champs électriques E_0 suffisent pour produire l'instabilité. La figure 4, encore une fois, met en évidence le décalage de la fréquence de l'onde induit par le processus de la charge du grain de poussière. Finalement, notons que l'effet du rayon a du grain de poussière sur l'excitation du mode DIA peut être déterminant. L'effet stabilisateur de l'augmentation de a (au delà d'une certaine valeur) à T_i , η , β_e , β_i , εZ_{d0} et E_0 fixés apparaît clairement sur la figure 5. Pour $T_i = 0.1\text{eV}$ (ligne continue), le mode DIA est excité à $a \sim 6.8 \cdot 10^{-5}\text{cm}$ et son amortissement commence à $a \sim 4.4 \cdot 10^{-4}\text{cm}$. Pour $T_i = 0.8\text{eV}$ (ligne mixte), le mode DIA est excité à $a \sim 7.2 \cdot 10^{-5}\text{cm}$ et son amortissement est amorcé à $a \sim 2.6 \cdot 10^{-4}\text{cm}$. Les variations de la fréquence de l'onde, dans le repère de l'ion, sont données par la figure 6. Le taux d'accroissement de l'onde (fig.5) et sa fréquence (fig.6) diminuent lorsque a augmente. Il devient alors de plus en plus difficile de réaliser et d'exciter le mode DIA à mesure que la taille du grain devient importante.

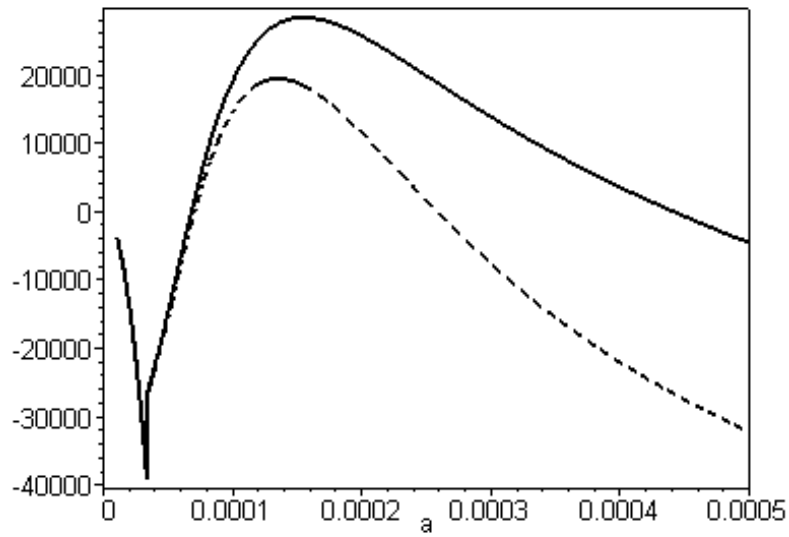


Fig.5- Taux de croissance de l'onde $\gamma(\text{s}^{-1})$ en fonction du rayon $a(\text{cm})$ du grain de poussière avec $\varepsilon Z_{d0} = 0.5$, $E_0 = 250 \text{ V/m}$, $P = 10 \text{ mtorr}$, $T_e = 2 \text{ eV}$, $n_{d0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$, $m_i = 40m_p$, $T_i = 0.1 \text{ eV}$ (solide), 0.8 eV .

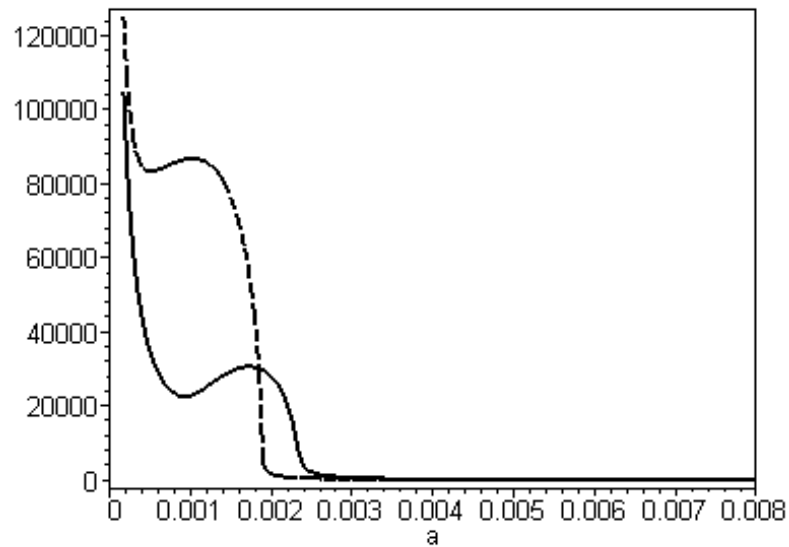


Fig.6- Fréquence de l'onde dans le repère de l'ion $[-\Omega_r (\text{s}^{-1})]$ en fonction du rayon $a(\text{cm})$ du grain de poussière. Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles utilisées dans la figure précédente.

2.8 Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma poussiéreux à charge variable

Nous allons maintenant nous intéresser au mode acoustique poussiéreux (DAW). Il est utile de noter que ce mode est fondamentalement différent du mode acoustique ionique poussiéreux (DIAW) que nous venons d'étudier dans la mesure où il fait intervenir la dynamique des grains de poussière et néglige l'inertie des électrons et des ions dont la distribution des vitesses peut alors être approximée par une fonction de distribution maxwellienne. Au cours de cette section, nous ne ferons qu'établir la relation de dispersion de la DAW dans un plasma poussiéreux à charge variable. Celle-ci a déjà été établie par D'Angelo et Merlino [48] dans le cas de la charge fixe. Pour des conditions similaires à celles de récentes expériences de laboratoire (voir table 1 de la référence [48]) et des pressions de gaz neutre de l'ordre de 100mtorr, ils ont montré que des champs électriques (d'équilibre ou d'ordre 0) $E_0 \geq 10\text{Vm}^{-1}$ sont suffisants pour exciter des perturbations de longueurs d'onde de l'ordre du centimètre. A une dimension, le mouvement des grains de poussière, des ions et des électrons de densités respectives n_d , n_i et n_e , de vitesses respectives v_d , v_i et v_e , peut être décrit par les équations de continuité et de mouvement suivantes [48]

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial (n_d v_d)}{\partial x} = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = 0 \quad (2.53)$$

$$n_d m_d \frac{\partial v_d}{\partial t} + n_d m_d v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} + e Z_d n_d E = -\nu_d n_d m_d v_d \quad (2.54)$$

$$T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} - e n_i E = -\nu_i n_i m_i v_i \quad (2.55)$$

$$T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + e n_e E = -\nu_e n_e m_e v_e \quad (2.56)$$

Les grains de poussière de température nulle (limite froide), les ions de température T_i et les électrons de température T_e font des collisions avec les particules neutres à des fréquences respectives ν_d , ν_i et ν_e . Ces équations sont complétées par la relation de quasi-

neutralité de la charge

$$n_i = n_e + Z_d n_d \quad (2.57)$$

et l'équation d'évolution de la charge du grain $q_d = -eZ_d$ [7]

$$\frac{\partial \tilde{Z}_d}{\partial t} + \eta \tilde{Z}_d = \frac{|I_{e0}|}{e} \left(\frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}} - \frac{\tilde{n}_i}{n_{i0}} \right) \quad (2.58)$$

L'indice 0 désigne des quantités d'équilibre et le symbole \sim des quantités perturbées. Les équations (2.51)-(2.57) sont linéarisées autour de l'état d'équilibre du plasma et les quantités perturbées sont supposées varier en $e^{i(kx - \omega t)}$. A l'ordre un, nous obtenons alors

$$\tilde{v}_{d,i,e} = \frac{\Omega_{d,i,e}}{k} \tilde{\xi}_{d,i,e} \quad (2.59)$$

où

$$\tilde{\xi}_{d,i,e} = \frac{\tilde{n}_{d,i,e}}{n_{d0,i0,e0}} \quad (2.60)$$

et

$$\Omega_{d,i,e} = \omega - k v_{d0,i0,e0} \quad (2.61)$$

La condition de quasi-neutralité (2.57) peut être réécrite sous la forme

$$\tilde{\xi}_i = \varepsilon Z_{d0} \tilde{\xi}_d + (1 - \varepsilon Z_{d0}) \tilde{\xi}_e + \varepsilon \tilde{Z}_d \quad (2.62)$$

où $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0}$. De l'équation d'évolution de la charge du grain (2.58), il est aisé de déduire

$$\tilde{Z}_d = \frac{|I_{e0}|}{e} \frac{1}{(\eta - i\omega)} \left(\tilde{\xi}_e - \tilde{\xi}_i \right) \quad (2.63)$$

A partir des équations (2.59) et des équations de mouvement (2.54)-(2.56) (sous leur forme linéarisée), et moyennant la relation (2.63), nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_d &= -i \frac{eZ_{d0}}{m_d} \frac{k}{\Omega_d (\Omega_d + i\nu_d)} \tilde{E} - i \frac{E_0}{m_d} \frac{k}{\Omega_d (\Omega_d + i\nu_d)} \tilde{Z}_d \\ &= -i \frac{eZ_{d0}}{m_d} \frac{k}{\Omega_d (\Omega_d + i\nu_d)} \tilde{E} - i \frac{E_0}{m_d} \frac{k}{\Omega_d (\Omega_d + i\nu_d)} \left[\frac{|I_{e0}|}{e} \frac{1}{(\eta - i\omega)} \left(\tilde{\xi}_e - \tilde{\xi}_i \right) \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{e}{m_i} \frac{k}{ik^2 v_{ti}^2 + \nu_i (\Omega_d - k\mu_i)} \tilde{E} \quad (2.65)$$

$$\tilde{\xi}_e = -\frac{e}{m_e} \frac{k}{ik^2 v_{te}^2 + \nu_e (\Omega_d - k\mu_e)} \tilde{E} \quad (2.66)$$

où

$$\begin{aligned} \mu_i &= v_{i0} - v_{d0} \\ \mu_e &= v_{e0} - v_{d0} \end{aligned} \quad (2.67)$$

et

$$\begin{aligned} v_{ti}^2 &= T_i/m_i \\ v_{te}^2 &= T_e/m_e \end{aligned} \quad (2.68)$$

Notons que les deux relations suivantes

$$\Omega_{i,e} = \Omega_d - k\mu_{i,e} \quad (2.69)$$

ont été utilisées lors de l'établissement des équations (2.64)-(2.66). En portant les expressions (2.64)-(2.66) de $\tilde{\xi}_d$, $\tilde{\xi}_i$ et $\tilde{\xi}_e$ dans la relation de quasi-neutralité (2.62) et en simplifiant \tilde{E} des deux membres, nous obtenons aisément la relation de dispersion de l'onde acoustique poussiéreuse dans un plasma à charge variable [49].

Chapitre 3

Oscillations électrostatiques non linéaires dans les plasmas poussiéreux

3.1 Présentation physique du problème

Les grains de poussière étant abondants et omniprésents dans l'espace, on se propose dans le présent chapitre de reconsidérer les modes de Bernstein, Greene et Kruskal (BGK), objets de récentes observations spatiales [50], [51], [52], [53], [54], et de les transposer dans les plasmas poussiéreux [55]. Ces derniers peuvent exhiber de nombreux phénomènes de basse fréquence jusque là jamais mis en évidence dans les plasmas traditionnels à deux composantes [56], [57], [58]. La présence dans un plasma de grains de poussière massifs et fortement chargés peut affecter de manière drastique sa dispersion, ses modes normaux [59], [60], [61] ainsi que ses propriétés non linéaires [62]. La fluctuation de la charge électrique, l'appauvrissement électronique et la dissipation anormale de l'énergie constituent de nouveaux concepts qui peuvent révolutionner et quelque peu bousculer ceux déjà bien établis dans la littérature.

3.2 Equation de Kortewg-de Vries

La non linéarité et la dispersion sont les propriétés caractéristiques les plus importantes d'un plasma. C'est pourquoi, nous allons entamer ce chapitre par introduire et discuter une équation différentielle partielle (EDP) non linéaire classique, connue sous le nom d'équation de Korteweg-de Vries (K-dV). Celle ci apparaît dans une variété de situations physiques et est donnée par [63]

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + aU \frac{\partial U}{\partial \xi} + b \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.1)$$

où ξ et τ sont des variables indépendantes et a et b des constantes réelles non nulles. L'équation (3.1) est à la fois non linéaire et dispersive : le terme convectif $U\partial U/\partial \xi$ traduit la non linéarité tandis que $\partial^3 U/\partial \xi^3$ reflète la dispersion. Historiquement, l'équation (3.1) fut établie par Korteweg et de Vries en relation avec un problème d'ondes de surface dans un canal d'eau à profondeur finie. Plus tard, Gardner et Morikawa établirent une équation analogue à partir d'un modèle hydro- magnétique de plasma froid pour décrire le comportement de perturbations se propageant perpendiculairement à un champ magnétique avec une vitesse proche de celle d'Alfvén. D'autres auteurs montrèrent que (3.1) pouvait aussi bien décrire la propagation unidimensionnelle d'ondes acoustiques dans les cristaux que fournir une description faiblement non linéaire de perturbations sonores se propageant à une vitesse voisine de celle du son [64]. Et c'est à partir de là et dans un effort de généralisation que Su et Gardner [65] montrèrent que (3.1) pouvait s'appliquer à une large classe de systèmes dispersifs et faiblement non linéaires à l'instar de l'équation de Burgers¹ dans les milieux dissipatifs et faiblement non linéaires. L'équation (3.1) peut être réécrite sous la forme généralement rencontrée dans la littérature

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.2)$$

¹L'équation de Burgers est donnée par

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + b \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0, \text{ avec } b < 0. \text{ Le dernier terme correspond à la dissipation.}$$

moyennant les changements de variables $\xi \rightarrow \xi b^{1/3}$ et $U \rightarrow U/ab^{-1/3}$. Notons que pour des ondes acoustiques ioniques se propageant avec une vitesse proche de celle du son, le terme $U\partial U/\partial \xi$ de l'équation (3.2) provient du terme non linéaire convectif $\mathbf{v}_i \cdot \nabla v_i$ de l'équation de mouvement des ions. De plus, le terme linéaire de troisième ordre $\partial^3 U/\partial \xi^3$ est dû au fait que dans un repère se déplaçant avec la vitesse du son, les corrections de la relation de dispersion sont proportionnelles à k^3 , où k représente le vecteur d'onde de la perturbation acoustique. Remarquons que si le terme dispersif $\partial^3 U/\partial \xi^3$ est omis dans l'équation (3.2), alors $\frac{\partial U}{\partial \tau} + U\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0$ admet comme solution

$$U(\xi, \tau) = U(\xi - U(\xi, \tau), 0) \quad (3.3)$$

Celle-ci indique que toute perturbation initiale se déformera de manière continue dans les régions où $\frac{\partial U(\xi, 0)}{\partial \xi} < 0$ et éventuellement deviendra physiquement inacceptable. En réalité, le terme dispersif de l'équation (3.2) limite et prévient cette déformation illimitée. Avant d'aller plus loin, il convient de discuter les solutions solitaires de l'équation (3.2). A ce propos, moyennant le changement de variable $\chi = \xi - c\tau$ où c est une constante, l'équation (3.2) peut être deux fois intégrée pour obtenir

$$\left[\frac{dU(\chi)}{d\chi} \right]^2 = \frac{1}{3} U^2(\chi) [3c - U(\chi)] \quad (3.4)$$

où les conditions aux limites $U(\chi) \rightarrow 0$, $dU(\chi)/d\chi \rightarrow 0$ et $d^2U(\chi)/d\chi^2 \rightarrow 0$ lorsque $|\chi| \rightarrow 0$ ont été utilisées. L'équation (3.4) peut alors être intégrée pour donner

$$U(\xi - c\tau) = 3c \operatorname{Sech}^2 \left[\sqrt{c/2} (\xi - c\tau) \right] \quad (3.5)$$

Dans l'équation (3.5), la hauteur, la largeur et la vitesse du pulse sont proportionnelles à c , $c^{-1/2}$ et c respectivement. De nombreuses études numériques [66], [67] de l'équation (3.2) indiquent que les solutions en ondes solitaires (solitons) donnés par (3.5) jouent un rôle intrinsèque dans l'évolution temporelle du système pour une variété de conditions initiales. Pour des données initiales localisées, un nombre fini de solitons émerge avec différentes hauteurs $3c_1, 3c_2 \dots$ etc, chaque soliton se propageant vers la droite. Ces solitons interagissent en préservant leurs identités. Lorsque $\tau \rightarrow \infty$, les solitons se réarrangent

dans l'ordre des hauteurs croissantes (le plus grand soliton se trouvant alors à l'extrême droite). L'investigation expérimentale des propriétés de la solution en onde solitaire de l'équation (3.2) a été réalisée par Ikezi et al. [68], [69]. Ils ont alors rapporté l'existence d'un désaccord entre l'observation expérimentale et la description théorique basée sur une image simplifiée du soliton de Korteweg-de Vries. Plus tard, certains auteurs ont tenté de réduire cet écart en prospectant l'effet d'une température ionique finie [70] et l'effet des grandes amplitudes [71]. Un soliton résulte de l'équilibre de deux effets : la non linéarité et la dispersion [72]. La non linéarité en couplant différents modes (ω_1, k_1) , (ω_2, k_2) donne naissance à d'autres modes d'ordre supérieur $(\omega_1 + \omega_2, k_1 + k_2)$. Ce processus donne lieu au phénomène bien connu de la déformation de l'onde (wave steepening) : le bord d'attaque de l'onde se déforme à mesure que la perturbation se déplace. Au cas où elle ne serait pas stoppée par un quelconque autre phénomène physique, cette déformation donne lieu au déferlement de l'onde : en une position x donnée, l'amplitude de l'onde prend différentes valeurs, une situation qui est non physique. La dispersion est justement l'un des phénomènes qui préviennent le déferlement et l'empêchent de se produire. Considérons deux modes normaux du plasma, (ω_1, k_1) et (ω_2, k_2) . Ces deux modes, par définition, satisfont la relation de dispersion $D(\omega_{1,2}, k_{1,2}) = 0$. A cause de la dispersion, l'onde de battement (the beat wave) $(\omega_1 + k_1, \omega_2 + k_2)$ peut ne pas satisfaire la relation de dispersion $D(\omega_{1,2}, k_{1,2}) \neq 0$ et donc ne constituera pas un mode normal du système. Le couplage non linéaire à des ordres supérieurs est alors stoppé. La non linéarité et la dispersion sont donc les ingrédients nécessaires pour l'obtention de solutions en soliton dans le cas d'une onde non linéaire. Cependant, quoique la plupart des ondes dans les plasmas présente de la dispersion et que le plasma lui même se comporte comme un milieu non linéaire, seulement un nombre restreint d'équations non linéaires est connu pour admettre des solutions en soliton. Les ondes acoustiques ioniques exhibent de telles solutions localisées et ont été largement investies tant sur le plan théorique qu'expérimentale. D'ailleurs la redécouverte de l'équation de Korteweg-de Vries pour ce type d'onde dans les plasmas a été sans nul doute le premier pas pour démêler quelque peu le domaine très ardu des phénomènes non linéaires [73]. C'est pourquoi nous allons commencer par rappeler et introduire de manière succincte l'onde acoustique ionique d'autant plus que les premiers travaux théoriques sur les plasmas poussiéreux ont porté essentiellement sur les

modifications apportées par la présence des grains de poussière à cette onde. D'ailleurs, ceci a amené la communauté scientifique à identifier un nouveau mode simplement baptisé depuis onde acoustique poussiéreuse (DAW) et qu'il convient de distinguer de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW) objet du chapitre précédent.

3.3 Equation de Kortewg-de Vries pour l'onde acoustique ionique

Considérons un plasma non collisionnel, non magnétisé, composé d'ions froids de densité n_i et d'électrons chauds maxwelliens de densité n_e . A une dimension, un tel système peut être décrit par les équations de base adimensionnelles suivantes [73]

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \exp(\phi) - n_i \quad (3.8)$$

v_i et ϕ représentent respectivement la vitesse des ions et le potentiel électrostatique. En introduisant les nouvelles variables

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - t) \quad (3.9)$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2} t \quad (3.10)$$

les équations précédentes (3.6)-(3.8) peuvent être transformées en

$$\varepsilon \frac{\partial n_i}{\partial \tau} - \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial \tau} - \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \exp(\phi) - n_i \quad (3.13)$$

En substituant les développements en séries de puissance suivants

$$n_i = 1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)} + \dots \quad (3.14)$$

$$v_i = \varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)} + \dots \quad (3.15)$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \quad (3.16)$$

dans les équations (3.11)-(3.16), nous obtenons la relation entre termes de premier ordre suivante

$$\phi^{(1)} = n_i^{(1)} = v_i^{(1)} = n_e^{(1)}$$

dont la dépendance explicite (ξ, τ) est régie par l'équation de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} + \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (3.17)$$

La solution de (3.17) est donnée par

$$\phi^{(1)} = A \operatorname{sech}^2(D\eta) \quad (3.18)$$

avec $\eta = \xi - v_0 t$, $v_0 = A/3$ et $D = (A/6)^{1/2}$.

3.4 Onde acoustique poussiéreuse

Dans cette section, nous allons établir l'équation de Korteweg-de Vries pour l'onde acoustique ionique dans le cas d'un plasma poussiéreux contenant des grains de poussière mobiles. Nous reprendrons les équations qui ont permis à Rao et *al.* [56] d'identifier, pour la première fois, l'onde acoustique poussiéreuse. Considérons un plasma poussiéreux à trois composantes formé de grains de poussière, d'électrons et d'ions de densités respectives n_d , n_e et n_i . Les grains de charge $q_d = -Z_d e$ sont extrêmement massifs et inertiels. Les électrons et les ions de température T_e et T_i sont supposés obéir à la loi de Maxwell-Boltzmann. A l'équilibre, la condition de quasi neutralité requiert $n_{i0} = Z_{d0} n_{d0} + n_{e0}$. Les oscillations acoustiques poussiéreuses (dust-acoustic wave), de faible vitesse de phase v_p ($v_{td} = \sqrt{\frac{T_d}{m_d}} \ll v_p \ll v_{ti} = \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}$ où v_{td} et v_{ti} représentent les vitesses thermiques des ions

et des grains de poussière), sont alors gouvernées par

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_d v_d) = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_d - \frac{1}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \exp(-\phi) + \frac{n_{e0}/n_{i0}}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \exp\left(\frac{T_i}{T_e} \phi\right) \quad (3.21)$$

La densité des grains n_d , leur vitesse fluide v_d , le potentiel électrostatique ϕ , le temps t et la variable d'espace x sont normalisés respectivement par n_{d0} la densité des grains à l'équilibre, $C_D = (Z_{d0} T_i / m_d)^{1/2}$ la vitesse acoustique poussiéreuse, T_i / e , $\omega_{pd}^{-1} = (m_d / 4\pi n_{d0} Z_{d0}^2 e^2)^{1/2}$ la période plasma du grain de poussière et $\lambda_{Dd} = (T_i / 4\pi Z_{d0} n_{d0} e^2)^{1/2}$ la longueur de Debye. Dans le but d'étudier les propriétés d'ondes acoustiques poussiéreuses de large amplitude dans un repère stationnaire, les équations (3.19)-(3.21) sont habituellement réécrites en introduisant la variable

$$\xi = x - Mt \quad (3.22)$$

où M représente le nombre de Mach. En imposant des conditions aux limites propres aux solutions localisées ($n_d \rightarrow 1$, $v_d \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$ et $d\phi/d\xi \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), il devient alors possible de réduire les équations de base (3.19)-(3.21) en une "intégrale d'énergie" de la forme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + V(\phi) = 0 \quad (3.23)$$

où

$$V(\phi) = \frac{1}{1 - n_{e0}/n_{i0}} + \frac{n_{e0}/n_{i0}}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \frac{T_e}{T_i} + M^2 - M^2 (1 + 2\phi/M^2)^{1/2} - \frac{1}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \exp(-\phi) - \frac{n_{e0}/n_{i0}}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \frac{T_e}{T_i} \exp\left(\frac{T_i}{T_e} \phi\right) \quad (3.24)$$

est dit pseudo-potential ou potentiel de Sagdeev introduit pour la première fois par l'auteur de même nom pour l'étude des phénomènes non linéaires. Par analogie, l'équation (3.23) peut être vue comme l'équation de mouvement d'une pseudo-particule de masse unité, de position ϕ et de vitesse $d\phi/d\xi$, oscillant dans un potentiel $V(\phi)$. Les valeurs de $V(\phi)$ et $dV(\phi)/d\phi$ étant nuls en $\phi = 0$, les conditions d'existence de solutions en

onde solitaire de (3.23) peuvent être résumées comme suit : (i) $\left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)_{\phi=0} < 0$ (le point à l'origine est instable), (ii) $\left(\frac{d^3V}{d\phi^3}\right)_{\phi=0} > (<) 0$ dans le cas d'ondes solitaires à potentiel ϕ positif (dans le cas d'ondes solitaires à potentiel ϕ négatif). La nature de ces ondes solitaires (compressives ou dépressives) peut être trouvée en développant le potentiel de Sagdeev $V(\phi)$ à l'ordre 3 en séries de Taylor

$$V(\phi) \simeq V(0) + \phi \left(\frac{dV(\phi)}{d\phi}\right)_{\phi=0} + \phi^2 \left(\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\right)_{\phi=0} + \phi^3 \left(\frac{d^3V(\phi)}{d\phi^3}\right)_{\phi=0} = \phi^2 \left(\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\right)_{\phi=0} + \phi^3 \left(\frac{d^3V(\phi)}{d\phi^3}\right)_{\phi=0} \quad (3.25)$$

Le nombre de Mach critique M_c est alors celui pour lequel le terme quadratique est nul. A ce moment là, si le terme cubique est négatif, le puits de potentiel $V(\phi)$ se trouvera du côté des ϕ négatifs et, dans le cas inverse, de celui des ϕ positifs.

$$M_c = \sqrt{\frac{1 - n_{e0}/n_{i0}}{1 + T_i n_{e0}/T_e n_{i0}}} \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{d^3V(\phi)}{d\phi^3}\right)_{\phi=0} = -\frac{1}{3(1 - n_{e0}/n_{i0})^2} \left\{ 1 + \left(3 + \frac{T_i n_{e0}}{T_e n_{i0}}\right) \frac{T_i n_{e0}}{T_e n_{i0}} + \frac{1}{2} \frac{n_{e0}}{n_{i0}} \left[1 + \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 \right] \right\} \quad (3.27)$$

qui indique clairement que le terme cubique est toujours négatif quelque soient les valeurs de T_i/T_e et n_{e0}/n_{i0} . C'est ainsi que Mamun et Shukla [74], [75] ont montré qu'un plasma poussiéreux ne peut admettre, contrairement au plasma habituel à deux composantes, l'existence d'une onde solitaire acoustique poussiéreuse avec un potentiel ϕ positif. $\phi_c = -M^2/2$ étant la plus petite valeur de ϕ pour laquelle la densité des grains est réelle, la condition $V(\phi_c) \geq 0$ ne sera alors satisfaite que pour

$$\frac{1}{1 - n_{e0}/n_{i0}} + \frac{n_{e0}/n_{i0}}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \frac{T_e}{T_i} + M^2 - \frac{e^{-M^2/2}}{1 - n_{e0}/n_{i0}} - \frac{n_{e0}/n_{i0}}{1 - n_{e0}/n_{i0}} \frac{T_e}{T_i} e^{-\frac{T_i}{T_e} M^2/2} \geq 0 \quad (3.28)$$

3.5 Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma électroniquement appauvri

L'une des propriétés les plus remarquables des plasmas poussiéreux est l'appauvrissement électronique ou déplétion électronique. Ce dernier est dû au phénomène de la collection préférentielle des électrons de la part de la surface du grain de poussière. Pour analyser les propriétés non linéaires et dispersive d'un tel système, Mamun *et al.* [62] ont considéré un plasma composé de grains de poussière négatifs, extrêmement massifs et d'ions de température T_i distribués selon la loi de Maxwell-Boltzmann. A l'équilibre, $n_{i0} \simeq Z_{d0}n_{d0}$, où n_{i0} et n_{d0} désignent respectivement les densités non perturbées des ions et des grains. Les oscillations acoustiques poussiéreuses (dust-acoustic wave), de faible vitesse de phase v_p ($v_{td} = \sqrt{\frac{T_d}{m_d}} \ll v_p \ll v_{ti} = \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}$ où v_{td} et v_{ti} représentent les vitesses thermiques des ions et des grains de poussière), sont alors gouvernées par

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_d v_d) = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_d - \exp(-\phi) \quad (3.31)$$

La densité des grains n_d , leur vitesse fluide v_d , le potentiel électrostatique ϕ , le temps t et la variable d'espace x sont normalisés par n_{d0} , $(T_i/m_d)^{1/2}$, T_i/e , $\omega_{pd}^{-1} = (m_d/4\pi n_{d0} Z_{d0}^2 e^2)^{1/2}$ et $\lambda_{Dd} = (T_i/4\pi Z_{d0} n_{d0} e^2)^{1/2}$ respectivement. Dans la limite linéaire, les équations (3.29)-(3.31) donnent la relation de dispersion de l'onde acoustique poussiéreuse et dont la vitesse de phase

$$\omega/k = (T_i/m_d)^{1/2} / (1 + k^2 \lambda_{Dd}^2)^{1/2} \quad (3.32)$$

se réduit à

$$\omega/k \simeq \sqrt{Z_{d0}} (T_i/m_d)^{1/2} \quad (3.33)$$

dans le cas des perturbations de grandes longueurs d'onde. La relation (3.33) indique que l'onde acoustique poussiéreuse, dont l'existence a été prédite par Rao, Shukla et Yu au début des années quatre vingt dix, est entretenue grâce à la pression des ions et

l'inertie des grains de poussière. Dans le but d'étudier les propriétés d'ondes acoustiques poussiéreuses de large amplitude dans un repère stationnaire, les équations (3.29)-(3.31) sont habituellement réécrites en introduisant la variable

$$\xi = x - Mt \tag{3.34}$$

où M représente le nombre de Mach. En imposant des conditions aux limites propres aux solutions localisées ($\phi \rightarrow 0, v_d \rightarrow 0, n_d \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), nous obtenons à partir de (3.29) et (3.30)

$$n_d = \frac{M}{\sqrt{M^2 + 2\phi}} \tag{3.35}$$

En portant la relation (3.35) dans l'équation de Poisson (3.31), en multipliant chaque membre de l'équation résultante par $d\phi/d\xi$, en intégrant une fois et en imposant des conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($\phi \rightarrow 0, d\phi/d\xi \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + V(\phi) = 0 \tag{3.36}$$

où

$$V(\phi) = 1 + M^2 - M^2 (1 + 2\phi/M^2)^{1/2} - \exp(-\phi) \tag{3.37}$$

est dit potentiel de Sagdeev ou pseudo-potentiel car (3.36) peut être interprétée comme l'équation de mouvement d'une pseudo-particule de masse unité, de position ϕ et de vitesse $d\phi/d\xi$, oscillant dans un potentiel $V(\phi)$. $V(\phi)$ et $dV(\phi)/d\phi$ étant nuls en $\phi = 0$, les conditions d'existence d'une solution en onde solitaire de (3.36) peuvent alors être résumées comme suit : (i) $\left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_{\phi=0} < 0$ (le point à l'origine est instable), (ii) ϕ admet un extremum (un minimum ou un maximum) non nul noté ϕ_m tel que $V(\phi_m) \geq 0$, (iii) $V(0 \leq \phi \leq \phi_m) < 0$ lorsque ϕ varie de 0 à ϕ_m . L'analyse numérique de (3.37) pour différentes valeurs de M montre que le potentiel de Sagdeev $V(\phi)$ ne pourra jamais s'annuler pour toute valeur positive de ϕ et $M > 1$ écartant ainsi d'emblée la possibilité d'existence de solitons acoustiques poussiéreux compressifs ($\phi > 0$). Cependant, cette même analyse indique que des solitons avec $\phi < 0$ existent. $\phi_c = -M^2/2$ étant la plus petite valeur de ϕ pour laquelle la densité (3.35) est réelle, la condition $V(\phi_c) \geq 0$ n'est satisfaite que pour $M < 1.58$. Des solitons acoustiques poussiéreux d'amplitude finie existent donc pour

$1 < M < 1.58$. Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique des solitons acoustiques poussiéreux de faible amplitude ($|\phi| < 2M^2$). Pour cela nous établissons à partir de (3.29)-(3.31) l'équation de Korteweg-de Vries en utilisant la technique de la perturbation réductive de Washimi et Taniuti et les variables qu'ils ont introduites

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - v_0 t) \quad (3.38)$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2} t \quad (3.39)$$

ε est un paramètre de mesure de la petitesse de l'amplitude ou de la dispersion et v_0 représente la vitesse (normalisée par $(T_i/m_d)^{1/2}$) à priori inconnue du soliton que nous déterminerons plus tard. Les variables n_d , v_d et ϕ peuvent alors être développées en séries de puissances de ε autour de leurs valeurs d'équilibre

$$n_d = 1 + \varepsilon n_d^{(1)} + \varepsilon^2 n_d^{(2)} + \dots \quad (3.40)$$

$$v_d = \varepsilon v_d^{(1)} + \varepsilon^2 v_d^{(2)} + \dots \quad (3.41)$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \quad (3.42)$$

À l'ordre le plus petit en ε , les équations (3.29) et (3.30) donnent $n_d^{(1)} = -\phi^{(1)}/v_0^2$, $v_d^{(1)} = -\phi^{(1)}/v_0$ et $v_0 = 1$. Aux ordres les plus élevés en ε , nous obtenons les équations suivantes

$$\frac{\partial n_d^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial n_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(n_d^{(1)} v_d^{(1)} \right) = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial v_d^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial v_d^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_d^{(2)}}{\partial \xi} + v_d^{(1)} \frac{\partial v_d^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (3.44)$$

et

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} - \phi^{(2)} - n_d^{(2)} + \frac{1}{2} (\phi^{(1)})^2 = 0 \quad (3.45)$$

à partir desquelles il est aisé de déduire l'équation de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} - \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.46)$$

dont la solution stationnaire et localisée est donnée par

$$\phi = \phi_m \text{Sech}^2 \left(\frac{\xi - u_0 \tau}{\delta} \right) \quad (3.47)$$

$\phi_m = -3u_0$ et $\delta = \sqrt{2/u_0}$ représentent respectivement l'amplitude et la largeur du soliton. L'équation (3.47) indique clairement qu'il n'existe que des solitons de potentiels négatifs.

3.6 L'équation cinétique de Vlasov

La description fluide des ondes et des oscillations plasma que nous avons utilisée dans notre précédent chapitre ne convient pas toujours et peut même parfois s'avérer incorrecte. Elle suppose en effet que toutes les particules chargées du plasma interagissent de manière identique avec les champs électromagnétiques self-consistants présents dans le plasma. En fait, le modèle fluide n'est valable que si les vitesses de phase des ondes sont bien plus grandes que les vitesses d'agitation thermique des particules. Les ondes électrostatiques étant des ondes lentes, leur vitesse de phase peut être voisine de celle d'un nombre significatif de particules. Pour celles-ci, dites particules « résonantes », l'interaction onde-particule est très différente de celle décrite par les équations hydrodynamiques du modèle fluide. Une description correcte de l'interaction doit donc reposer sur l'analyse de l'évolution des fonctions de distribution des vitesses des particules. On doit donc utiliser les équations cinétiques des plasmas. Ces équations contiennent en général des effets de corrélation (ou de collisions). Mais ceux-ci peuvent être séparés de l'effet principal collectif d'interaction des particules avec les champs électromagnétiques self-consistants. Les interactions discrètes entre particules chargées, i.e., les collisions, ne sont pas incluses dans notre analyse, et les interactions collectives sont supposées dominer durant les échelles de temps des phénomènes qui nous intéressent. Il nous est alors possible de décrire notre plasma dans le cadre des équations de Vlasov-Maxwell. Pour cela, chaque composante j du plasma est caractérisée par une fonction de distribution $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ définie telle que $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ représente le nombre de particules d'espèce j localisées dans l'élément de volume de l'espace des phases $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ centré en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) à l'instant t . Dans la mesure où les corrélations discrètes de la particule sont négligeables, l'évolution de $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ est régie

par l'équation de Vlasov, qui, dans le cas non relativiste, s'écrit sous la forme [63]

$$\frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{m_j} \cdot \nabla_v f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (3.48)$$

m_j représente la masse de la particule d'espèce j . L'équation (3.48) décrit l'évolution incompressible de $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ dans l'espace des phases (\mathbf{x}, \mathbf{v}) en présence d'une force $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ agissant sur les particules. Cette force est la somme des forces externes et de la force due au champ électrique collectif produit par toutes les particules du plasma. En l'absence de champs externes, la force $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ qui s'exerce sur une particule d'espèce j et de charge q_j est donnée par

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -q_j \nabla_x \phi(\mathbf{x}, t) \quad (3.49)$$

où ϕ est le potentiel du champ moyen donné par

$$-\nabla^2 \phi = \sum_j q_j \int f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.50)$$

et la sommation porte sur toutes les espèces de particules présentes dans le plasma. Cette description qui consiste à traiter les particules du plasma comme interagissant seulement à travers leur potentiel de champ moyen n'est correcte qu'en présence d'un nombre suffisant de particules. Dans le cas inverse, le potentiel individuel de chaque particule devra être considéré (cas d'un problème à plusieurs corps). Le caractère non linéaire du troisième terme de l'équation de Vlasov (3.48) est manifeste. Il fait intervenir la force du champ moyen elle-même fonction de f_j . La manière avec laquelle cette non linéarité procède peut être illustrée en notant que la distribution des particules est tributaire du potentiel du champ moyen. Cependant, ce dernier est déterminé par la distribution des particules du plasma. Cet effet "feed-back" va redistribuer les particules du plasma jusqu'à ce qu'une distribution stationnaire (une distribution qui n'évolue pas au cours du temps) soit atteinte. La distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann est un exemple d'état stationnaire par excellence. Les modes BGK, objet du présent chapitre, ainsi que d'autres types d'ondes non linéaires à l'image des ondes périodiques sont des exemples courants d'états stationnaires avec des distributions de densité de charge non uniformes.

3.7 Revue des ondes électroniques BGK

En 1957, Bernstein, Greene et Kruskal [76] ont résolu le problème unidimensionnel des ondes électrostatiques électroniques non linéaires et stationnaires dans un plasma non collisionnel. Des solutions générales ont alors été établies. Celles ci prennent en compte le phénomène de piégeage des particules dans les puits de potentiel de l'onde électrostatique. Dans le repère de l'onde, toutes les quantités sont indépendantes du temps. Pour des raisons de simplicité, la densité des ions a été supposée uniforme étant donné le fait que le rapport de masse entre les électrons et les ions empêche ces derniers de contribuer de manière significative à la dynamique des électrons. Dans le cas des électrons, l'équation de Vlasov prend la forme suivante

$$v \frac{\partial f(v, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f(v, x)}{\partial v} = 0 \quad (3.51)$$

où f désigne la fonction de distribution électronique. L'énergie, la distance x , la vitesse v et le potentiel ϕ sont respectivement normalisés par l'énergie thermique des électrons T_e , la longueur de Debye électronique $\lambda_{De} = \left(\frac{T_e}{4\pi n_{e0} e^2} \right)^{1/2}$ où n_{e0} représente la densité électronique à l'équilibre, la vitesse thermique des électrons $v_{te} = (2T_e/m)^{1/2}$ et T_e/m_e . En terme d'énergie w , la solution générale de l'équation (3.51) peut être écrite sous la forme [51]

$$f(x, v) = f(w) = f(w = v^2 - \phi) \quad (3.52)$$

Lorsque le potentiel ϕ est positif, deux populations électroniques peuvent alors coexister : des électrons avec une énergie totale $w > 0$ appelés électrons passants (nous utiliserons également le mot libres) et des électrons avec $w \leq 0$ appelés électrons piégés. Ces derniers exécutent des allées et venues à l'intérieur du potentiel électrostatique. La vitesse des particules passantes, constante à l'extérieur du potentiel, augmente à mesure que ϕ augmente. La fonction de distribution électronique $f(w)$ peut alors être réécrite sous la forme d'une somme d'une distribution électronique piégée $f_{tr}(w \leq 0)$ et d'une distribution électronique passante $f_p(w > 0)$

$$f(w) = f_{tr}(w \leq 0) + f_p(w > 0) \quad (3.53)$$

Compte tenu de ce qui précède, l'équation de Poisson est alors donnée par

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_{tr} + n_p - 1 \quad (3.54)$$

où

$$n_{tr} = \int_{-\sqrt{\phi}}^{-\sqrt{\phi}} f_{tr}(x, v) dv \quad (3.55)$$

et

$$n_p = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\phi}} f_p(x, v) dv + \int_{\sqrt{\phi}}^{\infty} f_p(x, v) dv \quad (3.56)$$

représentent respectivement la densité des électrons piégés et celle des électrons libres. En utilisant les expressions intégrales précédentes et en changeant la variable d'intégration de la vitesse à l'énergie, l'équation de Poisson (3.54) devient

$$\int_{-\phi}^0 dw \frac{f_{tr}(w)}{2\sqrt{w+\phi}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \int_0^{\infty} dw \frac{f_p(w)}{2\sqrt{w+\phi}} + 1 \quad (3.57)$$

L'équation intégrale précédente peut être résolue pour trouver f_{tr} pour peu que ϕ et f_p soient connus. Dans ce cas, la solution sera donnée par

$$f_{tr}(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{-w} \frac{dn_{tr}(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{-w-\phi}} \quad (3.58)$$

et dans laquelle n_{tr} devra être remplacé par le membre de droite de l'équation (3.57).

3.8 Modèle cinétique et équations de base

Le plasma que l'on se propose d'étudier est non collisionnel, non magnétisé et est constitué de trois espèces de particules : des électrons, des ions positifs et des grains de poussière de densités n_e , n_i et n_d respectivement. Les grains de poussière sont chargés négativement, $q_d = -eZ_d$. Selon la théorie cinétique des plasmas [77], le comportement dans l'espace des phases de chaque espèce s de particules peut être décrit à l'aide de l'équation de Vlasov

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q_s}{m_s} \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial}{\partial v_x} \right) f_s(x, v_x) = 0 \quad (3.59)$$

q_s , m_s et f_s représentent la charge, la masse et la fonction de distribution des vitesses d'une particule d'espèce s qui se meut dans un espace de phase à deux dimensions. Nous utiliserons l'équation (3.59) pour décrire l'évolution bidimensionnelle des oscillations non linéaires de large amplitude de la particule d'espèce s . L'équation de Poisson nous permettra de déterminer de manière self-consistante le potentiel électrostatique $\phi(x)$ en termes des fonctions de distribution d'équilibre des trois espèces de particules présentes dans le plasma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi \sum_{s=i,e,d} q_s \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x f_s(x, v_x) \quad (3.60)$$

où $f_s(x, v_x)$ a été intégrée sur v_y et v_z . Les solutions, dites d'équilibre, de l'équation (3.59) peuvent être choisies de manière arbitraire et ne sont sujettes, dans le repère de l'onde, qu'à la condition suivante

$$f_s(x, v_x) = f_s(v_x^2 + 2q_s\phi(x)/m_s) \quad (3.61)$$

Il nous est alors possible de choisir trois fonctions de distributions $f_s(v_x^2 + 2q_s\phi(x)/m_s)$, une pour chaque espèce, les porter dans l'équation (3.60), et résoudre l'équation qui en résulte

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi \sum_{s=i,e,d} q_s \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x f_s(v_x^2 + 2q_s\phi(x)/m_s) \quad (3.62)$$

La résolution de l'équation integro-différentielle (3.62) requiert à priori un choix adéquat de conditions aux limites. L'équation (3.62) peut alors admettre des solutions périodiques ou localisées. Eu égard au choix multiple qui s'offre à nous, le problème peut être posé de différentes manières. Pour cela, nous considérons le cas où chaque espèce est un faisceau froid de particules, chaque particule d'espèce s ayant la même vitesse en une position x donnée. Nous choisissons alors

$$f_s(x, v_x) = 2n_{s0}v_{s0}\delta\left(v_x^2 + \frac{2q_s\phi(x)}{m_s} - v_{s0}^2\right) \quad (3.63)$$

La relation

$$\delta[f(y)] = \frac{\delta(y - y_0)}{\left| \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0}} \quad (3.64)$$

où y_0 est solution de l'équation $f(y_0) = 0$, nous permet de réécrire l'équation (3.63) sous la forme suivante

$$f_s(x, v_x) = n_{s0} \frac{v_{s0}}{\tilde{v}_s} \delta(v_x - \tilde{v}_s)$$

où

$$\tilde{v}_s = \left(v_{s0}^2 - \frac{2q_s \phi(x)}{m_s} \right)^{1/2} \quad (3.65)$$

et $s = e, i, d$ indique respectivement les électrons, les ions et les grains de poussière. Les vitesses des particules à l'équilibre ($\phi = 0$) v_{e0} , v_{i0} et v_{d0} sont des constantes arbitraires que nous choisirons suffisamment larges pour que les vitesses perturbées ($\phi \neq 0$) \tilde{v}_e , \tilde{v}_i et \tilde{v}_d soient réelles. La condition de la neutralité de la charge à l'équilibre impose $n_{e0} - n_{i0} + Z_{d0}n_{d0} = 0$. L'intégration des fonctions de distributions f_e , f_i et f_d sur tout l'espace des vitesses nous permet de déduire la densité numérique $n_s(x)$ de chaque espèce de particules présente dans le plasma

$$n_s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x, v_x) dv_x = n_{s0} \frac{v_{s0}}{\tilde{v}_s} \quad (3.66)$$

L'équation de Poisson (3.62) devient alors

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 4\pi e n_{i0} \left\{ (1 - \varepsilon Z_d) \left(1 + 2 \frac{e\phi(x)}{m_e v_e^2} \right)^{-1/2} - \left(1 - 2 \frac{e\phi(x)}{m_i v_i^2} \right)^{-1/2} + Z_d \varepsilon \left(1 + 2 Z_d \frac{e\phi(x)}{m_d v_d^2} \right)^{-1/2} \right\} \quad (3.67)$$

Cette dernière peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (3.68)$$

La fonction $V(\phi)$, dite pseudo-potentielle, est alors donnée par

$$V(\phi) = -4\pi n_{i0} \left\{ (1 - \varepsilon Z_d) W_e \left(1 + \frac{2e\phi}{W_e}\right)^{1/2} + W_i \left(1 - \frac{2e\phi}{W_i}\right)^{1/2} + \varepsilon W_d \left(1 + \frac{2Z_d e\phi}{W_d}\right)^{1/2} \right\} + C \quad (3.69)$$

C est une constante d'intégration. Le rapport

$$\varepsilon = \frac{n_{d0}}{n_{i0}} \quad (3.70)$$

donne une mesure de la proportion relative des grains de poussière dans le plasma à l'état d'équilibre ($\phi = 0$) et

$$W_s = m_s v_{s0}^2 \quad (3.71)$$

représente deux fois l'énergie cinétique à l'équilibre d'une particule de l'espèce s . Les équations qui peuvent se mettre sous la forme (3.68) sont dites équations pseudo-potentielles et le préfixe "pseudo" provient du fait que la forme (3.68) ressemble à la loi de Newton $m\ddot{x} = F(x) = -dV(x)/dx$. Il serait peut être utile de noter que toutes les particules jusque là considérées sont toutes libres (par opposition à particule piégée dans le potentiel d'une onde) étant donné que l'énergie cinétique de toute particule d'espèce s est plus grande que son énergie potentielle. La figure (1) montre un profil qualitatif de $U(\phi)$. Nous avons supposé $W_e > W_d$. Par exemple, une solution typique ϕ peut osciller entre les deux points notés ϕ_1 et ϕ_2 .

