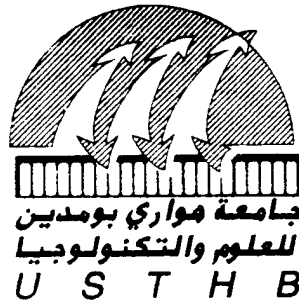


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE GENIE MECANIQUE ET DE GENIE DES PROCEDES



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de magister en
Génie mécanique
Option : processus de transport dans les milieux poreux

Présenté par :
M. BENAOUA Salah

Thème

*Etude des champs dynamique et thermique dans un
Canal rempli avec une matrice poreuse anisotrope*

Soutenu publiquement, le : 21/11/2013 Devant le jury composé de:

M. A. AZZI	Prof.	à l'USTHB / FGM	Président
M. R. KIBBOUA	Prof.	à l'USTHB / FGM	Directeur du mémoire
Mme. H. KAHALERRAS	Prof.	à l'USTHB / FGM	Examinatrice
M. R. NEBALLI	M.C.A	à l'USTHB / FGM	Examineur

Remerciements

Je remercie Dieu Le Tout Puissant de Sa générosité, Sa bonté miséricorde qui m'ont permis et aidé à achever ce travail.

Je présente ici ma reconnaissance et ma gratitude à ceux qui se sont donnés à fond pour ma réussite. D'une manière plus importante, je veux remercier les membres de ma famille qui ont tous influencé de façon positive ma vie. Ma mère, et mon père, que Dieu me les garde et les bénisse, eux qui ont inlassablement travaillé pour nous donner, moi et mes frères et mes sœurs, tout ce que beaucoup de personnes n'ont pu avoir, ainsi qu'à tous les membres de ma famille des deux côtés paternel et maternelle. Tous se sont sacrifiés pour nous durant toute notre vie ils nous ont enseigné, encouragé, et soutenu dans chaque étape de notre parcours. Je voudrais également remercier tous mes amis qui ont été là pour me soutenir non seulement sur mon travail, mais soutenu et surtout lorsque j'avais besoin, et je cite M. Haroun. L, et M. Mohamed. O et Adel. T.

Je tiens à exprimer ma respectueuse reconnaissance à mon enseignant le professeur Rachid KIBBOUA, de l'Université de Houari BOUMEDIENE d'Alger, d'avoir dirigé cette recherche par ses suggestions, ses conseils, ses critiques, son soutien, sa confiance qu'il a placée en moi, sa disponibilité pour m'avoir fait profiter de son expérience, sa patience, sa contribution majeure à l'orientation de mes recherches, son aide, ses idées originales qui ont enrichi cette thèse, j'espère, récompensée.

Ces quelques lignes ne peuvent témoigner de toute ma gratitude et de mon amitié.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur A. AZZI pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Mes remerciements vont également aux autres membres du jury, Mademoiselle H. KAHALERRAS professeur à l'Université de Houari BOUMEDIENE d'Alger, et Monsieur R. NEBBALI maître de conférences à l'Université Houari BOUMEDIENE d'Alger d'avoir bien voulu accepter de participer à mon jury.

Mes profonds remerciements à tous mes enseignants en post graduation, mes remerciements vont également au groupe de travail du laboratoire de transport polyphasique dans les milieux poreux, et je remercie les camarades que j'ai eu l'honneur de connaître pendant mon cursus surtout ceux de ma promotion.

Je souhaiterais remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Sommaire
Remerciment**Sommaire****Nomenclature****Introduction générale.....(01)****Chapitre -I- Généralités sur les milieux poreux.....(03)**

Introduction.....(04)

I .1 Définition du milieu poreux(04)

I .2 paramètre du système(05)

I .2.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R).....(05)

I .2.2 Équilibre local dans les milieux poreux.....(07)

I .2.2.1 Équilibre thermique.....(07)

I .2.2.2 Équilibre chimique.....(07)

I .2.2.3 Équilibre mécanique.....(08)

I .2.3 Propriétés structurales et thermo-physique d'un milieu poreux.....(08)

I .2.3.1 Porosité.....(08)

I .2.3.2 Surface spécifique.....(09)

I .2.3.3 Tortuosité.....(10)

I .2.3.4 la perméabilité.....(11)

I .2.3.5 La viscosité dynamique effective.....(13)

I .2.3.6 Conductivité thermique effective.....(14)

I .3 Les nombres adimensionnels(16)

I .4 Modèle d'écoulement dans les milieux poreux(17)

I.4.1 Loi de Darcy.....(17)

I.4.2 Loi de Darcy- Forchheimer (1901)..... (19)

I.4.3 Modèle de Brinkman.....(19)

I.4.4 Modèle général ou modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer.....(20)

I .5 Equation de conservation de l'énergie.....(21)

I .6 Conditions aux limites à l'interface fluide-solide.....(22)

Conclusion.....(23)

Chapitre - II - Recherche bibliographique.....(24)

Introduction.....(25)

II .1 Etude en milieu poreux anisotrope.....(25)

II.2 Etude d'une géométrie partiellement poreux avec perméabilité isotrope.....	(33)
Conclusion.....	(34)
Chapitre -III- Formulation mathématique.....	(35)
Introduction.....	(36)
III.1 domaine physique.....	(36)
III.2. Equations gouvernantes.....	(38)
III.2.1.hypothèses simplificatrices.....	(38)
III.2.2. Equation de continuité.....	(38)
III.2.2.a Dans la région fluide.....	(38)
III.2.2.b Dans la région poreuse.....	(38)
III.2.3. Equation de conservation de quantité de mouvement.....	(39)
III.2.3.a Dans la région fluide.....	(39)
III.2.3.b Dans la région poreuse.....	(39)
III.2.4. Equation d'énergie.....	(41)
III.2.4.a Région fluide.....	(41)
III.2.4.b Région poreuse.....	(42)
III.3. Condition aux limites hydrodynamiques et thermiques	(42)
III.4. Analyse adimensionnelle	(43)
III.4.1.grandeurs adimensionnelles.....	(43)
III.4.2. Equations adimensionnelles.....	(43)
III.4.2.1. Equation de continuité.....	(43)
III.4.2.2 Equations de conservation de quantité de mouvement.....	(44)
III.4.2.2.a Région fluide.....	(44)
III.4.2.2.b Région poreuse.....	(44)
III.4.2.3.Equation d'énergie.....	(44)
III.4.2.3.a Région fluide.....	(44)
III.4.2.3.b Région poreuse.....	(44)
III.4.3.conditions aux limites adimensionnelles.....	(45)
III.5. Vitesse moyenne	(46)
III.6. Température moyenne	(46)
III.7. Le coefficient de frottement.....	(46)
III.8. Le nombre de Nusselt	(46)
Conclusion.....	(47)
Chapitre -IV- Modélisation Numérique.....	(48)

Introduction.....	(49)
IV.1 Méthode de Résolution.....	(49)
IV.2 Discrétisation du domaine physique.....	(50)
IV.2.1 Maillage.....	(50)
IV.2.2 Maillage décalé.....	(51)
IV.3 La discrétisation des équations gouvernantes.....	(52)
IV.3.1 Discrétisation des équations de quantité de mouvement avec un maillage décalé.....	(57)
IV.3.1.1 Correction de la vitesse.....	(59)
IV.3.2 Discrétisation d'équation d'énergie.....	(61)
IV.4 Schémas d'interpolation.....	(62)
IV.4.1 Schéma aux différences centrées.....	(62)
IV.4.2 Schéma apwind.....	(62)
IV.4.3 Schéma hybride.....	(62)
IV.4.4 Schéma exponentiel.....	(63)
IV.4.5 Schéma de la loi de puissance (power-law)	(63)
IV.5 Technique de relaxation.....	(63)
IV.6 L'algorithme SIMPLE.....	(64)
IV.7 Méthode de résolution.....	(68)
IV.8 Critère de convergence.....	(69)
Conclusion.....	(69)
Chapitre - V - Résultats et discussions.....	(70)
Introduction.....	(71)
V.1 Sensibilité au maillage et validation du code de calcul.....	(71)
V.1.1 La comparaison avec l'écoulement de poiseuille.....	(72)
V.1.2 Validation avec l'approche de Degan et al.....	(74)
V.1.3 Validation avec la solution analytique (Cf. annexe) pour un canal partiellement poreux.....	(75)
V.2 Résultats obtenus.....	(76)
V.2.1 Cas d'écoulement dans le canal totalement poreux.....	(77)
V.2.1.1 Effet du rapport de perméabilité anisotrope.....	(77)
V.2.1.2 effet de l'angle d'anisotropie.....	(82)
V.2.2. Cas du canal partiellement poreux (Configuration n°1 : couche poreuse du Côté des parois).....	(88)

V .2.2.1 Effet du rapport de perméabilité anisotrope.....	(88)
V .2.2.2 Effet de l'angle d'anisotropie.....	(93)
V .2.3. Cas du canal partiellement poreux (Configuration n°2 : couche poreuse au centre du canal).....	(101)
V .2.3.1. Effet du rapport des perméabilités.....	(101)
Conclusion.....	(106)
Conclusion générale.....	(108)
Annexes.....	(110)
Annexe A solution analytique.....	(111)
A.1. Formulation et résolution mathématiques.....	(111)
Annexe B changement de repère	(118)
Références bibliographiques	
Résumé	
Abstract	
Résumé en arabe	

Nomenclature

$A P $	Fonction d'interpolation qui dépend du schéma utilisé
C_p	Capacité calorifique ($J.Kg^{-1}.K^{-1}$)
D_i	Diffusion ($i=e,w,n,s$)
Da	Nombre de Darcy ($=K_l/H^2$)
e_p	Épaisseur de la couche poreuse
E	Épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse
f	Facteur de frottement
F	Coefficient de Forchheimer
F_i	Débit massique à travers les faces du volume de contrôle ($i=e,w,n,s$)
$(fRe)_L$	coefficient de frottement local dans la région établie
h	Coefficient d'échange convectif ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
H	Hauteur de la moitié du canal
J	Rapport de viscosité cinématique ($=\nu_{eff}/\nu_f$)
k	conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
K_1, K_2	perméabilités le long des deux axes principaux de la matrice poreuse
$[K]$	Tenseur de la perméabilité
K^*	Rapport de perméabilité anisotrope ($=K_1/K_2$)
l	Longueur du canal
L	Longueur adimensionnelle du canal
Nu	Nombre de Nusselt ($=2.h.H/k_f$)
P	Pression ($N.m^{-2}$)
Pr	Nombre de Prandtl ($=\nu_f/\alpha_f = (\mu C_p)_f/k_f$)
R_c	Rapport des conductivités thermique ($=k_{eff}/k_f$)
R_μ	Rapport de viscosité dynamique ($=\mu_{eff}/\mu_f$)
Re	Nombre de Reynolds ($=\rho_f.u.H/\mu_f$)
S	Terme source
T	Température ($^{\circ}C$)
u	Composante de la vitesse dans la direction ox ($m.s^{-1}$)
\bar{u}	Vitesse adimensionnelle
v	Composantes de la vitesse dans la direction y ($m.s^{-1}$)
\vec{V}	Vecteur de vitesse
$ \vec{V} $	Module de la vitesse $\sqrt{u^2 + v^2}$
x	Coordonné axiale (m)
y	Coordonné transversale (m)

