

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN: PHYSIQUE

Spécialité : Electronique Quantique

par Melle : LAIDOUNE NAWEL

Sujet :

Calcul des coefficients de transport relativistes et non stationnaires dans un plasma non collisionnel

Soutenu publiquement le 10/07/2007 devant le jury composé de :

Mr. A. KELLOU	Professeur	(USTHB)	Président
Mme. K. BENDIB-KALACHE	Professeur	(USTHB)	Directeur de thèse
Mme. F-Z. IGHEZOU	Professeur	(USTHB)	Examineur
Mme. D. DOUMAZ-BENNACEUR	Maître de Recherches	(CDTA)	Examineur
Mr. M. TRIBECHÉ	Maître de Conférences	(USTHB)	Examineur



Je remercie Allah le tout puissant de nous donner la volonté et la santé.

Je tiens à exprimer sincèrement mes remerciements à :

Mes parents pour leur aide inestimable, ils m'ont en effet, procurés toutes les conditions favorables pour attendre ce niveau d'études.

Je n'ometts pas de remercier mes frères et sœurs pour leur confiance et leurs compréhensions.

Je veux remercier mes chers neveux et nièces.

Je dois aussi saluer et remercier tous mes amis qui sont trop nombreux pour être nommés tous ici. Vous savez qui vous êtes et je désire vous dire à quel point je suis honorée de vous connaître.

Je n'oublie pas d'exprimer ma gratitude à Tous mes enseignants qui par leurs encouragements ont contribué pour une part importante à ma formation pendant mes études.

A tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont contribué à la réalisation de ce travail.

A vous tous, du fond du cœur Merci.



Nawel &...

☆ Remerciements ☆

Le présent travail a été réalisé au laboratoire « Electronique Quantique » de la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène (U.S.T.H.B).

Monsieur A. KELLOU, Professeur à l'U.S.T.H.B, m'a enseignée la dynamique des lasers, je le remercie respectueusement de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse.

Madame F-Z. IGHEZOU, Professeur à l'U.S.T.H.B, m'a fait l'honneur de juger ce travail, qu'elle trouve ici, l'expression de ma gratitude.

Je remercie vivement Madame D. DOUMAZ-BENNACEUR, Maître de Recherches au centre de développement des technologies avancées d'Alger (C.D.T.A), d'avoir acceptée de participer à ce jury de thèse.

Monsieur M. TRIBECHE, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, s'est intéressé à mon travail en me faisant partie de ce jury de thèse, je l'en remercie chaleureusement.

Madame K. BENDIB-KALACHE, Professeur à l'U.S.T.H.B, ma directrice de thèse qui m'a beaucoup aidée pour la réalisation de ce travail. Elle a su m'éclairer par ses précieux conseils, merci madame.

Je n'oublie pas d'exprimer ma gratitude à Mr. A. BENDIB, Professeur à l'U.S.T.H.B, de m'avoir enseignée la physique des plasmas, pour son appui et ses précieux conseils.

Enfin, je remercie mes collègues du laboratoire pour leur soutien moral et leur gentillesse.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
-----------------------------------	----------

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA RELATIVITE RESTRIENTE ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. Introduction.....	6
II. Rappels sur la cinématique relativiste.....	7
II.1. Postulats d'Einstein.....	7
II.2. Transformation de Lorentz.....	8
II.2.1. Notion de quadrivecteur.....	8
II.2.2. Formulation de la transformation de Lorentz.....	9
III. Rappels sur la dynamique relativiste.....	12
IV. Rappels sur l'électromagnétisme relativiste.....	14
IV.1. Tenseur électromagnétisme de Maxwell.....	15
IV.2. Transformation des Champs électromagnétiques.....	16
V. Equations cinétiques relativistes.....	17
V.1. Equation de Vlasov non relativiste.....	18
V.2. Equation de Vlasov relativiste.....	20
V.2.1. Equation de Liouville à une particule.....	20
V.2.2. Equation de Vlasov relativiste.....	23
V.2.3. Fonction de distribution à l'équilibre.....	26
VI. Equations fluides relativistes et relations de fermeture.....	28
VII. Etude bibliographique sur les coefficients de transport.....	30
VII.1. Résultats collisionnels.....	30
VII.2. Résultats non collisionnels.....	34
VIII. Conclusion.....	38

CHAPITRE II

RESOLUTION DE L'EQUATION DE VALSOV RELATIVISTE

ET

CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT NON COLLISIONNELS

I. Introduction.....	39
II. Modèle cinétique.....	39
III. Résolution de l'équation de Vlasov.....	44
III.1. Projection sur la base des polynômes de Legendre.....	44
III.2. Calcul des opérateurs de projections associés à l'opérateur de Krook...46	
III.3. Calcul de la fonction de la distribution perturbée.....	50
IV. Calcul des coefficients de transport non collisionnels.....	55
V. Conclusion.....	64
CONCLUSION GENERALE.....	66
APPENDICE.....	68
REFERENCES.....	71

★INTRODUCTION★

INTRODUCTION GENERALE

L'objet de cette thèse est d'établir des équations fluides pour décrire des plasmas relativistes et non collisionnels. Plus précisément, il s'agit de calculer les relations de fermeture des trois équations fluides d'ordre le plus bas qui décrivent la conservation du nombre de particules, de l'impulsion et de l'énergie.

La prise en compte des effets relativistes est nécessaire lorsque la vitesse des particules peut être comparable à la vitesse de la lumière dans le vide. Dans ces régimes les plasmas exhibent de nouvelles propriétés dues au caractère relativiste des particules. Par exemple des oscillations naturelles du plasma sont altérées par les effets relativistes [1] et il devient nécessaire de revisiter les problèmes de stabilité [2], de thermodynamique du plasma [3-4], etc.

Il est bien connu, que la description dynamique d'un plasma à partir de la théorie fluide présente des avantages considérables en comparaison avec la théorie cinétique. Les équations hydrodynamiques permettent d'étudier de nombreux phénomènes physiques sans faire appel à la complexité des équations cinétiques. Cette simplification provient notamment du nombre de degré de liberté qui est de 4, (t, \vec{r}) pour les équations macroscopiques et de 7 (t, \vec{r}, \vec{p}) pour les équations cinétiques où \vec{r} , \vec{p} et t sont respectivement les vecteurs position et impulsion et la variable temps. En physique des plasmas notamment, les équations hydrodynamiques de Braginskii [5] ont été utilisées avec succès pour décrire aussi bien les plasmas créés en laboratoire que les plasmas astrophysiques. Cependant, ces équations sont valables seulement pour décrire des plasmas non relativistes et proches de l'équilibre thermodynamique. Il est nécessaire par conséquent de développer des modèles fluides pour décrire les plasmas relativistes.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à ce type de plasmas, plus exactement à des plasmas relativistes en température et non collisionnels. L'appellation de plasmas relativistes en température signifie que l'énergie thermique des particules peut être comparable à leur énergie au repos. C'est en astrophysique et en physique de l'interaction laser-matière que se trouvent les principales motivations de ce travail.

En effet, la matière constituant l'espace interstellaire peut se trouver à des températures très élevées sous forme de plasma. A de telles températures, le régime relativiste est atteint. De nombreuses applications liées aux effets relativistes peuvent être étudiées. A titre d'exemple nous pouvons citer :

i) L'étude des jets relativistes extragalactiques à haute énergie [6]. Ces jets sont responsables de l'émission gamma intense de certaines galaxies à noyaux actifs (quasars...).

ii) L'étude des électrons relativistes confinés sous l'effet du champ magnétique terrestre (ceinture de Van Allen) [7]. L'intérêt de cette étude est la recherche constante d'une augmentation de la fiabilité et de la durée de vie des satellites qui nécessite la connaissance de plus en plus précise de l'environnement spatial.

iii) La compréhension des mécanismes d'émission d'ondes (électromagnétique, whistlers...) par les électrons relativistes [8] d'énergie supérieure à 0.511 MeV .

Le développement des lasers de puissance délivrant des impulsions brèves (inférieures à la picoseconde) et énergétiques (de l'ordre du millijoule au kilojoule) soit une puissance de l'ordre du térawatt au pétawatt, permet d'aborder les mécanismes d'interaction laser-matière dans un nouveau régime haute intensité. Ces lasers sont basés sur un nouveau procédé [9], l'amplification par dérive de fréquence. Schématiquement une impulsion laser est d'abord étirée temporellement, ce qui permet de l'amplifier sans dommage pour les amplificateurs. Elle est ensuite comprimée à l'aide d'une paire de réseaux.

À ces intensités élevées, jusqu'à 10^{21} W/cm^2 pour les lasers les plus puissants, l'interaction entre le faisceau laser et une cible se traduit par le transfert d'une large fraction de l'énergie incidente aux électrons qui acquièrent alors une énergie relativiste.

Parmi les applications potentielles dans ce type d'interaction nous pouvons citer :

i) L'autofocalisation relativiste du faisceau laser [1]. Ce phénomène repose sur l'augmentation de masse des électrons oscillants sous l'action du champ électrique intense du laser. L'indice de réfraction du milieu devient tel que le faisceau laser peut converger au delà de la limite de diffraction naturelle et atteindre des éclaircissements cent fois supérieurs à

ceux atteints jusqu'à ce jour. Ce phénomène d'autofocalisation relativiste est mis à profit dans certains schémas d'accélérateurs de particules [10].

ii) La génération d'harmonique Thomson de la fréquence laser [1]. En focalisant une impulsion ultra-intense et ultra-courte dans un gaz on observe l'émission cohérente d'harmoniques d'ordre extrêmement élevé. Le régime de l'électrodynamique quantique non linéaire est désormais accessible et des expériences de diffusion Thomson multiphotonique et de création de paire électron-positron ont pu être effectuées [11].

iii) Source de rayonnement X. Ces impulsions très intenses permettent la génération d'électrons très rapides qui rayonnent ensuite dans le domaine des X durs par bremsstrahlung.

iv) Ces impulsions ont conduit également à la proposition d'un nouveau concept de fusion thermonucléaire par confinement inertiel : l'allumeur rapide. Tel qu'il a été proposé par Tabak et al. [12], ce schéma se subdivise en trois étapes. La première étape consiste à créer un plasma avec une impulsion laser longue (de l'ordre de la nanoseconde et d'intensité modérée de l'ordre de 10^{15} W/cm^2). La seconde étape consiste à creuser dans la couronne de plasma qui entoure la cible un canal aussi vide d'électrons que possible. On utilise pour cela une impulsion brève de l'ordre de la centaine de picosecondes et très intense ($\sim 10^{18} \text{ W/cm}^2$). Enfin la dernière étape nécessite une impulsion encore plus intense autour de 10^{20} W/cm^2 et plus brève (de l'ordre de 10 picosecondes) et transportant une énergie d'environ 10 kilojoules. Celle-ci se propage dans le canal creusé par la précédente impulsion et dépose son énergie à l'extrémité du canal, donc aussi près que possible du cœur de la cible. Cette énergie est transmise aux électrons qui vont être accélérés à des énergies supérieures à 500 keV. Les conditions de température et de densité dans ces plasmas font que ces électrons sont non collisionnels. La description de ces électrons nécessite donc un traitement relativiste et non collisionnel. C'est particulièrement dans ce contexte physique que s'inscrit notre travail.

Dans ce travail nous avons calculé des relations de fermeture exactes pour les équations fluides relativistes et non collisionnelles perturbées par rapport à un équilibre global. Ces relations de fermeture correspondent aux coefficients de transport non collisionnels que sont le flux de chaleur et le tenseur des contraintes généralisés, exprimés

par rapport aux grandeurs hydrodynamiques fondamentales, *i.e.*, la densité, la température et la vitesse moyenne des particules.

Le calcul de ces coefficients de transport qui sont des moments de la fonction de distribution des particules, nécessite la résolution de l'équation de Vlasov relativiste. Nous avons résolu cette équation en tenant compte des termes de transport et des termes non stationnaires. La méthode de résolution est basée sur le développement de la fonction de distribution sur les polynômes orthogonaux afin de séparer dans l'espace des impulsions sa partie angulaire de sa partie qui dépend seulement du module de l'impulsion. Les propriétés conservatives de l'équation de Vlasov (en moyenne, il n'y a pas de gain ou de perte de particules ou d'énergie lors des interactions entre particules de même espèce) sont assurées par les opérateurs de projection. Les techniques mathématiques basées sur les fractions continues qui permettent de résoudre des systèmes infinis d'équations linéaires et algébriques ont également été utilisées.

Les coefficients de transport ont été établis analytiquement dans l'espace de Fourier ($x \leftrightarrow k, t \leftrightarrow \omega$) sous une forme non explicite, en fonction d'intégrales qui renferment des fractions continues. Nous avons calculé numériquement tous les coefficients de transport en fonction de deux paramètres pertinents qui sont

- ❖ Le paramètre relativiste $z = \frac{mc^2}{T_0}$ où m est la masse des électrons, c est la vitesse de la lumière dans le vide et T_0 est la température exprimée en unité énergie (notation utilisée dans toute la thèse).

- ❖ $\frac{\omega}{kc}$ est la vitesse de phase normalisée.

Ces résultats numériques ont montré globalement que les effets relativistes ont tendance à augmenter les coefficients de transport tandis que les effets temporels ont tendance à les réduire. Les résultats stationnaires établis dans la littérature [13] ont été retrouvés comme cas asymptotiques dans la limite $\omega \rightarrow 0$.

Cette thèse est structurée en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les notions de base de la relativité restreinte nécessaires pour introduire l'équation de Vlasov relativiste. Nous avons ensuite présenté deux études bibliographiques centrées sur le thème de recherche abordé dans cette thèse. La première étude [14] concerne le transport dans les plasmas collisionnels et ultra-relativistes en température. La deuxième porte sur le transport relativiste et non collisionnel dans les plasmas stationnaires [13].

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution de l'équation de Vlasov et au calcul des coefficients de transport non collisionnels.

Enfin nous avons résumé nos résultats et donné les perspectives de ce travail dans une brève conclusion.

★ CHAPITRE I ★

*RAPPELES SUR LA THEORIE
DE LA RELATIVITE RESTREINTE
ET
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE*

CHAPITRE.I

RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA RELATIVITE RESTREINTE

ET

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. Introduction

Ce chapitre est consacré dans une première partie à la présentation de quelques rappels fondamentaux sur la théorie de la relativité restreinte ainsi que des rappels sur les équations cinétiques et hydrodynamiques relativistes. Dans une deuxième partie nous présentons une étude bibliographique centrée sur le transport relativiste dans les plasmas.

Les rappels de base sur la théorie relativiste vont nous permettre de mieux présenter les équations cinétiques relativistes que nous utilisons dans notre travail. En particulier, les postulats d'Einstein, la transformation de Lorentz, le quadrivecteur impulsion-énergie ainsi que le quadrivecteur force et les transformations de Lorentz des champs seront présentés. Nous entamerons ensuite les rappels relatifs aux équations cinétiques relativistes en mettant l'action sur l'équation de Vlasov qui constitue l'équation centrale à partir de laquelle sont développés les calculs de cette thèse.

L'étude bibliographique est basée sur deux articles de base. Dans le premier article [14], la théorie du transport dans les plasmas fortement collisionnels et ultra- relativistes est développée. Le deuxième article [13] est consacré à l'étude du transport dans les plasmas relativistes non collisionnels. L'énergie thermique des particules est supposée prendre des valeurs arbitraires comparativement à leur énergie au repos. Ce travail cependant est restreint à des plasmas stationnaires.

Une brève conclusion résumera l'essentiel des rappels et de l'étude bibliographique rapportés dans ce chapitre.

II. Rappels sur la cinématique relativiste

La théorie de la relativité restreinte est l'une des grandes théories qui, depuis le vingtième siècle, a bouleversé les conceptions anciennes de la physique. Ce bouleversement a touché de nombreuses branches de la physique et notamment la théorie statistique des systèmes constitués par un grand nombre de particules. Notons que la théorie relativiste n'est nécessaire que si l'on a affaire à de grandes vitesses. Lorsque la vitesse des systèmes considérés est petite devant la vitesse de la lumière, l'approximation non relativiste est tout à fait suffisante.

Les rappels présentés dans cette thèse seront "restreints", aux systèmes en translation rectiligne uniforme, d'où le nom de relativité restreinte ordinairement attribuée à la théorie par opposition à la relativité générale qui traite des systèmes en mouvement quelconque et englobe les phénomènes de gravitation.

II.1) Postulats d'Einstein

Cette théorie est basée sur deux postulats énoncés par Einstein en 1905.

i) Premier postulat : Il existe dans la nature un ensemble de systèmes privilégiés en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, appelés référentiels galiléens, dans lesquels les lois des phénomènes physiques sont les mêmes.

Il est important de noter que la transformation de coordonnées qui permet de passer d'un référentiel à un autre n'est plus la transformation de Galilée comme nous le verrons plus bas.

ii) Deuxième postulat : Il existe une vitesse maximale pour la propagation des signaux (des interactions).

Il découle alors à partir du premier postulat que cette vitesse est la même pour tous les systèmes galiléens. Cette vitesse est la vitesse de la lumière dans le vide, $c \approx 2.9973 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

II.2) Transformation de Lorentz

La transformation de Lorentz ,qu'il y a lieu de substituer à la transformation de Galilée pour respecter le deuxième postulat ,oblige, comme nous allons le voir à abandonner l'universalité du temps qui repose sur une vitesse infinie des interactions. Cela a les conséquences suivantes : tout évènement c'est-à-dire, tout phénomène physique, se produit dans un certain système de référence en un point donné et à un instant donné. Dans la théorie classique, le temps étant universel, seul importait de connaître les formules de transformations des coordonnées d'espace du point où avait lieu l'évènement. Le temps n'étant plus absolu en théorie relativiste, il est nécessaire de décrire l'évènement tel qu'il est observé dans un système par l'ensemble des quatre nombres : coordonnées d'espace (x, y, z) , et de temps (t) .

II.2.1) Notion de quadrivecteur

Les formules de transformation de Lorentz permettent de calculer les coordonnées (x', y', z', t') d'un évènement dans un système (O', x', y', z') en translation uniforme le long de l'axe Ox à la vitesse \vec{V} , par rapport à un premier système (O, x, y, z) , où les coordonnées (x, y, z, t) sont connues. En général le temps t' est différent de t . Pour formuler la transformation de Lorentz, on introduit la notion de quadrivecteur. On représente un évènement correspondant à la donnée des coordonnées d'espace et de temps (x, y, z, t) par un vecteur de composantes (x_1, x_2, x_3, x_4) appelé quadrivecteur position de l'espace de Minkowski, que nous notons:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = ict \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

où i est le nombre imaginaire complexe ($i^2 = -1$) et où la notation $\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}$ est utilisée pour définir les quadrivecteurs dans ce chapitre.

