

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



Mémoire

présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle (Mathématiques de Gestion)

Par

AMROUCHE Salima

SUJET

OPTIMISATION LINEAIRE
STOCHASTIQUE MULTI-OBJECTIFS
EN NOMBRES ENTIERS

Soutenu publiquement le 20 /12/ 2005, devant le jury composé de :

Mr. H. AÏT-HADDADENE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Président.
Mr. M. MOULAÏ	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. A. BERRACHEDI	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. S. BOUROUBI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. D. CHAABANE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

- ★ Je remercie d'abord DIEU qui a permit la réalisation de ce travail.
- ★ Je tient à exprimer mes vifs remerciements à mon promoteur Monsieur MOULAÏ Mustapha qui a été pour moi un guide bien qualifié, ainsi que pour ses précieux conseils et ses orientations au long de ce travail de thèse.
- ★ Je remercie également mon enseignant Monsieur AÏT-HADDADENE Hasenne qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être président du jury de ma thèse..
- ★ C'est un grand honneur pour moi que d'avoir Monsieur le Professeur BERRACHEDI Abdelhafid, Messieurs CHAABANE Djamel, BOUROUBI Sadek comme membres de mon jury; Je les en remercie ici très vivement.
- ★ Enfin j'adresse une pensée toute particulière à ma famille – mes chers parents, mon frère Mustapha, mes seours Malika et Naima – pour leur présence et leurs encouragements. Merci à Nardjes, Souad et Saliha pour son aide toujours précieuse en anglais et aux amis pour tous les bons moments passés ensemble.

Table des matières

Introduction générale	4
1 Optimisation linéaire en nombres entiers	6
1.1 Introduction	6
1.2 Programmation linéaire mono-objectif en nombres entiers	7
1.2.1 Propriétés des points et des ensembles dans \mathbb{R}^n	7
1.2.2 Les Cônes	8
1.2.3 Les générateurs	8
1.2.4 Dimension d'un cône	9
1.2.5 Procédure par séparation et évaluation (<i>Branch and Bound</i>)	10
1.3 programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers	12
1.3.1 Problème de Programmation Mathématique Multi-objectif	12
1.3.2 Relation de dominance et solutions efficaces	14
1.3.3 Méthode de détermination d'une solution efficace d'un problème MOILP	15
1.3.4 Méthodes graphiques pour la résolution du problème MOILP	16
1.3.5 Méthode de coupes multiples pour l'élimination d'un ensemble dominé	19
1.3.6 Algorithme de coupes multiples en un point \hat{x}	20
1.3.7 Algorithme de résolution d'un problème (MOILP) [2]	21
2 Optimisation Linéaire Stochastique Mono-objectif	22
2.1 Introduction	22

2.2	Notions fondamentales	22
2.2.1	Scénario	23
2.2.2	Recours	23
2.2.3	Problème stochastique	23
2.2.4	La reformulation du problème stochastique	24
2.2.5	Les différentes solutions	26
2.3	Exemple illustratif (Kall et Wallace)	27
2.3.1	Le changement des valeurs RHS (right-hand sides)	30
2.3.2	Le changement des coefficients de la matrice	31
2.3.3	Le changement des valeurs de RHS et des coefficients de la matrice	32
2.3.4	Le problème recours par l'exemple illustratif	33
2.4	Types de problèmes traités dans la littérature d'optimisation stochastique	34
2.4.1	Optimisation stochastique en 2-étages avec recours	35
2.4.2	Formulation d'un programme linéaire stochastique en 2-étages avec recours	35
2.4.3	La structure du problème de recours	36
2.4.4	Types du recours	36
2.4.5	Le problème stochastique formulé par un PL à grande taille	37
2.4.6	Exemple général de la décomposition de Benders	38
2.5	La programmation stochastique mono-objectif en nombres entiers (SIP)	41
3	Optimisation linéaire stochastique multi-objectifs (MOSLP)	42
3.1	Introduction	42
3.2	Définitions et notations	43
3.3	Le problème déterministe équivalent	43
3.3.1	Réalisabilité	45
3.3.2	Efficacité	46
4	Optimisation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers	48
4.1	Introduction	48

4.2	Définitions et notations	48
4.2.1	Le problème déterministe associé	49
4.3	Méthode de résolution d'un problème de MOSILP	50
4.3.1	Organigramme de l'algorithme	50
4.3.2	Justification de l'algorithme	54
4.3.3	Expérimentation	56
4.3.4	Exemple Numérique	56
4.4	Conclusion générale	76

Introduction générale

Les différents travaux de recherche présentés dans cette thèse ont trait à l'optimisation linéaire stochastique en nombres entiers à objectifs multiples (MOSILP).

Les méthodes de résolution des programmes mathématiques déterministes mono-objectif ont été intensivement étudiées durant les 50 dernières années [9], [10], [20]. De nos jours, les méthodes de décision mono-objectif d'un problème bien déterminé reflètent une ère simpliste et révolue. Le monde est devenu plus complexe. Chaque problème important du monde réel, n'implique plus d'un objectif avec quelques données qui ne peuvent pas être connues exactement pour une variété de raisons. La première raison est due à l'erreur de mesure simple, la deuxième raison plus fondamentale est que quelques données représentent des informations sur le futur et simplement ne peuvent pas être connues avec certitude.

Cette thèse comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre porte sur les principaux résultats de programmation linéaire déterministe en nombres entiers, notamment les méthodes de résolution les plus souvent utilisées dans le domaine multi-objectif. Enfin, nous expliquons le principe de séparation et évaluation et nous présentons un algorithme de (MOILP ; Multiple Objective Integer Linear Programming) qui est décrit par Moumen et al [2].

Le deuxième chapitre est une introduction au problème de programmation linéaire mono-objectif dont les coefficients sont incertains. L'approche de la programmation linéaire stochastique (SP ; Stochastic Programming) est d'abord décrite, en se limitant à quelques notions et résultats de base; (voir [15], [14], [19], [24], [21]). Nous distinguons le cas où les variables sont continues et le cas où elles sont discrètes. Nous disons en

quoi consiste ce problème et nous décrivons de façon détaillée une méthode de résolution ancienne proposée par Dantzig et Beale en 1955, pour fournir les outils de base nécessaires à la compréhension de la résolution d'un problème de 2-étages avec recours.

Le troisième chapitre focalise sur le passage d'un problème linéaire stochastique à objectifs multiples (MOSLP ; Multiple Objective Stochastic Linear Programming) de l'état stochastique à l'état déterministe (le problème multi-objectifs de deux étages avec recours entier) ; les données aléatoires sont traitées par un recours entier approché pour obtenir un programme multi-objectifs équivalent bien déterminé à deux (étages/niveaux/étapes) avec recours entier.

Le quatrième chapitre finalise notre travail de thèse par l'élaboration d'une méthode exacte de détermination de toutes les solutions efficaces du problème de la programmation stochastique linéaire en nombres entiers à objectifs multiples (MOSILP ; Multiple Objective Stochastic Integer Linear Programming) vu le large champ d'application (Contrôle de production ; Etablissement du programme ; Télécommunications ; Transport ; Gestion de l'eau ; Gestion de pêche ; Planification de fabrication ; finances, etc...). On aurait pu espérer que la connaissance et l'utilisation simultanée d'une méthode de (LSP ; Linear Stochastic Programming) (méthode de 2- étages avec recours entier) [8], [14], [15] et une méthode de (MOILP) (méthode de séparation et évaluation) [2] fournissent automatiquement une nouvelle méthode de (MOSILP).

A la fin, nous terminons par un exemple numérique suivi d'une conclusion générale.

Chapitre 1

Optimisation linéaire en nombres entiers

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux résultats de la programmation linéaire mono-objectif en variables entières et de la programmation linéaire multi-objectifs en variables entières. Nous abordons uniquement les résultats nécessaires pour l'étude et la résolution du problème de la programmation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers (MOISLP) dans les prochains chapitres. Nous commençons par énoncer quelques propriétés sur les points et les ensembles dans \mathbb{R}^n . Nous formulons ensuite les problèmes (ILP) et (MOILP), et nous décrivons les méthodes les plus souvent utilisées pour les résoudre. Nous terminons par une description de la procédure par séparation et évaluation [3], [2].

1.2 Programmation linéaire mono-objectif en nombres entiers

1.2.1 Propriétés des points et des ensembles dans \mathbb{R}^n

Ensembles ouverts et fermés

Une n-dimension hypersphère ouverte centrée en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\delta > 0$ est l'ensemble

$$H_s = \{x \in \mathbb{R}^n / (x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2 < \delta^2\}$$

Dans \mathbb{R} une hypersphère est un intervalle ouvert. Dans \mathbb{R}^2 une hypersphère est un disque qui ne contient pas sa périphérie. Dans \mathbb{R}^3 une hypersphère est une boule qui ne contient pas sa surface, et ainsi de suite.

Un point $\bar{x} \in S \subset \mathbb{R}^n$ est un point *intérieur* de S si et seulement si \bar{x} appartient à une n-dimension hypersphère ouverte H_s centrée en \bar{x} telle que $H_s \subset S$. Un ensemble est ouvert si tous ses éléments sont des points intérieurs. Si S est un ensemble ouvert, alors son complément est un ensemble fermé, et vice versa. Un ensemble fermé contient tous ses points frontières. Un point frontière de $S \subset \mathbb{R}^n$ est un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que chaque n-dimension hypersphère centrée en \bar{x} contient des points de S et des points qui ne sont pas de S . L'adhérence de S est la réunion de S et son ensemble de points frontières.

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est borné si et seulement s'il existe une n-dimension hypersphère qui contient S .

Ensembles convexes et points extrêmes

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si et seulement si pour tous $x^1, x^2 \in S$ le point $(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \in S$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Ou encore, un ensemble est convexe lorsque tous les points appartenant au segment reliant deux points quelconques de l'ensemble sont aussi dans l'ensemble. L'ensemble vide est par convention convexe.

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, un point $\bar{x} \in S$ est un point extrême (parfois appelé sommet) de S si et seulement s'il n'existe pas deux points $x^1, x^2 \in S$, $x^1 \neq x^2$, tels que $\bar{x} = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ pour une valeur $\lambda \in]0, 1[$. Par sa définition, un point extrême ne peut pas être un point

intérieur; donc, tous les points extrêmes sont des points frontières.

Dimension et addition d'ensembles

- Un ensemble de vecteurs $\acute{V} = \{v^i/v^i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, k\}$ est libre si $\sum_{i=1}^k \alpha_i v^i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Sinon l'ensemble des vecteurs \acute{V} est lié.
- Le rang de l'ensemble \acute{V} est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans \acute{V} .
- Soient X et Y deux ensembles dans \mathbb{R}^n , alors l'ensemble *addition* de X et Y (noté $X \oplus Y$) est donné par : $X \oplus Y = \{z \in \mathbb{R}^n / z = x + y, x \in X, y \in Y\}$.

1.2.2 Les Cônes

Définition 1.2.1 Soit $v \in V \subset \mathbb{R}^n$, $V \neq \emptyset$, alors V est un cône si et seulement si $\alpha v \in V$ pour tout scalaire $\alpha \geq 0$.

L'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ est contenu dans chaque cône. Tous les cônes sont des ensembles connexes. A l'exception de l'ensemble singleton (contenant uniquement le point origine), tous les cônes sont non bornés.

1.2.3 Les générateurs

Considérer les vecteurs $v^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$:

$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^n / v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v^i, \alpha_i \geq 0 \right\}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des v^i , $i = 1, \dots, k$ et est le cône convexe généré par l'ensemble $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$. Les v^i , $i = 1, \dots, k$ sont dits les générateurs de V .

Soit $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ un ensemble de générateurs pour le cône convexe V et soit $v^r \in \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$; alors, v^r est un générateur non essentiel si et seulement si $\{v^1, v^2, \dots, v^k\} \setminus \{v^r\}$ peut générer V . Sinon v^r est essentiel.

Le plus petit nombre de vecteurs qui génèrent un cône V est appelé le nombre minimum de générateurs pour ce cône.

Exemple 1.2.1 Dans la fig a.1, v^2 est un générateur non essentiel de V , parce que V peut être généré par $\{v^1, v^3\}$ comme par $\{v^1, v^2, v^3\}$. Le nombre minimum de générateurs est deux. Dans la fig a.2, soit v^2 soit v^3 est non essentiel mais pas les deux en même temps. Pour ce cône, $\{v^1, v^2\}$ ou $\{v^1, v^3\}$ sont des ensembles minimaux de générateurs.

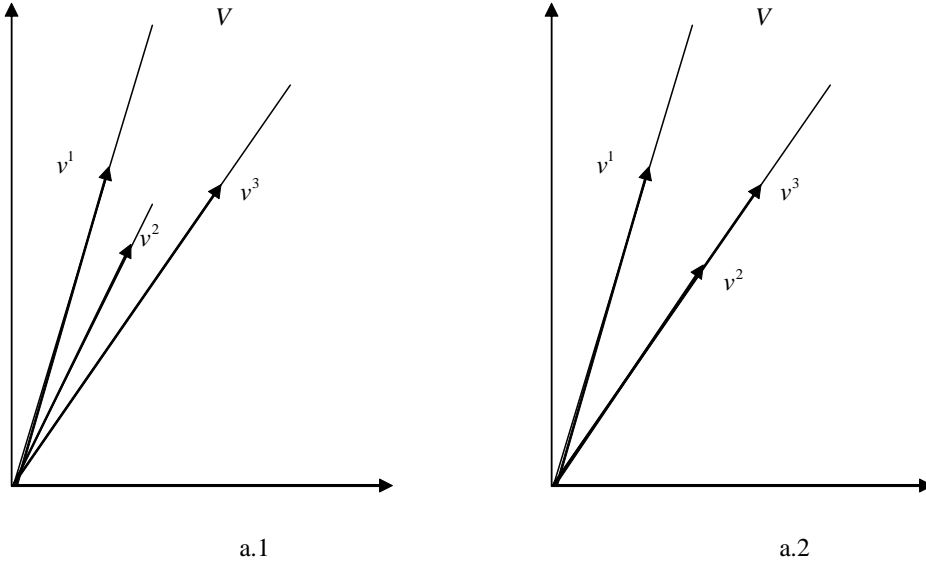


Figure a : Exemple de générateurs

1.2.4 Dimension d'un cône

La dimension d'un cône $V \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de V . Par exemple, la dimension du cône singleton $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$ est 0, et la dimension du cône convexe généré par un ensemble de l vecteurs linéairement indépendants est l . Une méthode pour déterminer la dimension d'un cône est de calculer le rang de la matrice dont les lignes (ou colonnes) sont les générateurs du cône.

Un cône qui possède un point extrême (sommets) est dit un cône pointu. Les cônes tels que le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n / c^T x \leq 0\}$, un hyperplan, ou \mathbb{R}^n sont des cônes non pointus parce qu'ils ne possèdent pas de sommets.

Exemple 1.2.2 Dans la fig b, nous voyons que même si chaque élément de l'ensemble des générateurs $\{w^1, w^2, w^3, w^4, w^5\}$ est essentiel, ceci ne signifie pas que l'ensemble des générateurs est linéairement indépendant. Le cône est de dimension 3, alors que le nombre

minimum de générateurs est 5.