Symboles grecques

ν	Viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)
μ	Viscosité dynamique ($Kg.m^{-1}.s^{-1}$)
ρ	Masse volumique ($Kg.m^{-3}$)
ϕ	Variable indépendante (température T ou les deux composantes de la vitesse u, v)
ε	Porosité du milieu poreux
(ρC_p)	Capacité calorifique
Δx	Dimension du volume de contrôle dans la direction horizontale (m)
Δy	Dimension du volume de contrôle dans la direction verticale (m)
α_ϕ	Facteur de relaxation
θ	Angle d'anisotropie ($^\circ$)
α_f	Diffusivité thermique ($k_f/(\rho C)_f$)
Γ	Coefficient de diffusion

Indices

w	Paroi
m	Moyen
e	Entré
f	Fluide
p	Poreux
eff	Effective
r	quantité dans le repère (x'_r, y'_r)
x	Coordonné horizontale x
y	Coordonné verticale y
P	nœud du maillage considéré
E	nœud du côté est du nœud P
N	nœud du côté nord du nœud P
S	nœud du côté sud du nœud P
W	nœud du côté ouest du nœud P
e	face est du volume de contrôle du nœud P
n	face nord du volume de contrôle du nœud P
s	face sud du volume de contrôle du nœud P
w	face ouest du volume de contrôle du nœud P

Exposant

*	Itération précédente
'	Quantités dimensionnels

Introduction générale

Ces dernières années des efforts considérables de recherches ont été consacrés à l'étude du transfert de chaleur par convection forcée ou naturelle en cavités remplies par un milieu poreux saturé par un fluide, dû à des applications répandues dans les technologies contemporaines. Parmi ces applications on cite la conception des échangeurs de chaleur compacts, des collecteurs d'énergie solaire, des convertisseurs d'énergie géothermique, séchage, recherche sur les matières fibreuses employées dans l'isolation thermique des bâtiments, refroidissement électronique, les convertisseurs catalytiques (utilisés pour réduire la toxicité des émissions échappées par les moteurs d'automobiles), et les turbines à gaz (utilisées pour refroidir les aubes de turbine à gaz). D'autres exemples incluent dans les écoulements géophysiques, la modélisation des réservoirs de pétrole, diffusion souterraine des polluants, etc.

Les techniques qui ont été proposées pour l'amélioration du transfert de chaleur dans les systèmes thermiques peuvent être classées soit en des méthodes passives ne nécessitant pas d'énergie externe telles que l'emploi d'ailettes et de chicanes, ou l'ajout d'additifs pour fluides, ou l'ajout d'un milieu poreux comme l'étudie le présent projet, ou en des méthodes actives telles que la vibration des surfaces, l'application de champ électrique, magnétique...etc.

Une partie substantielle d'investigations théoriques et expérimentales sur le transfert de chaleur par convection dans les milieux poreux ont traité le cas des matériaux isotropes. Cependant, dans beaucoup de situations pratiques les matériaux poreux sont anisotropes dans leur mécanique aussi bien que dans les propriétés thermiques. L'anisotropie est généralement une conséquence d'orientation préférentielle ou de géométrie asymétrique des grains ou des fibres. Cependant, l'amélioration du transfert de chaleur est toujours accompagnée d'une augmentation de la chute de pression, et il est alors nécessaire de trouver un compromis entre ces deux paramètres en faisant un choix judicieux des propriétés thermo-physiques de ces milieux et de l'épaisseur de la couche poreuse.

La présente étude est une analyse hydrodynamique et thermique d'un écoulement laminaire, incompressible et stationnaire à l'intérieur d'un canal partiellement ou totalement rempli avec un milieu poreux anisotrope caractérisé par un rapport de perméabilité K^* , et un angle d'anisotropie θ , et une porosité ε . Les effets du nombre de Darcy et du rapport de perméabilités et de l'angle d'anisotropie et de l'épaisseur de la couche poreuse sur le champ des vitesses et des températures, le nombre de Nusselt, et sur la chute de pression ont été étudiés.

L'objectif principal de cette étude est d'étudier l'effet de l'anisotropie hydrodynamique sur l'écoulement et le taux de transfert de chaleur dans un canal soumis à un flux de chaleur constant sur les parois.

Ce travail est présenté sous forme de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, seront présentées certaines notions fondamentales relatives aux milieux poreux.

Le chapitre 2 consistera en un travail de recherche bibliographique portant sur les travaux théoriques et numériques antérieurs sur la convection dans les milieux poreux isotrope et anisotrope.

Le chapitre 3 présentera le modèle mathématique pour la convection forcée du fluide dans un milieu poreux anisotrope confiné par deux plaques planes horizontales. Des formes dimensionnelles et adimensionnelles des équations gouvernantes et des conditions aux frontières associées sont présentées. La définition du tenseur de perméabilité K^* est présenté en ce chapitre.

Le chapitre 4 contiendra l'approche numérique employée pour résoudre les équations gouvernantes données en chapitre 3.

En chapitre 5, des conclusions et des recommandations seront décrites. Enfin, nous terminerons par une conclusion générale retraçant les principaux résultats.

En annexes, nous donnons une solution analytique des équations de transfert dans le cas d'un écoulement forcé dans un canal partiellement remplie par un milieu poreux anisotrope, le modèle utilisé est le modèle de Darcy-Brinkman.

Chapitre I

Généralités sur les milieux poreux

Chapitre - I -

Généralités sur les milieux poreux

Introduction

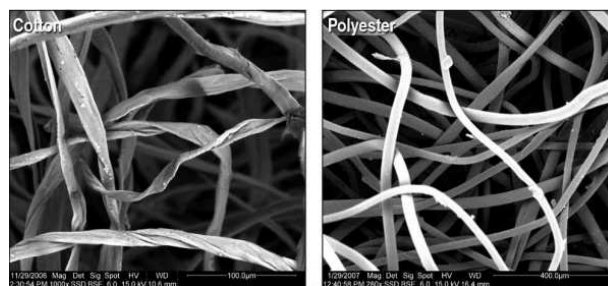
Les milieux poreux se rencontrent quotidiennement dans la vie courante. Les matériaux de construction, les textiles, les isolants, les sols, les revêtements d'échangeurs... etc, en constituent autant d'exemples. Leurs structures, formes, tailles, natures et propriétés sont d'une grande variété. Par exemple, leurs grandeurs spatiales peuvent être de quelques millimètres cubes pour certaines membranes filtrantes jusqu'à plusieurs dizaines de kilomètres cubes pour les nappes d'eau souterraines et les gisements d'hydrocarbures.

Avant de d'entamer notre travail, nous rappellerons quelques définitions des différentes propriétés structurales et thermo-physiques relatives aux milieux poreux ainsi que les différents modèles utilisés pour décrire l'écoulement au sein de ces milieux.

I .1 Définition du milieu poreux [1] [2]

Le milieu poreux est composé d'une matrice solide à l'intérieur de laquelle se trouvent des pores reliés entre eux ou éventuellement isolés. On peut distinguer :

- Les matrices solides non consolidées où la phase solide est formée de grains (par exemple le sable, le gravier, billes de verre, d'acier...), ou formée de fibres, pratique pour l'expérimentation, (figure I .1).
- Les matrices solides consolidées dans lesquelles la phase solide est formée de grains cimentés (par exemple les roches calcaires, le grès, l'argile, le bois, tissu biologique...), (figure I .2).



(a)

(b)

Figure I .1 : milieu poreux non consolidé

Images de microscope à balayage électronique des échantillons de fibres de coton (a) et de polyester (b). [3]

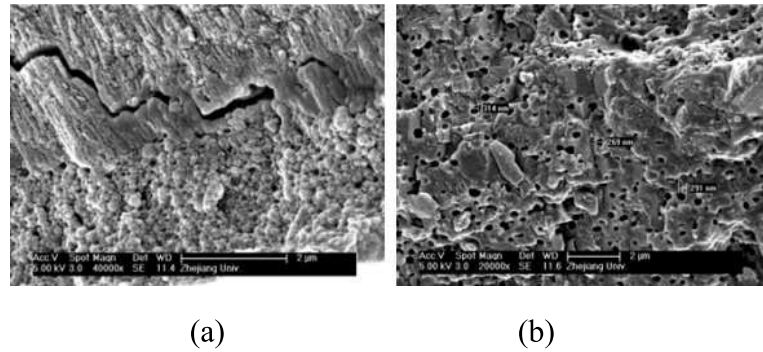


Figure I .2 : milieu poreux consolidé

Microstructure de la coquille d'oeuf de la poule (a) Feuille de cuticule ;(b) Feuille cristalline. [4]

Les pores reliés entre eux, permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides. On peut alors classer les problèmes rencontrés, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores :

- 1) Le milieu est saturé d'un seul fluide ou encore un ensemble de fluides miscibles (par exemple un sol imbibé d'eau).
- 2) Le milieu est composé de plusieurs fluides non-miscibles. Un ensemble de ménisques sépare alors les différentes phases (par exemple un mélange eau-huile-gaz dans les roches pétrolières, ou un sol partiellement saturé d'eau, la deuxième phase étant l'air)
- 3) Le milieu est le siège d'un transport de fluide et de particules solides. Il agit en général comme un filtre, mais ses propriétés hydrodynamiques se modifient au cours du temps (dépollution des eaux contenant de grosses particules par percolation à travers le sol).

Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons au premier cas.

I .2 paramètre du système

I .2.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R) [2]

A l'échelle microscopique la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse, la température varie donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs, elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux L . Cette moyenne s'effectue donc sur de nombreux pores par l'intermédiaire d'un Volume Elémentaire Représentatif VER (voir figure I .3) du milieu. De plus, l'échelle l du $V.E.R$ doit donc vérifier :

$$d \ll l \ll L$$

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en les moyennant sur le *V.E.R.* Cela permet de représenter un point dans une nouvelle caractérisation d'un milieu poreux.