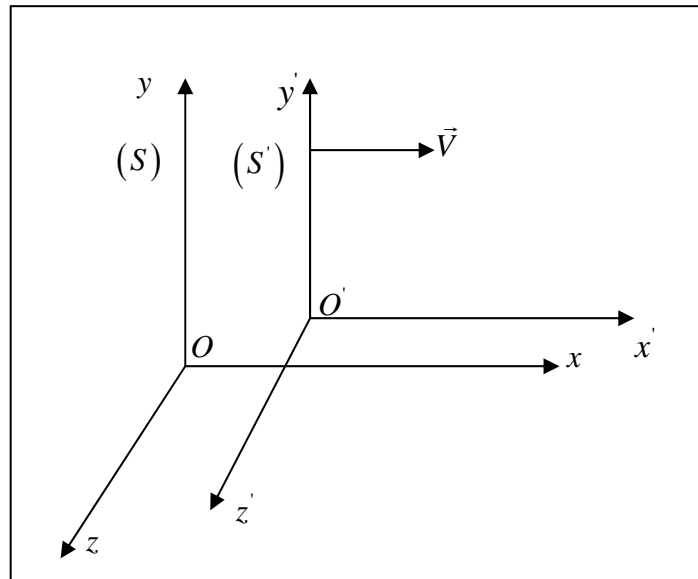


Figure 1 : Représentation de deux référentiels en mouvement de translation uniforme parallèlement à l'axe Ox

II.2.2) Formulation de la transformation de Lorentz

Considérons deux systèmes galiléens (S) et (S') auxquels correspondent dans l'espace-temps deux systèmes de référence se déduisant l'un de l'autre par une rotation d'un angle ϕ dans le plan (x_1, x_4) , les axes x_2 et x_3 demeurant immobiles. Les formules de rotation sont :

$$x'_1 = x_1 \cos \phi + x_4 \sin \phi \quad (\text{I.2})$$

$$x'_2 = x_2 \quad (\text{I.3})$$

$$x'_3 = x_3 \quad (\text{I.4})$$

$$x'_4 = -x_1 \sin \phi + x_4 \cos \phi \quad (\text{I.5})$$

Appliquons ces relations (I.2)-(I.5) pour le point O' qui a pour coordonnées $x'_1 = x' = 0$ dans (S') et $x_1 = x = Vt$ dans (S) , les origines O et O' coïncidant à $t = t' = 0$.

Il s'ensuit

$$\frac{x}{t} = -ic \tan \phi = V \quad (\text{I.6})$$

$$\text{D'où } \tan \phi = i \frac{V}{c} \quad (\text{I.7})$$

$$\sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{I.8})$$

et

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{I.9})$$

Il résulte que les formules de transformation correspondant à la transformation de Lorentz sont :

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{I.10})$$

$$y' = y \quad (\text{I.11})$$

$$z' = z \quad (\text{I.12})$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{I.13})$$

Dans la limite où la vitesse de la lumière tendrait vers l'infini ($V/c \ll 1$), les formules (I.10)-(I.13) tendraient vers les relations de Galilée

$$x' = x - Vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

qui sont valables pour des déplacements dont la vitesse est faible par rapport à la vitesse de la lumière c $\left(v < \frac{c}{10} \right)$.

Les formules de transformation (I.10)-(I.13) peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$x'_i = L_{ij} x_j \quad (\text{I.14})$$

où L_{ij} est la matrice de Lorentz définie par

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_V & 0 & 0 & i\beta\gamma_V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma_V & 0 & 0 & \gamma_V \end{pmatrix} \quad (\text{I.15})$$

$$\text{où } \beta = \frac{V}{c} \text{ et } \gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

L'une des conséquences de la transformation de Lorentz est la dilatation des temps et la contraction des longueurs.

En effet on peut montrer que le temps dt qui sépare deux évènements mesuré dans le système (S') en mouvement avec une vitesse \vec{V} par rapport à un système (S) s'écrit

$$dt = \gamma_V d\tau \quad (\text{I.16})$$

où $d\tau$ est le temps propre mesuré dans le référentiel (S), c'est-à-dire, le temps qui sépare deux évènements se produisant au même point d'un système.

Par ailleurs, on peut aussi montrer que la longueur (l) d'une règle, mesurée dans un système en translation parallèle à cette règle est toujours inférieure à la longueur propre de cette règle (l_p), c'est-à-dire la longueur mesurée dans le système où la règle est au repos.

La relation entre ces deux longueurs s'écrit comme :

$$l = l_p \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{I.17})$$

III. Rappels sur la dynamique relativiste

Après ce bref aperçu sur la cinématique relativiste, nous allons à présent rapporter dans ce paragraphe quelques éléments de théorie sur la dynamique relativiste et l'électromagnétisme.

Partant des principes de la relativité évoqués plus haut, on peut bâtir une dynamique relativiste qui rend compte des faits expérimentaux. En effet, il a été montré que la dynamique newtonienne tombe en défaut pour toute étude de mouvement de corps dont la vitesse est proche de la vitesse de la lumière. A titre d'exemple, dans le domaine de la physique des particules (domaine des hautes énergies), l'expérience a montré que l'on ne peut pas accélérer des particules à des vitesses supérieures à celle de la lumière. Cette dernière apparaît comme une limite asymptotique de la vitesse des particules.

L'une des conséquences de la prise en compte des effets relativistes est la modification des lois de la dynamique de façon à ce qu'elle soit en accord avec l'expérience.

III.1 Impulsion et énergie relativiste

Le principe fondamental de la dynamique relativiste dans un référentiel galiléen est donné sous forme d'un postulat qui s'écrit comme :

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \quad (\text{I.18})$$

$$d\varepsilon = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.19})$$

où \vec{p} et \mathcal{E} sont respectivement l'impulsion et l'énergie relativiste. On peut montrer que ces deux grandeurs forment un quadrivecteur dans l'espace de Minkowski, appelé quadrivecteur impulsion-énergie noté $\vec{\vec{P}}$ et défini par la relation :

$$\vec{\vec{P}} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ i \frac{\mathcal{E}}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{I.20})$$

Lors d'un changement de référentiel Galiléen, les composantes de ce quadrivecteur impulsion-énergie se transforment comme les coordonnées. En particulier pour un référentiel (S') en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V} parallèle à l'axe Ox par rapport à un référentiel (S), les relations s'écrivent

$$P'_i = L_{ij} P_j \quad (\text{I.21})$$

soit,

$$\begin{cases} p'_x = \gamma_V \left(p_x - \beta \frac{\mathcal{E}}{c} \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ \frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma_V \left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \beta p_x \right) \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Les expressions explicites de l'impulsion et l'énergie relativistes sont définies par

$$\vec{p} = \gamma_V m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{I.23})$$

$$\mathcal{E} = \gamma_V m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{I.24})$$

où m_0 est la masse de la particule qui ne dépend pas du choix du référentiel puisque c'est une constante liée à l'énergie au repos

$$\varepsilon_0 = m_0 c^2 \quad (\text{I.25})$$

et \vec{V} est la vitesse par rapport à un référentiel (S).

On définit également une énergie cinétique relativiste correspondant à l'énergie totale moins l'énergie au repos, soit

$$\varepsilon_c = (\gamma_V - 1) m_0 c^2 \quad (\text{I.26})$$

Cette expression redonne, à l'ordre le plus bas en $\frac{V}{c}$, i.e. ; $\gamma_V = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right)$, l'expression de l'énergie cinétique non relativiste,

$$\varepsilon_c = \frac{m_0 V^2}{2} \quad (\text{I.27})$$

Enfin, pour clore ce paragraphe, on rappelle également la notion de quadrivecteur force qui est défini par la relation fondamentale relativiste

$$d\vec{\vec{P}} = \vec{\vec{F}} d\tau \quad (\text{I.28})$$

où le quadrivecteur force est défini par :

$$\vec{\vec{F}} = \left(\gamma_V \vec{f}, i \frac{\gamma_V (\vec{f} \cdot \vec{v})}{c} \right) \quad (\text{I.29})$$

Lorsqu'une particule est isolée, le quadrivecteur force est donc constamment nul et donc le quadrivecteur impulsion-énergie reste invariant. Sa ligne d'univers qui représente la trajectoire de la particule dans l'espace-temps à quatre dimensions est donc une droite.

IV. Rappels sur l'électromagnétisme relativiste

La théorie de la relativité est née du conflit entre l'électromagnétisme et la mécanique newtonienne. Les faits expérimentaux ont résolu le conflit en montrant qu'il fallait conserver l'électromagnétisme et substituer à la mécanique newtonienne, la mécanique relativiste. Les équations de Maxwell traduisant les lois de l'électromagnétisme

n'étaient pas invariantes par changement de référentiel galiléen en appliquant la transformation de Galilée. La transformation de Lorentz rétablit cette propriété d'invariance des équations de Maxwell. L'électromagnétisme subsiste donc en relativité sans aucune modification. Cependant, il est pratique d'écrire les équations de Maxwell sous forme covariante en introduisant le tenseur électromagnétique $\overline{\overline{F}}$ qui est défini plus bas, formé à partir du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . Rappelons que la formulation covariante repose sur le premier postulat de la relativité. Les lois de la physique seront invariantes si d'une part les grandeurs physiques peuvent se regrouper entre elles pour former des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs dans l'espace-temps de Minkowski, et si d'autre part les relations entre ces grandeurs qui expriment les lois de la physique sont invariantes par la transformation de Lorentz. Lorsque ces deux conditions sont réalisées les équations physiques sont dites covariantes et les grandeurs physiques sont appelées covariants d'univers.

IV.1 Tenseur électromagnétique de Maxwell

Dans l'espace-temps de Minkowski, le quadrivecteur force associé aux forces électromagnétiques s'exprime en fonction du quadrivecteur vitesse propre sous la forme de la loi de force

$$\vec{F} = q(\overline{\overline{F}})\vec{V} \quad (\text{I.30})$$

où q est la charge de la particule et

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{iE_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{iE_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{iE_z}{c} \\ \frac{iE_x}{c} & \frac{iE_y}{c} & \frac{iE_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.31})$$

est le tenseur champ électromagnétique.

IV.2 Transformation des champs électromagnétiques

Pour définir les transformations des champs électromagnétiques, on utilise la loi de force appliquée aux forces électromagnétiques lors d'un passage d'un référentiel (S) à un référentiel (S') en translation uniforme par rapport à (S), soit,

$\vec{F} = q(\vec{E})\vec{V}$ et $\vec{F}' = q(\vec{E}')\vec{V}'$. Il résulte alors les relations

$$\vec{F}' = (L)\vec{F} \quad (\text{I.32})$$

$$\vec{V}' = (L)\vec{V} \quad (\text{I.33})$$

où (L) est la matrice de Lorentz [Eq. (I.15)]. Par identification, les composantes du tenseur champ électromagnétique exprimé dans le référentiel (S') s'expriment à l'aide des composantes du tenseur champ électromagnétique exprimées dans le référentiel (S) à l'aide de la relation :

$$\vec{F}' = (L)\vec{F}(L)^{-1} \quad (\text{I.34})$$

De façon plus explicite, on obtient :

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma_V (E_y - VB_z) \\ E'_z = \gamma_V (E_z + VB_y) \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma_V \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \\ B'_z = \gamma_V \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

Dans la limite où $\frac{V}{c} \ll 1$, les équations (I.35) et (I.36) deviennent :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \quad (\text{I.37})$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{V} \times \vec{E}}{c^2} \quad (\text{I.38})$$

V. Equations cinétiques relativistes

Les systèmes physiques constitués d'un grand nombre de particules (de l'ordre du nombre d'Avogadro N) ne peuvent être décrits que par une approche fluide ou une approche statistique. En effet, il est évidemment exclu d'essayer de décrire la dynamique de chaque particule en tenant compte de son interaction avec toutes les autres particules du système. Cela nous conduirait à écrire un nombre d'équations de l'ordre de N et à exprimer de façon explicite toutes les forces qui s'exercent sur chaque particule. En outre, il faut également connaître toutes les conditions initiales pour décrire le mouvement de chaque particule.

L'approche la plus fine pour décrire ces systèmes est celle basée sur la description statistique. Cette approche consiste à dériver des équations dites cinétiques qui décrivent l'évolution au cours du temps de la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ dans l'espace des phases (\vec{r}, \vec{p}) où $\vec{r} = (x, y, z)$ et \vec{p} représentent respectivement le vecteur position et le vecteur impulsion associés à la particule. Cette fonction de distribution représente le nombre de particules dn situées à l'instant t dans l'élément de volume $d\vec{r} = dx dy dz$ ayant une impulsion comprise entre \vec{p} et $\vec{p} + d\vec{p}$, d'où :

$$dn = f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{p} \quad (\text{I.39})$$

ce qui permet de définir la densité de particule 's' en un point \vec{r} à l'instant t :

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p} \quad (\text{I.40})$$

La forme mathématique des équations cinétiques dépend fortement de la nature des systèmes étudiés (gaz neutre, plasma...) ainsi que de leurs propriétés (classique, quantique, faiblement ou fortement corrélé...). En particulier, dans les plasmas qui constituent le cadre dans lequel ce travail a été réalisé, les équations cinétiques se scindent en deux

grandes classes, les équations cinétiques collisionnelles et non collisionnelles. La première classe d'équations cinétiques prend en compte aussi bien les interactions entre particules à courte portée (typiquement à des distance inférieures à la longueur de Debye λ_D qui représente typiquement la longueur d'écran d'une charge par toutes les autres charges du plasma) que les interactions à longue portée. La seconde classe d'équations décrit des plasmas dits non collisionnels en ne considérant que les effets collectifs au delà de la longueur de Debye. Ces plasmas non collisionnels sont décrits par l'équation de Vlasov qui constitue l'équation centrale de ce travail. Nous allons la présenter dans le paragraphe qui suit.

V.1. Equation de Vlasov non relativiste

L'équation de Vlasov a été établie pour la première fois [15] pour des plasmas non relativistes et non magnétisés. Pour une espèce de particules 's', de charge q_s et de masse m_s , elle s'écrit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \left(\frac{\vec{p}}{m_s} \cdot \vec{\nabla} \right) f_s + q_s \vec{E} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{I.41})$$

où \vec{E} est le champ électrique créé par toutes les charges du plasma et par d'éventuelles sources externes.

Cette équation se présente sous une forme mathématique relativement complexe car elle est non linéaire et non locale. En effet, le champ électrique dû aux charges du plasma est relié à la fonction de distribution à travers l'équation de Poisson :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I.42})$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et où $\rho(\vec{r}, t)$ est la densité de charge définie par :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \int f_i d\vec{p} \quad (\text{I.43})$$

La sommation doit s'effectuer sur toutes les espèces de particules du plasma.

L'équation de Vlasov originale (I.41) a ensuite été généralisée à des plasmas en présence d'un champ magnétique \vec{B} , ce qui revient à rajouter dans le terme de force, la force magnétique qui s'exerce sur les particules, soit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \left(\frac{\vec{p}}{m_s} \cdot \vec{\nabla} \right) f_s + q_s \left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m_s} \wedge \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{I.44})$$

Où, dans ce cas, les champs électromagnétiques obéissent aux équations de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.45})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.46})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.47})$$

où $\vec{j} = \sum_i q_i \int \frac{\vec{p}}{m_i} f d\vec{p}$ est la densité de courant.

Il est important de noter que les équations (I.44)-(I.47) ne sont pas rigoureusement auto-consistantes. En effet, l'équation de Vlasov (I.44) est invariante seulement par la transformation de Galilée alors que les équations de Maxwell (I.45)-(I.47) sont invariantes par la transformation de Lorentz. L'utilisation de ce système d'équations sans prendre en considération les postulats d'Einstein peut conduire à des résultats non physiques. A titre d'exemple, il est bien connu que la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans les plasmas chauds, établie à partir de ce modèle d'équations, fait apparaître un amortissement non collisionnel (amortissement Landau) de ces ondes. Cet amortissement résulte d'une interaction résonnante entre l'onde et les particules. Cette résonance est induite par les particules dont la vitesse est proche de la vitesse de phase de l'onde électromagnétique. Or cette vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière c et par conséquent cette interaction fait intervenir des particules dont la vitesse excède celle de la lumière. Pour supprimer cet effet non physique, on annule les termes de la relation de dispersion responsables de cet amortissement pour ne pas être en contradiction avec les

principes de la relativité. Il est nécessaire, dans ce cas, de réécrire l'équation de Vlasov qui prend en compte les principes de la relativité.

V.2. Equation de Vlasov relativiste

L'établissement de l'équation de Vlasov relativiste repose sur la formulation covariante de la théorie cinétique. Ce formalisme sera utilisé pour établir dans une première étape l'équation de Liouville à une particule. Dans une deuxième étape l'équation de Vlasov relativiste sera déduite.

V.2.1. Equation de Liouville à une particule

L'équation de Liouville est une équation cinétique générale dans la mesure où les termes d'interaction ne sont pas précisés explicitement. Elle peut donc être appliquée à n'importe quel système constitué d'un grand nombre de particules. Nous allons établir sa forme covariante. Pour cela, nous introduisons la fonction de distribution $F(x_\mu, P_\mu)$, [16] définie dans l'espace à 8 dimensions (x_μ, P_μ) où l'indice μ varie de 1 à 4, x_μ et P_μ étant respectivement les quadrivecteurs position et impulsion-énergie. Cette fonction de distribution n'a pas de signification physique évidente. En revanche, son intégration par rapport à la composante p_4 correspondant à la variable énergie, conduit à la fonction de distribution usuelle $f(x_\mu, \vec{p})$, *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x_\mu, P_\mu) dp_4 = f(x_\mu, \vec{p}) \quad (\text{I.48})$$

La fonction de distribution $F(x_\mu, P_\mu)$ doit vérifier les propriétés suivantes :

$$F(x_\mu, P_\mu) \geq 0 \text{ et } F(x_\mu, P_\mu) \rightarrow 0 \text{ lorsque } p_\mu \rightarrow \infty,$$

avec la condition de normalisation :

$$\int_{\Sigma_x} \int F(x_\mu, P_\mu) u_\mu d\sigma_\mu d^4 p = \text{constante} \quad (\text{I.49})$$

où Σ_x est une hypersurface dans l'espace à 4-dimensions (x_μ) avec l'élément de surface infinitésimal $d\sigma_\mu$ et u_μ est le quadrivecteur vitesse défini par :

$$u_\mu = \frac{P_\mu}{m} = \frac{dx_\mu}{d\tau} \equiv \dot{x}_\mu \quad (\text{I.50})$$

où la notation « . » représente la dérivée par rapport au temps propre. Dans l'équation (I.49) le produit : $F(x_\mu, P_\mu)u_\mu d\sigma_\mu d^4p$ (I.51)

représente la probabilité pour qu'une ligne d'univers d'une particule intercepte l'élément de surface $d\sigma_\mu$ au point x_μ avec un quadrivecteur énergie-impulsion compris entre P_μ et $P_\mu + dP_\mu$. Par ailleurs, le produit : $F(x_\mu, P_\mu)\dot{P}_\mu d\tilde{\sigma}_\mu d^4x$ (I.52)

représente la probabilité pour qu'une ligne d'univers d'une particule intercepte l'élément de surface $d\tilde{\sigma}_\mu$ au point P_μ avec un quadrivecteur position compris entre x_μ et $x_\mu + dx_\mu$. Dans l'équation (I.52), $d\tilde{\sigma}_\mu$ est un élément de surface infinitésimal de l'hypersurface Σ_p dans l'espace à 4 dimensions (P_μ) . Les équations (I.51) et (I.52) permettent ainsi de définir la fonction de distribution $F(x_\mu, P_\mu)$.