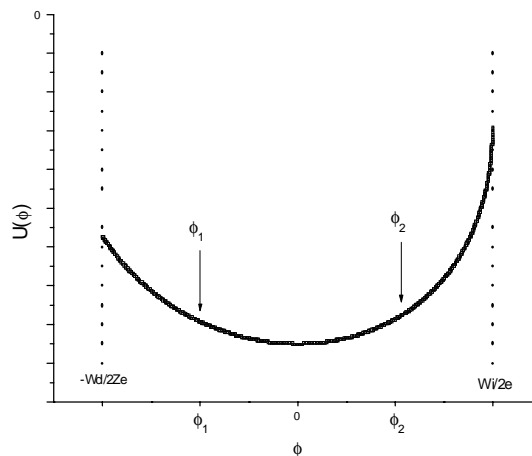


Fig.1- Tracé qualitatif de U en fonction de ϕ . Nous avons supposé $W_e \succ W_d$. Une solution typique ϕ oscille entre ϕ_1 et ϕ_2 .

3.9 Cas des faibles amplitudes

Dans la limite des faibles amplitudes, la nature de la solution de l'équation (3.67) peut être obtenue de manière explicite. L'expansion de (3.67) en ϕ donne

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{4\pi n_{i0}e^2}{W_i} \left\{ 1 + (1 - \varepsilon Z_d) \frac{W_i}{W_e} + \varepsilon Z_d^2 \frac{W_i}{W_d} \right\} \phi = 0 \quad (3.72)$$

C'est l'équation d'un simple mouvement harmonique dont la solution, bien connue, est donnée par

$$\phi(X) = \phi_{\max} \sin\left(\frac{X}{\lambda_{eff}^{dst}}\right) \quad (3.73)$$

λ_{eff}^{dst} est une longueur de Debye effective que nous définissons comme

$$\lambda_{eff}^{dst} = \sqrt{\frac{1}{1 + (1 - \varepsilon Z_d) \frac{W_i}{W_e} + \varepsilon Z_d^2 \frac{W_i}{W_d}}} = \frac{1}{\gamma} \quad (3.74)$$

Cette solution est sujette à la condition de non piégeage suivante

$$W_i > 2e\phi_{\max} \quad (3.75)$$

$$W_e > 2e\phi_{\max} \quad (3.76)$$

$$W_d > 2Z_d e\phi_{\max} \quad (3.77)$$

Le champ électrique correspondant E^{dst} est alors donné par

$$E^{dst} = -\gamma \cos(\gamma X) \quad (3.78)$$

et la normalisation habituelle ($E v_{i0} / \omega_{pi} \phi_{\max} \rightarrow E$; $x \omega_{pi} / v_{i0} \rightarrow X$) est adoptée. La figure 2 montre les variations du champ électrique E^{dst} en fonction de X pour différentes valeurs de Z_d .

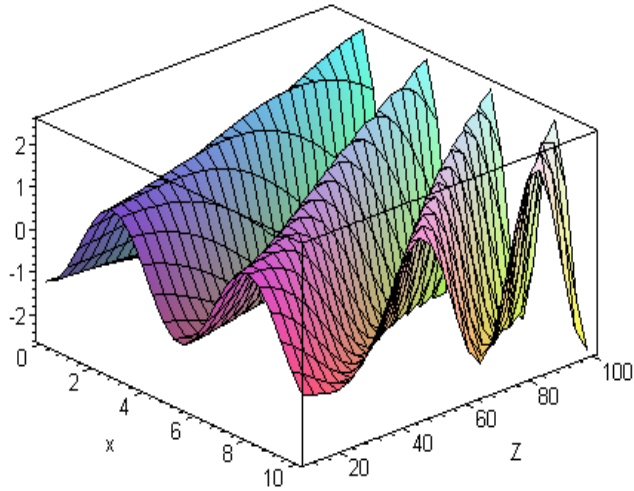


Fig.2- Champ électrique E^{dst} en fonction de X et de $Z_d = Z$ avec $\varepsilon = 10^{-3}$, $W_i/W_e = 0.4$ et $W_i/W_d = 0.5$.

La figure 3 montre les variations de l'amplitude γ du champ électrique en fonction des valeurs de Z_d . Les paramètres suivants $W_i = 100e\phi_{\text{max}}$, $\frac{W_i}{W_e} = 0.4$, $\frac{W_i}{W_d} = 0.5$ et $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0} = 10^{-3}$ ont été choisis.

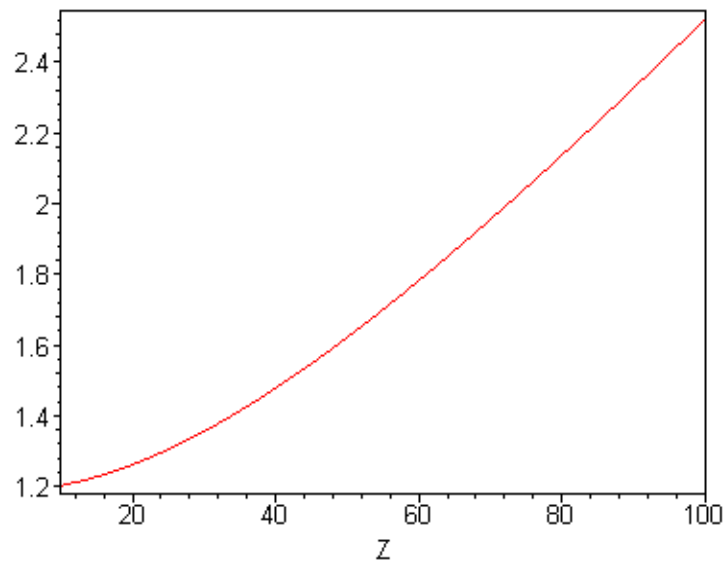


Fig.3- Amplitude γ du champ électrique E^{dst} en fonction de Z avec $\varepsilon = 10^{-3}$, $W_i/W_e = 0.4$ et $W_i/W_d = 0.5$.

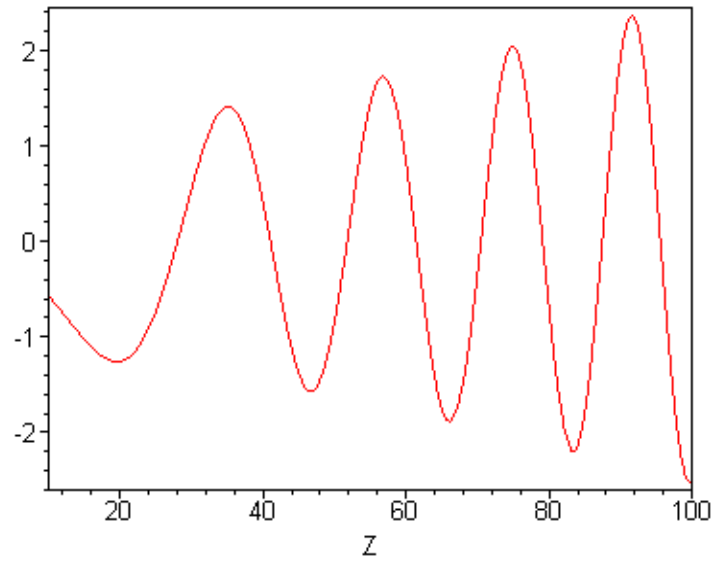


Fig.4- Champ électrique E^{dst} en fonction de $Z_d = Z$ à $X=20$ avec $\varepsilon=10^{-3}$, $W_i/W_e=0.4$ et $W_i/W_d=0.5$.

La figure 4 montre que l'amplitude du champ électrique E^{dst} croît à mesure que la valeur de Z_d augmente et varie plus rapidement qu'en l'absence des grains de poussière. Cependant, ne perdons pas de vue que toutes nos particules sont libres. Nous déduisons alors à partir des équations (3.74), (3.75), (3.76) et (3.77) que l'amplitude γ du champ électrique E^{dst} est limitée par

$$\gamma^2 < 2 \left(\frac{W_i}{e\phi_{\max}} - 1 \right) \quad (3.79)$$

à condition que

$$\varepsilon Z_d < 1 \quad (3.80)$$

En fait, ce n'est là qu'une extension immédiate de la référence [76] à un système poussiéreux.

3.10 Influence de l'appauvrissement électronique (electron depletion)

Nous allons maintenant nous intéresser à un aspect fondamental et nouveau, inhérent aux plasmas poussiéreux. Le processus de charge du grain d'impureté s'accompagne en général d'une diminution significative de la densité électronique (electron depletion) du plasma. D'ailleurs cette diminution mise en évidence lors de récentes expériences de lab-

oratoire sur les ondes acoustiques poussiéreuses (DA) [78] a suggéré que la dynamique de ce type d'onde est régie par l'inertie du grain de poussière et la pression cinétique des ions. Nous réécrivons alors la condition de neutralité de la charge sous la forme

$$n_{i0} \simeq Z_d n_{d0} \gg n_{e0} \quad (3.81)$$

ou

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{Z_d} \quad (3.82)$$

Le pseudo-potentiel (3.69) (avec $C = 0$) et l'équation de Poisson (3.67) s'écrivent simplement

$$V(\Psi) = -4\pi n_{i0} W_i \left\{ (1 - \Psi)^{1/2} + (\beta^2 \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \Psi)^{1/2} \right\} \quad (3.83)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi}{dX^2} = \left\{ \frac{(\beta \varepsilon)^{1/2}}{\sqrt{\beta \varepsilon + \Psi}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \Psi}} \right\} \quad (3.84)$$

où

$$\Psi = \frac{2e}{W_i} \phi \quad (3.85)$$

$$X = \frac{\omega_{pi}}{v_{i0}} x \quad (3.86)$$

et

$$\beta = \frac{W_d}{W_i} = \frac{m_d}{m_i} \left(\frac{v_{d0}}{v_{i0}} \right)^2 \quad (3.87)$$

Il est clair que $V(\Psi)$ n'est réel que pour $-\beta \varepsilon \leq \Psi \leq 1$. L'équation (3.84) indique que la densité des ions devient singulière à $\Psi = 1$ alors que celle des grains de poussière le devient à $\Psi = -\beta \varepsilon$, signalant le début d'une forte déformation de l'onde et de la turbulence. L'équation (3.84) est alors résolue numériquement à l'aide d'un algorithme approprié basé sur la formule explicite de Runge-Kutta $[4 \times 5]$. Nos résultats pour de multiples valeurs du paramètre $\beta \varepsilon = \frac{1}{Z_d} \frac{W_d}{W_i}$ apparaissent sur les figures (5) et (6) avec les conditions initiales $\frac{d\Psi}{dX}(X=0) = 0.95$, $\Psi(X=0) = 0.95$.

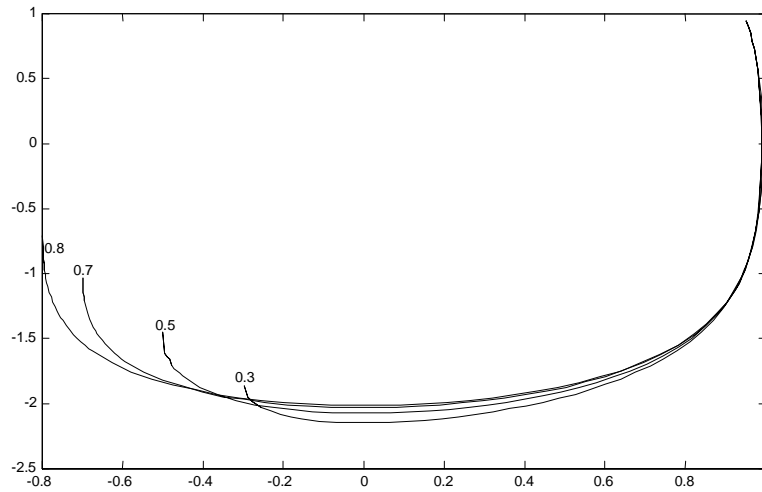


Fig.5- Tracé de $\frac{d\Psi}{dX}$ en fonction de Ψ pour différentes valeurs du paramètre $\beta\varepsilon=0.3, 0.5, 0.7$ et 0.8 .

La déformation apparaît dans la figure (5) où nous avons tracé $(\frac{d\Psi}{dX}, \Psi)$ numériquement calculé à partir (3.84). En augmentant la valeur de Z_d de 25 à 60 et en maintenant constante la valeur de $\beta = 20$, la portion gauche de la courbe $(\frac{d\Psi}{dX}, \Psi)$ se déplace vers la droite et le maximum négatif que peut atteindre la partie négative de Ψ diminue de manière significative limitant ainsi le domaine des Ψ -solutions permises. Par conséquent, l'effet de l'augmentation de la charge négative du grain de poussière a pour conséquence de réduire le seuil de la turbulence et du déferlement de l'onde. Ce résultat rappelle à bien des égards les travaux de Buti [79] qui a montré qu'une petite fraction de grains de poussière chargés pouvait éliminer le comportement chaotique [80] des systèmes alfvéniques non dissipatifs. Le cas le plus intéressant est sans nul doute celui pour lequel $\beta\varepsilon \simeq 0.87$. Pour $\beta\varepsilon \geq 0.87$, la solution- $(\frac{d\Psi}{dX}, \Psi)$ amorce une transition soudaine et la courbe se referme sur elle-même. En d'autres termes, cela veut dire que $\Psi(X)$ a pris l'allure d'un mode spatialement périodique, que nous appellerons mode BGK poussiéreux, qui s'est développé et a pris place dans le plasma. De tels résultats sont montrés sur la figure (6).

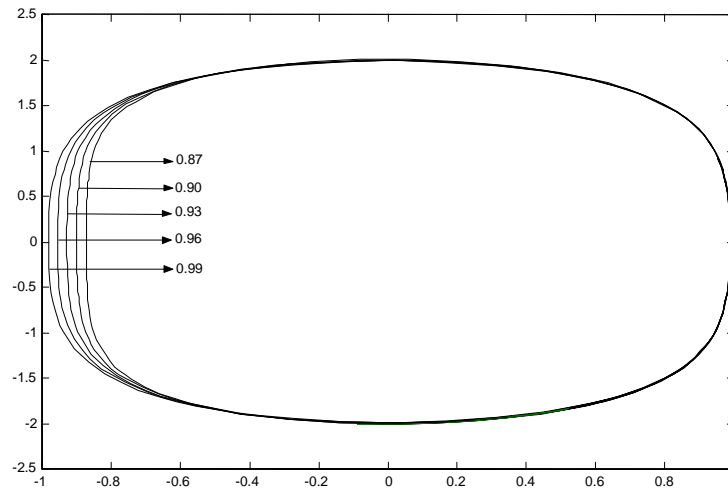


Fig.6- Tracé de $\frac{d\Psi}{dX}$ en fonction de Ψ pour différentes valeurs du paramètre $\beta\varepsilon=0.87$, 0.90, 0.93 et 0.99.

Avant d'aller plus loin, nous pensons qu'il serait peut être utile de préciser et d'étayer certains points. Premièrement, le mode BGK dont il est question n'a jamais fait, à notre connaissance, l'objet d'une quelconque mise en évidence (théorique ou expérimentale). Deuxièmement, la valeur critique $\beta\varepsilon$ requise pour l'émergence et l'établissement de ce mode dépend sensiblement des conditions initiales comme l'indique la figure (7).

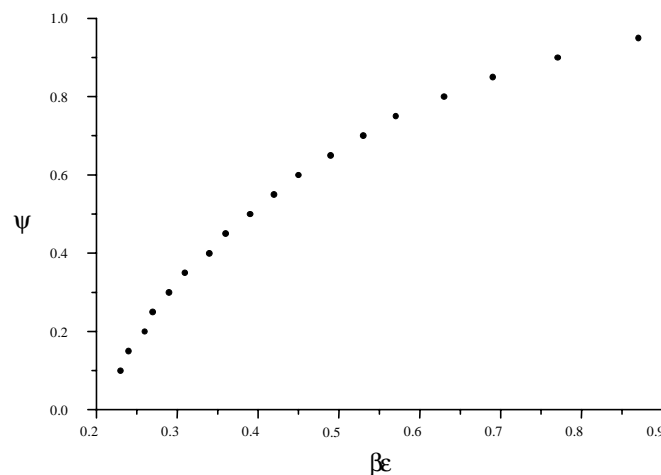


Fig.7- Tracé de $\Psi(X=0)$ en fonction des valeurs critiques de $\beta\varepsilon$ en maintenant $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0}=0.95$. L'apparition de solutions périodiques est intimement liée aux conditions initiales prescrites.

Troisièmement, comme l'équation (3.84) peut être réécrite comme un système de deux équations différentielles de premier ordre de la forme

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.88}$$

alors le théorème de Poincaré-Bendixson [81] affirme que la solution $x(t), y(t)$ du système aura l'allure d'une courbe fermée ou orbite périodique à condition que cette solution reste contenue dans un domaine limité du plan (x, y) . En multipliant (3.84) par $d\Psi/dX$ et en intégrant une fois, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dX} \right)^2 + V(\Psi) = 0\tag{3.89}$$

où

$$V(\Psi) = -4 \left\{ \sqrt{1 - \Psi} + \sqrt{\beta^2 \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \Psi} \right\} + C\tag{3.90}$$

représente le pseudo-potential et C la constante d'intégration. Nous sommes alors tentés de nous poser la question suivante édifiante à plus d'un titre : les oscillations électrostatiques de notre plasma froid peuvent-elles produire, à l'instar de l'équation de Korteweg-de Vries, des structures localisées ou solitons ? La réponse est non et ne souffre d'aucun équivoque. Pour s'en convaincre il suffit d'analyser le pseudo-potential (3.90) en calculant sa première et sa seconde dérivée

$$\frac{dV}{d\Psi} = 2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \Psi}} - \frac{\beta \varepsilon}{\sqrt{\beta^2 \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \Psi}} \right\}\tag{3.91}$$

$$\frac{d^2V}{d\Psi^2} = \frac{1}{(1 - \Psi)^{3/2}} + \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{(\beta^2 \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \Psi)^{3/2}}\tag{3.92}$$

et de voir dans quelle mesure elles peuvent satisfaire les conditions de la solution en soliton énoncées dans les paragraphes précédents. En fait, il est bien établi dans la littérature que les oscillations électrostatiques d'un plasma froid ne peuvent jamais produire de solitons.

Cependant, et comme nous le verrons dans les chapitres suivants, cette assertion, du reste assez bien établie, peut être remise en cause et c'est là tout le mérite d'un plasma poussiéreux à charge variable. Etant donné que dans plusieurs cas d'intérêt pratique Z est très large ($\varepsilon \rightarrow 0$), le pseudo-potential (3.90) peut être réécrit sous la forme

$$V(\psi) = -4(1 - \Psi)^{1/2} + C \quad (3.93)$$

et l'équation (3.84) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi}{dX^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \Psi}} = 0 \quad (3.94)$$

Par commodité nous introduisons une nouvelle variable d'intégration définie par

$$\alpha = \sqrt{1 - \Psi} \quad (3.95)$$

Nous intégrons alors l'équation (3.94) pour obtenir

$$\frac{1}{3} \left\{ (C - \alpha) \sqrt{2\alpha + C} \right\} = X - X_0 \quad (3.96)$$

où ξ est la coordonnée normalisée dans le repère de l'onde. Pour $C \neq 0$, l'équation (3.96) peut être résolue numériquement. Pour $C = 0$, il est aisé d'obtenir

$$\Psi = 1 - \left\{ -\frac{3}{\sqrt{2}} (\xi - \xi_0) \right\}^{4/3} = 1 - \left\{ -\frac{3}{\sqrt{2}} \delta \right\}^{4/3}$$

Cependant, étant donné que Ψ est astreint à appartenir à l'intervalle $-\beta\varepsilon \sim 0 < \Psi < 1$, nous déduisons la condition d'existence suivante

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} < \delta < \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (3.97)$$

Ce résultat indique que la région d'existence de ce nouveau type de modes BGK de large amplitude dépend sensiblement de la charge Z_d du grain de poussière.

Chapitre 4

Oscillations électrostatiques non linéaires dans un plasma poussiéreux à charge variable

4.1 Présentation physique du problème

Récemment [2], [3], [7], [82] de nombreux travaux théoriques et expérimentaux sur les plasmas poussiéreux ont porté sur la variation de la charge des grains de poussière et les modifications que ce phénomène peut apporter. L'influence de la fluctuation de la charge des grains de poussière sur l'instabilité de Rayleigh- Taylor [83] et sur les ondes acoustiques ioniques [84] a été analysée d'un point de vue théorique. Par ailleurs, il a été démontré que le processus de la relaxation de la charge d'un grain de poussière induit une instabilité de Langmuir [85], et que de lourdes impuretés à charge variable peuvent former des écrans poussiéreux autour d'objets solides dans les plasmas [86], [87]. Les fluctuations de la charge du grain peuvent aussi altérer de façon significative la fonction diélectrique non linéaire d'un plasma poussiéreux en présence de champs électromagnétiques [88]. Le couplage linéaire du mode relaxation de la charge du grain avec les ondes de Langmuir a été étudié dans un plasma non isothermique contaminé par de fines particules de poussière à charge variable [89]. Les résultats ont alors révélé l'existence d'un amortissement additionnel et d'un décalage de fréquence de ce type d'ondes. Les mêmes observations ont été rapportées dans le cas des ondes électrostatiques de surface (ESWs), se propageant à

l'interface entre un plasma poussiéreux et un mur métallique [90]. En outre, les pertes en puissance radiofréquence dues à la présence de particules de poussière à charge variable peuvent parfois être significatives et doivent être prises en compte lors de l'estimation des performances de production d'ondes de surface dans un plasma [91]. Par ailleurs, les ondes acoustique et acoustique ionique poussiéreuses ont été intensément étudiées et ont donné, parfois, lieu à de larges débats contradictoires. Le phénomène de variation de la charge du grain modifie considérablement les conditions d'existence et de réalisation de ces deux "nouveaux" modes [40], [92], [93]. De plus, les plasmas poussiéreux ont été classés en termes d'un paramètre adimensionnel appelé "fugacité" et qui caractérise le degré de remplissage des grains de poussière. Une investigation détaillée des modes électrostatiques linéaires [94], [95] et non linéaires [96] sur une large gamme de fugacités et de fréquences de charge du grain a été réalisée. Les résultats ont alors montré que les plasmas poussiéreux denses admettent l'existence de nouveaux modes d'onde de fréquence ultra faible appelés "ondes de Coulomb poussiéreuses" (dust- Coulomb waves, DCWs) [97], [98] ou "ondes de Coulomb piégées ou thermiques poussiéreuses" (thermal or trapped dust- Coulomb waves, TDCWs) [99] lorsque l'effet de grains de poussière piégés est mis à contribution. Celles ci représentent en fait les modes normaux d'un plasma poussiéreux dense dont l'existence dépend entièrement du phénomène de variation de la charge du grain de poussière. D'un autre côté, un formidable arsenal expérimental a été mis sur pied pour l'étude des ondes, des instabilités et du processus de charge dans les plasmas poussiéreux [100], [101], [102], [103], [104]. Dans le chapitre précédent, nous avons rapporté l'existence et les propriétés non linéaires d'un nouveau mode poussiéreux que nous avons appelé mode BGK (Bernstein- Greene- Kruskal) poussiéreux. Le plasma est électroniquement appauvri et, de ce fait, peut être perçu comme un plasma à deux composantes composé d'ions positifs et de particules massives de poussière chargées négativement. Une telle situation est commune aussi bien dans les anneaux de Saturne que dans les décharges de laboratoire de basses températures. Cependant, la charge portée par les grains a été supposée constante, une hypothèse qui peut parfois s'avérer et paraître incorrecte. C'est pourquoi, l'objet du présent chapitre consistera à étendre notre analyse antérieure à des situations où les grains de poussière exhibent des variations de charge self-consistantes et à rechercher dans quelle mesure et sous quelles conditions la variation de la charge peut

elle modifier de manière drastique les résultats et conclusions du chapitre précédent.

4.2 Equations de base du modèle à charge variable

Nous utiliserons les mêmes équations de base que celles du modèle cinétique déjà introduit et utilisé dans le chapitre précédent. Cependant, la charge du grain de poussière n'étant plus constante, il nous sera nécessaire d'établir d'autres équations qui tiendront compte d'un degré de liberté additionnelle : la dynamique de la charge du grain. Le plasma est composé d'électrons, d'ions positifs et de grains de poussière de densités respectives n_e , n_i , and n_d . Bien que les dimensions (et donc la charge) des grains varient d'un grain à un autre, nous supposons, sans perte de généralité, que tous les grains ont la même charge égale à $q_d = -eZ_d$, Z_d étant positif pour les grains chargés négativement et négatif dans le cas opposé. Tous les grains de poussière sont supposés être des sphères de rayon a et de densité massique ρ . Notre plasma étant suffisamment dilué (le nombre de particules dans une sphère de Debye est important), nous pouvons donc négliger les collisions entre particules. Une particule d'espèce s , de charge q_s et de masse m_s ne sera soumise qu'au champ moyen créé par l'ensemble des autres particules. La théorie du champ moyen décrite dans le cadre de l'approche classique de Vlasov-Maxwell [77], [105] nous permet donc d'écrire

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q_s}{m_s} \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial}{\partial v_x} \right) f_s(x, v_x) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi \sum_{s=i,e,d} q_s \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x f_s(x, v_x) \quad (4.2)$$

L'équation de Vlasov (4.1) régit l'évolution, dans l'espace des phases, de la fonction de distribution des vitesses $f_s(x, v_x)$ de la particule d'espèce s . L'équation de Poisson (4.2) détermine de manière self-consistante le potentiel $\phi(x)$ en termes des fonctions de distribution des trois espèces de particules présentes dans le plasma. Les équations (4.1) et (4.2) ont été réécrites dans le repère de l'onde ($x - v_0 t \rightarrow x$). Nous avons vu au cours du chapitre précédent que les solutions de l'équation (4.1) peuvent être choisies de manière arbitraire et ne sont assujetties qu'à la condition

$$f_s(x, v_x) = f_s(E_s) \quad (4.3)$$

On dit alors que

$$E_s = \frac{1}{2}m_s v_x^2 + q_s \phi(x) \quad (4.4)$$

est une constante du mouvement de la particule d'espèce s . Cette assertion, du reste aisément vérifiable, reste valable aussi longtemps que la charge q_s de la particule reste constante. Dans le cas d'un grain de poussière à charge variable, nous réécrivons E_d sous la forme

$$E_d = \frac{1}{2}m_d v_x^2 + q_d \phi(x) + \chi(x) \quad (4.5)$$

de telle manière à ce que E_d devienne une constante du mouvement et $f(E_d)$ satisfasse l'équation stationnaire de Vlasov (4.1). Le terme $\chi(x)$ qui apparaît dans l'équation (4.5) est une énergie potentielle additionnelle que nous introduisons pour contrebalancer la variation de l'énergie due à la fluctuation de la charge du grain. Il est aisé de montrer que l'évolution de $\chi(x)$ est régie par l'équation

$$\frac{d\chi}{dx} = -\phi \frac{dq_d}{dx} \quad (4.6)$$

Les équations (4.5) et (4.6) peuvent être combinées pour obtenir

$$E_d = \frac{1}{2}m_d v_x^2 + \int_0^\phi q_d d\phi \quad (4.7)$$

Pour cela, nous considérons le cas où chaque espèce est un faisceau froid de particules, chaque particule d'espèce s ayant la même vitesse en une position x donnée. Nous choisissons alors

$$f_{\alpha=\epsilon,i}(x, v_x) = 2n_{\alpha 0} v_{\alpha 0} \delta \left(v_x^2 + \frac{2q_\alpha}{m_\alpha} \phi(x) - v_{\alpha 0}^2 \right) = n_{\alpha 0} \frac{v_{\alpha 0}}{\tilde{v}_\alpha} \delta(v_x - \tilde{v}_\alpha) \quad (4.8)$$

et

$$f_d(x, v_x) = 2n_{d0}v_{d0}\delta\left(v_x^2 - \frac{2Z_d e}{m_d}\phi(x) + \frac{2}{m_d}\chi - v_{d0}^2\right) = n_{d0}\frac{v_{d0}}{\tilde{v}_d}\delta(v_x - \tilde{v}_d) \quad (4.9)$$

où

$$\tilde{v}_{\alpha=e,i} = \left(v_{\alpha 0}^2 - \frac{2q_\alpha}{m_\alpha}\phi(x)\right)^{1/2} \quad (4.10)$$

$$\tilde{v}_d = \left[v_{d0}^2 + \frac{2Z_d e}{m_d}\left(\phi - \frac{\chi}{Z_d e}\right)\right]^{1/2} \quad (4.11)$$

et $\alpha = e, i, d$ désigne respectivement les électrons, les ions et les grains de poussière de charge variable. Les vitesses à l'équilibre ($\phi = 0$) v_{e0} , v_{i0} et v_{d0} sont choisies de telle sorte que les vitesses perturbées \tilde{v}_e , \tilde{v}_i , et \tilde{v}_d soient réelles. Strictement parlant, la solution du présent système de Vlasov-Poisson dépend des valeurs de ces constantes à travers les paramètres définis ci dessus (α , β , f and Z_{d0}). A l'équilibre, la condition de neutralité de la charge électrique permet d'écrire $n_{e0} - n_{i0} + Z_{d0}n_{d0} = 0$. En intégrant les fonctions de distributions des vitesses f_e , f_i et f_d sur tout l'espace des vitesses, nous obtenons

$$n_\alpha(x) = n_{\alpha 0}\frac{v_{\alpha 0}}{\tilde{v}_\alpha} \quad (4.12)$$

L'équation de poisson (4.2) est alors réécrite sous la forme

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} = \frac{2/f}{\sqrt{1+\alpha\Psi}} - \frac{2}{\sqrt{1-\Psi}} + \frac{2\varepsilon Z_d}{\sqrt{1+(\Psi - \frac{\xi}{Z})Z_d/\beta}} \quad (4.13)$$

où

$$\Psi = 2\frac{e\phi}{W_i} \quad (4.14)$$

$$X = \frac{\omega_i x}{V_{i0}} \quad (4.15)$$

$$\xi = 2\frac{\chi}{W_i} \quad (4.16)$$

sont les nouvelles variables normalisées. Ici $W_\alpha = m_\alpha V_{\alpha 0}^2$ représente deux fois l'énergie cinétique, à l'équilibre, de la particule d'espèce α , $\varepsilon = \frac{n_{d0}}{n_{i0}} \left(f = \frac{n_{i0}}{n_{e0}}\right)$ mesure l'importance du nombre de grains de poussière (ions) présents dans le plasma non perturbé relativement à celui des ions (électrons), V_{i0}/ω_i est la distance que parcourt un ion durant

une période d'oscillation ω_i et $\alpha = W_i/W_e$ ($\beta = W_d/W_i$) est le rapport, à l'équilibre, des énergies cinétiques de l'ion et de l'électron (du grain de poussière et de l'électron). Il convient de noter que les valeurs de Ψ ne peuvent aller au delà (ou en deçà) de certaines valeurs limites (les densités de particules ne peuvent être négatives) définies par

$$\Psi < 1 \quad (4.17)$$

$$\Psi > -\frac{W_e}{W_i} \quad (4.18)$$

$$\Psi > \frac{1}{Z_d} \left(\xi - \frac{W_d}{W_i} \right) \quad (4.19)$$

L'existence de solutions physiquement acceptables et donc des modes BGK que l'on se propose d'investir dans ce présent travail, est intimement liée aux valeurs de Z_d et ξ dans le cas où

$$-\frac{W_e}{W_i} < \frac{1}{Z_d} \left(\xi - \frac{W_d}{W_i} \right) < 1 \quad (4.20)$$

Cela veut dire qu'une plus faible valeur de ξ ou une plus grande valeur de Z_d étend le domaine des solutions en Ψ admissibles favorisant ainsi l'existence des modes BGK poussiéreux de large amplitude. L'équation (4.13) indique que les points singuliers $\Psi = 1, -W_e/W_i, 1/Z_d(\xi - W_d/W_i)$ correspondent à une forte déformation de l'onde requérant le phénomène de piégeage des particules dans un minima ou maxima de potentiel. La normalisation de l'équation (4.6) donne

$$\frac{d\xi}{dX} = \Psi \frac{dZ_d}{dX} \quad (4.21)$$

4.3 Equation de la charge du grain de poussière

Dans la théorie du modèle standard de la sonde électrostatique, la charge du grain (assimilé donc à une sonde immergée dans un plasma) provient essentiellement de la collecte des électrons et des ions présents dans le plasma. Ces derniers viennent se greffer sur la surface du grain. Nous allons dans ce qui suit déterminer, de manière self consistante et moyennant les distributions (4.8), l'équation d'évolution de la charge du grain $q_d =$

$-eZ_d$ que nous écrivons sous la forme

$$\tilde{v}_d \frac{\partial q_d}{\partial x} = I_e + I_i = -e \int_{v_{\min}}^{\infty} f_e(x, v_x) v_x \sigma_e(v_x, q_d) dv_x + e \int_0^{\infty} f_i(x, v_x) v_x \sigma_i(v_x, q_d) dv_x \quad (4.22)$$

En réalité, l'équation (4.22) traduit le principe de conservation de la charge électrique. I_e et I_i représentent respectivement les courants de charge électronique et ionique. Nous les déterminerons en moyennant la section efficace $\sigma_{e,i}(v_x, q_d) = \pi a^2 (1 \pm 2eq_d/m_{e,i}C_g v_x^2)$ de collision d'une particule chargée avec un grain de poussière sur les fonctions de distribution électronique et ionique. $v_{\min} = (-2eq_d/m_e C_g)^{1/2}$ est la vitesse minimale limite que devra acquérir un électron pour pouvoir parvenir jusqu'à la surface du grain. $C_g = a(1 + a/\lambda_{De}) \simeq a$ est la capacité effective du grain, a le rayon du grain et λ_{De} la longueur de Debye électronique. En procédant au calcul des intégrales de l'équation (4.22) et au réarrangement des termes, nous obtenons l'équation de la charge du grain suivante

$$\begin{aligned} \frac{dZ_d}{dX} = & \frac{1}{\left[1 + \left(\Psi - \frac{\xi}{Z_d}\right) Z_d/\beta\right]^{1/2}} \frac{\pi a^2 n_{e0} v_{e0} v_{i0}}{\omega_{pi} v_{d0}} \left\{ \left(1 - \frac{2e^2}{aW_e} \frac{Z_d}{1 + \alpha\Psi}\right) \right. \\ & \left. - f \sqrt{\frac{\alpha m_e}{m_i}} \left(1 + \frac{2e^2}{aW_e \alpha} \frac{Z_d}{1 - \Psi}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

écrite dans le système des variables normalisées. L'équation (4.23) indique qu'en l'absence de toute perturbation ($\Psi = 0$), les paramètres de notre simulations devront au préalable satisfaire la relation

$$Z_{d0} = -p \frac{aW_e}{2e^2} \quad (4.24)$$

où p est donné par

$$p = \frac{-1 + f \sqrt{\frac{\alpha m_e}{m_i}}}{1 + f \sqrt{\frac{m_e}{\alpha m_i}}}. \quad (4.25)$$

Notons que $(-p)$ n'est autre que le rapport de l'énergie potentielle d'un électron à la surface du grain sur son énergie cinétique. L'équation (4.23) prend alors la forme compacte suivante

$$\frac{dZ_d}{dX} = \frac{K}{\left[1 + \left(\Psi - \frac{\xi}{Z_d}\right) Z_d/\beta\right]^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{Z_d(1 + p\Psi)}{Z_{d0}(1 - \Psi)(1 + \alpha\Psi)} \right\} \quad (4.26)$$

où

$$K = \frac{\pi a^2}{\omega_{pi}} (n_{e0} v_{e0} - n_{i0} v_{i0}) \frac{v_{i0}}{v_{d0}} \quad (4.27)$$

peut être perçu comme étant le flux net de charges électriques qui atteint la surface du grain au cours d'une période plasma ionique ω_{pi}^{-1} . En réalité, le rapport de la vitesse de l'électron à celle de l'ion est de l'ordre $\sqrt{m_i/m_e}$ et donc à densités comparables ($n_{e0} \sim n_{i0}$), ce flux de particules chargées est, en majeure partie, constitué d'électrons, *i.e* $K > 0$. On peut alors se demander si cette large différence de vitesse ($v_{e0}/v_{i0} \sim \sqrt{1/1836}$) ne peut être compensée par un déséquilibre de densités ($n_{i0} \gg n_{e0}$, cas de l'appauvrissement électronique du chapitre précédent). Toutefois, de telles situations ne peuvent survenir. En réalité, à mesure que Z_d augmente, la densité électronique diminue jusqu'à ce que le flux K tende vers zéro et la charge du grain devient alors constante. L'équation (4.26) est donc une équation additionnelle. Elle est couplée aux autres équations du plasma à travers les courants plasma électronique et ionique. La charge du grain de poussière q_d prend la forme d'une nouvelle variable dynamique couplée, de manière self consistante, aux autres variables dynamiques telles que la densité et le potentiel. Au cours de la simulation qui va suivre, nous fixerons au préalable les valeurs de α , β , f , Z_{d0} , n_{d0} , a et ρ alors que la valeur de W_e sera déterminée à partir de l'équation (4.24).

4.4 Analyse du cas faible amplitude

Les équations (4.13), (4.21) and (4.26) forment un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires couplées. A priori, il est difficile, voire impossible, de trouver analytiquement les conditions et les critères d'existence de solutions physiquement acceptables. Cependant, dans le cas des petites amplitudes, il est toujours possible de trouver certains résultats analytiques moyennant les techniques standards de développement. Pour cela, nous récrivons Z_d et Ψ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} Z_d &= Z_d^{(0)} + Z_d^{(1)} + Z_d^{(2)} + \dots \\ \Psi &= \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

Les quantités d'ordre zéro sont données par

$$\begin{aligned}\Psi^{(0)} &= 0 \\ Z_d^{(0)} &= Z_{d0}\end{aligned}\tag{4.29}$$

En portant les expressions (4.28) dans les équations (4.13), (4.21) et (4.26), nous obtenons, au premier ordre de notre développement, le système linéaire différentiel suivant

$$\frac{dY}{dX} = AY\tag{4.30}$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} Z_d^{(1)} \\ \Psi^{(1)} \\ \frac{d\Psi^{(1)}}{dX} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & -a_4 & 0 \end{pmatrix}\tag{4.31}$$

et

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{K}{Z_{d0}}, & a_2 &= K(\alpha - 1 - p) \\ a_3 &= \frac{2(f-1)}{fZ_{d0}}, & a_4 &= \alpha/f + 1 + Z_{d0}/\beta(1 - 1/f)\end{aligned}\tag{4.32}$$

La solution du système (4.30) est alors donnée par [106]

$$Y = Y(0) e^{AX} = \sum_{j=1}^3 e^{r_j X} P_j\tag{4.33}$$

Les r_j 's sont les valeurs propres de la matrice A et sont solutions de l'équation caractéristique

$$r^3 + a_1 r^2 + a_4 r - a_3 a_2 + a_1 a_4 = 0\tag{4.34}$$

et les P_j 's sont des matrices de projection qui satisfont

$$A = \sum_{j=1}^3 r_j P_j, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_j$$

Les solutions du système linéaire (4.30) sont stables, instables ou oscillatoire lorsque, respectivement, les racines de l'équation (4.34) sont négatives, positives ou complexes. Nous pouvons alors distinguer trois cas de figure selon que l'expression

$$D = -4a_4^3 - 8a_4^2a_1^2 - 4a_4a_1^4 + 36a_1a_2a_3a_4 - 27a_2^2a_3^2 + 4a_2a_3a_1^3 \quad (4.35)$$

est positive, négative ou nulle [107].

• **Premier cas** : $D < 0$.

L'équation (4.34) admet uniquement une racine réelle r_1 , les deux autres, r_2 et r_3 , étant complexes conjuguées

$$r_1 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}_1 - \frac{a_1}{3} \quad (4.36)$$

$$r_2 = -\frac{\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}_1}{2} - \frac{a_1}{3} + i\sqrt{3}\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1}{2} \quad (4.37)$$

$$r_3 = -\frac{\bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}_1}{2} - \frac{a_1}{3} - i\sqrt{3}\frac{\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1}{2} \quad (4.38)$$

où $\bar{\alpha}_1$ désigne la partie réelle de

$$\bar{\alpha} = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}a_1a_4 - a_2a_3 + \frac{2}{27}a_1^3 \right) + \sqrt{-\frac{D}{108}} \right]^{1/3} \quad (4.39)$$

et

$$\bar{\beta}_1 = \left(\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_4}{3} \right) / \bar{\alpha}_1 \quad (4.40)$$

Dans le cas où r_1 et les deux parties réelles de r_2 et r_3 sont négatives, l'équation (4.30) admettra des solutions oscillatoires amorties. Si, en revanche, l'une de ces deux parties réelles est positive, les solutions seront croissantes.

• **Deuxième cas** : $D = 0$

Les trois racines sont réelles et sont données par

$$r_1 = 2\bar{\alpha}_1 - \frac{a_1}{3}, \quad r_2 = r_3 = -\bar{\alpha}_1 - \frac{a_1}{3} \quad (4.41)$$

• **Troisième cas** : $D > 0$

A l'instar du cas précédent, toutes les racines sont réelles et sont données par

$$r_1 = \bar{\alpha}_0 + \bar{\beta}_0 - \frac{a_1}{3} \quad (4.42)$$

$$r_2 = \bar{\alpha}_0 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \bar{\beta}_0 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{a_1}{3} \quad (4.43)$$

$$r_3 = \bar{\alpha}_0 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \bar{\beta}_0 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{a_1}{3} \quad (4.44)$$

$\bar{\alpha}_0$ et $\bar{\beta}_0$ sont les parties imaginaires de $\bar{\alpha}$ et de

$$\bar{\beta} = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}a_1a_4 - a_2a_3 + \frac{2}{27}a_1^3 \right) - \sqrt{-\frac{D}{108}} \right]^{1/3}. \quad (4.45)$$

respectivement. Il convient de mettre l'accent sur le fait que les résultats de la présente section nous seront d'un grand apport lorsque nous traiterons le cas purement non linéaire. Avant de clore notre analyse des faibles amplitudes, il serait peut être intéressant de noter le cas $a_2 = 0$ ou $f = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\alpha^{3/2}$. La charge du grain n'est plus couplée au potentiel de l'onde et ne fait en réalité que relaxer de manière exponentielle à partir de sa valeur initiale d'équilibre $Z_{d0} \left(Z_d^{(1)}(X) \sim \exp\left(-\frac{K}{Z_{d0}}X\right) \right)$. Le potentiel de l'onde Ψ entreprend des oscillations harmoniques non amorties et un tel comportement sera préservé, dans une large mesure, dans le régime non linéaire.

4.5 Simulation numérique et discussion des résultats

Le système d'équations (4.13), (4.21) et (4.26) est résolu grâce à un schéma d'intégration numérique basé sur l'algorithme de la méthode de Runge- Kutta d'ordre $[4 \times 5]$. Les grains d'impureté de densité massique $\rho_m = 3 \text{ g/cm}^3$ sont supposés immergés dans un plasma d'hydrogène. Nous considérons d'abord des grains de charge fixe et constante. Nous discuterons après le cas où, en réponse aux oscillations du plasma, la charge du grain devient variable et fluctue au cours du temps. Cette manière de procéder nous donnera toute latitude de pouvoir dissocier l'apport de la dynamique du grain de poussière de celui de la charge. La figure 1 illustre les variations du champ électrique de l'onde $E = -\frac{d\Psi}{dX}$, calculées numériquement à partir des équations (4.13), (4.21) and (4.26), en fonction de

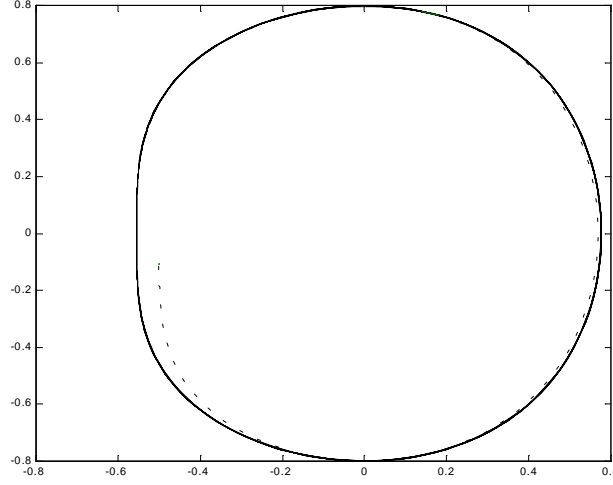


Fig.1- Tracé de $\frac{d\Psi}{dX}$ en fonction de Ψ avec $\Psi(X=0) = 0$, $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = 0.8$, $Z_{d0} = 10$, $n_{i0}/n_{e0} = 1.2$, $a = 10^{-4}\text{cm}$, $n_{d0} = 10^5\text{cm}^{-3}$, $W_i/W_e = 0.4$, $W_d/W_i = 5$, $\rho_m = 3\text{ g/cm}^3$.

Pointillés : charge fixe. Trait plein : charge variable.

son potentiel Ψ . La valeur initiale du champ électrique est choisie égale à $E_0 = -0.8$. La partie en pointillés du graphe montre que lorsque la dynamique de la charge du grain est ignorée, le mode "se brise" à $X = 2.9227$. Les paramètres suivants $Z_{d0} = 10$, $f = 1.2$, $a = 10^{-4}\text{cm}$, $n_{d0} = 10^5\text{ cm}^{-3}$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 5$ ont été, en réalité, choisis délibérément pour qu'en l'absence de toute fluctuation de la charge, le mode soit inhibé dès son apparition et ne se développe pas outre mesure. Par contre, la même figure 1 (partie solide) indique que la prise en compte de la dynamique de la charge du grain a pour conséquence l'excitation d'un mode BGK $\Psi(X)$ spatialement périodique. La charge du grain $q_d = -eZ_d$ (figure 2) exhibe un comportement oscillatoire et reste négative. Il s'en suit que la variation de la charge du grain a pour effet de favoriser et de rendre possible l'apparition des modes BGK. Pour s'en convaincre et étayer cette conclusion-assertion, nous avons alors calculé les valeurs critiques β_c , au delà desquelles le mode BGK apparaît, pour différentes valeurs de α (figure 3). Notons que le nombre d'électrons présents dans le plasma ainsi que les dimensions du grain peuvent affecter la valeur seuil β_c d'émergence des modes BGK : β_c diminue

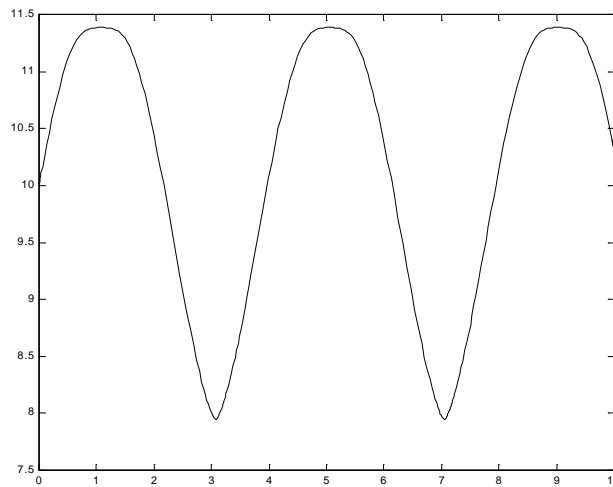


Fig.2- Variation spatiale de Z_d . Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 1.

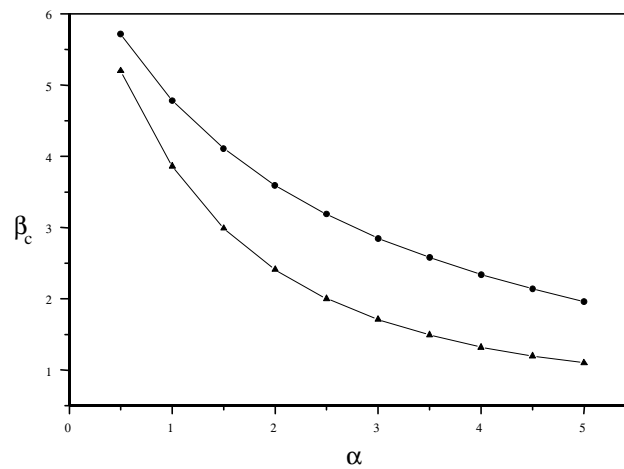


Fig.3- Tracé de la valeur critique $\beta_c = (W_d/W_i)_c$ en fonction de $\alpha = W_i/W_e$, avec $\Psi(X=0) = 0$, $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = 0.8$, $Z_{d0} = 10$, $n_{i0}/n_{e0} = 1.1$, $a = 10^{-4}\text{cm}$, $n_{d0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$, $\rho_m = 3\text{g/cm}^3$. Cercle plein : Z_d est constant. Triangle plein : Z_d est variable.