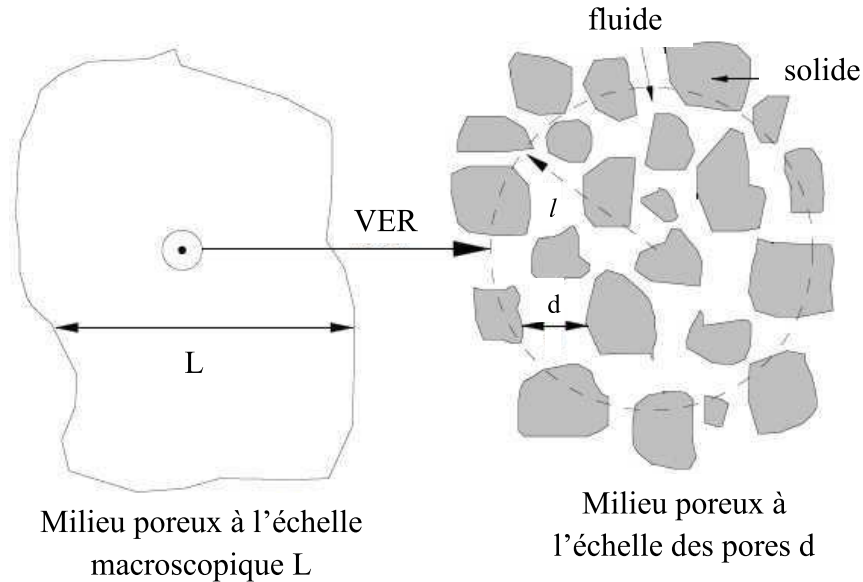


Figure I .3 la taille intermédiaire l du volume Élémentaire Représentatif *V.E.R.* entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d .

Le choix approprié de la taille *VER* est très crucial, car les quantités moyennes doivent être indépendantes de la taille du *VER*. La (figure I .4) prouve que le *VER* choisi devrait non seulement être plus petit que le domaine d'écoulement, mais il devrait également être plus grand qu'un pore simple dans le milieu poreux. Un *VER* très petit mène des oscillations dues à l'existence des inhomogénéités à la micro-échelle. D'autre part, un très grand *VER* mène des fluctuations provoquées par des hétérogénéités macroscopiques du milieu [5].

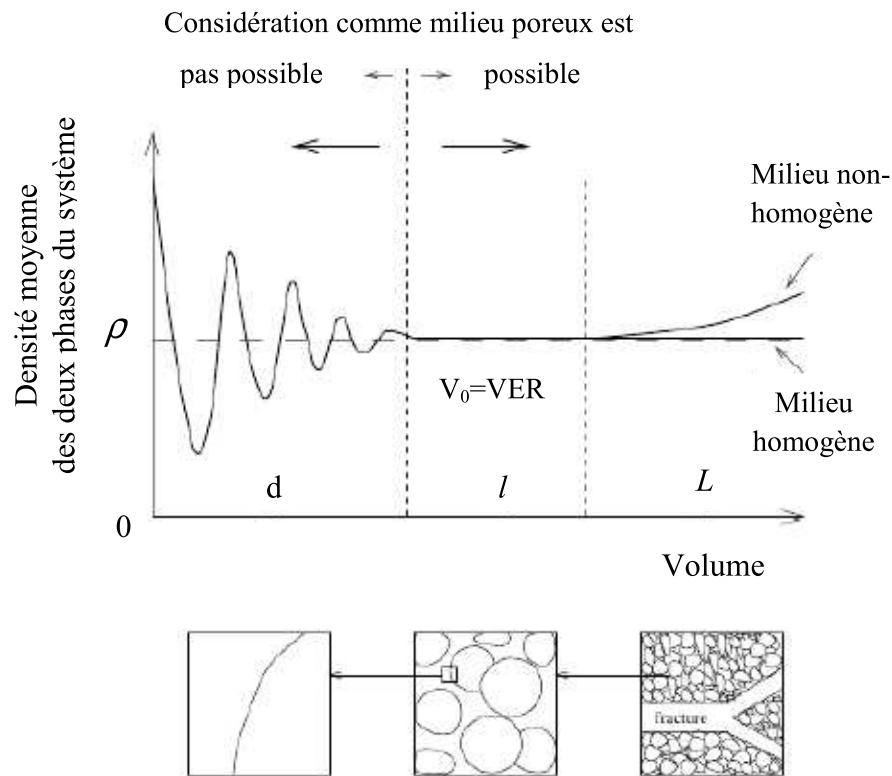


Figure I .4 : Définition du VER [5]

I .2.2 Équilibre local dans les milieux poreux [2]

L'équilibre thermodynamique local dans les milieux poreux consiste principalement d'un équilibre thermique, chimique et mécanique comme suit:

I .2.2.1 Équilibre thermique :

Un système serait en équilibre thermique local, si à n'importe quel point donné du système toutes les phases existantes sont à la même température

$$T = T_s = T_f \quad [K] \quad (I .1)$$

Ici, T_s et T_f sont les températures de la matrice solide et de la phase fluide respectivement.

I .2.2.2 Équilibre chimique :

Un système serait dans l'équilibre chimique, si le potentiel d'échange des composants chimiques à travers différentes phases ou dans une phase est zéro. En d'autres termes, il n'y a pas d'échange des composants dans une phase ou entre différentes phases.

I .2.2.3 Équilibre mécanique :

Quand les phases liquides multiples sont présentes dans le système, l'équilibre mécanique se rapporte à l'existence de pression égale de chaque côté de la frontière de phase (par exemple, une surface de lac).

Cependant, dans le cadre de l'écoulement dans les milieux poreux, on a un saut de pression aux frontières de la phase liquide dues à la capillarité, c'est à dire. La pression capillaire.

I .2.3 Propriétés structurales et thermo-physique d'un milieu poreux

Les milieux poreux sont caractérisés par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques.

I .2.3.1 Porosité [2]

La porosité ε est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores, sur le volume total soit :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} = \frac{V_{\text{pores}}}{V} \quad (\text{I .2})$$

La proportion occupée par la matrice solide est donc donnée par $1-\varepsilon$, en fait ε est plus exactement appelé *porosité totale*. En effet, cette définition prend en compte les pores fermés. On introduit donc une *porosité accessible*, définie comme le rapport du volume des pores connectés sur le volume total. Cela n'est possible que si on connaît suffisamment la structure du milieu poreux, elle est peu utilisée en pratique. Cette distinction n'aura pas lieu dans l'étude qui suit, les milieux expérimentaux se font par empilement (matrice solide non-consolidée). Pour les milieux poreux naturels ε n'excède pas 0.66 (pour l'ardoise en poudre). Néanmoins cela peut être plus élevé pour des milieux poreux industriels (0.9 en moyenne pour les fibres de verre), (voir tableau I .1).

Beaucoup de résultats sont issus de modèles géométriques particuliers de grains ou de pores. Ils sont obtenus dans le cas d'empilements réguliers de sphères de même diamètre. Ces empilements forment des réseaux et la porosité dépend fortement de l'arrangement (voir figure I .5). Dans le cas d'un réseau cubique à face centré ($\varepsilon=0.225$) qui est le réseau régulier, le plus compact que l'on puisse obtenir avec des sphères de même diamètre.

Il existe de nombreux cas où la porosité est variable mais on la considère comme uniforme.

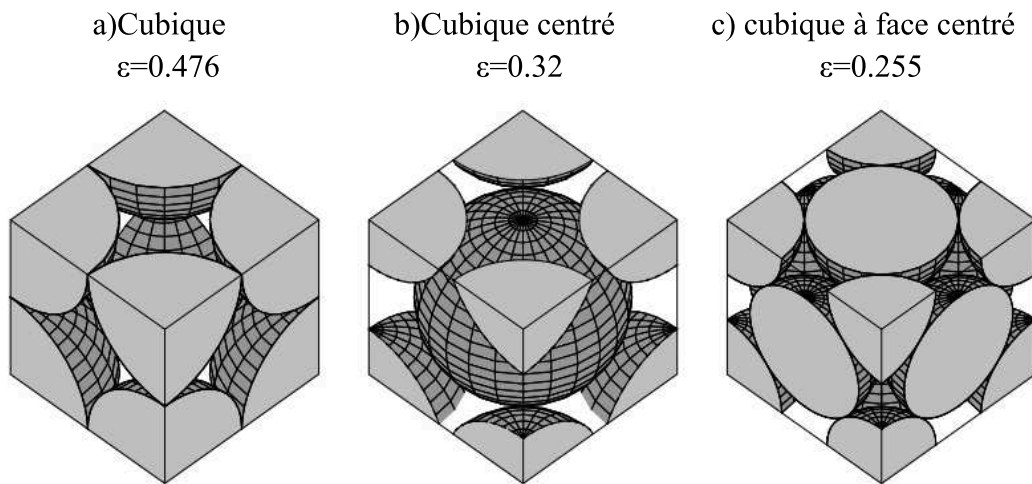


Figure I .5 : modèle géométrique par empilement régulier de sphères de même diamètre avec la porosité ϵ associée.

Matériau	Porosité ϵ
Ardoise en poudre	0,56 à 0,66
Brique	0,12 à 0,34
Catalyseur granulaire	0,45
charbon	0,02 à 0,12
Béton standard	0,02 à 0,07
Cuivre en poudre	0,09 à 0,34
Fibre de verre	0,88 à 0,93
Cuir	0,56 à 0,59
Calcaire dolomite	0,04 à 0,10
Sable	0,37 à 0,50
Grès	0,08 à 0,38
Silice en poudre	0,37 à 0,49
Sol	0,43 à 0,54
Lit de billes sphériques	0,36 à 0,43

Tableau I .1 : valeurs de porosité de quelques matériaux [6,7]

I .2.3.2 Surface spécifique [2]

Cela correspond au rapport de l'aire de la surface totale de l'interface fluide-solide A_{sf} , sur le volume de l'échantillon V soit :

$$\alpha = \frac{A_{sf}}{V} \tag{ I .3}$$

Qui a la dimension d'une longueur.

Comme précédemment, on distinguera une surface spécifique totale et accessible, Cette grandeur joue un rôle capital dans l'échange de chaleur entre le fluide et la matrice solide, ainsi que dans les problèmes d'absorption.

Le (Tableau I .2) suivant donne les valeurs de la surface spécifique de quelques matériaux.

Matériau	Surface spécifique en [m ⁻¹]
Ardoise en poudre	7×10^5 à $8,9 \times 10^5$
Catalyseur granulaire	$5,6 \times 10^7$
Fibre de verre	56×10^3 à 77×10^3
Cuir	$1,2 \times 10^6$ à $1,6 \times 10^6$
Sable	15×10^3 à 22×10^3
Silice en poudre	$6,8 \times 10^5$ à $8,9 \times 10^5$

Tableau I .2 : valeurs de surface spécifique de quelques matériaux [6,7].

I .2.3.3 Tortuosité [2]

La complexité du chemin suivi par les fluides à travers les pores a une influence sur les propriétés de transport du milieu. L'existence de *bras mort* (voie de garage de l'écoulement) est importante dans les matériaux peu poreux et très hétérogènes. Pour tenir compte de la connexion entre les pores.

La tortuosité τ , peut être définie simplement dans le cas où le milieu poreux étudié se modélise sous la forme d'un réseau de capillaires ondulés (voir la figure I .6) comme le rapport de la distance parcourue par le fluide L_{cap} (longueur moyenne des lignes) sur la longueur du milieu L . D'autres auteurs définissent la tortuosité comme le carré de ce rapport.