Considérons à présent les hypersurfaces Σ_x et Σ_p fermées. Par conséquent, d'après le principe de conservation de particules, les flux des lignes d'univers à travers Σ_x et Σ_p sont nuls. En effet, le nombre de particules rentrant dans une surface fermée quelconque est égal au nombre de particules qui en sort. Des définitions (I.51) et (I.52), nous pouvons alors écrire

$$\int_{\Sigma_x} d^4P \oint F(x_\mu, P_\mu)u_\mu d\sigma_\mu = 0 \quad (\text{I.53})$$

et

$$\int d^4x \oint_{\Sigma_p} F(x_\mu, P_\mu)\dot{P}_\mu d\tilde{\sigma}_\mu = 0 \quad (\text{I.54})$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, généralisé à 4-dimensions, les équations (I.53) et (I.54) deviennent :

$$\int d^4 P \int d^4 x \frac{\partial F u_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{I.55})$$

$$\int d^4 x \int d^4 P \frac{\partial F \dot{P}_\mu}{\partial P_\mu} = 0 \quad (\text{I.56})$$

Par ailleurs, puisque $F = F(x_\mu, P_\mu)$, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{dF}{d\tau} = \dot{x}_\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \dot{P}_\mu \frac{\partial F}{\partial P_\mu} \quad (\text{I.57})$$

L'évolution spatio-temporelle des grandeurs x_μ et P_μ est régie par les équations d'Hamilton de la mécanique analytique. Leur écriture sous forme covariante est donnée par :

$$\dot{x}_\mu = \frac{\partial H}{\partial P_\mu} \quad (\text{I.58})$$

$$\dot{P}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \quad (\text{I.59})$$

H étant l'hamiltonien du système. En utilisant les équations (I.58) et (I.59), l'équation (I.57) s'écrit

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{\partial F \dot{x}_\mu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F \dot{P}_\mu}{\partial P_\mu} \quad (\text{I.60})$$

L'intégration de l'équation (I.60) conduit à

$$\int \frac{dF}{d\tau} d^4 x d^4 P = \int \frac{\partial F \dot{x}_\mu}{\partial x_\mu} d^4 x d^4 P + \int \frac{\partial F \dot{P}_\mu}{\partial P_\mu} d^4 x d^4 P \quad (\text{I.61})$$

Des équations (I.55) et (I.56), le membre de droite de l'équation (I.61) s'annule.

$$\int \frac{dF}{d\tau} d^4x d^4P = 0 \quad (\text{I.62})$$

L'équation (I.62) est valable quel que soit l'élément de volume de l'espace (x_μ, P_μ) . Il s'en suit par conséquent

$$\frac{dF}{d\tau} = 0 \quad (\text{I.63})$$

ou encore de l'équation (I.57),

$$\frac{dF}{d\tau} = \dot{x}_\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \dot{P}_\mu \frac{\partial F}{\partial P_\mu} = 0 \quad (\text{I.64})$$

L'équation (I.64) est la forme covariante de l'équation de Liouville à une particule. Elle décrit la conservation du nombre de particules dans l'espace (x_μ, P_μ) . Pour appliquer ce résultat aux plasmas, il faut exprimer explicitement le terme de force \dot{P}_μ . Dans un plasma où les collisions sont négligées, l'interaction entre les particules chargées est due à l'action des champs électrique et magnétique qui règnent dans le plasma. Cette interaction électromagnétique est donc décrite par la force de Lorentz. Son écriture sous forme covariante a été présentée au paragraphe IV.1 [Eq. (I.30)].

V.2.2. Equation de Vlasov relativiste

L'expression explicite du terme de force \dot{P}_μ s'obtient à partir de la relation fondamentale de la dynamique relativiste (I.28) et de l'expression covariante de la force de Lorentz (I.30) qui s'écrit en notation tensorielle comme :

$$\dot{P}_\mu = \frac{q}{m} F_{\mu\nu} P_\nu \quad (\text{I.65})$$

Par ailleurs, en substituant l'équation (I.65) dans l'équation de Liouville (I.64), on obtient

$$P_\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + q F_{\mu\nu} P_\nu \frac{\partial F}{\partial P_\mu} = 0 \quad (\text{I.66})$$

Cette équation scalaire s'écrit explicitement comme suit :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} + q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{p}} + q \left(\vec{v} \cdot \vec{E} \right) \frac{\partial F}{\partial p_4} = 0 \quad (\text{I.67})$$

Finalement, en intégrant l'équation (I.67) par rapport à la variable P_4 et en utilisant la relation (I.49), on obtient l'équation de Vlasov relativiste:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{I.68})$$

Notons ici que la forme relativiste de l'équation de Vlasov diffère de la forme non relativiste seulement par rapport au terme de la quantité de mouvement \vec{p} qui correspond dans l'équation (I.68) à la quantité de mouvement relativiste. Les champs \vec{E} et \vec{B} sont dus aux charges d'espace du plasma et à des sources de champs externes. Ils obéissent aux équations de Maxwell dont l'écriture covariante est donnée par :

$$\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\mu} = \mu_0 J_\nu \quad (\text{I.69})$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{I.70})$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et J_ν est le quadrivecteur densité de courant formé à partir du vecteur densité de courant \vec{j} et de la densité de charges ρ des particules:

$$J_\nu = (\vec{j}, ic\rho) \quad (\text{I.71})$$

De l'équation (I.69), on déduit les équations de Maxwell (I.42) et (I.45) avec terme de source, et de l'équation (I.71), les équations de Maxwell (I.46) et (I.47) sans terme de source.

Le plasma est décrit complètement par le système d'équations de Maxwell [Eqs. (I.69) et (I.70)] et de Vlasov [Eq. (I.68)]. Ce système d'équations constitue un système d'équations auto-consistant. En effet, le vecteur densité de courant \vec{j} et la densité de

charges ρ des particules sont des moments de la fonction de distribution, définis respectivement par :

$$\vec{j} = q \int \frac{\vec{p}}{m\gamma_V} f(x_\mu, \vec{p}) d\vec{p} \quad (\text{I.72})$$

et

$$ic\rho = q \int \frac{p_4}{m\gamma_V} f(x_\mu, \vec{p}) d\vec{p} \quad (\text{I.73})$$

Aussi, Il apparaît des équations (I.72)-(I.73), que l'équation de Vlasov est non linéaire puisque les champs \vec{E} et \vec{B} dépendent à leur tour de la fonction de distribution f .

Cette équation cinétique est l'équation de base pour décrire les plasmas non collisionnels. Sa principale propriété est contenue dans le terme de champ qui rend compte de l'interaction à longue portée entre les particules. Il résulte alors un comportement collectif du plasma. Typiquement, les plasmas non collisionnels sont des plasmas très ténus et relativement chauds étant donné que le libre parcours moyen dans ces milieux est proportionnel à la température et inversement proportionnel à la densité de particules. Les applications en physique des plasmas non collisionnels sont très nombreuses, notamment dans les plasmas créés par laser et les plasmas astrophysiques.

L'un des effets le plus important dans les plasmas chauds mis en évidence à partir de l'équation de Vlasov est l'effet Landau [17]. Même en l'absence de collisions, il a été montré que toute perturbation électrostatique s'amortit en transférant son énergie aux particules du plasma. Ce phénomène fut étudié pour la première fois par Landau dans les plasmas non relativistes. Le mécanisme physique qui est à la base de l'effet Landau est l'interaction résonnante entre l'onde et les particules du plasma. On montre qu'il peut se produire un transfert d'énergie entre l'onde et les particules qui ont des vitesses proches de la vitesse de phase de l'onde, *i.e.*, $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} \approx 0)$, où ω et \vec{k} sont respectivement la pulsation et le nombre d'onde de l'onde. L'étude de l'effet Landau a été généralisée aux plasmas relativistes [18]. Il en a résulté que dans le cas des ondes plasma électroniques superlumineuses pour lesquelles $\left(\frac{\omega}{k} > c\right)$, l'amortissement Landau n'existe pas. En effet,

en relativité la vitesse des particules ne peut excéder la vitesse de la lumière et donc pour ces ondes, il n'existe pas de particules résonnantes. Par ailleurs, dans le cas des ondes sublumineuses ($\frac{\omega}{k} < c$), le calcul des taux d'amortissement [18] montre que l'effet Landau est moins important dans les plasmas relativistes que dans les plasmas non relativistes.

V.2.3. Fonction de distribution à l'équilibre

L'équation de Vlasov décrit donc des plasmas très éloignés de l'équilibre puisque dans ces plasmas il n'y a pas de collisions entre les particules qui constituent le seul mécanisme qui fait tendre le système vers l'équilibre thermodynamique.

Dans le cas inverse où le plasma est à l'équilibre thermodynamique, il est décrit par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner (*MBJ*) [19-20] qui s'écrit comme

$$f_{MBJ}(p) = \frac{n_0 z}{4\pi (mc)^3 K_2(z)} \exp\left(-z\sqrt{1+p^2/m^2c^2}\right) \quad (I.74)$$

où $z = \frac{mc^2}{T_0}$ est l'énergie au repos rapportée à l'énergie thermique, T_0 étant la température en unité énergie (notation utilisée dans toute le mémoire). Ce paramètre rend compte de l'importance des effets relativistes dans le système. Le système est non relativiste ou ultra-relativiste pour ($z \gg 1$) et ($z \ll 1$) respectivement. La fonction $K_2(z)$ correspond à la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre 2.

Dans la limite non relativiste $z \gg 1$, en utilisant les développements limités de la fonction de Bessel,

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left[1 + \frac{1}{2z} + \dots \right]$$

le développement: $\sqrt{1+p^2/m^2c^2} \approx 1 + p^2/2m^2c^2$

et la limite $c \rightarrow \infty$, on retrouve bien la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann

$$f_{MB}(p) = \frac{n_0}{(2\pi T_0 m)^{3/2}} \exp(-p^2 / 2mT) \quad (\text{I.75})$$

Notons que la fonction (*MBJ*) peut aussi se réécrire sous la forme

$$f_{MBJ}\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{n_0 z}{4\pi (mc)^3 K_2(z)} \exp(-z\gamma) \quad (\text{I.76})$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz

Nous représentons sur la figure.2, la fonction (*MBJ*) (I.76) en fonction de la vitesse normalisée à la vitesse de la lumière pour différentes valeurs de z .

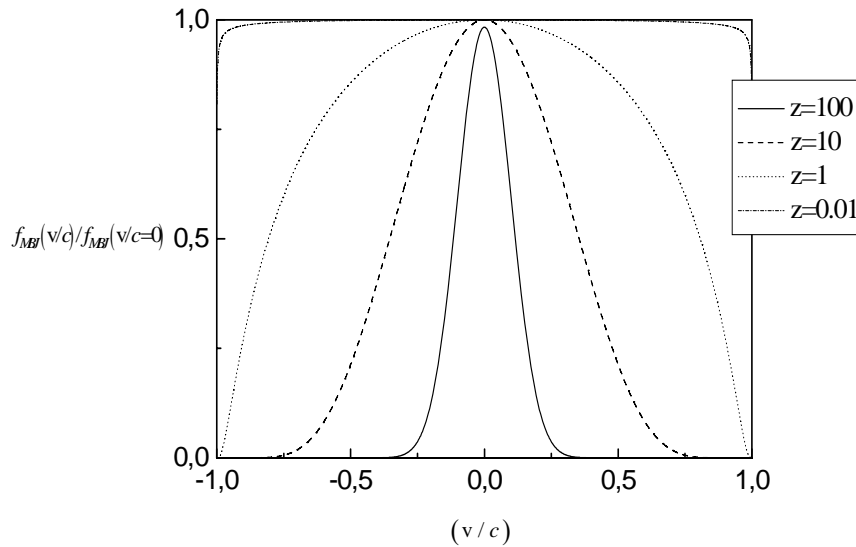


Figure 2. : La fonction de distribution (*MBJ*) en fonction de la vitesse de particules normalisée par rapport à sa valeur maximum $f_{MBJ}(v/c = 0)$, pour différentes valeurs de z .

VI. Equations fluides relativistes non collisionnelles et relations de fermeture

Les équations fluides nettement plus simples que les équations cinétiques sont particulièrement importantes en physique. En effet, elles permettent de décrire un très grand nombre de phénomènes physiques avec une grande précision sans recourir au traitement cinétique beaucoup plus lourd à utiliser. Cette simplification provient notamment du nombre de degrés de liberté qui est de 4, (t, \vec{r}) pour les équations macroscopiques et de 7 (t, \vec{r}, \vec{p}) pour les équations cinétiques.

Dans ce paragraphe nous allons présenter le modèle d'équations fluides relativistes non collisionnelles d'ordre le plus bas ainsi que les relations de fermeture. Dans une première étape nous rappelons la définition des grandeurs hydrodynamiques de base que sont,

❖ La densité de particules: $n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}$ (I.77)

❖ La vitesse moyenne (fluide): $\vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int \frac{\vec{p}}{m\gamma_v} f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}$ (I.78)

❖ et la température dans un repère où le système est au repos, définie par la relation:

$$\frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int (\varepsilon - mc^2) f(\vec{r}, p, t) d\vec{p} = mc^2 [G(z) - 1] - T(\vec{r}, t) \quad (I.79)$$

où $G(z) = K_3(z)/K_2(z)$, $K_3(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre 3.

Les équations fluides qui décrivent l'évolution spatio-temporelle des grandeurs hydrodynamiques (I.77)-(I.79) sont les équations de conservation du nombre de particules, de l'impulsion et de l'énergie. Ces trois équations sont obtenues en intégrant dans tout l'espace des impulsions, l'équation de Vlasov relativiste (I.68) une fois multipliée par 1, \vec{p} et $(\varepsilon - mc^2)$, respectivement. Ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_v n) + \nabla \cdot (\gamma_v n \vec{V}) = 0 \quad - \quad (I.80)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_V n \frac{d}{dt} (\gamma_V m G V_i) &= \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{im} S_{kn} \Pi_{mn}) + \gamma_V n q \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \right]_i \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\gamma_V S_{ik} V_m \Pi_{km} + \gamma_V \left(S_{ik} + \frac{1}{c^2} \gamma_V V_i V_k \right) q_k \right] \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\gamma_V (S_{im} V_k + S_{km} V_i) q_m \right]
\end{aligned} \tag{I.81}$$

$$\begin{aligned}
n \frac{d}{dt} (m c^2 G - T) - T \frac{dn}{dt} &= - \frac{\partial}{\partial x_k} (\gamma_V^{-1} S_{km} q_m) - S_{im} S_{kn} \Pi_{mn} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \left[\gamma_V S_{ik} V_m \Pi_{km} + \gamma_V \left(S_{ik} + \frac{1}{c^2} \gamma_V V_i V_k \right) q_k \right] \frac{\partial V_i}{\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \gamma_V (S_{im} V_k + S_{km} V_i) q_m \frac{\partial V_i}{\partial x_k} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{q} \cdot \vec{V})
\end{aligned} \tag{I.82}$$

$$\text{où } S_{ik} = \delta_{ik} + (\gamma_V - 1) \frac{V_i V_k}{V^2} \tag{I.83}$$

et où δ_{ik} est le symbole de Kronecker. Dans ces équations fluides, le terme de pression isotrope est défini par l'expression : $P = nT$

et les grandeurs physiques responsables du transport (définies par des coefficients de transport qui relient ces grandeurs de transport aux grandeurs hydrodynamiques) que sont le tenseur des contraintes et le flux de chaleur, définis dans un repère où le système est au repos, sont respectivement :

$$\Pi_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_V m} \left(p_i p_j - \frac{p^2}{3} \delta_{ij} \right) f d\vec{p} \tag{I.84}$$

et

$$\vec{q} = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{p} f d\vec{p} \tag{I.85}$$

Pour que le système d'équations (I.80)-(I.82) soit auto-consistant, il est nécessaire d'exprimer les grandeurs de transport (I.84) et (I.85) en fonction des grandeurs hydrodynamiques $n(\vec{r}, t)$, $\vec{V}(\vec{r}, t)$ et $T(\vec{r}, t)$. Une fois cette opération réalisée, les grandeurs de transport deviennent des relations de fermeture des équations fluides.

L'objectif de ce travail consiste précisément à dériver ces relations de fermeture pour les plasmas relativistes et non collisionnels en résolvant l'équation de Vlasov (I.68).

VII. Etude bibliographique sur les coefficients de transport

Dans les plasmas chauds, de nombreux travaux ont été consacrés au calcul des coefficients de transport. Dans ce paragraphe, nous limitons l'étude bibliographique aux coefficients de transport des plasmas relativistes qui font l'objet de cette thèse. Nous soulignons juste que pour les plasmas non relativistes les principaux résultats sur le transport ont été rapportés par Braginskii et Spitzer-Härm dans les références [5] et [21], respectivement.

Par ailleurs, les plasmas relativistes se classent en deux catégories : Ceux dont les effets relativistes sont induits par la vitesse fluide, *i.e.*, le paramètre (V/c) a une valeur arbitraire et ceux dont les effets relativistes sont induits par la température, *i.e.*, le paramètre $\left(z = \frac{mc^2}{T_0}\right)$ à une valeur arbitraire.

Nous focalisons notre analyse sur la deuxième catégorie de plasmas étudiés dans ce travail en présentant deux travaux de la littérature consacrés aux plasmas fortement collisionnels [14] et non collisionnels [13].

VII.1 Résultats collisionnels

A notre connaissance le calcul des coefficients de transport collisionnels a été rapporté de façon quantitative par Dzhavakhishvili et Tsintsadze (DT) dans la référence [14]. Ce résultat particulièrement important constitue une extension des résultats classiques de Braginskii [5] et de Spitzer-Härm [21] aux plasmas relativistes. La méthodologie utilisée ainsi que le formalisme mathématique employé pour résoudre l'équation cinétique s'inspire directement de l'approche utilisée par Braginskii [5].

Dans la référence [14] le plasma étudié est un plasma chaud et magnétisé par un champ magnétique d'intensité arbitraire. Ce plasma constitué d'électrons et d'une seule espèce d'ions est décrit par l'équation de Fokker-Planck relativiste :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_s + q_s (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f = \sum_b C_{sb} (f_s, f_b) \quad (\text{I.86})$$

où $f_s(\vec{r}, \vec{p}, t)$ est la fonction de distribution de l'espèce s de particules ($s=e$ pour les électrons et $s=i$ pour les ions). Le membre de gauche de l'équation (I.86) correspond à celui de l'équation de Vlasov [Eq. (I.68)]. Nous rappelons que \vec{E} et \vec{B} représentent respectivement le champ électrique total et le champ magnétique total qui règnent dans le plasma et les autres variables ont leur sens usuel.