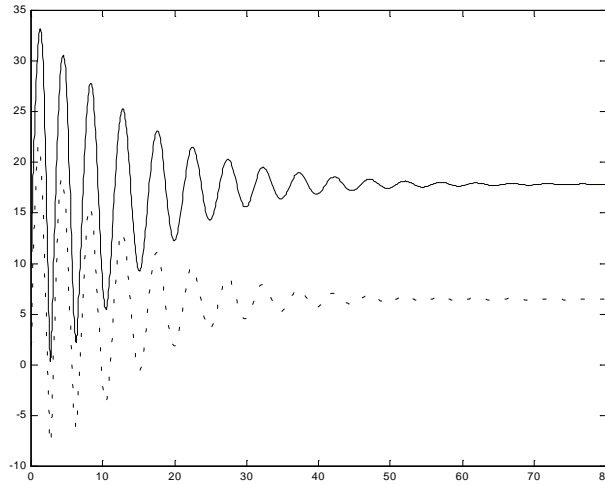


Fig.4- Variations spatiales de Z_d (trait plein) et de $\Psi \times 50$ (pointillés) avec $Z_{d0} = 10$, $n_{i0}/n_{e0} = 1.3$, $a = 10^{-5}\text{cm}$, $n_{d0} = 10^5\text{cm}^{-3}$, $W_i/W_e = 5$, $W_d/W_i = 10$, $\rho_m = 3\text{g/cm}^3$.

lorsque $f = n_{i0}/n_{e0}$ ou a augmente. La figure 4 pour laquelle $Z_{d0} = 10$, $f = 1.3$, $a = 10^{-5}\text{cm}$, $\alpha = 5$ et $\beta = 10$, illustre le cas d'une charge dont l'amplitude décroît en oscillant avant d'atteindre une valeur fixe $Z_d = 17.84$. Le potentiel électrostatique non linéaire correspondant exécute le même type d'oscillations et se stabilise à $\Psi = 0.1624$. Le mode est alors complètement annihilé ($E = 0$) et cela peut être visualisé sur le graphe $(d\Psi/dX, \Psi)$ de la figure 5. L'existence d'un tel mode peut être, à priori, prédit par l'analyse linéaire de la section précédente : D est négatif (solution oscillatoire) et les parties réelles des valeurs propres r_j

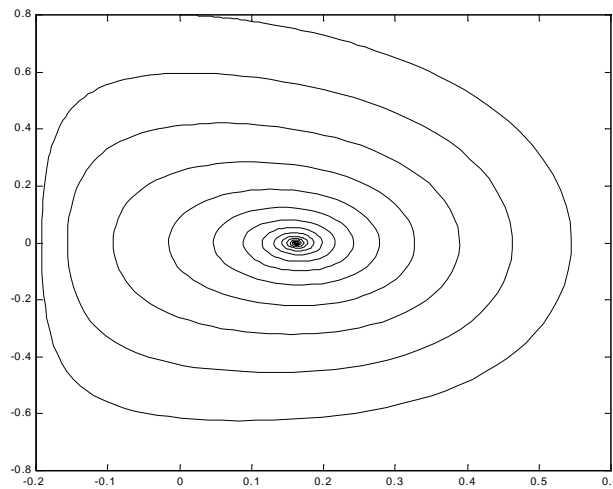


Fig.5- Tracé de $(d\Psi/dX, \Psi)$ avec les mêmes paramètres de la figure 4.

sont négatives (solution amortie). La variation de la charge s'accompagne donc d'une dissipation inhabituelle, dite dissipation anormale, de l'énergie du mode BGK. Cette énergie est cédée aux porteurs de courant (électrons et ions) pour, d'une part, drainer la charge du grain et, d'autre part, entretenir les fluctuations self consistantes de la charge de ce même grain. Ce nouveau mécanisme non collisionnel de dissipation de l'énergie, propre aux plasmas poussiéreux, est encore mal connu et suscite beaucoup de travaux scientifiques. Il est fondamentalement différent des deux autres mécanismes d'échange de l'énergie dans les plasmas habituels à deux composantes : l'interaction onde- particule (effet Landau) et l'interaction particule- particule (collisions). Il est important de noter que les nouvelles valeurs d'équilibre de la charge du grain et du potentiel ($Z_{eq} = 17.84, \Psi_{eq} = 0.16$) sont nettement différentes de celles de l'état initial en l'absence de toute perturbation ($Z_{d0} = 10, \psi_0 = 0$). Cela équivaut à dire que le système, sous l'influence du mode électrostatique BGK, évolue vers un nouvel état de quasi neutralité que la théorie linéaire de la section précédente ne peut ni prévoir, ni décrire. Ce nouvel état d'équilibre, comme le montre la figure 6, tend à devenir fortement non linéaire à mesure que l'amplitude du champ électrique initial E_0 devient importante.

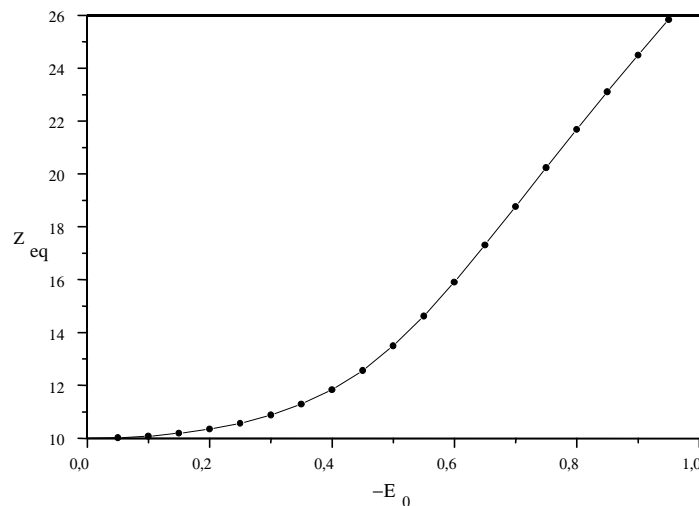


Fig.6- Tracé de Z_{eq} en fonction de E_0 avec les mêmes paramètres de la figure 4 à l'exception de $\beta = 5$.

En intégrant une fois l'équation de Poisson (4.13) et en utilisant le fait que le champ électrique de l'onde à l'équilibre est nul, nous obtenons

$$-E_0^2 = \frac{8}{\alpha f} \left(\sqrt{1 + \alpha \Psi_{eq}} - 1 \right) + 8 \left(\sqrt{1 - \Psi_{eq}} - 1 \right) + 8\beta\varepsilon \left(\sqrt{1 + \left(\Psi_{eq} - \frac{\xi_{eq}}{Z_{eq}} \right) Z_{eq}/\beta} - 1 \right) \quad (4.46)$$

alors que l'équation (4.26) à l'équilibre donne

$$\frac{Z_{eq}}{Z_{d0}} = \frac{(1 - \Psi_{eq})(1 + \alpha \Psi_{eq})}{(1 + p \Psi_{eq})} \quad (4.47)$$

Ces deux équations qui lient les grandeurs macroscopiques du nouvel état d'équilibre Ψ_{eq} , Z_{eq} et ξ_{eq} ne peuvent malheureusement être résolues de manière algébrique, ξ_{eq} étant tributaire de l'intégration numérique de l'équation (4.21) assortie de conditions initiales appropriées. Bien entendu, les valeurs d'équilibre calculées numériquement satisfont les équations (4.46), (4.47). Notons que $(-1/p)$ est toujours supérieur à 1, sinon le plasma est complètement appauvri, un cas physiquement écarté comme nous l'avons déjà précisé dans ce qui précède. La figure 7 montre l'évolution de la charge Z du grain de poussière pour différentes valeurs du rayon a de ce grain. Il est intéressant de noter que la valeur d'équilibre finale Z_{eq} de celle ci est plutôt insensible au rayon a . La charge du grain, dans chaque cas de figure et par différents comportements,

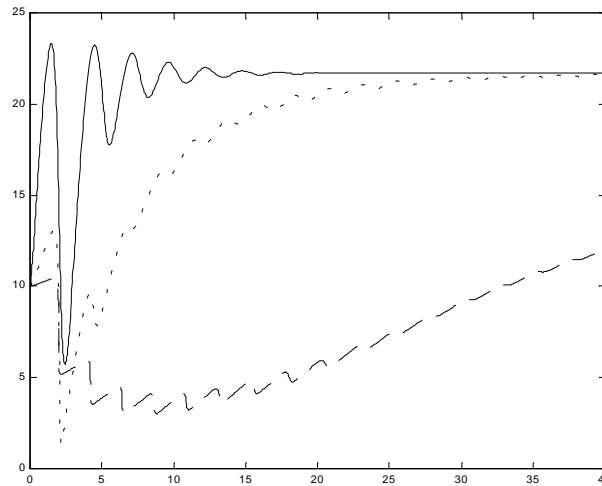


Fig.7- Variation spatiale de Z_d avec les mêmes paramètres de la figure 4 à l'exception de

$$W_d/W_i = 5.$$

atteint une valeur constante $Z_{eq} = 21.69$. Ce résultat peut paraître surprenant d'autant plus que le modèle de la sonde habituellement appliqué au grain assimile ce dernier à une sphère de rayon a et de capacité $C_g(\sim a)$. Cependant, les rayons de la figure 7 sont tellement ($a \sim 10^{-5}$ cm) proches que la différence entre les charges d'équilibre est difficilement perceptible. Il serait alors intéressant de voir ce qui peut advenir lorsque nous faisons varier le rayon a du grain en maintenant constant le reste des paramètres. Ces derniers sont similaires à ceux de la figure 5 à l'exception de E_0 sciemment choisi égal à -0.5 pour prévenir et éviter le déferlement de l'onde. Aussi longtemps que le rayon a du grain est plus petit que $0.5 \mu\text{m}$, Z_d et Ψ exécutent des oscillations amorties qui deviennent non amorties au delà de cette valeur. Ceci, bien entendu, pouvait être prévu par notre traitement linéaire comme le montrent les variations de D (figure 8) et des parties réelles des racines r_j (figure 9) pour différentes valeurs de a . D , r_1 et la partie réelle de r_2 étant négatifs, les conclusions de la section précédente prévoient des solutions oscillatoires amorties. Cependant, au delà de $a \sim 0.5 \mu\text{m}$, la partie réelle de r_2 tend rapidement vers zéro alors que r_1 reste négative (solution non amortie). D'un autre côté, lorsque le rayon du grain a augmente, le nombre d'oscillations de l'amplitude diminue et la charge Z_d atteint sa valeur d'équilibre plus rapidement indiquant par là que l'amortissement devient plus significatif et plus prononcé. Au delà de $a = 0.05 \mu\text{m}$ le processus est inversé jusqu'à ce que le domaine des oscillations non amorties soit atteint à $a \sim 0.5 \mu\text{m}$.

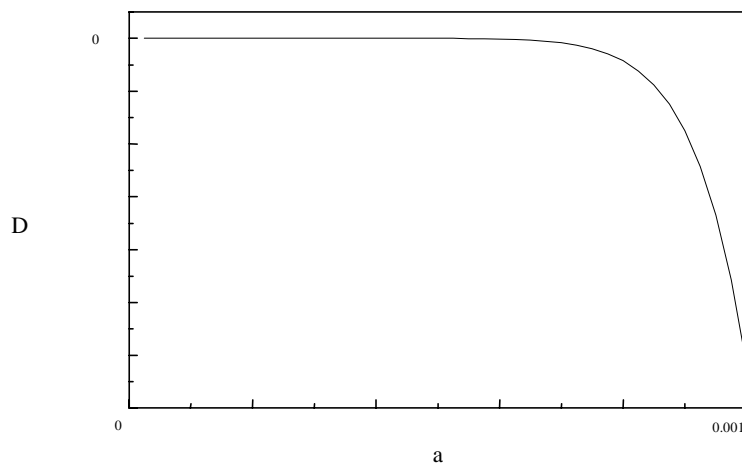


Fig.8- Variation D en fonction du rayon du grain de poussière $a(\text{cm})$. Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 4. Le rayon du grain varie de 0.1 à $10 \mu\text{m}$.

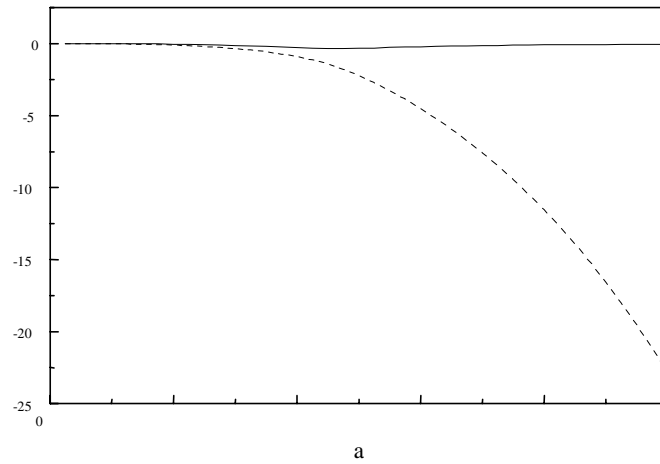


Fig.9- Variation des valeurs propres en fonction du rayon du grain a (cm). Trait plein : r_1 . Tirets : partie réelle de r_2 . Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 7.

Par commodité, le graphe ne continue pas jusqu'à $a = 10 \mu\text{m}$ car les deux courbes conservent le même comportement : r_1 tend vers zéro et $\text{Re}(r_2)$ reste négative.

Cette conclusion est vérifiée, dans l'approximation linéaire, par la figure 10 des variations de la partie réelle de r_2 en fonction de a . La partie réelle de la valeur propre r_2 décroît avec le rayon jusqu'à $a \simeq 0.05 \mu\text{m}$ au delà de laquelle elle augmente. Notons que D peut atteindre de très grandes valeurs que

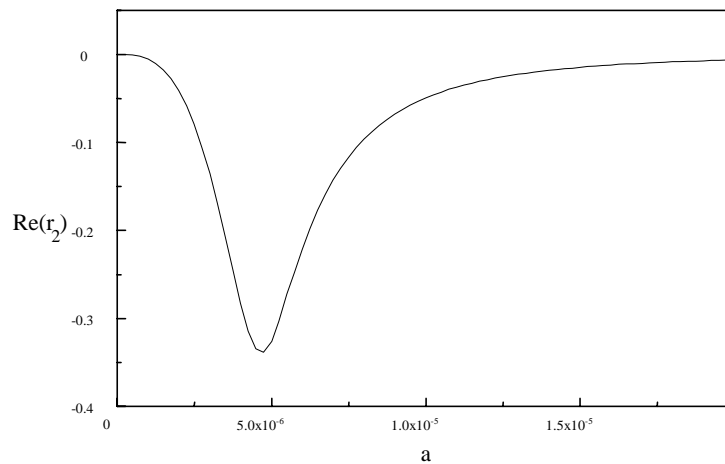


Fig.10- Variation de la partie réelle de r_2 en fonction du rayon a (cm) avec les mêmes paramètres que la figure 8.

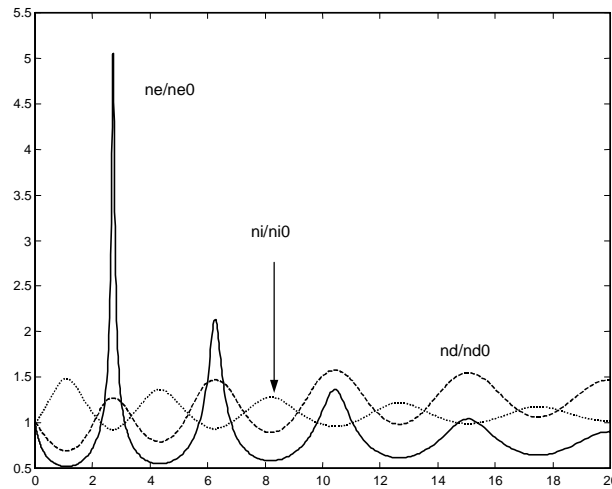


Fig.11- Profils de (n_e/n_{e0}) , (n_i/n_{i0}) et (n_d/n_{d0}) avec les mêmes paramètres de la figure 4.

l'on peut attribuer à la grande différence entre la mobilité des ions et celle des grains de poussière. En effet, D varie en K^4 et K est lui même proportionnel au rapport v_{i0}/v_{d0} . Leurs profils seront donc aussi variés et de différents types. Aux faibles amplitudes, ces densités entreprennent des oscillations harmoniques semblables à celles du potentiel Ψ . En régime fortement non linéaire et comme l'indique la figure 11, elles exhibent d'intéressantes structures spatialement localisées (soliton-like). L'apparition et la formation de ces structures peuvent être attribuées aux différentes non linéarités inhérentes à l'équation de Poisson. En d'autres termes, lorsque les valeurs de Ψ sont voisines des limites de déferlement de l'onde ($-1/\alpha$) et 1, les densités électronique et ionique adoptent un profil solitaire. La densité des grains se comportera de manière analogue lorsque Ψ est proche de $(\xi - \beta)/Z_d$. En régime amorti, les densités, qu'elles soient harmoniques ou localisées, décroissent jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre et de quasi-neutralité complètement différent de l'état de départ. L'importance du rôle de la dynamique des grains de poussière dans l'apparition de nouveaux modes a été à maintes reprises mise en exergue. C'est pourquoi, nous allons maintenant tenter de déceler dans quelle mesure celle-ci peut-elle affecter les résultats de notre simulation. Pour des raisons de comparaison, les valeurs des autres paramètres, à l'exception de celle de $\beta = W_d/W_i = (V_{d0}^2/V_{i0}^2)(m_d/m_i)$, sont choisies similaires à ceux de la figure 4. Quoique les résultats semblent être qualitativement les mêmes, Z_d et Ψ (figure 12) seaturent à une distance plus grande que celle du cas avec $\beta = 10$, *i.e.* la vitesse du grain favorise et accélère l'amortissement et l'atténuation

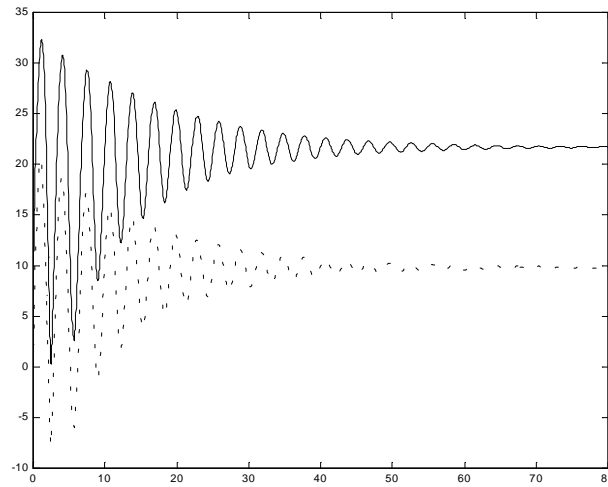


Fig.12- Variations spatiales de Z_d (trait plein) et de Ψ (pointillés) avec les mêmes paramètres de la figure 4 à l'exception de $W_d/W_i = 5$. L'amplitude Ψ a été multipliée par 20.

de l'onde. De plus, la figure 13 montre la formation d'une structure n_d à pics multiples plus prononcée. Au cours de notre analyse, nous n'avons été confrontés qu'à des situations avec $D < 0$ et $\text{Re}(r_j) < 0$ suggérant, dans la limite linéaire, l'existence de solutions oscillatoires amorties. Toutefois, des cas de solutions croissantes, où au moins l'une des racines r_j est à partie réelle positive, peuvent se présenter. Quelles structures non linéaires peut-on alors escompter et prévoir à l'aide de telles solutions ? Une investigation numérique et

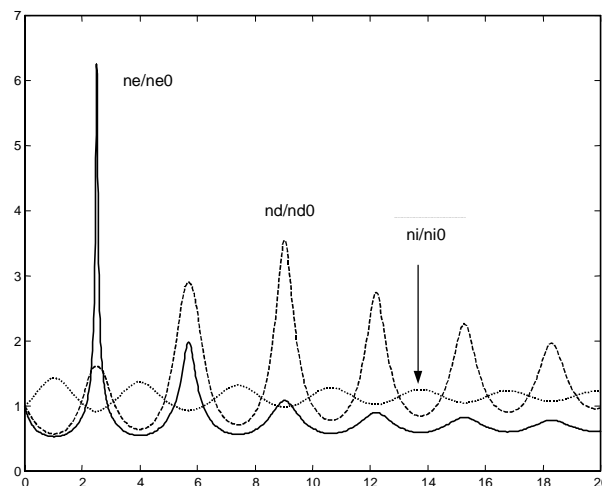


Fig.13- Profils des densités électronique (n_e/n_{e0}), ionique (n_i/n_{i0}) et poussiéreuse (n_d/n_{d0}) avec les mêmes paramètres de la figure 12.

approfondie a alors révélé la possibilité d'existence de deux cas distincts : l'onde peut soit croître de manière continue et déferler dès la manifestation du phénomène de piégeage, soit croître et se saturer en exécutant une série d'oscillations amorties. Ce dernier cas de figure représente une onde de choc qui, rappelons le, peut jouer un rôle très important dans la description de la formation des étoiles, des chocs dans l'explosion des supernova, de l'accélération des particules dans les chocs, de la formation des cristaux poussiéreux,...etc. Ces structures dissipatives dont les propriétés ont été largement mises en exergue ces dernières années, sont le résultat d'un équilibre entre le déferlement non linéaire de l'onde et la dissipation du système. Cette dernière, dite dissipation anormale, est inhérente au phénomène de variation de la charge du grain de poussière. Cette nouvelle génération d'ondes de choc, inconnue avant l'avènement de la discipline des plasmas poussiéreux, est non collisionnelle en ce sens qu'elle ne requiert, ni fait intervenir les collisions entre particules. Les figures 14 et 15 montrent le potentiel et les profils de densité associés à ces structures non linéaires.

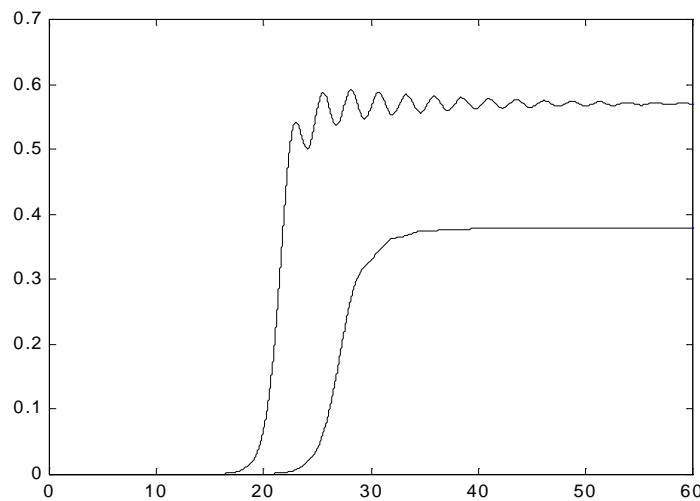


Fig.14- Solution en onde de choc du potentiel non linéaire Ψ pour deux valeurs différentes de $Z_{d0} = 25$ (haut) et $Z_{d0} = 50$ (bas) avec $f = 3$, $\alpha = 5$, $\beta = 20$, $a = 0.1 \mu\text{m}$.

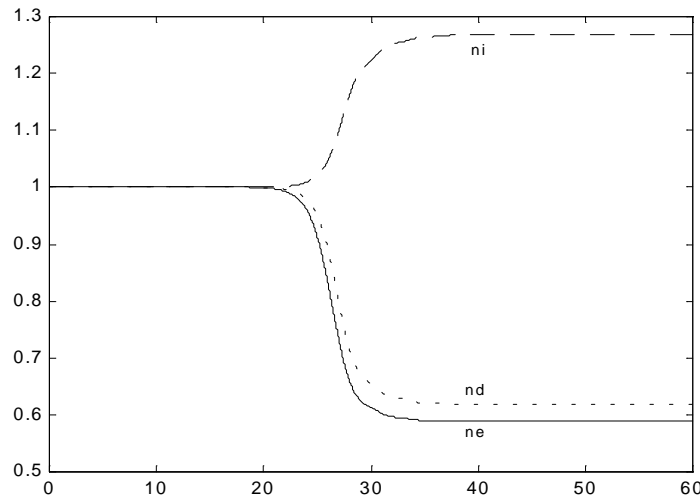


Fig.15- Profils des densités électronique (n_e/n_{e0}), ionique (n_i/n_{i0}) et poussiéreuse (n_d/n_{d0}) avec les mêmes paramètres de la figure 14 avec $Z_{d0} = 50$.

L'influence de la charge Z_{d0} sur la largeur ΔX du front du choc apparaît nettement sur la figure 16. Notons le phénomène de séparation des charges qui se manifeste par l'apparition de quelques oscillations dans le profil de l'onde de choc (fig. 14). L'importance de cet effet décroît à mesure que Z_{d0} augmente. Si maintenant D est positif ou nul ($D \geq 0$), alors la théorie linéaire prévoit des valeurs propres r_j positives dont une est au moins positive. Il n'y aura, par conséquent, aucune oscillation et la solution ne fera que croître. Dans le

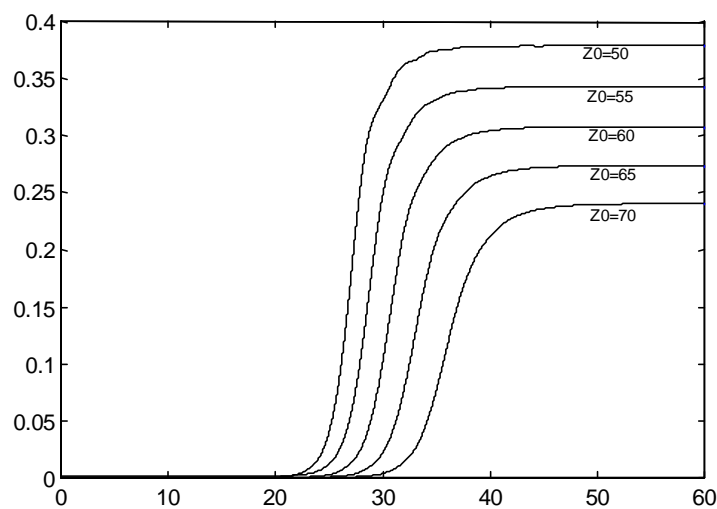


Fig.16- Solution en onde de choc du potentiel non linéaire Ψ pour différentes valeurs de $Z_{d0} = 50, 55, 60, 65$ et 70 avec $f = 3, \alpha = 5, \beta = 20, a = 0.1 \mu\text{m}$.

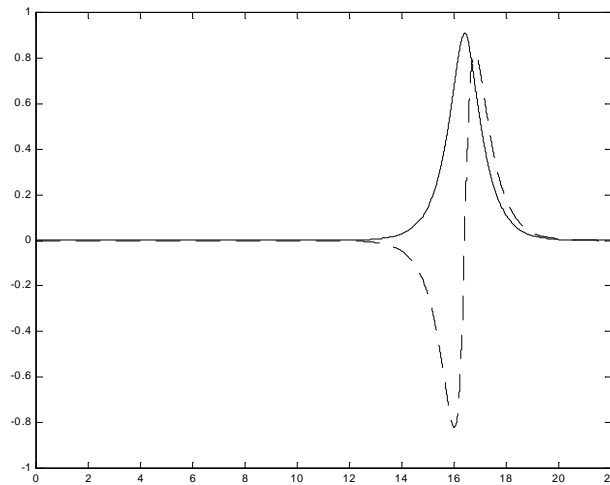


Fig.17- Solution en forme de soliton pour le potentiel électrostatique Ψ (trait plein) avec $Z_{d0} = 10$, $f = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 50$, $a = 3 \mu\text{m}$.

régime purement non linéaire, le calcul numérique montre qu'au présent cas correspondent des solutions en solitons (figures 17 et 18a-b).

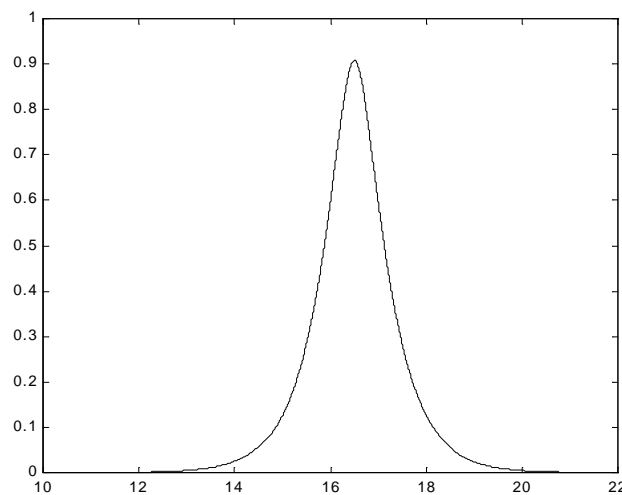


Fig.18a- Solution en forme de soliton pour le potentiel électrostatique Ψ avec $f = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 50$, $a = 3 \mu\text{m}$, $Z_{d0} = 10$.

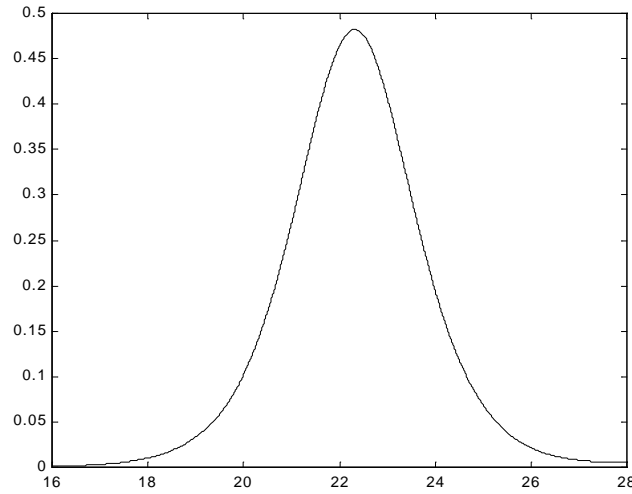


Fig.18b- Mêmes paramètres que précédemment à l'exception de $Z_{d0} = 100$.

Une perturbation initiale E_0 quelconque, aussi insignifiante soit elle, évoluera en une onde solitaire localisée. L'existence de telles solutions dans un modèle froid comme le notre est en soi un important nouveau résultat [108]. La formation des solitons dans notre présent modèle peut être attribuée à une compétition entre les non linéarités du système (piégeage des particules) et la variation de la charge du grain. En réalité, tout se passe comme si le processus de la fluctuation de charge du grain donnait naissance à une dispersion anormale analogue à celle habituellement introduite par les effets thermiques. Notons au passage que l'influence de la variation de la charge des grains sur les structures cohérentes a fait récemment l'objet de quelques publications [109], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116]. Les équations (4.13), (4.21) et (4.26) comportent des non linéarités, de la dispersion et de la dissipation anormales. Elles sont par conséquent quelque peu similaires à l'équation de Korteweg- de Vries modifiée avec un terme de Burgers. A ce propos, Shukla et Mamun [117] ont établi l'équation de type Korteweg- de Vries-Burgers (KdVB) suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.48)$$

Le terme affecté du coefficient β et le terme affecté du coefficient μ représentent respectivement les phénomènes de dispersion et de dissipation de leur système. Moyennant le changement de variable $\varsigma = \xi - u_0 \tau$, où u_0 représente une vitesse constante, Shukla et

Mamun ont montré que l'équation (4.48) admet comme solution

$$\psi = u_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{u_0}{2\mu} (\xi - u_0\tau) \right) \right] \quad (4.49)$$

dans le cas où le terme dispersif est négligeable. La solution (4.49) représente une onde de choc à profil monotone. Lorsque le terme dispersif est pris en compte, Shukla et Mamun ont montré que l'équation (4.48) admet comme solution une onde de choc à profil monotone lorsque μ est grand. Le profil de celle ci devient oscillatoire (dont les premières oscillations ressemblent à des solitons) lorsque μ est très petit. Rappelons que la formation des étoiles se produit principalement dans des nuages poussiéreux interstellaires. Une onde de choc de compression se propage à travers ces nuages créant ainsi les condensations de la densité initiale pour une éventuelle contraction gravitationnelle [112]. Récemment, nous basant sur l'approximation des faibles vitesses du grain de poussière et moyennant une approche pseudo- potentielle, nous avons montré que la formation des solitons dans un modèle froid comme le notre n'est possible que si l'expression suivante [118]

$$\frac{2(f-1)}{f} (\alpha - p - 1) - \frac{\alpha}{f} - 1 - \frac{Z_{d0}(f-1)}{\beta f} \quad (4.50)$$

est positive. D'ailleurs et au cours de notre simulation numérique, nous avons constaté que le signe de l'expression ci-dessus suit celui de D suggérant par la même occasion l'existence probable d'un lien entre les deux approches. Cependant, ne perdons pas de vue que l'expression de D a été établie à partir d'une linéarisation complète de nos équations alors que notre approche pseudo- potentielle [118] repose sur l'approximation des faibles vitesses du grain. A ce jour, nous n'avons pas réussi à donner à D une signification physique satisfaisante et à expliquer pourquoi il reste un paramètre déterminant en régime purement non linéaire. Pour résumer, nous dirons que si D est positif seules les solutions en soliton sont possibles alors que si D est négatif nous distinguerons trois cas de figures dépendants de la nature des racines r_j . En réalité, dans ce cas, si toutes les parties réelles des r_j 's sont négatives alors nous aurons des oscillations amorties, mais si au moins l'une d'elle est nulle alors ces oscillations seront non amorties. Si, maintenant, au moins une partie réelle est positive, nous aurons des solutions en ondes de choc. De plus, la dissipation est intimement liée à la dynamique du grain : les grandes valeurs de la vitesse du grain v_{d0}

favorisent le développement de modes amorties et de structures dissipatives alors que de faibles valeurs de v_{a0} sont requises pour l'existence aussi bien des solutions oscillatoires non amorties que des structures cohérentes. L'extension du chapitre précédent [55] a donc montré que les oscillations électrostatiques d'un plasma froid peuvent produire des structures solitaires. Rappelons qu'il est communément admis que de telles structures localisées ne peuvent jamais apparaître dans un plasma froid [119]. Indiquons, pour finir, que de récents travaux [120], [121] sur les oscillations électrostatiques d'un plasma habituel à deux composantes, à température non nulle et comportant des particules piégées, ont montré qu'après un bref régime transitoire, l'amplitude des modes se stabilise à une valeur finie en dépit de la présence de faibles collisions.

Chapitre 5

Ondes solitaires de Bernstein, Greene et Kruskal (DBGK) dans un plasma poussiéreux à charge variable

5.1 Présentation physique du problème

Récemment, les plasmas de basses températures contenant des grains de poussière ont fait l'objet de beaucoup d'études. Cet intérêt a été motivé, en grande partie, par la découverte de la structure fine des anneaux de Saturne (lors d'une mission de la navette spatiale Voyager) et, sur le plan technologique, par la réalisation que les particules de poussière constituent une sérieuse contamination dans les décharges de laboratoire réalisées dans l'industrie des semi-conducteurs. Par ailleurs, la compréhension des différents types de processus collectifs dans les plasmas poussiéreux a suscité un intérêt considérable [122]- [126]. Il a été alors démontré que la présence, dans les plasmas, de grains de poussière statiques modifie le spectre habituel des ondes plasma et que la dynamique de leur charge introduit de nouveaux modes. Les structures solitaires ou solitons sont incontestablement l'un des types d'ondes les plus intéressants et les plus attrayants. Celles ci ont fait par le passé l'objet de nombreux travaux [127] et l'avènement d'une discipline aussi riche que les plasmas poussiéreux n'a fait que raviver et aiguïser l'intérêt de la communauté scientifique [128]- [142]. De façon générale, l'étude des propriétés intrinsèques d'un soliton repose sur l'analyse de quasi-potentiels dits potentiels de Sagdeev ou sur la théorie des perturbations qui

génère des systèmes dynamiques souvent décrits par des équations non linéaires du type Korteweg-de Vries (K- dV) ou Schrödinger (NLS). Au cours du chapitre précédent, nous avons étendu notre analyse de l'excitation des modes BGK (Bernstein- Greene- Kruskal) poussiéreux pour inclure de manière self-consistante la variation de la charge du grain. Celle ci devient une nouvelle variable dynamique self-consistante représentant un degré de liberté additionnel et conduisant à d'intéressants résultats tels l'amortissement des modes et la formation de structures localisées. Ces dernières sont essentiellement dues au phénomène de variation de la charge du grain et leur existence dans un modèle de plasma froid comme le notre est en elle même un important nouveau résultat. La formation de ces solitons peut être attribuée à une compétition entre les non linéarités du système (phénomène de piégeage des particules) et la dynamique de la charge des grains. En réalité, le processus de la variation de la charge du grain agit comme s'il donnait naissance à une dispersion anormale qui, en contrebalançant les non linéarités du système, donne naissance à des structures localisées. Rappelons que les solitons résultent de l'équilibre entre les effets non linéaires et les effets dispersifs. Les non linéarités déforment l'onde au fur et à mesure de sa propagation. Cette déformation, dans le cas où elle n'est pas stoppée par un mécanisme quelconque, se poursuit jusqu'à effondrement ou déferlement de l'onde. La dispersion anormale intervient alors pour "endiguer" la déformation et donc prévenir le déferlement de l'onde. Le critère d'existence de ces structures solitaires, quelque peu inédites, a été obtenu analytiquement. La formation des solitons BGK poussiéreux est possible lorsque l'expression suivante

$$D = -4a_4^3 - 8a_4^2a_1^2 - 4a_4a_1^4 + 36a_1a_2a_3a_4 - 27a_2^2a_3^2 + 4a_2a_3a_1^3 \quad (5.1)$$

est positive. Les a_j 's ont été définis précédemment. Dans le présent chapitre, on se propose d'étudier les propriétés de ces structures non linéaires, les conditions de leur existence et leur dépendance vis à vis des paramètres du plasma [143].

5.2 Formulation mathématique

Dans le chapitre précédent, nous avons établi un système de trois équations différentielles ordinaires couplées pour décrire le comportement non linéaire des modes BGK

poussiéreux. Celles ci, écrites dans le système des variables normalisées ($\Psi = 2e\phi/W_i$, $X = \omega_{pi}x/v_{i0}$, $\xi = 2\chi/W_i$) se composent de l'équation de Poisson

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} = \frac{2/f}{\sqrt{1+\alpha\Psi}} - \frac{2}{\sqrt{1-\Psi}} + \frac{2\varepsilon Z_d}{\sqrt{1 + \left(\Psi - \frac{\xi}{Z_d}\right) Z_d/\beta}} \quad (5.2)$$

de l'équation de la dissipation anormale de l'énergie

$$\frac{d\xi}{dX} = \Psi \frac{dZ_d}{dX} \quad (5.3)$$

et de l'équation de la charge du grain de poussière

$$\frac{dZ_d}{dX} = \frac{K}{\left[1 + \left(\Psi - \frac{\xi}{Z_d}\right) Z_d/\beta\right]^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{Z_d(1+p\Psi)}{Z_{d0}(1-\Psi)(1+\alpha\Psi)} \right\} \quad (5.4)$$

où

$$Z_0 = -p \frac{aW_e}{2e^2} \quad (5.5)$$

$$p = \frac{f \sqrt{\alpha \frac{m_e}{m_i}} - 1}{f \sqrt{\frac{1}{\alpha} \frac{m_e}{m_i}} + 1} \quad (5.6)$$

$$K = \frac{\pi a^2}{\omega_{pi}} (n_{e0}v_{e0} - n_{i0}v_{i0}) \frac{v_{i0}}{v_{d0}} \quad (5.7)$$

Rappelons que la solution d'équilibre de l'équation de Vlasov du grain de poussière

$$f_d(x, v_x) = f_d(E_d) \quad (5.8)$$

a été construite de telle manière à ce que E_d soit constante du mouvement. A ce propos, E_d a été réécrite sous la forme

$$E_d = \frac{1}{2}m_d v_x^2 + q_d\phi(x) + \chi(x) = \frac{1}{2}m_d v_x^2 + \int_0^\phi q_d d\phi \quad (5.9)$$

5.3 Conditions d'existence des structures solitaires

Nous allons maintenant analyser les conditions d'existence des structures solitaires moyennant la méthode du pseudo-potential de Sagdeev. Pour cela, notons d'abord que

le temps caractéristique du mouvement d'un grain ($a \sim \mu\text{m}$) est de l'ordre de quelques dizaines de milli-secondes alors que le temps de charge d'un grain est typiquement de l'ordre de 10^{-8} s. Le déplacement du grain, durant le temps de charge du grain, est alors négligeable devant l'échelle spatiale de notre problème. Il s'en suit que le processus de la charge peut être traité comme un phénomène local. Le terme convectif de droite qui apparaît dans l'équation de la charge

$$\tilde{v}_d \frac{\partial q_d}{\partial x} = I_e + I_i = -e \int_{v_{\min}}^{\infty} f_e(x, v_x) v_x \sigma_e(v_x, q_d) dv_x + e \int_0^{\infty} f_i(x, v_x) v_x \sigma_i(v_x, q_d) dv_x \quad (5.10)$$

peut être négligé. Nous obtenons alors la relation

$$I_e + I_i \simeq 0 \quad (5.11)$$

et le grain de poussière est constamment porté à un potentiel dit flottant. A partir de l'équation (5.4), nous tirons alors

$$Z_d = Z_{d0} \frac{(1 - \Psi)(1 + \alpha\Psi)}{1 + p\Psi} \quad (5.12)$$

et il devient possible de réécrire (5.2) comme

$$\frac{d^2 \Psi}{dX^2} = -\frac{dV(\Psi)}{d\Psi} \quad (5.13)$$

où $V(\Psi)$ représente le pseudo-potentiel. En multipliant les membres de l'équation (5.2) par $d\Psi/dX$ et en intégrant une fois, nous obtenons la quadrature

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dX} \right)^2 + V(\Psi) = 0 \quad (5.14)$$

avec

$$V(\Psi) = -\frac{4}{f\alpha} \sqrt{1 + \alpha\Psi} - 4\sqrt{1 - \Psi} - \frac{4(f-1)\beta}{fZ_{d0}} \sqrt{1 + (Z_d\Psi - \xi)/\beta} + C \quad (5.15)$$

C est la constante d'intégration. Moyennant la condition à la limite $V(\Psi = 0) = 0$, nous obtenons

$$C = \frac{4}{f\alpha} + 4 + 4\frac{(f-1)\beta}{fZ_{d0}} \quad (5.16)$$

Notons au passage que

$$\frac{d(Z_d\Psi - \xi)}{d\Psi} = \Psi\frac{dZ_d}{d\Psi} + Z_d - \frac{d\xi}{d\Psi} = Z_d \quad (5.17)$$

L'équation (5.14) peut être perçue comme étant "l'intégrale d'énergie" d'une pseudo-particule de masse unité, de position Ψ et de vitesse $d\Psi/dX$ oscillant dans un potentiel $V(\Psi)$. Il est clair à partir de l'équation (5.15) que $V(\Psi) = 0$ et $dV(\Psi)/d\Psi = 0$ à $\Psi = 0$. L'équation (5.14) admettra des solutions solitaires si [62] (i) $(d^2V/d\Psi^2)_{\Psi=0} < 0$, on dira alors que le point à l'origine est instable; (ii) il existe une valeur maximale (ou minimale) non nulle de Ψ , notée Ψ_m , telle que $V(\Psi_m) \geq 0$; (iii) $V(\Psi) < 0$ lorsque Ψ varie de 0 à Ψ_m . La seconde condition indique que la quasi-particule sera réfléchi à $\Psi = \Psi_m$. La troisième condition indique que V doit être un puits de potentiel dans lequel la quasi-particule peut être piégée et entreprendre des oscillations. Tenant compte des conditions d'existence précédentes, nous trouvons que les paramètres de notre plasma doivent satisfaire

$$\frac{2(f-1)}{f}(\alpha - p - 1) - \frac{\alpha}{f} - \frac{Z_{d0}(f-1)}{\beta f} > 0 \quad (5.18)$$

et

$$1 + f\alpha - \sqrt{1 + \alpha} \geq 0 \quad (5.19)$$

5.4 Résultats numériques et discussion

Les équations (5.2), (5.3), et (5.4) sont intégrés numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre $[4 \times 5]$ à pas variable. Les grains de poussière, de masse volumique $\rho_m = 3 \text{ g/cm}^3$, sont immergés dans un plasma d'Hydrogène. Le champ électrique en $X = 0$ est supposé égal à $|E_0| = 10^{-11}$. Les figures (1a) et (1b) exhibent une structure de potentiel localisée dans l'espace à laquelle correspond le potentiel de Sagdeev de la figure (2).

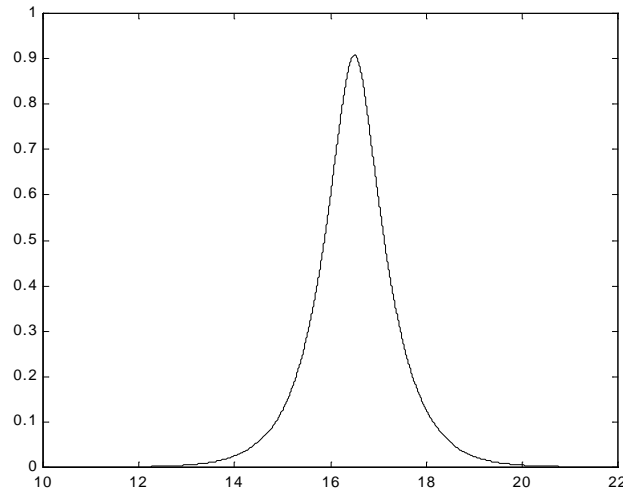


Fig.1a- Solution en forme de soliton pour le potentiel électrostatique Ψ avec $f = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 50$, $a = 3 \mu\text{m}$, $Z_{d0} = 10$ et les conditions initiales $\Psi(X = 0) = 0$, $\left(\frac{d\Psi}{dX}\right)_{X=0} = 10^{-11}$. La tolérance absolue est de 10^{-15} .

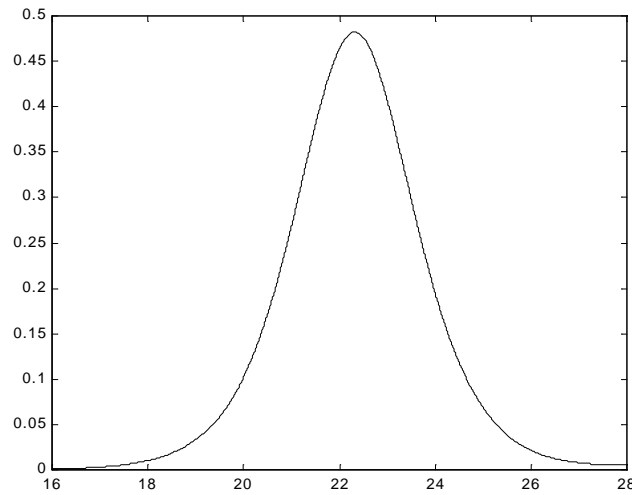


Fig.1b- Mêmes paramètres que précédemment à l'exception de $Z_{d0} = 100$. A mesure que Z_{d0} augmente, l'amplitude du pulse décroît et sa largeur augmente.