Soit :

$$\tau = \frac{L_{cap}}{L} \quad (I .4)$$

On a toujours $L_{cap} \geq L \Leftrightarrow \tau \geq 1$, et si les tuyaux capillaires sont rectilignes, on obtient $L_{cap} = L \Leftrightarrow \tau = 1$. Plus τ est grand plus le milieu est (tortueux), il joue donc un rôle important dans les problèmes de diffusion.

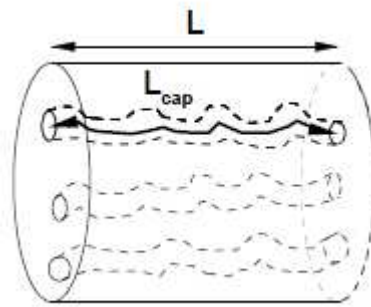


Figure I .6 définition schématique de la tortuosité.

Lorsque la géométrie de l'empilement des particules n'est pas connue ou désordonnée, on ne peut pas définir une valeur théorique de la tortuosité. On peut cependant établir une relation empirique entre les facteurs géométriques et celle-ci. Actuellement, seule l'expérimentation peut quantifier cette grandeur.

I .2.3.4 la perméabilité:

La perméabilité K se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie de la matrice solide, en particulier de la porosité et la tortuosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux.

Selon la loi de **Darcy (1856)**, la perméabilité K mesure la conductance de l'écoulement d'une matrice poreuse pour le cas d'un milieu poreux isotrope, c'est-à-dire :

$$K = - \frac{(\mu_f u_f)}{\left(\frac{dp}{dx}\right)} \quad (I .5)$$

Où μ_f , u_f et dp/dx sont respectivement la viscosité dynamique du fluide, la vitesse de filtration (ou Darcienne) et le gradient de pression. L'unité de la perméabilité est le $[m^2]$, mais elle est souvent exprimée en **Darcy** : $1\text{Darcy}=9.87 \times 10^{-13} m^2$.

Généralement K est déterminé par des mesures expérimentales, Il existe de nombreux travaux répertoriant la perméabilité pour différents milieux, Le tableau I .3 représente quelques valeurs de la perméabilité.

Matériau	Perméabilité [m ²]
Ardoise noir en poudre	$4,9 \times 10^{-14}$ à $1,2 \times 10^{-13}$
Brique	$4,8 \times 10^{-15}$ à $2,2 \times 10^{-13}$
Béton bitumineux	10^{-13} à $2,3 \times 10^{-11}$
Cuivre en poudre	$3,3 \times 10^{-10}$ à $1,5 \times 10^{-9}$
Fibre de verre	$2,4 \times 10^{-11}$ à $5,1 \times 10^{-11}$
Feutre	$8,3 \times 10^{-10}$ à $1,2 \times 10^{-9}$
Cuir	$9,5 \times 10^{-14}$ à $1,2 \times 10^{-13}$
Calcaire dolomite	2×10^{-15} à $4,5 \times 10^{-14}$
Sable	2×10^{-11} à $1,8 \times 10^{-10}$
Grès	5×10^{-16} à 3×10^{-12}
Silice en poudre	$1,3 \times 10^{-14}$ à $5,1 \times 10^{-14}$
Sol	$2,9 \times 10^{-13}$ à $1,4 \times 10^{-11}$
Cigarette	$1,1 \times 10^{-9}$

Tableau I .3 : perméabilité de quelques matériaux. [6][7]

Il est possible d'évaluer la perméabilité K grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de ε et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment :

- La relation de **Kozeny-Carman (1937)** [8], qui donne une estimation satisfaisante de K dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu près identiques et dont la distribution des tailles des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne D :

$$K = \frac{D^2 \varepsilon^3}{36C_0(1-\varepsilon)^2} \quad (\text{I .6})$$

C_0 est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5, il est égal à 4.8 pour les grains sphériques et dans ce cas D représente le diamètre de la sphère.

- le modèle de faisceaux de tubes capillaires ondulés, parallèles en moyenne à une direction donnée est donc fortement anisotrope [9] :

$$K = \varepsilon \frac{D^2}{32} \frac{1}{\tau} \quad (\text{I .7})$$

Avec τ la tortuosité des tubes capillaires ondulés, D le diamètre des tubes.

Si le milieu est formé de 3 ensembles de capillaires perpendiculaires deux à deux (et donc relativement isotrope), la perméabilité serait réduite d'un facteur 3, on peut faire

l'estimation suivante :

$$K = \varepsilon \frac{D^2}{96} \frac{1}{\tau} \quad (\text{I .8})$$

Pour le cas d'un milieu poreux anisotrope le tenseur de perméabilité K est un tenseur du second degré avec neuf composants indiquant des perméabilités dans différentes directions:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad [m^2] \quad (I.9)$$

La perméabilité K dépend seulement de la structure poreuse et peut être la même ou différente dans différentes directions [1].

I .2.3.5 La viscosité dynamique effective : [2]

Elle a été introduite par **Brinkman (1947-1948)** dans le but de trouver une expression pour la perméabilité. Il a considéré aussi que la viscosité effective est égale à la viscosité du fluide considéré, tandis que **Landgren (1972)** a donné des justifications à l'équation de Brinkman et a trouvé en plus que le rapport entre la viscosité dynamique et celle du fluide n'est pas toujours supérieur à l'unité. La (figure I .7) donne le rapport de la viscosité effective μ_{eff} à celle du fluide μ pour un lit de particules sphériques, ces résultats ont été obtenus par Landgren, on remarque pour une forte concentration des particules, la viscosité effective diminue, alors que dans le cas contraire, elle augmente.

Landgren a aussi montré que la viscosité effective dépend de la viscosité du fluide et de la porosité du milieu poreux considéré.

Le rapport μ_{eff}/μ_f a été pris égal à l'unité par de nombreux auteurs. La notion de viscosité effective a été aussi utilisée pour exprimer les conditions aux limites à l'interface fluide/poreux (cas de conduite partiellement poreuse).

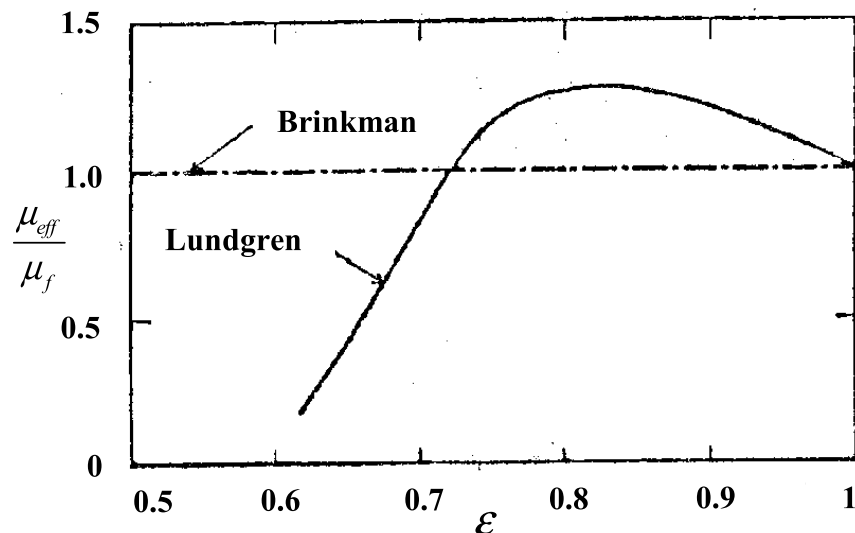


Figure I .7 : Rapport de la viscosité effective à la viscosité de fluide en fonction de la porosité.

Le tableau I .4 suivant donne quelques modèles de la viscosité effective.

Modèle	Corrélation	Limites de validité
Einstein	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = 1 + 2.5(1 - \epsilon)$	Cas de sphères, $\epsilon \rightarrow 1$
Fand	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \exp\left(\frac{2.5\epsilon + 2.7\epsilon^2}{1 - 0.609\epsilon}\right)$	Cas de doublets de sphères en collision
Happel	$\frac{\mu_{eff}}{\mu} = \exp(4.58\epsilon)$	Modèle théorique pour des particules sphériques $\epsilon \leq 0.3$

Tableau I .4 Modèles de viscosité effective.

I .2.3.6 Conductivité thermique effective

La modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective k_{eff} . En effet, les phases solide et fluide présentes dans le milieu poreux contribuent généralement avec des proportions différentes au mode de conduction (le plus souvent $k_{solide} \succ k_{fluide}$).

Cette conductivité effective dépend de la porosité et des conductivités thermiques des phases solides k_s , et fluide k_f .

De manière générale, il n'existe pas des modèles exacts de conductivité thermique effective qui peuvent être appliqués aux cas pratiques d'écoulement dans les milieux poreux. Les modèles existants sont plutôt des modèles approchés construits pour des géométries simples en utilisant des hypothèses simplificatrices et en se basant sur des

données expérimentales. Les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles série et parallèle basés sur l'analogie électrique.

- Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du milieu est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases :

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{(1-\varepsilon)}{k_s} \quad (I.10)$$

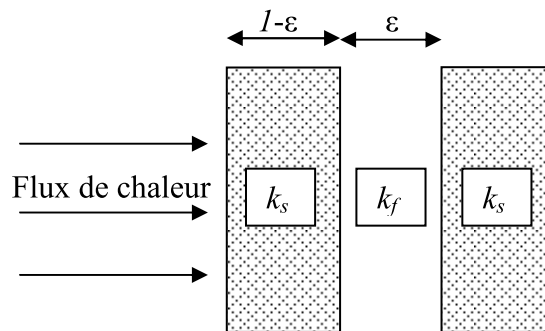


Figure I .8.a : Modèle série de la conductivité thermique effective.

- Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse en même temps les deux phases qui sont parallèles, la conductivité effective est égale à la somme des conductivités phasique pondérées par le taux d'occupation dans l'espace :

$$k_{eff} = (1-\varepsilon)k_s + \varepsilon k_f \quad (I.11)$$

La conductivité thermique effective est toujours comprise entre celle fluide et celle du solide.

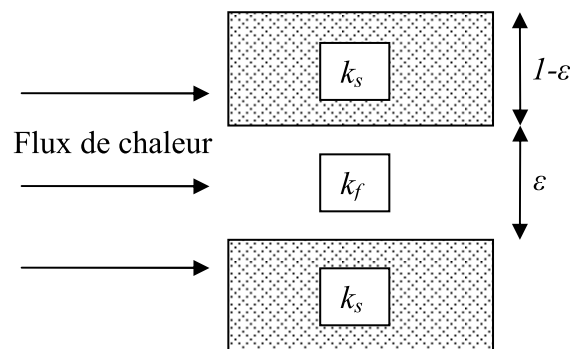


Figure I .8.b : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective.