A l'opposé de l'équation (I.68), cette équation présente un second membre non nul qui tient compte des corrélations à courtes distances entre les particules. Ce terme est le terme de collision. Il prend en compte aussi bien des collisions entre les particules de même espèce (électron-électron et ion-ion), que les collisions entre particules d'espèces différentes (électron-ion et ion-électron). Le terme de collision utilisé par Dzhavakhishvili et Tsintsadze [14] est celui de Landau et son expression est

$$C_{sb} = -2\pi L_C q_s q_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int \left(f_s \frac{\partial f_b}{\partial p'_k} - f_b \frac{\partial f_s}{\partial p_k} \right) \frac{U_{ik}}{\gamma \gamma'} d\vec{p}' \quad (\text{I.87})$$

$$\text{où } U_{ik} = \frac{\gamma^2 \gamma'^2 (1-\beta\beta')^2}{c [\gamma^2 \gamma'^2 (1-\beta\beta')^2 - 1]^{1/2}} \left\{ \gamma^2 \gamma'^2 (1-\beta\beta')^2 - 1 \right\} \delta_{ik} - \gamma^2 \beta_i \beta'_k - \gamma'^2 \beta'_i \beta_k + \gamma^2 \gamma'^2 (1-\beta\beta') (\beta_i \beta'_k + \beta'_i \beta_k) \}$$

Dans l'équation (I.90) L_C est le logarithme de Coulomb défini par le logarithme du rapport du paramètre d'impact maximum b_{\max} sur le paramètre d'impact minimum b_{\min} , caractéristiques de la diffusion Coulombienne, *i.e.*, $L_C = \ln(b_{\max}/b_{\min})$. Sous cette forme les opérateurs de collision électron-ion et ion-électron ne permettent pas de résoudre l'équation de Fokker-Planck par une approche analytique. Cependant, ils peuvent se simplifier de façon considérable sous les hypothèses d'un plasma constitué d'ions froids ($T_i \ll m_i c^2$) et d'électrons ultra-relativistes ($T_e \gg m_e c^2$). L'expression de l'opérateur de collision électron-ion devient alors

$$C_{ei} = 2\pi q_i^2 q_e^2 L_C n_i \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(U_{0\alpha\beta} \frac{\partial f_e}{\partial p_\beta} + \frac{\varepsilon^2}{m_i c^2} \frac{2p_\alpha}{p^3} f_e + m_i T_i \frac{\partial f_e}{\partial p_\beta} U_{i\alpha\beta} \right) \quad (\text{I.88})$$

$$\text{où } U_{0\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{p^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta}{p^3}$$

$$\text{et } U_{i\alpha\beta} = \frac{\varepsilon^3}{m_i^2 c^6} \frac{3p_\alpha p_\beta - p^2 \delta_{\alpha\beta}}{p^5} + \frac{1}{m_i^2 c^2 \varepsilon} \frac{p^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta}{p}$$

et celle de l'opérateur de collision ion-électron s'écrit :

$$C_{ie} = \frac{m_e G_e(z) n_e}{n_i} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\frac{p_\alpha}{m_i} f_i + T_e \frac{\partial f_i}{\partial p_\alpha} \right) - \frac{m_e G_e \vec{U}}{n_i \tau_e} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}} \quad (\text{I.89})$$

où \vec{U} est la vitesse relative entre les ions et les électrons et τ_e le temps caractéristique

$$\text{entre les collisions électron-ion donné par : } \tau_e = \frac{3T_e^2}{\pi q_e^2 q_i^2 L_c n_e c}$$

La résolution de l'équation cinétique (I.86) va permettre de calculer la fonction de distribution $f_s(\vec{r}, \vec{p}, t)$ et pouvoir ainsi calculer les coefficients de transport. Notons que dans les plasmas collisionnels, en plus des coefficients de transport cités plus haut qui définissent le tenseur des contraintes et le flux de chaleur, il faut également calculer deux autres coefficients purement collisionnels que sont le taux de transfert d'impulsion et d'énergie entre les particules d'espèces différentes.

La méthode utilisée pour résoudre l'équation cinétique (I.86) est la méthode usuelle de Chapman-Enskog. Elle consiste à développer la fonction de distribution et l'équation cinétique par rapport à un paramètre d'échelle $\left(\frac{\lambda_{ipm}}{L} \ll 1 \right)$. Cette condition signifie que les collisions caractérisées par le libre parcours moyen λ_{ipm} sont prépondérantes par rapport aux termes de force thermodynamiques et électromagnétiques représentés par la longueur typique d'inhomogénéité L du plasma. Il est clair que cette hypothèse reste valable pour les plasmas qui sont très proches de l'équilibre thermodynamique. D'un point de vue mathématique, la fonction de distribution est développée sur la base des tenseurs cartésiens jusqu'à l'ordre 2,

$$f_s = f_{MBJ_s} (1 + \Phi_s) \quad (\text{I.90})$$

$$\text{telle que } \Phi_s(\vec{p}) = p_i \Phi_{si}(p) + \left(p_i p_k - \frac{1}{3} p^2 \delta_{ik} \right) \Phi_{sik}(p)$$

L'équation cinétique est alors scindée en une équation vectorielle qui décrit les flux et une équation tensorielle qui décrit la seconde anisotropie du plasma. L'équation isotrope n'est pas utilisée car on impose comme fonction de distribution isotrope, la fonction (MBJ). Pour résoudre analytiquement les équations obtenues, les composantes de la fonction de distribution $\Phi_{si}(p)$ et $\Phi_{sik}(p)$ sont à leur tour développées sur les polynômes de Laguerre comme suit :

$$\Phi_{si} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{si}^l L_l^3(p_s) \quad (\text{I.91})$$

$$\Phi_{sik} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{sik}^l L_l^5(p_s) \quad (\text{I.92})$$

où $L_l^m(p_s)$ sont les polynômes de Laguerre (appelés aussi polynômes de Sonine). Le système d'équations algébriques par rapport aux coefficients numériques a_{si}^l et a_{sik}^m qui en résulte, est ensuite résolu numériquement en tronquant le développement (I.91) et (I.92) jusqu'à l'ordre 3.

Les résultats obtenus s'expriment en fonction d'expressions mathématiques relativement longues que nous ne reportons pas dans ce travail. Comme grandeur physique de transport, nous présentons seulement le flux de chaleur d'un plasma non magnétisé qui

$$\text{s'écrit } \vec{q}_s = -\frac{c^2 P_s \tau_s}{6T_s} \nabla T_s \quad (\text{I.93})$$

Rappelons que ce résultat n'est valable que dans le cas ultra-relativiste et, les résultats classiques lorsque $c \rightarrow \infty$ de Spitzer-Härm [21] et Braginskii [5] ne sont évidemment pas retrouvés.

VII.2 Résultats non collisionnels

Nous allons à présent présenter les résultats relatifs au transport non collisionnel rapportés dans la référence [13].

L'équation de base de cette étude est l'équation de Vlasov relativiste et non stationnaire qui décrit un plasma perturbé par rapport à un état d'équilibre global, la projection de cette équation sur l'axe des Ox s'écrit :

$$\left[\lim_{\omega \rightarrow 0} (i\omega \delta f) + ikc^2 \frac{P_x}{\varepsilon} \delta f - q \frac{P_x}{m\varepsilon} z f_{MBJ} \delta E + \frac{P_x^2}{m\varepsilon} z f_{MBJ} ik \delta V \right] = \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu (\delta f_{MBJ} - \delta f) \quad (I.94)$$

où m est la masse des particules, $\delta \vec{E}$ est le champ électrique perturbé et δf et f_{MBJ} sont respectivement la fonction de distribution perturbée et la fonction de distribution (MBJ) qui décrit l'équilibre global. Un terme de collision dans la limite de la fréquence de collision ν nulle, a aussi été rajoutée à cette équation où δf_{MBJ} est la fonction (MBJ) perturbée.

Cette équation (I.94) a été résolue analytiquement de façon explicite. Pour cela les techniques de développement sur les polynômes de Legendre de la fonction de distribution ont été utilisées et l'équation (I.94) se réécrit sous forme d'une infinité d'équations.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (i\omega \delta f_0) + \frac{ikc^2}{\sqrt{3}} \frac{p}{\varepsilon} \delta f_1 = -\frac{1}{3} \frac{p^2}{m\varepsilon} z \mu_0 \exp(-z\gamma) ik \delta V + \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu (\delta f_{MBJ} - \delta f_0) \quad (I.95)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} (-i\Omega \delta f_1) + \frac{ikc^2 p}{\varepsilon} \left(\frac{\delta f_0}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{15}} \delta f_2 \right) = \frac{zq}{\sqrt{3}} \frac{p}{m\varepsilon} \mu_0 \exp(-z\gamma) \delta E \quad (I.96)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} (-i\Omega \delta f_2) + \frac{ikc^2 p}{\varepsilon} \left(\frac{2}{\sqrt{15}} \delta f_1 + \frac{3}{\sqrt{35}} \delta f_3 \right) = -\frac{2}{3\sqrt{5}} \frac{p^2}{m\varepsilon} z \mu_0 \exp(-z\gamma) ik \delta V \quad (I.97)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} (-i\Omega \delta f_n) + \frac{ikc^2 p}{\varepsilon} \left(\frac{n+1}{\sqrt{2n+3}} \frac{\delta f_{n+1}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \frac{\delta f_{n-1}}{\sqrt{2n+1}} \right) = 0 \quad n \geq 3 \quad (I.98)$$

où $\Omega = \omega + iv$, $\mu_0 = \frac{n_0 z}{4\pi m^3 c^3 K_2(z)}$ et δf_n est la nième composante de la fonction de distribution perturbée dans le développement sur la base des polynômes de Legendre.

Le calcul de la composante de la fonction de distribution d'ordre 3 est obtenu à l'aide des produits infinis :

$$\delta f_2 = \prod_{p=1}^{\infty} -\frac{(2p+2)}{(2p+1)} \sqrt{\frac{4p+1}{4p+5}} \lim_{p \rightarrow \infty} \delta f_{2p+2} \quad (\text{I.99})$$

$$\delta f_3 = \prod_{p=1}^{\infty} -\frac{(2p+3)}{(2p+2)} \sqrt{\frac{4p+3}{4p+7}} \lim_{p \rightarrow \infty} \delta f_{2p+3} \quad (\text{I.100})$$

Il en résulte, après quelques manipulations mathématiques, la relation suivante :

$$\delta f_2 = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{5}{7}} \frac{ik}{|k|} \delta f_3 \quad (\text{I.101})$$

Le système d'équations (I.95)-(I.98) et (I.101) constitue un système d'équations complet pour calculer les trois premières composantes de la fonction de distribution δf . Les expressions explicites des deux premières composantes anisotropes nécessaires pour déterminer les coefficients de transport non collisionnels sont, :

$$\begin{aligned} \delta f_1 = & \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{ik}{|k|} \left(\frac{\gamma}{(\gamma^2-1)^{1/2}} \frac{I_2 - \gamma I_1}{I_1 A_1 - I_4 A_2} \right) \mu_0 z \exp(-z\gamma) \frac{\delta T}{T_0} - \frac{(\gamma^2-1)^{1/2}}{\sqrt{3}} \mu_0 z \exp(-z\gamma) \frac{\delta V}{c} + \\ & \left(\frac{\gamma}{(\gamma^2-1)^{1/2}} \right) \frac{\sqrt{3}}{(I_1 I_3 - I_2 I_4)} \left(I_3 - \gamma I_4 - \frac{(I_2 - \gamma I_1)(I_2(I_3 I_0^2 - I_4 I_0^3) + I_1(I_4 I_0^4 - I_3 I_0^3))}{(I_1 I_3 - I_2 I_4)(I_1 A_1 - I_4 A_2)} \right) \mu_0 \exp(-z\gamma) \frac{K_2(z)}{z} \frac{\delta V}{c} \end{aligned} \quad (\text{I.102})$$

$$\begin{aligned} \delta f_2 = & \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{\gamma}{(\gamma^2-1)^{1/2}} \frac{I_2 - \gamma I_1}{I_1 A_1 - I_4 A_2} \right) z \mu_0 \exp(-z\gamma) \frac{\delta T}{T_0} - \frac{\pi\sqrt{5}}{4} \frac{ik}{|k|} \frac{K_2(z)/z}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \frac{\gamma}{(\gamma^2-1)^{1/2}} \times \\ & \left(I_3 - \gamma I_4 + \frac{(I_2 - \gamma I_1)(I_2(I_3 I_0^2 - I_4 I_0^3) + I_1(I_4 I_0^4 - I_3 I_0^3))}{(I_1 I_3 - I_2 I_4)(I_1 A_1 - I_4 A_2)} \right) \mu_0 \exp(-z\gamma) \frac{\delta V}{c} \end{aligned} \quad (\text{I.103})$$

$$\text{où } I_j^i = \int_1^\infty \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma$$

I_1, I_2, I_3, I_4 sont des quantités qui s'expriment en fonction des fonctions de Bessel $K_2(z)$ et $K_3(z)$.

$$I_1 = K_2(z)/z$$

$$I_2 = K_2(z)(-1 + zG(z))/z^2$$

$$I_3 = K_2(z)(1 + z + (3 - z)G(z))/z^2$$

$$I_4 = K_2(z)(-1 - z + zG(z))/z^2$$

et enfin

$$A_1 = \frac{I_1(I_0^4 - I_0^3) + I_2(I_0^2 - I_0^3)}{I_1 I_3 - I_2 I_4}$$

$$A_2 = \frac{I_1 I_0^3 + I_2 I_0^2}{I_1 I_3 - I_2 I_4}$$

Les grandeurs liées au transport que sont le flux de chaleur généralisé et le tenseur des contraintes sont ensuite déduits :

$$\begin{aligned} \delta q_{gen_x}(z) = & -\frac{2}{\pi} \frac{n_0 c}{|k|} \frac{z^3}{K_2(z)} \left(\frac{(I_2)^2 - I_1 I_5}{I_1 A_1 - I_4 A_2} \right) ik \delta T + \\ & \left(-G(z) - \frac{I_2(I_3 I_0^2 - I_4 I_0^3) + I_1(I_4 I_0^4 - I_3 I_0^3)}{(I_1 A_1 - I_4 A_2)} \frac{(I_2)^2 - I_1 I_5}{(I_1 I_3 - I_2 I_4)^2} + \frac{I_3 I_2 - I_4 I_5}{(I_1 I_3 - I_2 I_4)} \right) z n_0 T_0 \delta V \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

$$\delta \Pi_{\text{gen}_{xx}}(z) = \frac{\pi}{6} n_0 m c \left(\frac{I_2(I_3 I_0^2 - I_4 I_0^3) + I_1(I_4 I_0^4 - I_3 I_0^3)}{I_1 A_1 - I_4 A_2} \frac{I_2(I_0^3 - I_0^1) - I_1(I_0^3 - I_0^4)}{(I_1 I_3 - I_2 I_4)^2} - \frac{I_3(I_0^3 - I_0^1) - I_4(I_0^4 - I_0^2)}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) \frac{ik \delta V}{|k|} + \frac{z^3}{3K_2(z)} \left(\frac{I_2(I_0^3 - I_0^1) - I_1(I_0^4 - I_0^2)}{I_1 A_1 - I_4 A_2} \right) n_0 \delta T \quad (\text{I.109})$$

A titre d'exemple, nous donnons leurs expressions pour $z \ll 1$ et $z \gg 1$ correspondant respectivement à la limite ultra-relativiste et non relativiste et en utilisant le développement limité de la fonction de Bessel, il en résulte :

i) Cas ultra-relativiste ($z \ll 1$)

$$\delta q_x = -\frac{6}{\pi} \frac{n_0 c}{|k|} ik \delta T - n_0 T_0 \delta V \quad (\text{I.110})$$

$$\delta \Pi_{xx} = -\frac{\pi}{2z} \frac{m n_0 c}{|k|} ik \delta V - n_0 \delta T \quad (\text{I.111})$$

ii) Cas non relativiste ($z \gg 1$)

$$\delta q_x = -\frac{9}{5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_0 v_t}{|k|} ik \delta T - \frac{2}{5} n_0 T_0 \delta V \quad (\text{I.112})$$

$$\delta \Pi_{xx} = -\frac{2\sqrt{2}\pi}{5} \frac{m n_0 v_t}{|k|} ik \delta V - \frac{2}{5} n_0 \delta T \quad (\text{I.113})$$

$$\text{où } v_t = \sqrt{\frac{T_0}{m}}$$

Les résultats rapportés dans cette référence [13], constituent à notre connaissance la première contribution au transport dans les plasmas relativistes non collisionnels. Toutefois les résultats sont établis dans l'approximation stationnaire. Ceci limite de façon considérable les applications physiques dans ce type de plasma. A titre d'exemple, il n'est pas possible d'étudier les propriétés des ondes qui se propagent dans des plasmas relativistes, car elles nécessitent un traitement spatio-temporel.

Le travail rapporté dans cette thèse est précisément l'étude des effets non stationnaires sur le transport dans des plasmas relativistes. La prise en compte de ces effets

non stationnaires va rendre la résolution mathématique de l'équation de Vlasov nettement plus complexe. En particulier, il n'est pas possible d'établir des solutions explicites de la fonction de distribution comme dans le cas stationnaire.

VII. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les éléments de base de la théorie relativiste, car il est impossible de développer des notions avancées de la théorie cinétique relativiste sans faire le lien avec la relativité restreinte. Un paragraphe a été consacré à la présentation des équations hydrodynamiques, ce qui nous a permis d'introduire les relations de fermeture qui constituent l'objectif de cette thèse.

Une étude bibliographique consacrée à deux résultats de la littérature établis pour un plasma collisionnel et non collisionnel a aussi été présentée. Cette étude nous a permis de mettre en évidence les techniques mathématiques de résolution des équations cinétiques. Parmi ces techniques nous pouvons citer

- ❖ Les développements sur les polynômes orthogonaux (polynômes de Laguerre et de Legendre...).

- ❖ Les développements limités (Chapman-Enskog) par rapport à un paramètre d'échelle pertinent, $\varepsilon \ll 1$ dans les plasmas collisionnels.

Notons que dans les plasmas non collisionnels, les techniques de troncature de Chapman-Enskog tombent en défaut et dans ces conditions il faut prendre en considération tous les ordres du développement de la fonction de distribution.

★ CHAPITRE II ★

RESOLUTION DE L'EQUATION DE

VALSOV RELATIVISTE

ET

CALCUL DES COEFFICIENTS DE

TRANSPORT NON COLLISIONNELS

CHAPITRE II

RESOLUTION DE L'EQUATION DE VALSOV RELATIVISTE ET CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT NON COLLISIONNELS

I Introduction

Ce chapitre a pour but de calculer des relations de fermeture des équations fluides relativistes en température [22-24] qui décrivent les plasmas non magnétisés et non collisionnels perturbés par rapport à l'équilibre de Maxwell-Boltzmann-Jüttner.

Dans une première partie, nous présentons le modèle cinétique que nous utilisons qui prend en compte de façon exacte les interactions résonnantes entre les modes du plasma et les particules.

Nous résolvons dans une deuxième partie l'équation de Vlasov en prenant soin de considérer les propriétés d'invariance collisionnelle dans la limite d'une fréquence de collision nulle.

Nous déduisons ensuite, les coefficients de transport relativistes et proposons des interprétations sur leur dépendance par rapport aux paramètres pertinents du problème.

Enfin, nous résumons nos résultats dans une brève conclusion.