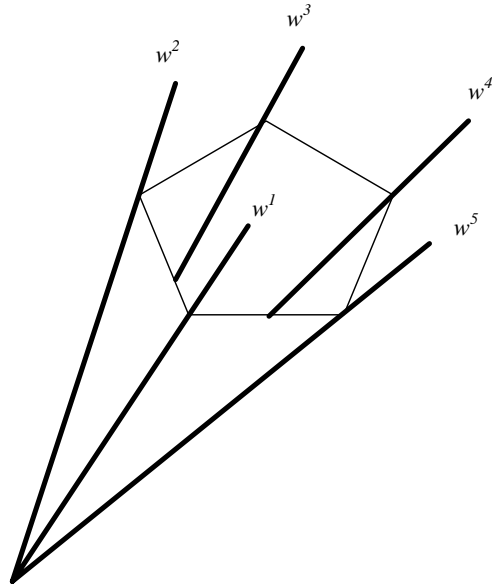


Figure b : Cône de dimension 3

1.2.5 Procédure par séparation et évaluation (*Branch and Bound*)

Les méthodes de « Branch and Bound » B&B ont été spécialement élaborées pour des problèmes en variables discrètes

$$(\bar{P}) \quad \begin{cases} \max Z(x) \\ s.c \\ x \in S \end{cases}$$

Z : représente la fonction objectif à optimiser,

x : désigne un vecteur solution à composantes réelles positives avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

L'ensemble d'actions S est un sous ensemble de \mathbb{R}^n décrit implicitement par des inéquations et/ou des équations, appelées *contraintes*.

La principale originalité des méthodes B&B consiste, à chaque étape, à subdiviser l'ensemble S en un nombre fini de sous ensembles S^i en veillant à ce que :

$$\bigcup_{i=1}^k S^i = S$$

De cette façon, le problème est réduit à l'étude des k problèmes (\bar{P}_i) plus restreints :

$$(\bar{P}_i) \quad \begin{cases} \max Z(x) \\ x \in S^i \end{cases}$$

Il sera généralement conseillé de choisir une subdivision de S qui vérifie également :

$$S^i \cap S^j = \emptyset, \quad \forall (i, j), \quad i \neq j.$$

Ces subdivisions successives sont représentées à l'aide d'une arborescence du type :

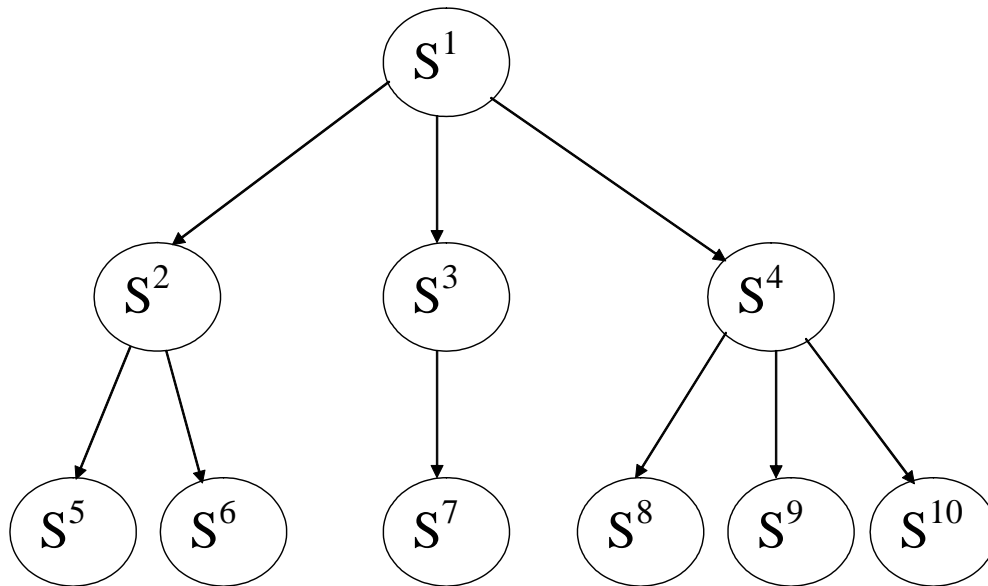


Figure c : Arborescence d'une méthode Branch and Bound

Une méthode de *Branch and Bound* sera essentiellement constituée de trois éléments principaux :

Procédure de séparation

Qui à chaque fois qu'il est nécessaire de séparer un ensemble de solutions, déterminera combien de sous-ensembles considérés et comment les constituer.

Procédure d'évaluation

Elle consiste à analyser un sous problème : pour l'essentiel, cette analyse vise à évaluer la valeur optimale de la fonction objectif du sous problème, plus précisément à déterminer une borne supérieure (inférieure pour un problème de minimisation) de cette valeur.

Procédure de cheminement

Elle indique quels sous-ensembles analysés et dans quel ordre. Bien évidemment, il est souhaitable d'examiner le moins de sous-ensembles possibles : certains d'entre eux pourront ne pas être séparés car, par exemple, leur analyse mettra en évidence qu'ils ne contiennent pas de solutions meilleures que celles déjà trouvées. Nous dirons qu'un tel sous-ensemble, ou le nœud correspondant de l'arborescence, est stérilisé. C'est parce que certains sous-ensembles ne devront pas être examinés explicitement que les méthodes B&B sont parfois appelées méthodes d'énumération implicite.

Lorsqu'un nœud de l'arborescence est stérilisé, il conviendra de remonter dans l'arborescence vers un autre nœud situé à un niveau inférieur ou égal dans l'arborescence et on s'arrête l'orsque tous les sous-ensembles sont stérilisés, cette partie de la procédure de cheminement est souvent appelée « *backtracking process* ».

1.3 programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers

Un programme linéaire multi-objectifs en nombres entiers est constitué d'un système de contraintes linéaires définissant un domaine discret de solutions réalisables, et d'un ensemble de fonctions linéaires à maximiser ou à minimiser définissant des objectifs conflictuels.

1.3.1 Problème de Programmation Mathématique Multi-objectif

Nous définissons un problème multi-objectifs comme un problème de décision qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) simultanément k fonctions objectifs notées f_i ,

$i = 1, \dots, k$, sur un ensemble d'actions S .

Ce problème peut être formulé mathématiquement comme suit :

$$(P_{1.1}) \quad \begin{cases} \text{“opt”} [f_1(x), \dots, f_k(x)] \\ x \in S \end{cases}$$

Le symbole “ ” signifie qu’il n’est généralement pas possible de trouver dans S une action qui optimise simultanément les k objectifs. L’ensemble d’actions S est un sous ensemble de \mathbb{R}^n décrit implicitement par des inéquations et/ou des équations, appelées *contraintes*.

Définition 1.3.1 *L’espace \mathbb{R}^n dans lequel se situe l’ensemble des actions S ($S \subset \mathbb{R}^n$) est appelé espace des décisions.*

- Si les k fonctions objectifs sont linéaires en x nous obtenons un problème de *programmation linéaire multi-objectifs*

$$(P_{1.2}) \quad \begin{cases} \text{“min”}_{x \in S} Z_i(x) = C_i x, & i = 1, \dots, k \end{cases}$$

avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$; A , C_i , x et b sont des matrices déterministes des dimensions respectives $(m \times n)$, $(1 \times n)$, $(n \times 1)$ et $(m \times 1)$, où n est le nombre de variables, m est le nombre de contraintes du système, et k est le nombre de fonctions objectifs.

Le programme linéaire multi-objectifs en nombres entiers peut être formulé de la façon suivante :

$$(P_{1.3}) \quad \begin{cases} \text{“min”}_{x \in S} Z_i(x) = C_i x, & i = 1, \dots, k \\ s.c \\ Ax = b \\ x \geq 0, x \text{ entier.} \end{cases}$$

Désignons par :

Z : Un vecteur objectif avec $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)^T$

Supposons que l’ensemble des solutions réalisables entières est fini.

1.3.2 Relation de dominance et solutions efficaces

Dominance

Définition 1.3.2 Soient deux vecteurs critères $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^k$. On dit que Z_1 domine Z_2 si et seulement si $(Z_1)_i \leq (Z_2)_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $(Z_1)_i < (Z_2)_i$ pour au moins un indice $i \in \{1, \dots, k\}$.

Autrement dit, Z_1 est au moins aussi bon que Z_2 sur tous les objectifs, et meilleur que lui sur au moins un objectif.

Dominance forte

Définition 1.3.3 Soient deux vecteurs critères $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^k$. On dit que Z_1 domine fortement Z_2 si et seulement si $(Z_1)_i < (Z_2)_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

Si Z_1 domine fortement Z_2 , alors Z_1 est meilleur que Z_2 sur tous les objectifs.

Efficacité

Définition 1.3.4 Une solution \hat{x} est une solution efficace - ou pareto optimale - pour $(P_{1,2})$ si $\hat{x} \in S$ et s'il n'existe pas de solution $x \in S$ telle que $Cx \leq C\hat{x}$ et $Cx \neq C\hat{x}$.

Une solution $\hat{x} \in S$ est efficace si son vecteur objectif n'est pas dominé par le vecteur objectif d'une autre solution de S . Le terme *efficacité* est aussi connu sous d'autres appellations comme : *optimum de Paréto* ou *admissibilité*.

Efficacité faible

Définition 1.3.5 Une solution $\hat{x} \in S$ est une solution faiblement efficace s'il n'existe pas $x \in S$ tel que $Cx < C\hat{x}$.

Une solution est faiblement efficace si son vecteur objectif n'est pas fortement dominé.

Efficacité forte

Définition 1.3.6 Une solution \hat{x} est une solution fortement efficace si $\hat{x} \in S$ et s'il n'existe pas de solution $x \in S$ telle que $x \neq \hat{x}$ et $Cx \leq C\hat{x}$.

Une solution \hat{x} est fortement efficace s'il n'existe pas de solution x telle que le vecteur objectif, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de \hat{x} . Remarquons que l'efficacité forte implique l'efficacité qui implique à son tour l'efficacité faible.

1.3.3 Méthode de détermination d'une solution efficace d'un problème MOILP

Le résultat qui suit permet de déterminer au moins une solution efficace (s'il en existe) d'un problème MOILP.

Soit le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 [25] Soit le problème LP suivant :

$$(P_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^k \lambda_i [C_i x] \\ \text{s.c} \\ x \in S \end{array} \right.$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^k / \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, et $(S_{opt})^\lambda$ l'ensemble des solutions optimales correspondant au vecteur λ .

Si nous choisissons $\lambda \in \mathbb{R}^k, \lambda > 0$, alors $\forall \hat{x} \in (S_{opt})^\lambda$, \hat{x} est efficace pour $(P_{1.2})$

Théorème 1.3.2 [2] Soit le problème ILP suivant :

$$(\dot{P}_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^k \lambda_i [C_i x] \\ \text{s.c} \\ x \in \dot{S} \end{array} \right.$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^k / \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, et $(\acute{S}_{opt})^\lambda$ l'ensemble des solutions entières optimales correspondant au vecteur λ .

\acute{S} : L'ensemble des solutions réalisables entières. \acute{S} est défini par des contraintes linéaires bien déterminées; $\acute{S} = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b, x \geq 0\}$;

Si nous choisissons $\lambda \in \mathbb{R}^k, \lambda > 0$, alors $\forall \hat{x} \in (\acute{S}_{opt})^\lambda$, \hat{x} est efficace pour $(P_{1.3})$.

1.3.4 Méthodes graphiques pour la résolution du problème MOILP

Méthode basée sur le concept d'ensembles dominants [25]

Il s'agit dans ce paragraphe de reprendre dans le cas de variables discrètes un concept introduit par Steuer utilisé pour détecter graphiquement l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP) dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Pour tester l'efficacité en un point $x \in \acute{S}$, Steuer a introduit le concept d'ensembles dominants au sens de la définition suivante :

Définition 1.3.7 Soit $\hat{x} \in S$. Nous définissons comme étant C^\geq la région semi-positive du cône généré par les gradients des k fonctions objectifs où :

$$C^\geq = \{y \in \mathbb{Z}^n / Cy \geq 0, Cy \neq 0\} \cup \{0 \text{ de } \mathbb{Z}^n\}$$

Définition 1.3.8 L'ensemble dominant $D_{\hat{x}} = \{\hat{x}\} \oplus C^\geq$ est donné par la somme des ensembles $\{\hat{x}\}$ et C^\geq . Une autre façon de décrire l'ensemble dominant est $D_{\hat{x}} = \{x \in \mathbb{Z}^n / x = \hat{x} + y, Cy \geq 0, Cy \neq 0\}$. L'ensemble dominant contient tous les points dont les vecteurs critères dominent le vecteur critère de $\hat{x} \in \acute{S}$.

Le théorème suivant montre l'importance de l'ensemble dominant $D_{\hat{x}}$ dans la détection des points efficaces.

Théorème 1.3.3 [25] Soit $D_{\hat{x}}$ l'ensemble dominant en $\hat{x} \in \acute{S}$. Alors, \hat{x} est efficace si et seulement si $D_{\hat{x}} \cap \acute{S} = \{\hat{x}\}$.

Le théorème 1.3.3 fournit un test permettant de détecter les points efficaces et pouvant être géométriquement visualisé : Si l'intersection de l'ensemble dominant avec la région réalisable contient seulement \hat{x} , alors \hat{x} est efficace. S'il existe d'autres points appartenant à l'intersection de ces deux ensembles, alors \hat{x} est inefficace.

Exemple 1.3.1 En (fig d), x^1 et x^3 sont inefficaces parce que $D_{x^1} \cap \hat{S} \neq \{x^1\}$ et $D_{x^3} \cap \hat{S} \neq \{x^3\}$, x^2 est efficace parce que $D_{x^2} \cap \hat{S} = \{x^2\}$.

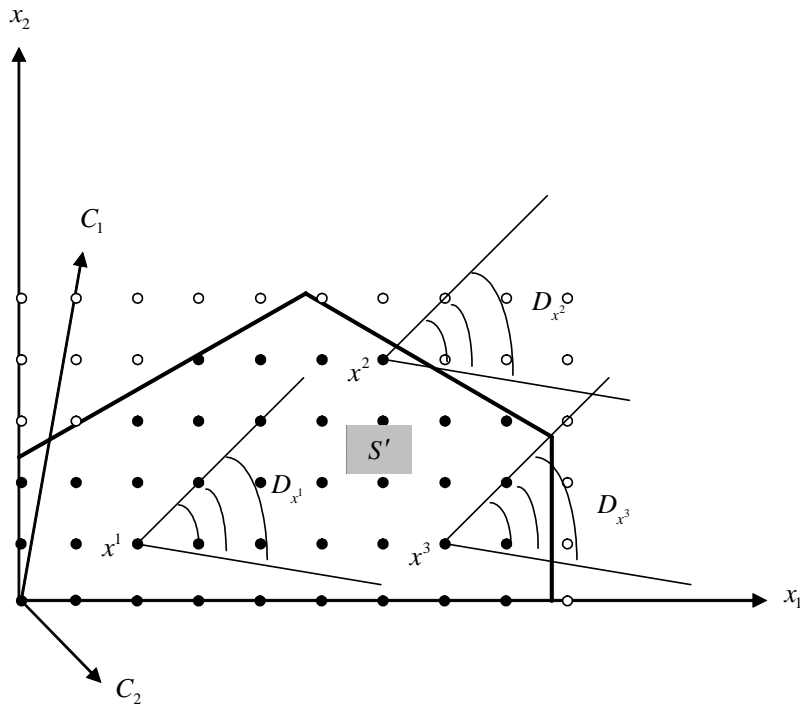


Figure d : Exemple de point inefficace et de point efficace

Méthode basée sur le concept d'ensembles dominés

Pour tester l'efficacité en un point $\hat{x} \in S$, on introduit le concept d'ensembles dominés au sens de la définition suivante :

Définition 1.3.9 Soit $\hat{x} \in S$ et soit C^{\leq} la région semi-négative du cône généré par les gradients des k fonctions objectifs où : $C^{\leq} = \{y \in \mathbb{R}^n / Cy \leq 0, Cy \neq 0\}$

Définition 1.3.10 L'ensemble dominé $\hat{D}_{\hat{x}} = \{\hat{x}\} \oplus C^{\leq}$ est donné par la somme des ensembles $\{\hat{x}\}$ et C^{\leq} .