I.3 Les nombres adimensionnels :

Dans la plupart des lois d'écoulement, les corrélations et les modèles sont donnés sous forme adimensionnelle par des relations faisant principalement intervenir le nombre de Peclet. Cependant il est intéressant de voir si ces relations peuvent être données en fonction d'autres nombres adimensionnels. Les trois nombres adimensionnels classiques caractérisant les écoulements en conduites ou en milieux poreux sont les nombres de Peclet, de Reynolds et de Prandtl. Nous allons définir ces nombres comme suit :

$$\text{- Le nombre de Reynolds } Re : Re = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} = \frac{\rho u_f d}{\mu} = \frac{u_f d}{\nu} \quad (\text{I.12})$$

- Le nombre de Prandtl pr :

$$pr = \frac{\text{Diffusivité de quantité de mouvement}}{\text{Diffusivité thermique}} = \frac{(\mu C_p)_f}{k_f} = \frac{\nu}{a} \quad (\text{I.13})$$

- Le nombre de Peclet pe :

$$Pe = \frac{\text{Transfert par advection}}{\text{Transfert par conduction}} = \frac{(\rho C_p)_f u_f d}{k_f} = Re Pr \quad (\text{I.14})$$

La vitesse ici utilisée est la vitesse de Darcy u_f (la vitesse dans le pore), d est une dimension caractéristique du milieu poreux (diamètre des pores ou des grains), μ_f et ν_f sont respectivement les viscosités dynamique et cinématique du fluide (avec la relation $\nu_f = \mu_f / \rho_f$ et ρ_f la masse volumique du fluide), k_f sa conductivité thermique et a sa diffusivité thermique (pour rappel, on a la relation $a = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f}$).

Le nombre de Reynolds compare les forces d'inertie et les forces visqueuses tendant à s'opposer au mouvement du fluide. Il est le nombre le plus utilisé dans la description des écoulements, notamment parce qu'il fait intervenir les forces principales à l'origine d'un écoulement, et qu'il apparait ainsi naturellement dans les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer sous forme adimensionnelle.

Le nombre de Prandtl compare la diffusion d'énergie sous forme de dissipation visqueuse à la diffusion thermique du fluide. Il caractérise ainsi la distribution des vitesses du fluide vis-à-vis de la distribution du champ de température du milieu.

Le nombre de Peclet compare les deux principaux modes de transfert thermique en milieu poreux : la convection et la conduction. Dans notre problème, on parlera d'advection pour une convection forcée par l'écoulement du fluide. Il joue dans

l'équation de l'énergie un rôle similaire au nombre de Reynolds dans les équations de Darcy-Brinkman-Forchheimer.

I.4 Modèle d'écoulement dans les milieux poreux :

Pour décrire l'écoulement dans les milieux poreux différents modèles ont été élaborés. Le premier modèle a été établi par **Henry. Darcy (1856)** et depuis plusieurs autres modèles ont été proposés pour tenir compte de certains effets négligés par ce dernier.

I.4.1 Loi de Darcy :

C'est en (1856) que **Henry Darcy** [10] décrit une loi sur les écoulements isothermes dans un milieu poreux. A partir d'expériences de percolation d'eau à travers une colonne de sable verticale saturée de hauteur H , il en déduit :

$$Q = K' S \frac{\Delta p_m}{H} \quad (\text{I.15})$$

Avec Q le débit de l'eau percolant à travers la colonne de section S , Δp_m la différence de pression motrice entre le haut et le bas de la colonne et K' une constante dépendant de la perméabilité de la couche poreuse du milieu et du milieu fluide. Telle que $K' = \frac{K}{\mu_f}$ avec K la perméabilité et μ_f la viscosité dynamique du fluide.

On peut généraliser cette loi par :

$$\vec{V}_f = -\frac{K}{\mu_f} \vec{\nabla} p \quad (\text{I.16})$$

Avec :

\vec{V}_f : La vitesse de filtration

Dans le cas de la présence de la pesanteur, l'équation précédente devient :

$$\vec{V}_f = -\frac{K}{\mu_f} (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \quad (\text{I.17})$$

Où :

ρ_f : Densité du fluide.

p : pression en un point du milieu continu fictif.

Et on peut définir le nombre de darcy comme suit :

$$Da = \frac{K}{H^2} \quad (I . 18)$$

Il est important de noter que le modèle de Darcy est inadéquat pour certaines situations d'écoulement et de transfert de chaleur, les insuffisances de ce modèle peuvent être énumérées comme suit :

- a. Il n'est pas approprié pour les écoulements rapides, c'est-à-dire les écoulements pour lesquels le nombre de Reynolds basé sur la vitesse locale et le diamètre des pores, est supérieur à l'unité.
- b. Il ne satisfait pas la condition de non glissement sur les parois solides. Dans les problèmes de convection, la chaleur se transmet essentiellement au (ou à partir du) fluide près des parois solides.
- c. Il ne tient pas compte de la variation de la porosité ; les régions d'écoulement à porosité élevée, dans les milieux poreux, sont très pénétrables par le fluide. Il en résulte alors des canaux à écoulement rapide dans ces régions, affectant ainsi les caractéristiques du transfert de chaleur du système.

Pour tenir compte de tous ces effets, d'autres modèles d'écoulement ont été proposés et utilisés.

Il existe trois types de régimes d'écoulement en fonction de nombre de Reynolds $Re_p = V_i \cdot d / \nu_f$ [8], basé sur la taille moyenne des pores d et la vitesse interstitielle V_i qui représente la vitesse moyenne du fluide mais à l'intérieur des pores.

Pour $Re < 1$, le régime est laminaire, les forces de viscosité sont grandes devant les forces d'inertie, la loi de Darcy est valable.

Pour $1 < Re < 150$, des couches limites se développent au niveau des parois solides.

En dehors de cette couche limite, il n'y a plus de proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration, la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire persiste jusqu'à $Re = 150$.

Pour $150 < Re < 300$, un régime d'écoulement instationnaire prend place. Et pour

$Re > 300$ on est en présence d'un écoulement turbulent.

Remarque :

A l'échelle des pores, les forces prépondérantes sont donc les forces visqueuses.

I.4.2 Loi de Darcy- Forchheimer (1901)

Lorsque la vitesse débitante augmente, les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Dans ce cas, on montre expérimentalement que pour un gradient de pression fixé, le débit mesuré est plus petit qu'il ne le serait avec la loi de Darcy [11]. Pour prendre en compte cet effet, Forchheimer fut le premier à proposer, en 1901 [12], une modification empirique de la loi de Darcy en rajoutant une relation non linéaire de second ordre entre le gradient de pression et la vitesse de filtration.

Nithiarasu et al. [13] propose dans ce cas de remplacer l'équation de Darcy par l'équation (I .19).

$$\bar{\nabla} p = -\frac{\mu_f}{K} \bar{V}_f - F \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} |\bar{V}_f| \bar{V}_f \quad (\text{I .19})$$

ρ_f : Masse volumique du fluide

F : est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, généralement appelé coefficient de Forchheimer qui dépend de la nature du milieu, plusieurs expressions sont utilisées dans la littérature pour exprimer le coefficient F tel que C_F , εF , b/\sqrt{K} , ou b/\sqrt{K} . F vaut approximativement 0.55 et peut être inférieur à 0.1 dans le cas des mousses métalliques fibreuses.

Soit :

$$F = \frac{1.75}{\sqrt{150\varepsilon^{3/2}}} \quad (\text{I .20})$$

Muskat [14] propose en (1946) une classification du domaine de validité des lois de Darcy et Darcy-Forchheimer. Il distingue 3 zones en fonction du nombre de Reynolds :

Zone 1 : correspondant à de très faibles Re ($Re < 1$), la loi de Darcy est valable.

Zone 3 : correspondant à de forts Re ($10 > Re > 1$), la loi de Darcy-Forchheimer est valable.

Zone 2 : correspondant à une zone de transition entre les faibles et les grands nombres de Reynolds.

I.4.3 Modèle de Brinkman

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois. Pour cette situation Brinkman en (1947) [10] propose de modifier l'équation de Darcy de la façon suivante :

$$\bar{\nabla} p = \rho_f \bar{g} - \frac{\mu_f}{K} \bar{V}_f - \mu_{eff} \nabla^2 \bar{V}_f \quad (\text{I .21})$$

Où

μ_{eff} : représente la viscosité dynamique effective du milieu poreux qui peut être déterminé expérimentalement [15].

I.4.4 Modèle général ou modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Pour tenir compte de tous ces effets cités auparavant, il est aussi possible d'ajouter les effets de Forchheimer et Brinkman avec l'incorporation d'un terme instationnaire moyenné et d'un terme d'advection. On obtient un modèle semi-heuristique [11,1]

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + \frac{\vec{V}_f}{\varepsilon} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{V}_f}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\varepsilon P) + \rho_f \vec{F}_v + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}_f - \frac{\mu_f}{K} \vec{V}_f - \frac{\rho_f \cdot F}{K^{1/2}} \cdot |\vec{V}_f| \vec{V}_f \quad (I.22)$$

Avec :

\vec{V}_f : est une quantité moyenne à travers un volume élémentaire.

Et on peut Définir les différents termes comme suit:

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \vec{V}_f \cdot \nabla \vec{V}_f : \text{Forces inertielles macroscopique.}$$

Le terme $\frac{\rho_f}{\varepsilon} \vec{V}_f \cdot \nabla \vec{V}_f$: Est également négligé sauf dans les régions d'entrée de l'écoulement.

$\vec{\nabla} p$: Gradient de pression

$\mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}_f$: Terme de Brinkman qui correspond aux forces visqueuses causées par les effets de cisaillement

$\mu_f [K]^{-1} \vec{V}_f$: Contrainte de viscosité microscopique (adhérence aux pores) terme de Darcy

$\rho_f F \sqrt{[K]^{-1}} |\vec{V}_f| \vec{V}_f$: Forces inertielles microscopiques (terme de Forchheimer)

$\rho_f \vec{F}_v$: Forces de volumes.

I .5 Equation de conservation de l'énergie

Pour l'équation d'énergie dans la zone poreuse, il ya deux modèles différents (modèle à une seule équation d'énergie et un autre à deux équations d'énergie). Le premier est valable lorsque la différence locale de température entre les deux phases fluide-solide est négligeable (équilibre thermique local), tandis que le second est utilisé dans quelques applications où la différence locale de température entre les deux phases ne peut être négligée, ce modèle est très compliqué car il exige l'information concernant le coefficient d'échange de chaleur entre les deux phases ainsi que la surface de contact. Due à cette difficulté; la majorité des études ont utilisé le modèle de l'unique équation.