II Modèle cinétique

Dans l'étude des phénomènes de transport dans les gaz et les plasmas, il est pratique d'exprimer les équations cinétiques en fonction de l'impulsion aléatoire, \vec{p}' au lieu de l'impulsion liée au laboratoire, \vec{p} . En effet, ce changement de variable est particulièrement adapté pour calculer les coefficients de transport qui sont définis en fonction de l'impulsion aléatoire des particules. De plus, cette transformation permet de mettre en évidence les effets liés au mouvement du fluide. Nous allons, par conséquent

appliquer ce changement de variable à l'équation de Vlasov présentée dans le chapitre I [Eq. (I.68)]. Cette équation prend dans ce cas la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c^2 \frac{\vec{p}}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}'}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}'} = 0 \quad (\text{II.1})$$

En relativité, le changement de référentiel s'effectue à l'aide de la transformation de Lorentz. Pour l'énergie ε et la quantité de mouvement \vec{p} des particules, ces transformations s'écrivent

$$\varepsilon = \gamma_V (\varepsilon' + V_i p_i') \quad (\text{II.2})$$

$$p_i = S_{ik} p_k' + c^{-2} V_i \varepsilon' \quad (\text{II.3})$$

où $S_{ik} = \delta_{ik} + (\gamma_V - 1) \frac{V_i V_k}{V^2}$, $\gamma_V = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz relatif à la vitesse

fluide \vec{V} , δ_{ik} est le symbole de Kronecker et la notation «prime» désigne les variables liées au référentiel de vitesse \vec{V} . Dans l'approximation $\frac{V}{c} \ll 1$, considérée dans ce travail, les équations (II.2) et (II.3) deviennent

$$\varepsilon = \varepsilon' \quad (\text{II.4})$$

$$p_i = p_i' + c^{-2} V_i \varepsilon' \quad (\text{II.5})$$

Par ailleurs, les particules du plasma sous l'effet du champ électrique \vec{E} sont soumises à la force électrique :

$$\frac{dp_i}{dt} = qE_i \quad (\text{II.6})$$

qui s'écrit à l'aide de l'équation (II.5), dans le référentiel de vitesse \vec{V} , sous la forme :

$$\frac{dp_i'}{dt} = \frac{dp_i}{dt} - \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{dV_i}{dt} \quad (\text{II.7})$$

A partir des équations (II.4)-(II.7), après quelques manipulations mathématiques, nous déduisons dans l'approximation $\left(\frac{V}{c} \ll 1\right)$, l'équation de Vlasov exprimée en fonction de l'impulsion aléatoire \vec{p}'

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c^2 p_i'}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + q E_i' \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\varepsilon'}{c^2} \frac{dV_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} - p_k' \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Par rapport à l'équation (II.1), il apparaît de nouveaux termes qui dépendent de la vitesse moyenne \vec{V} du fluide. Ces termes liés au mouvement du fluide vont nous permettre de décrire les effets de convection et de viscosité dans les coefficients de transport. Nous pouvons aussi remarquer que l'équation (II.8) décrit l'évolution de la fonction de distribution d'une seule espèce de particule du plasma si le champ électrique est considéré comme une donnée du problème. En l'absence de collisions, l'interaction avec les autres espèces de particules se fait par le biais du champ électrique \vec{E}' créé par les charges d'espace du plasma. Rigoureusement, ce champ va coupler les différentes espèces chargées du plasma via l'équation de Poisson et il résulte alors que l'équation (II.8) est non linéaire. Enfin, mentionnons également que dans l'équation (II.8), le champ magnétique a été négligé, étant donné que dans ce travail, nous étudions des plasmas non magnétisés.

Dans ce travail, nous nous intéressons à des champs et des grandeurs hydrodynamiques de faibles amplitudes. Cette approximation va nous permettre de linéariser les équations du problème. La principale conséquence de cette linéarisation est la simplification mathématique des équations du modèle, ce qui va donc faciliter leur résolution analytique. Les coefficients de transport vont par conséquent, s'écrire de façon linéairement indépendante par rapport aux grandeurs hydrodynamiques du plasma. D'un point de vue mathématique, l'approximation linéaire consiste à perturber le milieu à partir d'un état d'équilibre. On utilise alors pour toute grandeur physique X , le développement $X = X_0 + \delta X$ où X_0 est la grandeur à l'équilibre et δX la perturbation avec la condition $\delta X \ll X_0$. Cette procédure permet de séparer le plasma en deux états distincts : un plasma non perturbé et un plasma perturbé.

i) Plasma non perturbé

Cet état est défini par une densité de particules n_0 , une température T_0 et un plasma au repos, soit une vitesse moyenne $\vec{V}_0 = 0$. Le plasma est supposé à l'équilibre thermodynamique global décrit par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner [19-20] :

$$f_{MBJ}(p') = \mu_0 \exp(-z\gamma') \quad (\text{II.9})$$

où $\gamma' = \left(1 + \frac{p'^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}$, $\mu_0 = \frac{n_0 z}{4\pi m^3 c^3 K_2(z)}$, $z = \frac{mc^2}{T_0}$ et $K_2(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et d'ordre 2. Cet état d'équilibre global signifie qu'à l'ordre zéro, les champs électrique et magnétique sont nuls ($\vec{E}_0 = 0$ et $\vec{B}_0 = 0$).

ii) Plasma perturbé

Nous supposons que le plasma perturbé est inhomogène suivant la direction Ox , et il est décrit par la fonction de distribution δf , la densité δn , la température δT , la vitesse moyenne $\delta \vec{V} = \delta V \vec{e}_x$ et le champ électrique $\delta \vec{E} = \delta E \vec{e}_x$. De plus, nous supposons que toutes les grandeurs perturbées varient comme, $\exp(-i\omega t + ikx)$, où ω est la pulsation et k est le nombre d'onde caractérisant l'inhomogénéité du plasma. Dans notre travail, on s'intéresse aux perturbations de nombre d'onde $k \gg \lambda_{lpm}^{-1}$, où λ_{lpm} est le libre parcours moyen des particules. Cela revient à négliger les effets collisionnels devant les effets dus aux variations spatio-temporelles de la fonction de distribution. Cette approximation justifie par conséquent l'utilisation de l'équation de Vlasov.

En linéarisant, l'équation (II.8) par rapport à l'équilibre thermodynamique global, celle-ci s'écrit comme

$$-i\omega \delta f + ikc^2 \frac{p_x}{\varepsilon} \delta f - q \frac{p_x}{\gamma m^2 c^2} \mathcal{F}_{MBJ} \delta E - \frac{i\omega \varepsilon}{c^2} \frac{p_x}{\gamma m^2 c^2} \mathcal{F}_{MBJ} \delta V + \frac{p_x^2}{\gamma m^2 c^2} \mathcal{F}_{MBJ} ik \delta V = 0 \quad (\text{II.10})$$

où l'indice «prime» a été omis pour des raisons de clarté de l'écriture des équations. Dans l'équation (II.10), en couplant le premier terme avec le deuxième terme, on obtient le propagateur non collisionnel P_{nc} défini par :

$$\delta f = P_{nc} S \quad (\text{II.11})$$

où $P_{nc} = \left(\omega - k \frac{c^2 p_x}{\varepsilon} \right)^{-1}$ et S représente les termes de source dans l'équation (II.10) qui ne

dépendent pas de δf . Ce propagateur fait apparaître un pôle qui rigoureusement ne permet pas d'avoir des solutions en modes normaux. Pour lever cette divergence, on utilise la prescription de Landau [17] qui consiste à faire un prolongement analytique de la fonction de distribution dans l'espace complexe et à remplacer la fréquence réelle ω par une fréquence complexe $\omega + i0$. Comme nous l'avons mentionné au chapitre I, ce pôle va décrire les interactions résonnantes onde-particule. Cette interaction concerne les particules qui ont des vitesses $v_x = \frac{c^2 p_x}{\varepsilon}$ proches de la vitesse de phase de l'onde, *i.e* ; $v_x \approx \frac{\omega}{k}$.

Notre approche dans ce travail consiste à tenir compte dans l'équation de Vlasov d'un terme collisionnel, modélisé par un opérateur de collision de type Krook dans la limite d'une fréquence de collision ν nulle, soit :

$$C(\delta f) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu (\delta f_{MBJ} - \delta f) \quad (\text{II.12})$$

$$\text{où } \delta f_{MBJ} = \left(\frac{\delta n}{n_0} + (1 - zG(z)) \frac{\delta T}{T_0} \right) \mu_0 \exp(-z\gamma) + \frac{\delta T}{T_0} z\gamma \mu_0 \exp(-z\gamma)$$

est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner perturbée, $G(z) = \frac{K_2(z)}{K_3(z)}$ et

$K_3(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et d'ordre 3. Le choix de cet opérateur est motivé par sa forme relativement simple. Il décrit de façon simple la relaxation de la fonction de distribution δf vers l'équilibre représenté par δf_{MBJ} . L'utilisation d'autres opérateurs de collision donnerait les mêmes résultats dans la limite non collisionnelle. En substituant, l'équation (II.12) dans l'équation (II.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & -i\omega\delta f + ikc^2 \frac{p_x}{\varepsilon} \delta f - q \frac{p_x}{\gamma m^2 c^2} \mathcal{F}_{MBJ} \delta E - \frac{i\omega\varepsilon}{c^2} \frac{p_x}{\gamma m^2 c^2} \mathcal{F}_{MBJ} \delta V + \frac{p_x^2}{\gamma m^2 c^2} \mathcal{F}_{MBJ} ik\delta V = \\
 & \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu (\delta f_{MBJ} - \delta f)
 \end{aligned}
 \tag{II.13}$$

Dans l'équation (II.13), il apparaît clairement que la prise en compte de l'opérateur $C(\delta f)$ dans l'équation de Vlasov a pour conséquence de remplacer la fréquence réelle ω par la fréquence complexe $\Omega = \omega + i\nu$. Dans la limite non collisionnelle, ($\nu \rightarrow 0$), celle-ci devient $\Omega = \omega + i0$. Par conséquent, la prise en compte des effets faiblement collisionnels dans l'équation de Vlasov équivaut à la prescription de Landau [17].

L'équation (II.13) est l'équation de base de notre travail, nous allons à présent la résoudre en calculant la fonction de distribution δf en fonction des termes de source δE , δn , δT et δV .

III Résolution de l'équation de Vlasov

III. 1 Projection sur la base des polynômes de Legendre

Dans la théorie du transport, il est d'usage de développer la fonction de distribution δf sur la base de polynômes orthogonaux. Ces développements permettent de calculer δf en distinguant sa composante isotrope des composantes anisotropes dans l'espace des impulsions. Dans ce travail, le choix de la base des polynômes de Legendre est adapté compte tenu de la symétrie cylindrique autour de l'axe Ox de δf correspondant à la géométrie du problème que nous avons choisie. De plus, dans le cas unidimensionnel, les coefficients de transport s'expriment en fonction des polynômes de Legendre sous une forme relativement simple.

Les polynômes de Legendre $P_n(\mu)$ sont définis par la relation de récurrence suivante [25] :

$$P_n(\mu) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n n!} \left(\frac{d}{d\mu} \right)^n (\mu^2 - 1)^n
 \tag{II.14}$$

où $\mu = \frac{P_x}{P}$. Ils vérifient la relation d'orthonormalisation

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = 2\delta_{nm}$$

Nous donnons ici, à titre d'exemple, les trois premiers polynômes qui seront utilisés dans le calcul des coefficients de transport :

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \sqrt{3}\mu \quad \text{et} \quad P_2(\mu) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right)$$

Le développement de la fonction de distribution δf sur la base des polynômes de Legendre $P_n(\mu)$ s'écrit :

$$\delta f(t, \vec{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(t, p) \quad (\text{II.15})$$

où $\delta f_n(t, p)$ sont les composantes de δf sur cette base. Notons que puisque $P_0(\mu) = 1$, le premier terme du développement (II.15), $\delta f_0(t, p)$, est un terme isotrope. L'anisotropie du plasma dans l'espace des impulsions est décrite par les composantes $\delta f_n(t, p)$ avec $n \geq 1$.

En utilisant la relation de récurrence suivante [25] :

$$\mu P_n(\mu) = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \frac{P_{n+1}(\mu)}{\sqrt{2n+3}} + \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \frac{P_{n-1}(\mu)}{\sqrt{2n-1}} \quad (\text{II.16})$$

La projection de l'équation (II.13) sur la base des polynômes de Legendre donne :

$$-i\omega \delta f_0 + ikc \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{\delta f_1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) \frac{\mathcal{J}_{MBJ}}{3} ik \delta V = \lim_{v \rightarrow 0} v (\delta f_{MBJ} - \delta f_0) \quad (\text{II.17})$$

$$-i\Omega \delta f_1 + ikc \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \left(\frac{2}{\sqrt{15}} \delta f_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta f_0 \right) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{\mathcal{J}_{MBJ}}{\sqrt{3}mc} \delta E + i\omega \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\mathcal{J}_{MBJ}}{\sqrt{3}} \frac{\delta V}{c} \quad (\text{II.18})$$

$$-i\Omega \delta f_2 + ikc \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \left(\frac{3}{\sqrt{35}} \delta f_3 + \frac{2}{\sqrt{15}} \delta f_1 \right) = - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) \frac{2\mathcal{J}_{MBJ}}{3\sqrt{5}} ik \delta V \quad (\text{II.19})$$

$$-i\Omega\delta f_n + ikc\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\left(\frac{n+1}{\sqrt{2n+3}}\frac{\delta f_{n+1}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{n}{\sqrt{2n-1}}\frac{\delta f_{n-1}}{\sqrt{2n+1}}\right) = 0 \quad n \geq 3 \quad (\text{II.20})$$

où $\Omega = \omega + iv$ et la relation $p = mc(\gamma^2 - 1)^{1/2}$ a été utilisée. Les équations (II.17)-(II.20) constituent une hiérarchie infinie d'équations qui doit être résolue sans le recours aux méthodes de troncature [26] habituellement utilisées dans les plasmas collisionnels. Dans la limite non collisionnelle, toutes les composantes $\delta f_n(t, p)$ sont du même ordre de grandeur. En effet, les collisions ont pour rôle de réduire les anisotropies du plasma en faisant tendre ce dernier vers un état d'équilibre décrit par une fonction de distribution isotrope. Par conséquent, plus les collisions deviennent rares plus les anisotropies du plasma sont importantes.

Notons par ailleurs, que les équations (II.17)-(II.19) dépendent des termes de sources δE et δV tandis que l'équation (II.20) est une relation de récurrence entre les composantes δf_n avec $n \geq 3$. Enfin, notons aussi que l'équation (II.17) correspond à la partie isotrope, et les équations (II.18)-(II.20) correspondent à la partie anisotrope de l'équation de Vlasov (II.13).

III. 2 Calcul des opérateurs de projection associés à l'opérateur de Krook

L'équation isotrope (II.17) doit être complétée par les équations qui décrivent les propriétés conservatives de l'opérateur de collision $C(\delta f)$, qui s'écrivent

$$\int v(\delta f_{MBJ} - \delta f)d\vec{p} = 0 \quad (\text{II.21})$$

et

$$\int mc^2(\gamma - 1)v(\delta f_{MBJ} - \delta f)d\vec{p} = 0 \quad (\text{II.22})$$

La première propriété [Eq. (II.21)] traduit la conservation du nombre de particules alors que la deuxième propriété [Eq. (II.22)] traduit la conservation de l'énergie cinétique. Ces propriétés de conservation imposent à la fonction de distribution δf d'avoir la même densité et la même énergie que la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner perturbée δf_{MBJ} . Nous pouvons injecter ces deux conditions dans l'équation isotrope

(II.17) en introduisant les opérateurs de projection P et Q suivant la théorie développée dans la référence [27]. Ces opérateurs de projection sont définis par les relations suivantes :

$$P[C(\delta f)] = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$P + Q = 1 \quad (\text{II.24})$$

et

$$PQ = 0 \quad (\text{II.25})$$

On considère que les projecteurs P et Q annulent toute fonction anisotrope, *i.e* ;

$$P[P_n(\mu)] = 0 \quad (\text{II.26})$$

Par conséquent, appliqués à l'équation (II.13), ils n'agissent que sur sa partie isotrope. L'équation (II.23) s'écrit explicitement comme :

$$P[C(\delta f)] = P[v(\delta f_{MBJ} - \delta f_0)] = 0 \quad (\text{II.27})$$

Par ailleurs, la conservation du nombre de particules [Eq. (II.21)] et de l'énergie cinétique [Eq. (II.22)] s'expriment respectivement comme :

$$\delta M_0^{1,0,1/2} = \delta M_{MBJ}^{1,0,1/2} \quad (\text{II.28})$$

$$\delta M_0^{1,1,1/2} = \delta M_{MBJ}^{1,1,1/2} \quad (\text{II.29})$$

où les moments $\delta M_n^{i,j,k}$ sont définis par :

$$\delta M_n^{i,j,k} = \int_1^\infty \gamma^i (\gamma - 1)^j (\gamma^2 - 1)^k \delta f_n d\gamma \quad (\text{II.30})$$

et où les moments $\delta M_{MBJ}^{1,0,1/2}$ et $\delta M_{MBJ}^{1,1,1/2}$ sont définis par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner perturbée . Leur calcul explicite donne :

$$\delta M_{MBJ}^{1,0,1/2} = \mu_0 I_1 \frac{\delta n}{n_0} \quad (\text{II.31})$$

$$\delta M_{MBJ}^{1,1,1/2} = \mu_0 (I_2 - I_1) \frac{\delta n}{n_0} + \mu_0 \left[(1 - zG(z))(I_2 - I_1) + zI_3 \right] \frac{\delta T}{T_0} \quad (\text{II.32})$$

où nous avons employé les notations :

$$I_1 = \int_1^{\infty} \gamma (\gamma^2 - 1)^{1/2} \exp(-z\gamma) d\gamma = K_2(z)/z \quad (\text{II.33})$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{1/2} \exp(-z\gamma) d\gamma = K_2(z)(-1 + zG(z))/z^2 \quad (\text{II.34})$$

$$I_3 = \int_1^{\infty} (\gamma^3 - \gamma^2) (\gamma^2 - 1)^{1/2} \exp(-z\gamma) d\gamma = K_2(z)(1 + z + (3 - z)G(z))/z^2 \quad (\text{II.35})$$

Dans une première étape, on développe la fonction $P(\delta f_0)$ par rapport aux deux vecteurs propres sur lesquels est construite la (MBJ) perturbée, *i.e* ; $\exp(-z\gamma)$ et $z\gamma \exp(-z\gamma)$, soit :

$$P(\delta f_0) = A_1(\delta f_0) \exp(-z\gamma) + A_2(\delta f_0) z\gamma \exp(-z\gamma) \quad (\text{II.36})$$

Les fonctions A_1 et A_2 sont ensuite ,à leur tour, développées par rapport aux moments hydrodynamiques $\delta M_{MBJ}^{1,0,1/2}$ et $\delta M_{MBJ}^{1,1,1/2}$:

$$A_1(\delta f_0) = a_1 \delta M_0^{1,0,1/2} + a_2 \delta M_0^{1,1,1/2} \quad (\text{II.37})$$

$$A_2(\delta f_0) = a_3 \delta M_0^{1,0,1/2} + a_4 \delta M_0^{1,1,1/2} \quad (\text{II.38})$$

où les coefficients a_n sont des constantes qui restent à déterminer. Pour cela nous utilisons

$$\text{la propriété des projecteurs : } P^2(\delta f_0) = P(\delta f_0) \quad (\text{II.39})$$

qui résulte de façon évidente des équations (II.24) et (II.25). A partir des équations (II.36)-(II.38), il résulte:

$$\begin{aligned} & a_1 (A_1 I_1 + z A_2 I_2) \exp(-z\gamma) + a_2 (A_1 I_4 + z A_2 I_3) \exp(-z\gamma) \\ & + a_3 (A_1 I_1 + z A_2 I_2) z\gamma \exp(-z\gamma) + a_4 (A_1 I_3 + z A_2 I_3) z\gamma \exp(-z\gamma) = \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

$$A_1 \exp(-z\gamma) + A_2 z\gamma \exp(-z\gamma)$$

$$\text{où } I_4 = \int_1^{\infty} \gamma(\gamma-1)(\gamma^2-1)^{1/2} \exp(-z\gamma) d\gamma = K_2(z)(-1-z+zG(z))/z^2 \quad (\text{II.41})$$

Par identification terme à terme, nous obtenons aisément les équations suivantes:

$$a_1 I_1 + a_2 I_4 = 1 \quad (\text{II.42})$$

$$z a_1 I_2 + z a_2 I_3 = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$a_3 I_1 + a_4 I_4 = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$z a_3 I_2 + z a_4 I_3 = 1 \quad (\text{II.45})$$

dont la solution est:

$$a_1 = \frac{I_3}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \quad (\text{II.46})$$

$$a_2 = - \frac{I_2}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \quad (\text{II.47})$$

$$a_3 = - \frac{1}{z} \left(\frac{I_4}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) \quad (\text{II.48})$$

$$a_4 = \frac{1}{z} \left(\frac{I_1}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) \quad (\text{II.49})$$

Enfin, en définitive l'expression de l'opérateur de projection P est donnée par:

$$P(\delta f_0) = \left[I_3 \delta M_0^{1,0,1/2} - I_2 \delta M_0^{1,1,1/2} \right] \frac{\exp(-z\gamma)}{I_1 I_3 - I_2 I_4} + \left[-I_4 \delta M_0^{1,0,1/2} + I_1 \delta M_0^{1,1,1/2} \right] \frac{\gamma \exp(-z\gamma)}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \quad (\text{II.50})$$

Notons qu'à partir de l'équation (II.50), nous pouvons montrer aisément que la condition (II.23) est bien vérifiée, c'est à dire que $P(\delta f_0) = \delta f_{MB}$.