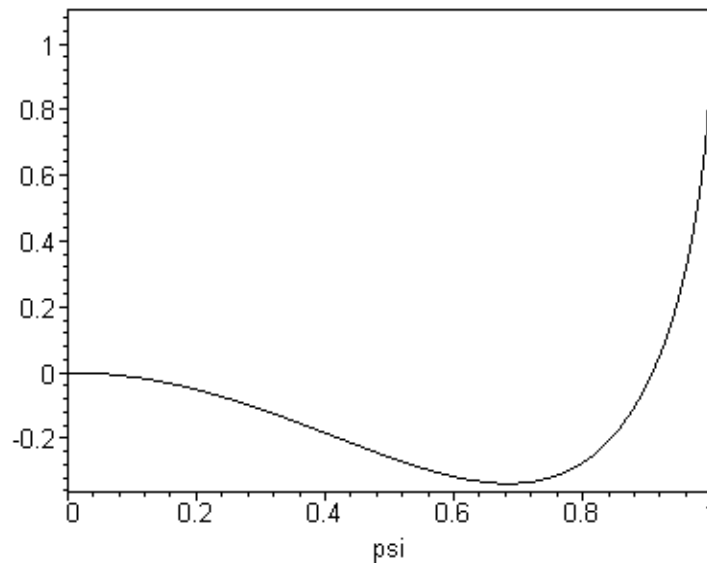


Fig.2- Tracé du potentiel de Sagdeev calculé numériquement à partir de l'équation (5.15) associé à la structure non linéaire localisée de la figure 1a.

La hauteur Ψ_m du soliton est donnée par le point d'intersection de la courbe de $V(\Psi)$ avec l'axe des Ψ . Les paramètres suivants $f = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 50$, $a = 3 \mu\text{m}$, $n_{d0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$, $Z_{d0} = 10$ et 100 ont été choisis de telle sorte à satisfaire les conditions d'existence des solutions solitaires dont la formation peut être attribuée à l'action conjuguée du phénomène de piégeage et la variation de la charge du grain. L'amplitude du pulse décroît à mesure que la charge d'équilibre Z_{d0} du grain augmente. Les figures (3) et (4) représentent le profil des densités électronique (n_e), ionique (n_i) et des grains de poussière (n_d).

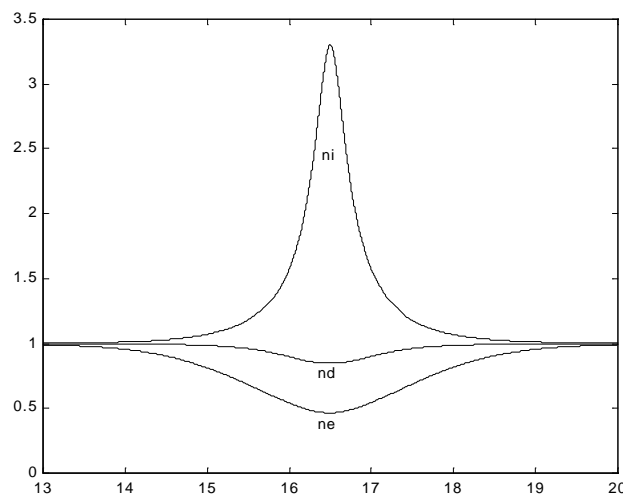


Fig.3- Profil spatial des densités électronique, ionique et des grains de poussière. Les valeurs des paramètres sont celles déjà utilisées pour la figure 1a.

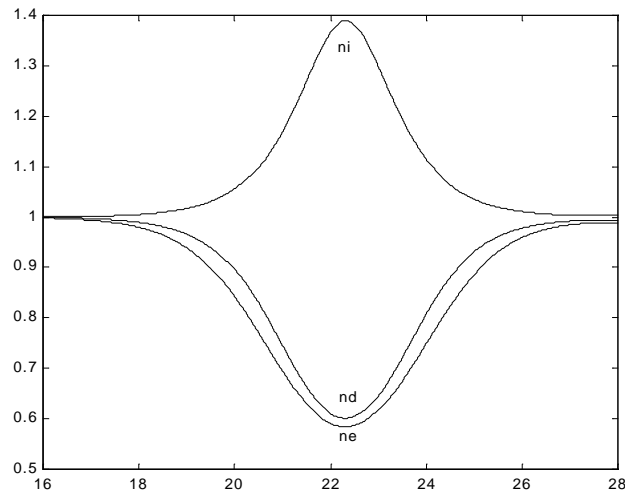


Fig.4- Profil spatial des densités électronique, ionique et des grains de poussière. Les valeurs des paramètres sont celles déjà utilisées pour la figure 1b.

Une augmentation de Z_{d0} induit une localisation de plus en plus prononcée des grains. Cette dernière est due à un équilibre des forces électrostatiques auxquelles sont soumis les grains de poussière. Les figures (5) et (6) illustrent les variations de la charge électrique des grains.

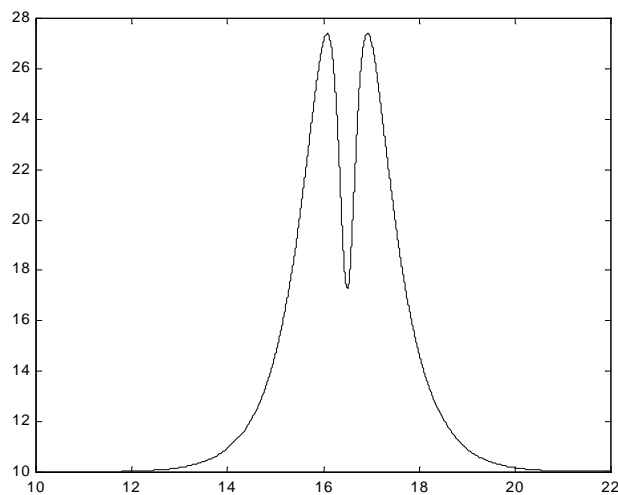


Fig.5- Variations spatiales du nombre de charge Z_d du grain de poussière. Les valeurs des paramètres sont celles déjà utilisées pour la figure 1a.

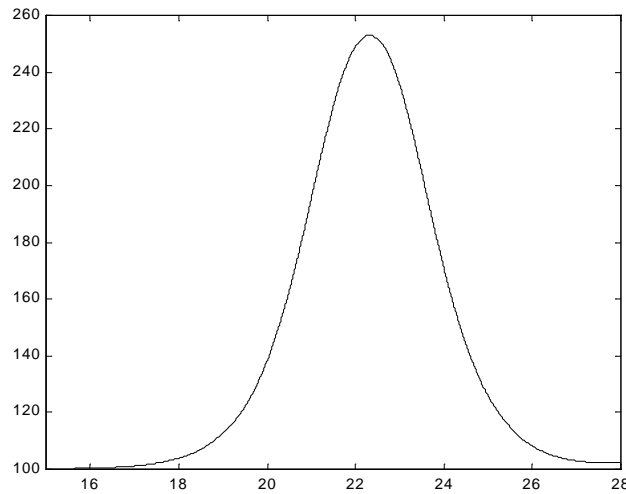


Fig.6- Variations spatiales du nombre de charge Z_d du grain de poussière. Les valeurs des paramètres sont celles déjà utilisées pour la figure 1b.

Celle-ci exhibe différentes formes de structures solitaires : un soliton à bosse unique (fig. 6) et un autre à deux bosses (fig.5). Par ailleurs, nos résultats indiquent qu'à mesure que Z_{d0} augmente, l'amplitude de l'onde ressent les effets de la dissipation anormale dont l'importance est proportionnelle à la vitesse du grain de poussière. L'amplitude de l'onde décroît alors de manière algébrique. Cependant, la conservation de "la masse totale du soliton" donne lieu à la formation et au développement d'une queue (noise tail) dont la hauteur est proportionnelle à Z_{d0} . A mesure que Z_{d0} augmente, le bord d'attaque de la structure localisée (fig. 7) s'éloigne de l'axe des X sans jamais y revenir.

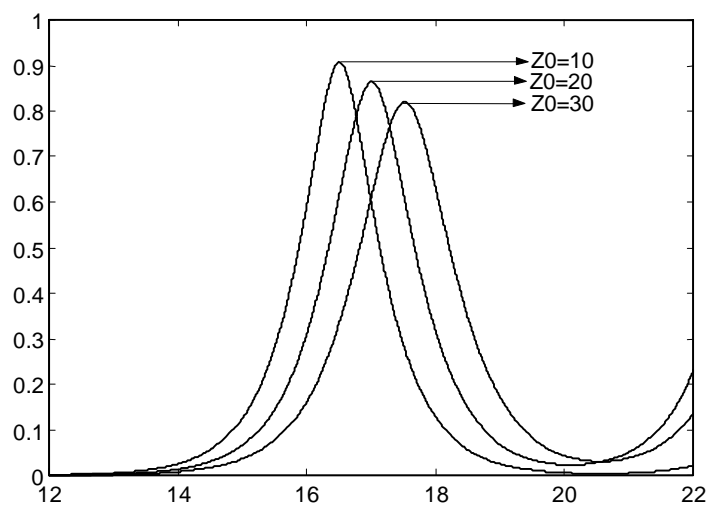


Fig.7- Soliton $\Psi(X)$ avec $f=3$, $\alpha=4$, $\beta=50$, $a=1\mu\text{m}$, $n_{d0}=10^{-5}\text{cm}^{-3}$.

Un effet similaire a d'ailleurs été récemment observé lors de l'analyse des effets non adiabatiques de la variation de la charge sur la génération des ondes de choc acoustiques poussiéreuses [144]. Pour de plus larges valeurs de Z_{d0} , la figure 8 montre que le potentiel non linéaire, à cause de la dissipation anormale, entreprend des oscillations dans l'espace autour d'une certaine valeur de Ψ . La transition des régions supérieures aux régions inférieures se fait de manière oscillatoire. Celle ci représente une onde de choc non collisionnelle dans la mesure où elle ne requiert aucun effet d'amortissement ou de viscosité résultant de collisions entre les grains et le reste des particules. Cependant, à l'inverse des ondes de choc non collisionnelles classiques où la dissipation découle de l'interaction turbulente onde- particule, la dissipation dans le présent cas de figure résulte de l'interaction de courants de charge microscopiques avec la surface des grains de poussière. La figure 9 montre que le pseudo- potentiel correspondant n'est jamais nul quelque soit la valeur positive de Ψ , excluant ainsi toute possibilité de formation de structures solitaires.

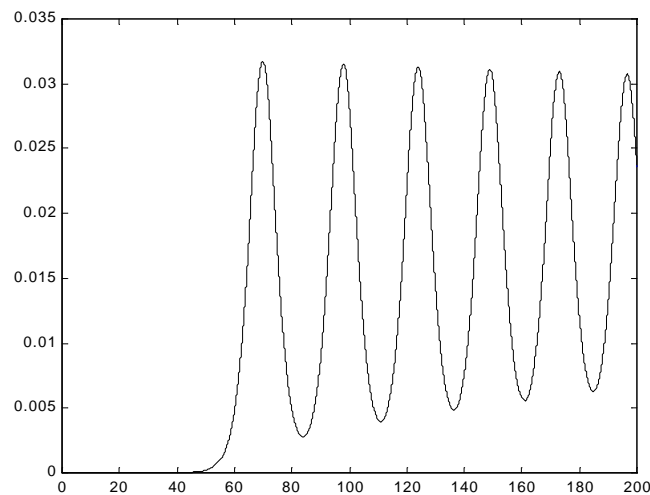


Fig.8- Solution en onde de choc (Ψ, X) avec $Z_{d0}=200$, $W_e=0.68$ eV, $W_i=2.76$ eV,
 $W_d=1.38 \cdot 10^2$ eV.

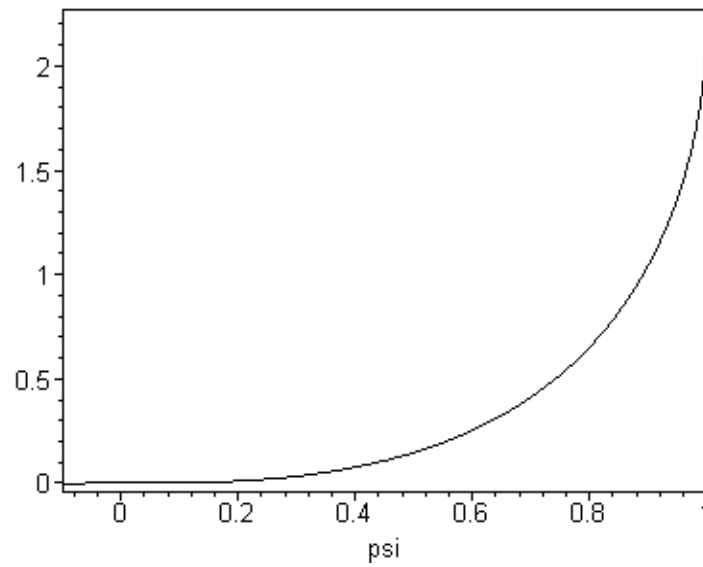


Fig.9- Tracé du potentiel de Sagdeev ($V(\Psi)$, Ψ) associé à l'onde de choc de la figure 8.

La figure (10) représente le profil des densités électronique (n_e), ionique (n_i) et des grains de poussière (n_d). Rappelons que l'importance de la dissipation anormale est intimement liée à la vitesse du grain de poussière. Les figures (11) et (12) indiquent qu'une importante dissipation ($v_{d0} = 149.73\text{cm.s}^{-1}$) donne lieu à des chocs à structure monotone au lieu d'être oscillatoire comme dans le cas des figures (8) et (10) ($v_{d0} = 4.20\text{cm.s}^{-1}$).

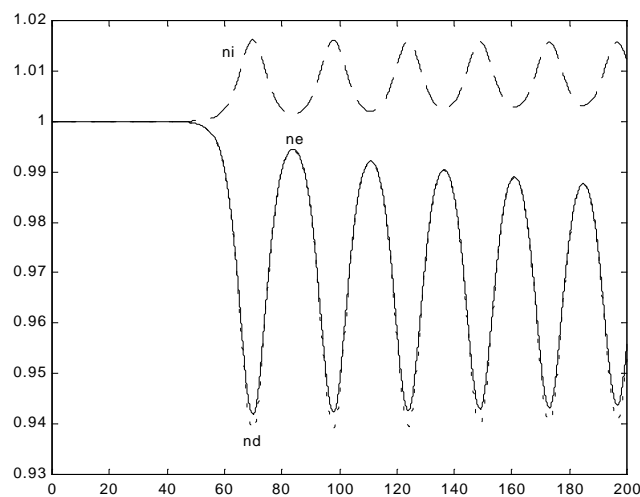


Fig.10- Variations spatiales des densités électronique $n_e(X)$, ionique $n_i(X)$ et des grains de poussière $n_d(X)$. Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour les figures 8 et

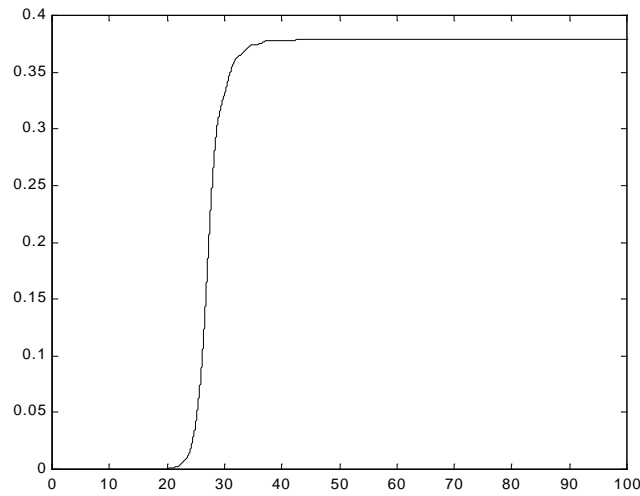


Fig.11- Solution en onde de choc (Ψ, X) avec $Z_{d0} = 50$, $f = 3$, $\alpha = 5$, $\beta = 20$, $a = 0.1$
 μm , $n_{d0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$.

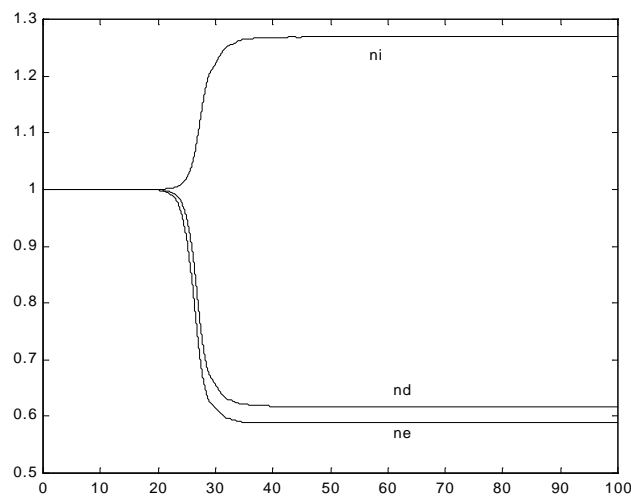


Fig.12- Variations spatiales des densités électronique, ionique et des grains de poussière.

Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 11.

Chapitre 6

Oscillations non linéaires dans un plasma poussiéreux thermique à charge variable

6.1 Présentation physique du problème

Au cours des chapitres précédents, nous avons étudié l'influence de la variation de la charge des grains de poussière sur les modes BGK (Bernstein-Greene-Kruskal) propres à un plasma froid et poussiéreux. La conclusion principale de notre analyse est que la fluctuation de la charge peut causer une dispersion et une dissipation, dites anormales, qui, de concert avec les non linéarités, contribuent à la formation de structures cohérentes (solitons) et dissipatives (ondes de choc). Dans le présent chapitre, on se propose d'incorporer les effets thermiques et voire les résultats et conséquences qui peuvent en découler [145].

6.2 Equations de base du modèle

Les modes non linéaires, stationnaires et de type électrostatique d'un plasma non magnétisé et non collisionnel sont gouvernés par le système Vlasov-Poisson [76]

$$v \frac{\partial f_j(x, v)}{\partial x} + \frac{q_j}{m_j} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \frac{\partial f_j(x, v)}{\partial v} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -4\pi \sum_{j=e,i,d} q_j \int f_j(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (6.2)$$

où $j = e, i, d$ désigne les électrons, les ions et les grains de poussière. La solution générale de (6.1) est donnée par

$$f_j = f_j(E_j) \quad (6.3)$$

où

$$E_{e,i} = \frac{1}{2} m_{e,i} v^2 \mp e\phi \quad (6.4)$$

et

$$E_d = \frac{1}{2} m_d v^2 + \int_0^\phi q_d d\phi \quad (6.5)$$

Les grains de poussière de rayon a et de charge $q_d = -eZ_d$, sont supposés être un faisceau de particules froides décrites par

$$f_d(v) = n_{d0} \frac{v_{j0}}{\tilde{v}_d} \delta(v - \tilde{v}_d) \quad (6.6)$$

où

$$\tilde{v}_d = v_{d0} \left(1 + \frac{2e}{m_d v_{d0}^2} \int_0^\phi Z_d d\phi \right)^{1/2} \quad (6.7)$$

Les électrons de température T_e et les ions de température T_i sont distribués selon la loi de Maxwell-Boltzmann [146]

$$f_j(\mathbf{v}, \mathbf{v}_{j0}) = n_j (\pi v_{th,j}^2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{j0})^2}{v_{tj}^2} \right] \quad (6.8)$$

où $v_{tj} = (2T_j/m_j)^{1/2}$ et \mathbf{v}_{j0} représentent respectivement la vitesse thermique et celle à l'équilibre du faisceau électronique ($j = e$) et ionique ($j = i$).

$$n_j = \int f_j(\mathbf{v}, \mathbf{v}_{j0}) d\mathbf{v} = n_{j0} \exp\left(-\frac{q_j \phi}{T_j}\right) \quad (6.9)$$

désigne la densité de particules de l'espèce j ($j = e, i$) et n_{j0} sa valeur non perturbée correspondante. Les trois faisceaux sont supposés être dans la même direction. Les distributions f_e et f_i sont en réalité des maxwelliennes décalées par rapport à l'origine. Les électrons et les ions qui se trouvent dans le voisinage immédiat du grain de poussière sont supposés être en équilibre thermodynamique local même lorsque des fluctuations de charge ou de potentiel sont présentes. L'effet de ces dernières est comptabilisé de manière passive à travers les densités n_e et n_i et le potentiel électrostatique ϕ qui apparaît dans les fonctions de distributions prédéterminées f_e et f_i . Moyennant les variables adimensionnelles suivantes

$$\Psi = \frac{e\phi}{T_i} \quad (6.10)$$

$$X = \frac{x}{\lambda_{Di}} \quad (6.11)$$

où $\lambda_{Di} = (T_i/4\pi n_{i0}e^2)^{1/2}$ est la longueur de Debye ionique, l'équation de Poisson devient

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} = -\exp(-\Psi) + \frac{1}{f} \exp(\alpha\Psi) + \frac{(f-1)}{f\sqrt{1+\chi/\beta}} \frac{Z_d}{Z_{d0}} \quad (6.12)$$

avec $f = n_{i0}/n_{e0}$, $\alpha = T_i/T_e$ et $\beta = m_d v_{d0}^2/2T_i$. χ , l'énergie "potentielle" du grain, est donnée par

$$\frac{d\chi}{dX} = Z_d \frac{d\Psi}{dX} \quad (6.13)$$

$$\tilde{v}_d \frac{\partial q_d}{\partial x} = I_e + I_i \quad (6.14)$$

Les courants de charge électronique I_e et ionique I_i sont définis par

$$I_e = -e \int_{v_{\min}}^{\infty} \sigma_e(v, Z_d) v f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v \quad (6.15)$$

$$I_i = e \int_0^{\infty} \sigma_i(v, Z_d) v f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v \quad (6.16)$$

où $\sigma_j = \pi a^2 (1 + 2q_j Z_d e / C_g m_j v^2)$ est la section efficace de collision entre un grain de poussière et une particule d'espèce j , $C_g = a(1 + a/\lambda_{De}) \simeq a$ la capacité du grain et $v_{\min} = (2e^2 Z_d / am_e)^{1/2}$ la vitesse minimale que doit avoir un électron pour vaincre la barrière de potentiel coulombienne du grain de poussière. En utilisant les équations (6.15)-(6.16) et en supposant que la vitesse du grain est plus petite que v_{j0} et v_{tj} , nous obtenons les courants de charge suivants

$$I_i = 4\sqrt{\pi} a^2 e n_{i0} v_{i0} \exp\left(-\frac{e\phi}{T_i}\right) A(Z) \quad (6.17)$$

$$I_e = -4\sqrt{\pi} a^2 e n_{e0} v_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) B(Z) \quad (6.18)$$

où

$$\begin{aligned} A(Z) &= \frac{v_{ti}}{v_{i0}} \exp\left(-\frac{v_{i0}^2}{v_{ti}^2}\right) + \sqrt{\pi} \left(1 + \frac{v_{ti}^2}{2v_{i0}^2} + \frac{2e^2 Z_d}{am_i v_{i0}^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{v_{i0}}{v_{ti}}\right) \\ B(Z) &= \frac{v_{te}}{2v_{e0}} \left(1 + \sqrt{\frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}}\right) \exp\left[-\frac{v_{e0}^2}{v_{te}^2} \left(1 - \sqrt{\frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{v_{te}}{2v_{e0}} \left(1 - \sqrt{\frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}}\right) \exp\left[-\frac{v_{e0}^2}{v_{te}^2} \left(1 + \sqrt{\frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{v_{te}^2}{v_{e0}^2} + 1 - \frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}\right) \times \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{v_{e0}}{v_{te}} \left(1 + \sqrt{\frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{erf}\left[\frac{v_{e0}}{v_{te}} \left(1 - \sqrt{\frac{2e^2 Z_d}{am_e v_{e0}^2}}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

et

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-x^2) dx$$

est la fonction erreur. Notons au passage que les expressions des courants précédents ont été obtenues en utilisant les coordonnées sphériques (v, θ, ϕ) [147]

$$I_j = 2\pi q_j \int \int f_j(v, \theta) v^3 \sin(\theta) d\theta dv \quad (6.20)$$

L'équation de la charge, dans le système des variables normalisées, est alors donnée par

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{K}{\sqrt{1 + \chi/\beta}} \left[-A(Z) \exp(-\Psi) + \frac{v_{e0}}{fv_{i0}} B(Z) \exp(\alpha\Psi) \right] \quad (6.21)$$

où

$$K = \frac{2a^2 v_{i0}}{ev_{d0}} (T_i n_{i0})^{1/2} \quad (6.22)$$

A l'équilibre ($\Psi = 0$), l'équation (6.22) requiert

$$A(Z_0) = B(Z_0) \frac{v_{e0}}{fv_{i0}} \quad (6.23)$$

Dans la simulation qui va suivre, la valeur de f sera déduite à partir de (6.23) après avoir préalablement choisi le reste des paramètres.

6.3 Existence des solitons

Le temps caractéristique du mouvement d'un grain de poussière dont les dimensions sont de l'ordre du micron est de quelques dizaines de milli-secondes. Le temps caractéristique du phénomène de charge du grain est de l'ordre de 10^{-8} s. Par conséquent, le déplacement du grain au cours du processus de charge est négligeable devant l'échelle spatiale de notre problème. Il s'en suit que le phénomène de charge peut être traité comme un phénomène local et le terme convectif de l'équation (6.14) peut être négligé pour obtenir

$$I_e + I_i \simeq 0 \quad (6.24)$$

Les grains de poussière sont alors constamment portés au potentiel flottant. En supposant que les vitesses de dérive à l'équilibre des électrons et des ions sont beaucoup plus grandes que leurs vitesses thermiques respectives, $v_{ij} \ll v_{j0}$, nous déduisons de (6.19), (6.21) et (6.24) la relation

$$Z_d = \frac{k \exp[(1 + \alpha)\Psi] - 1}{a_2 + ka_1 \exp[(1 + \alpha)\Psi]} \quad (6.25)$$

avec $k = v_{e0}/fv_{i0}$, $a_1 = 2e^2/C_g m_e v_{e0}^2$ et $a_2 = 2e^2/C_g m_i v_{i0}^2$. Il devient alors possible de réécrire l'équation de Poisson (6.12) sous la forme

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} = -\frac{dV(\Psi)}{d\Psi} \quad (6.26)$$

où

$$V(\Psi) = -\exp(-\Psi) - \frac{1}{f\alpha} \exp(\alpha\Psi) - 2\beta \frac{f-1}{fZ_{d0}} \sqrt{1 + \chi/\beta} + 1 + \frac{1}{f\alpha} + 2\beta \frac{f-1}{fZ_{d0}} \quad (6.27)$$

représente le pseudo-potentiel ou potentiel de Sagdeev et

$$\chi = \int_0^\Psi Z_d d\Psi = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2 (1 + \alpha)} \ln [a_2 + k a_1 \exp((1 + \alpha)\Psi)] - \frac{\Psi}{a_2} - \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2 (1 + \alpha)} \ln (a_2 + k a_1) \quad (6.28)$$

est une énergie potentielle introduite pour contrebalancer la dissipation due à la variation de la charge du grain de poussière. En multipliant les deux membres de (6.26) par $d\Psi/dX$ et en intégrant une fois, nous obtenons la quadrature

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dX} \right)^2 + V(\Psi) = 0 \quad (6.29)$$

L'équation (6.29) peut être perçue comme étant "l'intégrale d'énergie" d'une pseudo-particule de masse unité, de vitesse $d\Psi/dX$ et de position Ψ , oscillant dans un potentiel $V(\Psi)$. Les équations (6.27) et (6.28) de concert avec

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\Psi} = & \exp(-\Psi) - \frac{\exp(\alpha\Psi)}{f} - \frac{f-1}{fZ_{d0}} \left(1 + \frac{\chi}{\beta}\right)^{-1/2} \frac{d\chi}{d\Psi} = \\ & \exp(-\Psi) - \frac{\exp(\alpha\Psi)}{f} - \frac{f-1}{fZ_{d0}} \left(1 + \frac{\chi}{\beta}\right)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{a_2} \frac{(a_1 + a_2) k \exp[(1 + \alpha)\Psi]}{a_2 + k a_1 \exp[(1 + \alpha)\Psi]} - \frac{1}{a_2} \right\} \end{aligned}$$

indiquent que $V(\Psi)$ et $dV(\Psi)/d\Psi$ s'annulent en $\Psi = 0$. Remarquons qu'à l'équilibre ($\Psi = 0$), l'équation (6.25) devient

$$Z_{d0} = \frac{k-1}{a_2 + k a_1} \quad (6.30)$$

L'équation (6.29) admet une solution en onde solitaire si [62] (i) $(d^2V/d\Psi^2)_{\Psi=0} < 0$; (ii) il existe une valeur maximale (ou minimale) Ψ_m de Ψ pour laquelle $V(\Psi_m) \geq 0$ et (iii) $V(\Psi) < 0$ lorsque Ψ varie entre 0 et Ψ_m . Les conditions (i)-(iii) imposent aux paramètres du plasma de satisfaire

$$-1 - \frac{\alpha}{f} + \frac{(f-1)}{2fZ_{d0}\beta} \left[\frac{(a_1+a_2)k}{(a_2+ka_1)a_2} - \frac{1}{a_2} \right]^2 - \frac{(f-1)}{fZ_{d0}} \left[\frac{(a_1+a_2)(1+\alpha)k}{(a_2+ka_1)a_2} - \frac{(a_1+a_2)(1+\alpha)k^2a_1}{(a_2+ka_1)^2a_2} \right] < 0 \quad (6.31)$$

et

$$V(\Psi_c) \geq 0 \quad (6.32)$$

où Ψ_c est la valeur maximale ou minimale de Ψ pour laquelle $1 + \chi/\beta > 0$. Ψ_c peut être déterminée en résolvant l'équation transcendantale $1 + \chi/\beta = 0$. Dans la limite des faibles amplitudes, $\Psi \ll 1$, un développement limité en Ψ permet de réécrire (6.27) sous la forme

$$V(\Psi) = A_1\Psi + A_2\Psi^2 + A_3\Psi^3 + O(\Psi^3) \quad (6.33)$$

avec

$$A_1 = 1 - \frac{1}{f} - \frac{f-1}{fZ_0} \left[\frac{(a_1+a_2)k}{a_2(a_2+ka_1)} - \frac{1}{a_2} \right] = 0 \quad (6.34)$$

$$A_2 = \frac{2\beta(f-1)}{fZ_{d0}} \left[-\frac{(1+\alpha)(a_1+a_2)k}{4\beta(a_2+ka_1)^2} + \frac{(k-1)^2}{8(a_2+ka_1)^2\beta^2} \right] - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2f} \quad (6.35)$$

$$A_3 = \frac{2\beta(f-1)}{fZ_{d0}} \left[\frac{(ka_1-a_2)(a_1+a_2)k(1+\alpha)^2}{12\beta(a_2+ka_1)^3} + \frac{k(k-1)(1+\alpha)(a_1+a_2)}{8\beta^2(a_2+ka_1)^3} - \frac{(k-1)^3}{16(a_2+ka_1)^3\beta^3} \right] - \frac{\alpha^2}{6f} + \frac{1}{6} \quad (6.36)$$

La solution de (6.29) est alors donnée par

$$\begin{aligned} \Psi(X) &= \Psi_M \operatorname{sech}^2[(X-X_0)/\Delta] = -\frac{A_2}{A_3} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{-\frac{A_2}{2}}(X-X_0) \right] \\ &= \Psi_M \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{A_3}{2}}\Psi_M(X-X_0) \right] \end{aligned} \quad (6.37)$$

Cette dernière représentera une onde solitaire stationnaire de faible amplitude à condition que $A_2 < 0$. La forme (6.37) du potentiel se distingue du soliton K- dV habituel donné

par

$$\Psi(X) = \Psi_M \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{1}{6}} \Psi_M (X - X_0) \right] \quad (6.38)$$

de par la nature de l'argument de la fonction sech. Notons qu'en l'absence des grains de poussière, $f = 1$, l'équation (6.37) se réduit à

$$\Psi(X) = \frac{3}{1 - \alpha} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{1 + \alpha}}{2} (X - X_0) \right] = \frac{3}{1 - T_i/T_e} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{1 + T_i/T_e}}{2} (X - X_0) \right] \quad (6.39)$$

Si maintenant nous retenons des termes jusqu'à l'ordre Ψ^4 , le développement limité en Ψ permet de réécrire (6.27) sous la forme

$$V(\Psi) = A_1 \Psi + A_2 \Psi^2 + A_3 \Psi^3 + A_4 \Psi^4 + 0(\Psi^4) \quad (6.40)$$

avec

$$\begin{aligned} A_4 = & -\frac{\alpha^3}{24f} + \frac{2\beta(f-1)}{fZ_0} \left[-\frac{(a_2^2 - 4a_1a_2 + k^2a_1^2)(1+\alpha)^3(a_1+a_2)k}{48\beta(a_2+ka_1)^4} \right. \\ & - \frac{(k-1)(ka_1-a_2)(a_1+a_2)k(1+\alpha)^2}{24(a_2+ka_1)^4\beta^2} + \frac{(1+\alpha)^2(a_1+a_2^2)k^2}{32\beta^2(a_2+ka_1)^4} \\ & \left. - \frac{3(k-1)^2(1+\alpha)(a_1+a_2)k}{32(a_2+ka_1)^4\beta^3} + \frac{5(k-1)^4}{128(a_2+ka_1)^4\beta^4} \right] - \frac{1}{24} \end{aligned} \quad (6.41)$$

En intégrant l'équation (6.29), nous obtenons [148]

$$\begin{aligned} \Psi(X) = & \frac{1}{\left(\frac{A_3^2}{4A_2^2} - \frac{A_4}{A_2}\right)^{1/2} \cosh[\sqrt{-2A_2}(X - X_0)] - \frac{A_3}{2A_2}} = \\ & \frac{1}{\left(\frac{A_3^2}{4A_2^2} - \frac{A_4}{A_2}\right)^{1/2} [2 \cosh^2(\sqrt{-2A_2}(X - X_0)/2) - 1] - \frac{A_3}{2A_2}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

La solution (6.42) représente une onde solitaire stationnaire de petite amplitude à condition bien sûr que $A_2 < 0$ et $\frac{A_3^2}{4A_2^2} > \frac{A_4}{A_2}$. A des fins de comparaison, nous avons représenté la variation spatiale de Ψ pour plusieurs valeurs du paramètre $\alpha = T_i/T_e$ sur la figure 1a. Le potentiel électrostatique Ψ exhibe une structure spatialement localisée comme l'indique d'ailleurs la structure en puits du potentiel de Sagdeev représentée sur la figure 1b. Chaque pic de Ψ correspond à une valeur nulle de $V(\Psi)$. Les paramètres suivants

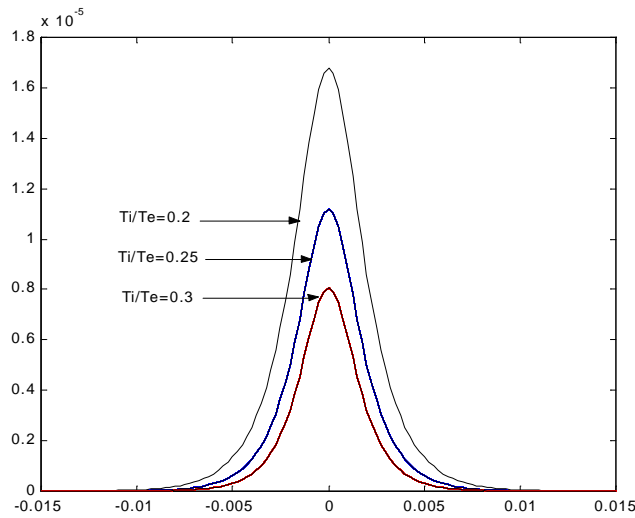


Fig.1a- Onde solitaire (Ψ, X) de petite amplitude pour différentes valeurs de α .

$Z_{d0} = 10$, $T_e = 0.5\text{eV}$, $a = 6\mu\text{m}$, $\rho_m = 3\text{g.cm}^{-3}$, $n_{d0} = 10^5\text{cm}^{-3}$, $v_{e0} = 100v_{te}$, $v_{i0} = 100v_{ti}$ et $v_{d0} = 0.1\text{cm.s}^{-1}$ ont été choisis de manière à satisfaire les conditions d'existence des structures solitaires. A mesure que α (en fait T_i puisque T_e est fixée à 0.5eV) augmente, la hauteur et la largeur du soliton décroissent. Pour une valeur donnée de T_e , un accroissement de T_i donne lieu à une diminution de Z (Fig. 1c). En fait, lorsque T_i augmente, le grain de poussière collecte plus d'ions positifs réduisant ainsi la charge négative nette résidant sur sa surface. Une augmentation de Z_{d0} (Figs. 2a-2b) entraîne un accroissement de la largeur du soliton alors que sa hauteur est insensible aux valeurs de Z_{d0} . Le profil de l'onde solitaire (Figs. 3a-3b) et la charge du grain (Fig. 3c) dépendent sensiblement de la dynamique des grains de poussière : l'amplitude et la largeur du soliton croissent avec v_{d0} alors que Z_d augmente dans la région de localisation du soliton. Comme l'indiquent les figures 4a et 4b, l'amplitude de l'onde solitaire augmente avec a alors que sa largeur se rétrécit.

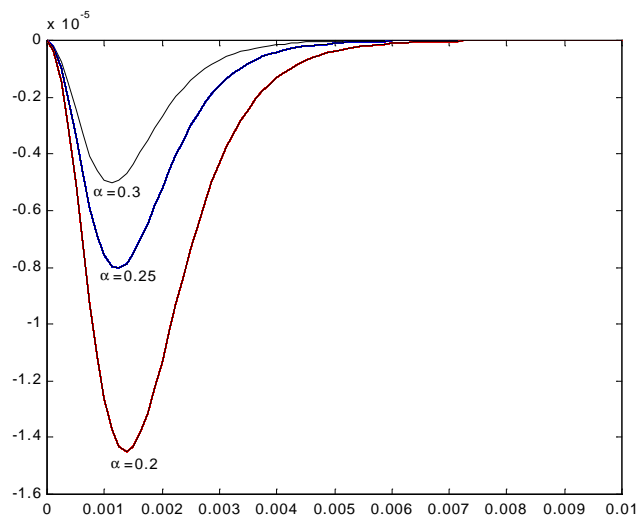
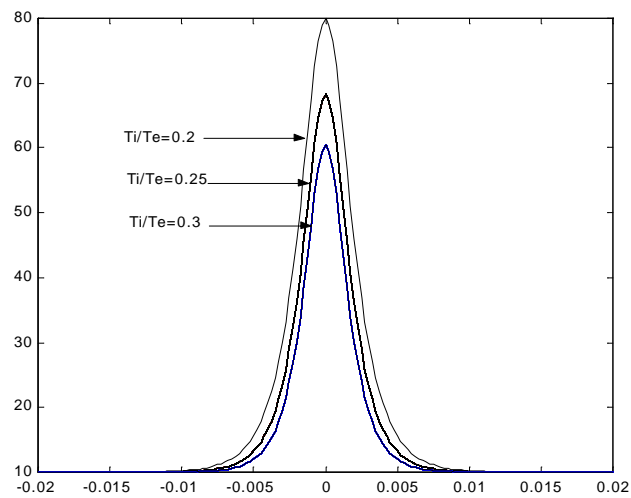


Fig.1b- Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure1a.

Fig.1c- Tracé de (Z, X) pour différentes valeurs de α .

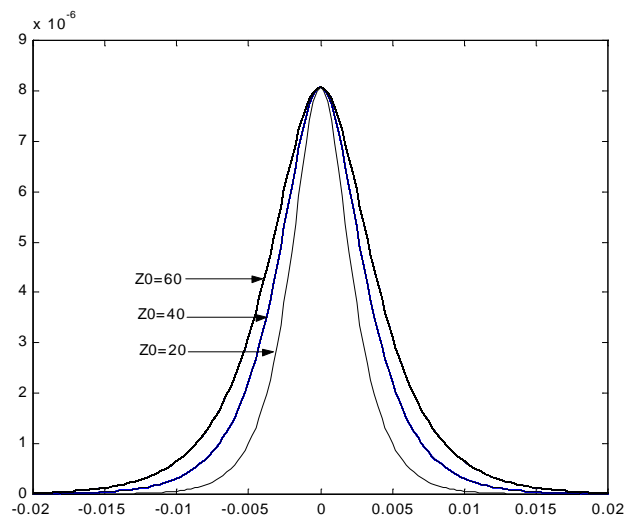


Fig.2a- Onde solitaire de petite amplitude (Ψ, X) pour différentes valeurs de Z_{d0} .

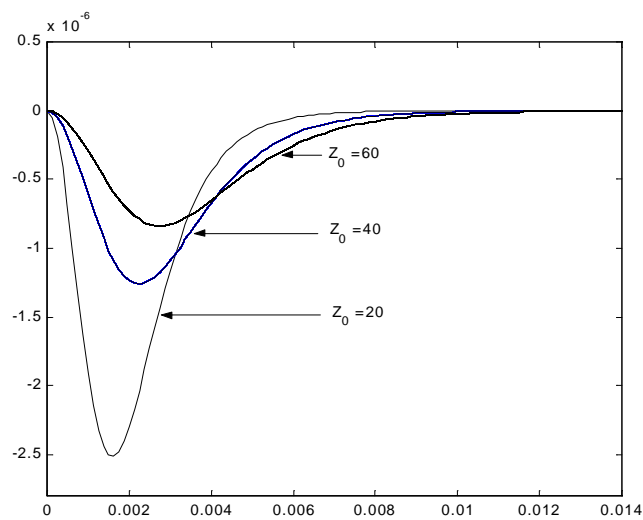


Fig.2b- Tracé du potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 2a.

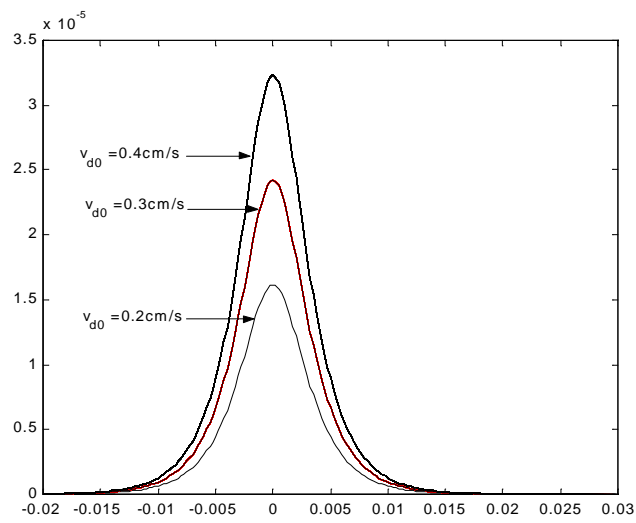


Fig.3a- Onde solitaire de petite amplitude (Ψ, X) pour différentes valeurs de v_{d0} .

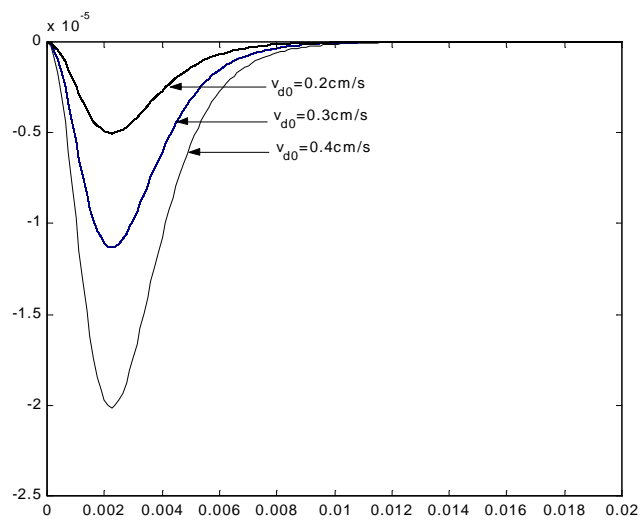
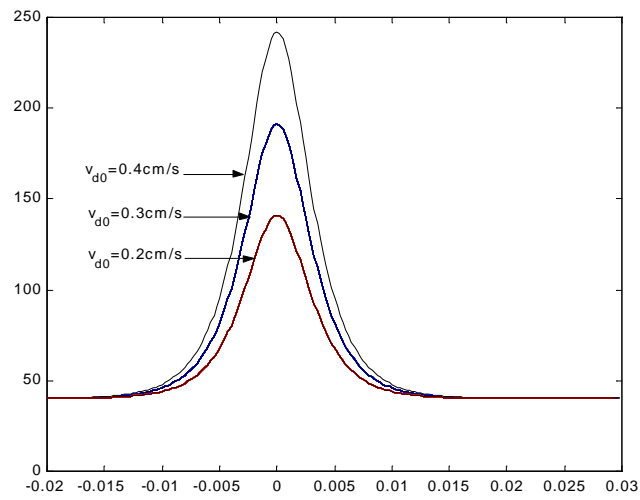
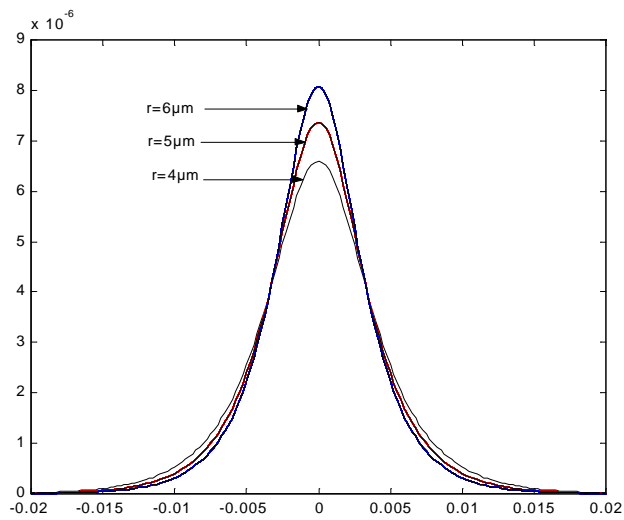


Fig.3b- Tracé du potentiel de Sagdeev associé à la figure 3a.

Fig.3c- Tracé de (Z, X) pour plusieurs valeurs de Z_{d0} .Fig.4a- Onde solitaire de petite amplitude (Ψ, X) pour plusieurs valeurs du rayon a (noté r) du grain de poussière.

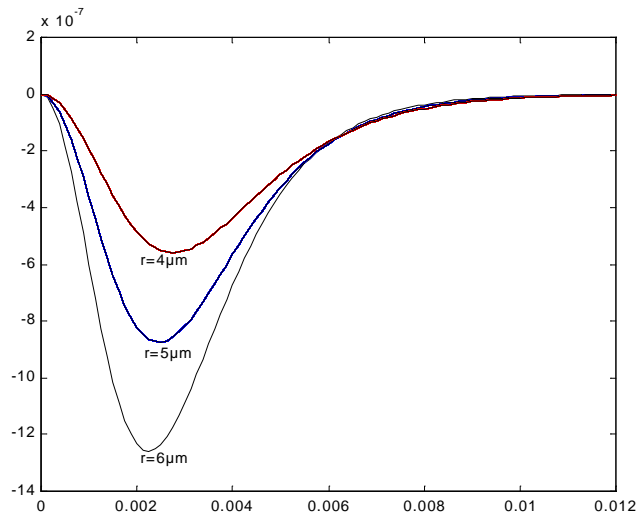


Fig.4b- Tracé du potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 4a.

6.4 Résultats numériques et discussion

L'intégration numérique des équations (6.12), (6.13) et (6.21) est réalisée grâce à la méthode de Runge- Kutta d'ordre $[4 \times 5]$ à pas variable. Cette dernière semble être la mieux indiquée pour le traitement des problèmes dits "raides" ou "stiff problems". Les grains de poussière, de masse volumique $\rho_m = 3 \text{ g/cm}^3$, sont immergés dans un plasma d'hydrogène. Une solution oscillatoire amortie est d'abord obtenue pour $Z_{d0} = 30$, $a = 0.2 \mu\text{m}$, $n_{d0} = 2 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ eV}$, $T_i = 0.02 \text{ eV}$ et de grandes vitesses ioniques et électroniques. Les électrons sont quelque peu appauvris ($f = 206$). Les valeurs d'équilibre finales du potentiel et de la charge ($\Psi = 0.0023$, $Z_d = 30.0814$) sont différentes de leurs valeurs initiales ($\Psi_0 = 0$, $Z_{d0} = 30$). En réalité et comme nous l'avons déjà montré dans le cas du modèle froid, le système, sous l'effet de la perturbation de l'onde, évolue vers un nouvel état d'équilibre quasi- neutre. Ce mécanisme de dissipation anormale, qui trouve son origine dans la variation de la charge du grain de poussière, peut agir concurremment avec les non linéarités du système et donner naissance à des structures dissipatives. La figure 1 montre les variations du potentiel d'une onde de choc : en amont du front de l'onde, la charge du grain décroît et le potentiel est négatif. Les profils des densités des trois espèces sont donnés sur la figure 2.