La convection en milieu poreux favorise le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Ce transfert de chaleur est assuré à la fois par la phase fluide et la phase solide. Or ces deux phases ne possèdent ni la même capacité thermique (respectivement $(\rho C)_f$, $(\rho C)_s$ pour la phase fluide et la matrice solide), ni la même conductivité thermique (respectivement k_f, k_s). Pour cette raison et dans le but de tenir compte du transfert de chaleur lié à la présence des deux phases, Combarnous et Bories [16] avaient proposé un modèle de deux équations d'énergie décrivant l'évolution de la température des deux phases :

$$\varepsilon(\rho c)_f \frac{\partial T_f^*}{\partial t^*} + (\rho c)_f \vec{V}_f \cdot \nabla T_f^* = \text{div}[k_f^* \nabla T_f^*] - h(T_f^* - T_s^*) \quad (\text{I .23})$$

$$(1 - \varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s^*}{\partial t^*} = \text{div}[k_s^* \nabla T_s^*] - h(T_s^* - T_f^*) \quad (\text{I .24})$$

Avec : $T_{f,s}^*$ désignant la température moyennée sur un $V.E.R$, les indices f,s désignent la partie fluide et la matrice solide. Au regard de (I .23) et (I .24), on constate que si $T_s > T_f$, soit $T_s - T_f > 0$, le transfert de chaleur est compté positivement de la matrice solide vers la phase fluide.

Les scalaires k_s^* et k_f^* sont des coefficients de conductivité thermique équivalente et dépendent des coefficients de conductivité thermique propre k_s et k_f et de la porosité ε (si le milieu est isotrope ce sont des scalaires; si le milieu est anisotrope, ce sont des tenseurs). Ils dépendent aussi avec d'autres paramètres :

- pour k_f^* , de la dispersion hydrodynamique due à la présence du squelette solide.
- pour k_s^* , de l'état de division de la phase solide.

Le coefficient de transfert entre les deux phases h dépend, par analyse dimensionnelle:

- des caractéristiques thermiques de la phase fluide et de la matrice solide (conductivité et chaleur volumique)
- de la porosité ε
- une dimension caractéristique du milieu poreux par exemple \sqrt{K} avec K la perméabilité ou alors la taille d'un pore, d'un grain, d'une fibre.

h peut-être déterminé expérimentalement de manière indirecte [17].

Lorsque l'on suppose l'équilibre thermique entre la phase fluide et la matrice solide on a alors $T_f^* = T_s^*$ (le coefficient de transfert $h \rightarrow \infty$). Sa justification repose sur la comparaison des temps caractéristiques de mise à l'équilibre thermique du milieu poreux. Sa validité a été systématiquement étudiée dans [18].

On en déduit par sommation termes à termes des équations (I .23) et (I .24), le modèle de transfert de chaleur le plus couramment utilisé pour les milieux poreux (équation de transport-diffusion) :

$$(\rho c)^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\rho c)_f \bar{V}_f \cdot \nabla T^* = \text{div}[k^* \nabla T^*] \quad (\text{ I .25})$$

Avec T^* la température équivalente du milieu poreux, $(\rho c)^* = \varepsilon (\rho c)_f + (1 - \varepsilon) (\rho c)_s$ la chaleur spécifique volumique équivalente (car additivité des enthalpies donc des chaleurs spécifiques volumiques) et $k^* = k_f^* + k_s^*$, généralement k^* est mesuré expérimentalement mais il dépend de la température. D'autres approximations sont citées précédemment (les modèles parallèles et les modèles séries)

Dans ce travail, on suppose que l'équilibre thermique entre les deux phases, existe, c'est à dire $T_f = T_s = T$.

I .6 Conditions aux limites à l'interface fluide-solide

La présence de deux régions de nature différente dans un même domaine physique, une région poreuse à travers laquelle s'écoule un fluide, et une région complètement fluide (sans milieu poreux), nécessite l'introduction de la notion d'interface fluide/poreux pour définir les conditions aux limites associées.

Des résultats expérimentaux indiquent que pour des écoulements parallèles à une direction longitudinale, la vitesse tangentielle à l'interface n'est pas du même ordre de grandeur que la vitesse Darcienne ; il en résulte alors une discontinuité dans la vitesse tangentielle (Beavers et Joseph, 1967).

Un traitement des conditions aux limites à l'interface est fait par des méthodes semi-empiriques basées sur la vitesse de glissement. Certaines de ces méthodes utilisent la vitesse de glissement, d'autres la notion de viscosité effective, ou encore un écoulement à travers des surfaces comportant des rainures.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré principalement à un rappel de quelques importantes notions relatives aux milieux poreux, Les définitions nécessaires à la modélisation et à la compréhension des écoulements des fluides au sein des milieux poreux sont rappelées.

Le prochain chapitre sera consacré à une synthèse bibliographique sur les principaux travaux de recherche liés à cette thématique.

Chapitre II

Recherche

Bibliographique

Chapitre - II - Recherche bibliographique

Introduction

De nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation des phénomènes de transfert de chaleur et de masse. Les principaux travaux menés de ces études traitent les trois régimes de convections : naturelle, mixte et forcée, en considérant une configuration totalement fluide ou complètement ou partiellement poreuse.

Les écoulements forcés et naturels en régime laminaire dans les milieux poreux anisotropes ont fait l'objet de plusieurs études dans le but d'apporter des éléments de réponse sur leur participation à l'amélioration des performances des systèmes industriels. Dans ce qui va suivre nous allons présenter certains travaux réalisés dans ce contexte.

Une partie substantielle d'investigations théoriques et expérimentales sur le transfert de chaleur par convection dans les milieux poreux a traité le cas des matériaux isotropes [Nield et Bejan, (1992) [2], Bear, (1972) [19], Ingham et Pop, (1998) [20], etc.]. Cependant, dans beaucoup de situations pratiques les matériaux poreux sont anisotropes dans leur mécanique aussi bien que les propriétés thermiques. L'anisotropie est généralement une conséquence d'orientation préférentielle ou de géométrie asymétrique de grains ou de fibres.

II.1 Etude en milieu poreux anisotrope

La première étude sur le transfert de chaleur par convection dans les milieux poreux anisotropes est l'œuvre de Castinel et Combarous, (1974). Elle est concentrée sur l'analogie des milieux poreux du problème de Benard: une couche poreuse saturée par un fluide, limitée par deux plans horizontaux infinis ou inclinés imperméables maintenus à des températures constantes, a été considérée; le début de la convection était déterminé sur la base de l'analyse de stabilité linéaire.

Burns et al. [21] ont examiné analytiquement et numériquement le transfert de chaleur convectif à amplitude finie à travers un matériau poreux anisotrope, ce document semble être la première étude pour l'effet de l'anisotropie sur l'écoulement convectif dans un milieu poreux confiné dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle. Les parois latérales verticales sont chauffées et refroidies, respectivement, et les frontières horizontales sont isolées. L'analyse a démontré la dépendance du nombre de Nusselt sur le nombre de Rayleigh, le facteur d'aspect et la perméabilité anisotrope. Une formule analytique simple pour calculer le transfert de chaleur a été trouvée après l'obtention d'un coefficient assorti par comparaison avec les solutions numériques.

Nilsen et Storesletten, [22] ont analysé la convection bidimensionnelle dans un canal rectangulaire horizontal. Les parois du canal étant imperméables, et ils sont non uniformément chauffés pour établir une distribution linéaire de la température dans la direction verticale, ont montré que le nombre de Rayleigh critique et la structure d'écoulement au début de la convection dépendent du facteur d'anisotropie.

Ni et le Beckermann, [23] ont effectué une étude numérique sur la convection naturelle dans une cavité remplie par un milieu anisotrope. Ils ont considéré une cavité carrée bidimensionnelle où les parois verticales ont été isothermes à des valeurs différentes de températures, et les parois horizontales supérieures et inférieures étaient isolées. L'effet de l'anisotropie mécanique et thermique sur les lignes de courant, les isothermes et le transfert de chaleur a été étudié. Le facteur de perméabilité et le rapport de diffusivité thermique sont définis par: $K^* = K_V/K_H$, et $k^* = D_V/D_H$, où les indices inférieurs (V et H) se rapportent respectivement à des directions verticales et horizontales. Une fois comparée au milieu poreux isotrope, la convection naturelle dans le cas anisotrope présente les caractéristiques physiques suivantes :

- un rapport élevé de perméabilité ($K^* > 1$) cause l'écoulement de channeling le long des parois isothermes verticaux, une intensité plus élevée d'écoulement dans la cavité, et par conséquent un nombre plus élevé de Nusselt.
- le faible rapport de perméabilité ($K^* < 1$) cause l'écoulement de channeling le long des parois horizontales, des couches limites de vitesse plus épaisses le long des murs verticaux, une faible intensité d'écoulement dans la cavité et, par conséquent, un plus petit nombre de Nusselt.
- les rapports de conductivité thermique et de perméabilité ont généralement des effets opposés sur le nombre de Nusselt.

Un problème similaire a été étudié numériquement par **Zhang, et al.** [24] Ils ont examiné le transfert de chaleur par convection bidimensionnelle dans une cavité poreuse rectangulaire, chauffée par l'extérieur. Cependant, ils ont supposé que le milieu est caractérisé par une perméabilité anisotrope avec des axes inclinés. Les lignes de courant et les isothermes pour des valeurs différentes du rapport d'anisotropie ont été présentées, aussi bien que l'influence de l'angle d'anisotropie. Les parois supérieurs et inférieurs ont été refroidis et chauffés respectivement alors que les murs verticaux ont été isolés.

Le milieu poreux a une perméabilité anisotrope. Une analyse linéaire a été employée pour trouver la limite de stabilité marginale tandis que la méthode de différence finie est appliquée pour simuler numériquement l'écoulement convectif.

Quand l'angle d'inclinaison est nulle, le nombre critique de Rayleigh est $Ra_c = 2\pi^2(1 + K_T/K_L)$, où, K_L et K_T représente les composants longitudinaux et transversaux

de la perméabilité. D'ailleurs, ils constatent que le rapport de perméabilité et l'angle d'inclinaison des axes principaux modifient considérablement la limite de stabilité (Ra_c).

Kimura, et al. [25] ont effectué une analyse de la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope en utilisant une méthode de perturbation non linéaire pour des faibles nombres Rayleigh. Ils ont considérés une cavité poreuse bidimensionnelle chauffée par l'extérieur, alors que les parois supérieures et inférieures ont été isolées. Les effets de l'anisotropie de la perméabilité et de la conductivité thermique, et le facteur d'aspect sur la configuration d'écoulement et le transfert de chaleur ont été discutés. Généralement ils ont constaté que le facteur d'aspect donne le même effet que les propriétés anisotropes du milieu poreux sur le transfert de chaleur et le modèle convectif. Les résultats sont présentés dans un certain nombre de graphes montrant comment les lignes de courant et les isothermes dépendent avec les paramètres gouvernants, et montrant la variation moyenne du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh.

Chang et Liu, [26] ont effectué une étude numérique pour analyser l'effet conductif des parois d'une cavité poreuse bidimensionnelle.