En multipliant l'équation (II.17) par l'opérateur $Q = 1 - P$, et en faisant tendre ($\nu \rightarrow 0$), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
-i\omega\delta f_0 + ikc \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{\delta f_1}{\sqrt{3}} &= -i\omega\delta f_{MBJ} - \frac{z}{3} \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) \mu_0 e^{-z\gamma} ik\delta V + \frac{ikc}{\sqrt{3}} \left(\frac{I_3 - \gamma I_4}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) \delta M_1^{0,0,1} \\
-\frac{ikc}{\sqrt{3}} \left(\frac{I_2 - \gamma I_1}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) \delta M_1^{0,1,1} &+ \left(\frac{K_2(z) I_3 - \gamma I_4 + (1 - G(z))(I_2 - \gamma I_1)}{z (I_1 I_3 - I_2 I_4)} \right) \mu_0 e^{-z\gamma} ik\delta V
\end{aligned} \tag{II.51}$$

Notons ici, l'intérêt d'utiliser les opérateurs de projection. En effet, en annulant leur contribution dans l'équation isotrope (II.17), il apparaît clairement, dans l'approximation stationnaire ($\omega \rightarrow 0$), que la première anisotropie δf_1 ne dépendra seulement que de δV , ce qui conduit à un résultat qui n'a pas de sens physique.

III. 3 Calcul de la fonction de distribution perturbée

Nous allons à présent résoudre le système infini d'équations (II.18)-(II.20) et (II.51). Pour cela, nous utilisons les techniques mathématiques basées sur les fractions continues pour inverser le propagateur non collisionnel $P_{nc} = -i\omega + ikc \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$.

La résolution des équations cinétiques à l'aide des fractions continues [25] a été utilisée pour la première fois dans la référence de A. Bendib, J.F. Luciani [28], où le propagateur collisionnel a été explicitement inversé sur la base des harmoniques sphériques. En appliquant ces résultats au système d'équations (II.18)-(II.20) et (II.51), après quelques manipulations mathématiques, nous obtenons dans la limite $\nu \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\delta f_0 &= -i\omega F_0 \delta f_{MBJ} - \frac{zq}{3m} \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} F_0 F_1 \mu_0 \exp(-z\gamma) ik\delta E - \frac{i\omega}{3} z (\gamma^2 - 1) F_0 F_1 \mu_0 \exp(-z\gamma) ik\delta V \\
-\frac{z}{3} \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma} F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma) ik\delta V &+ \frac{4}{45} z k^2 c^2 \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{\gamma^3} F_0 F_1 F_2 \mu_0 \exp(-z\gamma) ik\delta V \\
&+ \left(\frac{(I_3 - \gamma I_4) + (1 - G(z))(I_2 - \gamma I_1)}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma) ik\delta V - \frac{ikc}{\sqrt{3}} \left(\frac{I_2 - \gamma I_1}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) F_0 \exp(-z\gamma) \delta M_1^{0,1,1} \\
&+ \frac{ikc}{\sqrt{3}} \left(\frac{I_3 - \gamma I_4}{I_1 I_3 - I_2 I_4} \right) F_0 \exp(-z\gamma) \delta M_1^{0,0,1}
\end{aligned} \tag{II.52}$$

$$\delta f_1 = -\frac{ikc(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}\gamma} F_1 \delta f_0 + \frac{zq(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}mc\gamma} F_1 \mu_0 \exp(-\gamma z) \delta E - \frac{4}{15\sqrt{3}} z k^2 c^2 \frac{(\gamma^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\gamma^2} F_1 F_2 \mu_0 \exp(-\gamma z) \frac{\delta V}{c} + \frac{i\alpha z(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} F_1 \mu_0 \exp(-\gamma z) \frac{\delta V}{c} \quad (\text{II.53})$$

et

$$\delta f_2 = -\frac{2}{3\sqrt{5}} k^2 c^2 \frac{(\gamma^2-1)}{\gamma^2} F_1 F_2 \delta f_0 - \frac{2}{3\sqrt{5}} \frac{zq(\gamma^2-1)}{m\gamma^2} F_1 F_2 \mu_0 \exp(-\gamma z) ik \delta E \quad (\text{II.54})$$

Les fonctions F_0 , F_1 et F_2 sont des fractions continues, définies par la relation de récurrence suivante

$$F_n = \left(-i\omega + k^2 c^2 \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \frac{(n+1)^2}{4(n+1)^2-1} F_{n+1} \right)^{-1} \quad (\text{II.55})$$

Le système d'équations (II.52)-(II.54) constitue un système complet d'équations pour calculer les composantes δf_0 , δf_1 et δf_2 de la fonction distribution. En le couplant avec l'équation (II.20) et la fraction continue (II.55), nous pouvons calculer toutes les composantes δf_n de la fonction de distribution. Dans ce travail, nous limitons le calcul aux trois premières composantes, δf_0 , δf_1 et δf_2 , suffisantes pour déterminer les coefficients de transport.

Ce calcul passe d'abord par celui des moments $\delta M_1^{0,0,1}$ et $\delta M_1^{0,1,1}$ de l'équation (II.52) en fonction des grandeurs hydrodynamiques δE , δn , δT et δV .

En multipliant respectivement, l'équation (II.52) par $\gamma(\gamma^2-1)$ et $\gamma(\gamma-1)(\gamma^2-1)$ ensuite en intégrant par rapport à la variable γ , et en utilisant les relations d'invariance collisionnelles (II.28) et (II.29), après de longues manipulations mathématiques, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta M_1^{0,0,1} = & \frac{-3i}{\sqrt{3kcD}} \mu_0 \left\{ 2I_1 I_2 I^{2, \frac{1}{2}} - (I_1)^2 I^{3, \frac{1}{2}} - (I_2)^2 I^{1, \frac{1}{2}} + i\omega D \right\} \frac{\delta n}{n_0} \\
& - \frac{3i}{\sqrt{3kcD}} \mu_0 \left\{ \left((1-zG(z)) I_4 - zI_3 \right) \left(I_1 I^{2, \frac{1}{2}} - I_2 I^{1, \frac{1}{2}} \right) + i\omega \left((1-zG(z)) I_1 - zI_2 \right) D \right\} \frac{\delta T}{T_0} \\
& + \frac{zq}{\sqrt{3mD}} \mu_0 \left\{ I_1 \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) + I_2 \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right\} \frac{\delta E}{c} \\
& - \frac{iz}{\sqrt{3kcD}} \mu_0 \left\{ i\omega \left[I_1 \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) + I_2 \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} \right) \right] \right. \\
& \left. + I_1 \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) + I_2 \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{4}{15} k^2 c^2 \left[I_1 \left(I^{2, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) + I_2 \left(-I^{2, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} + I^{1, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} \right) \right] + I_1 D \right\} ik\delta V
\end{aligned} \tag{II.56}$$

et

$$\begin{aligned}
\delta M_1^{0,1,1} = & \frac{3i}{\sqrt{3kcD}} \mu_0 \left\{ I_3 \left(I_2 I^{1, \frac{1}{2}} - I_1 I^{2, \frac{1}{2}} \right) + I_4 \left(I_1 I^{3, \frac{1}{2}} - I_2 I^{2, \frac{1}{2}} \right) - i\omega I_4 D \right\} \frac{\delta n}{n_0} \\
& + \frac{3i}{\sqrt{3kcD}} \mu_0 \left\{ \left((1-zG(z)) I_4 + zI_3 \right) \left(I_3 I^{1, \frac{1}{2}} - I_4 I^{2, \frac{1}{2}} \right) - i\omega \left((1-zG(z)) I_4 + zI_3 \right) D \right\} \frac{\delta T}{T_0} \\
& - \frac{zq}{\sqrt{3D}} \mu_0 \left\{ I_3 \left(I^{1, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) + I_4 \left(I^{3, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right\} \frac{\delta E}{c} \\
& + \frac{3i}{\sqrt{3kcD}} \mu_0 \left\{ \frac{i\omega z}{3} \left[I_3 \left(I^{1, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) + I_4 \left(I^{3, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) \right] + \frac{z}{3} \left[I_3 \left(I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + I_4 \left(I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) \right] \right\} - \frac{4}{45} k^2 c^2 z \left\{ I_3 \left(I^{1, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) + I_4 \left(I^{3, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} \right) \right\} - I_1 (1-G(z)) D \right\} ik\delta V
\end{aligned} \tag{II.57}$$

$$\text{où } D = \left(\left(I^{2, \frac{1}{2}} \right)^2 - I^{3, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right)$$

Dans les équations (II.56) et (II.57), nous avons utilisé les intégrales suivantes

$$I^{i,j} = \int_1^\infty F_0 \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma \tag{II.58}$$

$$J^{i,j} = \int_1^\infty F_0 F_1 \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma \tag{II.59}$$

$$L^{i,j} = \int_1^{\infty} F_0 F_1 F_2 \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma \quad (\text{II.60})$$

En substituant, les équations (II.56) et (II.57), nous calculons l'expression explicite de δf_0 en fonction de δn , δT , δE et δV :

$$\delta f_0(\sim \delta n) = \frac{F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \left[\left(I_2 I^{2, \frac{1}{2}} - I_1 I^{3, \frac{1}{2}} \right) + \gamma \left(I_1 I^{2, \frac{1}{2}} - I_2 I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \frac{\delta n}{n_0} \quad (\text{II.61})$$

$$\delta f_0(\sim \delta T) = \frac{F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \left[\left((1 - zG(z)) I_4 + z I_3 \right) \left(I^{2, \frac{1}{2}} - \gamma I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \frac{\delta T}{T_0} \quad (\text{II.62})$$

$$\delta f_0(\sim \delta E) = \frac{zq F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{3m D} \left[- \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) F_1 D + \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right] ik \delta E \quad (\text{II.63})$$

$$\begin{aligned} \delta f_0(\sim \delta V) &= \frac{ia\alpha F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{3 D} \left[- \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) F_1 D + \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} \right) \right] ik \delta V \\ &+ \frac{z F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{3 D} \left[- \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) D + \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) \right] ik \delta V \\ &+ \frac{4k^2 c^2 z F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{45 D} \left[\left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \right) F_1 F_2 D - \left(I^{2, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) + \gamma \left(I^{1, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) \right] ik \delta V \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

Des équations (II.53) et (II.61)-(II.64), nous déduisons l'expression de la première anisotropie

$$\delta f_1(\sim \delta n) = - \frac{ikc F_0 F_1 \mu_0 \exp(-\gamma z)}{\sqrt{3} D} \frac{(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\gamma} \left[I_2 I^{2, \frac{1}{2}} - I_1 I^{3, \frac{1}{2}} + \gamma \left(I_1 I^{2, \frac{1}{2}} - I_2 I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \frac{\delta n}{n_0} \quad (\text{II.65})$$

$$\delta f_1(\sim \delta T) = \frac{F_0 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \left[\left((1 - zG(z)) I_4 + z I_3 \right) \left(I^{2, \frac{1}{2}} - \gamma I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \frac{\delta T}{T_0} \quad (\text{II.66})$$

$$\delta f_1(\sim \delta E) = \frac{zq}{\sqrt{3}m} \frac{\mu_0 \exp(-\gamma z)}{D} \left\{ -i\omega F_1 F_0 \frac{(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\gamma} D \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} (1 + i\omega F_0) \left[\left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right] \right\} \frac{\delta E}{c} \quad (\text{II.67})$$

$$\delta f_1(\sim \delta V) = \frac{k^2 c^2 z}{3\sqrt{3}} \frac{F_0 F_1 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \frac{(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\gamma} \left\{ i\omega \left[-F_1 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) D + \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) D \right] + \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{4k^2 c^2}{15} \left[F_1 F_2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \right) D - \left(I^{2, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) + \gamma \left(I^{1, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) \right] \right\} \frac{\delta V}{c} \\ - \frac{4k^2 c^2 z}{15\sqrt{3}} F_1 F_2 \frac{(\gamma^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\gamma^2} \mu_0 \exp(-\gamma z) \frac{\delta V}{c} + \frac{i\omega z}{\sqrt{3}} F_1 (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \mu_0 \exp(-\gamma z) \frac{\delta V}{c} \quad (\text{II.68})$$

et des équations (II.54), et (II.61)-(II.64), nous déduisons l'expression de la seconde anisotropie

$$\delta f_2(\sim \delta n) = -\frac{2k^2 c^2}{3\sqrt{5}} \frac{F_0 F_1 F_2 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) \left[I_2 I^{2, \frac{1}{2}} - I_1 I^{3, \frac{1}{2}} + \gamma \left(I_1 I^{2, \frac{1}{2}} - I_2 I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \frac{\delta n}{n_0} \quad (\text{II.69})$$

$$\delta f_2(\sim \delta T) = -\frac{2k^2 c^2}{3\sqrt{5}} \frac{F_0 F_1 F_2 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \left[\left((1 - zG(z)) I_4 + zI_3 \right) \left(I^{2, \frac{1}{2}} - \gamma I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \frac{\delta T}{T_0} \quad (\text{II.70})$$

$$\delta f_2(\sim \delta E) = -\frac{2zq}{3\sqrt{5}} \frac{F_0 F_1 F_2 \mu_0 \exp(-z\gamma)}{D} \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \left\{ -i\omega D + \right. \\ \left. \frac{k^2 c^2}{3} \left[\left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{-1, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right] \right\} ik \delta E \quad (\text{II.71})$$

$$\begin{aligned}
\delta f_2(\sim \delta V) = & -\frac{2k^2 c^2 z}{6\sqrt{5}} \frac{F_0 F_1 F_2 \mu_0 \exp(-z\gamma) (\gamma^2 - 1)}{D \gamma^2} \left\{ i\omega \left[-F_1 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) D + \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) \right. \right. \\
& + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} \right) \left. \right] - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) D + \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) + \gamma \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) \\
& + \frac{4k^2 c^2}{15} \left[F_1 F_2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \right) D - \left(I^{2, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) + \gamma \left(I^{1, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) \right] \left. \right\} ik \delta V \\
& - \frac{8k^2 c^2 z}{45\sqrt{5}} F_1 F_2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \right) \mu_0 \exp(-z\gamma) ik \delta V - \frac{2i\omega z}{3\sqrt{5}} F_1 F_2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) \mu_0 \exp(-z\gamma) ik \delta V
\end{aligned} \tag{II.72}$$

Nous venons de calculer explicitement les trois premières composantes, δf_0 , δf_1 et δf_2 de la fonction de distribution en résolvant analytiquement l'équation de Vlasov perturbée par rapport à un état d'équilibre thermodynamique global. A notre connaissance, ce résultat est original. Il va nous permettre de calculer tous les coefficients de transport d'un plasma non stationnaire, relativiste et non collisionnel.

IV Calcul des coefficients de transport non collisionnels

Dans ce paragraphe, nous allons calculer les coefficients de transport relativistes dans des plasmas non collisionnels en utilisant l'expression de la fonction de distribution établie au paragraphe précédent. Ces coefficients vont nous permettre d'établir un système complet d'équations hydrodynamiques. Dans les plasmas où les collisions sont complètement négligées, les coefficients de transport qui interviennent dans les trois premières équations hydrodynamiques (I.80)-(I.82) sont le flux de chaleur généralisé et le tenseur des contraintes généralisé. En particulier, les moments responsables du transfert d'impulsion et d'énergie entre particules d'espèces différentes sont rigoureusement nuls, étant donné que ces transferts s'effectuent seulement par le biais des mécanismes collisionnels.

Vu la géométrie du problème, les composantes non nulles du flux de chaleur et du tenseur des contraintes généralisé sont respectivement :

$$\delta q_x = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_x \delta f d\vec{p} \tag{II.73}$$

$$\delta \Pi_{xx} = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left(p_x^2 - \frac{p^2}{3} \right) \delta f d\vec{p} \tag{II.74}$$

En utilisant le développement de la fonction de distribution sur les polynômes de Legendre, ces équations se réécrivent sous la forme :

$$\delta q_x = 2\pi m^4 c^6 \int_{-1}^{+1} \mu d\mu \int_1^{+\infty} \gamma (\gamma^2 - 1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(\gamma) \right] d\gamma \quad (\text{II.75})$$

$$\delta \Pi_{xx} = 2\pi m^4 c^5 \int_{-1}^{+1} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) d\mu \int_1^{+\infty} (\gamma^2 - 1)^{3/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(\gamma) \right] d\gamma \quad (\text{II.76})$$

et de la propriété d'orthonormalisation des polynômes de Legendre, nous déduisons :

$$\delta q_x = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m^4 c^6 \int_1^{+\infty} \gamma (\gamma^2 - 1) \delta f_1 d\gamma = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} m^4 c^6 \delta M_1^{1,0,1} \quad (\text{II.77})$$

et

$$\delta \Pi_{xx} = \frac{8\pi}{3\sqrt{5}} m^4 c^5 \int_1^{+\infty} (\gamma^2 - 1)^{3/2} \delta f_2 d\gamma = \frac{8\pi}{3\sqrt{5}} m^4 c^5 \delta M_2^{0,0,3/2} \quad (\text{II.78})$$

où nous rappelons que les moments $\delta M_n^{i,j,k}$ sont définis par l'équation (II.30).

Nous constatons que ces grandeurs physiques s'expriment par rapport aux composantes δf_1 et δf_2 qui représentent la première et la seconde anisotropie du plasma.