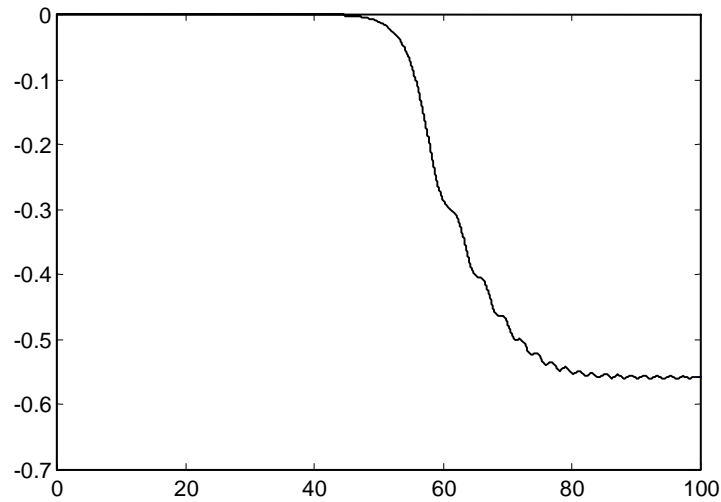


Fig.1- Solution en onde de choc pour le potentiel électrostatique (Ψ, X) avec $Z_{d0} = 31$, $a = 0.1 \mu\text{m}$, $n_{d0} = 10^2 \text{ cm}^{-3}$, $v_{d0} = 2 \text{ cm.s}^{-1}$, $T_e = 10^{-2} \text{ eV}$, $T_i = 10^{-3} \text{ eV}$, $v_{e0} = 30v_{te}$, $v_{i0} = 10v_{ti}$. Les conditions initiales sont $\Psi(X = 0) = 0$ et $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = -10^{-11}$. La tolérance absolue est de 10^{-15} . La fugacité (voire texte) est de 0.0022.

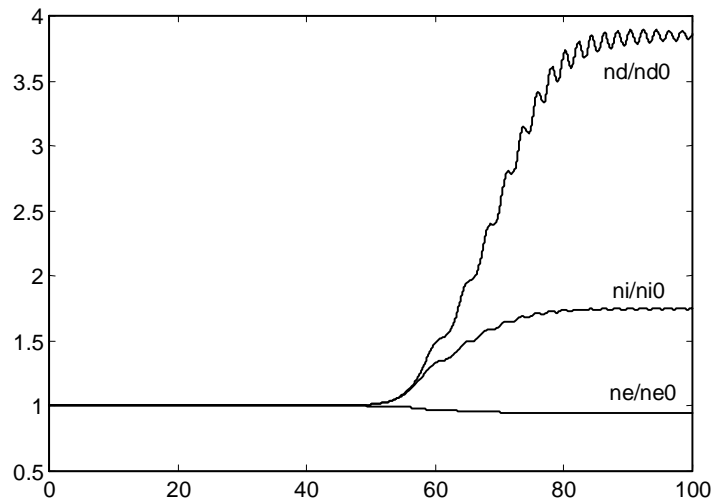


Fig.2- Variations spatiales des densités électronique n_e , ionique n_i et des grains de poussière n_d inhérentes à la solution en onde de choc. Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 1.

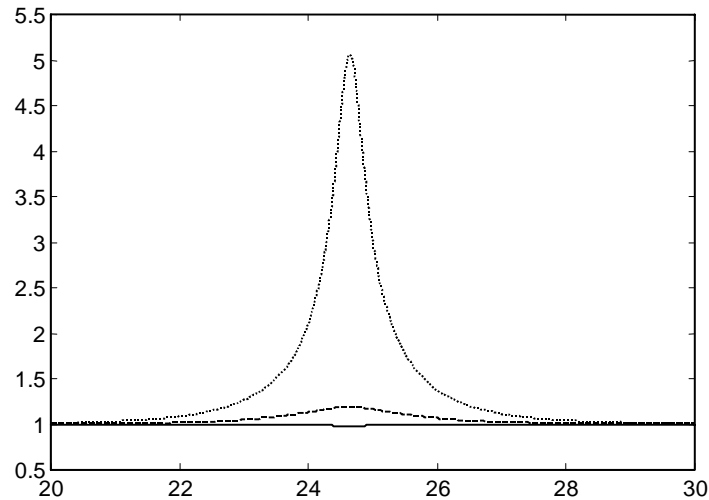


Fig.3- Profils des densités électronique n_e , ionique n_i et des grains de poussière n_d (de haut vers le bas) inhérentes à la solution en onde solitaire avec $Z_{d0} = 350$, $a = 6 \mu\text{m}$, $n_{d0} = 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $v_{d0} = 0.1 \text{ cm.s}^{-1}$, $T_e = 2 \text{ eV}$, $T_i = 0.2 \text{ eV}$, $v_{e0} = 4v_{te}$, $v_{i0} = 0.5v_{ti}$. Les conditions initiales sont $\Psi(X = 0) = 0$ et $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = -10^{-11}$. La tolérance absolue est de 10^{-15} . La fugacité (voire texte) est de 2.37.

La variation de la charge peut aussi donner lieu à des effets dispersifs anormaux qui, de concert avec les non linéarités du système, donnent naissance à des structures solitaires (Fig.3). Nous allons maintenant tenter de déceler les différences éventuelles entre les deux modèles de plasma jusque là considérés : le modèle froid des chapitres précédents et le modèle thermique de la présente analyse. A ce propos, nos résultats révèlent que le modèle thermique du présent chapitre n'admet et n'entretient que des structures localisées auxquelles sont associés des potentiels constamment négatifs. Un effet similaire a déjà été rapporté par Mamun et al. [62] dans le cas d'un plasma poussiéreux électroniquement appauvri et dont les ions sont distribués selon la loi de Maxwell- Boltzmann. De plus, la charge du grain de poussière ne fait que diminuer. En dépit de tous nos efforts, nous n'avons à aucun moment réussi à trouver de potentiel positif ou un cas de solution avec augmentation de la charge du grain. Le fait que cela est peut être du à la grande valeur de f ($f \gtrsim 200$), c'est à dire le processus de charge est principalement du aux ions, a été d'emblée écarté car les potentiels négatifs et la diminution de la charge du grain persistent même pour les faibles valeurs de f . Ce sont donc là les premières différences avec le modèle froid qui admet, comme nous l'avons déjà observé, des potentiels positifs et

négatifs et dont la charge des grains de poussière peut aussi bien augmenter que diminuer. On peut comprendre l'absence de potentiels positifs dans notre présent modèle à travers l'équation de la charge (6.21). En réalité, A and B sont toujours positifs. De plus, dans le cas d'un potentiel positif, le terme négatif qui apparaît dans l'équation de la charge est tellement petit que le taux de variation de la charge est constamment positif. Cet effet est plus prononcé dans le cas du présent modèle de plasma à cause de la non linéarité exponentielle. Une autre différence entre les solutions localisées des deux modèles est la suivante : dans le modèle froid, la densité des grains de poussière suit la densité des électrons alors que dans le présent modèle la densité des grains suit celle des ions. Ceci est principalement dû à la longueur de Debye fini et donc à l'effet d'écrantage des grains de poussière de la part des ions. Comme noté dans les chapitres précédents, les présents modes ne sont dus qu'à la variation de la charge. Avant de clore le présent chapitre, nous voudrions établir une certaine analogie avec les récents travaux de Rao [149] qui a défini un paramètre adimensionnel appelé fugacité poussiéreuse $\left(4\pi a n_{d0} \lambda_{De} \lambda_{Di} / \sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}\right)$ et qui mesure le degré de remplissage des grains de poussière. Dans le régime des grandes fugacités, le plasma admet l'existence d'un nouveau mode de très basse fréquence appelé "onde de Coulomb poussiéreuse (dust-Coulomb wave)" (DCW) et qui n'est entretenu que par la fluctuation de la charge du grain de poussière. Dans notre présent travail, toutes les solutions données sont caractérisées par une très faible valeur de la fugacité ($0.001 \rightarrow 2$) ce qui nous amène à conclure que nos présents modes peuvent être identifiés comme étant des DCW. Les ions et les électrons sont Boltzmanniens dans les deux modèles. Cependant, notre traitement, en plus d'être non linéaire, se distingue de celui de Rao par la présence de faisceaux de particules et de grains de poussière froids. Pour terminer, notons que les équations de base de notre modèle ne peuvent décrire de manière adéquate les modes associés aux particules piégés. En fait, au cours du prochain chapitre nous utiliserons la méthode de Schamel [150], [151], [152] pour construire des solutions d'équilibre et qui permet l'incorporation de distributions plus physiques tout en étant aussi général que la méthode BGK bien connue. Cette méthode, dite méthode du potentiel, décrit les solutions d'équilibre des équations de Vlasov en termes de constantes du mouvement et donne le potentiel self-consistant en résolvant l'équation de Poisson. D'ailleurs, dans un article récent, Schamel et al. [99] ont rapporté l'existence, dans la limite des faibles

amplitudes, d'ondes acoustiques poussiéreuses avec des vitesses de phase proches de la vitesse thermique des grains de poussière. Ces modes ne peuvent être obtenus par notre analyse qui considère des grains de poussière froids.

Chapitre 7

Oscillations électrostatiques non linéaires dans un plasma poussiéreux en présence d'électrons piégés non isothermiques

7.1 Présentation Physique du problème

Dans les chapitres précédents, nous avons rapporté l'existence possible d'un nouveau mode poussiéreux que nous avons appelé mode BGK poussiéreux (DBGK). Nous avons alors étudié ses propriétés non linéaires aussi bien dans un plasma électroniquement appauvri que dans un plasma à charge variable. Quoique notre modèle peut paraître restrictif, car "démuni" de tout mouvement thermique, une réinterprétation adéquate et appropriée peut l'étendre à tout plasma poussiéreux non magnétisé. Les effets thermiques enrichissent considérablement le mouvement des ondes qui peuvent exister dans le plasma. Ils affectent la nature de l'interaction onde-plasma (effet Landau) et la possibilité d'avoir des électrons piégés dans des puits de potentiel est souvent invoquée. De telles particules, représentées par des îlots à courbes fermées dans l'espace des phases (ligne d'énergie constante), peuvent profondément modifier le comportement des ondes d'on plasma. Sur un autre plan, il est naturel de se demander si les plasmas poussiéreux de faible densité (généralement rencontrés en astrophysique) peuvent réellement "prétendre" évoluer vers un équilibre

thermique : les temps de relaxation étant très grands (plasmas raréfiés), d'autres facteurs propres à de tels plasmas (plasmas radiatifs par exemple) peuvent amener ces derniers à dévier de la distribution de Maxwell- Boltzmann même en régime permanent. Le piégeage des particules est, bien entendu, un phénomène que ne peut décrire le traitement linéaire habituel de Landau ou de van Kampen basé sur la théorie de Vlasov. On se propose dans le présent chapitre d'étudier les oscillations électrostatiques non linéaires d'un plasma poussiéreux en présence d'électrons piégés non isothermiques dans le potentiel de l'onde [153]. Nous utiliserons la méthode de Schamel [154] de construction des solutions d'équilibre. Celle ci permet l'incorporation de distributions plus physiques et décrit les solutions de l'équation de Vlasov en termes de constantes du mouvement. Les particules piégées ont fait l'objet de nombreux et récents travaux théoriques. Mamun [155] a montré qu'en présence d'électrons piégés, les ondes acoustiques ioniques dans un plasma magnétisé sont régies par une équation non linéaire de type Korteweg- de Vries (K-dV). Sa solution en onde solitaire a une amplitude plus large, une largeur plus petite et une vitesse de propagation plus grande que dans le cas d'un plasma isothermique. Mamun et Alam [156] ont étudié les structures électrostatiques solitaires à propagation oblique dans un plasma poussiéreux magnétisé comprenant des ions piégés. Ils ont alors montré que la dynamique de telles structures est gouvernée par une équation K-dV modifiée (mK-dV). A l'aide de la technique des perturbations, Kakati and Goswami [157] ont établi une équation de type K-dV pour investir l'influence des ions réfléchis sur les propriétés intrinsèques des structures solitaires acoustiques. Lampe *et al.* [158], [159] ont montré que les ions piégés peuvent affecter le processus d'écrantage d'un grain de poussière immergé dans un plasma. Toutefois, Tskhakaya *et al.* [160] ont conclu que les modifications introduites sont plutôt mineures et peuvent même être négligées. Schamel *et al.* [161] ont considéré l'effet de grains de poussière piégés sur la propagation de modes électrostatiques. D'autres auteurs ont aussi rapporté d'autres résultats concernant les particules piégées [162], [163], [164]

7.2 Equations de base du modèle

Nous considérons un plasma poussiéreux à trois composantes non collisionnel et non magnétisé. Le système est composé d'électrons froids, d'ions positifs froids, de grains de

poussière froids et d'électrons chauds non thermiques de densités respectives n_e , n_i , n_d , et n_h . Les grains de poussière sont chargés négativement, $q_d = -eZ_d$, et sont supposés être des sphères de rayon a et de densité massique ρ_m . L'évolution dans l'espace des phases d'un tel plasma peut être décrite à l'aide de l'équation de Vlasov indépendante du temps

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{q_s}{m_s} \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial}{\partial v_x} \right) f_s(x, v_x) = 0 \quad (7.1)$$

et de l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi \sum_{s=i,e,d,h} q_s \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x f_s(x, v_x) \quad (7.2)$$

Comme lors des chapitres précédents, la population froide est supposée formée de trois faisceaux de particules (électrons, ions, grains de poussière) dont les fonctions de distribution

$$f_\alpha(x, v_x) = 2n_{\alpha 0} v_{\alpha 0} \delta \left(v_x^2 + \frac{2q_\alpha}{m_\alpha} \phi(x) - v_{\alpha 0}^2 \right) = n_{\alpha 0} \frac{v_{\alpha 0}}{\tilde{v}_\alpha} \delta(v_x - \tilde{v}_\alpha) \quad (7.3)$$

avec

$$\tilde{v}_\alpha = \left(v_{\alpha 0}^2 - \frac{2q_\alpha}{m_\alpha} \phi(x) \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

sont solutions, à l'équilibre, de l'équation de Vlasov. Pour tenir compte des électrons chauds dont une partie est piégée dans un potentiel plasma de large amplitude, nous nous référons à une solution BGK appropriée. Rappelons que celle-ci ne sera considérée comme étant adéquate que si elle représente la "version" non linéaire d'un mode propre naturel du plasma (mode acoustique à titre d'exemple). Nous utilisons alors la fonction de distribution électronique-vortex établie par Schamel [165]

$$f_h = f_{ef} + f_{et} \quad (7.5)$$

où

$$f_{ef}(x, v_x) = n_{h0} \left(\frac{m_e}{2\pi T_{ef}} \right)^{1/2} \exp \left[- \left(\frac{m_e v_x^2 / 2 - e\phi(x)}{T_{ef}} \right) \right] \text{ for } |v_x| > \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m_e}} \quad (7.6)$$

$$f_{et}(x, v_x) = n_{h0} \left(\frac{m_e}{2\pi T_{ef}} \right)^{1/2} \exp \left[-\beta \left(\frac{m_e v_x^2 / 2 - e\phi(x)}{T_{ef}} \right) \right] \text{ for } |v_x| \leq \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m_e}} \quad (7.7)$$

Les indices f et t représentent la contribution des électrons libres et celle des électrons piégés respectivement. Le paramètre β détermine la proportion relative des électrons piégés et est défini comme étant $|\beta| = T_{ef}/T_{et}$, où T_{ef} et T_{et} désignent respectivement la température des électrons libres et celle des électrons piégés. La distribution des électrons piégés est plate pour $\beta = 0$ et est maxwellienne pour $\beta = 1$. Les valeurs négatives de β indiquent la formation de trous dans la zone de piégeage. Ces derniers correspondent à un déficit en électrons piégés et la fonction de distribution f_{et} est alors excavée et prend la forme d'un vortex. Notons que la fonction (7.5), telle que définie ci dessus, est continue au point de transition particules libres/ particules piégées et satisfait aux exigences de régularité d'une solution BGK admissible. La pente, dans l'espace des phases, de la fonction (7.5) est finie. En intégrant f_e , f_i et f_d sur tout l'espace des vitesses, nous obtenons

$$n_\alpha(x) = n_{\alpha 0} \frac{v_{\alpha 0}}{\tilde{v}_\alpha} \quad (7.8)$$

De même, moyennant la distribution (7.5), nous obtenons pour $\beta \succ 0$

$$n_h(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(x, v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{-\sqrt{2e\phi/T_{ef}}} f_{ef} dv_x + \int_{\sqrt{2e\phi/T_{ef}}}^{+\infty} f_{ef} dv_x + \int_{-\sqrt{2e\phi/T_{ef}}}^{+\sqrt{2e\phi/T_{ef}}} f_{et} dv_x = \quad (7.9)$$

$$n_{h0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{T_{ef}}\right) \operatorname{erf} c\left(\sqrt{\frac{e\phi}{T_{ef}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left(\beta \frac{e\phi}{T_{ef}}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\beta \frac{e\phi}{T_{ef}}}\right) \right]$$

et pour $\beta \prec 0$

$$n_h(\phi) = n_{h0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{T_{ef}}\right) \operatorname{erf} c\left(\sqrt{\frac{e\phi}{T_{ef}}}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{-\beta}} W\left(\sqrt{-\beta \frac{e\phi}{T_{ef}}}\right) \right]$$

où

$$\operatorname{erf} c(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (7.10)$$

et

$$W(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$$

est l'intégrale de Dawson. L'équation de Poisson (7.2) s'écrit alors devient alors pour $\beta \succ 0$

$$\frac{d^2 \Psi}{dX^2} = \frac{2f}{\sqrt{1 + \alpha\Psi}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \Psi}} + \frac{2\varepsilon Z_d}{\sqrt{1 + \gamma Z_d \Psi}} + 2f' \left[\exp(\delta\Psi) \operatorname{erf} c(\sqrt{\delta\Psi}) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp(\beta\delta\Psi) \operatorname{erf}(\sqrt{\beta\delta\Psi}) \right] \quad (7.11)$$

où

$$\alpha = \frac{W_i}{W_e}, \gamma = \frac{W_i}{W_d}, \delta = \frac{1}{2} \frac{W_i}{T_{ef}}, f = \frac{n_{e0}}{n_{i0}}, f' = \frac{n_{h0}}{n_{i0}}, \varepsilon = \frac{n_{d0}}{n_{i0}} \quad (7.12)$$

Le système de variables normalisées suivant

$$\Psi = \frac{2e}{W_i} \phi \quad (7.13)$$

$$X = \frac{\omega_{pi}}{V_{i0}} x \quad (7.14)$$

est adopté. $W_\alpha = m_\alpha V_{\alpha 0}^2$ représente deux fois l'énergie cinétique non perturbée de la particule α , ε mesure le déséquilibre entre les densités ionique et poussiéreuse non perturbées, V_{i0}/ω_i est la distance parcourue par les ions durant une période plasma ionique $\omega_{pi} = \left(\frac{4\pi n_{i0} e^2}{m_i} \right)^{1/2}$.

7.3 Existence des structures localisées

Dans le chapitre 3, nous avons vu que les oscillations non linéaires (densité, potentiel...) d'un plasma poussiéreux à température nulle et à charge constante ne peuvent en aucune manière être localisées. Les seuls modes BGK permis sont à caractère oscillatoire non amorti. Quelles seront alors les modifications introduites par les effets thermiques et le phénomène de piégeage des particules? C'est ce que nous allons essayer de voir en réécrivant l'équation (7.11) sous la forme d'une intégrale d'énergie d'un oscillateur classique

$$\frac{d^2 \Psi}{dX^2} = -\frac{dV(\Psi)}{d\Psi} \quad (7.15)$$

$V(\Psi)$ représente le pseudo-potentiel ou potentiel de Sagdeev. En multipliant chaque membre de (7.11) par $d\Psi/dX$ et en intégrant une fois, nous obtenons la quadrature

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dX} \right)^2 + V(\Psi) = 0 \quad (7.16)$$

avec

$$\begin{aligned} V(\Psi) = & -\frac{4f}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha\Psi} - 4\sqrt{1 - \Psi} - \frac{4\varepsilon}{\gamma} \sqrt{1 + Z_d\gamma\Psi} \\ & - \frac{2f'}{\delta} [\exp(\delta\Psi) \operatorname{erf} c(\sqrt{\delta\Psi}) + \frac{1}{\beta^{3/2}} \exp(\delta\beta\Psi) \operatorname{erf}(\sqrt{\delta\beta\Psi}) \\ & + 2(1 - \frac{1}{\beta}) \sqrt{\frac{\delta}{\pi}\Psi}] + C \end{aligned} \quad (7.17)$$

C est une constante d'intégration que nous déterminons grâce à la condition à la limite (appropriée pour la recherche des solutions localisées) $V(\Psi = 0) = 0$. Le pseudo-potentiel prend alors la forme

$$\begin{aligned} V(\Psi) = & \frac{4f}{\alpha} (1 - \sqrt{1 + \alpha\Psi}) + 4(1 - \sqrt{1 - \Psi}) + \frac{4\varepsilon}{\gamma} (1 - \sqrt{1 + Z_d\gamma\Psi}) \\ & + \frac{2f'}{\delta} [1 - \exp(\delta\Psi) \operatorname{erf} c(\sqrt{\delta\Psi}) - \frac{1}{\beta^{3/2}} \exp(\delta\beta\Psi) \operatorname{erf}(\sqrt{\delta\beta\Psi}) \\ & - 2(1 - \frac{1}{\beta}) \sqrt{\frac{\delta}{\pi}\Psi}] \end{aligned} \quad (7.18)$$

L'équation (7.16) peut être perçue comme étant "l'intégrale d'énergie" d'une pseudo-particule de masse unité, de vitesse $d\Psi/dX$ et de position Ψ , oscillant dans un puits de potentiel $V(\Psi)$. Avant toute simulation numérique, il est instructif de discuter les conditions à requérir pour que (7.16) admette des solutions localisées. Remarquons que la présence d'un nombre fini d'électrons piégés est un préalable à toute existence de solution localisée solitaire. Par ailleurs, la condition $\Psi > 0$ (voire (7.18)) écarte d'emblée l'existence d'ondes solitaires de raréfaction ($\Psi < 0$). Il est clair que $V(\Psi) = 0$ et $dV(\Psi)/d\Psi = 0$ en $\Psi = 0$. L'équation (7.16) admet des solutions solitaires si [62] (i) $(d^2V/d\Psi^2)_{\Psi=0} < 0$ (le point à l'origine est instable); (ii) Il existe une valeur maximale ou minimale Ψ_m de Ψ pour laquelle $V(\Psi_m) \geq 0$; et (iii) $V(\Psi) < 0$ pour tout Ψ compris entre 0 et Ψ_m . La seconde et la troisième condition indiquent que la pseudo-particule oscille dans un puits

de potentiel $V(\Psi)$ de profondeur finie et est réfléchi à $\Psi = \Psi_m$. Pour cela, il suffit aux paramètres du plasma poussiéreux de satisfaire

$$1 + \alpha f + Z_d \gamma (1 - f - f') - 2\delta f' < 0 \quad (7.19)$$

$$V(1) = \frac{4f}{\alpha}(1 - \sqrt{1 + \alpha}) + 4 + \frac{4\varepsilon}{\gamma}(1 - \sqrt{1 + Z_d \gamma}) + \quad (7.20)$$

$$\frac{2f'}{\delta} [1 - e^\delta \operatorname{erfc}(\sqrt{\delta}) - \frac{1}{\beta^{3/2}} e^{\delta\beta} \operatorname{erf}(\sqrt{\delta\beta}) - 2(1 - \frac{1}{\beta}) \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}] \geq 0$$

Il est alors évident que l'existence des modes BGK poussiéreux localisés dépend non seulement de la dynamique des grains mais aussi du nombre d'électrons piégés.

7.4 Solution dans la limite des petites amplitudes

Dans la limite des petites amplitudes Ψ , la solution de (7.11) peut être obtenue de manière explicite. En développant le second membre de (7.11) en Ψ et en ne retenant que les premiers termes, (7.11) peut être ramenée à

$$\frac{d^2 \Psi}{dX^2} = - [1 + \alpha f + Z_d \gamma (1 - f - f') - 2f'\delta] \Psi - \frac{8}{3} (1 - \beta) f' \sqrt{\frac{\delta^3}{\pi}} \Psi^{3/2} \quad (7.21)$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi(X) = \Psi_M \operatorname{sech}^4 [(X - X_0) / \Delta] \quad (7.22)$$

Cette dernière représente une onde solitaire stationnaire d'amplitude

$$\Psi_M = \left(\frac{15}{32}\right)^2 \pi \frac{[1 + \alpha f + Z_d \gamma (1 - f - f') - 2\delta f']^2}{\delta^3 [f'(\beta - 1)]^2} \quad (7.23)$$

et de largeur

$$\Delta = \sqrt{\frac{16}{1 + \alpha f + Z_d \gamma (1 - f - f') - 2\delta f'}} \quad (7.24)$$

Elle diffère du soliton habituel de Korteweg-de Vries de par la puissance de la fonction sech, la largeur et éventuellement la vitesse de propagation.

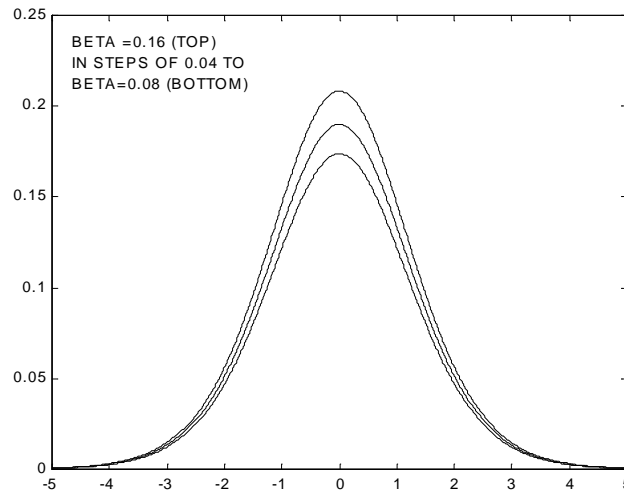


Fig.1- Profil spatial du soliton (Ψ, X) pour différentes valeurs du paramètre de piégeage $\beta = 0.08, 0.12, 0.16$ (du bas vers le haut) avec $Z_d = 10, f' = 0.2, f = 0.01, \alpha = 0.1, \gamma = 0.01$ et $\delta = 10$.

Notons que la condition d'existence (7.19), précédemment énoncée, doit encore une fois être satisfaite $1 + \alpha f + Z_d \gamma (1 - f - f') - 2\delta f' < 0$. La variation spatiale de Ψ pour différentes valeurs de β apparaît sur la figure 1. On peut voir qu'à mesure que β augmente, la hauteur du soliton croît alors que sa largeur est insensible aux valeurs de β .

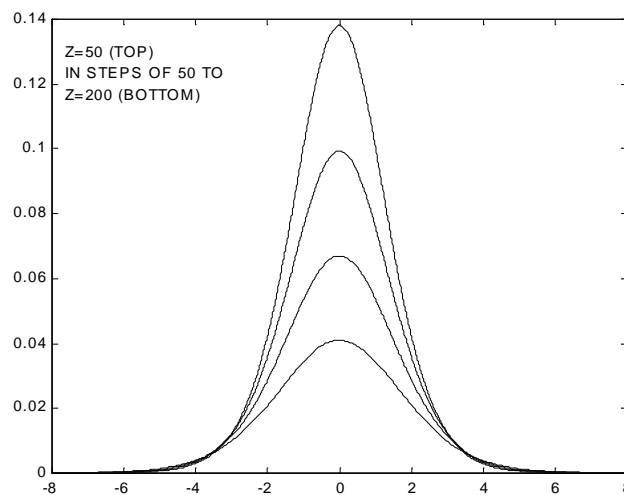


Fig.2- Profil spatial du soliton (Ψ, X) pour différentes valeurs du nombre de charge du grain de poussière $Z_d = 50, 100, 150, 200$ (du haut vers le bas) avec $\beta = 0.08, f' = 0.2, f = 0.01, \alpha = 0.1, \gamma = 0.01$ et $\delta = 10$.

La figure 2 montre qu'une augmentation de Z_d donne lieu à une diminution de la hauteur du soliton et une croissance de sa largeur.

7.5 Résultats numériques et discussion

Nous allons maintenant procéder à la présentation de nos résultats numériques. Comparée aux différentes techniques de perturbation, l'intégration numérique a l'avantage de fournir des solutions de large amplitude, bien plus grandes que celles, par exemple, données par l'équation de Korteweg-de Vries. Nous intégrons l'équation (7.11) à l'aide d'un schéma numérique basé sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre $[4 \times 5]$. A chaque itération, le pas est réajusté de telle manière à éviter au maximum le déferlement de l'onde. La classe des "stiff problems" à laquelle appartient le notre sont quasiment impossibles à résoudre à l'aide de la méthode classique de Runge-Kutta d'ordre $[4 \times 4]$. Nous considérons un plasma d'hydrogène dans lequel sont immergés des grains de poussière de densité $\rho_m = 3 \text{ g/cm}^3$. Pour amorcer l'intégration numérique et donc le processus itératif, nous initialisons le champ électrique à $E_0 = 10^{-12}$. Les résultats, pour différentes valeurs de β , sont représentés sur la figure 3.

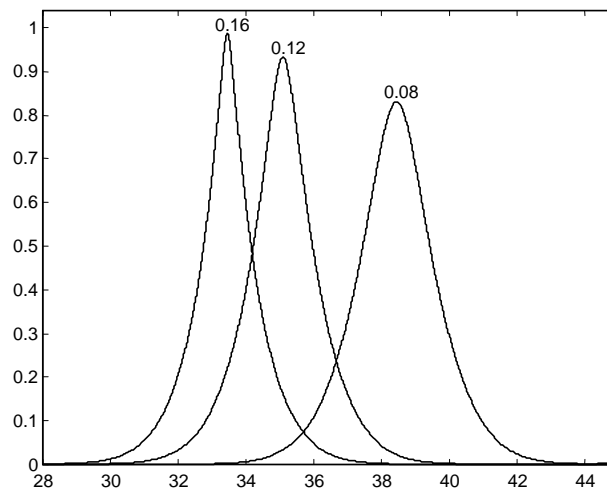


Fig.3- Solution en onde solitaire (Ψ, X) avec $Z_d = 10$, $f' = 0.2$, $f = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.01$ et $\delta = 10$. Les conditions initiales sont $\Psi(X = 0) = 0$, $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = 10^{-12}$. La tolérance absolue est de 10^{-15} . Les valeurs de β (0.08, 0.12, 0.16) sont indiquées sur la figure.

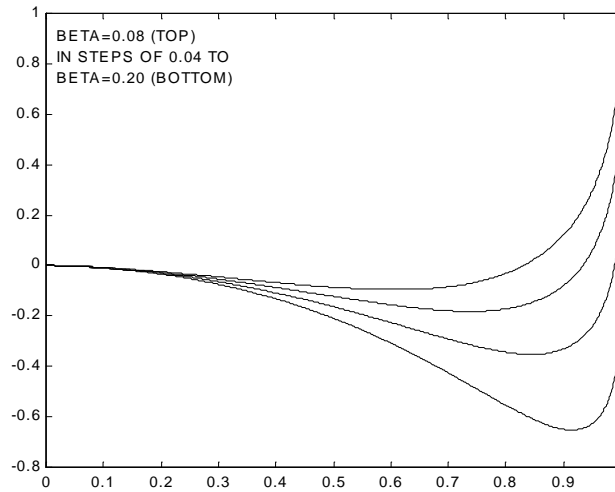


Fig.4- Tracé du potentiel de Sagdeev $V(\Psi)$ calculé numériquement à partir de l'équation (7.18) associé aux structures solitaires de la figure 3 pour différentes valeurs de $\beta = 0.08, 0.12, 0.16, 0.20$ (du haut vers le bas).

Le potentiel électrostatique Ψ exhibe un profil solitaire spatialement localisé dont l'existence peut être prédite grâce à la structure du potentiel de Sagdeev de la figure 4. Chaque pic de Ψ (en fait la hauteur du soliton) correspond à une valeur nulle de $V(\Psi)$ (Fig.4). Les paramètres suivants $Z_d = 10$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.01$, $\delta = 10$, $f = 0.01$ et $f' = 0.2$ ont été préalablement choisis de manière à satisfaire les conditions d'existence de solutions solitaires. Toute perturbation initiale E_0 , aussi infime soit elle, évoluera en une structure non linéaire hautement localisée. Les résultats révèlent que la présence de particules piégées peut affecter de manière significative le type d'ondes solitaires BGK poussiéreuses. Une augmentation de la valeur du paramètre de piégeage β fait croître l'amplitude du pulse et décroître sa largeur. Ce qui veut dire que le soliton devient de plus en plus pointu. Au delà d'une certaine valeur de β , des solitons de type cornu apparaissent (Fig.5).

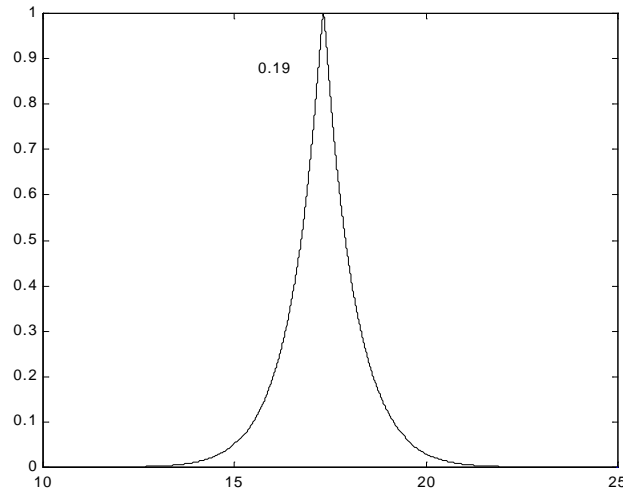


Fig.5- Soliton de forme cornue $\Psi(X)$ avec $\beta = 0.19$, $Z_d = 10$, $f' = 0.2$, $f = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.01$ et $\delta = 10$. Les conditions initiales sont $\Psi(X=0) = 0$, $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = 10^{-12}$. La tolérance absolue est de 10^{-15} .

Néanmoins, l'addition d'une légère concentration de particules piégées peut empêcher leur formation. Les densités de particules n_h et n_d sont représentées respectivement sur les figures 6 et 7.

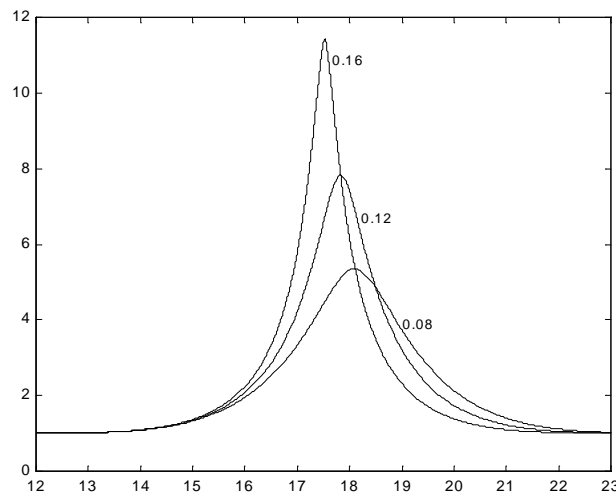


Fig.6- Profil spatial de la densité des électrons chauds $n_h(X)/n_{h0}$ pour différentes valeurs du paramètre de piégeage $\beta = 0.08, 0.12, 0.16$ (indiquées sur la figure). Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 3.

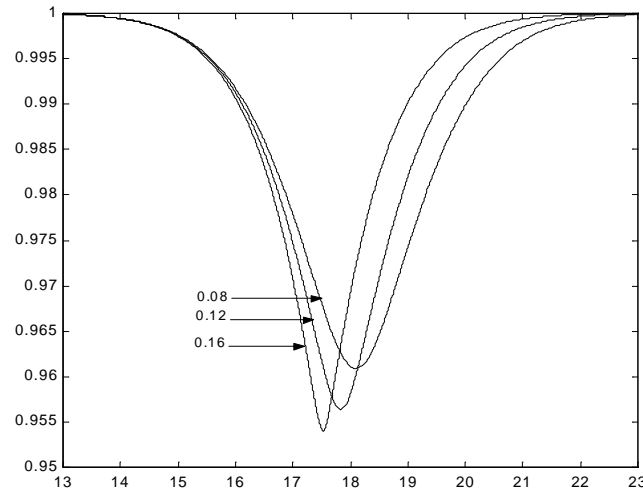


Fig.7- Profil spatial de la densité des grains de poussière $n_d(X)/n_{d0}$ pour différentes valeurs du paramètre de piégeage $\beta = 0.08, 0.12, 0.16$ (indiquées sur la figure). Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 3.

Une augmentation de β entraîne un appauvrissement des grains de poussière dans la région de localisation du soliton. Ces derniers sont localement expulsés et repoussés hors de cette région, un phénomène qui peut générer d'intenses champs électriques dans le milieu. Cette expulsion s'accompagne d'une nette accélération des grains de poussière sous l'action de champs électriques de plus en plus intenses (Fig. 8).

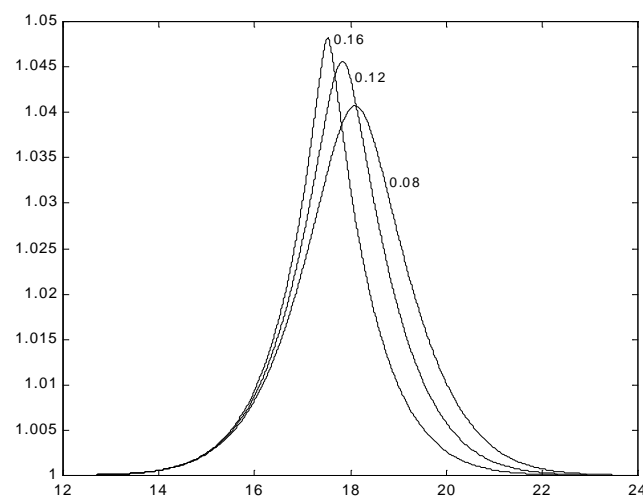


Fig.8- Profil spatial de la vitesse des grains de poussière $v_d(X)/v_{d0}$ pour différentes valeurs du paramètre de piégeage $\beta = 0.08, 0.12, 0.16$ (indiquées sur la figure). Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 3.

Ce résultat revêt une importance particulière d'autant plus que les problèmes d'expansion de particules et donc de matière dans les plasmas froids ont connu un regain d'intérêt au cours de ces dix dernières années. En poussant un peu plus nos investigations et en procédant à un large brassage des paramètres, nous avons trouvé que le piégeage des particules pouvait donner à lieu à l'apparition d'unicues structures. La figure 9 montre la formation d'une structure à deux niveaux dont l'existence, à notre connaissance, n'a jamais été rapportée dans la littérature des plasmas poussiéreux : une double couche représentée par un saut abrupt d'amplitude (en fait une marche de potentiel) et un soliton décalé. A cette structure, correspond un potentiel de Sagdeev à deux puits (Figs. 10 et 11).

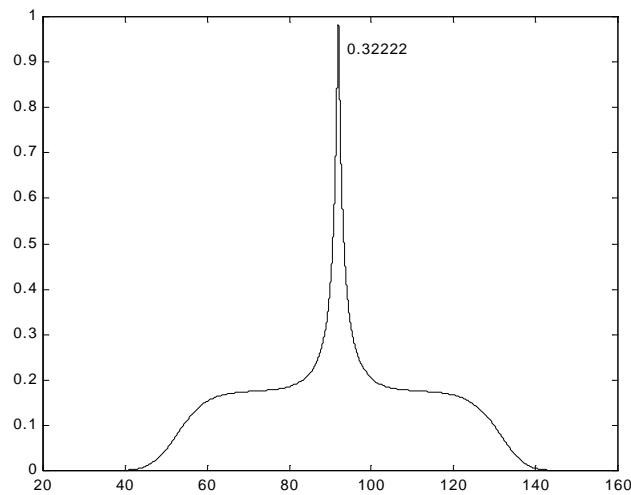


Fig.9- Structure à deux niveaux (une double couche et un soliton décalé) pour le potentiel électrostatique $\Psi(X)$ avec $\beta = 0.32222$, $Z_d = 10$, $f' = 0.07$, $f = 0$, $\alpha = 1$, $\gamma = 0.01$ et $\delta = 10$. Les conditions initiales sont $\Psi(X=0) = 0$ et $(\frac{d\Psi}{dX})_{X=0} = 10^{-12}$. La tolérance absolue est de 10^{-15} .

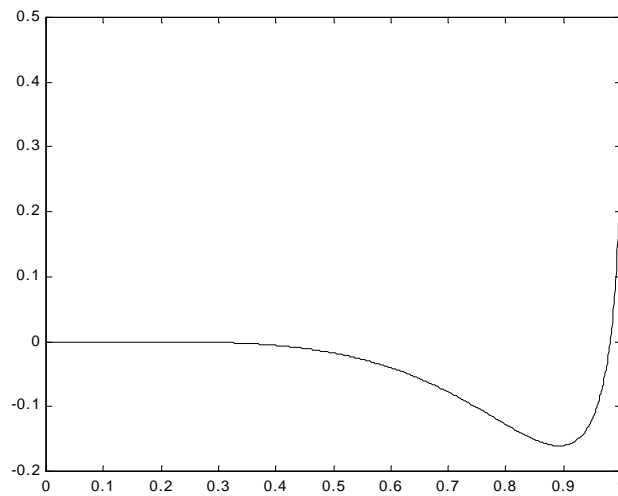


Fig.10- Vue global du potentiel de Sagdeev $V(\Psi)$ calculé numériquement à partir de l'équation (7.18) associé à la structure à deux niveaux de la figure 9.

La figure 10 présente une vue d'ensemble du pseudo-potential $V(\Psi)$ tandis que 11 est tracée avec une plus grande échelle afin de mettre en évidence le premier puits dont la profondeur n'est pas très conséquente. Cette structure à deux niveaux est quelque peu similaire au soliton à queue en forme de plateau (plateau-tailed soliton) qui a fait l'objet de beaucoup d'études du point de vue théorique [166]. Elle est essentiellement due à l'influence conjuguée des grains de poussière et des électrons piégés.

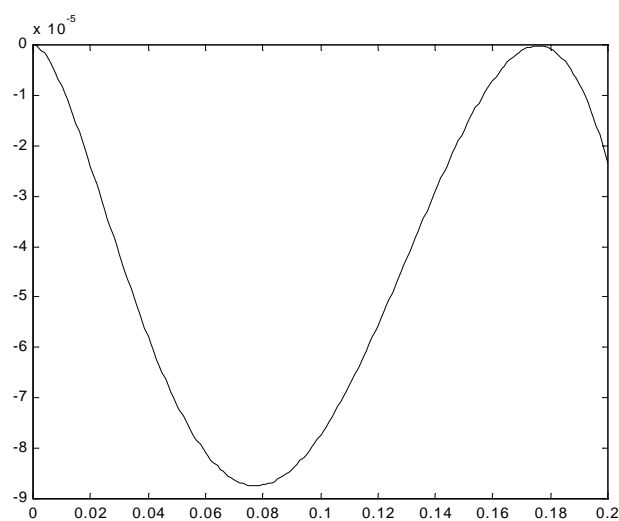


Fig.11- Tracé sur une plus grande échelle du premier puits du potentiel de Sagdeev de la figure 9.

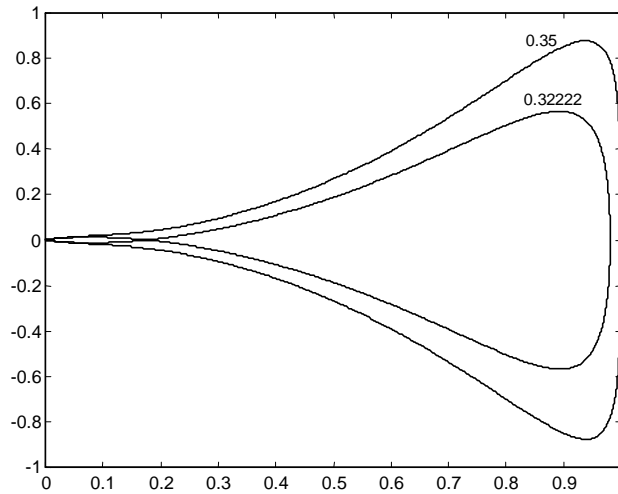


Fig.12- Trajectoires dans l'espace des phases $(\frac{d\Psi}{dX}, \Psi)$ pour deux valeurs différentes du paramètre de piégeage $\beta = 0.32222, 0.35$ indiquées sur la figure. Les valeurs des paramètres sont celles utilisées pour la figure 9.

Habituellement, les doubles couches, définies comme étant des transitions monotones du potentiel électrostatique, et les solitons ne coexistent pas dans la même gamme de paramètres. La pseudo-particule ne subit aucune réflexion lorsqu'elle atteint le mur opposé du premier puits de potentiel. Rappelons que de nombreuses études théoriques et expérimentales ont été consacrées aux double couches [167]. Ces études ont été principalement motivées par le fait que les doubles couches peuvent accélérer certains groupes de particules chargées. L'effet du phénomène de piégeage sur Ψ peut être mieux compris en traçant les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases. Chaque séparatrice de la figure 12 représente une structure localisée. L'addition d'infimes quantités de particules piégées réduit la largeur de la double couche.