Nous définissons aussi les ensembles : $U = \{x \in \mathbb{Z}^n / Cx = 0\}$ et $U_{\hat{x}} = \{\hat{x}\} \oplus U$.

Exemple 1.3.2 Les points « cerclés » en (fig e) représentent l'ensemble des solutions efficaces.

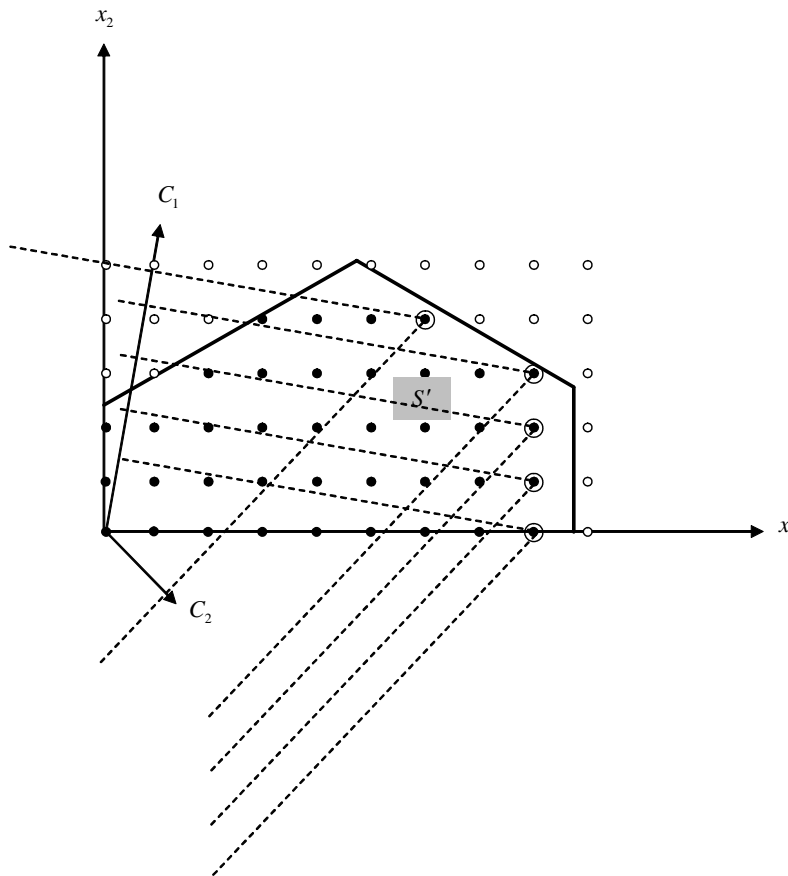


Figure e : Les solutions efficaces

1.3.5 Méthode de coupes multiples pour l'élimination d'un ensemble dominé

Proposition 1.3.1 *Soient les ensembles suivants*

$$A^k = \mathbb{R}^n \setminus \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \right\},$$

$$B_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n c_{1j}x_j > 0 \right\},$$

$$B_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n c_{pj}x_j > 0, \quad \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \leq 0, \quad i = 1, \dots, (p-1) \right\}, \quad p = 2, \dots, k,$$

$$B = \left(\bigcup_{p=1}^k B_p \right).$$

Nous avons alors l'égalité : $A = B$

Preuve. Soient $A^k = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{p=1}^k \overline{A_p} \right)$, $A_p = \{x \in \mathbb{R}^n / C_p x > 0\}$, $p = 1, \dots, k$, $\overline{A_p} = \mathbb{R}^n \setminus A_p = \{x \in \mathbb{R}^n / C_p x \leq 0\}$, $p = 1, \dots, k$ et posons :

$$B_1 = A_1,$$

$$B_2 = A_2 \cap \overline{A_1},$$

$$B_3 = A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1},$$

$$B_p = A_p \cap \overline{A_{p-1}} \cap \overline{A_{p-2}} \cap \dots \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1}, \quad p = 1, \dots, k.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \bigcup_{p=1}^k B_p &= A_1 \cup (A_2 \cap \overline{A_1}) \cup (A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) \cup \dots \cup (A_k \cap \overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_{k-2}} \cap \dots \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) \\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{p=1}^k A_p = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{p=1}^k \overline{A_p} \right) = A^k. \end{aligned}$$

Nous démontrons par récurrence la proposition $P(k) : \bigcup_{p=1}^k B_p = A^k$:

$$\text{On trouve pour } k = 1 : \bigcup_{p=1}^1 B_p = B_1 = A_1 = \bigcup_{p=1}^1 A_p.$$

Donc la proposition $P(1)$ est vraie. Supposons que la proposition $P(k)$ est vraie et démontrons que $P(k+1)$ est vraie aussi. Nous avons :

$$\bigcup_{p=1}^{k+1} B_p = \bigcup_{p=1}^k B_p \cup B_{k+1} = \left(\bigcup_{p=1}^k A_p \right) \cup (A_{k+1} \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_{k-2}} \cap \dots \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$$

$$= \left(\bigcup_{p=1}^k A_p \right) \cup \left[A_{k+1} \cap \left(\overline{\bigcup_{p=1}^k A_p} \right) \right] = \left(\bigcup_{p=1}^{k+1} A_p \right) \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{p=1}^{k+1} A_p = A^{k+1}. \blacksquare$$

A partir de cette égalité d'ensembles nous pouvons définir un algorithme de coupes multiples en un point \hat{x} pouvant isoler l'ensemble dominé $\hat{D}_{\hat{x}}$ de l'ensemble S , et donner une partition de l'ensemble de solutions $\left[\left(\hat{D}_{\hat{x}} \cup U_{\hat{x}} \right) \right] \cup \left[S \setminus \left(\hat{D}_{\hat{x}} \cup U_{\hat{x}} \right) \right]$; Cet algorithme est le suivant :

1.3.6 Algorithme de coupes multiples en un point \hat{x}

1. Sélectionner une solution entière $\hat{x} \in \hat{S}$; \hat{x} est une solution optimale de (\hat{P}_{λ}) (\hat{x} est efficace pour $(P_{1.3})$)
2. Former les problèmes (P_{i_0}) , $i_0 = 1, \dots, k$, identiques au problème $(P_{1.3})$, tels que :

2.1 Pour $i_0 = 1, \dots, k$, faire

2.1.1 Pour $i_1 = 1, \dots, (i_0 - 1)$, faire introduire les coupes $C_{i_0}x \geq C_{i_0}\hat{x} + 1$,
 $C_{i_1}x \leq C_{i_1}\hat{x}$ dans le système de contraintes de (\hat{P}_{λ}) .

Donc nous pouvons écrire les problèmes (P_{i_0}) , $i_0 = 1, \dots, k$ comme suit :

$$(P_{i_0}) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^k \lambda_i [C_i x] \\ s.c \\ Ax = b \\ C_{i_0}x \geq C_{i_0}\hat{x} + 1 \\ C_{i_1}x \leq C_{i_1}\hat{x} \quad i_1 = 1, \dots, (i_0 - 1) \\ x \geq 0, x \text{ entier} \end{array} \right.$$

Dans le cas de variables continues (remplacer dans l'instruction 2.1.1 l'inéquation $C_{i_0}x \geq C_{i_0}\hat{x} + 1$ par $C_{i_0}x > C_{i_0}\hat{x}$, pour introduire les coupes qui isolent l'ensemble de solutions.

1.3.7 Algorithme de résolution d'un problème (MOILP) [2]

Procédure d'initialisation

1. Déterminer le nombre minimum \acute{k} de fonctions objectifs non redondantes de $(P_{1.3})$.
2. Considérer le problème (ILP) suivant :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{\acute{k}} C_i x \\ x \in \acute{S} \end{cases}$$

2.1. Initialiser : $F = \{(P_0)\}$, $Eff = \emptyset$

2.2. Aller à la procédure de choix ;

Procédure de choix

1. Si $F = \emptyset$, afficher Eff , terminer ;
2. Sinon, sélectionner le problème (P_e) de plus fort indice e dans la liste F , aller à la procédure d'évaluation ;

Procédure d'évaluation

1. Appliquer la méthode duale fractionnaire en utilisant la coupe de Gomory si nécessaire pour trouver une solution optimale entière x^e pour le problème (P_e) .
 - 1.1.** S'il n'existe pas une telle solution x^e , faire $F = F \setminus \{(P_e)\}$, aller à la procédure de choix ;
 - 1.2.** Sinon, faire $Eff = Eff \cup U_{x^e}$, aller à la procédure de séparation ;

Procédure de séparation

1. Appliquer l'algorithme de coupes multiples à la solution x^e pour éliminer l'ensemble dominé $(\acute{D}_{x^e} \cup U_{x^e})$ et obtenir les sous problèmes (P_{e+1}) , (P_{e+2}) , ..., $(P_{e+\acute{k}})$,
 2. Faire $F = F \cup \{(P_{e+1}), (P_{e+2}), \dots, (P_{e+\acute{k}})\} \setminus \{(P_e)\}$, aller à la procédure de choix;
- Fin de l'algorithme.

Chapitre 2

Optimisation Linéaire Stochastique Mono-objectif

2.1 Introduction

Pour beaucoup de problèmes réels, les données d'un problème ne peuvent pas être connues exactement pour une variété de raisons. La première raison est due à l'erreur de mesure simple, la deuxième raison plus fondamentale est que quelques données représentent des informations sur le futur (par exemple, demande ou prix de produit d'une future période de temps...) et simplement ne peuvent pas être connues avec certitude. Nous discutons quelques manières de tenir compte de cette incertitude et, spécifiquement, pour illustrer comment la programmation stochastique peut être employée pour prendre quelques décisions "optimales".

2.2 Notions fondamentales

Les programmes stochastiques sont des programmes mathématiques où certains des données ont incorporé à l'objectif ou les contraintes sont incertaines. L'incertitude est habituellement caractérisée par une distribution de probabilité sur les paramètres. Bien que l'incertitude soit rigoureusement définie, dans la pratique elle peut s'étendre en dé-

tail de quelques scénarios (résultats possibles des données) aux distributions communes spécifiques et précises de probabilité.

2.2.1 Scénario

Nous disons qu'une suite d'événements possibles est un scénario et chacun de ces scénarios a des données différentes, pour fixer les idées, ω désignera un scénario. Par ailleurs supposons également que, même si les événements n'ont pas encore eu lieu, il faut quand même prendre une décision.

2.2.2 Recours

L'idée fondamentale de la programmation linéaire stochastique est le concept *du recours*. Le recours est la capacité de prendre la modalité de reprise après qu'un événement aléatoire a eu lieu.

Modèle de recours

Une manière logique de poser le problème est d'exiger que nous prenons une décision maintenant et réduisons au minimum *les coûts* prévus (ou des utilités) des conséquences de cette décision. Ce paradigme s'appelle *le modèle* du recours.

Des modèles de recours peuvent être prolongés d'un certain nombre de manières. Un des plus communs doit inclure plus d'étapes. Avec un problème à plusieurs étages, nous prenons en effet une décision maintenant, attendons une certaine incertitude à résoudre (réalisé), et puis prenons une autre décision basée sur ce qui est produit. L'objectif est de réduire au minimum les coûts prévus de toutes les décisions prises.

2.2.3 Problème stochastique

Les problèmes linéaires stochastiques sont des *problèmes mal posé mathématiquement*, étant donné qu'optimiser une fonction stochastique et respecter des contraintes stochastiques.

Soit :

$$(P_{2.0}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min” } Z = g_0(x) \\ \text{s.c} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ x \in X \end{array} \right.$$

où X est un polyèdre convexe déterministe ; $X = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0, g^{(i)}(x) \leq 0, i = 1, \dots, m_1\}$.

Les fonctions linéaires $g_i(x), i = 0, \dots, m$ ne sont pas connues d'une façon précise, dans ces cas, il est plus commode de penser à prendre les $g_i(x)$ comme étant des fonctions à deux variables :

- La variable de décision de départ x , et
- Un environnement qui déterminent une variable additive ω .

Le symbole “ ” signifie qu'il s'agit d'une optimisation imprécise du point de vue mathématique, et donc “min” ne fournit que l'indication du sens de l'optimisation.

2.2.4 La reformulation du problème stochastique

Dans le cas le plus général, le problème linéaire stochastique s'écrit

$$(\dot{P}_{2.0}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min” } Z(\omega) = C(\omega)x \\ \text{s.c} \\ T(\omega)x \leq d(\omega) \\ x \in D \end{array} \right.$$

où (T, C, d) - de dimension respective $(m \times n), (1 \times n)$ et $(m \times 1)$ - est un vecteur aléatoire défini sur un espace de probabilité (Ω, A, P) et D est un polyèdre convexe déterministe : $D = \{x/x \geq 0, Ax = b\}$ où (A, b) -de dimension respective $(m_1 \times n)$ et $(m_1 \times 1)$ - est un vecteur bien déterminé.

La variable ω ne peut pas être connue au préalable, par contre sa distribution peut être déterminée.

Nous cherchons une solution réalisable qui minimise la fonction dans le sens où :

- Tout élément x dans D peut être réalisable pour quelques valeurs de ω et non réalisable pour les autres.
- Tout élément x dans D peut être optimale pour quelques valeurs de ω et non optimale pour les autres.

Par conséquent, nous avons besoin de bonnes définitions de réalisabilité et d'optimalité.

Contraintes du problème équivalent

Nous présentons ici trois définitions de la solution réalisable du problème stochastique :

1. La solution x est réalisable en moyenne

$$E [T^{(i)}(\omega) x - d^{(i)}(\omega)] \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

2. La solution x garantie une certitude minimale (*probabilistically constrained problem*).

$$\Pr \{ \omega / T^{(i)}(\omega) x - d^{(i)}(\omega) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \} \geq \alpha, \quad \alpha \in [0, 1].$$

(pour plus de détails, voir [15])

3. La solution x est réalisable pour toutes les valeurs possibles de ω (utilisée dans les problèmes de recours)

$$\Pr \{ \omega / T^{(i)}(\omega) x - d^{(i)}(\omega) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \} = 1.$$

Critère d'optimisation du problème équivalent

Plusieurs façons de définir la fonction objectif du problème équivalent peuvent être considérées.

1. La plus couramment utilisée est, de loin, celle qui consiste à adopter le critère de l'espérance mathématique (ou critère de Bayes)

$$\min E [C(\omega) x].$$

C'est ce que nous ferons dans la suite de ce chapitre.

2. La solution x est optimale si et seulement si x minimise la probabilité (pour toutes les valeurs de ω) de l'obtention d'une solution supérieure à une borne donnée α_0 .

$$\min \Pr \{ \omega / C(\omega) x \geq \alpha_0 \}.$$

2.2.5 Les différentes solutions

Il existe de nombreuses méthodes de résolution, nous nous contenterons de présenter quatre et nous renvoyons le lecteur intéressé à des ouvrages spécialisés tels ceux de Kalle et Wallace [15] et Prekopa [19] :

Attente et observation (*wait and see*)

La solution optimale que nous devons choisir si nous savions en avance la réalisation des quantités aléatoires.

Ces solutions ne nous aident pas puisque nous avons besoin de prendre la solution avant que les quantités aléatoires soient connues.

La solution large (*fat solution*)

Choisir le meilleur plan de production qui sera réalisable pour toutes les réalisations des quantités aléatoires.