Nous avons calculé les grandeurs de transport (II.77) et (II.78) en injectant les expressions analytiques de la première et la seconde anisotropie (II.64)-(II.71). Il en résulte six coefficients de transport définis par :

$$\delta q_x(\xi, z) = Q_E(\xi, z) n_0 c T_0 \left(\frac{ik}{|k|} \frac{\delta n}{n_0} + \frac{q}{|k|} \frac{\delta E}{T_0} \right) + Q_T(\xi, z) n_0 c T_0 \frac{ik}{|k|} \frac{\delta T}{T_0} + Q_V(\xi, z) n_0 c T_0 \frac{\delta V}{c} \quad (\text{II.79})$$

$$\delta \Pi_{xx}(\xi, z) = \Pi_E(\xi, z) n_0 T_0 \left(\frac{\delta n}{n_0} + q \frac{ik}{k^2} \frac{\delta E}{T_0} \right) + \Pi_T(\xi, z) n_0 T_0 \frac{\delta T}{T_0} + \Pi_V(\xi, z) n_0 T_0 \frac{ik}{|k|} \frac{\delta V}{c} \quad (\text{II.80})$$

où $\xi = \omega/kc$ représente la fréquence normalisée. Ces coefficients se présentent sous une forme relativement complexe. Par souci de clarté, nous les avons relégués en appendice (voir Appendice).

Une dernière étape pour calculer les relations de fermeture des équations fluides consiste à tenir compte du fait que la valeur moyenne de la vitesse aléatoire est nulle, *i.e* ;

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{c^2}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{p}}{\varepsilon} \delta f d\vec{p} = 0 \quad (\text{II.81})$$

Aussi, en utilisant le développement de la fonction de distribution sur la base des polynômes de Legendre, la condition (II.81) se réécrit :

$$\langle v_x \rangle = \frac{4\pi}{n_0\sqrt{3}} m^3 c^4 \int_1^{\infty} (\gamma^2 - 1) \delta f_1 d\gamma = \frac{4\pi}{n_0\sqrt{3}} m^3 c^4 \delta M_1^{0,0,1} = 0 \quad (\text{II.82})$$

qui à partir de l'expression de δf_1 [Eqs. (II.65)-(II.68)] s'exprime comme :

$$\langle v_x \rangle = \Gamma_E(\xi, z) c \left(\frac{ik}{|k|} \frac{\delta n}{n_0} + \frac{q\delta E}{|k|T_0} \right) + \Gamma_T(\xi, z) c \frac{ik}{|k|} \left(\frac{\delta T}{T_0} \right) + \Gamma_V(\xi, z) c \frac{\delta V}{c} = 0 \quad (\text{II.83})$$

où les coefficients Γ_E, Γ_T et Γ_V sont calculés dans l'appendice [Eqs. (A.13)-(A.16)]. En utilisant la condition (II.83) pour calculer le champ électrique δE , il en résulte dans ce cas que les grandeurs de transport [Eqs. (II.79) et (II.80)] ne dépendent que de la température et de la vitesse fluide, soit :

$$\delta q_x = -K_T(\xi, z) n_0 c \frac{ik}{|k|} \delta T + \alpha_V(\xi, z) n_0 T_0 \delta V \quad (\text{II.84})$$

$$\delta \Pi_{xx} = -\eta(\xi, z) n_0 m c \frac{ik}{|k|} \delta V + \alpha_T(\xi, z) n_0 \delta T \quad (\text{II.85})$$

où

$$K_T = Q_T - \frac{Q_E \Gamma_T}{\Gamma_E} \quad (\text{II.86})$$

$$\alpha_V = -\frac{\Gamma_V Q_E}{\Gamma_E} + Q_V \quad (\text{II.87})$$

$$\eta = \Pi_V - \Pi_E \frac{\Gamma_V}{\Gamma_E} \quad (\text{II.88})$$

$$\alpha_T = \Pi_T + \Pi_E \frac{\Gamma_T}{\Gamma_E} \quad (\text{II.89})$$

sont les coefficients de transport adimensionnels.

Dans les équations (II.84) et (II.85), les premiers termes correspondent respectivement au flux de chaleur thermique et à la viscosité. Ils décrivent le transport de l'énergie thermique et de l'impulsion dans des systèmes inhomogènes. Nous retrouvons comme dans le cas stationnaire [13], la dépendance en $|k|^{-1}$ de ces coefficients. Cette dépendance traduit donc un effet de délocalisation spatiale caractéristique des systèmes non collisionnels [13], [26,29].

Les seconds termes dans les équations (II.84) et (II.85) sont respectivement le flux de chaleur convectif et l'anisotropie de température. Ces grandeurs sont nulles dans les plasmas collisionnels [5,14]. Ils sont générés par les gradients des quantités fluides relativement raides qui existent dans les plasmas non collisionnels.

Nous pouvons noter, en examinant les expressions (II.86)-(II.89), qu'il est exclu d'envisager une solution analytique explicite, du moins dans le cas général. Par conséquent, seule l'approche numérique est possible. Nous avons calculé tous ces coefficients de transport numériquement en calculant les intégrales $I^{i,j}$, $J^{i,j}$ et $L^{i,j}$ qui contiennent les fractions continues. Ce calcul a été effectué à l'aide d'un sous-programme (subroutine) développé dans notre laboratoire d'Electronique Quantique qui calcule numériquement les fractions continues dans le plan complexe avec une très grande précision sans rencontrer de problèmes d'overflow inhérents aux schémas habituels [25].

Nous donnons ci-dessus quelques résultats numériques dans les figures (3)-(10) où nous avons représenté les coefficients K_T , η , α_V et α_T en fonction de $\xi = \omega/kc$ et ceci pour différentes valeurs de $z = mc^2/T_0$.

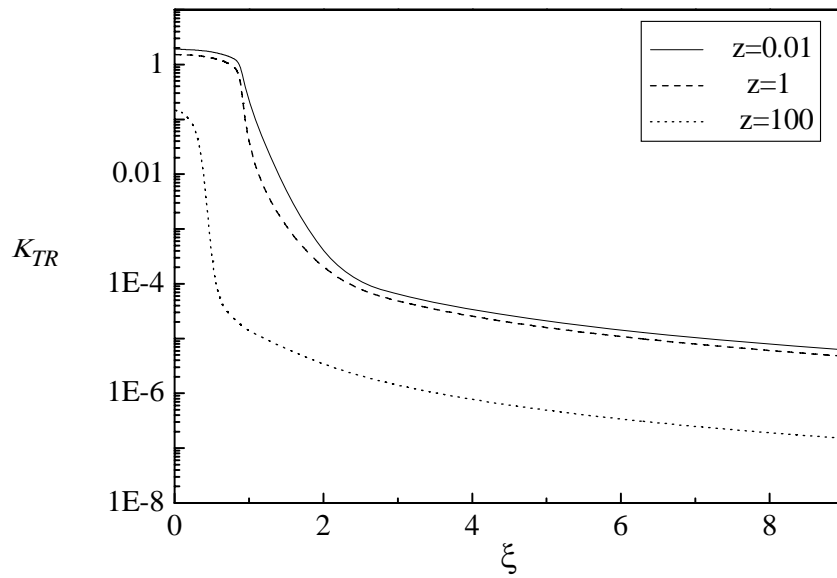


Figure 3 : Partie réelle de la conductivité thermique $K_T(\xi)$ en fonction de $(\xi = \omega/kc)$
pour $z = 0.01, z = 1$ et $z = 100$

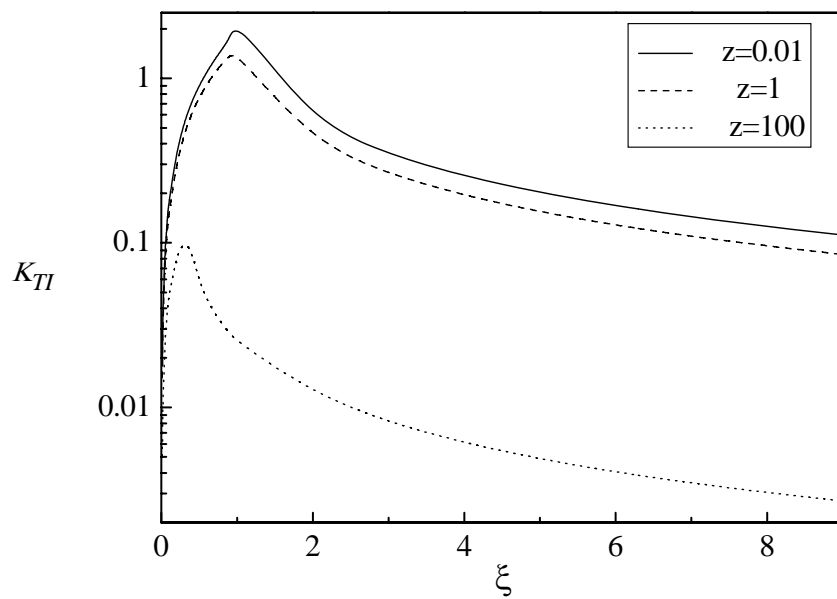


Figure 4 : Partie imaginaire de la conductivité thermique $K_T(\xi)$ en fonction de $(\xi = \omega/kc)$
pour $z = 0.01, z = 1$ et $z = 100$

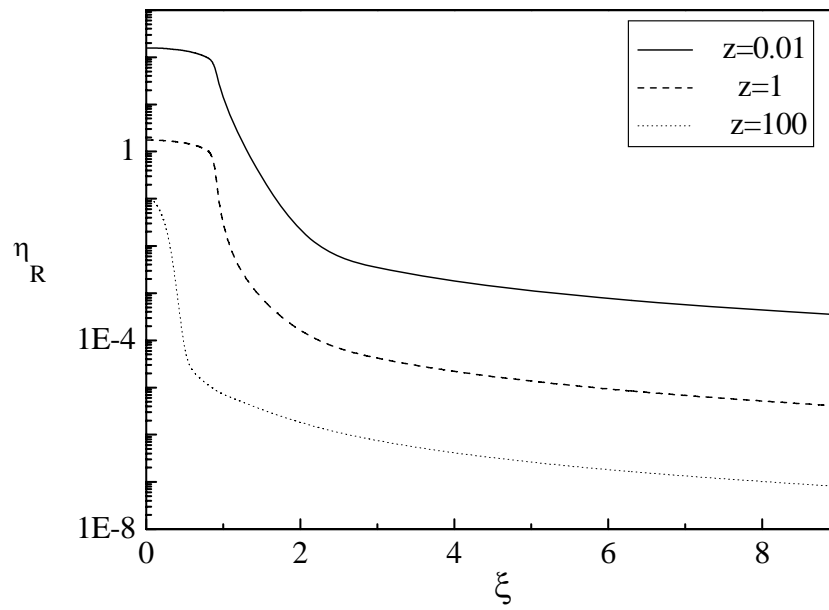


Figure 5: Partie réelle de la viscosité $\eta(\xi)$ en fonction de $(\xi = \omega/kc)$ pour $z = 0.01, z = 1$ et $z = 100$

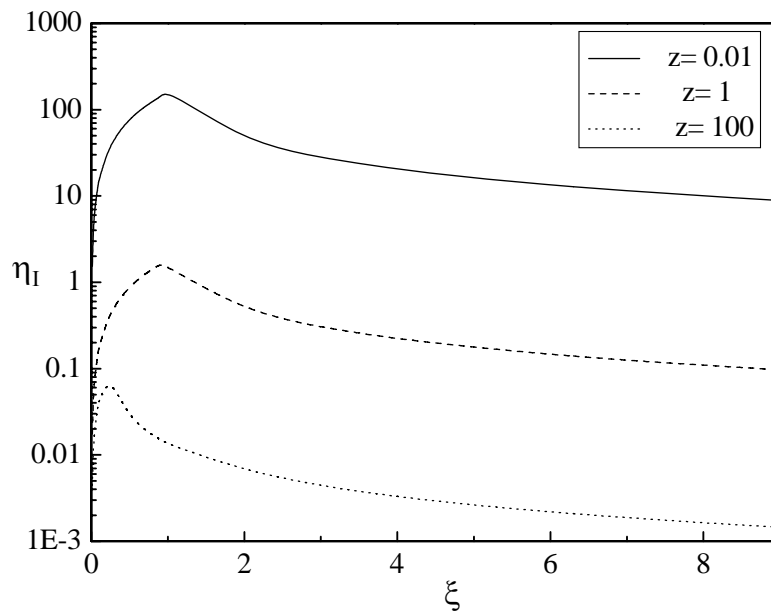


Figure 6: Partie imaginaire de la viscosité $\eta(\xi)$ en fonction de $(\xi = \omega/kc)$ pour $z = 0.01, z = 1$ et $z = 100$

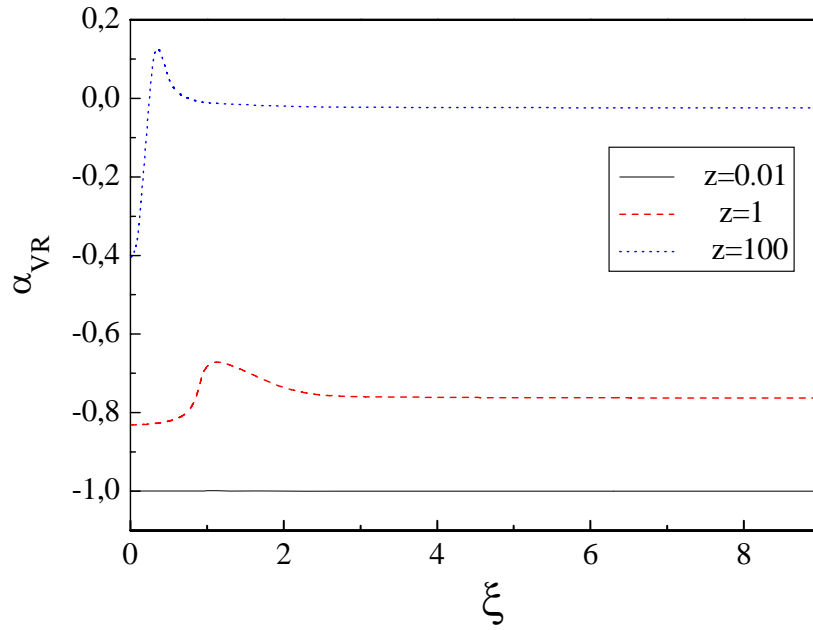


Figure 7 : Partie réelle du coefficient du flux de chaleur convectif $\alpha_V(\xi)$ en fonction de $(\xi = \omega/kc)$ pour $z = 0.01, z = 1$ et $z = 100$

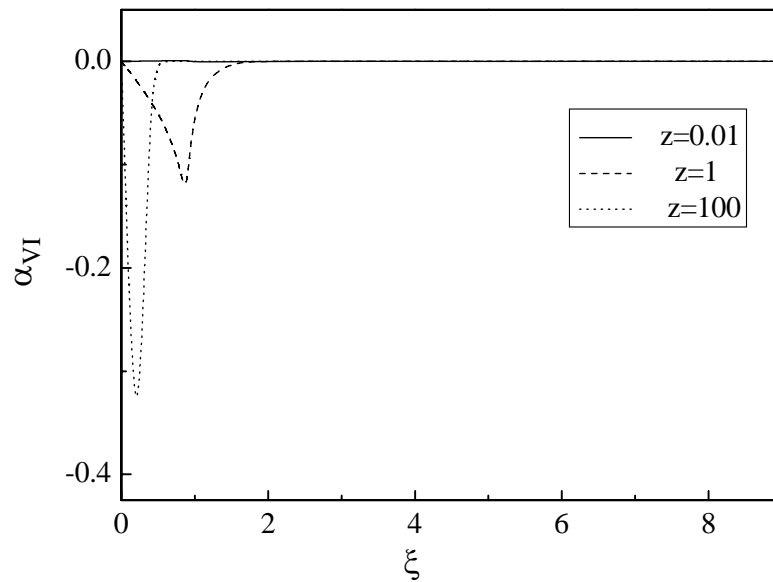


Figure 8 : Partie imaginaire du coefficient du flux de chaleur convectif $\alpha_V(\xi)$ en fonction de $(\xi = \omega/kc)$ pour $z = 0.01, z = 1$ et $z = 100$

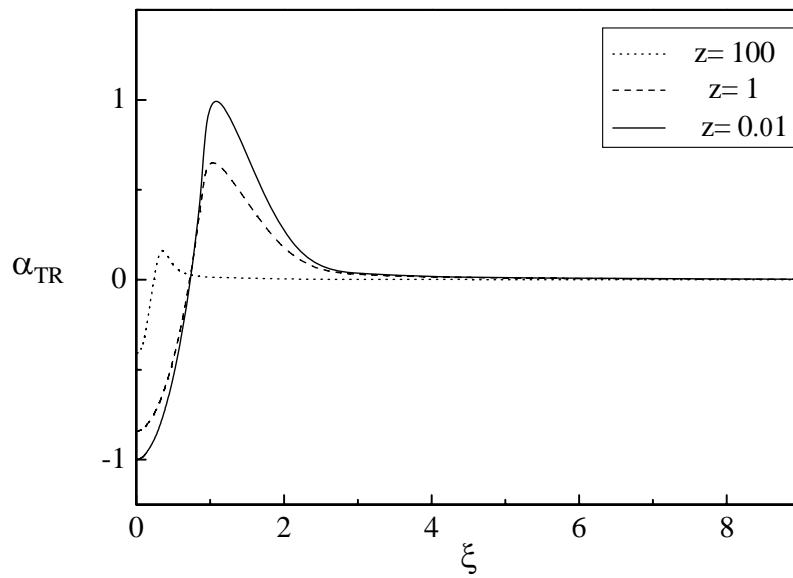


Figure 9: Partie réelle du coefficient d'anisotropie de température $\alpha_T(\xi)$
 en fonction de ($\xi = \omega/kc$) pour $z = 0.01$, $z = 1$ et $z = 100$

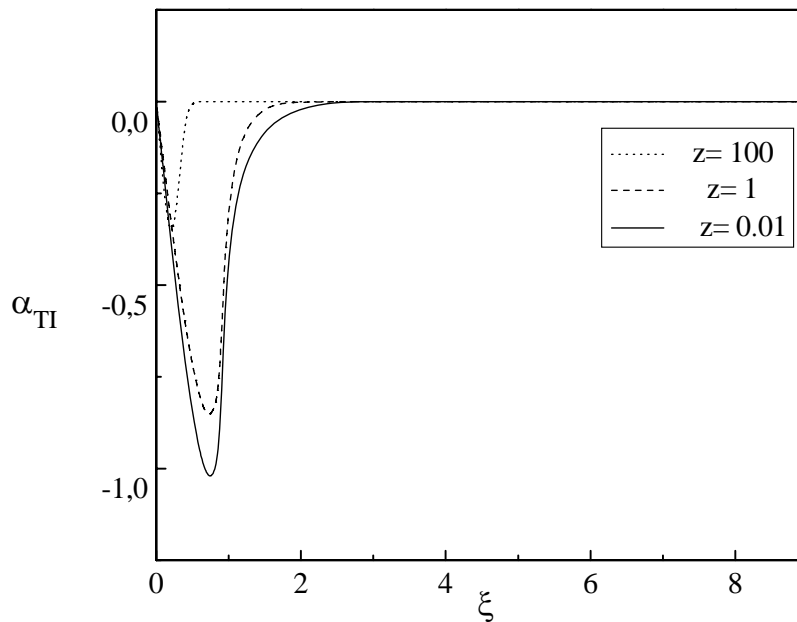


Figure 10: Partie imaginaire du coefficient d'anisotropie de température $\alpha_T(\xi)$
 en fonction de ($\xi = \omega/kc$) pour $z = 0.01$, $z = 1$ et $z = 100$

L'analyse de ces résultats montre que les coefficients de transport établis dans l'approximation stationnaire ($\xi = 0$) [13] et cela quelque soit la valeur du paramètre z sont bien retrouvés (voir chapitre I, §VII.2).