Les parois verticales sont maintenues à une température constante avec des valeurs différentes, alors que les murs horizontaux sont isolés. Les résultats numériques indiquent que la perméabilité anisotrope influe sur le taux de transfert de chaleur et le champ d'écoulement d'une manière significative. Une valeur critique du rapport de diffusivité thermique anisotrope D^* est trouvé tel que le nombre de Nusselt atteigne un minimum. La valeur critique diminue avec l'augmentation du rapport de perméabilité anisotrope K^* . Le rapport de perméabilité et le rapport de diffusivité thermique sont définis par : $K^* = K_V/K_H$, et $D^* = D_V/D_H$, où les indices V et H signifient les directions verticales et horizontales. D'ailleurs, l'effet de conductivité du mur peut conduire à un grand changement des nombres de Nusselt.

G.Degan, et al. [27] Ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire remplie par un milieu poreux saturé par un fluide. considérant que le milieu poreux est hydro-dynamiquement et thermiquement anisotrope, les directions principales de la perméabilité ont orientées dans une direction qui est incliné par rapport au vecteur de la pesanteur, alors que ceux de la conductivité thermique coïncident avec les axes du même rang horizontal et verticale. Les parois latérales de la cavité, respectivement, sont chauffés et refroidis par un flux thermique constant, et les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont présenté une solution analytique pour l'écoulement stratifié dans des cavités minces. Des comparaisons entre les solutions numériques et analytiques sont présentées.

Les résultats montrent qu'un taux de transfert de chaleur maximum (minimum) peut être obtenu si la matrice poreuse est orientée avec ces axes principaux dont la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) à la direction verticale. Ils ont aussi constaté qu'un grand rapport de conductivité thermique cause une intensité plus élevée d'écoulement mais un transfert de chaleur minimum.

G.Degan, et P.vasseur. [28] ont effectué une étude analytique et numérique du transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse verticale avec une perméabilité anisotrope. Un flux thermique constant est appliqué pour le chauffage et le refroidissement le long des murs latéraux de la cavité rectangulaire, alors que les deux autres parois sont isolées. Ils se sont assuré que le milieu poreux est hydro-dynamiquement anisotrope et que les axes principaux de la perméabilité anisotrope sont inclinés par-rapport à la force de la pesanteur.

Les équations gouvernantes ont été résolues analytiquement, sous les approximations de la couche limite, avec l'utilisation de la technique modifiée d'Oseen.

Ils ont étudié les effets de la variation du nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy, le rapport de perméabilité anisotrope, l'angle d'orientation des axes principaux sur l'écoulement, et le transfert de chaleur. Une étude numérique par la méthode des différences finies du même phénomène est obtenue en résolvant le système des équations complet. Un bon accord entre la prévision analytique et la solution numérique a été trouvé.

Les conclusions tirées sont :

- quand Da est assez petit (milieu a basse porosité). Pour cette situation, a laquelle $Da < 10^{-6}$, les effets visqueux près des frontières sont négligeables, et le rapport de perméabilité et l'inclinaison des axes principaux de la perméabilité anisotrope ont une influence forte sur le transfert de chaleur par convection.

- pour des valeurs intermédiaires de Da , la résistance de frottement au frontières devient graduellement plus importante, à mesure que le Da est augmenté, et s'ajoute à la traînée de frottement induite par la matrice solide pour ralentir le mouvement de convection. En conséquence, les effets de la perméabilité anisotrope du milieu poreux sur le transfert de chaleur par convection sont progressivement empêchés.

- quand le Da est assez grand ($Da > 10$), la solution basée sur le modèle Darcy-Brinkman, s'approche du cas purement fluide.

J.H.Yang, S.L.Lee. [29] Ont étudié l'effet de l'anisotropie sur les phénomènes de transport dans les milieux poreux anisotropes. Un ensemble des cylindres circulaires a été traité comme un milieu poreux anisotrope, et avec l'utilisation du modèle de Darcy-Forchheimer, la conductivité thermique effective a été déterminée numériquement. Les

solutions indiquent que l'inclinaison du paquet de cylindre pourrait provoquer une influence de plus de 100% sur le taux de transfert de chaleur pour la convection forcée et la convection naturelle. Dans le cas de la convection naturelle la plus forte circulation d'écoulement se produit à l'angle d'inclinaison particulier de 45° .

Les cylindres horizontaux dans le cas de 0° (également 180°) font un bon flux de chaleur de la paroi chaud vers la paroi froid et ont ainsi un bon taux de transfert de chaleur. Les solutions indiquent également que cela est dû à une circulation forte d'écoulement. L'angle d'inclinaison de 45° provoque une petite augmentation du gradient de température sur les parois verticales et aussi un petit taux de transfert de chaleur.

Par conséquent l'anisotropie d'un milieu poreux anisotrope ne devrait pas être ignorée.

P. Nithiarasu et al. [30] ont étudié numériquement par la méthode des éléments finis le transfert de chaleur par convection naturelle dans un milieu poreux dynamiquement et thermiquement anisotrope saturé par un fluide avec l'utilisation d'un modèle généralisé non-Darcien. Des résultats numériques ont présentés pour des valeurs différentes de l'angle d'inclinaison des axes principaux de la perméabilité, du nombre de Rayleigh, du nombre de Darcy, de la perméabilité et du rapport de conductivité thermique. La comparaison de ces résultats avec les résultats analytiques et numériques prouve que la formulation mathématique est précise. Une étude paramétrique a été effectuée pour discuter la différence entre le modèle de Brinkman et les modèles généralisés des milieux poreux. La différence significative entre ces modèles est notée à des nombres plus élevés de Rayleigh et de Darcy.

J.C.Leong, et F.C.Lai. [31] ont étudié numériquement la possibilité d'employer une approche systématisée mise en bloc dans l'analyse de transfert de chaleur d'une cavité poreuse. des cavités à deux couches sont considérées; dans un cas les couches inférieures sont perpendiculaires au gradient de température imposée tandis que dans l'autre cas elles sont parallèles au gradient de température imposée.

Les résultats sont présentés dans la limite du nombre effectif de Rayleigh qui est basé sur la perméabilité effective.

Deux techniques moyennes ont été employées pour l'évaluation de la perméabilité effective; avec une moyenne arithmétique et l'autre avec une moyenne harmonique. Les résultats prouvent que l'approche systématisée mise en bloc peut fournir une prévision assez précise dans le transfert de chaleur si la perméabilité est correctement caractérisée. Ils ont également trouvé que la perméabilité effective d'une cavité poreuse posée dépend fortement sur l'orientation des couches inférieures et de la direction primaire d'écoulement de la chaleur.

Gerard Degan, et Patrick Vasseur [32] Ont effectué une étude analytique de la convection mixte dans un canal poreux constitué de deux plaques planes verticales maintenues à une température constante, le milieu supposé comme hydro-dynamiquement anisotrope. Les résultats sont valides pour un écoulement établi qui est vers le haut et basé sur le modèle de Darcy-Brinkman, Ils ont conclu que:

- Si Da est suffisamment faible (basse porosité) $Da < 10^{-5}$ l'effet de la viscosité au voisinage des parois est négligeable, et le facteur de perméabilité et l'inclinaison des axes principaux de la perméabilité anisotrope ont une forte influence sur le transfert de chaleur par convection

- Pour des valeurs intermédiaires et larges du nombre de Da (grande porosité), la résistance de frottement aux parois devient graduellement plus importante, et les effets des paramètres anisotropes (le rapport de perméabilité K^* , et l'angle d'inclinaison des axes principaux θ) sur le transfert de chaleur convectif n'ont progressivement aucune influence quand $Da > 10$.

A.Nakayama et al [33] Ont étudié numériquement le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide en régime laminaire à travers un milieu poreux anisotrope. Ils ont proposé un ensemble de tiges carrées placées dans un espace bidimensionnel infini comme modèle numérique de structure poreuse microscopique.

Des calculs étendus ont été effectués pour des valeurs différentes de l'angle d'écoulement, et du nombre de Reynolds, et du degré d'anisotropie. Les résultats numériques obtenus étaient intégrés sur un espace pour déterminer le tenseur de perméabilité, le tenseur de Forchheimer et le coefficient de transmission de chaleur directionnel (entre les faces), et le gradient de pression macroscopique. Ils ont constaté que les axes principaux du tenseur de perméabilité commandent l'effet visqueux dans la basse intervalle du nombre de Reynolds. Ce résultat est différent de manière significative de ceux du tenseur de Forchheimer (qui commande la forme de trainé visqueux dans l'intervalle des nombres de Reynolds élevé), l'étude indique également que la variation du coefficient de transfert de chaleur directionnel entre les faces en ce qui concerne l'angle macroscopique d'écoulement est analogue à celle de la perméabilité directionnelle. Des modèles simples d'équations adimensionnelles pour le tenseur de perméabilité, le tenseur de Forchheimer et le nombre directionnel de Nusselt a été proposé pour l'application du théorème du volume moyen dans l'étude de l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur a travers les équipements complexe composés par des éléments à échelle réduite.

G.Degan, et al [34] Ont présenté une solution exacte pour un écoulement forcé convectif qui se développe entièrement dans des canaux poreux horizontaux (plaque plane parallèle) avec une perméabilité anisotrope dont les axes principaux sont orientés dans une direction qui est oblique au vecteur de la pesanteur. Un flux thermique constant est appliqué sur les murs latéraux du canal. En basant cette analyse sur le modèle généralisé de Darcy-Brinkman qui permet la satisfaction de la condition du non-glissement sur le mur solide, il est prouvé que les paramètres anisotropes (rapport de perméabilité anisotrope et l'angle d'inclinaison des axes principaux) ont une influence forte sur le champ d'écoulement et le taux de transfert de chaleur, dans le cas limite de la basse porosité (le nombre de Darcy tend vers 0). Les résultats indiquent qu'un taux de transfert de chaleur maximum (minimum) est atteint quand l'orientation de l'axe principal avec la perméabilité la plus élevée de la matrice poreuse anisotrope est parallèle (perpendiculaire) à la direction verticale.

I.S.Shivakumara et al [35] ont étudié les effets de frontières et du non-équilibre thermique local sur la convection pour une couche poreuse horizontale anisotrope de large dimension. Un modèle à deux champs de température représentant chacune des phases solide et liquide séparément est utilisé. L'écoulement dans le milieu poreux est décrit par le modèle étendu de Darcy-Brinkman.

La limite inférieure est rigide, tandis que la partie supérieure limite est considéré comme rigide ou libre avec des conditions de température aux limites fixes. Les équations de stabilité sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Galerkin pour en déduire les paramètres de stabilité critiques. L'influence du non-équilibre thermique local, des paramètres d'anisotropie mécaniques et thermiques représentant les phases solide et liquide est évaluée sur les caractéristiques de stabilité du système.