La solution de la valeur d'espérance

C'est une méthode qui consiste à résoudre le problème linéaire obtenu en remplaçant chaque donnée aléatoire par la valeur de l'espérance et qui est fréquemment utilisée en pratique et elle fournit généralement une solution dont les préférences du décideur n'influent pas sur cette solution.

La solution du recours

Supposons qu'il existe une méthode pour compléter la demande non satisfaite à travers d'autres méthodes (des heures supplémentaires, ...) avec certains coûts de pénalité :

1. Les coûts dûs au manque de production sont dits les coûts du recours et sont déterminés après avoir déterminé les données aléatoires.
2. L'objectif est de minimiser les coûts du premier étage (les coûts de production) plus les coûts du recours de l'espérance.

2.3 Exemple illustratif (Kall et Wallace)

Considérons le problème de Kall et Wallace [15] suivant, dans le but d'une simple présentation. De deux matières premières M_1 et M_2 , nous pouvons produire deux produits P_1 et P_2 simultanément. Le coût unitaire des produits est donné par le vecteur $C = (c_1, c_2)$, (donnant (produisant) le coût de production Z), la demande des produits est donnée par le vecteur $h = (h_{produit1}, h_{produit2})^T$ et la capacité de la production est donnée par \hat{b} qui est le montant total maximal des matières premières qu'on peut produire et qui sont données dans le tableau suivant.

Tableau a

	<i>produit 1</i>	<i>produit 2</i>	C	b
<i>matière première 1</i>	2	3	2	1
<i>matière première 2</i>	6	3.4	3	1
<i>relation</i>	\geq	\geq	=	\leq
<i>la demande minimale</i>	180	162	Z	100

La modélisation de notre problème de production par un programme linéaire mathématique est la suivante :

$$(P_{2.1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 180 \\ 3x_1 + 3.4x_2 \geq 162 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La représentation graphique de $(P_{2.1})$

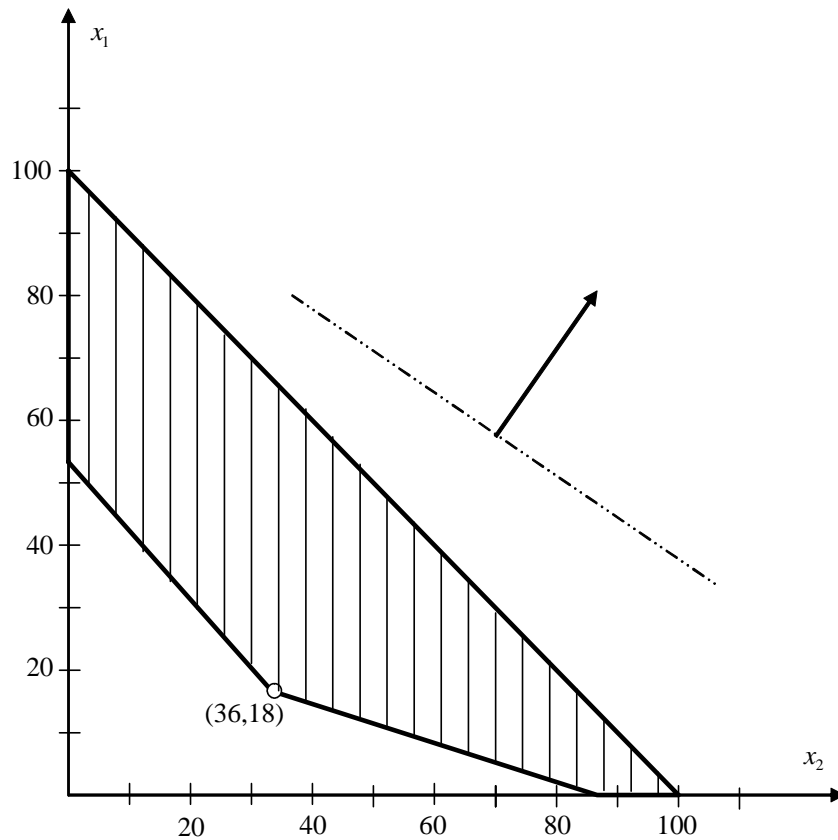


Figure 1 : Ensemble réalisable de problème $(P_{2.1})$

La solution optimale unique à notre problème est $\hat{x}_1 = 36$, $\hat{x}_2 = 18$, avec une valeur optimale $Z(\hat{x}) = 126$. puisque \hat{x}_1 , \hat{x}_2 sont entiers, cette solution est réalisable pour le problème ILP.

- Supposons que quelques données peuvent varier avec certaines limites et nous avons besoin de prendre une décision de production avant de connaître les valeurs exactes des données, pour plus de précision soit le tableau suivant :

Tableau b

	<i>produit1</i>	<i>produit2</i>	<i>C</i>	<i>b</i>
<i>matière première1</i>	$2 + \tilde{\eta}_1$	3	2	1
<i>matière première2</i>	6	$3.4 + \tilde{\eta}_2$	3	1
relation	\geq	\geq	=	\leq
<i>la demande minimale</i>	$180 + \tilde{\zeta}_1$	$162 + \tilde{\zeta}_2$	<i>Z</i>	100

Considérons les données suivantes :

$\tilde{\zeta}_1$ une variable aléatoire de distribution normale (guassienne) $N(0, 12)$ et donc $E[\zeta_1] = 0$;

$\tilde{\zeta}_2$ une variable aléatoire de distribution normale $N(0, 9)$ et donc $E[\zeta_2] = 0$;

$\tilde{\eta}_1$ une variable aléatoire de distribution uniforme $U[-0.8, 0.8]$ et donc $E[\eta_1] = 0$;

$\tilde{\eta}_2$ une variable aléatoire de distribution exponentielle $EXP(\lambda = 2.5)$ et donc $E[\eta_2] = 0.4$.

Les variables aléatoires $\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ sont indépendantes et les intervalles de confiance de seuil 0.01 sont

$$\zeta_1 \in [-30.91, 30.91]$$

$$\zeta_2 \in [-23.18, 23.18]$$

$$\eta_1 \in [-0.8, 0.8]$$

$$\eta_2 \in [0.0, 1.84]$$

La nouvelle modélisation est la suivante :

$$(P_{2.2}) \left\{ \begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ (2 + \tilde{\eta}_1)x_1 + 6x_2 \geq 180 + \tilde{\zeta}_1 \\ 3x_1 + (3.4 + \tilde{\eta}_2)x_2 \geq 162 + \tilde{\zeta}_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

2.3.1 Le changement des valeurs RHS (right-hand sides)

Le changement des valeurs RHS (la demande) correspond à une translation parallèle des contraintes.

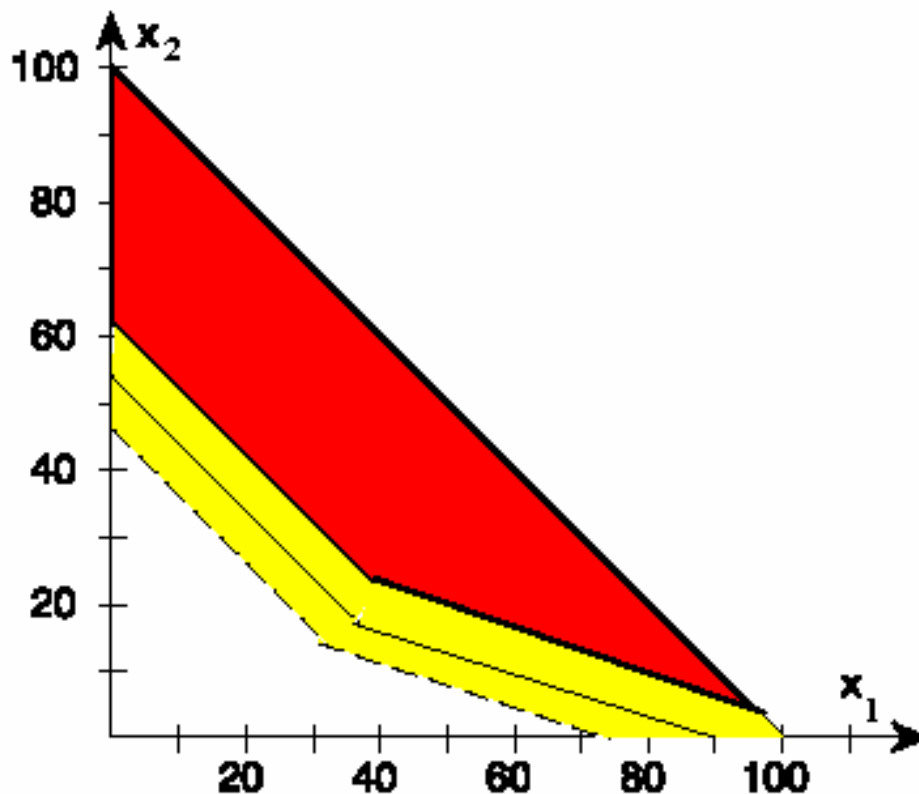


Figure 2 : Ensemble réalisable changeant avec des demandes.

2.3.2 Le changement des coefficients de la matrice

Le changement des coefficients de la matrice (productivités) correspond à la rotation des contraintes correspondantes.

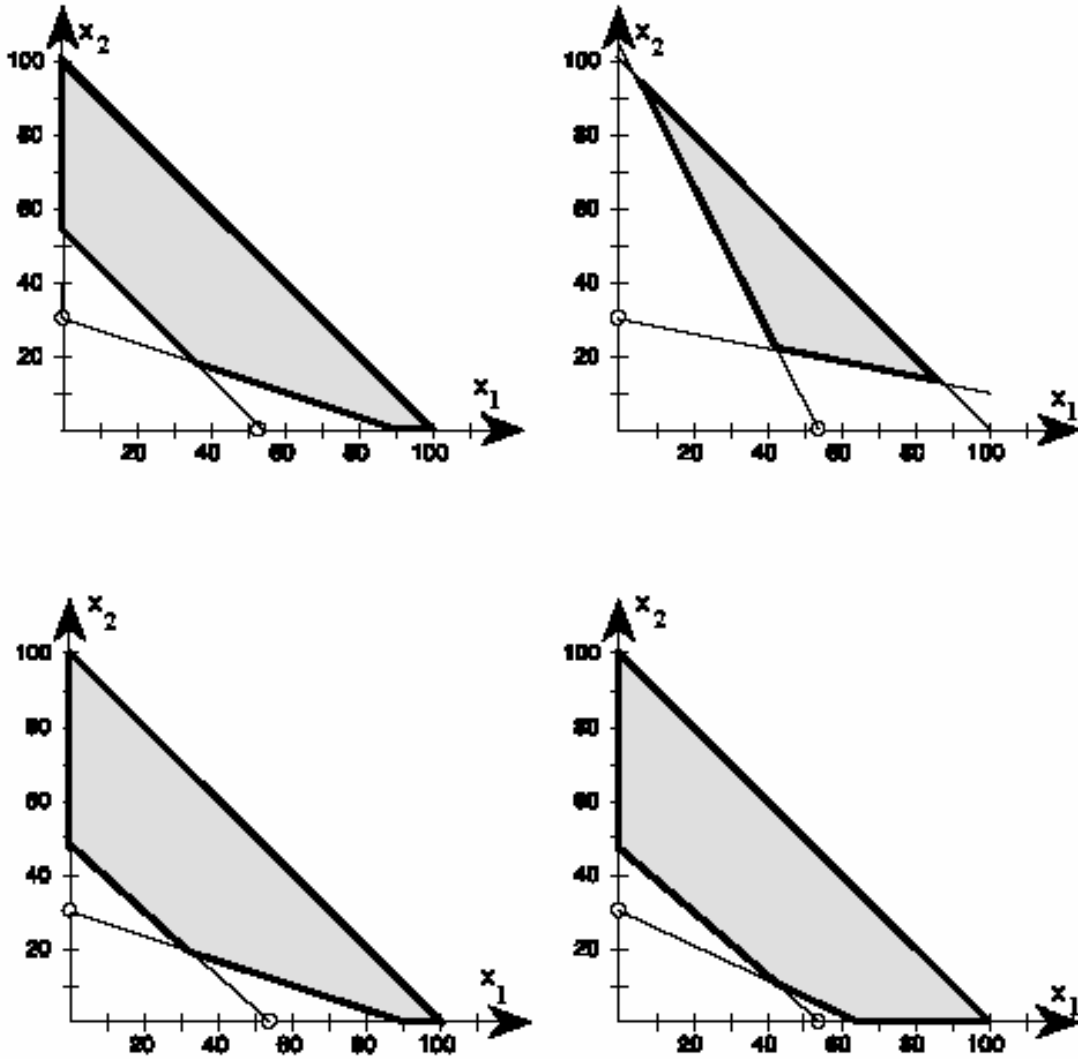


Figure 3 : Ensemble réalisable changeant avec des productivités.

o: le centre de translation pour chaque contrainte

2.3.3 Le changement des valeurs de RHS et des coefficients de la matrice

Le changement des valeurs RHS et des coefficients de la matrice correspond à une combinaison de la translation et de la rotation des contraintes (similitude).

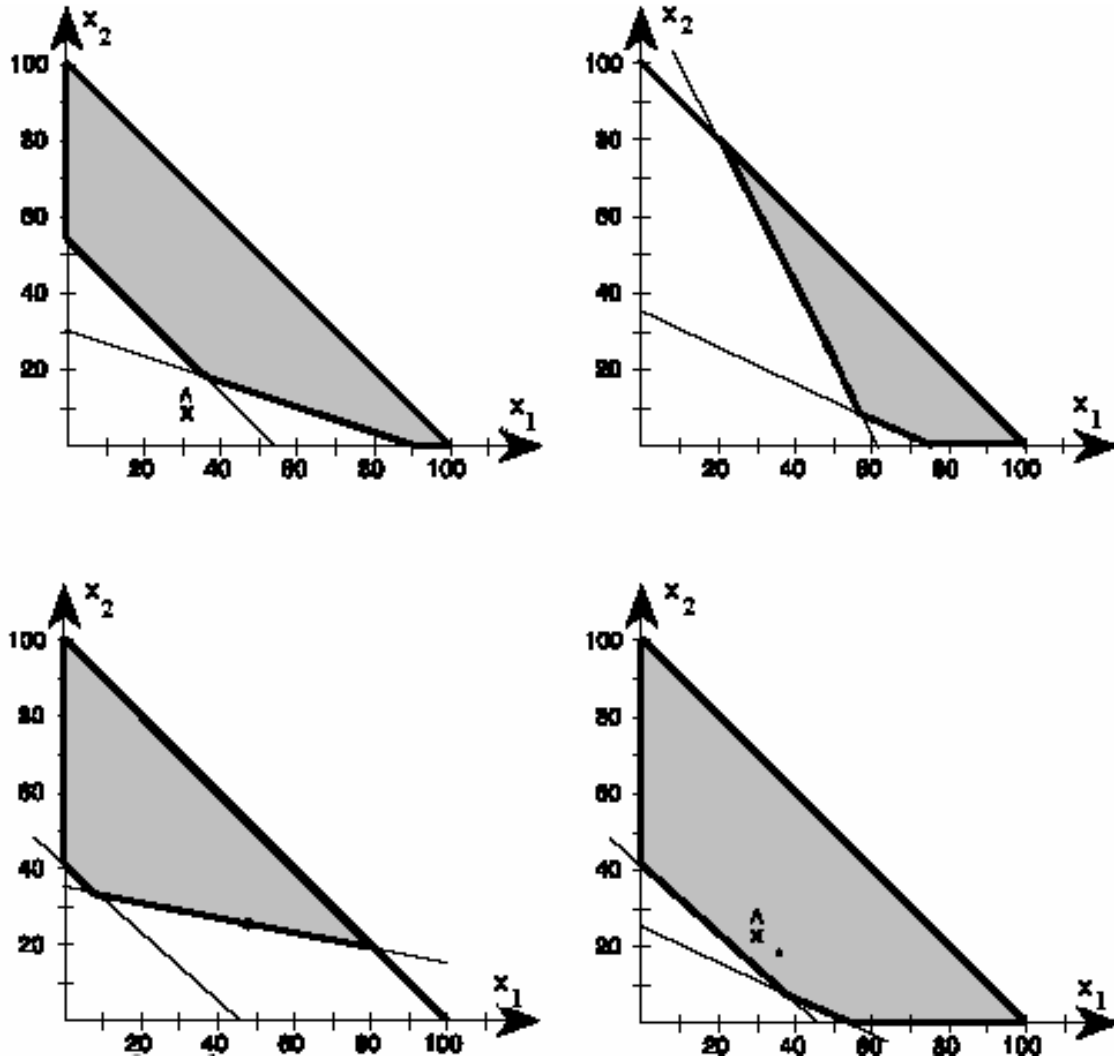


Figure 4 : Ensemble réalisable changeant avec des demandes et des productivités.