7.6 Les trous poussiéreux à charge variable

On ne peut clore le présent chapitre sans faire interagir le phénomène de piégeage des particules avec celui de la variation de la charge des grains de poussière [168]. Autrement dit, peut-on construire des solutions self-consistantes de l'équation de Poisson en présence de particules piégées à charge variable? Pour ce faire, nous considérons un système composé d'électrons froids, d'ions froids et de grains de poussière chauds dont une fraction

se trouve piégée dans le potentiel de l'onde. Le grain de poussière est chargé à l'aide de faisceaux de particules froides (électrons + ions) dont les fonctions de distribution (voir chapitres précédents pour les détails) sont données par les équations (3.63), (4.8). Etant donné que la charge du grain est susceptible de varier, nous réécrivons E_d comme

$$E_d = \frac{1}{2}m_d v_x^2 - e \int_0^\phi Z_d d\phi \quad (7.25)$$

de telle manière à ce que E_d devienne une constante du mouvement et $f(E_d)$ satisfasse l'équation stationnaire de Vlasov. Il est alors aisé de montrer que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\phi Z_d d\phi \right) = Z_d \frac{d\phi}{dx} \quad (7.26)$$

Nous inspirant des sections précédentes, plus précisément de la fonction de distribution-vortex de Schamel (7.5)-(7.7), la fonction de distribution des vitesses d'un grain de poussière à charge variable, solution de l'équation de Vlasov, est simplement écrite sous la forme

$$f_d = f_{df} + f_{dt} \quad (7.27)$$

avec

$$f_{df}(x, v_x) = n_{d0} \left(\frac{m_d}{2\pi T_{df}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_d v_x^2 / 2 - e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}} \right) \text{ for } |v_x| \succ \sqrt{\frac{2e \int_0^\phi Z_d d\phi}{m_d}} \quad (7.28)$$

et

$$f_{dt}(x, v_x) = n_{d0} \left(\frac{m_d}{2\pi T_{df}} \right)^{1/2} \exp \left(-\beta \frac{m_d v_x^2 / 2 - e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}} \right) \text{ for } |v_x| \preceq \sqrt{\frac{2e \int_0^\phi Z_d d\phi}{m_d}} \quad (7.29)$$

Les indices f et t désignent respectivement les populations de grains de poussière libres et piégés. Le paramètre β détermine le nombre de grains piégés et est défini comme étant le rapport de la température des grains de poussière libres T_{df} sur celle des grains de poussière piégés T_{dt} , i.e., $|\beta| = T_{df}/T_{dt}$. Moyennant la distribution (7.27), la densité des grains de poussière, selon que le paramètre de piégeage β est positif ou négatif, est alors donnée par

- pour $\beta > 0$

$$n_d(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_d(x, v_x) dv_x = n_{d0} \left\{ \exp\left(\frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}}\right) \operatorname{erf} c \left(\sqrt{\frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left(\beta \frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}}\right) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta \frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{ef}}} \right) \right\} \quad (7.30)$$

- pour $\beta < 0$

$$n_d(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_d(x, v_x) dv_x = n_{d0} \left\{ \exp\left(\frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}}\right) \operatorname{erf} c \left(\sqrt{\frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{df}}} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} W \left(\sqrt{-\beta \frac{e \int_0^\phi Z_d d\phi}{T_{ef}}} \right) \right\} \quad (7.31)$$

L'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi \sum_{s=i,e,d} q_s \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x f_s(x, v_x) \quad (7.32)$$

devient alors pour $\beta > 0$

$$\frac{d^2 \Psi}{dX^2} = \frac{f}{Z_{d0}^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \Psi}} - \frac{f'}{Z_{d0}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma \Psi}} + \frac{Z_d}{Z_{d0}^2} \left\{ \exp\left(\int_0^\Psi Z_d d\Psi\right) \operatorname{erf} c \left(\sqrt{\int_0^\Psi Z_d d\Psi} \right) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left(\beta \int_0^\Psi Z_d d\Psi\right) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta \int_0^\Psi Z_d d\Psi} \right) \right\} \quad (7.33)$$

et pour $\beta < 0$

$$\frac{d^2 \Psi}{dX^2} = \frac{f}{Z_{d0}^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \Psi}} - \frac{f'}{Z_{d0}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma \Psi}} + \frac{Z_d}{Z_{d0}^2} \left\{ \exp\left(\int_0^\Psi Z_d d\Psi\right) \operatorname{erf} c \left(\sqrt{\int_0^\Psi Z_d d\Psi} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi|\beta|}} W \left(\sqrt{-\beta \int_0^\Psi Z_d d\Psi} \right) \right\} \quad (7.34)$$

où $\alpha = \frac{T_{df}}{m_e v_{e0}^2/2}$, $\gamma = \frac{T_{df}}{m_i v_{i0}^2/2}$, $f = n_{e0}/n_{d0}$ et $f' = n_{i0}/n_{d0}$. La normalisation habituelle

$\Psi = e\phi/T_{df}$, $X = x/\lambda_{Dd}$ est utilisée et $\lambda_{Dd} = (T_{df}/4\pi n_{d0}Z_{d0}^2 e^2)^{1/2}$ est la longueur de Debye poussiéreuse. La charge du grain $q_d = -eZ_d$ est déterminée par

$$\tilde{v}_d \frac{\partial q_d}{\partial x} = I_e + I_i = -e \int_{v_{\min}}^{\infty} f_e(x, v_x) v_x \sigma_e(v_x, q_d) dv_x + e \int_0^{\infty} f_i(x, v_x) v_x \sigma_i(v_x, q_d) dv_x \quad (7.35)$$

Les courants de charge électronique I_e et ionique I_i sont obtenus en moyennant la section efficace de collision $\sigma_{e,i}(v_x, q_d) = \pi a^2 (1 \pm 2eq_d/m_{e,i}C_g v_x^2)$ (voir chapitres précédents pour les détails) sur les fonctions de distribution des électrons $f_e(x, v_x)$ et des ions $f_i(x, v_x)$. En effectuant les intégrales de l'équation (7.35) et en réarrangeant les termes, nous obtenons l'équation de charge suivante

$$\tilde{v}_d \frac{\partial Z_d}{\partial x} = n_{e0} v_{e0} \pi a^2 \left[1 - \frac{Z_d e^2 / a}{m_e v_{e0}^2 / 2 \left(1 + \frac{e\phi}{m_e v_{e0}^2 / 2} \right)} \right] - n_{i0} v_{i0} \pi a^2 \left[1 + \frac{Z_d e^2 / a}{m_i v_{i0}^2 / 2 \left(1 - \frac{e\phi}{m_i v_{i0}^2 / 2} \right)} \right] \quad (7.36)$$

En l'absence de toute perturbation ($\Psi = 0$), les valeurs des paramètres physiques satisfont la relation d'équilibre suivante

$$Z_{d0} = -p \frac{m_i v_{i0}^2 / 2}{e^2 / a} \quad (7.37)$$

où p est donné par

$$p = \frac{1 - \frac{f}{f'} \sqrt{\frac{m_i \gamma}{m_e \alpha}}}{1 + \frac{f}{f'} \sqrt{\frac{m_i \alpha}{m_e \gamma}}} \quad (7.38)$$

L'équation (7.37) indique que $(-p)$ n'est autre que le rapport de l'énergie potentiel de l'ion à la surface du grain sur son énergie cinétique. L'équation (7.36) est une équation dynamique additionnelle couplée aux restes des équations du plasma à travers les courants plasma de charge. En notant comme précédemment que le déplacement du grain de poussière au cours du processus de charge peut être négligé devant l'échelle spatiale de notre problème, nous écrivons

$$I_e + I_i \simeq 0 \quad (7.39)$$

et les grains de poussière sont par conséquent constamment portés à leur potentiel flottant.

Il est alors aisé de déduire à partir de (7.36) la relation suivante

$$Z_d = Z_{d0} \frac{(1 + \alpha\Psi)(1 - \gamma\Psi)}{1 + \alpha p\Psi} \quad (7.40)$$

qui lie les variations du potentiel électrostatique de l'onde à celles de la charge du grain de poussière et obtenir

$$\int_0^\Psi Z_d d\Psi = -Z_{d0} \left\{ \frac{\gamma}{2p} \Psi^2 + \frac{p\gamma - \alpha p - \gamma}{\alpha p^2} \Psi + \frac{(1-p)(\gamma + \alpha p)}{\alpha^2 p^3} \ln(1 + \alpha p\Psi) \right\} \quad (7.41)$$

Il devient alors possible de construire le pseudo-potentiel $V(\Psi)$ et de réécrire les équations (7.33) et (7.34) sous la forme

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} = -\frac{dV(\Psi)}{d\Psi} \quad (7.42)$$

ou

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dX} \right)^2 + V(\Psi) = 0 \quad (7.43)$$

Au vu de la nature des fonctions qui interviennent dans les équations (7.33) et (7.34), il n'est pas aisé de trouver la forme analytique exacte de $V(\Psi)$ ¹. Cependant, dans la limite des faibles amplitudes, le pseudo-potentiel peut être écrit sous la forme

$$V(\Psi) = A_0\Psi + A_1\Psi^{3/2} + A_2\Psi^2 + A_3\Psi^{5/2} + A_4\Psi^3 + C \quad (7.44)$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= A_1 = 0 \\ A_2 &= \frac{\alpha f + \gamma f'}{4Z_{d0}^2} + \frac{\gamma + \alpha p - \alpha}{2Z_{d0}} - \frac{1}{2} \\ A_3 &= \frac{8}{15} \sqrt{\frac{Z_{d0}}{\pi}} (1 - \beta) \\ A_4 &= \frac{\gamma^2 f' - \alpha^2 f}{8Z_{d0}^2} + \frac{1}{2} \left(-\alpha + \gamma + \alpha p - \frac{Z_{d0}}{3} \right) + \frac{-\alpha^2 p^2 + \alpha^2 p + \alpha\gamma - \alpha p\gamma}{3Z_{d0}} \end{aligned} \quad (7.45)$$

C est la constante d'intégration. Moyennant la condition à la limite $V(\Psi = 0) = 0$, nous obtenons $C = 0$. Rappelons que l'équation (7.43) peut être perçue comme étant

¹Notons au passage qu'il est toujours possible de résoudre numériquement l'équation (7.43).

"l'intégrale d'énergie" d'une pseudo-particule de masse unité, de vitesse $d\Psi/dX$ et de position Ψ , oscillant dans un puits de potentiel $V(\Psi)$. Il est clair que $V(\Psi) = 0$ et $dV(\Psi)/d\Psi = 0$ en $\Psi = 0$. L'équation (7.43) admettra des solutions solitaires si [62] (i) $(d^2V/d\Psi^2)_{\Psi=0} < 0$ (le point à l'origine est instable); (ii) Il existe une valeur maximale ou minimale Ψ_m de Ψ pour laquelle $V(\Psi_m) \geq 0$; et (iii) $V(\Psi) < 0$ pour tout Ψ variant entre 0 et Ψ_m . Pour cela, il suffit aux paramètres du plasma poussiéreux de satisfaire les deux conditions d'existence de structures localisées suivantes

$$2A_2 < 0 \iff \frac{\alpha f + \gamma f'}{2Z_{d0}^2} + \frac{\gamma + \alpha p - \alpha}{Z_{d0}} < 1$$

$$V\left(\frac{1}{\gamma}\right) \geq 0 \iff A_2 + A_3 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2} + A_4 \left(\frac{1}{\gamma}\right) \geq 0 \quad (7.46)$$

L'équation précédente (7.43) peut alors être intégrée pour obtenir

$$\Psi(X) = \left[-\frac{A_3}{2A_2} + \left(\frac{A_3^2}{4A_2^2} - \frac{A_4}{A_2} \right)^{1/2} \cosh \left(\sqrt{-\frac{A_2}{2}} X \right) \right]^{-2} \quad (7.47)$$

La solution (7.47) représente un trou poussiéreux à charge variable dans la limite des faibles amplitudes. La stabilité de tels trous est loin d'être aisée à prouver ou à établir [169]. Notons à titre indicatif qu'un autre point de vue concernant le piégeage adiabatique des électrons a été développé par Lifshitz et Pitaevskii [170].

Chapitre 8

Equations de Zakharov modifiées dans un plasma poussiéreux à charge variable

8.1 Présentation physique du problème

Le problème du développement non linéaire des ondes de Langmuir a constitué un important domaine de recherche durant les quarante dernières années. Le problème classique associé à la théorie d'un tel développement a été la tendance de l'énergie du spectre des vecteurs d'onde k à cascader vers les valeurs les plus basses (grandes longueurs d'onde). Etant donné que l'amortissement Landau et collisionnel décroissent à mesure que k décroît, le spectre de l'onde apparaît comme s'il se condensait au voisinage de $k = 0$. Le mécanisme de dissipation de cette énergie était alors inconnu. C'est alors que Zakharov montra que le mécanisme responsable de la tendance du spectre à s'empiler autour de $k = 0$ pourrait être identifié comme étant un processus appelé collapse du paquet d'ondes de Langmuir. Zakharov a alors établi deux équations non linéaires couplées pour décrire la turbulence de l'onde haute fréquence (onde de Langmuir) et de l'onde basse fréquence (onde acoustique ionique). Ces deux équations ont fait l'objet de la majeure partie des recherches sur la turbulence de Langmuir au cours de ces trente dernières années. En réalité, les plasmas astrophysiques et de laboratoire sont souvent dans un état de turbulence. Par conséquent, il est insuffisant d'étudier les modes normaux d'un plasma juste par

eux mêmes. Dans un plasma turbulent, l'énergie du système est répartie entre plusieurs modes différents. Pour que cela puisse arriver, il est clair que le temps caractéristique τ_{sup} de suppression de l'énergie du système doit être considérablement plus long que le temps caractéristique τ_{rep} de répartition de l'énergie entre les différents modes. En retour, ces deux temps caractéristiques doivent être plus larges que les périodes d'oscillation τ_{osc} de ces modes. L'énergie de chaque mode est alors un concept bien défini. Il devient donc possible de décrire la turbulence à l'aide d'équations cinétiques gouvernant le transfert d'énergie entre les différents modes. Cette méthode qui consiste à traiter un plasma turbulent de la sorte est souvent appelée turbulence faible pour laquelle donc les inégalités suivantes doivent être satisfaites $\tau_{\text{osc}} \ll \tau_{\text{rep}} \ll \tau_{\text{sup}}$. Récemment, les processus et les modes collectifs dans les plasmas poussiéreux ont fait l'objet d'un intérêt particulier [171]. La présence de grains de poussière immobiles dans un plasma modifie le spectre des ondes existantes dans ce plasma. Il a été montré que la dynamique de la charge introduit de nouveaux modes telles les ondes acoustiques poussiéreuses (DA) [172], les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses (DIA) [173], les modes de Bernstein-Greene-Kruskal poussiéreux (DBGK)...etc. Rao et al ont été les premiers à avoir identifié l'onde acoustique poussiéreuse [172]. Shukla and Silin ont investi le mode acoustique ionique [173]. Mamun *et al.* ont rapporté que dans un plasma appauvri, il existe seulement des structures de potentiel négatives [62]. Dans la limite des faibles amplitudes, il a été montré [174], [175] que le couplage du mode de la relaxation de la charge avec les ondes de Langmuir induit un amortissement, un décalage de fréquence et une instabilité de ces ondes. Il existe plusieurs articles de référence traitant de la turbulence de Langmuir dont ceux de Rudakov *et al.* [176], de Thornhill *et al.* [177], de Musher *et al.* [178], et de Popel *et al.* [179]. Le but du présent chapitre est de reformuler les équations classiques de Zakharov dans un plasma poussiéreux à charge variable [180].

8.2 Ondes de Langmuir

L'interaction d'un faisceau laser ou d'un faisceau de particules avec un plasma complètement ionisé a suscité de nombreux travaux théoriques, numériques et expérimentaux. La génération d'ondes plasma électroniques ou ondes de Langmuir de grande amplitude a

été un dénominateur commun à un grand nombre de ces travaux. Nous allons donc commencer par rappeler la théorie linéaire des ondes de Langmuir dans un plasma totalement ionisé, non magnétisé et dans la limite des ions infiniment lourds, ces derniers jouant alors le rôle d'un fond neutralisant (neutralité de la charge électrique totale à l'équilibre). La prise en compte de la dynamique ionique fera l'objet des sections suivantes. Nous allons donc considérer un plasma à deux composantes (électrons et ions) qui n'est soumis à aucun champ externe, initialement à l'équilibre et spatialement homogène. Les ions, à cause de leur inertie, sont supposés immobiles et par conséquent seules les perturbations de la fonction de distribution électronique peuvent être significatives. La fonction de distribution électronique à l'équilibre f_0 est statique, spatialement homogène et n'est fonction que de la vitesse \mathbf{v} . La densité électronique à l'équilibre n_{e0} est alors donnée par

$$n_{e0} = \int f_0(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \quad (8.1)$$

Nous allons, dans un premier temps, essayer de montrer que les équations obtenues après linéarisation des équations de Vlasov- Maxwell admettent une solution de type onde plane électrostatique appelée onde de Langmuir et pour laquelle les électrons oscillent à une fréquence voisine de la fréquence plasma électronique $\omega_{pe} = (4\pi n_{e0} e^2 / m_e)^{1/2}$. Ici, e et m_e désignent respectivement la charge et la masse d'un électron. Considérons maintenant de petites perturbations $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ autour de l'équilibre ($f_1 \ll f_0$) de la fonction de distribution électronique. La présence de cette perturbation dans le plasma donnera naissance à un champ électrique \mathbf{E} régi par [181]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e \int f_1 d^3\mathbf{v} \quad (8.2)$$

qui, à son tour, accélérera les électrons du plasma et agira comme un terme source dans l'équation de Vlasov.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_1 - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0 = 0 \quad (8.3)$$

Connaissant une forme fonctionnelle de f_0 , les équations (8.2) et (8.3) représentent un système d'équations à deux inconnues, f_1 et \mathbf{E} , fermé et self-consistant. Pour faciliter sa résolution, il convient d'exprimer la dépendance en x et en t de f_1 et de \mathbf{E} sous la forme d'une somme de termes harmoniques dont les amplitudes, différentes l'une de l'autre et que

nous désignerons respectivement par $f_{1\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v})$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$, oscillent comme $\exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\}$. Aucune contrainte n'est imposée aux valeurs de \mathbf{k} et de ω . Les composantes harmoniques de f_1 et de \mathbf{E} peuvent être reliées de deux manières distinctes grâce aux deux équations (8.2) et (8.3)

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -4\pi e \int f_{1\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (8.4)$$

$$f_{1\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = \frac{ie}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (8.5)$$

pour finalement obtenir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{4\pi e^2}{m} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \cdot \int \frac{\nabla_{\mathbf{v}} f_0}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} \quad (8.6)$$

En l'absence de tout champ magnétique associé à l'onde, les équations de Maxwell montrent que les vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{E} , et \mathbf{J} possèdent tous la même orientation dans l'espace que nous choisissons confondue avec l'axe habituel z/Oz . Pour que $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ ne soit pas nul, l'équation (8.6) doit nécessairement satisfaire

$$1 + \frac{4\pi e^2}{mk} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{\omega - kv_z} dv_z dv_x dv_y = 0 \quad (8.7)$$

L'équation (8.6) établit de manière implicite une relation entre ω et k dite relation de dispersion. Elle dépend de la forme fonctionnelle de la distribution des vitesses à l'équilibre de l'électron $f_0(\mathbf{v})$ que nous choisissons maxwellienne en vertu du théorème H

$$f_0(\mathbf{v}) = f_0(v_x, v_y, v_z) = \frac{n_{e0}}{\pi^{3/2} v_{te}^3} \exp\left\{-\frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{v_{te}^2}\right\} \quad (8.8)$$

v_{te} est la vitesse thermique de l'électron. En portant l'expression (8.8) dans la relation de dispersion (8.7) et en intégrant sur v_x et v_y moyennant l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = (\pi/\alpha)^{1/2} \quad (8.9)$$

nous obtenons

$$1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{\pi^{1/2} k v_{te}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_z}{\omega - kv_z} \exp(-v_z^2/v_{te}^2) \frac{dv_z}{v_{te}} = 0 \quad (8.10)$$

L'équation (8.10) comporte un dénominateur qui s'annule lorsque la composante v_z de la vitesse de l'électron suivant la direction de propagation de l'onde est égale à la vitesse de phase de l'onde

$$v_z = \omega/k \quad (8.11)$$

En d'autres termes, la phase de l'onde que voit l'électron ne change pas. Cette résonance entre l'onde et la particule induit un échange d'énergie grâce au mécanisme de Landau. Elle nécessite des vitesses électroniques non nulles et par conséquent ne peut avoir lieu dans un plasma froid (dans un plasma froid, par définition, f_0 est partout nulle sauf en $\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Dans le but de restreindre l'effet et le nombre des particules résonantes, nous nous limiterons au cas où les valeurs de v_z qui satisfont (8.11) excèdent de loin celle de v_{te} , c'est à dire

$$\frac{\omega}{k} \gg v_{te} \quad (8.12)$$

En utilisant alors le théorème du binôme

$$\frac{1}{\omega - kv_z} = \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{kv_z}{\omega} + \frac{k^2 v_z^2}{\omega^2} + \frac{k^3 v_z^3}{\omega^3} + \dots \right) \quad (8.13)$$

et les deux identités suivantes (n entier positif)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{(2n-1)!}{(2\alpha)^n} (\pi/\alpha)^{1/2} \quad (8.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \exp(-\alpha x^2) dx = 0 \quad (8.15)$$

nous déduisons de (8.10)

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{te}^2}{\omega^2} + \dots \right) = 0 \quad (8.16)$$

$$k_D = \omega_{pe}/v_{te} \quad (8.17)$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2}{k_D^2} \right) \quad (8.18)$$

ou

$$\omega \simeq \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2}{k_D^2} \right) \quad (8.19)$$

La condition de validité de la relation de dispersion (8.19) est donnée par $(k/k_D)^2 \ll 1$. Remarquons, au passage, que dans cette limite une description fluide des ondes de Langmuir, en termes de moments de la fonction de distribution électronique, est également correcte. Lorsque la condition précédente n'est pas satisfaite, l'effet qualitativement nouveau qu'apportera une description cinétique est un échange d'énergie entre les ondes de Langmuir et les électrons résonnants¹ ayant pour effet, suivant la forme de la fonction de distribution électronique, un amortissement ou une amplification de l'onde. Cet effet fait l'objet de la théorie de Landau de l'amortissement linéaire d'une onde électrostatique [182]. Rappelons, au passage, que si la fonction de distribution réduite unidimensionnelle des électrons dans la direction de propagation \mathbf{k} s'écrit $f_e(v)$, le taux d'amortissement ou d'amplification γ d'une onde de vecteur d'onde \mathbf{k} est donné par

$$\gamma \sim \left[-\frac{\partial f_e(v)}{\partial v} \right]_{v=\omega/k} \quad (8.20)$$

Dans le cas d'une distribution de vitesses électroniques Maxwellienne, on obtient un amortissement linéaire des ondes de Langmuir par les électrons dit "amortissement Landau thermique" et dont l'expression est donnée par

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} \left(\frac{k_D}{k} \right)^3 e^{-[\frac{1}{2}(k_D/k)^2 + 3/2]} \quad (8.21)$$

On vérifie aisément que pour $(k/k_D)^2 \ll 1$, le rapport γ/ω_{pe} est exponentiellement petit et devient significatif pour $k/k_D = 0.3$.

8.3 Couplage linéaire des ondes de Langmuir avec le mode de relaxation de la charge du grain de poussière

Nous considérons un plasma à trois composantes, formé d'électrons, d'ions et de grains de poussière de charge et de masse identiques. Dans un tel système, les équations du modèle fluide qui décrivent la propagation unidimensionnelle des ondes de Langmuir sont

¹C'est à dire les électrons dont la vitesse est égale à la vitesse de phase de l'onde.

données par [180]

$$\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = -\beta_e (n_e - n_{e0}) \quad (8.22)$$

$$m_e n_e \left(\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P_e}{\partial x} + e n_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8.23)$$

$$P_e = n_e T_e \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i - n_e - Z_d n_d) \quad (8.25)$$

ϕ , P_e et v_e représentent respectivement le potentiel électrostatique, la pression électronique et la vitesse fluide des électrons. Les ions, supposés infiniment massifs, ne contribuent pas au mouvement de l'onde. Les grains de poussière sont généralement plus lourds que les ions et les électrons. Par conséquent, l'échelle de temps caractéristique de leur dynamique est, de loin, beaucoup plus importante que celle des ondes de Langmuir. Ils sont immobiles et chargés négativement, $q_d = -Z_d e$. Le coefficient β_e que l'on peut assimiler à une fréquence de capture des électrons par les grains de poussière décrit la variation de la densité numérique des électrons. La charge q_d du grain se compose d'une valeur d'équilibre $q_{d0} = -e Z_{d0}$ à laquelle on superpose une partie fluctuante $q_{d1} = -e Z_{d1}$ régie par

$$\frac{\partial Z_{d1}}{\partial t} + \eta_c Z_{d1} = -\frac{I_{e1} + I_{i1}}{e} = -\frac{I_{e1}}{e} = \frac{|I_{e0}| n_{e1}}{e n_{e0}} \quad (8.26)$$

Les ions ne répondent pas à des perturbations dont l'échelle temporelle est de l'ordre de $\omega_{pe}^{-1} = (4\pi n_{e0} e^2 / m_e)^{-1/2}$ [très petit devant le temps de réponse des ions $\omega_{pi}^{-1} = (4\pi n_{i0} e^2 / m_i)^{-1/2}$] ou du temps de charge du grain de poussière. Le courant ionique de charge, I_i , ne sera donc sujet à aucune perturbation ($I_{i1} = 0$). La procédure standard de linéarisation des équations (8.22)-(8.26), similaire à celle déjà utilisée au cours du chapitre 2 de la présente thèse, nous permet d'obtenir la relation linéaire de dispersion des ondes de Langmuir

$$\omega^3 + id_1 \omega^2 - d_2 \omega - id_3 = 0 \quad (8.27)$$

avec

$$d_1 = (\eta_c + \beta_e) \quad (8.28)$$

$$d_2 = \beta_e \eta_c + 3 \frac{T_e}{m_e} k^2 + \omega_e^2 \quad (8.29)$$

$$d_3 = \eta_c \left(\omega_e^2 + 3 \frac{T_e}{m_e} k^2 \right) + \frac{n_{d0}}{n_{e0}} \frac{|I_{e0}|}{e} \omega_e^2 \quad (8.30)$$

L'équation (8.27) est cubique en ω et admet donc trois racines. Notons que si $\beta_e = \eta_c = I_{e0} = 0$, les racines correspondront aux ondes habituelles de Langmuir avec $\omega^2 = \omega_e^2 + 3 \frac{T_e}{m_e} k^2$. Il est possible de montrer que le couplage linéaire entre le processus de charge du grain et les ondes de Langmuir peut rendre instables ces dernières. Nous verrons, au cours de cette thèse, que lorsque le mouvement collectif des ions rentre en jeu, les ondes de Langmuir deviennent modulées sous l'action conjuguée d'une onde ionique et du processus de charge du grain de poussière.

8.4 Equations de Zakharov dans un plasma à deux composantes

Lorsque la contrainte $m_i = +\infty$ est levée, on se rend compte que dans un plasma uniforme, infini et sans champ extérieur, les équations obtenues après linéarisation du système Vlasov-Maxwell admettent une seconde solution de type onde plane électrostatique appelée "onde acoustique ionique" et dont la relation de dispersion est donnée par

$$\omega(k) = \omega_{pi} \frac{k \lambda_D}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_D^2}} \quad (8.31)$$

où $\omega_{pi} = (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pe}$ représente la fréquence plasma ionique. Les conditions de validité de cette relation de dispersion sont $(k \lambda_D)^2 \ll T_e/T_i$ avec $T_e/T_i \gg 1$. Lorsque ces conditions sont satisfaites, une description fluide des ondes acoustiques ioniques est également correcte. Comme pour les ondes de Langmuir, l'effet qualitativement nouveau apporté par une description cinétique lorsque la condition $(k \lambda_D)^2 \ll T_e/T_i$ n'est pas satisfaite est l'amortissement linéaire de Landau dont la forme "thermique" s'écrit, dans la limite $T_e/T_i \rightarrow \infty$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \mu^{1/2} \frac{\omega(k)}{(1 + k^2 \lambda_D^2)^{3/2}} \ll \omega(k)$$

où $\mu = m_e/m_i \ll 1$. Afin de tenir compte du mouvement des ions, V. E. Zakharov proposa en 1972, une description simplifiée de la dynamique non-linéaire d'un plasma à deux composantes. Pour cela, il considéra des oscillations de plasma électroniques, caractérisées

par un nombre d'onde k suffisamment petit pour que $(k\lambda)^2 \ll 1$ (limite fluide), couplées à des perturbations de densité basse fréquence quasi-neutres par l'intermédiaire de la force pondéromotrice. En moyennant alors les équations du mouvement sur une échelle de temps courts ($\sim \omega_{pe}^{-1}$), il obtint le système d'équations suivants [183]

$$i \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} = \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{n_{el}}{n_{e0}} \tilde{E} \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2 |\tilde{E}|^2}{\partial x^2} \quad (8.33)$$

où \tilde{E} désigne l'enveloppe complexe du champ électrostatique haute fréquence associé aux oscillations électroniques du plasma, n_{el} la perturbation de la densité électronique basse fréquence et $c_s = [(\gamma_e T_e + \gamma_i T_i)/m_i]^{1/2}$ la vitesse du son. Les équations couplées (8.32) et (8.33) sont communément appelées la première et la seconde équation de Zakharov. Le terme non linéaire de couplage de droite de l'équation de la densité (8.33) est la force pondéromotrice associée au champ électrique perturbé. Lorsque ce terme est négligeable, l'équation (8.33) peut être analysée à l'aide de la méthode de Fourier pour donner la relation de dispersion approximative de l'onde acoustique ionique. Comme nous le verrons plus tard, lorsque ce champ électrique est assez intense, il peut donner naissance à de larges cavités de densité². Lorsque le terme de droite de l'équation du champ électrique est négligeable, l'équation (8.32) peut être analysée à l'aide de la méthode de Fourier pour donner la relation de dispersion de l'onde de Langmuir. Le terme non linéaire de couplage représente donc l'effet de la perturbation de la densité dans cette relation de dispersion.

8.5 Le soliton de Langmuir

Réécrites dans le système d'unités sans dimensions suivant [183]

$$\eta = \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{T_e} \quad (8.34)$$

$$\tau = \left(\frac{2\eta}{3}\right) \left(\frac{m_e}{m_i}\right) (\omega_{pe} t) \quad (8.35)$$

²Des perturbations négatives de densité.

$$z = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\eta m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{\lambda_e}\right) \quad (8.36)$$

$$E = \left(\frac{1}{\eta}\right) \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{3\tilde{E}^2}{64\pi n_{e0} T_e}\right)^{1/2} \quad (8.37)$$

$$n = \left(\frac{3m_i}{4\eta m_e}\right) \left(\frac{n_{el}}{n_{e0}}\right) \quad (8.38)$$

les équations de Zakharov (8.32) et (8.33) prennent la forme, plus générale, suivante [183]

$$i\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = nE \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial z^2} \quad (8.40)$$

Les deux équations précédentes ont suscité un formidable intérêt de la part de la communauté scientifique. Pour résoudre le système d'équations (8.39)-(8.40), la méthode la plus simple et la moins "coûteuse" est celle qui consiste à rechercher les solutions stationnaires ($\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$) de (8.39) et (8.40) dans le référentiel du laboratoire. En intégrant deux fois l'équation (8.40) et en prenant égales à zéro les constantes d'intégration, nous obtenons la relation suivante

$$n = -|E|^2 \quad (8.41)$$

L'équation (8.39) devient alors

$$i\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + |E|^2 E = 0 \quad (8.42)$$

Eu égard à l'existence de similitudes entre (8.42) et l'équation habituelle de Schrödinger de la mécanique quantique, celle ci est communément appelée équation non linéaire de Schrödinger. Si maintenant nous choisissons une solution de la forme [183]

$$E(z, \tau) = \exp(i\Omega\tau) f(z) \quad (8.43)$$

nous obtenons

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \Omega f - f^3 \quad (8.44)$$

L'équation (8.44) peut être résolue grâce à la méthode dite du pseudo-potentiel déjà citée et utilisée dans les chapitres précédents pour résoudre, entre autres, l'équation de Korteweg- de Vries. Pour ce faire, l'équation (8.44) est réécrite sous la forme

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{d}{df} \left(\frac{1}{4} f^4 - \frac{1}{2} \Omega f^2 \right) \quad (8.45)$$

En multipliant chaque membre de (8.45) par df/dz et en intégrant une fois, il est aisé d'obtenir

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \Omega f^2 - \frac{1}{2} f^4 \quad (8.46)$$

ou

$$\int \frac{df}{f (\Omega - \frac{1}{2} f^2)} = z \quad (8.47)$$

Cette intégrale peut être calculée moyennant la condition $f > 0$ et le changement de variable suivant

$$u = (1 - f^2/2\Omega)^{1/2} \quad (8.48)$$

Le résultat final est alors donné par

$$f = (2\Omega)^{1/2} \operatorname{sech} (\Omega^{1/2} z) \quad (8.49)$$

Par conséquent, le champ électrique total (8.43) de l'onde sera donné par

$$E(z, \tau) = (2\Omega)^{1/2} \exp(i\Omega\tau) \operatorname{sech} (\Omega^{1/2} z) \quad (8.50)$$

Ce dernier peut être appelé Soliton de Langmuir.

8.5.1 Instabilités paramétriques

En présence d'une onde électromagnétique de grande amplitude³ des couplages non linéaires, ou couplage d'ondes, peuvent se produire et avoir lieu dans le plasma, excitant de manière résonnante les modes propres de ce dernier. Ces couplages d'ondes ne

³Une onde laser par exemple.

peuvent se développer que si l'onde de grande amplitude, appelée aussi onde de pompe, est suffisamment intense pour satisfaire certaines conditions dites de seuil. De tels couplages non linéaires représentent la possibilité d'échange de l'énergie entre les ondes elles mêmes. Dans le cas des instabilités paramétriques, l'onde de pompe se propageant dans le plasma est susceptible de se décomposer en deux ondes filles de fréquences inférieures et auxquelles elle cède progressivement son énergie. La première résonance paramétrique, la plus efficace, correspond aux conditions suivantes d'accords en fréquences et vecteurs d'ondes

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

où les indices 0, 1, 2 désignent respectivement l'onde de pompe et les deux ondes filles. Les pulsations ω_i satisfont les relations de dispersion linéaires $\omega_i = \omega_i(k_i)$. Dans un plasma sans dynamique ionique, les instabilités paramétriques d'une onde laser générant des ondes de Langmuir sont [184]

- *La diffusion Raman stimulée* : Dans ce cas, l'onde électromagnétique incidente (ω_0, \mathbf{k}_0) se décompose en une autre onde électromagnétique (ω_1, \mathbf{k}_1) et une onde plasma électronique (ω_2, \mathbf{k}_2) . Les relations de dispersion linéaires sont données par

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \omega_{pe}^2 + k_0^2 c^2 \\ \omega_1^2 &= \omega_{pe}^2 + k_1^2 c^2 > \omega_{pe}^2 \\ \omega_2^2 &= \omega_{pe}^2 (1 + 3k_2^2 \lambda_D^2) \simeq \omega_{pe}^2\end{aligned}\tag{8.51}$$

Remarquons que, étant donné que $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 > 2\omega_{pe}$, ce type d'instabilité ne peut se produire que si la fréquence de l'onde laser est au moins deux fois supérieure à la fréquence plasma locale⁴.

- *L'instabilité de décomposition à deux plasmons* : Dans ce cas, l'onde électromagnétique incidente (ω_0, \mathbf{k}_0) se décompose en deux ondes plasma électroniques (ω_1, \mathbf{k}_1) et

⁴Cela implique que la densité électronique ne doit pas dépasser une certaine valeur critique.

(ω_2, \mathbf{k}_2) dont les relations de dispersion sont données par

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \omega_{pe}^2 + k_0^2 c^2 \\ \omega_{1,2}^2 &= \omega_{pe}^2 (1 + 3k_{1,2}^2 \lambda_D^2) \simeq \omega_{pe}^2\end{aligned}\tag{8.52}$$

On en déduit alors $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \simeq 2\omega_{pe}$. Ce type de décomposition ne se produit donc qu'au voisinage du quart de la densité critique. Lorsque l'amplitude des ondes "filles" n'est plus négligeable devant l'amplitude de l'onde de pompe, cette dernière commence à décroître. Cet appauvrissement, ou déplétion, de l'onde de pompe a pour conséquence une diminution du taux de croissance de l'instabilité. L'appauvrissement de l'onde "mère" représente donc un mécanisme efficace de transfert de l'énergie de l'onde laser vers les modes propres du plasma. L'énergie des "ondes filles" est ensuite dissipée soit par collisions, soit sous forme d'énergie thermique, soit, dans le cas d'amplitudes importantes, sous forme de génération d'électrons chauds. Considérons une onde plane d'amplitude finie dans un plasma à deux composantes. Du point de vue de la théorie fluide, ce système (onde + plasma) peut être perçu comme étant un état d'équilibre dépendant du temps. Nous pouvons alors nous poser la question suivante : un tel équilibre est-il stable ou instable ? C'est la même question que nous nous sommes déjà posés concernant les états d'équilibre indépendants du temps de l'équation de Vlasov. La réponse à une telle question indique souvent l'existence d'instabilités, et de telles instabilités sont appelées instabilités paramétriques, l'amplitude de l'onde jouant alors le rôle de paramètre. Ces instabilités peuvent être inhérentes à n'importe quel type d'onde. Pour notre part, nous nous limiterons aux ondes de Langmuir dont la stabilité peut être étudiée dans le contexte des équations de Zakharov (8.39) et (8.40). Dans ce cas, l'instabilité la plus générale fait intervenir une onde de Langmuir d'amplitude finie, deux autres ondes de Langmuir et une onde de basse fréquence. Les amplitudes des deux autres ondes de Langmuir et de l'onde de basse fréquence sont supposées infinitésimales. Nous inspirant du travail de Nicholson, nous choisissons

$$E(z, \tau) = E_0 \exp(-i\omega_0\tau + ik_0z) + E_+ \exp[-i(\omega_0 + \omega)\tau + i(k_0 + k)z] + E_- \exp[-i(\omega_0 - \omega^*)\tau + i(k_0 - k)z] \quad (8.53)$$

et

$$n = \tilde{n} \exp(-i\omega\tau + ikz) + c.c \quad (8.54)$$

Les amplitudes \tilde{n} , E_+ , E_- sont plus petites que E_0 . La solution d'équilibre

$$E(z, \tau) = E_0 \exp(-i\omega_0\tau + ik_0z) \quad (8.55)$$

$$n(z, \tau) = 0 \quad (8.56)$$

est choisie de telle manière à satisfaire les équations de Zakharov (8.39) et (8.40) ($\omega_0 = k_0^2$). En insérant les expressions (8.53) et (8.54) dans la première équation de Zakharov (8.39) et en gardant uniquement les termes à dépendance spatiale en $\exp[i(k_0 + k)z]$, nous obtenons

$$(\omega_0 + \omega) E_+ - (k_0 + k)^2 E_+ = \tilde{n} E_0 \quad (8.57)$$

De même, les termes dont la dépendance spatiale est de la forme $\exp[i(k_0 - k)z]$ donnent

$$(\omega_0 - \omega^*) E_- - (k_0 - k)^2 E_- = \tilde{n}^* E_0 \quad (8.58)$$

En portant les expressions de E_+ et de E_- , déduites à partir de (8.57) et (8.58), dans la seconde équation de Zakharov (8.40), en gardant uniquement les termes à dépendance spatiale $\sim \exp(ikz)$ et en éliminant \tilde{n} de chaque terme, nous obtenons la relation de dispersion suivante

$$\omega^2 - k^2 = k^2 E_0^2 \left(\frac{1}{\omega - k^2 - 2k_0 k} + \frac{1}{-\omega - k^2 + 2k_0 k} \right) \quad (8.59)$$

L'équation (8.59) peut admettre plusieurs types de solutions. Pour $k_0 > 0$, nous recherchons d'abord une instabilité avec $k < 0$. Si $|\omega|$ est petit, le second dénominateur de (8.59) est plus grand que le premier et par conséquent, nous ignorons le second terme.

En réalité, cela équivaut à ignorer le terme E_- dans l'expression du champ électrique (8.53). Cette instabilité ne requerra donc que E_0 , E_+ et \tilde{n} et c'est pour cela qu'elle est dite interaction à trois ondes. La relation de dispersion (8.59) devient

$$(\omega^2 - k^2) (\omega - 2kk_0 - k^2) - k^2 E_0^2 = 0 \quad (8.60)$$

Une solution de la forme $\omega = k + \delta$, avec $|\delta| \ll |k|$, permet de réécrire (8.60) comme

$$\delta^2 + \delta (k - 2kk_0 - k^2) - \frac{kE_0^2}{2} = 0 \quad (8.61)$$

A la valeur particulière négative du nombre d'onde k qui satisfait $k - 2kk_0 - k^2 = 0$ ou $k = -2k_0 + 1$, correspond la solution

$$\delta = \pm \left(\frac{kE_0^2}{2} \right)^{1/2} \quad (8.62)$$

Celle ci indique l'existence d'une instabilité étant donné que $k < 0$. Si $k_0 \gg 1$, (8.62) devient

$$\delta = ik_0^{1/2} E_0 \quad (8.63)$$

Par ailleurs, la relation de dispersion (8.59) peut admettre l'existence d'une instabilité, dite interaction à quatre ondes, qui fait intervenir tous les termes en présence. Le cas le plus simple est celui pour lequel $\omega_0 = k_0 = 0$. Dans le cas d'une instabilité purement croissante $\omega = i\gamma$, la relation de dispersion (8.59) devient

$$(\gamma^2 + k^2) (\gamma^2 + k^4) - 2k^4 E_0^2 = 0 \quad (8.64)$$

dont la solution est donnée par

$$\gamma^2 = -\frac{1}{2} (k^2 + k^4) + \frac{1}{2} \left[(k^2 - k^4)^2 + 8k^4 E_0^2 \right]^{1/2} \quad (8.65)$$

Avec $k \ll 1$ et $E_0 \ll 1$, le terme en k^8 peut être négligé et la racine carrée développée pour donner

$$\gamma = k (2E_0^2 - k^2)^{1/2}$$

représentant le taux d'accroissement de l'interaction à quatre ondes.

8.6 Equations de Zakharov modifiées

8.6.1 La première équation modifiée de Zakharov

En portant la décomposition suivante

$$n_e(x, t) = n_{e0} + n_{el}(x, t) + n_{eh}(x, t) \quad (8.66)$$

$$n_i(\mathbf{r}, t) = n_{i0} + n_{il}(\mathbf{r}, t) \quad (8.67)$$

$$n_d(\mathbf{r}, t) = n_{d0} + n_{dl}(\mathbf{r}, t) \quad (8.68)$$

$$v_e(\mathbf{r}, t) = v_{el}(\mathbf{r}, t) + v_{eh}(\mathbf{r}, t) \quad (8.69)$$

$$v_i(\mathbf{r}, t) = v_{il}(\mathbf{r}, t) + v_{ih}(\mathbf{r}, t) \quad (8.70)$$

$$v_d(\mathbf{r}, t) = v_{dl}(\mathbf{r}, t) + v_{dh}(\mathbf{r}, t) \quad (8.71)$$

$$Z_d(\mathbf{r}, t) = Z_{d0} + Z_{dl}(\mathbf{r}, t) \quad (8.72)$$

$$E(\mathbf{r}, t) = E_l(\mathbf{r}, t) + E_h(\mathbf{r}, t) \quad (8.73)$$

dans les équations (8.22)-(8.25), nous déduisons aisément

$$i \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} \nabla^2 \tilde{E} = \left(-i \frac{\beta_e}{2} + \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{n_{el}}{n_{e0}} \right) \tilde{E} \quad (8.74)$$

C'est la première équation modifiée de Zakharov. Comme de coutume, les termes $\left| \partial_t \tilde{E} \right| \ll \left| \omega_{pe} \tilde{E} \right|$ and $\left| \partial_t^2 \tilde{E} \right| \ll \left| \omega_{pe} \partial_t \tilde{E} \right|$ ont été négligés. Le coefficient β_e peut être vu comme un coefficient d'amortissement [185].