Par ailleurs, il apparaît que les coefficients de transport $K_T(\xi)$, $\eta(\xi)$, $\alpha_v(\xi)$ et $\alpha_T(\xi)$ sont des grandeurs complexes contrairement à ceux établis dans l'approximation stationnaire [13], où ils sont purement réels. Rappelons que ces coefficients ont été calculés dans l'espace de Fourier (ω, k) . Par conséquent, à l'opposé des coefficients stationnaires, ils n'admettent pas d'expressions explicites dans l'espace réel (x, t) . Leur domaine d'utilisation est donc limité à l'espace de Fourier.

La partie imaginaire, due aux effets temporels aura pour conséquence d'introduire un déphasage dans les termes de transport. Notons que sa principale contribution se situe pour des valeurs de la vitesse de phase modérées ; approximativement $1 < \xi < 4$ pour les coefficients K_{Ti} et η_i , et $1 < \xi < 2$ pour les coefficients $\alpha_{vi}(\xi)$ et $\alpha_{Ti}(\xi)$.

Quant à la partie réelle des coefficients de transport, on observe que sa valeur est importante pour des valeurs de ξ faibles, soit approximativement pour $\xi < 1$. Elle décroît de façon drastique pour des valeurs de $\xi > 2$.

En outre, notons qu'aussi bien la partie réelle que la partie imaginaire des coefficients de transport s'annulent pour des grandes valeurs de ξ .

Les effets dissipatifs dans le plasma sont décrits par les parties réelles de la conductivité thermique et du coefficient de viscosité données respectivement par les coefficients K_{TR} et η_R . Rappelons ici, que dans les plasmas non collisionnels, les mécanismes de dissipation sont dus aux interactions résonnantes ondes-particules. Des figures (3) et (5), il apparaît que ces coefficients décroissent lorsque la vitesse de phase ξ augmente. Ceci peut être expliqué par le nombre de particules résonnantes qui dépend de la fonction de distribution du plasma non perturbé. En effet, pour une valeur de z donnée, nous constatons à partir de la fonction *MBJ* (voir figure 2), que plus la vitesse de phase de l'onde est importante, plus le nombre de particules résonnantes est faible. Il s'en suit que le

transfert d'énergie des ondes aux particules est moins efficace et les effets dissipatifs sont par conséquent moins importants.

En revanche, ces coefficients dissipatifs augmentent de façon continue avec les effets relativistes en température. Cela peut s'expliquer par la modification de la fonction de distribution des particules en fonction de la température, *i.e* ; $z = \frac{mc^2}{T_0}$. En effet, lorsque z diminue, la fonction de distribution à l'équilibre évolue de la fonction de Maxwell [Eq. (I.74)] à la fonction *MBJ* [Eq. (I.77)], (voir figure 2). Par conséquent, le nombre de particules résonnantes est fortement affecté par le changement de la fonction de distribution en fonction du paramètre z . En particulier, dans la limite ultra-relativiste ($z \ll 1$), les particules du plasma ont des vitesses qui sont proches de la vitesse de la lumière ($v \rightarrow c$). Par conséquent, le nombre de particules résonnantes, responsables du transfert d'énergie entre les ondes et les particules, augmente avec les effets relativistes.

Par ailleurs, concernant les coefficients non diagonaux α_v et α_T , nous avons aussi noté que la symétrie d'Onsager vérifiée dans le cas stationnaire [13] ne l'est plus dans le cas non stationnaire. Ceci, s'explique par le fait que la vitesse fluide qui définit le coefficient de flux convectif n'est pas un potentiel thermodynamique.

Enfin, notons que dans la limite ultra-relativiste, la partie réelle du coefficient de flux de chaleur convectif, α_{vR} tend vers moins un tandis que sa partie imaginaire α_{vI} s'annule et ceci quelque que soit la valeur de la vitesse de phase.

V Conclusion

Dans ce chapitre dans une première étape, nous avons résolu analytiquement l'équation de Vlasov relativiste perturbée par rapport à l'équilibre thermodynamique global. Les propriétés d'invariance de l'équation de Vlasov ont été assurées à l'aide des opérateurs de projection. La méthode de résolution est basée sur le développement de la fonction de distribution sur les polynômes orthogonaux de Legendre et sur l'utilisation des fractions continues pour inverser le propagateur non collisionnel. La fonction de distribution non stationnaire a été calculée explicitement dans l'espace de Fourier en fonction d'intégrales qui dépendent des fractions continues. Les coefficients de transport

correspondant au flux de chaleur généralisé et au tenseur des contraintes généralisé ont été déduits en fonction des paramètres physique pertinents ξ et z . Ces coefficients constituent des relations des fermetures fiables pour les équations fluides relativistes et non collisionnelles.

★ *CONCLUSION*

GENERALE ★

CONCLUSION GENERALE

L'équation de Vlasov qui décrit les plasmas non collisionnels, relativistes et perturbés par rapport à un équilibre global a été résolue dans l'espace de Fourier ($x \leftrightarrow k, t \leftrightarrow \omega$) où k et ω sont les variables conjuguées de la variable espace x , et la variable temps t , respectivement. Les plasmas considérés sont supposés être relativistes seulement en température et par conséquent leur état d'équilibre est décrit par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner.

Le terme de transport représenté par le gradient spatial ainsi que le terme temporel, ont été pris en considération. Les propriétés d'invariance collisionnelle de cette équation cinétique, dans la limite d'une fréquence de collision nulle, sont assurées par l'utilisation des opérateurs de projection.

La méthode de résolution analytique est basée sur le développement de la fonction de distribution et de l'équation de Vlasov sur la base des polynômes de Legendre. La série infinie d'équations qui en résulte est calculée à l'aide des techniques mathématiques basées sur les fractions continues.

Les moments qui décrivent le transport non collisionnels, que sont le flux de chaleur et le tenseur des contraintes généralisés ont été déduits en fonction d'intégrales qui contiennent des fractions continues. Les coefficients de transport qui définissent ces grandeurs de transport, *i.e.*, la conductivité thermique, le coefficient du flux de chaleur convectif, le coefficient d'anisotropie de température et le coefficient de viscosité sont calculés numériquement en fonction du facteur relativiste $z = \frac{mc^2}{T_0}$ et la vitesse de phase

normalisée $\xi = \frac{\omega}{kc}$, où m est la masse des électrons, c est la vitesse de la lumière dans le vide et T_0 est la température exprimée en unité énergie.

L'analyse de ces résultats numériques a montré que les coefficients de transport dissipatifs (la conductivité thermique et le coefficient de viscosité) augmentent avec les effets relativistes. Ceci peut être expliqué par le couplage résonnant onde-particule. En

effet le nombre de particules résonantes, responsables du transfert d'énergie entre les ondes et les particules, augmente avec les effets relativistes en température.

En revanche ces coefficients dissipatifs décroissent lorsque la vitesse de phase ξ augmente. Ceci peut s'expliquer par le fait que plus la vitesse de phase est importante, plus le nombre de particules résonantes est faible. Il s'en suit que le transfert d'énergie des ondes aux particules est moins efficace et les effets dissipatifs sont par conséquent moins importants.

Dans la limite ultra-relativiste, le coefficient du flux de chaleur convectif tend vers moins un et ceci quelque que soit la valeur de la vitesse de phase.

Nous avons aussi noté que la symétrie d'Onsager vérifiée dans le cas stationnaire ne l'est plus dans le cas non stationnaire. Ceci, s'explique par le fait que la vitesse fluide qui définit le coefficient de flux convectif n'est pas un potentiel thermodynamique.

Par ailleurs dans l'espace de Fourier tous les coefficients de transport exhibent une partie imaginaire due aux effets temporels.

Comme perspectives de ce travail, l'instabilité de filamentation dans les plasmas créés par laser avec le schéma de l'allumeur rapide reste à étudier sur la base des équations fluides établies dans ce travail. L'effet d'un champ magnétique sur le transport relativiste en température, mérite également d'être étudié.

★ *APPENDICE* ★

APPENDICE

CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT GENERALISES

Nous allons dans cet appendice calculer tous les coefficients de transport généralisés qui définissent le flux de chaleur et le tenseur des contraintes présentés dans le chapitre II [Eqs. (II.77) et (II.78)].

Ces coefficients sont présentés sous formes adimensionnelles et ils sont définis comme suit

$$\delta q_x = Q_E n_0 c T_0 \left(\frac{ik}{|k|} \frac{\delta n}{n_0} + \frac{q}{|k|} \frac{\delta E}{T_0} \right) + Q_T n_0 c T_0 \frac{ik}{|k|} \frac{\delta T}{T_0} + Q_V n_0 c T_0 \frac{\delta V}{c} \quad (\text{A.1})$$

$$\delta \Pi_{xx} = \Pi_E n_0 T_0 \left(\frac{\delta n}{n_0} + q \frac{ik}{k^2} \frac{\delta E}{T_0} \right) + \Pi_T n_0 T_0 \frac{\delta T}{T_0} + \Pi_V n_0 T_0 \frac{ik}{|k|} \frac{\delta V}{c} \quad (\text{A.2})$$

où $Q_E, Q_T, Q_V, \Pi_E, \Pi_T, \Pi_V$, sont les coefficients de transport généralisés.

Ces coefficients se calculent aisément en injectant les expressions de δf_1 et δf_2 , [Eqs.(II.65)-(II.72)], dans les équations de transport (II.77) et (II.78). Après quelques manipulations mathématiques, il en résulte :

$$Q_E = -\frac{z^2}{3K_2(z)D} \left[I_1 \left(J^{1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + I_2 \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{1, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$Q_T = -\frac{z^2}{3K_2(z)D} \left[((1-zG(z))I_4 + zI_3) \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{1, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
 Q_V = & -\frac{z^3}{3K_2(z)D} \left\{ i\xi \left(i\xi J^{1, \frac{3}{2}} D \right) + \frac{i\xi}{3} \left[J^{0, \frac{3}{2}} \left(J^{1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + J^{1, \frac{3}{2}} \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{1, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \right. \\
 & + \frac{1}{3} \left[-J^{1, \frac{3}{2}} D + I^{0, \frac{3}{2}} \left(J^{1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + I^{1, \frac{3}{2}} \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{1, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \\
 & \left. + \frac{4}{15} \left(i\xi L^{-1, \frac{5}{2}} D + \frac{1}{3} \left[L^{-1, \frac{5}{2}} \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{1, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) + L^{-2, \frac{5}{2}} \left(J^{1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) \right] \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

et

$$\Pi_E = -\frac{4z^2}{45K_2(z)D} \left[I_1 \left(L^{-1, \frac{5}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - L^{-2, \frac{5}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + I_2 \left(L^{-2, \frac{5}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - L^{-1, \frac{5}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \tag{A.6}$$

$$\Pi_T = -\frac{4z^2}{45K_2(z)D} \left[\left((1-zG(z))I_4 + zI_3 \right) \left(L^{-2, \frac{5}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - L^{-1, \frac{5}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_V = & -\frac{4z^3}{135K_2(z)D} \left\{ i\xi \left[L^{-2, \frac{5}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} \right) + L^{-1, \frac{5}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} J^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} J^{1, \frac{3}{2}} \right) \right] + L^{-2, \frac{5}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) \right. \\
 & \left. + L^{-1, \frac{5}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) + \frac{4}{5} \left[-L^{-2, \frac{5}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) + L^{-1, \frac{5}{2}} \left(I^{1, \frac{1}{2}} L^{-1, \frac{5}{2}} - I^{2, \frac{1}{2}} L^{-2, \frac{5}{2}} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

où $D = \left(\left(I^{2, \frac{1}{2}} \right)^2 - I^{3, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right)$, $\xi = \frac{\omega}{kc}$ est la vitesse de phase normalisée et les expressions

$(I_1 - I_4)$ sont définies par les équations (II.33)-(II.35) et (II.41). Notons que les coefficients (A.3)-(A.8) sont définis en fonction des intégrales

$$I^{i,j} = \int_1^\infty F_0 \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma \tag{A.9}$$

$$J^{i,j} = \int_1^\infty F_0 F_1 \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma \tag{A.10}$$

$$L^{i,j} = \int_1^\infty F_0 F_1 F_2 \gamma^i (\gamma^2 - 1)^j \exp(-z\gamma) d\gamma \tag{A.11}$$

où F_0 , F_1 et F_2 sont les fractions continues définies par l'équation (II.55).

A présent, nous présentons le calcul des coefficients Γ_E , Γ_T et Γ_V qui apparaissent dans l'expression de la valeur moyenne de la vitesse aléatoire [Eq. (II.82)],

$$\langle v_x \rangle = \Gamma_E c \left(\frac{ik}{|k|} \frac{\delta n}{n_0} + \frac{q\delta E}{|k|T_0} \right) + \Gamma_T c \left(\frac{\delta T}{T_0} \right) + \Gamma_V c \frac{\delta V}{c} \quad (\text{A.12})$$

En utilisant l'expression de δf_1 [Eqs. (II.65)-(II.68)], nous obtenons

$$\Gamma_E = -\frac{z}{3K_2(z)D} \left[I_1 \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{-1, \frac{3}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + I_2 \left(J^{-1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma_T = -\frac{z}{3K_2(z)D} \left[\left((1-zG(z))I_4 + zI_3 \right) \left(J^{-1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_V = & -\frac{z^3}{3K_2(z)D} \left\{ i\xi \left(i\xi J^{0, \frac{3}{2}} D \right) + \frac{i\xi}{3} \left[J^{-1, \frac{3}{2}} \left(J^{1, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{0, \frac{3}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + J^{0, \frac{3}{2}} \left(J^{0, \frac{3}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - J^{1, \frac{3}{2}} I^{1, \frac{1}{2}} \right) \right] \right. \\ & + \frac{1}{3} \left[-J^{0, \frac{3}{2}} D + J^{-1, \frac{3}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} - I^{3, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} \right) + J^{0, \frac{3}{2}} \left(I^{2, \frac{1}{2}} I^{0, \frac{3}{2}} - I^{1, \frac{1}{2}} I^{1, \frac{3}{2}} \right) \right] \\ & \left. + \frac{4}{15} \left(i\xi L^{-2, \frac{5}{2}} D - \frac{1}{3} \left[J^{-1, \frac{3}{2}} \left(L^{-1, \frac{5}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - L^{-2, \frac{5}{2}} I^{3, \frac{1}{2}} \right) + J^{0, \frac{3}{2}} \left(L^{-2, \frac{5}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} - L^{-1, \frac{5}{2}} I^{2, \frac{1}{2}} \right) \right] \right) \right\} \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

★ *REFERENCES* ★

REFERENCES

- [1] D. Umstadter, J. Phys. D: Appl. Phys. **36** (2003).
- [2] Z.-M. Sheng, K. Mima, Y. Sentoku, and K. Nishihara, Phy. Rev.E **61**, 4 (2000).
- [3] S. Sieniutycz, Phys. Rev E. **58**, 6 (1998).
- [4] M. Gedalin, Phys. Fluides B **3**, 8 (1991).
- [5] S. I. Braginskii, "Transport processes in a plasma," in *Review of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. 1, p. 205.
- [6] M. A. Aloy, E. Müller, J. M. Ibanez, J. M. Marti, A. MacFayden, ApJ. **531**, L119 (2000); A. I. MacFayden, S. E. Woolsey, A. Hager, ApJ. **550**, 410 (2001).
- [7] R. Ciurcia-Borcia, G. Matthieussent, E. Le Bel, F. Simonet and J. Solomon, Phys. Plasmas, **7**, 359 (2000).
- [8] Summers and R.M. Thorne ,J.Plasma.Phys.**53**, 293(1995).
- [9] G A Mourou , Appl. Phys. B **65**,205 (1997).
- [10] S. V. Bulanov, F. Pegoraro and A. M. Pukhov, Phys. Rev. Lett. **74**, 710 (1995).
- [11] S. C. Wilks, J. M. Dawson, W. B. Mori, T. Katsouleas and E. Jones, Phys. Rev. Lett. **62**, 2600 (1989); E. Esarey, A. Ting and P. Sprangle, Phys. Rev. **A42**, 3526 (1990).
- [12] M. Tabak, J. Hmmer, M. E. Glinsky, W. L. Kruer, S. C. Wiks, J Woodworth, E. M. Cazmpell, M. D. Perry and R. J. Mason, Phys. Plasmas **1**, 1626 (1994).
- [13] K. Bendib, A. Bendib and G. Matthieussent, Phys. Plasmas **11**, 4254 (2004).
- [14] D. I. Dzhavakhishvili and N.L. Tsintsadze, Sov. Phys. JETP **37**, 666(1973).
V.S.tsy-pin et al, Phys.Rev.E. **60**,4754 (1999).
- [15] A. A. Vlasov, J. Phys. **9**, 25 (1945).
- [16] S. T. Balyaev and G. I. Budker, Sov. Doklady **1**, 218 (1957).
- [17] L.D. Landau, J. Phys. U. S. S. R **10**, 25 (1946).
- [18] H. Fichtner and R Schlickeiser, Phys. Plasmas **2**, 1063(1995).
- [19] F. Jüttner, Ann. Phys. **34**, 856 (1911).
- [20] R.L. Libboff, *Kinetic theory: Classical, Quantum and Relativistic Descriptions* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1990)).
- [21] L. Spitzer , Jr. and R. Härm,Phys.Rev.**89**,977 (1953).

- [22] N. Laidoune, K. Bendib, et A. Bendib., **7^{ième}** CNPA Congrès National de la Physique et ses Applications, Béchar, **18-20** Décembre 2006. Titre: Détermination des relations de fermeture des équations fluides relativistes .
- [23] K. Bendib, N. Laidoune and A. Bendib., **33rd** EPS European Physical Society Conference on Plasma Physics, Roma, Italy, **19-23** June 2006. Title: Time-dependent transport coefficients in relativistic collisionless plasma. Accepté pour une communication orale .
- [24] N. Laidoune, K. Bendib-Kalache et A. Bendib **10^{èmes}** Journées Scientifiques et Pédagogiques (JSP10), USTHB, Alger **16-18** Avril 2005. Titre : Calcul des coefficients de transport relativistes et non stationnaires dans un plasma non collisionnel .
- [25] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York 1970).
- [26] S. Chapman and T. G. Cowling, *Mathematical Theory of non-uniform Gases* Cambridge University Press, New York, (1960).
- [27] K. Bendib, A. Bendib, Phys. Plasmas **6**, 1500 (1999).
- [28] A. Bendib, J. F. Luciani, Phys. Fluides **30**, 1353 (1987).
- [29] G.W. Hammett and F. W. Perkins , Phys. Rev. Lett . **64**, 3019 (1996).