- Supposons que l'unité supplémentaire a coûté pour le produit 1 7 et le coût unitaire pour le produit 2 est 12.
- Notons $\tilde{\xi} = (\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$.

- Donnons à chaque contrainte une variable de recours $Y_i(\tilde{\xi})$ qui mesure la production manquante correspondante.

Nous introduisons également les notations suivantes :

$$\begin{aligned} h_1(\tilde{\xi}) &= h_{produit1} = 180 + \tilde{\zeta}_1, \\ h_2(\tilde{\xi}) &= h_{produit2} = 162 + \tilde{\zeta}_2, \\ \alpha(\tilde{\xi}) &= \pi(mat1, prod1) = 2 + \tilde{\eta}_1, \\ \beta(\tilde{\xi}) &= \pi(mat2, prod2) = 3.4 + \tilde{\eta}_2. \end{aligned}$$

2.3.4 Le problème recours par l'exemple illustratif

Le problème $(P_{2.2})$ s'écrit

$$(P_{2.3}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 + E \left[7y_1(\tilde{\xi}) + 12y_2(\tilde{\xi}) \right] \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ \alpha(\tilde{\xi}) x_1 + 6x_2 + y_1(\tilde{\xi}) \geq h_1(\tilde{\xi}) \\ 3x_1 + \beta(\tilde{\xi}) x_2 + y_2(\tilde{\xi}) \geq h_2(\tilde{\xi}) \\ x_1, x_2, y_1(\tilde{\xi}), y_2(\tilde{\xi}) \geq 0 \end{array} \right.$$

Les contraintes stochastiques doivent être satisfaites presque sûr (*almost surely*), c'est-à-dire avec la probabilité 1.

Si $\tilde{\xi}$ a une distribution discrète $(\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^R))$, alors nous pouvons reformuler le problème recours comme suit :

$$(P_{2.4}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min 2x_1 + 3x_2 + \sum_{i=1}^R p_i \left[7y_1(\tilde{\xi}^i) + 12y_2(\tilde{\xi}^i) \right] \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ \alpha(\tilde{\xi}^i) x_1 + 6x_2 + y_1(\tilde{\xi}^i) \geq h_1(\tilde{\xi}^i), \quad i = 1, \dots, R \\ 3x_1 + \beta(\tilde{\xi}^i) x_2 + y_2(\tilde{\xi}^i) \geq h_2(\tilde{\xi}^i), \quad i = 1, \dots, R \\ x_1, x_2, y_1(\tilde{\xi}^i), y_2(\tilde{\xi}^i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, R \end{array} \right.$$

où R est le nombre de scénarios et p_i la probabilité de l'occurrence du scénario avec $\sum_{i=1}^R p_i = 1$.

Le problème $(P_{2.4})$ est un problème linéaire ordinaire avec une structure de décomposition dual.

2.4 Types de problèmes traités dans la littérature d'optimisation stochastique

La programmation linéaire dans un environnement incertain (au sens large) englobe tous les problèmes de programmation linéaire où la fonction économique et / ou les contraintes sont décrites de façon imprécise. Comme pour la programmation linéaire stochastique, ce problème de décision est **mal posé mathématiquement** et il convient de lui donner un sens en définissant un problème déterministe jugé équivalent.

1. Le problème le plus souvent traité dans la littérature est connu sous le nom : le programme linéaire à 2-étages (2-niveaux / 2-étapes) avec recours (*2-stage linear program with recourse*), ce que nous allons traiter tout le long de notre travail.
2. La même logique peut être étendue à des problèmes multi-étages quand le décideur est en face d'une décision du premier étage, en essayant d'anticiper l'impact de l'aspect aléatoire dans plusieurs périodes du future. Les problèmes multi-étages n'ont pas eu d'importance dans la littérature puisque dans la plupart des cas, ces problèmes deviennent non résolus arithmétiquement (*computationally intractable*).

3. Il y a également quelques analyses des problèmes des contraintes en probabilité (*probabilistically intractable problems*).

2.4.1 Optimisation stochastique en 2-étages avec recours

Dantzig et Beale ont proposé ce type de problème en 1955, Dantzig a nommé ce problème “*Linear Programming under Uncertainty*”, Beale a utilisé le terme “*Linear Programming with Random Coefficients*”.

La clé caractéristique : faire la décision du premier étage avant que l’environnement soit déterminé et connaissant la distribution de ses réalisations.

2.4.2 Formulation d’un programme linéaire stochastique en 2-étages avec recours

Les programmes stochastiques cherchent à réduire au minimum le coût de la décision de première période plus le coût prévu du recours de la décision de deuxième période.

Nous définissons le programme ($P_{2.5}$) suivant comme étant le programme linéaire en 2-étages avec recours

$$(P_{2.5}) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \min_x C^T x + E [Q(x, \xi(\omega))] \\ \text{s.c} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{le problème du premier étage} \\ \\ \text{Là où} \\ \left\{ \begin{array}{l} Q(x, \xi(\omega)) = \min_z q^T(\omega) z \\ \text{s.c} \\ W(\omega) z = h(\omega) - T(\omega) x \end{array} \right. \quad \text{le problème du deuxième étage} \end{array} \right.$$

$q^T(\omega)$: le coût de pénalisation du recours (*cost of subcontracting*);

$T(\omega)$: la matrice de technologie ou la quantité fabriquée dans le premier étage (*amount made in stage 1*);

$W(\omega)$: la matrice de recours (*amount to subcontract*);

$h(\omega)$: la quantité réelle (*actual demand*).

- Le problème du premier étage à $n = n_1$ variables et m_1 contraintes.
- Le problème du deuxième étage à n_2 variables et $m = m_2$ contraintes.

2.4.3 La structure du problème de recours

1. Le problème du second étage trouve la meilleure décision du recours pour chaque donnée aléatoire possible (x la décision du premier étage).
2. La solution du premier étage devrait être choisie telle que pour chaque réalisation possible des données aléatoires, une action faisable du recours peut être choisie pour corriger n'importe quelle anomalie.
3. Nous définissons les deux ensembles suivants :

$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} / Ax \leq b, x \geq 0\}$ est un polyèdre non vide et compact dans \mathbb{R}^{n_1} , il représente les valeurs de x qui sont réalisables au problème du premier étage (peut être connu explicitement).

$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} / Q(x, \xi(\omega)) < \infty \text{ avec probabilité } 1\}$ représente les valeurs de x qui guident à la réalisabilité dans le problème du deuxième étage (difficile à exprimer analytiquement).

2.4.4 Types du recours

$$[W(\omega)z = h(\omega) - T(\omega)x]$$

Le recours fixe : $W(\omega) = W$

C'est-à-dire W n'est pas stochastique (aucun aspect aléatoire dans le problème du deuxième étage).

Le recours complet : $\{Wy/y \geq 0\} = \mathbb{R}^{m_2} \implies K_2 = \mathbb{R}^{n_1}$

Le problème du deuxième étage est réalisable pour toutes les décisions du premier étage (nous pouvons corriger pour n'importe quelle erreur).

Le recours relativement complet :

Le problème du deuxième étage est réalisable pour n'importe quelle décision réalisable du premier étage (il est difficile d'identifier l'apriorité).

Le recours (fixe) simple : $W = [I, -I] \implies y^+ - y^- = h(\omega) - T(\omega)x$

Le recours simple correspond au cas où la matrice recours est égale à $(I, -I)$ où I est la matrice unité.

C'est ce cas du recours simple qui est le plus utilisé en pratique.

Remarque 2.4.1 *Le recours simple implique le recours complet.*

2.4.5 Le problème stochastique formulé par un PL à grande taille

Le problème linéaire $(P_{2.5})$ est équivalent au P.L. $(P_{2.6})$ suivant :

$$(P_{2.6}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min C^T x + p_1 (q^1)^T y^1 + p_2 (q^2)^T y^2 + \dots + p_R (q^R)^T y^R \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ T^r x + W z^r = h^r, \quad r = 1, \dots, R \\ x, z^r \geq 0, \quad r = 1, \dots, R \end{array} \right.$$

- La plupart des techniques de résolution sont basées sur la structure précédente de la programmation linéaire.
- Pour résoudre le problème $(P_{2.6})$, il est fait appel à une stratégie de la décomposition primale qui est basée sur l'application des coupes de Benders au problème primale.

Nous nous contenterons de présenter une courte révision de la décomposition de Benders dans les sous-paragraphes suivants et d'en citer ces techniques de résolution.

La décomposition de Benders

Nous séparons les variables de telle sorte que:

1. Nous pouvons utiliser une optimisation interne (ou sous problème) et une optimisation externe (ou programme général).
2. Le problème d'optimisation externe est une projection implicite du problème original sur l'ensemble des variables compliquées par l'ensemble de coupes de Benders.
3. La stratégie est de résoudre le problème général relaxé et nous passons une solution au sous problème, puis nous résolvons le sous problème pour voir si des contraintes omises du programme principal sont violées.

2.4.6 Exemple général de la décomposition de Benders

Supposons que nous voulons résoudre le problème (borné et faisable) [8] suivant :

$$(P_{2.7}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{x, y} Cx + dy \\ \text{s.c} \\ Ax + Dy \geq b \\ x \in S \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Si x fixé (à une valeur de \bar{x}), le problème $(P_{2.7})$ devient un programme linéaire en y .

$$(P_{2.8}) \quad C\bar{x} + \left\{ \begin{array}{l} \min_y dy \\ \text{s.c} \\ Dy \geq b - A\bar{x} \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Donc le problème $(P_{2.8})$ est équivalent à

$$(P_{2.9}) \quad \min_{\bar{x} \in S} \left\{ \begin{array}{l} C\bar{x} + \min_y dy \\ \text{s.c} \\ Dy \geq b - A\bar{x} \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

En prenant le dual du problème intérieur, nous trouvons une formulation équivalente comme suit :

$$(P_{2.10}) \quad \min_{\bar{x} \in S} \left\{ \begin{array}{l} C\bar{x} + \max_u (b - A\bar{x}) \\ \text{s.c} \\ uD \leq d \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Pour n'importe quelle direction extrême v du programme dual, nous avons besoin de $v(b - A\bar{x}) \leq 0$ (coupe de réalisabilité).

Pour n'importe quelle point extrême u du programme dual, nous avons besoin de $y \geq u(b - A\bar{x})$ (coupe d'optimalité).

Donc nous pouvons écrire le programme principal comme suit :

$$(P_{2.11}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_y \\ \text{s.c} \\ y \geq Cx + u(b - Ax) \quad \forall u \in U \\ 0 \geq v(b - Ax) \quad \forall v \in V \\ x \in S \end{array} \right.$$

où U représente l'ensemble des points extrêmes de $uD \leq d$ et V l'ensemble des directions extrêmes de $uD \leq d$.

Méthode de résolution approchée

1. Résoudre le problème principal avec aucune coupe de réalisabilité ou d'optimalité,
2. Trouver la solution,

3. Résoudre le sous problème pour voir s'il y a des contraintes violés,

- Si oui ajouter les contraintes au problème principal et résoudre-le,
- Si non, nous avons la solution optimale.

Nous discutons maintenant comment les partitions de Benders peuvent être appliquées au problème stochastique à deux étages avec recours.

Le problème principal :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{x, \theta} C^T x + \theta \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ \theta - Q(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \text{avec } Q(x) = E \left[\min_z \{ q^T z / Wz = h - Tx, z \geq 0 \} \right] \end{array} \right.$$

Donner une solution (x^v, θ^v) au problème principal relaxé, nous devons déterminer deux choses :

i) x^v permet-il de trouver une solution réalisable pour le problème recours ?

Si la valeur de la fonction objectif de recours est positive, x^v ne permet pas de trouver une solution réalisable au problème recours , pour cela nous ajoutons une coupe de réalisabilité au problème principal pour trouver une solution négative du dual.

ii) Si x^v est réalisable au problème de recours, comment la valeur objectif de recours compare-t-elle à notre borne θ^v ?

- Vérifier pour voir si $Q(x^v) \leq \theta^v$.
- Si non ajouter une coupe d'optimalité

$$\begin{aligned} Q(x^v) &= \min_z \{ q^T z / Wz = h - Tx^v, z \geq 0 \} \\ &= \max_{\sigma} \left\{ (h - Tx^v)^T \sigma / W^T \sigma \leq q \right\} \end{aligned}$$

Depuis un nombre fini de points extrêmes et de directions extrêmes dual existent, il y a seulement un nombre fini de contraintes de réalisabilité et d'optimalité. Par conséquent, l'algorithme doit converger de façon finie.

2.5 La programmation stochastique mono-objectif en nombres entiers (SIP)

Dans bien des applications, les variables ne peuvent pas prendre des valeurs réelles quelconques : le problème n'a de sens que si toutes les variables, ou une partie d'entre elles, prennent des valeurs entières. Lorsque toutes les variables doivent être entières, le problème résultant, est le problème général de programmation linéaire stochastique totalement en variables entières suivant [16] :

$$\left(\overset{\circ}{P} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{“min”}_x Z = C(\xi) x \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ T(\xi) x = h(\xi) \\ x \geq 0, x \text{ entier} \end{array} \right.$$

où C, T et h sont des matrices aléatoires des dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_0 \times n)$ et $(m_0 \times 1)$ définies sur un espace de probabilité (Ω, Ξ, P) ; A et b sont les matrices déterministes de dimensions $(m \times n)$ et $(m \times 1)$ respectivement.

Chapitre 3

Optimisation linéaire stochastique multi-objectifs (MOSLP)

3.1 Introduction

Tant le chapitre précédent que celui-ci se justifient par la nécessité d’appréhender au mieux la réalité des applications à traiter :

- il se peut que le contexte général d’une application soit tel que des données incertaines ou imprécises doivent être intégrées dans la modélisation, ce qui donne lieu aux approches de la P.L. stochastique,
- par ailleurs, la nature même d’une application impose souvent la prise en compte simultanée de plusieurs objectifs ce qui donne lieu à la P.L. multi-objectifs.

Dans les dernières années, un intérêt particulier a commencé à se manifester pour cumuler ces deux types de généralisation, donnant ainsi lieu à la programmation linéaire multi-objectifs stochastique.

Pour résoudre des applications concrètes, une méthode interactive de P.L. multi-objectifs stochastique -appelée STRANGE (STRategy for Nuclear Generation of Electricity)- a été développée : STRANGE intègre certaines idées de la P.L. stochastique avec recours (voir [26], [27], [4], [5], [6], [7]).