8.6.2 La seconde équation modifiée de Zakharov

Nous allons maintenant établir la seconde équation de Zakharov dans un plasma poussiéreux en tenant compte de manière self consistante de la dynamique des grains et de la fluctuation de leur charge. Le système est composé d'électrons maxwelliens, d'ions positifs

à distribution quelconque et de grains de poussière froids de densités respectives n_e , n_i , et n_d . Les grains de poussière sont chargés négativement, $Q_d = -eZ_d$. Considérons alors la partie basse fréquence des équations de mouvement et de continuité des trois espèces de particules présentes dans le plasma

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_{el}}{\partial t} = -e\mathbf{E}_l + \mathbf{F}_p + \alpha_e \nabla n_{el} \quad (8.75)$$

$$\frac{\partial n_{el}}{\partial t} + n_{e0} \nabla \cdot \mathbf{v}_{el} = 0 \quad (8.76)$$

$$m_i \frac{\partial \mathbf{v}_{il}}{\partial t} = e\mathbf{E}_l + \alpha_i \nabla n_{il} \quad (8.77)$$

$$\frac{\partial n_{il}}{\partial t} + n_{i0} \nabla \cdot \mathbf{v}_{il} = 0 \quad (8.78)$$

$$m_d \frac{\partial \mathbf{v}_{dl}}{\partial t} = -Z_d e \mathbf{E}_l \quad (8.79)$$

$$\frac{\partial n_{dl}}{\partial t} + n_{d0} \nabla \cdot \mathbf{v}_{dl} = 0 \quad (8.80)$$

avec $\alpha_{e,i} = -\gamma_{e,i} T_{e,i} / n_{e0,i0}$ et $\gamma_{e,i}$. L'expression de \mathbf{F}_p , la force pondéromotrice de basse fréquence ou force de Miller s'exerçant sur les électrons, est donnée par

$$\mathbf{F}_p = -\frac{e^2}{4m_e \omega_{pe}^2} \nabla \left| \tilde{E} \right|^2 \quad (8.81)$$

Aux équations (8.75)-(8.80), nous adjoignons l'équation de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_l = 4\pi (en_{il} - en_{el} + q_{d0}n_{dl} + n_{d0}q_{dl}) \quad (8.82)$$

La charge totale q_d du grain se compose de $q_{d0} = -eZ_{d0}$ et d'une partie fluctuante basse fréquence q_{dl} dont l'évolution est régie par

$$\frac{\partial q_{dl}}{\partial t} + \eta_c q_{dl} = -|I_{e0}| \frac{n_{el}}{n_{e0}} + e \int_0^\infty f_{il} v \sigma(v, q_{d0}) d^3v \quad (8.83)$$

f_{il} est la perturbation de la fonction de distribution des ions que nous calculerons de manière self consistante, n_{el} la perturbation de la densité électronique et le dernier terme provient de la perturbation du courant de grain ionique. η_c désigne le taux de charge du grain. Les électrons sont en équilibre thermique et leur densité est donnée par la distribu-

tion de Maxwell-Boltzmann. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les perturbations de densité que nous considérons ici sont de basse fréquence. Les grains étant beaucoup plus lourds que les électrons et les ions, l'échelle de temps de leur dynamique est plus longue et donc q_{dl} peut être à juste titre traitée comme une fluctuation de basse fréquence. $\sigma(v, q_{d0})$ est la section efficace de collision d'un ion avec un grain de poussière. Nous allons suivre la méthode de dérivation suivante. Les équations [(8.75) et (8.76)], [(8.77) et (8.78)], [(8.79) et (8.80)] nous permettent d'écrire respectivement

$$\frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} = \frac{en_{e0}}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E}_l - \frac{n_{e0}}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{F}_p - \frac{\alpha_e n_{e0}}{m_e} \nabla^2 n_{el} \quad (8.84)$$

$$\frac{\partial^2 n_{il}}{\partial t^2} = -\frac{en_{i0}}{m_i} \nabla \cdot \mathbf{E}_l - \frac{\alpha_i n_{i0}}{m_i} \nabla^2 n_{il} \quad (8.85)$$

$$\frac{\partial^2 n_{dl}}{\partial t^2} = -\frac{q_{d0} n_{d0}}{m_d} \nabla \cdot \mathbf{E}_l \quad (8.86)$$

De l'équation (8.84), nous tirons

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_l = \frac{m_e}{en_{e0}} \left\{ \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} + \frac{n_{e0}}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{F}_p + \frac{\alpha_e n_{e0}}{m_e} \nabla^2 n_{el} \right\} \quad (8.87)$$

En portant (8.87) dans (8.85) et (8.86) et moyennant $\nabla^2 n_{el} \simeq \nabla^2 n_{il}$, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 n_{il}}{\partial t^2} = -\frac{n_{i0}}{n_{e0}} \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} - \frac{n_{i0}}{m_i} \nabla \cdot \mathbf{F}_p - \frac{n_{i0}}{m_i} (\alpha_e + \alpha_i) \nabla^2 n_{el} \quad (8.88)$$

et

$$\frac{\partial^2 n_{dl}}{\partial t^2} = -\frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{d0}}{n_{e0}} \frac{m_e}{m_d} \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} - \frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{d0}}{m_d} \nabla \cdot \mathbf{F}_p - \alpha_e \frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{d0}}{m_d} \nabla^2 n_{el} \quad (8.89)$$

De la condition de quasineutralité

$$en_e + q_d n_d = en_i \quad (8.90)$$

nous déduisons

$$q_{dl} = e \left(\frac{n_{el}}{n_{d0}} - \frac{n_{il}}{n_{d0}} - \frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{dl}}{n_{d0}} \right) \quad (8.91)$$

De l'équation (8.83), nous tirons

$$\frac{\partial^3 q_{dl}}{\partial t^3} + \eta_c \frac{\partial^2 q_{dl}}{\partial t^2} = -\frac{|I_{e0}|}{n_{e0}} \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} + e \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty f_{il} v \sigma(v, q_{d0}) d^3 v \quad (8.92)$$

En utilisant (8.91), (8.92) devient

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{n_{d0}} \frac{\partial^3 n_{il}}{\partial t^3} + \frac{e}{n_{d0}} \frac{\partial^3 n_{el}}{\partial t^3} - \frac{q_{d0}}{n_{d0}} \frac{\partial^3 n_{dl}}{\partial t^3} - \frac{\eta_c e}{n_{d0}} \frac{\partial^2 n_{il}}{\partial t^2} + \left(\frac{\eta_c e}{n_{d0}} + \frac{|I_{e0}|}{n_{e0}} \right) \frac{\partial^2 n_{el}}{\partial t^2} - \frac{\eta_c q_{d0}}{n_{d0}} \frac{\partial^2 n_{dl}}{\partial t^2} \\ & = e \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty f_{il} v \sigma(v, q_{d0}) d^3 v \end{aligned} \quad (8.93)$$

Des équations (8.88) et (8.89), il est possible d'avoir

$$\frac{\partial^3 n_{il}}{\partial t^3} = -\frac{n_{i0}}{n_{e0}} \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^3 n_{el}}{\partial t^3} - \frac{n_{i0}}{m_i} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{F}_p - \frac{n_{i0}}{m_i} (\alpha_e + \alpha_i) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 n_{el} \quad (8.94)$$

et

$$\frac{\partial^3 n_{dl}}{\partial t^3} = -\frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{d0}}{n_{e0}} \frac{m_e}{m_d} \frac{\partial^3 n_{el}}{\partial t^3} - \frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{d0}}{m_d} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{F}_p - \alpha_e \frac{q_{d0}}{e} \frac{n_{d0}}{m_d} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 n_{el} \quad (8.95)$$

Nous obtenons finalement

$$[A \partial_t^3 + B \partial_t^2 + (C - D \partial_t) \nabla^2] n_{el} = (E + F \partial_t) \nabla^2 |\tilde{E}|^2 + n_{d0} \partial_t^2 \int_0^\infty f_{il} v \sigma(v, q_{d0}) d^3 v \quad (8.96)$$

avec

$$A = 1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{n_{i0}}{n_{e0}} + \frac{q_{d0}^2}{e^2} \frac{m_e}{m_d} \frac{n_{d0}}{n_{e0}} \quad (8.97)$$

$$B = \eta_c \left(1 + \frac{q_{d0}^2}{e^2} \frac{n_{d0}}{n_{e0}} \frac{m_e}{m_d} + \frac{m_e}{m_i} \frac{n_{i0}}{n_{e0}} \right) + \frac{|I_{e0}|}{e} \frac{n_{d0}}{n_{e0}} \quad (8.98)$$

$$C = \eta_c \left[(\alpha_e + \alpha_i) \frac{n_{i0}}{m_i} + \frac{q_{d0}^2}{e^2} \alpha_e \frac{n_{d0}}{m_d} \right] \quad (8.99)$$

$$D = -(\alpha_e + \alpha_i) \frac{n_{i0}}{m_i} - \frac{q_{d0}^2}{e^2} \alpha_e \frac{n_{d0}}{m_d} \quad (8.100)$$

$$E = \frac{e^2}{4m_e \omega_{pe}^2} \eta_c \left(\frac{n_{i0}}{m_i} + \frac{q_{d0}^2}{e^2} \frac{n_{d0}}{m_d} \right) \quad (8.101)$$

$$F = \frac{e^2}{4m_e \omega_{pe}^2} \left(\frac{n_{i0}}{m_i} + \frac{q_{d0}^2}{e^2} \frac{n_{d0}}{m_d} \right) \quad (8.102)$$

L'équation (8.96) est la seconde équation de Zakharov modifiée. A l'instar de la première, Eq. (8.74), elle ne requiert que n_{el} et \tilde{E} . Par conséquent, nous disposons maintenant d'un système de deux équations couplées à deux variables. Elle décrit le couplage entre le processus de charge du grain, de l'amplitude lentement variable \tilde{E} et la densité ionique locale n_{el} . Notons qu'en l'absence des grains de poussière, l'équation (8.96) se réduit à l'équation habituelle, bien connue, de l'onde acoustique ionique

$$\partial_t^2 n_{el} - \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i} \nabla^2 n_{el} = \frac{1}{16\pi m_i} \nabla^2 |\tilde{E}|^2 \quad (8.103)$$

Dans le cas de grains de poussière à charge fixe, l'équation (8.96) devient

$$(A\partial_t^2 - D\nabla^2) n_{el} = F\nabla^2 |\tilde{E}|^2 \quad (8.104)$$

Notons que lorsque les ions, à l'instar des électrons, sont décrits par une distribution de Maxwell-Boltzmann (cas de l'onde acoustique poussiéreuse), l'équation (8.83) peut être écrite sous la forme bien connue suivante [7]

$$\frac{\partial q_{dl}}{\partial t} + \eta_c q_{dl} = -|I_{e0}| \left(\frac{n_{el}}{n_{e0}} - \frac{n_{il}}{n_{i0}} \right) \quad (8.105)$$

En suivant les mêmes étapes que précédemment pour établir la seconde équation modifiée de Zakharov (8.96), il est alors aisé d'obtenir

$$[A_1 \partial_t^3 + B_1 \partial_t^2 + (C_1 - D_1 \partial_t) \nabla^2] n_{el} = (E_1 + F_1 \partial_t) \nabla^2 |\tilde{E}|^2 \quad (8.106)$$

avec

$$A_1 = 1 + \frac{m_e n_{i0}}{m_i n_{e0}} + \frac{q_{d0}^2 m_e n_{d0}}{e^2 m_d n_{e0}} \quad (8.107)$$

$$B_1 = \eta_c \left(1 + \frac{q_{d0}^2 n_{d0} m_e}{e^2 n_{e0} m_d} + \frac{m_e n_{i0}}{m_i n_{e0}} \right) + \frac{|I_{e0}| n_{d0}}{e n_{e0}} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \quad (8.108)$$

$$C_1 = \eta_c \left[(\alpha_e + \alpha_i) \frac{n_{i0}}{m_i} + \frac{q_{d0}^2 \alpha_e n_{d0}}{e^2 m_d} \right] + \frac{|I_{e0}|}{e} (\alpha_e + \alpha_i) \frac{n_{d0}}{m_i} \quad (8.109)$$

$$D_1 = -(\alpha_e + \alpha_i) \frac{n_{i0}}{m_i} - \frac{q_{d0}^2 \alpha_e n_{d0}}{e^2 m_d} \quad (8.110)$$

$$E_1 = \frac{e^2}{4m_e\omega_{pe}^2} \left[\eta_c \left(\frac{n_{i0}}{m_i} + \frac{q_{d0}^2 n_{d0}}{e^2 m_d} \right) + \frac{n_{d0}}{m_i} \frac{|I_{e0}|}{e} \right] \quad (8.111)$$

$$F_1 = \frac{e^2}{4m_e\omega_{pe}^2} \left(\frac{n_{i0}}{m_i} + \frac{q_{d0}^2 n_{d0}}{e^2 m_d} \right) \quad (8.112)$$

8.6.3 Instabilités paramétriques

Nous allons maintenant analyser, de manière succincte et non exhaustive, les instabilités paramétriques dans le contexte des nouvelles équations modifiées de Zakharov. Tout d'abord, notons que la fonction de distribution perturbée des ions f_{il} peut être obtenue à partir de l'équation de Vlasov linéarisée

$$f_{il} = -\frac{ek\phi_l}{m_i} \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_x} / (\omega - kv_x) \quad (8.113)$$

ϕ_l est le potentiel du plasma perturbé et les quantités perturbées sont supposées être de la forme $\exp[-i(\omega t - kx)]$. La densité électronique totale est donnée par la distribution de Maxwell-Boltzmann que nous linéarisons pour obtenir [186], [187]

$$n_{el} = n_{e0} \frac{e\phi_l}{T_e} = n_{e0} \frac{e}{T_e} \left(\phi_{es,l} - \frac{|\tilde{E}|^2}{4\pi n_{e0} e} \right) \quad (8.114)$$

où $\phi_{es,l}$ est le potentiel électrostatique (ambipolaire, du à la charge d'espace) de basse fréquence et le second terme représente la force pondéromotrice de l'onde de Langmuir. Cette dernière agira sur les ions et les grains de poussière à travers l'équation de Poisson. Par conséquent, la perturbation du courant ionique de charge peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} I_{il} &= e \int_0^\infty f_{il} v \sigma(v, q_{d0}) d^3v = -\frac{e^2 \phi_l}{m_i} \int_0^\infty \frac{\frac{\partial f_{i0}}{\partial v_x}}{v_\phi - v_x} v \sigma(v, q_{d0}) d^3v = \\ &= -\frac{eT_e}{m_i n_{e0}} \left[\int_0^\infty \frac{\frac{\partial f_{i0}}{\partial v_x}}{v_\phi - v_x} v \sigma(v, q_{d0}) d^3v \right] n_{el} \end{aligned} \quad (8.115)$$

et l'équation (8.96) devient

$$[A\partial_t^3 + B'\partial_t^2 + (C - D\partial_t) \nabla^2] n_{el} = (E + F\partial_t) \nabla^2 |\tilde{E}|^2 \quad (8.116)$$

où

$$B' = B + \frac{n_{d0} T_e}{n_{e0} m_i} \int_0^\infty \frac{\frac{\partial f_{i0}}{\partial v_x}}{v_\phi - v_x} v \sigma(v, q_{d0}) d^3 v \quad (8.117)$$

L'intégrale qui apparaît dans (8.115) et (8.117) peut être effectuée en utilisant les coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses [43]

$$\int_0^\infty \frac{\frac{\partial f_{i0}}{\partial v_x}}{v_\phi - v_x} v \sigma(v, Q_{d0}) d^3 v = -\frac{2 k^2 I_{i0}}{3 \omega^2 e} [1 + (1 - e Q_{d0} / C T_i)^{-1}] \quad (8.118)$$

Dans notre cas, l'instabilité la plus générale requiert une onde de Langmuir d'amplitude finie, deux autres ondes de Langmuir et une onde de basse fréquence. Nous supposons alors une solution de la forme [183]

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, t) = & E_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) + E_+ \exp[-i(\omega_0 + \omega)t + i(k_0 + k)x] + \\ & E_- \exp[-i(\omega_0 - \omega^*)t + i(k_0 - k)x] \end{aligned} \quad (8.119)$$

et

$$n_{ei} = \tilde{n} \exp(-i\omega t + ikx) + c.c \quad (8.120)$$

où \tilde{n} , E_- , and E_+ sont plus petits que E_0 . En insérant les formes (8.119) et (8.120) dans la première équation de Zakharov modifiée (8.74) (with $\beta_e = 0$) et en ne retenant que les termes à dépendance spatiale de la forme $\exp[i(k_0 + k)x]$, nous obtenons

$$E_+ \left(\omega - \frac{3 v_{te}^2}{2 \omega_{pe}} k^2 - 3 k k_0 \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} \right) = \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{\tilde{n}}{n_{e0}} E_0 \quad (8.121)$$

Les termes à dépendance spatiale de la forme $\exp[i(k_0 - k)x]$ donnent

$$E_- \left(-\omega^* - \frac{3 v_{te}^2}{2 \omega_{pe}} k^2 + 3 k k_0 \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} \right) = \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{\tilde{n}^*}{n_{e0}} E_0 \quad (8.122)$$

En insérant les expressions de E_+ et E_- dans la seconde équation modifiée de Zakharov (8.116), nous obtenons la relation de dispersion suivante

$$\begin{aligned} & iA\omega^3 - B\omega^2 - iDk^2\omega - Ck^2 + \frac{2n_{d0}T_e I_{i0}}{3n_{e0}e m_i} [1 + (1 - eq_{d0}/CT_i)^{-1}] k^2 \\ &= -\frac{k^2 E_0^2 \omega_{pe}}{2n_{e0}} \left(\frac{E - iF\omega}{-\omega - \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} k^2 + 3kk_0 \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}}} + \frac{1}{\omega - \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} k^2 - 3kk_0 \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}}} \right) \end{aligned} \quad (8.123)$$

qui représente la relation de dispersion modifiée de l'instabilité paramétrique. L'équation (8.123) peut être résolue numériquement pour déduire les taux de croissance et les seuils des instabilités paramétriques. L'équation (8.123) montre que les impuretés peuvent altérer les caractéristiques et l'amortissement des instabilités paramétriques en réduisant leur vitesse de phase et en causant un amortissement dû au processus de la variation de la charge. Intéressons nous à l'interaction à trois ondes pour laquelle $E_- = 0$ dans (8.119). Si $|\omega|$ est petit, le premier dénominateur de droite est plus grand que le second. Nous pouvons donc ignorer le premier terme. La relation de dispersion (8.123) pour le couplage de l'interaction à trois ondes et le mode de relaxation de la charge du grain prend la forme

$$\begin{aligned} & \left\{ iA\omega^3 - B\omega^2 - iDk^2\omega - Ck^2 + \frac{2n_{d0}T_e I_{i0}}{3n_{e0}e m_i} \left[1 + \left(1 - \frac{eq_{d0}}{CT_i} \right)^{-1} \right] k^2 \right\} \left(\omega - \frac{3}{2} \frac{v_e^2}{\omega_{pe}} k^2 - 3kk_0 \frac{v_e^2}{\omega_{pe}} \right) \\ &= -\frac{k^2 E_0^2 \omega_{pe}}{2n_{e0}} \end{aligned} \quad (8.124)$$

Quoique (8.124) peut être résolue analytiquement, nous nous limiterons à un cas très limite. En prenant $I_{i0} \sim 0$, $C \sim 0$ et $E_0 \sim 0$, nous obtenons à partir de (8.124)

$$\omega = \frac{B \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4ADk}{2iA}}}{2iA} \quad (8.125)$$

qui indique l'existence d'un mode purement amorti pour $k = \frac{B^2}{4AD}$, avec

$$\omega = -i \frac{\eta_c \left(1 + \frac{q_{d0}^2 n_{d0} m_e}{e^2 n_{e0} m_d} + \frac{m_e n_{i0}}{m_i n_{e0}} \right) + \frac{|I_{e0}| n_{d0}}{e n_{e0}}}{2 \left(1 + \frac{m_e n_{i0}}{m_i n_{e0}} + \frac{q_{d0}^2 m_e n_{d0}}{e^2 m_d n_{e0}} \right)}$$

8.7 Solution stationnaire des équations modifiées de Zakharov

8.7.1 Cas de la charge fixe

Nous allons, dans ce qui suit, nous intéresser aux solutions stationnaires des équations modifiées de Zakharov dans le cas de la charge fixe et des systèmes périodiques. La période L est suffisamment large et l'extension individuelle des solitons est petite devant L . Une solution analytique des équations modifiées de Zakharov (8.74) et (8.104) dans un repère se mouvant avec une vitesse v peut alors être trouvée en utilisant la méthode de l'énergie [188], [189]. En utilisant la même normalisation que celle déjà utilisée, les équations (8.74) (avec $\beta = 0$) et (8.104) à une dimension deviennent

$$\partial_t^2 n - a_1 \partial_x^2 n = a_2 \partial_x^2 |E|^2 \quad (8.126)$$

$$i\partial_t E + \partial_x^2 E = nE \quad (8.127)$$

où

$$a_1 = \frac{D t_n^2}{A x_n^2} \quad (8.128)$$

$$a_2 = \frac{F t_n^2 E_n^2}{A x_n^2 n_n} \quad (8.129)$$

avec $t_n = \frac{3}{2\eta} \frac{m_i}{m_e} \omega_{pe}^{-1}$, $x_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\eta} \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \lambda_{De}$, $E_n = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \eta \left(\frac{64\pi n_{e0} T_e}{3} \right)^{1/2}$, $n_n = \frac{4}{3} \eta \frac{m_e}{m_i} n_{e0}$ et $\eta = (\gamma_e T_e + \gamma_i T_i)/T_e$. Remarquons qu'en l'absence de grains de poussière $a_1 = a_2 = 1$. Nous supposons des solutions de formes suivantes

$$E(x, t) = F(x - vt) e^{i\phi(x-vt)} \quad (8.130)$$

et

$$n(x, t) = G(x - vt) \quad (8.131)$$

Par conséquent, l'équation (8.127) donne

$$G(x - vt) = -a_2 \frac{|F(x - vt)|^2}{a_1 - v^2} + n_0 \quad (8.132)$$

n_0 est une constante d'intégration choisie telle que

$$\langle n \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L n(x, t) dx = 0 \quad (8.133)$$

En portant les expressions (8.130) et (8.131) dans l'équation (8.126), nous obtenons

$$\phi = \frac{v}{2} \quad (8.134)$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = F \left(\frac{v^2}{4} - \frac{uv}{2} + n_0 \right) - \frac{a_2}{a_1 - v^2} F^3 \quad (8.135)$$

où

$$\xi = x - vt \quad (8.136)$$

L'équation précédente admet pour solution

$$F(\xi) = E_{\max} dn(w, q) \quad (8.137)$$

où $dn(w, q)$ est la fonction elliptique Jacobienne [190], [191] avec

$$w = \sqrt{\frac{a_2/a_1}{2(1 - v^2/a_1)}} E_{\max}(\xi) \quad (8.138)$$

et

$$q = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - E_{\min}^2}}{E_{\max}} \quad (8.139)$$

E_{\max} and E_{\min} sont les valeurs maximale et minimale du champ électrique. Pour que l'équation (8.137) soit solution de l'équation (8.135), nous devons avoir

$$u = \frac{v}{2} + 2\frac{n_0}{v} - \frac{a_2/a_1}{v(1 - v^2/a_1)} (E_{\max}^2 + E_{\min}^2) \quad (8.140)$$

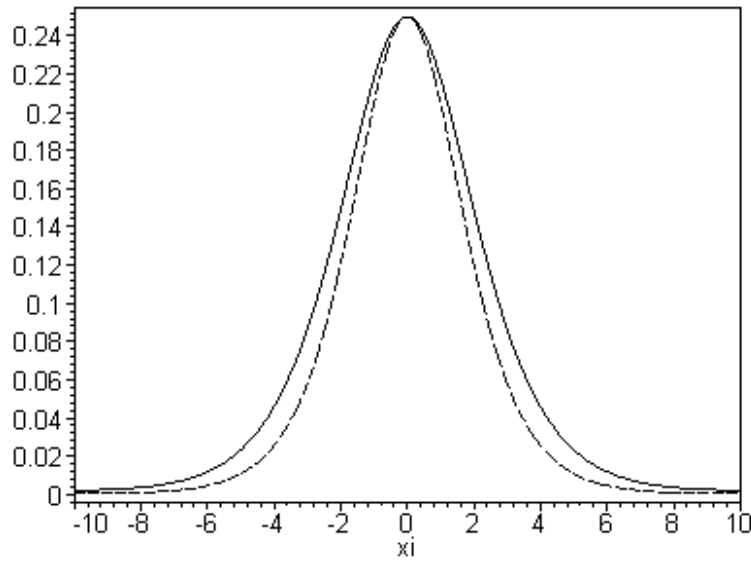


Fig.1- Tracé de la valeur absolue du champ électrique E en fonction de la variable $\xi = x - vt$.

alors que la période de la fonction elliptique Jacobienne est donnée par

$$L = \frac{2}{E_{\max}} \sqrt{\frac{2(a_1 - v^2)}{a_1}} K(q) = \frac{2}{E_{\max}} \sqrt{\frac{2(a_1 - v^2)}{a_1}} K' \left(\frac{E_{\min}}{E_{\max}} \right) \quad (8.141)$$

K et K' sont les intégrales elliptiques complètes de première espèce [190], [191] avec $K(q) = K'(\sqrt{1 - q^2})$. Dans le cas d'une solution périodique, le terme exponentiel de (8.130) doit aussi avoir une période égale à L

$$\frac{v}{2}L = 2\pi m, \quad m = 1, 2, 3... \quad (8.142)$$

Lorsque la valeur minimale du champ électrique E_{\min} est égale à zéro ($q = 1$), la période de la fonction elliptique devient infinie et $dn(w, 1) = \operatorname{sech} w$. Nous retrouvons alors la forme hyperbolique habituelle. La solution analytique (8.130) de (8.74) et (8.104) peut alors s'écrire sous la forme

$$E(x, t) = E_{\max} dn(w, q) e^{i\phi(x-ut)} \quad (8.143)$$

que l'on peut alors appeler soliton poussiéreux de Langmuir. Le profil (8.130) de ce dernier est représenté par la figure 1 pour deux valeurs différentes de Z_{d0} ($Z_{d0} = 0$ and $Z_{d0} = 10^5$). Les valeurs de Z_{d0} ont été choisies à partir des observations effectuées sur les anneaux

de Saturne et la queue de la comète de Halley. La figure en trait plein a été obtenue moyennant les paramètres suivants : absence de grains de poussière avec $a_1 = a_2 = 1$, $m = 1$, $L = 20$, $E_{\max} = 0.5$, $v = 0.6283185308$ et $E_{\min} = 0.02128206610$ alors que la figure en pointillé a été obtenue moyennant les paramètres suivants : présence de grains de poussière avec $Z_{d0} = 10^5$, $n_{d0} = 10^3$, $a_1 = 568, 5196$, $a_2 = 647, 3907$, $a_2/a_1 = 1.1387$, $m = 1$, $L = 20$, $E_{\max} = 0.5$, $v = 0.6283185308$ et $E_{\min} = 0.04618748841$. Il apparaît clairement à partir de la figure 1 que la présence des grains de poussière affecte la largeur du soliton de Langmuir. La largeur du soliton croit lorsque les particules de poussière sont introduites dans le plasma. Un effet similaire a d'ailleurs été observé lors d'une récente expérience sur les ondes solitaires acoustiques ioniques dans un plasma poussiéreux [192].

8.7.2 Cas de la charge variable

Une solution analytique des équations modifiées de Zakharov (8.74) et (8.104) dans un repère se mouvant avec une vitesse v peut alors être trouvée. En faisant le changement de variable $\xi = x - vt$, il devient possible de réécrire la seconde équation modifiée de Zakharov (8.106) à une dimension sous la forme

$$\left[(-A_1 v^3 + D_1 v) \partial_\xi + (B_1 v^2 + C_1)\right] n_{el} = (E_1 - v F_1 \partial_\xi) \left| \tilde{E} \right|^2 \quad (8.144)$$

Dans la limite $(-A_1 v^3 + D_1 v) \partial_\xi \sim 0$, l'équation (8.144) permet d'écrire

$$n_{el} = \frac{(E_1 - v F_1 \partial_\xi)}{B_1 v^2 + C_1} \left| \tilde{E} \right|^2 \quad (8.145)$$

En portant (8.145) dans la première équation de Zakharov (avec $\beta = 0$) (8.74), nous obtenons

$$i \partial_t \tilde{E} + \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}} \partial_x^2 \tilde{E} - \frac{\omega_{pe}}{2n_{e0}} \frac{E_1}{B_1 v^2 + C_1} \tilde{E} \left| \tilde{E} \right|^2 + \frac{\omega_{pe}}{2n_{e0}} \frac{F_1}{B_1 v^2 + C_1} \tilde{E} \partial_t \left| \tilde{E} \right|^2 = 0 \quad (8.146)$$

Eu égard à l'existence de similitudes entre (8.146) et l'équation habituelle de Schrödinger de la mécanique quantique, celle ci peut être appelée équation non linéaire de Schrödinger modifiée (NLSM). Elle comporte un nouveau terme additionnel ($\sim \tilde{E} \partial_t \left| \tilde{E} \right|^2$) qui trouve son origine dans le processus de fluctuation de la charge du grain de poussière. Si main-

tenant nous choisissons une solution de la forme [193]

$$\tilde{E}(x, t) = A(\xi = x - vt) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \quad (8.147)$$

En portant la solution (8.147) dans l'équation (8.146) et en réarrangeant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons

$$v - \frac{3v_{te}^2 k_0}{\omega_{pe}} = 0 \quad (8.148)$$

et

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + aA^2 \frac{dA}{d\xi} + bA + cA^3 = 0 \quad (8.149)$$

avec

$$a = -\frac{2v\omega_{pe}^2 F_1}{n_{e0}v_{te}^2(B_1 v^2 + C_1)} \quad (8.150)$$

$$b = \frac{2\omega_0\omega_{pe}}{3v_{te}^2} - k_0^2 \quad (8.151)$$

$$c = -\frac{\omega_{pe}^2 E_1}{3n_{e0}v_{te}^2(B_1 v^2 + C_1)} \quad (8.152)$$

L'équation (8.149) peut être réécrite sous la forme quadratique d'une intégrale d'énergie d'un oscillateur classique

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA}{d\xi} \right)^2 + U(A) = 0 \quad (8.153)$$

$U(A)$ représente le pseudo-potentiel ou potentiel de Sagdeev et est donné par

$$U(A) = a \int \left(A \frac{dA}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{b}{2} A^2 + \frac{c}{4} A^4 + C \quad (8.154)$$

C est une constante d'intégration que nous déterminons grâce à la condition à la limite (appropriée pour la recherche des solutions localisées) $U(A=0) = 0$ et par conséquent $C = 0$. La dérivée $dU(A)/dA$ étant nulle en $A = 0$, l'équation (8.153) admet des solutions solitaires si [62] (i) $(d^2U/dA^2)_{A=0} < 0$ (le point à l'origine est instable); (ii) Il existe une valeur maximale ou minimale A_m de A pour laquelle $U(A_m) \geq 0$; et (iii) $U(A) < 0$ pour tout A compris entre 0 et A_m . Pour que la condition (i) soit satisfaite, le coefficient b doit être négatif. La figure 2 représentant les variations de A en fonction de ξ , montre que le soliton de Langmuir ($a = 10^{-5}$) se transforme en une onde de choc (que l'on pourrait appeler, par analogie, choc de Langmuir) lorsque la dissipation anormale due

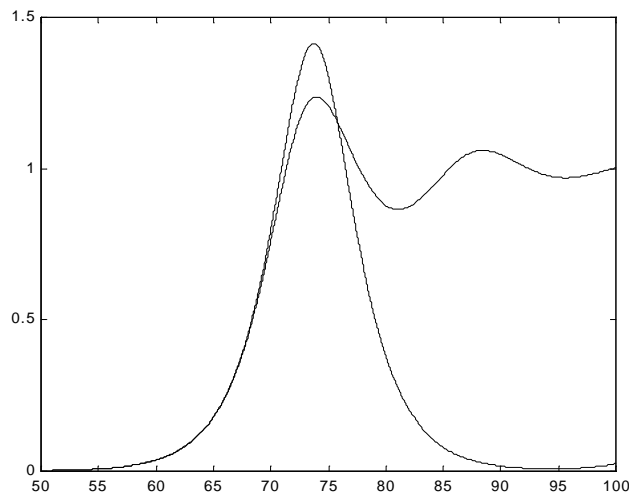


Fig.2- Variation de l'amplitude A en fonction de ξ avec $b = -0.1$, $c = 0.1$ et $a = 0.2$
(onde de choc), 10^{-5} (soliton).

à la variation de la charge devient importante ($a = 10$). Les figures 3 et 4 montrent qu'un soliton de Langmuir, connue pour être très stable à une dimension, peut être, sous l'effet du phénomène de variation de la charge du grain, l'objet d'un très violent collapse (Fig.4) : l'amplitude du soliton ne fait qu'augmenter, atteint de très grandes valeurs pour finalement s'effondrer.

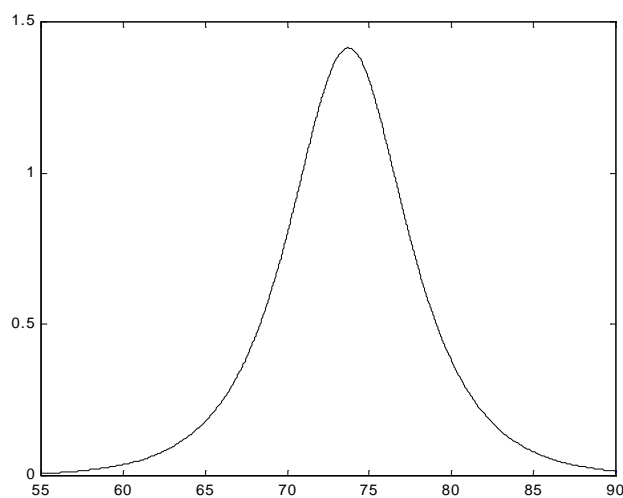


Fig.3- Variation de l'amplitude A en fonction de ξ (soliton de Langmuir) avec
 $a = -10^{-5}$, $b = -0.1$ et $c = 0.1$.

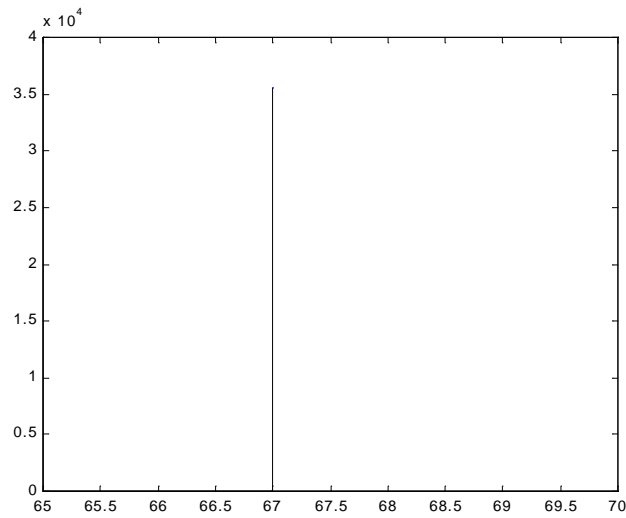


Fig.4- Variation de l'amplitude A en fonction de ξ (collapse du soliton de Langmuir)
avec $a = -10$, $b = -0.1$ et $c = 0.1$.

Il serait alors intéressant de retrouver les équations modifiées de Zakharov moyennant un Hamiltonien adéquat [194] et voir ce qui se passe à l'approche du collapse. L'évolution du système vers cette singularité peut d'ailleurs être analysée en résolvant numériquement [195], [188] les équations (8.74) et (8.96).

Chapitre 9

Expansion de grains de poussière dans un plasma à deux températures ioniques, électriquement appauvri

9.1 Présentation physique du problème

L'étude de l'expansion d'un plasma contenant des grains de poussière peut revêtir, du point de vue pratique et fondamental, le même intérêt que l'étude des propriétés linéaires et non linéaires des ondes existant dans un tel plasma [196]- [201]. A titre d'exemple, les plasmas poussiéreux de l'espace ont typiquement des limites libres et peuvent par conséquent se déployer et s'étendre dans le vide. D'un autre côté, dans les dispositifs de laboratoire, les grains de poussière produits par les sources peuvent se mouvoir jusqu'à atteindre la région centrale du plasma. Il a été montré que dans le cas où la neutralité de la charge $n_i = n_e + Z_d n_d$ est satisfaite, l'expansion non linéaire de matière peut être simplement décrite grâce à la solution dite self- similaire [202]. Les variables indépendantes de l'espace x et du temps t sont alors combinées en une seule variable¹ $\xi = x/t$. L'équation de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e - Z_d n_d)$ est par conséquent négligée et le potentiel obtenu à partir de l'hypothèse selon laquelle les particules légers (électrons et ions) sont distribués selon la loi de Boltzmann. Les solutions analytiques et numériques de type self- similaire des équations fluides non linéaires du plasma poussiéreux ont déjà fait l'objet de plusieurs

¹dite aussi variable self-similaire

études [202]- [211]. Les équations différentielles aux dérivées partielles du modèle fluide sont transformées en un système d'équations différentielles ordinaires aisément intégrables à l'aide, par exemple, de la méthode de Runge- Kutta. Cependant, cette solution, un peu simpliste, en plus du fait qu'elle soit restrictive peut donner lieu à des résultats erronés : on n'est jamais très sûre, à priori, que la quasi- neutralité de la charge soit satisfaite et maintenue tout au long du processus de l'expansion. De manière générale, il est alors plus sûr d'inclure, à travers l'équation de Poisson, les effets d'un champ électrique local créé par la séparation de charge [212]- [215]. Au cours du présent chapitre, on se propose d'étudier numériquement l'expansion non linéaire d'un plasma poussiéreux électroniquement appauvri composé de grains froids et de deux espèces d'ions isothermiques à températures différentes [216].

9.2 Formulation mathématique

Nous considérons un plasma non collisionnel et non magnétisé, composé de grains de poussière froids et de deux populations d'ions isothermiques [$n_{il0} \exp(-e\phi/T_{il})$, $n_{ih0} \exp(-e\phi/T_{ih})$] de températures différentes, T_{il} et T_{ih} , et de densités respectives n_{il} et n_{ih} . A une dimension, un tel système peut être décrit par les équations normalisées suivantes [217]

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_d v_d) = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} = Z_d \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Z_d n_d - n_{il} - n_{ih} \quad (9.3)$$

où n_d , v_d , Z_d représentent la densité, la vitesse et la charge des grains de poussière respectivement, Φ est le potentiel électrostatique, n_{il} et n_{ih} les densités respectives des ions de haute (h) et de basse (l) température supposés être Boltzmaniens

$$\begin{aligned} n_{il} &= \mu \exp\left(-\frac{\Phi}{\mu + \beta\nu}\right) \\ n_{ih} &= \nu \exp\left(-\frac{\beta\Phi}{\mu + \beta\nu}\right) \end{aligned} \quad (9.4)$$

où

$$\begin{aligned}\mu &= n_{i0}/n_{i0} \\ \nu &= n_{ih0}/n_{i0}\end{aligned}\tag{9.5}$$

et

$$\beta = T_{il}/T_{ih}\tag{9.6}$$

Il est utile de noter que

$$\mu + \nu = 1\tag{9.7}$$

La neutralité de la charge à l'équilibre requiert

$$\mu + \nu = Z_{d0} \frac{n_{d0}}{n_{i0}}\tag{9.8}$$

n_{j0} ($j = i, il, ih, d$) est la densité à l'équilibre de l'espèce j . Les densités n_d , n_{il} et n_{ih} , la vitesse du grain de poussière v_d et le potentiel Φ sont normalisés, respectivement, par n_{i0} , la vitesse acoustique $C_D = (T_{eff}/m_d)^{1/2}$ et T_{eff}/e où $T_{eff} = T_{il}T_{ih}/(\nu T_{il} + \mu T_{ih})$. Les variables d'espace et de temps sont en unités de la longueur de Debye $\lambda_{Di} = (T_{eff}/4\pi n_{i0}e^2)^{1/2}$ et la période plasma $\omega_{pd}^{-1} = (m_d/4\pi n_{i0}e^2)^{1/2}$.

9.3 Résultats numériques et discussion

Nous allons maintenant présenter les résultats de notre simulation numérique. Notre investigation numérique est basé sur un schéma de discretisation originellement utilisé par Sack et Schamel [218], [219]. A l'instant $t = 0$, le plasma (grains de poussière + ions) est supposé occuper la moitié de l'espace $x < -20$ avec une densité de grains initiale donnée par

$$n_d(x, 0) = \frac{2}{\pi Z} \arctan \left[\exp \left(-\frac{x + 40}{4} \right) \right]\tag{9.9}$$

Un modèle Lagrangien sans dissipation est utilisé pour suivre le mouvement du grain de poussière. Le potentiel, la densité ionique et la densité des grains telle que initialement prescrite (Eq. 9.9) sont relaxés de manière self-consistante jusqu'à ce que l'équation de Poisson (9.3) soit satisfaite. Le temps de réponse des ions étant relativement court,

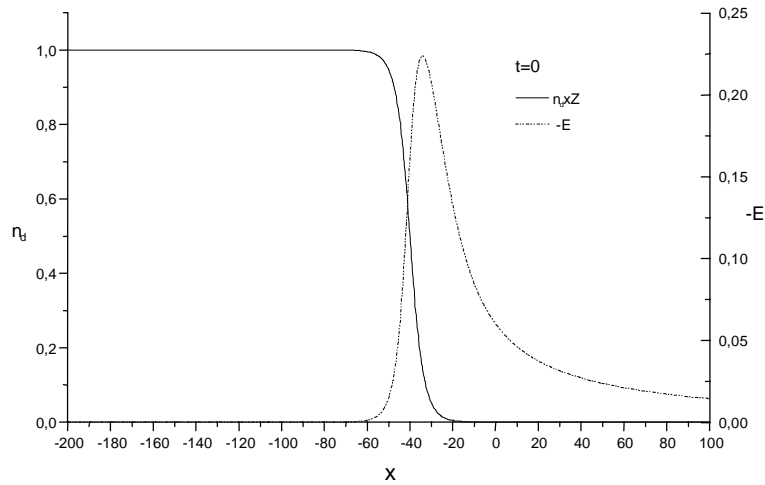


Fig.1- Profils de la densité initiale des grains de poussière $n_d(x, 0)$ et du champ électrique E dans le cas d'une seule espèce ionique avec $\beta = 0$, $\mu = 1$.

ces derniers atteignent un état stationnaire bien avant que les grains de poussière aient une chance de se mouvoir. En utilisant le nouveau potentiel, l'équation du mouvement (9.2) permet de faire avancer, dans le temps, la vitesse v_d des grains de poussière. Connaissant la vitesse v_d des grains de poussière, l'équation de continuité (9.1) est alors utilisée pour calculer la nouvelle densité des grains. Disposant de la nouvelle densité des grains, l'équation de Poisson est de nouveau résolue en relaxant le potentiel et les densités des ions et des grains de poussière.

9.3.1 Cas d'une seule espèce ionique

Nous considérons d'abord le cas d'une seule espèce ionique ($\beta = 0$, $\mu = 1$). La figure 1 représente les profils de la densité initiale des grains de poussière et du champ électrique. La figure 2 montre les variations spatiales de la densité des grains de poussière à différents laps de temps avec $Z_d = 10$.

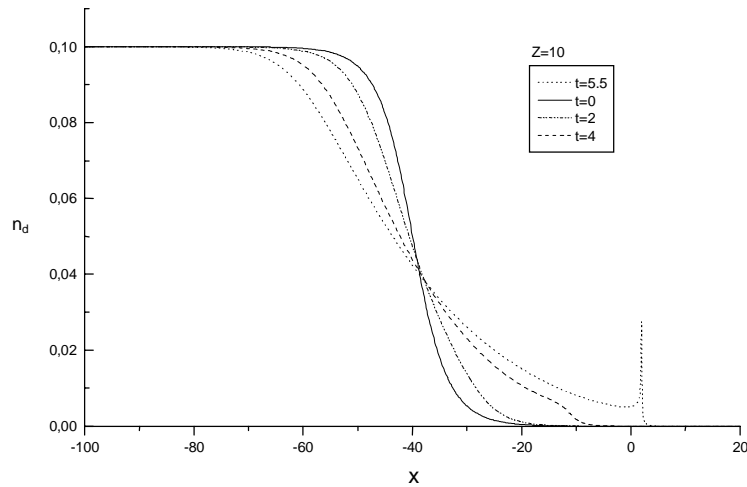


Fig.2- Dépendance spatiale de la densité des grains de poussière à différents laps de temps avec $Z_d = 10$.

Nous remarquons la formation, sur le front du plasma en expansion, d'un petit groupe de grains négatifs non neutralisés par le fluide des ions positifs. Ces grains, sous l'action d'un champ électrique présent dans le plasma, sont accélérées dans la région $x > -20$. Ce champ électrique est généré par la séparation de charge induite par les ions positifs ayant quitté le plasma à $t = 0$, bien avant que les grains de poussière, beaucoup plus massifs, aient eu la possibilité de se mouvoir. A mesure que t augmente, le front de la densité des grains devient progressivement abrupt et pointu et la solution numérique finalement diverge au point $x_c \simeq 2.05$ et à l'instant $t_c \simeq 5.6$. La figure 3 montrent les profils de la densité des grains n_d et du champ électrique E à un instant t juste avant la divergence (que nous appellerons plus tard collapse ou effondrement) pour trois valeurs différentes de la charge Z_d des grains de poussière ($Z_d = 10, 100, 1000$).

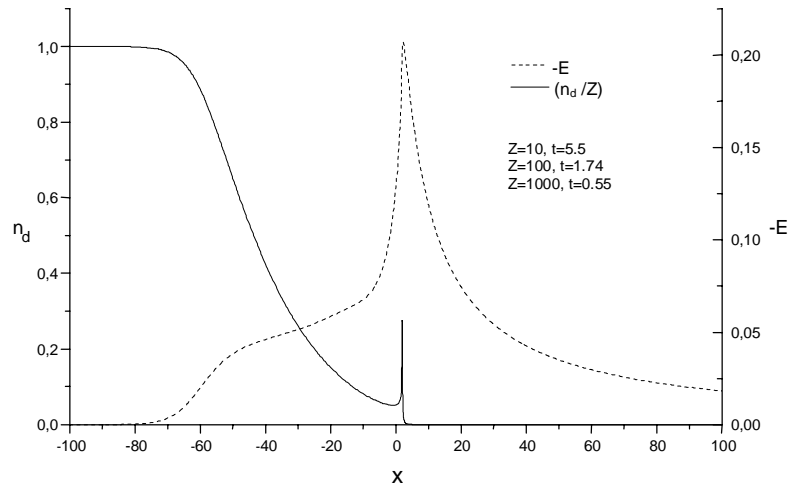


Fig.3- Profils de la densité des grains n_d et du champ électrique E juste avant l'avènement du collapse pour trois valeurs différentes de la charge du grain

$$Z_d = 10, 100, 1000.$$

Le champ électrique développe un pic au voisinage de la singularité et, juste avant, la formation d'un plateau quasi- neutre ($E \sim \text{constant} \Leftrightarrow n_i \approx Z_d n_d$) traduit la tendance à la self- similarité de l'expansion. Il a été montré dans les références [218], [219] que la singularité sus- mentionnée, en l'absence de collisions et de viscosité, est inhérente au modèle fluide lui même et est due à un processus non linéaire intrinsèque du système considéré. Ce collapse ou déferlement de la densité des grains indique une transition à une structure cinétique dans l'espace des phases. Dans la figure 3, à l'exception des temps de collapse t_c , aucune différence qualitative notable n'est observée dans les caractéristiques de l'expansion du plasma pour les trois valeurs de Z_d . Toutefois, le collapse se produit plus rapidement à mesure que Z_d augmente. Cela nous rappelle, quoiqu'il est difficile d'y voir un quelconque lien, les résultats obtenus dans le chapitre 3 concernant les oscillations électrostatiques non linéaires d'un plasma poussiéreux électroniquement appauvri. Par conséquent, l'augmentation de la charge du grain Z_d réduit les temps critiques de collapse t_c ($Z_d = 10 \rightarrow t_c = 5.6$, $Z_d = 100 \rightarrow t_c = 1.79$, $Z_d = 1000 \rightarrow t_c = 0.56$). Dans la limite des grandes valeurs de Z , de très petites valeurs de t_c sont numériquement obtenues. Remarquons que lorsque Z_d augmente, l'amplitude du champ électrique devient importante et les grains de poussière acquièrent une plus grande accélération comme peuvent l'attester les résultats de la figure 4.

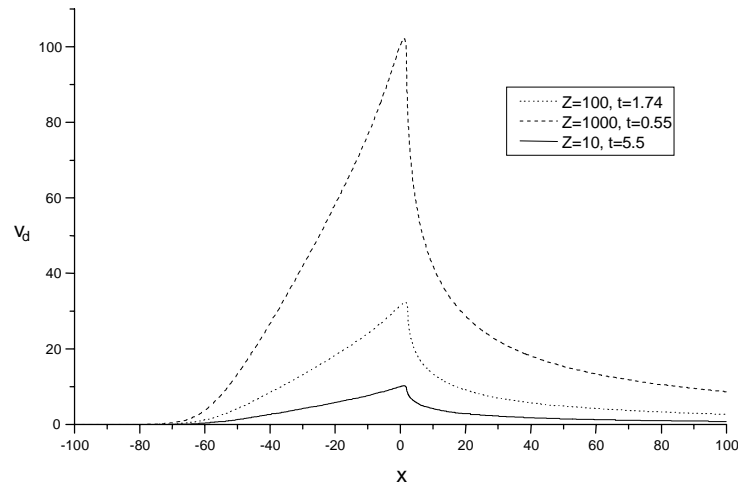


Fig.4- Profil de la vitesse v_d du grain de poussière à des temps voisins du collapse pour trois valeurs différentes de la charge du grain $Z_d = 10, 100, 1000$.

Notons que la vitesse (Fig.4) adopte le même profil d'espace que celui du champ électrique (Fig.1). Les propriétés générales de la présente expansion peuvent être résumées comme suit. Les ions, eu égard à leur faible inertie relative ($m_i/m_d \rightarrow 0$), sont les premiers à se répandre dans la région du vide ($x > -20$) donnant ainsi lieu à une séparation de charge ou charge d'espace. Le champ électrique résultant exerce une force sur les grains de poussière et les contraint à avancer dans le vide. Par conséquent, les ions précèdent les grains de poussière dans le vide durant l'évolution de l'expansion comme l'indique la figure 5.

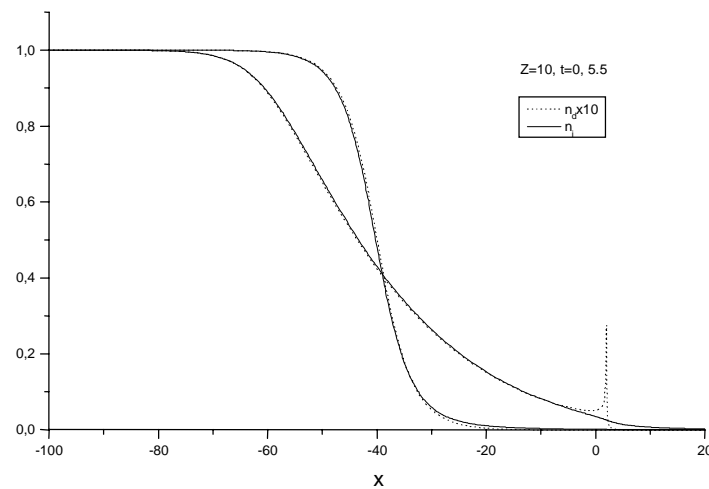


Fig.5- Profils des densités n_i et n_d à deux laps de temps différents $t = 0, 5.5$.

9.3.2 Cas de deux espèces ioniques

Nous allons maintenant présenter les résultats de notre simulation dans le cas d'un plasma poussiéreux contenant deux espèces d'ions à températures différentes T_{ih} et T_{il} . Notons que pour la validité d'un tel modèle, T_{il} doit être, en général, nettement inférieure à T_{ih} . La figure 6 montre les profils des densités initiales et du champ électrique initial ($Z_d = 10, \beta = 0.001, \mu = 0.5, t = 0$). La figure 7 ($Z_d = 10, \beta = 0.001, \mu = 0.5, t = 1.1$) et la figure 8 ($Z_d = 10, \beta = 0.2, \mu = 0.5, t = 3.5$) indiquent que les particules poussiéreuses se trouvent entre la population ionique de basse température T_{il} et la population ionique de haute température T_{ih} . En d'autres termes, les grains de poussière font avancer les ions de basse température. L'apparition d'un plateau dans le profil de E ($\beta = 0.2$) (Fig.8) montre la tendance de l'expansion à la self-similarité. Pour $\beta = 0.5$ (Fig.9), les particules poussiéreuses devancent les deux espèces d'ions.