3.2 Définitions et notations

Considérons le problème linéaire stochastique multi-objectifs (MOSLP) donné sous la forme mathématique suivante :

$$(P_{3.1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min”}_x Z_i = C_i(\xi) x, \quad i = 1, \dots, k \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ T(\xi) x = h(\xi) \\ x \geq 0, x \text{ entier} \end{array} \right.$$

où C_i, T et h sont des matrices aléatoires de dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_0 \times n)$ et $(m_0 \times 1)$ définies sur un espace de probabilité (Ω, Ξ, P) ; A et b sont les matrices déterministes de dimensions $(m \times n)$ et $(m \times 1)$ respectivement.

Remarque 3.2.1 *L’optimisation du problème $(P_{3.1})$ n’a pas de sens spécifique et il convient de lui en donner un en définissant un mode de résolution : ceci revient à associer au problème $(P_{3.1})$ un problème “équivalent” – **mathématiquement bien posé** cette fois, c’est à dire déterministe – dont, par définition, la solution optimale sera considérée comme la solution “optimale” du problème initial. C’est l’objet des paragraphes suivants.*

3.3 Le problème déterministe équivalent

Supposons que nous avons une distribution discrète et finie $\{(\xi^r, p_r), r = 1, \dots, R\}$ des données aléatoires. Dans le premier pas, pour chaque réalisation ξ^r de ξ nous associons une fonction objectif $Z_{ir} = C_i(\xi^r) x$, une matrice $T(\xi^r)$ et un vecteur $h(\xi^r)$ en prenant en considération les scénarios différents qui affectent les k objectifs et les contraintes stochastiques.

Le deuxième pas est de revenir à l’idée du recours utilisée dans la programmation stochastique mono-objectif. Bien sûr, nous supposons que le décideur peut indiquer d’une

3.3.1 Réalisabilité

Supposons que la matrice du recours W est fixée. Nous clarifions la question de comment décider si une donnée $x = x^0$ est réalisable pour le deuxième étage de problème pour toutes les réalisations possibles de ξ . Puisque l'inconvénient du $(P_{3.2})$ est le nombre éventuellement très important de contraintes; il est plus intéressant de considérer la résolution de son dual de deuxième étage.

$$\max_{\pi} \left\{ \pi^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0] / \pi^T W \leq (q^r)^T \right\} \quad (3.2)$$

L'ensemble des contraintes $P = \left\{ \pi : \pi^T W \leq (q^r)^T \right\}$ est indépendant de x .

Soit $\{\pi^T / t \in I\}$ l'ensemble des points extrêmes de P et $\{\sigma^\delta / \delta \in \Delta\}$ l'ensemble des arêtes extrêmes [18].

1. Si $P = \emptyset$ alors $Q(x^0, \xi^r)$ est illimité ($Q(x^0, \xi^r) = -\infty$) ou non réalisable ($Q(x^0, \xi^r) = +\infty$).
2. Si $P \neq \emptyset$ alors $Q(x^0, \xi^r)$ est non réalisable ou admet une solution optimale.

Le lemme de *farkas* est une conséquence immédiate du théorème fort de dualité, ce qui apporte un état nécessaire et suffisant pour la réalisabilité d'un système des contraintes linéaires et peut être énoncé comme la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 *L'ensemble $\{z / Wz = h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0, z \geq 0\} \neq \emptyset$*

si et seulement si $\sigma^T W \leq 0$ implique $\sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0] \leq 0$.

Nous concluons que $Q(x^0, \xi^r)$ est non réalisable si et seulement si P admet une arête extrême σ telle que : $\sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0] > 0$; autrement la valeur optimale de $Q(x^0, \xi^r)$ est obtenue par $\pi^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0]$, où π est un point extrême de P . Puis nous vérifions la réalisabilité pour le problème du deuxième étage, nous devons trouver une direction σ en résultant le programme suivant :

$$\max_{\sigma} \left\{ \sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0] / \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1 \right\} \quad (3.3)$$

Tel que la dernière contrainte est ajoutée pour limiter (borner) σ ; si non la valeur maximale sera $(+\infty)$ et nous nous ne l'intéressons pas.

Si pour un certain ξ^r , $r \in \{1, \dots, R\}$, $\sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] > 0$, où σ_r est la solution optimale de (3.3), nous avons trouvé ξ^r pour lequel x^0 n'est pas une solution réalisable de problème du deuxième étage. Dans ce cas-ci, nous ajoutons au $(P_{3.2})$ **la coupe de réalisabilité**

$$\sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x] \leq 0 \tag{3.4}$$

3.3.2 Efficacité

Supposons que toutes les coupes de réalisabilité déterminées sont rajoutées au problème $(P_{3.2})$, nous pouvons le reformuler en présentant une nouvelle variable θ telle que nous obtenons le problème suivant :

$$(P_{3.3}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min” } \tilde{Z}_i = \dot{Z}_i + \theta, \quad i = 1, \dots, k \\ \text{s.c} \\ x \in S_3, \\ \theta \geq Q(x), \end{array} \right.$$

avec

$$S_3 = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \sigma_r^T T(\xi^r)x \geq \sigma_r^T h(\xi^r), r \in \{1, \dots, R\}, x \geq 0\}$$

S_3 est convexe et pour que le problème $(P_{3.3})$ ait un sens, il faut que l'ensemble S_3 soit non vide.

Nous traitons un problème de recherche de l'ensemble *Eff* de toutes les solutions entières de $(P_{3.3})$ qui sont efficaces dans le sens de la définition suivante :

Définition 3.3.1 Une solution $x^0 \in S_3$ est une solution efficace pour $(P_{3.3})$ s'il n'existe pas de solution $x^1 \in S_3$ telle que $\tilde{Z}_j(x^1) \leq \tilde{Z}_j(x^0)$, $j \in \{1, \dots, k\}$ et $\tilde{Z}_j(x^1) < \tilde{Z}_j(x^0)$ pour au moins une valeur de $j \in \{1, \dots, k\}$ et pour toute réalisation ξ^r , $r = 1, \dots, R$.

En mettant en considération le programme mono-objectif $(P_{3.4})$, la première étape est de déterminer une solution réalisable entière de ce problème :

$$(P_{3.4}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min”} \sum_{i=1}^k \tilde{Z}_i = \sum_{i=1}^k \left(\underset{i=1}{Z}_i + \theta \right), \\ \text{s.c} \\ x \in S_3, \\ \theta \geq Q(x). \end{array} \right.$$

Algorithmiquement, nous ne pouvons pas utiliser $\theta \geq Q(x)$ comme contrainte puisque $Q(x)$ définit implicitement par un grand nombre de problèmes d'optimisation. Nous résolvons le problème $(P_{3.4})$ sans la contrainte $\theta \geq Q(x)$ et obtenons une solution faisable (x^0, θ^0) (initialiser : $\theta = -\infty$).

Les solutions optimales $(\pi_r, r = 1, \dots, R)$ du dual (3.2) sont utilisées pour calculer l'esperance de la fonction du recours $Q(x^0)$ donnée par :

$$Q(x^0) = \sum_{r=1}^R p^r Q(x^0, \xi^r) = \sum_{r=1}^R p^r (\pi_r)^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^0].$$

Si $\theta^0 \geq Q(x^0)$, x^0 est optimale pour $(P_{3.4})$, sinon **la coupe d'efficacité**

$$\theta \geq \sum_{r=1}^R p^r (\pi_r)^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x] \quad (3.5)$$

est ajoutée au $(P_{3.4})$ que l'on reoptimise.

Chapitre 4

Optimisation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons une nouvelle méthode pour la résolution du problème de la programmation linéaire stochastique entière à objectifs multiples basée sur la méthode de 2-étages avec recours entier et la méthode d'évaluation et séparation détaillées dans les chapitres précédents. Signalons qu'il existe également une méthode récente a été publiées [1]; cette méthode est basée sur une technique de coupe plane soulignée par M. Moulai dans [2] et la méthode de deux étages avec recours entiers.

Nous terminons par une illustration de l'algorithme par un exemple numérique et sa représentation graphique.

4.2 Définitions et notations

La forme la plus générale d'un problème linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers (MOSILP) est la suivante :

$$(P_{4.1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min”}_x Z_i = C_i(\xi) x, \quad i = 1, \dots, k \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ T(\xi) x = h(\xi) \\ x \geq 0, x \text{ entier} \end{array} \right.$$

où C_i, T et h sont des matrices aléatoires des dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_0 \times n)$ et $(m_0 \times 1)$ définies sur un espace de probabilité (Ω, Ξ, P) ; A et b sont les matrices déterministes de dimensions $(m \times n)$ et $(m \times 1)$ respectivement et \mathbb{Z}_+^n représente l'ensemble des n-uples entiers non négatifs.

Comme le chapitre précédent, pour obtenir un problème déterministe jugé équivalent, il convient avant tout de préciser la façon choisie pour la transformation d'un problème stochastique à un problème équivalent déterministe.

4.2.1 Le problème déterministe associé

La stratégie est exactement la même que dans le chapitre précédent, c'est-à-dire nous allons trouver le problème déterministe (le cas où W et p sont déterministes) qui est toujours un problème convexe et s'écrit :

$$(P_{4.2}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{“min”}_x \tilde{Z}_i = \dot{Z}_i + Q(x), \quad i = 1, \dots, k \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \text{ entier.} \end{array} \right.$$

où

$$\dot{Z}_i = E[Z_i] = \sum_{r=1}^R p^r Z_{ir} = \sum_{r=1}^R p^r C_i(\xi^r) x = E[C_i(\xi) x]$$

et

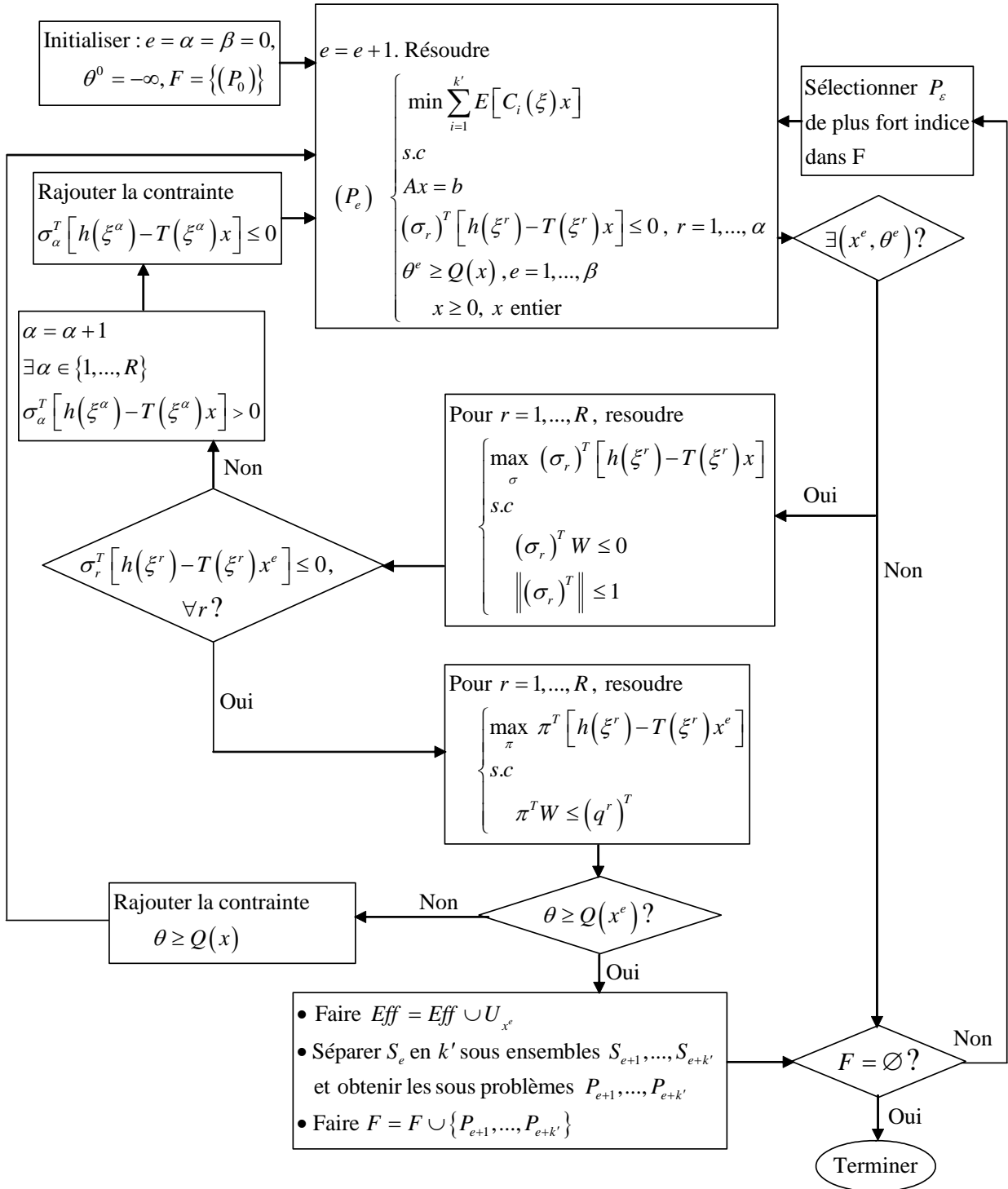


Figure 4.3.1 :

Procédure d'initialisation

1. Pour $q = 1, \dots, k$, appliquer la première phase de l'algorithme simplexe pour résoudre le programme linéaire :

$$(RD_q) \left\{ \begin{array}{l} \min \varphi_q = \sum_{j=1}^n v_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^k c_{ij} y_i + v_j = c_{qj}, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{array} \right.$$

- 1.1. Si $\varphi_q = 0$, Supprimer la fonction objectif Z_q du problème $(P_{4.1})$, faire $Z_t = Z_{t+1}$, $t = q, \dots, (k - 1)$ et $k = k - 1$.

2. Faire $\acute{k} = k$;

3. Considérer le problème ILP suivant :

$$(P_e) \left\{ \begin{array}{l} \text{"min"} \sum_{i=1}^{\acute{k}} E [C_i(\xi) x] \\ \text{s.c} \\ \sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x] \leq 0, \quad r = 1, \dots, \alpha \\ \theta^e \geq Q(x) \\ x \geq 0, \quad x \text{ entier.} \end{array} \right.$$

- 3.1. Initialiser : $\theta = -\infty$, $e = \alpha = 0$,

$$F = \{P_0\}, \text{ Eff} = \emptyset \text{ et } \widetilde{\text{Eff}} = \emptyset ;$$

- 3.2. Aller à la procédure de choix ;

Procédure de choix

1. Si $F = \emptyset$, afficher Eff, \widetilde{Eff} , terminer ;
2. Sinon, sélectionner le problème (P_e) de plus fort indice e dans la liste F , aller à la procédure d'évaluation ;

Procédure d'évaluation

1. Appliquer la méthode duale fractionnaire en utilisant la coupe de Gomory si nécessaire pour trouver une solution optimale entière x^e pour le problème (P_e) sans aucune coupe d'optimalité ou de réalisabilité.

(minimiser la fonction objectif $\sum_{i=1}^k E [C_i(\xi) x]$ sous les contraintes déterministes).

- 1.1. S'il n'existe pas une telle solution x^e , faire $F = F \setminus \{(P_e)\}$, aller à la procédure de choix ;
- 1.2. Sinon, aller à la procédure de faisabilité ;

Procédure de faisabilité

1. Résoudre le problème (3.3) :

$$\max_{\sigma} \{ \sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^e] / \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1 \}, r \in \{1, \dots, R\}$$

- 1.1. Si $\sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^e] > 0$, rajouter au problème (P_e) la coupe de faisabilité

$$(3.4) : \sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x] \leq 0$$

- 1.2. Si $\sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x] \leq 0$, aller à la procédure d'optimisation ;

Procédure d'efficacité

1. Résoudre le problème (3.2) : $\max_{\pi} \{ \pi^T [h(\xi^r) - T(\xi^r) x^e] / \pi^T W \leq (q^r)^T \}, r \in \{1, \dots, R\}$

1.1. Si $Q(x^e) > \theta$; Rajouter au problème (P_e) la coupe d'optmalité (3.5) :

$$\theta \geq \sum_{r=1}^R p^r (\pi_r)^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x]$$

1.2. Si $Q(x^e) \leq \theta$; faire $Eff = Eff \cup U_{x^e}$, $\widetilde{Eff} = \widetilde{Eff} \cup \{Z(x^e)\}$, aller à la procédure de séparation ;

Procédure de séparation

1. Appliquer l'algorithme de coupes multiples à la solution x^e pour éliminer l'ensemble dominé $(\dot{D}_{x^e} \cup U_{x^e})$ et obtenir les sous problèmes (P_{e+1}) , (P_{e+2}) , ..., (P_{e+k}) .
2. Faire $F = F \cup \{(P_{e+1}), (P_{e+2}), \dots, (P_{e+k})\} \setminus \{(P_e)\}$, aller à la procédure de choix;

Fin de l'algorithme.

4.3.2 Justification de l'algorithme

Pour la résolution du problème (MOSILP), nous proposons un algorithme qui génère toutes les solutions entières efficaces et leur coût correspondant du problème $(P_{4.3})$.

Etape 1 Déterminer le nombre minimum k de fonctions objectifs non redondantes de problème $(P_{4.3})$.

Initialiser θ par $(\theta = -\infty)$ et résoudre le problème (P_e) sans coupe de faisabilité ou d'efficacité et trouver une solution entière x . Si pour quelques realisations ξ^r , $r \in \{1, \dots, R\}$ les problèmes du second étage (3.3) apportés par la solution entière x ne sont pas réalisables, introduire ces coupes de faisabilités de la forme (3.4). Le nouveau problème est optimisé pour trouver une solution réalisable entière. Introduire les coupes de Gomory si la solution n'est pas entière. Nous résolvons le programme (3.2) et calculons $Q(x)$. Si $Q(x) > \theta$, introduire la coupe d'efficacité (3.5). Le nouveau problème est optimisé pour trouver une solution efficace entière x^1 et la valeur correspondante θ^1 . Enregistrer la première solution efficace et le k_uplet efficace pour construire les ensembles Eff_1 et \widetilde{Eff}_1 .

Etape 2 Appliquer l'algorithme de coupes multiples à la solution x^1 et construire l'ensemble $F = F \cup \{(P_1), \dots, (P_k)\} \setminus \{(P_0)\}$. Si $F = \emptyset$, terminer. Sinon, sélectionner le problème (P_i) de plus fort indice i dans la liste F puis appliquer la méthode duale fractionnaire en utilisant la coupe de Gomory si nécessaire pour trouver une solution entière x pour le problème (P_i) . Si pour quelques réalisations ξ^r , $r \in \{1, \dots, R\}$ les problèmes du second étage (3.3) apportés par la solution entière x ne sont pas réalisables, introduire ces coupes de faisabilité de la forme (3.4). Le nouveau problème est optimisé pour trouver une solution réalisable entière. Introduire les coupes de Gomory si la solution n'est pas entière. nous résolvons le programme (3.2) et calculons $Q(x)$. Si $Q(x) > \theta$, introduire la coupe d'efficacité (3.5). Le nouveau problème est optimisé pour trouver une solution efficace entière x^2 et la valeur correspondante θ^2 . Enregistrer la deuxième solution efficace et le k _uplet efficace s'il n'est pas dominé par le k _uplet précédent pour construire les ensembles

$$Eff_2 = Eff_1 \cup \{x^2\} \text{ et } \widetilde{Eff}_2 = \widetilde{Eff}_1 \cup \{Z(x^2)\}.$$

Etape j Appliquer l'algorithme de coupes multiples à la solution x^{j-1} et construire l'ensemble $F = F \cup \{(P_{j+1}), \dots, (P_{j+k})\} \setminus \{(P_j)\}$. Si $F = \emptyset$, terminer. Sinon, sélectionner le problème (P_i) de plus fort indice i dans la liste F puis appliquer la méthode duale fractionnaire en utilisant la coupe de Gomory si nécessaire pour trouver une solution entière x de problème (P_j) . Si pour quelques réalisations ξ^r , $r \in \{1, \dots, R\}$ les problèmes du second étage (3.3) apportés par la solution entière x ne sont pas réalisables, introduire ces coupes de faisabilité de la forme (3.4). Le nouveau problème est optimisé pour trouver une solution réalisable entière. Introduire les coupes de Gomory si la solution n'est pas entière. nous résolvons le programme (3.2) et calculons $Q(x)$. Si $Q(x) > \theta$, introduire la coupe d'efficacité (3.5). Le nouveau problème est optimisé pour trouver une solution efficace entière x^j et la valeur correspondante θ^j . Enregistrer la deuxième solution efficace et le k _uplet efficace s'il n'est pas dominé par le k _uplet précédent pour construire les ensembles

$$Eff_j = Eff_{j-1} \cup \{x^j\} \text{ et } \widetilde{Eff}_j = \widetilde{Eff}_{j-1} \cup \{Z(x^j)\}.$$

Etape Finale Le processus se termine lorsque $F = \emptyset$.

Théorème 4.3.1 *L'algorithme de recherche de toutes les solutions efficaces entières du problème $(P_{4.1})$ décrit ci-dessus converge en un nombre fini d'étapes.*

Preuve. Puisque la région des points réalisables déduite de la matrice du recours W est bornée, il y a seulement un nombre finie de coupes de réalisabilité et d'efficacité. D'autre part, la région réalisable est tranquée à chaque étape par application répétée de coupes de *branche and bound* suivies éventuellement par des coupes de Gomory. Toutes ces coupes supplémentaires excluent les ensembles de solutions dominées, menant à la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'étapes. ■

4.3.3 Expérimentation

Notre algorithme a été implémenté avec un programme informatique à l'aide du logiciel C++ BUILDER 5.0 [2], on a pu tester quelques constants très réduits en terme du variable, contrainte et objectifs, ceci du aux problèmes rencontres dans la programmation linéaire déterministe en nombres entiers. (précision et convergence de la méthode de gomory).

4.3.4 Exemple Numérique

Comme illustration de la méthode proposée, nous présentons un problème de programmation linéaire stochastique en nombres entiers multi-objectifs avec une structure semblable à celle du problème $(P_{4.1})$, $k = 3$, $n_0 = 4$, $m_0 = m = n = 2$.

- Contraintes déterministes :

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq -8 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

- Deux scénarios ($R = 2$) affectent les trois objectifs et les contraintes stochastiques

$$C_1(\xi^1) = \begin{pmatrix} -9 & 4 \end{pmatrix}, C_2(\xi^1) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix}, C_3(\xi^1) = \begin{pmatrix} 8 & -11 \end{pmatrix};$$

$$C_1(\xi^2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}, C_2(\xi^2) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix}, C_3(\xi^2) = \begin{pmatrix} -4 & 9 \end{pmatrix};$$

$$T(\xi^1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, T(\xi^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, h(\xi^1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, h(\xi^2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$q(\xi^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T, q(\xi^2) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, p(\xi^1) = \frac{1}{2}, p(\xi^2) = \frac{1}{2};$$

$$W(\xi) = W = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$\dot{Z}_1 = E[C_1(\xi)] = p(\xi^1)C_1(\xi^1) + p(\xi^2)C_1(\xi^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{Z}_2 = E[C_2(\xi)] = p(\xi^1)C_2(\xi^1) + p(\xi^2)C_2(\xi^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{Z}_3 = E[C_3(\xi)] = p(\xi^1)C_3(\xi^1) + p(\xi^2)C_3(\xi^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -11 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Initialisation

$$(P_0) \left[\begin{array}{l} \min E[C_1(\xi)x] + E[C_3(\xi)x] \\ \text{s.c} \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ entiers} \end{array} \right]$$

$$F = \{(P_0)\}; \text{Eff}_0 = \emptyset; \widetilde{\text{Eff}}_0 = \emptyset.$$

• Première itération

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_0) .

Procédure d'évaluation La résolution du problème (P_0) donne le tableau 1 ci-dessous

Tableau 1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	3
x_2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	2
$\tilde{C}_1^B + \tilde{C}_3^B$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	-3

, le minimum est atteint en $x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Procédure de faisabilité Pour examiner (tester) la réalisabilité du problème (3.1) du deuxième étage, nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -4\sigma_1^1 + 9\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 3\sigma_2^1 - 16\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix} = 0$$

$\sigma_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] > 0$, ceci signifie que le problème du second étage (3.1) n'est pas réalisable pour ξ^1 . Alors nous créons une coupe de réalisabilité de la forme (3.4) :

$$\frac{5}{3}x_2 \geq \frac{11}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{-5}{18}x_3 + \frac{10}{9}x_4 + x_5 = \frac{-1}{3}$$

Nous ajoutons cette coupe et la coupe de Gomory $\frac{-3}{5}x_5 + x_6 = \frac{-4}{5}$ à la première contrainte, nous obtenons un autre point minimum et entier $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ qui est donné par le tableau 2

Tableau 2

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
x_1	1	0	0	1	0	1	2
x_2	0	1	0	0	0	-1	3
x_3	0	0	1	-4	0	-6	6
x_5	0	0	0	0	1	$\frac{-5}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\tilde{C}_1^B + \tilde{C}_3^B$	0	0	0	-1	0	-1	-2

Procédure de faisabilité Pour tester la réalisabilité du problème (3.1) du deuxième étage, nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 \max -5\sigma_1^1 + 6\sigma_1^2 \\
 -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\
 -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\
 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\
 \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\
 \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1
 \end{array} \right] , \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \left[\begin{array}{l}
 \max 4\sigma_2^1 - 17\sigma_2^2 \\
 -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\
 -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\
 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\
 \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\
 \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1
 \end{array} \right] , \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors ceci implique que la solution $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue dans le tableau 2 est réalisable pour le problème du deuxième étage.

Procédure d'optimisation Pour tester l'optimalité de x , le dual (3.2) est résolu pour ξ^1 et ξ^2 .

$$\left[\begin{array}{l}
 \max -5\pi_1^1 + 6\pi_1^2 \\
 -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\
 -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\
 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\
 \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2
 \end{array} \right] , \text{ le maximum est à } \pi_1^T = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 4\pi_2^1 - 17\pi_2^2 \\ -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \pi_2^T = \begin{pmatrix} \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] = 2$$

$$Q(x, \xi^2) = \pi_1^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = 4$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi^2) = 3$$

$\theta = -\infty < Q(x)$, nous introduisons la coupe d'optimalité de la forme (3.5) :

$\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$ ou $\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{4}x_6 - \theta + s_1 = -3$ et nous réoptimisons le programme précédent (voir tableau 3)

Tableau 3

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ	s_1	x_B
x_1	1	0	0	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	0	0	-1	0	0	3
x_3	0	0	1	-4	0	-6	0	0	6
x_5	0	0	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
θ	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{4}$	1	3	3
$\acute{C}_1^B + \acute{C}_3^B$	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-2

$\theta = Q(x) = 3$. alors, $x^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une solution du base optimale avec une pénalité $\theta^1 = 3$.

$$\begin{aligned} Eff_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}; \\ \widetilde{Eff}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ où } \tilde{Z}^1 = \tilde{Z}(x^1) = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1(x^1) & \tilde{Z}_2(x^1) & \tilde{Z}_3(x^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Procédure de séparation Nous génèrons deux sous-problèmes (P_1) et (P_2) en ajoutant au tableau 3 respectivement les ensembles de coupes suivants :

$$\{-3x_1 + x_2 \geq -2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq -3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$F = \{(P_1), (P_2)\}$$

• **Deuxième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_2) .

Procédure d'évaluation Il n'existe pas de solution réalisable, $F = \{(P_1)\}$

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_1) .

Procédure d'évaluation La résolution du problème (P_1) telle que nous ajoutons la coupe de Gomory $\frac{-1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_7 + x_8 = \frac{-3}{4}$ à la première contrainte, nous obtenons un autre minimum entier $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ qui est donné par le tableau 4.

Tableau 4

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ	s_1	x_B
x_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	4
x_3	0	0	1	2	0	0	0	-6	0	0	12
x_5	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{-5}{3}$	0	0	3
x_6	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	1
x_7	0	0	0	1	0	0	1	-4	0	0	3
θ	0	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{-7}{4}$	1	-1	$\frac{19}{4}$
$\hat{C}_1^B + \hat{C}_3^B$	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1

Procédure de faisabilité Pour tester la réalisabilité du second étage du problème (3.1), nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -6\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 5\sigma_2^1 - 18\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors ceci implique que la solution $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ obtenue dans le tableau 4 est réalisable pour le problème du second étage du problème (3.1).

Procédure d'optimisation Pour tester l'optimalité de x , le dual (3.2) est résolu pour ξ^1 et ξ^2 .

$$\left[\begin{array}{l} \max -6\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \\ -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \pi_1^T = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 5\pi_2^1 - 18\pi_2^2 \\ -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \pi_2^T = \begin{pmatrix} \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] = \frac{9}{2}$$

$$Q(x, \xi^2) = \pi_1^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = 5$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi^2) = \frac{19}{4}$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ est une solution entière et optimale avec $\theta^2 = \frac{19}{4}$.

$$Eff_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\widetilde{Eff}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \right\} \text{ où}$$

$$\tilde{Z}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1(x^2) & \tilde{Z}_2(x^2) & \tilde{Z}_3(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

Procédure de séparation Nous générons deux sous-problèmes (P_3) et (P_4) en ajoutant au tableau 3 respectivement les ensembles de coupes suivants :

$$\{-3x_1 + x_2 \geq 2 \text{ et } \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -1 \end{cases}$$

$$F = \{(P_3), (P_4)\}.$$

• **Troisième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_4).

Procédure d'évaluation La résolution du problème (P_4) donne le tableau 5 ci-dessous

Tableau 5

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	θ	s_1	x_B
x_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	3
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	10
x_5	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_6	0	0	0	0	0	1	0	2	0	1	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	2
x_9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	0	0	1	0	0	0	-3	0	-1	0	0	1
θ	0	0	0	0	0	0	0	2	0	$\frac{5}{4}$	1	-1	$\frac{7}{2}$
$\hat{C}_1^B + \hat{C}_3^B$	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1

le minimum est atteint en $x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Procédure de faisabilité Pour tester la réalisabilité du second étage du problème

(3.1), nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -4\sigma_1^1 + 4\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 5\sigma_2^1 - 14\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \left(\begin{array}{cc} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors ceci implique que la solution $x = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \right)$ obtenue dans le tableau 2 est réalisable pour le problème du deuxième étage.