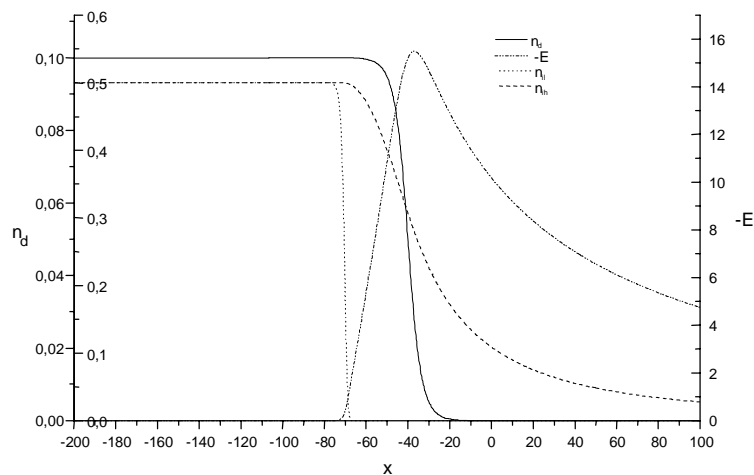


Fig.6- Densités initiales (n_d, n_{ih}, n_{il}) et champ électrique initial E avec $Z_d = 10$,
 $\beta = 0.001, \mu = 0.5, t = 0$.

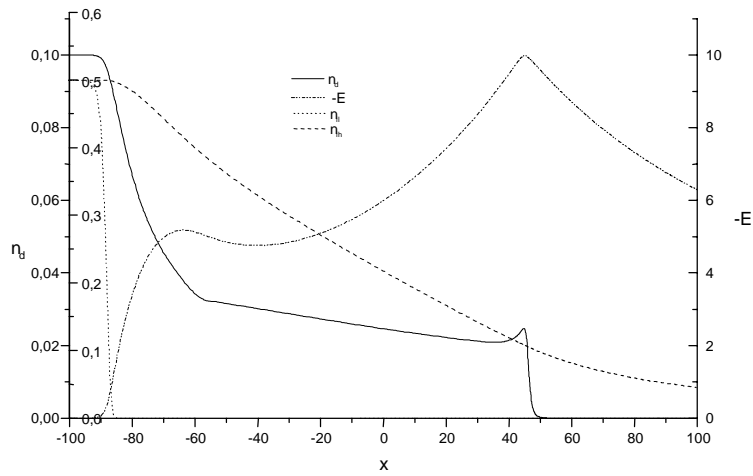


Fig.7- Profils des densités n_{il} , n_{ih} et n_d et du champ électrique E à $t = 1.1$ à l'approche du déferlement avec $Z_d = 10$, $\beta = 0.001$ et $\mu = 0.5$.

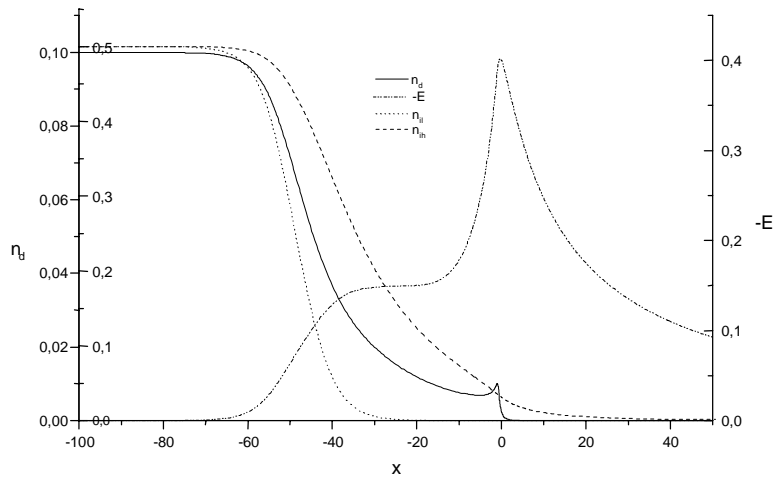


Fig.8- Profils des densités n_{il} , n_{ih} et n_d et du champ électrique E à $t = 3.5$ à l'approche du déferlement avec $Z_d = 10$, $\beta = 0.2$ et $\mu = 0.5$.

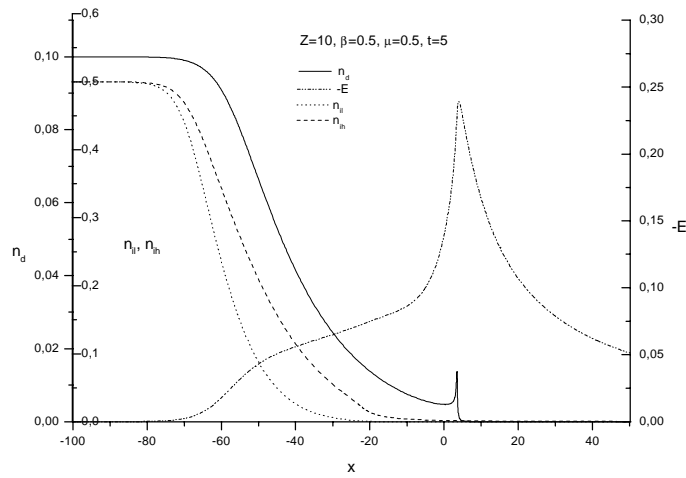


Fig.9- Profils des densités n_{il} , n_{ih} et n_d et du champ électrique E à $t = 5$ à l'approche du déferlement avec $Z_d = 10$, $\beta = 0.5$ et $\mu = 0.5$.

La densité des grains de poussière développe alors un précurseur qui avance plus à mesure que β décroît (augmentation de T_{ih}). Ce précurseur est d'autant plus prononcé et visible que la population de haute température est plus petite que la population de basse température comme on peut le voir sur la figure 10 ($Z_d = 10$, $\beta = 0.001$, $\mu = 0.92$, $t = 1.9$)

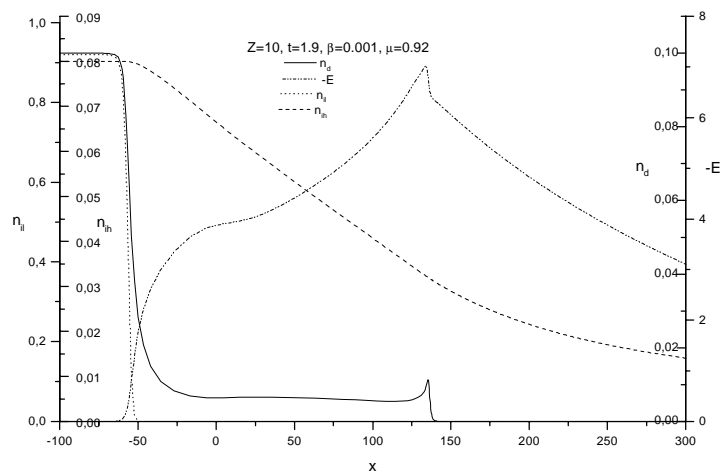


Fig.10- Profils des densités n_{il} , n_{ih} , et n_d et du champ électrique E à $t = 1.9$ à l'approche du déferlement avec $Z_d = 10$, $\beta = 0.001$ et $\mu = 0.92$.

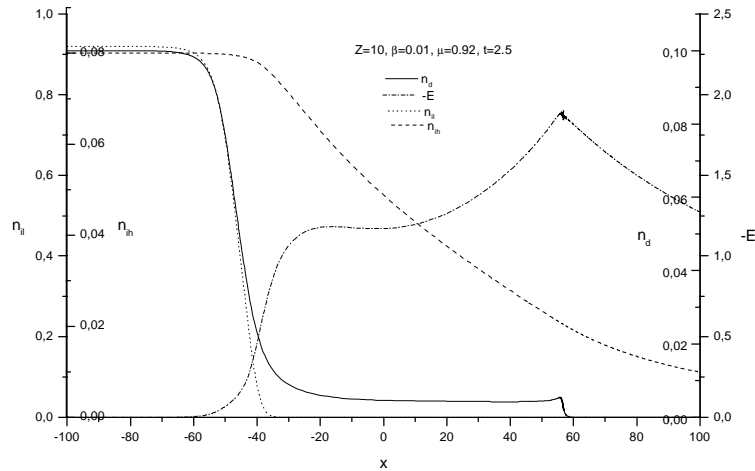


Fig.11- Profils des densités n_{il} , n_{ih} et n_d et du champ électrique E à $t = 2.5$ à l'approche du déferlement avec $Z_d = 10$, $\beta = 0.01$, et $\mu = 0.92$.

et la figure 11 ($Z_d = 10$, $\beta = 0.01$, $\mu = 0.92$, $t = 2.5$). Il est intéressant de noter les variations de l'amplitude du champ électrique pour $\beta = 0$ (cas d'une seule espèce ionique) et $\beta \neq 0$ (cas de deux espèces ioniques). L'amplitude du champ électrique est plus importante dans le cas de deux espèces et croît à mesure que β décroît. Avant de clore le présent chapitre, nous voudrions faire une remarque concernant le choix des conditions initiales. Au cours de notre simulation, la vitesse initiale des grains de poussière est choisie partout nulle.

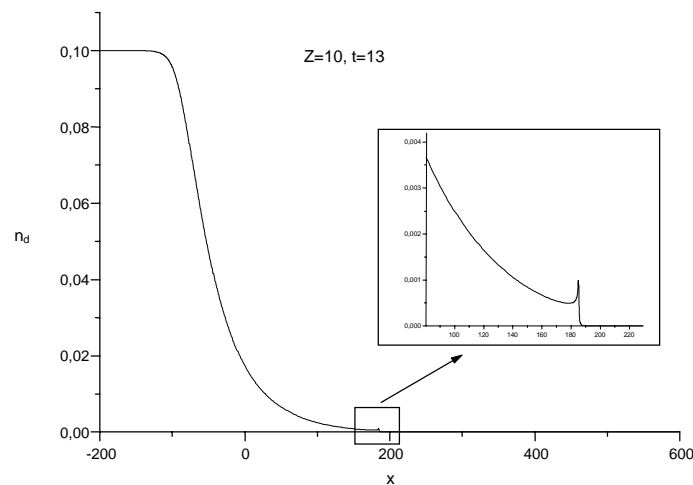


Fig.12- Profil de la densité des grains de poussière à l'instant $t = 10$ proche du collapse avec la distribution initiale des vitesses $v_d(x, 0) = \sqrt{20 \Phi(x)}$.

Une distribution plus réaliste peut être donnée par $v_d(x, 0) = \sqrt{20\Phi(x)}$. Ici aussi, le collapse se produit (Fig.12) mais pour une position beaucoup plus grande ($x_c \simeq 190$) et un temps beaucoup plus important ($t_c \simeq 14$). En général, comme les grains de poussière périphériques acquièrent de grandes vitesses initiales, le collapse est retardé.

Conclusion

Les travaux présentés dans la présente thèse ont porté sur l'étude et l'analyse de certains phénomènes linéaires et non linéaires dans les plasmas poussiéreux à charge variable. Les oscillations électrostatiques, les couplages de mode et l'expansion des plasmas ont été reconsidérés en tenant compte de la présence de grains de poussière massifs et hautement chargés, de la dynamique de leur charge et de l'appauvrissement électronique qui en résulte. Pour ce faire, nous avons adopté des approches mathématiques complètement différentes de celles habituellement utilisées. Nous avons alors rapporté l'existence et l'apparition de nouveaux phénomènes physiques décrits par de nouvelles solutions et régis par de nouvelles équations.

Le premier chapitre de cette thèse a d'abord porté sur la définition des concepts de base du plasma habituel à deux composantes. Nous avons alors introduit les plasmas poussiéreux, décrit leurs propriétés intrinsèques et énuméré les différents processus physiques qui les caractérisent. Nous avons insisté sur les différents mécanismes de charge d'un grain de poussière et mis l'accent sur les différents modes électrostatiques susceptibles d'exister dans un plasma poussiéreux en présence et en l'absence d'un champ magnétique.

Le second chapitre a été consacré à l'étude de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW) dans le cas d'un plasma poussiéreux, collisionnel et à charge variable. Pour cela, l'équation de la charge du grain d'impureté, en présence d'ions non Boltzmaniens, a été établie de manière self consistante et appropriée. Les fonctions de distribution collisionnelles perturbées ont été obtenues à partir de l'équation Vlasov dans laquelle nous avons inclus un terme de collision de Krook pour tenir compte de la collision particule neutre-particule chargée. Les courants de charge ont par la suite été calculés au moyen de sections efficaces de charge collisionnelles. L'analyse habituelle de Fourier des équations de base de notre modèle nous a alors permis d'obtenir une relation de dispersion de troisième ordre.

La partie réelle de la fréquence de l'onde et donc sa vitesse de phase ainsi que son taux d'amortissement/ accroissement dépendent explicitement des termes puits et du taux de charge : de nouveaux termes, jusque là jamais mis en évidence, apparaissent dans les expressions de la fréquence et du taux d'amortissement. Nos résultats ont alors montré que la fluctuation de la charge du grain de poussière peut induire un décalage de fréquence et constituer un nouveau mécanisme de dissipation de l'énergie de l'onde. La valeur critique du champ électrique nécessaire à l'excitation de l'onde DIAW dépend fortement et sensiblement du processus de charge du grain de poussière et des dimensions de ce dernier. C'est là, sans conteste, un résultat de première importance car directement lié aux expériences de laboratoire. Les perspectives de ce chapitre sont multiples et nombreuses. Nous ne citerons que celles auxquelles nous nous sommes déjà attelés. On se propose à l'avenir d'inclure dans notre modèle hybride (fluide et cinétique) le phénomène d'amortissement Landau. Cela nous permettra d'estimer son importance relative par rapport à la dissipation anormale due à la relaxation de la charge du grain. Les variations des termes puits, supposés à priori connus tout au long de ce chapitre, en réponse aux oscillations collectives du plasma seront analysées de manière self-consistante. Enfin, et c'est là l'une de nos perspectives majeures, nous établirons l'équation de charge du grain de poussière en présence d'un champ magnétique.

Le troisième chapitre de la présente thèse a porté sur les modes non linéaires électrostatiques BGK de large amplitude dans un plasma électroniquement appauvri. Cette étude a été motivée par le fait que le processus de charge du grain de poussière s'accompagne en général d'une diminution significative de la population électronique du plasma. D'ailleurs, cet appauvrissement a été mis en évidence lors de récentes expériences de laboratoire sur les ondes acoustiques poussiéreuses. Nous avons alors établi une simple équation non linéaire. Celle-ci comporte de nouvelles non linéarités et prédit l'existence possible de nouveaux modes BGK. L'expansion linéaire en ϕ montre qu'aux faibles amplitudes apparaissent des champs électriques croissants et rapidement variables. Ce résultat indique que la présence dans le plasma de grains de poussière peut rendre instables les modes normaux de ce plasma. Cette situation peut être relevante à différents types de plasmas astrophysiques. La capture électronique et le processus de charge du grain affectent la structure du potentiel non linéaire $\phi(x)$ et le début du déferlement de l'onde. La région

d'existence de ce nouveau type de modes BGK de large amplitude dépend sensiblement de la charge Z_d du grain de poussière. Ce modèle de plasma est approprié lorsque la densité électronique est suffisamment appauvrie. Nos résultats indiquent que dans un tel plasma, lorsque Z_d est très grand, nous ne pouvons avoir que des structures de potentiel positives associées aux oscillations non linéaires du plasma poussiéreux. Notons qu'il est toujours possible de reprendre les mêmes calculs en incluant des particules résonantes piégées. Pour avoir des solutions de type BGK admissibles, nous devons distinguer entre les particules libres et piégées.

Au cours du quatrième chapitre, nous avons étendu notre analyse du chapitre précédent pour tenir compte du phénomène de variation de la charge des grains de poussière. Nous avons alors montré que sous certaines conditions, les modifications introduites par la fluctuation de la charge peuvent être importantes. En particulier, nous avons noté un couplage non linéaire entre les modes BGK poussiéreux et le processus de la variation de la charge du grain. Ce couplage réduit la barrière critique au delà de laquelle ces modes apparaissent et induisent un amortissement additionnel de ces oscillations électrostatiques non linéaires. Sous l'influence et l'action de ces modes normaux amortis, le plasma poussiéreux évolue alors vers un nouvel état d'équilibre quasi-neutre caractérisé par une nouvelle charge et de nouvelles densités de particules. Par ailleurs, nos résultats ont révélé d'importants nouveaux résultats. En fait, nous avons montré que les oscillations électrostatiques d'un plasma froid peuvent produire des structures solitaires en contradiction avec ce qui est communément admis. La formation de ces structures non linéaires et hautement localisées est uniquement due à la variation de la charge du grain de poussière. Notre modèle de plasma non collisionnel est, bien entendu, dépourvu de tout mouvement thermique et conséquemment les modes correspondants ne sont pas sensibles à l'amortissement Landau ou à toute autre dissipation d'origine collisionnelle. Il serait alors fort intéressant de comparer l'importance relative de la dissipation "anormale" discutée dans ce chapitre et qui trouve son origine dans la charge du grain à celle de l'amortissement habituellement dû aux collisions et aux mouvements thermiques. A ce niveau de la discussion, nous ne pouvons nous permettre que de faire les quelques remarques suivantes. Des travaux précédents sur les oscillations électrostatiques d'un plasma à deux composantes (électrons + ions) à température non nulle et comportant des particules piégées, ont mon-

tré qu'après un bref régime transitoire, l'amplitude des modes se stabilise à une valeur finie en dépit de la présence de faibles collisions. De plus, dans la limite des grandes longueurs d'onde, l'amortissement Landau devient inopérant alors que la dissipation anormale n'est pas spécialement affectée dans cette limite. Nous sommes alors amenés à penser que la dissipation causée par la fluctuation de la charge dans un plasma poussiéreux préservera son importance dans un modèle thermique et en présence des collisions. Au cours de ce chapitre, nous nous sommes seulement intéressés à la manière avec laquelle un mécanisme de dissipation essentiellement non collisionnel peut affecter les modes BGK poussiéreux. Rappelons que les solutions de l'équation de Vlasov que nous avons construites ne sont applicables qu'à des faisceaux de particules froides et par conséquent en l'absence de tout piégeage de particules. Un tel choix nous a été dicté par le souci de mettre en évidence les effets inhérents à la variation de la charge en les dissociant des autres mécanismes susceptibles d'agir concurremment. Bien entendu, on pourra toujours construire d'autres solutions stationnaires de l'équation de Vlasov afin de modéliser d'éventuels effets thermiques et/ou de piégeage. Dans quelle mesure de telles modifications peuvent-elles altérer nos résultats finaux ? Premièrement, le déferlement de l'onde due aux limites imposées à notre modèle (absence de particules piégées) ne se reproduira plus. Deuxièmement, les structures non linéaires localisées apparaîtront même dans le cas de la charge constante du grain de poussière. A ce jour, nous ne disposons d'aucune donnée ou observation expérimentale des modes BGK dans les plasmas poussiéreux à charge variable à comparer avec nos prédictions théoriques et numériques. Cependant, considérant l'importance des oscillations électrostatiques non linéaires dans les plasmas poussiéreux de laboratoire et de l'espace stellaire, notre investigation peut être perçue comme un préalable pour la compréhension des modes BGK poussiéreux de large amplitude. Notons que nos résultats numériques ont été obtenus moyennant le modèle standard de la sonde, une représentation approximative du phénomène de charge.

Le cinquième chapitre de cette thèse a été consacré à l'étude paramétrique des structures mises en évidence dans le chapitre précédent. Nos résultats ont alors révélé qu'un plasma poussiéreux à charge variable peut admettre l'existence de structures solitaires dont la hauteur dépend fortement des paramètres α , β et Z_0 . Cependant, leur stabilité est loin d'être aisée à prouver ou à établir. Nous nous sommes alors limités à les identifier

numériquement tout en faisant valoir une évidence indirecte de leur possible réalisation. La densité des grains de poussière est hautement localisée, un phénomène qui fournit des conditions favorables pour la formation et la croissance des cristaux poussiéreux. De plus, nos résultats montrent que sous certaines conditions, l'effet de la variation de la charge du grain de poussière peut être très important : la variation de la charge du grain de poussière fournit un mécanisme physique de dissipation additionnelle. Cet amortissement anormal est intimement lié à la dynamique des grains de poussière : de larges valeurs de la vitesse de la poussière v_{d0} favorisent la formation de structures dissipatives tandis que de petites valeurs de v_{d0} sont requises pour l'existence de structures cohérentes et localisées. Notons que les résultats de notre investigation peuvent être utiles dans la compréhension des propriétés non linéaires de certaines perturbations électrostatiques localisées dans de nombreux plasmas astrophysiques. L'évolution temporelle et l'analyse de la stabilité des modes BGK poussiéreux sont des problèmes de grande importance et requièrent un traitement numérique plus sophistiqué.

Le sixième chapitre de la présente thèse a été consacré à l'inclusion des mouvements thermiques dans nos équations de base. Nous avons alors décelé des différences entre les deux modèles de plasma jusque là considérés : le modèle froid des chapitres précédents et le modèle thermique introduit au sixième chapitre. A ce propos, nos résultats ont révélé que le modèle thermique n'admet et n'entretient que des structures localisées auxquelles sont associés des potentiels constamment négatifs. Un effet similaire a déjà été rapporté par d'autres auteurs dans le cas d'un plasma poussiéreux électroniquement appauvri et dont les ions sont distribués selon la loi de Maxwell-Boltzmann. De plus, la charge du grain de poussière ne fait que diminuer. En dépit de tous nos efforts, nous n'avons à aucun moment réussi à trouver de potentiel positif ou un cas de solution avec augmentation de la charge du grain. Ce sont donc là les premières différences avec le modèle froid qui admet, comme nous l'avons déjà vu, des potentiels positifs et négatifs et dont la charge des grains de poussière peut aussi bien augmenter que diminuer.

Au cours du septième chapitre, nous nous sommes intéressés à des modes électrostatiques BGK représentant les états saturés d'un plasma poussiéreux, instable et non collisionnel. Le mécanisme de saturation, dans notre cas, est dû au phénomène de piégeage des particules. Rappelons qu'il est communément admis que les plasmas fortement excités au

moyen de faisceaux de particules, à défaut d'évoluer vers des états turbulents, évoluent le plus souvent vers des états cohérents avec piégeage de particules. Nos résultats ont alors révélé que dans un tel plasma, des structures solitaires peuvent exister. Leurs propriétés intrinsèques (hauteur, largeur et vitesse de propagation) dépendent fortement du paramètre de piégeage ou nombre de particules piégées. Cependant, leur stabilité est loin d'être aisée à prouver ou à établir. Pour cela, il aurait fallu résoudre le problème dépendant du temps, considérer une perturbation initiale et étudier la dynamique de la structure solitaire qui en résulte. Et même si la structure est stable à une dimension, il n'est pas évident qu'elle le reste à deux ou trois dimensions. Le champ électrique de l'onde solitaire perturbe profondément la densité des grains de poussière. Ces derniers sont accélérés et repoussés hors de la région de localisation du soliton. De plus et contre toute attente, nos résultats ont révélé l'existence d'une structure à deux niveaux, composée d'une double couche et d'un soliton décalé. En général, ces deux entités non linéaires ne peuvent coexister dans la même gamme de paramètres. Il serait alors intéressant d'étudier la dynamique d'une structure aussi complexe (collision entre un soliton et une double couche à titre d'exemple) dont la mise en évidence expérimentale reste entièrement à prospecter. Par ailleurs, nous avons démontré l'existence possible des trous poussiéreux à charge variable. Ces derniers représentent des solutions self-consistantes du système Vlasov-Poisson.

Le huitième chapitre de la présente thèse a été consacré aux équations modifiées de Zakharov reformulées dans le cas d'un plasma poussiéreux à charge variable. Classiquement, ces équations établies par Zakharov décrivent l'instabilité modulationnelle du condensât de Langmuir. Nous nous sommes intéressés aux modifications que l'on doit apporter à ces équations pour y inclure la dynamique d'une composante poussiéreuse à charge variable. Nous avons alors reconsidéré le problème du couplage non linéaire des ondes de Langmuir avec des perturbations de densité ionique dans un plasma poussiéreux à charge variable. Nous avons obtenu des équations de Zakharov modifiées en utilisant une approche à trois fluides et à deux échelles de temps et en prenant en compte la fluctuation de la charge du grain de poussière. Une analyse en modes normaux de ces deux équations couplées nous a permis alors d'obtenir une relation de dispersion utile pour l'étude des instabilités paramétriques. Nous avons alors abordé le problème très important du collapse du soliton de Langmuir dans un plasma poussiéreux à charge variable.

Le neuvième et dernier chapitre de cette thèse a été consacré à l'investigation numérique de l'expansion non linéaire d'un plasma poussiéreux électroniquement appauvri dans le vide. En nous basant sur des équations de type hydrodynamique, un algorithme Lagrangien a été développé. Une petite fraction de grains est accélérée par un champ électrique local induit par des ions se mouvant dans la région du vide. Un déferlement de la densité des grains de poussière limite le temps de calcul. Il serait alors très intéressant d'étendre la présente investigation au cas où la charge des grains est variable pour savoir si la dissipation anormale est capable de stopper le collapse observé.

Nous estimons atteints les objectifs que nous nous sommes fixés au début de ce travail. Les perspectives de la présente thèse sont nombreuses. Nous nous proposons à l'avenir de tenir compte du poids du grain de poussière², de la forme de ce dernier³ et de faire intervenir les autres processus de charge déjà énumérés. La résolution numérique du système d'équations Vlasov-Poisson couplées à l'équation de la charge nous permettra d'estimer le temps au bout duquel s'établissent les modes BGK poussiéreux, leurs interactions mutuelles et surtout leur stabilité. Ceci nous permettra de conclure sur la nécessité d'introduire des termes additionnels (essentiellement des termes source et puits) dans notre système d'équations pour modéliser d'éventuelles expériences de laboratoire. En outre, l'étude de l'évolution temporelle des solitons de Langmuir dans le contexte des équations modifiées de Zakharov nous renseignera d'avantage sur la turbulence de Langmuir en présence de la dissipation anormale due à la variation de la charge du grain de poussière.

²Notons que celui ci peut être de l'ordre de la force électrostatique.

³En faisant intervenir des distributions de masse et de rayon.

Bibliographie

- [1] P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **8**, 1791 (2001).
- [2] P. K. Shukla, *Proceedings of Invited Papers, 7th Workshop on the Physics of Dusty Plasmas*, Boulder, Colorado, April 1998, edited by Mihály Horányi, Scott Robertson, and Bob Walch (AIP, Woodbury, New York), *Proceedings* 446, p. 81.
- [3] N. N. Rao, *Proceedings of Invited Papers, International Workshop on Waves in Dusty, Solar and Space Plasmas*, Leuven, Belgium, May 2000, edited by F. Verheest, M. Goossens, M. A. Hellberg, and R. Bharuthram (AIP, Melville, New York), Vol. 537, p. 13.
- [4] P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **1**, 1362 (1994).
- [5] E. C. Whipple, T. G. Northrop et D. A. Mendis, *J. Geophys. Res.* **90**, 7405 (1985).
- [6] L. Stenflo, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Phys. Plasmas* **7**, 2731 (2000).
- [7] M. R. Jana, A. Sen et P. K. Kaw, *Phys. Rev. E* **48**, 3930 (1993).
- [8] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [9] A. Barkan, R. L. Merlino et N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **2**, 3563 (1995).
- [10] R. K. Varma, P. K. Shukla et V. Krishan, *Phys. Rev. E* **47**, 3612 (1993).
- [11] P. K. Kaw et A. Sen, *Phys. Plasmas* **5**, 3552 (1998).
- [12] A. Brattli, O. Havnes et F. Melandso, *J. Plasma Phys.* **58**, 691 (1997).
- [13] B. Farokhi, P. K. Shukla, N. L. Tsintsadze et D. D. Tskhakaya, *Phys. Plasmas* **7**, 814 (2000).
- [14] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, New York, 1956), Chap. 11.
- [15] F. Melandso et P. K. Shukla, *Planet. Space Sci.* **43**, 635 (1995).
- [16] Q. Z. Luo, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Phys. Plasmas* **6**, 3455 (1999).

-
- [17] D. H. Dubin, *Phys. Plasmas* **7**, 3895 (2000).
- [18] G. E. Morfill, H. M. Thomas, U. Konopka et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1598 (1999).
- [19] P. K. Shukla et N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **3**, 1760 (1996).
- [20] G. Lapenta, *Phys. Plasmas* **6**, 1442 (1999).
- [21] G. E. Morfill, H. M. Thomas, U. Konopka et al., *Phys. Plasmas* **6**, 1769 (1999).
- [22] A. A. Sickafoose, J. E. Colwell, M. Horányi et S. Robertson, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6034 (2000).
- [23] A. A. Sickafoose, J. E. Colwell, M. Horányi et S. Robertson, *J. Geophys. Res.* **106**, 8343 (2001).
- [24] G. Sorasio, D. A. Mendis et M. Rosenberg, *Planet. Space Sci.* **49**, 1257 (2001).
- [25] V.N. Tsytovich, A. P. Nefedov, V. E. Fortov, O. F. Petrov et G. E. Morfill, *Phys. Plasmas* **10**, 2633 (2003).
- [26] A. Barkan, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Planet. Space Sci.* **44**, 239 (1996).
- [27] M. Rosenberg et D. A. Mendis, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **23**, 177 (1995).
- [28] J. Chu, J. B. Du et Lin I, *J. Phys. D* **27**, 296 (1994).
- [29] J. B. Pieper et J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3137 (1996).
- [30] Y. Nakamura, H. Bailung et P. K. Shukla, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1602 (1999).
- [31] P. K. Shukla et V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [32] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson et N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **5**, 1607 (1998).
- [33] N. D'Angelo, *Planet. Space Sci.* **38**, 1143 (1990).
- [34] N. D'Angelo, S. Von Goeler et T. Ohe *Phys. Fluids* **9**, 1605 (1966).
- [35] D. A. Mendis et M. Rosenberg, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **32**, 419 (1994).
- [36] M. Horanyi, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 383 (1996).
- [37] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [38] M. Rosenberg, *Planet. Space Sci.*, Vol. **41**, 229 (1993).
- [39] R. L. Merlino, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 60 (1997).
- [40] K. N. Ostrikov, M. Y. Yu, S. V. Vladimirov et al., *Phys. Plasmas* **6**, 737 (1999).

-
- [41] F. Verheest et P. Meuris, *Phys. Lett. A* **198**, 228 (1995).
- [42] M. S. Barnes, J. H. Keller, J. C. Forster, J. A. O'Neill et D. K. Coultas, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 313 (1992).
- [43] J. X. Ma et M. Y. Yu, *Phys. Plasmas* **1**, 3520 (1994).
- [44] A. G. Sitenko, A. G. Zagorodny, Yu I Chutov *et al.*, *Plasma Phys. Control. Fusion* **38**, A105 (1996).
- [45] S. V. Vladimirov Proceedings of Contributed Papers, *25th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Montpellier, June 27th-July 1st, 1994, edited by E. Joffrin, P. Platz and P. E. Stott (European Physical Society, Petit-Lancy, 1994), Part III, p. 1494.
- [46] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Academic, New York, 1965), p. 207.
- [47] M. Tribeche et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **8**, 394 (2001).
- [48] N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Planet. Space Sci.* **44**, 1593 (1996).
- [49] M. Tribeche et T. H. Zerguini, article en préparation en vue d'être soumis à *Phys. of Plasmas*.
- [50] M. Oppenheim, D. L. Newman et M. V. Goldman, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2344 (1999).
- [51] L. J. Chen et G. K. Parks, *Nonlinear Processes in Geophysics* **9**, 111(2002).
- [52] A. A. Mamun, P. K. Shukla et R. Bingham, *Phys. Lett. A* **298**, 179 (2002).
- [53] D. Jovanović et P. K. Shukla, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 1350001 (2003).
- [54] R. E. Ergun et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 826 (1998).
- [55] M. Tribeche, R. Hamdi et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **7**, 4013 (2000).
- [56] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [57] P.K. Shukla, *Phys. Scr.* **45**, 504 (1992).
- [58] F. Verheest, *Space Sci. Rev.* **77**, 267 (1996).
- [59] Merlino, *IEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 60 (1997).
- [60] F. Verheest et P. Meuris, *Phys. Lett. A* **198**, 228 (1995).
- [61] N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **4**, 9 (1997).
- [62] A. A. Mamun, R. A. Cairns et P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **3**, 702 (1996).

-
- [63] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972), p. 15.
- [64] H. Washimi et T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 966 (1966).
- [65] C. H. Su et C. S. Gardner, *J. Math. Phys.* **10**, 536 (1969).
- [66] N. J. Zabusky et M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
- [67] N. J. Zabusky, *Phys. Rev.* **168**, 124 (1968).
- [68] H. Ikezi, R. J. Taylor et R. D. Baker, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 11 (1970).
- [69] H. Ikezi, *Phys. Fluids* **16**, 1668 (1973).
- [70] Y. Kato, M. Tajiri et T. Taniuti, *Phys. Fluids* **15**, 865 (1972).
- [71] H. Schamel, *J. Plasma Phys.* **9**, 377 (1973).
- [72] M. Q. Tran, *Phys. Scr.* **20**, 317 (1979).
- [73] Y. H. Ichikawa, *Phys. Scr.* **20**, 296 (1979).
- [74] A. A. Mamun, *Astrophys. Space Sci.* **268**, 443 (1999).
- [75] P. K. Shukla et A. A. Mamun, *New J. Phys.* **5**, 1 (2003).
- [76] I. B. Bernstein, J. M. Greene et M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **108**, 546 (1957).
- [77] D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, (Wiley, New York, 1983), P. 115.
- [78] A. Barkan, R. L. Merlino et N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **2**, 3563 (1995).
- [79] B. Buti, *Phys. Lett. A* **235**, 241 (1997).
- [80] H. Houili, M. Tribeche et T. H. Zerguini, *J. Plasma Physics* **66**, 135 (2001).
- [81] F. C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, P. 31, (Springer-Verlag, New-York, 1993) and M. Braun, *Differential Equations and their Applications*, P. 409, (Springer-Verlag, New-York, 1978).
- [82] J. R. Bhatt et B. P. Pandey, *Phys. Rev. E* **50**, 3980 (1994).
- [83] N. D'Angelo, *Planet. Space Sci.* **41**, 469 (1993).
- [84] N. D'Angelo, *Planet. Space Sci.* **42**, 507 (1994).
- [85] J. X. Ma et M. Y. Yu, *Phys. Rev. E* **50**, 2431 (1994).
- [86] J. X. Ma, M. Y. Yu et H. Luo, *Planet Space Sci.* **45**, 1437 (1997).

- [87] J. X. Ma, J. -Y Liu et M. Y. Yu, *Phys. Rev. E* **55**, 4627 (1997).
- [88] J. X. Ma, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Phys. Lett. A* **198**, 357 (1995).
- [89] S. V. Vladimirov, K. N. Ostrikov, M. Y. Yu et L. Stenflo, *Phys. Rev. E* **58**, 8046 (1998).
- [90] K. N. Ostrikov, M. Y. Yu et N. A. Azarenkov, *Phys. Rev. E* **58**, 2431 (1998).
- [91] K. N. Ostrikov et M. Y. Yu, *J. Phys. D : Appl. Phys.* **32**, 1650 (1999).
- [92] S. V. Vladimirov, K. N. Ostrikov et M. Y. Yu, *Phys. Rev. E* **60**, 3257 (1999).
- [93] K. N. Ostrikov, S. V. Vladimirov, M. Y. Yu et G. E. Morfill, *Phys. Plasmas* **7**, 461 (2000).
- [94] N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **7**, 3214 (2000).
- [95] N. N. Rao et F. Verheest, *Phys. Lett. A* **268**, 390 (2000).
- [96] N. N. Rao et P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **8**, 370 (2001).
- [97] N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **6**, 4414 (1999).
- [98] N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **7**, 795 (2000).
- [99] H. Schamel, N. Das et N. N. Rao, *Phys. plasmas* **8**, 671 (2001).
- [100] A. Barkan, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Planet Space Sci.* **43**, 905 (1995).
- [101] A. Barkan, R. L. Merlino et N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **2**, 3563 (1995).
- [102] A. Barkan, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Phys. Lett. A* **222**, 329 (1996).
- [103] Q.-Z. Luo, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Phys. Plasmas* **6**, 3455 (1999).
- [104] A. Barkan, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3093 (1994).
- [105] N. A. Krall et A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, 1973), p. 432.
- [106] F. C. Hoppensteadt, *Analysis and simulation of chaotic systems* (Springer-Verlag, New York, 1993), p.9.
- [107] A. Kurosh, *Cours d'algèbre supérieure* (Mir, Moscou,1973), p.241.
- [108] M. Tribeche, H. Houili et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **9**, 419 (2002).
- [109] S. I. Popel, M. Y. Yu et V. N. Tsytovich, *Phys. Plasmas* **3**, 4313 (1996).

- [110] S. I. Popel, A. P. Golub, T. V. Losseva, R. Bingham et S. Benkada, *Phys. Plasmas* **8**, 1497 (2001).
- [111] S. I. Popel, V. N. Tsytovich et M. Y. Yu, *Astrophys. Space Sci.* **256**, 107 (1998).
- [112] S. I. Popel et V. N. Tsytovich, *Astrophys. Space Sci.* **264**, 219 (1999).
- [113] F. Melandso et P. K. Shukla, *Planet. Space Sci.* **43**, 635 (1995).
- [114] A. V. Ivlev et G. Morfill, *Phys. Rev. E* **63**, 026412-1 (2001).
- [115] Baisong Xie et Kaifen He, *Phys. of Plasmas* **6**, 3808 (1999).
- [116] N. Koide et M. Sato, *J. Phys. Soc. Jpn* **67**, 1968 (1998).
- [117] P. K. Shukla et A. A. Mamun, *Phys. Plasmas* **8**, 3126 (2001).
- [118] H. Houili, M. Tribeche et T. H. Zerguini, *J. Plasma Physics* **67**, 115 (2002).
- [119] G. Schmidt, *Physics of high temperature Plasmas* (Academic Press, New York, 1979), p. 311.
- [120] G. Manfredi, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2815 (1997).
- [121] H. Schamel, *Phys. Plasmas* **7**, 4831 (2000).
J. Korn et H. Schamel, *Phys. Lett. A* **208**, 328 (1995).
H. Schamel et J. Korn, *Phys. Scr.* **T63**, 63 (1996).
J. Korn et H. Schamel, *J. Plasma Physics* **56**, 307 (1996).
- [122] V. N. Tsytovich, U. de Angelis et R. Bingham, *Phys. Plasmas* **9**, 1079 (2002).
- [123] F. Verheest et P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **9**, 1113 (2002).
- [124] S. Ghosh, S. Sarkar, M. Khan et M. R. Gupta, *Phys. Plasmas* **9**, 1150 (2002).
- [125] J. Vranjes, B. P. Pandey et S. Poedts, *Phys. Plasmas* **9**, 1464 (2002).
- [126] A. A. Mamun et P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **9**, 1468 (2002).
- [127] *Phys. Scr.* **20**, N° 3/4 (1979), Symposium sur les solitons et leurs applications dans la science et la technologie, Aspenäsgråden, Göteborg, juin 1978.
- [128] R. Roychoudhury, S. K. Venkatesan et C. Das, *Phys. Plasmas* **4**, 4232 (1997).
- [129] N. Ya. Kotsarenko, S. V. Koshevaya, G. A. Stewart et D. Maravilla, *Planet. Space Sci.* **46**, 429 (1998).
- [130] T. E. Sheridan, S. Yi et K. E. Lonngren, *Phys. Plasmas* **5**, 3165 (1998).

-
- [131] A. A. Mamun, M. N. Alam et A. K. Azad, *Phys. Plasmas* **5**, 1212 (1998).
- [132] M. Kakati et K. S. Goswami, *Phys. Plasmas* **5**, 4508 (1998).
- [133] Y. Nakamura, H. Bailung et K. E. Lonngren, *Phys. Plasmas* **6**, 3466 (1999).
- [134] T. Nagasawa, *Phys. Plasmas* **6**, 3471 (1999).
- [135] A. A. Mamun, *Eur. Phys. J. D* **11**, 143 (2000).
- [136] M. Lontano, S. Bulanov et J. Koga, *Phys. Plasmas* **8**, 5113 (2001).
- [137] A. R. Esfandyari, S. Khorram et A. Rostami, *Phys. Plasmas* **8**, 4753 (2001).
- [138] J. F. McKenzie et T. B. Doyle, *Phys. Plasmas* **8**, 4367 (2001).
- [139] Y. Nakamura et A. Sarma, *Phys. Plasmas* **8**, 3921 (2001).
- [140] A. V. Ivlev et G. Morfill, *Phys. Rev. E* **63**, 026412-1 (2001).
- [141] A. A. Mamun, P. K. Shukla et L. Stenflo, *Phys. Plasmas* **9**, 1474 (2002).
- [142] S. Poornakala, A. Das, A. Sen et P. K. Kaw, *Phys. Plasmas* **9**, 1820 (2002).
- [143] M. Tribeche, T. H. Zerguini et H. Houili, *Phys. Plasmas* **9**, 4879 (2002).
- [144] M. R. Gupta, S. Sarkar, S. Ghosh, M. Debnath et M. Khan, *Phys. Rev. E* **63**, 046406-1 (2001).
- [145] H. Houili, M. Tribeche et K. Aoutou *Phys. Plasmas* **9**, 4385 (2002).
- [146] A. Brattli, O. Havnes et F. Melandso, *J. Plasma Phys.* **58**, 691 (1997).
- [147] A. A. Mamun et P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **10**, 4188 (2003).
- [148] M. Tribeche et T. H. Zerguini, article à paraître dans la revue *Physics of Plasmas*.
- [149] N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **7**, 795 (2000).
- [150] H. Schamel, *Phys. Plasmas* **7**, 4831 (2000).
- [151] H. Schamel, *Plasma Phys.* **14**, 905 (1972).
- [152] H. Schamel, *Phys. Scr.* **T2/1**, 228 (1982).
- [153] M. Tribeche, T. H. Zerguini et K. Aoutou **10**, 631 (2003).
- [154] H. Schamel, *Phys. Scr.* **20**, 306 (1979).
- [155] A. A. Mamun, *Phys. Plasmas* **5**, 322 (1998).
- [156] A. A. Mamun et M. N. Alam, *Phys. Plasmas* **5**, 1212 (1998).

- [157] M. Kakati et K. S. Goswami, *Phys. Plasmas* **5**, 4508 (1998).
- [158] M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli et V. Gavrishchaka, *Phys. Plasmas* **7**, 3851 (2000).
- [159] M. Lampe, V. Gavrishchaka, G. Ganguli et G. Joyce, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5278 (2001).
- [160] D. D. Tskhakaya, P. K. Shukla et L. Stenflo, *Phys. Plasmas* **8**, 5333 (2001).
- [161] H. Schamel, N. Das et N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **8**, 671 (2001).
- [162] N. N. Rao, *Phys. Plasmas* **6**, 4414 (1999).
- [163] S. Ghosh, S. Sarkar, M. Khan et M. R. Gupta, *Phys. Plasmas* **9**, 1150 (2002).
- [164] A. A. Mamun et P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **9**, 1474 (2002).
- [165] H. Schamel, *Plasma Phys.* **14**, 905 (1972).
H. Schamel, *J. Plasma Phys.* **13**, 139 (1975).
- [166] J. C. Fernandez, C. Froeschle et G. Reinisch, *Phys. Scr.* **20**, 545 (1979) et références citées.
- [167] H. Schamel, *Phys. Repts.* **140**, 161 (1986).
- [168] M. Tribeche et T. H. Zerguini, article soumis à la revue *Physics of Plasmas*.
- [169] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972), p. 80.
- [170] E. M. Lifshitz et L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics* (Pergamon, 1981), p. 146.
- [171] P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **8**, 1447 (2001).
- [172] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [173] P. K. Shukla et V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [174] S. V. Vladimirov, K. N. Ostrikov, M. Y. Yu et L. Stenflo, *Phys. Rev. E* **58**, 8046 (1998).
- [175] J. X. Ma et M. Y. Yu, *Phys. Rev. E* **50**, 2431 (1994).
- [176] L. I. Rudakov et V. N. Tsytovich, *Phys. Repts.* **40C**, 1 (1978).
- [177] S. G. Thornhill et D. ter Haar, *Phys. Repts.* **43**, 43 (1978).
- [178] S. L. Musher, A. Rubenchik et V. E. Zakharov, *Phys. Repts.* **252**, 177 (1995).
- [179] S. I. Popel, S. V. Vladimirov et V. N. Tsytovich, *Phys. Repts.* **259**, 327 (1995).

-
- [180] M. Tribeche et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **10**, 984 (2003).
- [181] R. O. Dendy, *Plasma Dynamics* (Clarendon Press, Oxford, 1990), p. 88.
- [182] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Academic, New York, 1965), p. 213.
- [183] D. R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory* (Wiley, New York, 1983), p. 178.
- [184] Philippe Mounaix, Thèse de Doctorat en Sciences, Université de Paris- Sud, Centre d'Orsay, Juin 1990.
- [185] D. R. Nicholson, *Phys. Scripta* **T2/1**, 48 (1982).
- [186] M. Tribeche et T. H. Zerguini, article à paraître dans la revue *Physics of Plasmas*.
- [187] P. K. Shukla and B. Eliasson, *Phys. Plasmas* **11**, 584 (2004).
- [188] G. L. Payne, D. R. Nicholson et R. M. Downie, *J. Comput. Phys.* **50**, 482 (1983).
- [189] P. J. Hansen et D. R. Nicholson, *Amer. J. Phys.* **47**, 769 (1979).
- [190] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [191] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [192] Y. Nakamura, and A. Sarma, *Phys. Plasmas* **8**, 3921 (2001).
- [193] G. Schmidt, *Physics of high temperature Plasmas* (Academic Press, New York, 1979), p. 305.
- [194] D. ter Haar, *Phys. Scripta* **20**, 291 (1979).
- [195] V. Makhankov, *Comput. Phys. Commun.* **21**, 1 (1980).
- [196] C. K. Goertz, *Rev. Geophys.* **27**, 271 (1989).
- [197] D. A. Mendis et M. Rosenberg, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **32**, 419 (1994).
- [198] M. Horanyi, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 383 (1996).
- [199] G. S. Selwyn, *Jpn. J. Appl. Phys.* **32**, 3068 (1993).
- [200] F. Verheest, *Waves in Dusty Space Plasmas* (Kluwer, Dordrecht, 2000).
- [201] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [202] K. E. Lonngren, *Planet. Space Sci.* **38**, 1457 (1990).
- [203] H. Luo et M. Y. Yu, *Phys. Fluids B* **4**, 3066 (1992).

-
- [204] M. Y. Yu et H. Luo, *Phys. Lett. A* **161**, 506 (1992).
- [205] M. Y. Yu et R. Bharuthram, *J. Plasma Phys.* **52**, 345 (1994).
- [206] R. Bharuthram et N. N. Rao, *Planet. Space Sci.* **43**, 1079 (1995).
- [207] N. N. Rao et R. Bharuthram, *Planet. Space Sci.* **43**, 1087 (1995).
- [208] D. Anderson, M. Bonnedal et M. Lisak, *Physica Scripta* **22**, 507 (1980).
- [209] S. R. Pillay, S. V. Singh, R. Bharuthram et M. Y. Yu, *J. Plasma Phys.* **58**, 167 (1997).
- [210] R. Bharuthram, N. N. Rao et S. R. Pillay, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **29**, 164 (2001).
- [211] V. F. Kovalev et V. Yu. Bychenkov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 185004 (2003).
- [212] Y. El- Zein et al., *Phys. Plasmas* **2**, 1073 (1995).
- [213] Y. El- Zein et al., *Planet. Space Sci.* **45**, 251 (1997).
- [214] L. G. Garcia et al., *Phys. Plasmas* **4**, 4240 (1997).
- [215] P. Mora, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 185002 (2003).
- [216] M. Tribeche, H. Houili et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **11**, 3001 (2004).
- [217] S.G. Tagare, *Phys. Plasmas* **4**, 3167 (1997).
- [218] Ch. Sack et H. Schamel, *Plasma Phys. Contr. Fusion* **27**, 717 (1985).
- [219] Ch. Sack et H. Schamel, *Phys. Lett.* **110A**, 206 (1985).