Procédure d'optimisation Pour tester l'optimalité de x , le dual (3.2) est résolu pour ξ^1 et ξ^2 .

$$\left[\begin{array}{l} \max -5\pi_1^1 + 6\pi_1^2 \\ -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \pi_1^T = \left(\begin{array}{cc} \pi_1^1 & \pi_1^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 4\pi_2^1 - 17\pi_2^2 \\ -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \pi_2^T = \left(\begin{array}{cc} \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$Q(x, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] = 2$$

$$Q(x, \xi^2) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = 5$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi^2) = \frac{7}{2}$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^3 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \right)$ est une solution optimale avec $\theta^3 = \frac{7}{2}$.

$$Eff_3 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \right) \right\};$$

$$\widetilde{Eff}_3 = \left\{ \left(0 \quad 7 \quad 4 \right), \left(\frac{23}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{11}{4} \right), \left(\frac{7}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5}{2} \right) \right\} \text{ où}$$

$$\tilde{Z}^3 = \left(\tilde{Z}_1(x^3) \quad \tilde{Z}_2(x^3) \quad \tilde{Z}_3(x^3) \right) = \left(\frac{7}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5}{2} \right)$$

Procédure de séparation Nous génèrons deux sous-problèmes (P_5) et (P_6) en ajoutant au tableau 3 respectivement les ensembles de coupes suivants :

$$\{-3x_1 + x_2 \geq 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = \{(P_3), (P_5), (P_6)\}.$$

- **Quatrième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_6) .

Procédure d'évaluation Il n'existe pas de solution réalisable, $F = \{(P_3), (P_5)\}$

- **Cinquième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_5) .

Procédure d'évaluation Il n'existe pas de solution réalisable, $F = \{(P_3)\}$.

- **Sixième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_3) ; nous ajoutons la coupe de Gomory $\frac{-1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_9 + x_{10} = \frac{-3}{4}$ à la première contrainte du problème (P_3) , nous obtenons un autre minimum $x = \left(0 \quad 5 \right)$ qui est donné par le tableau 6 ci-dessous

Tableau 6

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	θ	s_1	x_B
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	5
x_3	0	0	1	2	0	0	0	0	0	-6	0	0	18
x_5	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{14}{3}$
x_6	0	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	2
x_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-4	0	0	7
x_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	1
x_9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-4	0	0	3
θ	0	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	0	0	0	$-\frac{7}{4}$	1	-1	$\frac{13}{2}$
$\dot{C}_1^B + \dot{C}_3^B$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0

Procédure de faisabilité Pour tester la réalisabilité du second étage du problème (3.1), nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max -7\sigma_1^1 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max 6\sigma_2^1 - 19\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors ceci implique que la solution $x = \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$ obtenue dans le tableau 6 est réalisable pour le problème du second étage du problème (3.1).

Procédure d'optimisation Pour tester l'optimalité de x , le dual (3.2) est résolu pour ξ^1 et ξ^2 .

$$\begin{bmatrix} \max -7\pi_1^1 \\ -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \pi_1^T = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max 6\pi_2^1 - 19\pi_2^2 \\ -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \pi_2^T = \begin{pmatrix} \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] = 7$$

$$Q(x, \xi^2) = \pi_1^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = 6$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi^2) = \frac{13}{2}$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une solution optimale avec $\theta^4 = \frac{13}{2}$.

$$Eff_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\widetilde{Eff}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ où}$$

$$\tilde{Z}^4 = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1(x^4) & \tilde{Z}_2(x^4) & \tilde{Z}_3(x^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Procédure de séparation Nous génèrons deux sous-problèmes (P_7) et (P_8) en ajoutant au tableau 3 respectivement les ensembles de coupes suivants :

$$\{-3x_1 + x_2 \geq 6 \text{ et } \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \end{cases}$$

$$F = \{(P_7), (P_8)\}.$$

• **Septième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_8) .

Procédure d'évaluation La résolution du problème (P_8) donne le tableau 7 ci-dessous

Tableau 7

B	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{10}	x_{11}	x_{12}	θ	s_1	x_B
x_1	1	0	0	0	...	1	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	...	2	0	1	0	0	4
x_3	0	0	1	0	...	0	0	2	0	0	16
x_5	0	0	0	0	...	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	3
x_6	0	0	0	0	...	2	0	1	0	0	1
x_7	0	0	0	0	...	-1	0	1	0	0	6
x_8	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	0	1
x_9	0	0	0	0	...	-1	0	1	0	0	2
x_{11}	0	0	0	0	...	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	0	0	1	...	-3	0	-1	0	0	1
θ	0	0	0	0	...	2	0	$\frac{5}{4}$	1	-1	$\frac{21}{4}$
$\acute{C}_1^B + \acute{C}_3^B$	0	0	0	0	...	1	0	0	0	0	0

le minimum est atteint en $x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Procédure de faisabilité Pour tester la réalisabilité du second étage du problème (3.1), nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max -5\sigma_1^1 + \sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max 6\sigma_2^1 - 15\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, alors ceci implique que la solution $x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ obtenue dans le tableau 7 est réalisable pour le problème du second étage du problème (3.1).

Procédure d'optimisation Pour tester l'optimalité de x , le dual (3.2) est résolu pour ξ^1 et ξ^2 .

$$\begin{bmatrix} \max -5\pi_1^1 + \pi_1^2 \\ -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1 \\ -\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0 \\ 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6 \\ \pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \pi_1^T = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \max 6\pi_2^1 - 15\pi_2^2 \\ -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5 \\ -\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3 \\ 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2 \\ \pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1 \end{array} \right], \text{ le maximum est à } \pi_2^T = \begin{pmatrix} \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x] = \frac{9}{2}$$

$$Q(x, \xi^2) = \pi_1^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = 6$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi^2) = \frac{21}{4}$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^5 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une solution optimale avec $\theta^5 = \frac{21}{4}$.

$$Eff_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\widetilde{Eff}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{37}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \right\} \text{ où}$$

$$\tilde{Z}^5 = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1(x^5) & \tilde{Z}_2(x^5) & \tilde{Z}_3(x^5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Procédure de séparation Nous génèrons deux sous-problèmes (P_9) et (P_{10}) en ajoutant au tableau 3 respectivement les ensembles de coupes suivants :

$$\{-3x_1 + x_2 \geq 5 \text{ et } \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq -3 \end{cases}$$

$$F = \{(P_7), (P_9), (P_{10})\}.$$

• **Huitième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_{10}).

Procédure d'évaluation La résolution du problème (P_{10}) donne le tableau 8 ci-dessous

Tableau 8

B	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	θ	s_1	x_B
x_1	1	0	0	0	...	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	...	2	0	0	0	1	0	0	3
x_3	0	0	1	0	...	0	0	0	0	2	0	0	14
x_5	0	0	0	0	...	$\frac{10}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_6	0	0	0	0	...	2	0	0	0	1	0	0	0
x_7	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	1	0	0	5
x_8	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	0	0	0	1
x_9	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	1	0	0	1
x_{11}	0	0	0	0	...	1	1	0	0	-1	0	0	2
x_4	0	0	0	1	...	-3	0	0	0	-1	0	0	2
x_{13}	0	0	0	0	...	1	0	0	1	-1	0	0	1
x_{12}	0	0	0	0	...	0	0	1	0	-1	0	0	1
θ	0	0	0	0	...	2	0	0	0	$\frac{5}{4}$	1	-1	4
$\hat{C}_1^B + \hat{C}_3^B$	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	0	0	0	0

le minimum est atteint en $x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Procédure de faisabilité Pour tester la réalisabilité du second étage du problème (3.1), nous résolvons le programme (3.3) avec

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max -3\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \\ -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0 \\ -\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0 \\ 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0 \\ \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \sigma_1^T = \left(\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max 6\sigma_2^1 - 11\sigma_2^2 \\ -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0 \\ -\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0 \\ 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0 \\ \sigma_2^1 + \sigma_2^2 \leq 1 \end{bmatrix}, \text{ le maximum est à } \sigma_2^T = \left(\begin{pmatrix} \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] = \frac{8}{7}$$

$\sigma_1^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x] > 0$, ceci signifie que le problème du second étage (3.1) n'est pas réalisable pour ξ^2 . Alors nous créons une coupe de réalisabilité de la forme (3.4) :

$$\frac{11}{7}x_1 - \frac{8}{7}x_2 \geq \frac{32}{7} \quad \text{et réoptimisons le programme précédent}$$

Il n'existe pas de solution réalisable, $F = \{(P_7), (P_9)\}$.

- **Neuvième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_9).

Procédure d'évaluation Il n'existe pas de solution réalisable, $F = \{(P_7)\}$.

- **Dixième itération**

Procédure de choix Nous sélectionnons le problème (P_7).

Procédure d'évaluation Il n'existe pas de solution réalisable, $F = \emptyset$

• **Onzième itération**

Procédure de choix $F = \emptyset$, afficher les ensembles Eff et \widetilde{Eff} , terminer.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
x^i	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$
θ^i	3	$\frac{19}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{21}{4}$
\tilde{Z}^i	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{23}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{23}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{37}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

4.4 Conclusion générale

Dans la classe des problèmes déterministes, toute l'information est complètement définie. Par contre dans ce travail, l'information comporte des éléments indéterminés, ou bien les problèmes dont certains paramètres sont aléatoires mais définis par des caractéristiques probabilistes connues, ce qui nous a conduit à l'étude du problème d'optimisation linéaire stochastique à objectifs multiples. Pour ce faire, des données stochastiques sont traitées par un recours entier fixé au préalable pour obtenir un programme déterministe équivalent à deux étages.

La méthode proposée peut identifier l'ensemble de toutes les solutions efficaces entières de ce problème équivalent (MOSILP), si elles existent. Cet algorithme est approprié seulement pour des problèmes avec un nombre raisonnable (petit) de scénarios, mais il pourrait être appliqué pour un grand nombre d'objectifs; puisque une fonction scalarisante est construite pour définir le problème paramétrique équivalent donnant à chaque itération une solution efficace tout en éliminant les solutions dominées par celle-ci grâce à l'utilisation des coupes de réalisabilité. La méthode d'optimisation du problème stochastique linéaire en nombres entiers à objectifs multiples présentée dans cette thèse peut constituer un résultat important dans la littérature compte tenu des propriétés spécifiques du problème (MOSILP), où l'essence du problème traite l'aspect aléatoire d'une certaine manière efficace.

Il reste beaucoup de questions posées dans le domaine stochastique, en particulier la programmation multi-objectif.

Perspectives

- Résoudre le problème (MOSILP), en utilisant d'autres techniques de la (SP) et de la (MOILP) et faire une comparaison entre ces méthodes.
- Essayer de voir comment appliquer cette méthode dans le cas fractionnaire.
- Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la transformation suivante : (MOSILP—MOILP—ILP) ;

Est-ce que on trouve les mêmes résultats pour la transformation :

(MOISPL—SILP—ILP) ?

- Essayer de résoudre le problème de (MOISLP) dans les cas suivantes:
 - Le recours est continu
 - Le problème de contrainte de probabilité

Bibliographie

- [1] M. ABBAS, F. BELLAHCENE ‘Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming’, European journal of Operational Research 168 (2006) 967-984.
- [2] M. ABBAS, M.L. CHERGUI, M. MOULAI, A. MOUMENE. ‘An exact method to solve multiple objective integer linear programming problem’, conférence EURO/INFORMS, Istanbul, Turkey 2003, July 06-10.
- [3] M. ABBAS et M. MOULAI, 1999. ‘Solving Multiple Objective Integer Linear Programming’, *Ricerca Operativa* vol.29 n.89.
- [4] F. BEN ABDELAZIZ, P. LANG, R. NADEAU, 1997. ‘Distributional unanimity-multiobjective stochastic linear programming’. In: Cl imaco, J. (Ed.), *Multicriteria Analysis: Proceedings of the XIth International Conference on MCDM*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 225–236.
- [5] F. BEN ABDELAZIZ, P. LANG, R. NADEAU, 1999. ‘Dominance and efficiency in multicriteria decision under uncertainty’. *Theory and Decision* 47, 191–211.
- [6] C. CABALLERO, E. CERDA, M.M. Muñoz, L. Rey, 2000. ‘Relations among several efficiency concepts in stochastic multiple objective programming’. In: *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making* Haimes, Y.Y., Steuer, R. (Eds.), *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 57–68.

- [7] R. CABALLERO, E. CERDA, M.M. MUÑOZ, L. REY, I.M. STANCU-MINASIAN, 2001. 'Efficient solution concepts and their relations in stochastic multiobjective programming'. *Journal of Optimization, Theory and Applications* 110 (3.1), 53–74.
- [8] CAROE and TIND, 1998. 'L-Shaped Decomposition of Two-Stage Stochastic Programs with Integer Recourse', *European Journal of Operations Research*, 101, 306-316.
- [9] V. CHVATAL, 1999. 'Linear programming', MC Gill University. p115 et p28-29.
- [10] G.B. DANTZIG, 1963. 'Linear programming and extensions'. Princeton University Press.
- [11] J. FARKAS, 1902. 'Theorie der einfachen Ungleichungen' *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 : 1-27.
- [12] R.E. GOMORY, 1958. 'Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs', *Bulletin of the AMS* 64, 275-278.
- [13] R.E. GOMORY, 1960. 'An algorithm for the mixed-integer problem'. Report RM-2597, Rand Corporation.
- [14] HIGLE and SEN, 1991. 'Stochastic Decomposition' : An Algorithm for Two-Stage Linear Programs with Recourse, *Mathematics of Operations Research*, 16(3), 650-669.
- [15] P. KALL, S. W. WALLACE, 1994. 'Stochastic Programming'. John Wiley and Sons, Chichester.
- [16] LAPORTE et LOUVEAUX, 1993. 'The Integer L-Shaped Method for Stochastic Integer Programs with Complete Recourse', *Operations Research Letters*, 13, 133-142.
- [17] A.MOUMENE, 2002. 'Contribution algorithmique pour la resolution d'un programme lineaire multi-objectifs en nombres entiers': Thèse de Magister en Mathématiques, Spécialité : Recherche Opérationnelle (Mathématiques de Gestion).

- [18] G. L. NEMHAUSER, L. A. WOLSEY, 1988. 'Integer and combinatorial optimization'. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimisation.
- [19] A. PREKOPA, 1995. 'Stochastic Programming'. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [20] M. SAKAROVITCH, 1983. 'Techniques mathématique de la recherche opérationnelle, IV -Optimisation combinatoire', ENSIMAG, Université Scientifique et Médicale, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [21] SHERALI and FRATICELLI, 2002. 'A Modification of Benders' Decomposition Algorithm for Discrete Subproblems': An Approach for Stochastic Programs with Integer Recourse, *Journal of Global Optimization*, 22(1-4), 319-342.
- [22] R. SLOWINSKI, J. TEGHEM, 'Fuzzy versus Stochastic Approaches to multicriteria Linear programming under uncertainty', *Naval Research Logistics*, 35(1988), 673-695.
- [23] I. M. STANCU-MINASIAN, 'Recent results in stochastic programming with multiple objective function', in M. Grauer, A. Lewandowski and A. P. Wierzbicki (eds.), *Multi-Objective and Stochastic optimisation*, IIASA Collaborative Proceedings Series CP-S12, 1982.
- [24] I.M. STANCU-MINASIAN, 1984. 'Stochastic Programming with Multiple Objective Functions'. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. *Optimization*, Cluj-Napoca, pp. 321-328.
- [25] R.E. STEUER, 1986. 'Multiple Criteria Optimisation : Theory, Computation and Application', Wiley.
- [26] J. TEGHEM, 'Multiobjective and stochastic Linear programming', *Foundations of Control Engineering*, 8, 3-4(1983), 225-232.

- [27] J. TEGHEM, 1990. Stochastic versus Fuzzy Approches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty, 'An Interactive Method for Multiobjective Stochastic Linear Programming' Dordrech : Kluwer Academic Publishers, 103-115.