B.S.Bhadauriam et al [36] ont étudié l'instabilité thermique linéaire et non linéaire dans une couche poreuse anisotrope tournante avec une source de chaleur interne. Le modèle Darcy étendue, qui comprend la dérivée temporelle et le terme de Coriolis a été employé dans l'équation de quantité de mouvement. Les critères de convection à la fois stationnaire et oscillatoire ont été obtenus analytiquement. Ces auteurs ont observé que la rotation empêche l'apparition de la convection dans les deux modes stationnaire et oscillatoire. L'influence des paramètres tels que le rapport des perméabilités sur le nombre de Rayleigh critique a également été étudiée. Une analyse faiblement non linéaire basée sur la représentation tronquée de la méthode des séries de Fourier a été utilisé pour trouver le nombre de Nusselt. Le comportement transitoire du nombre de Nusselt a également été étudié en résolvant les équations d'amplitude finie en utilisant une méthode numérique. Les lignes de courant ainsi que les isothermes stationnaires et instationnaires ont été établis pour déterminer la nature du régime d'écoulement.

B.S.Bhadauriam [37] a étudié la convection double-diffusive dans une couche poreuse anisotrope avec une source de chaleur interne, chauffée par le bas. Le modèle de Darcy généralisé est utilisé dans l'équation de quantité de mouvement. Les phases liquides et solides sont considérées en équilibre thermique. Les analyses de stabilité linéaire et non-linéaire ont été effectuées. Pour la théorie linéaire la technique du mode normal a été utilisée, tandis que l'analyse non linéaire est basée sur une représentation minimale des séries tronquées de Fourier. Les transferts de chaleur et de masse à travers la couche poreuse ont été obtenus en fonction du nombre de Nusselt Nu et du nombre de Sherwood Sh , respectivement. Les effets du nombre de Rayleigh interne, les paramètres d'anisotropie, le nombre de Rayleigh de concentration sur la convection stationnaire, oscillatoire sont représentés graphiquement. Les comportements transitoires de nombre de Nusselt et nombre de Sherwood ont été étudiés en résolvant les équations d'amplitude finie en utilisant une méthode numérique. Les lignes de courant, isothermes, et iso-concentration sont tracées pour les deux cas, permanent et transitoire.

M. S. Malashetty et Irfana. Begum [38] ont étudié analytiquement, en utilisant les théories linéaires et non linéaires, l'effet de la rotation sur l'apparition de la double convection diffusive dans une couche poreuse anisotrope très dense, qui est chauffée par le bas. Le modèle Brinkman qui comprend le terme Coriolis est utilisé pour l'équation de quantité de mouvement. Le nombre de Rayleigh critique, nombre d'onde pour les modes stationnaires et oscillatoire et une relation de dispersions ont obtenus en utilisant analytiquement la théorie linéaire. L'influence des paramètres d'anisotropie, de Darcy, de Rayleigh, de Lewis, de Darcy-Prandtl, et la porosité normalisée sur la convection stationnaire, oscillatoire d'amplitude finie est représentée graphiquement. On constate que contrairement à son influence habituelle sur l'apparition de la convection, en l'absence de rotation, le paramètre d'anisotropie mécanique montre un effet contrasté sur le critère d'apparition de la convection à des vitesses modérées et élevées. L'effet de différents paramètres sur le transfert de chaleur et de masse est représenté graphiquement. Certains des systèmes de convection auparavant rapportés dans la littérature se révèle être des cas particuliers du système présenté dans cette étude.

En outre, quelques études ont analysé les influences de la dispersion hydrodynamique sur la convection dans un milieu poreux anisotrope, [Fattah et Hoopes, [39] et Howle et Georgiadis, [40]. la Double-diffusion convection dans un milieu poreux anisotrope a été étudiée par Trevisan et Bejan, [41], Nguyen et al, [42], Costa, [43], Fard et al, [44], et Bera et al, [45], etc.... des recherche sur le flux convectif à travers un milieu poreux anisotrope a été passé en revue récemment par Storesletten, [46].

II.2 Etude d'une géométrie partiellement poreux avec perméabilité isotrope

A.V.kuznetsov. [47] a effectué une solution analytique pour un écoulement laminaire d'un fluide dans un canal plat et un canal cylindrique partiellement remplis avec un milieu poreux. L'équation de Darcy Brinkman est utilisée pour la modélisation de la région poreuse. La dépendance de la vitesse à l'égard du nombre de Darcy est étudiée.

Ils ont aussi montré que l'explication d'un saut dans l'effort de cisaillement à l'interface influe essentiellement sur les profils de vitesse.

La largeur des couches limites augmente avec une augmentation du nombre de Darcy. Pour une grande perméabilité du milieu poreux ces couches limites peuvent s'amenuiser.

A.V.kuznetsov. [48] a présenté Des solutions exactes du problème de la convection forcée d'un fluide incompressible (gaz) pour un nombre des géométries avec la présence d'une interface entre un fluide idéal et un milieu poreux saturé. Une généralisation de la loi de Darcy tenant compte les effets visqueux qui sont substantiels aux frontières d'un corps poreux est employée pour modéliser l'écoulement dans une couche poreuse. La vitesse d'écoulement en fonction du nombre de Darcy est étudiée.

Ayant constaté qu'avec une porosité constante on distingue deux couches limites dans la région poreuse, la première se situe entre le liquide idéal et le milieu poreux et l'autre à la frontière imperméable. Le taux de filtrage est constant entre ces régions de frontière. Leur largeur augmente avec la loi de Darcy, donc, avec une perméabilité élevée du milieu ces régions peuvent recouvrir.

A.V.kuznetsov. [49] a étudié le problème de la convection forcée en régime établi dans un canal partiellement rempli par une matrice poreuse homogène. La matrice est fixée aux murs du canal, alors que le centre du canal est occupé par le fluide clair. L'écoulement dans le milieu poreux est décrit par l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer.

Avec l'utilisation de l'approche de la couche limite, des solutions analytiques pour la vitesse d'écoulement, la distribution de température, le nombre de Nusselt sont obtenues. La dépendance du nombre de Nusselt avec plusieurs paramètres du problème est intensivement étudiée.

Ayant étudié la possibilité d'augmenter le transfert de chaleur en changeant les valeurs des paramètres convenables, cette solution peut également être utile pour la validation des codes numériques.

O. Cekemer et al [50] ont étudié analytiquement et numériquement un écoulement établi en convection forcé dans un canal plan partiellement rempli avec une matrice poreuse placée au centre. Les parois du canal sont soumises à un flux de chaleur constant. Les équations de quantité de mouvement et de chaleur pour la zone fluide et la zone poreuse ont été résolues séparément.

Les conditions aux limites de flux de chaleur et les contraintes de cisaillement sont utilisés pour déterminer la vitesse et la température de l'interface. Les profils de vitesse et de température dans le canal pour différentes valeurs du nombre de Darcy, du facteur de la conductivité thermique, et de l'épaisseur de la couche poreuse sont tracés et discutés. Les valeurs du nombre de Nusselt et le coefficient de frottement d'un canal totalement fluide ($Nu_{cl} = 4,12$ et $fRe_{cl} = 24$) sont utilisés pour définir les taux d'augmentation de transfert de chaleur ($\varepsilon_{th} = Nu_p / Nu_{cl}$) et le rapport d'augmentation de la chute de pression ($\varepsilon_p = fRe_p / fRe_{cl}$) et observer les effets de l'insertion d'une couche poreuse à l'augmentation du transfert de chaleur et de perte de charge. Le transfert de chaleur et les facteurs d'incrément de la chute de pression sont utilisés pour définir une performance globale ($\varepsilon = \varepsilon_{th} / \varepsilon_p$) pour évaluer les avantages globaux de l'insertion d'une couche poreuse dans un canal à plaques parallèles. Les résultats obtenus montrent que pour un canal partiellement rempli par un milieu poreux, la valeur de ε est fortement influencé par le nombre Darcy, mais il n'est pas affecté du rapport de conductivité thermique (k_r) lorsque $k_r > 2$. Pour un canal entièrement rempli par un matériau poreux, la valeur de ε est considérablement affectée de rapport de conductivité thermique pendant que le milieu poreux est en contact avec les parois du canal.

Conclusion

Quelques travaux ont été effectués pour étudier les effets de l'anisotropie dynamique et thermique sur la convection thermique dans un milieu poreux.

Nous avons exposé les travaux analytique et numérique antérieur, l'objectif de ces travaux est de combler le manque de données sur l'influence de la présence d'un milieu poreux anisotrope, afin de permettre une meilleure compréhension des phénomènes qui apparaissent sur le transfert de chaleur.

Relativement nous pouvons tirer de ces travaux qu'il ya une forte influence de l'anisotropie sur l'échange de chaleur.

Le chapitre suivant s'attache à décrire les équations qui régissent notre système étudié.

Chapitre III

Formulation

Mathématique

Chapitre -III- Formulation mathématique

Introduction

L'étude du phénomène de transfert de chaleur dans les milieux poreux anisotropes a attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Il a fait ainsi l'objet de nombreux travaux de recherche vu le nombre accru de ses applications en industrie, la plupart de ces travaux ont été basés sur le modèle de Darcy, ce modèle néglige plusieurs effets, comme l'effet des frontières solides et de l'interface fluide sur l'écoulement. En effet, la condition de glissement aux parois est retenue quelque soit le fluide utilisé. Ses effets sur l'ensemble de l'écoulement dans les applications poreuses peuvent être tout à fait significatifs.

Ce chapitre est consacré à la formulation mathématique, à l'aide du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Premièrement nous allons définir le domaine d'étude, ensuite nous présenterons quelques hypothèses simplificatrices, après nous passerons à la mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites.

III.1 domaine physique

L'objectif de ce chapitre est la modélisation d'un écoulement forcé laminaire, permanent à l'intérieur d'un canal plan contenant un milieu poreux.

Le système physique est illustré dans les figures (III.1.a), (III.1.b) pour deux configurations, dans la première configuration le milieu poreux est placé sur les parois inférieure et supérieure du canal, et pour la deuxième configuration il est placé au centre du canal. Il est constitué de deux plaques planes horizontales et parallèles de longueur l séparées d'une distance $2H$. Les deux plaques supérieure et inférieure sont maintenues à un flux de chaleur constant q_w , l'axe (ox') est positionné sur la paroi inférieure, d'où une symétrie axiale d'axe (oy'), le canal contient une couche poreuse d'épaisseur e_p dans la moitié du canal, et saturée par un fluide de densité ρ_f tel que le milieu poreux soit caractérisé par une perméabilité anisotrope et une conductivité thermique isotrope.

Les perméabilités le long des deux axes principaux de la matrice poreuse sont dénotées par K_1 et K_2 , et le rapport d'anisotropie est alors défini en tant que $K^* = K_1 / K_2$.

L'angle d'orientation θ est défini comme l'angle entre la direction horizontale et l'axe principal de la perméabilité K_2 .

Le fluide rentre dans le canal à une température uniforme T_e' et une vitesse uniforme u_e' égale à la vitesse adimensionnelle \bar{u} .

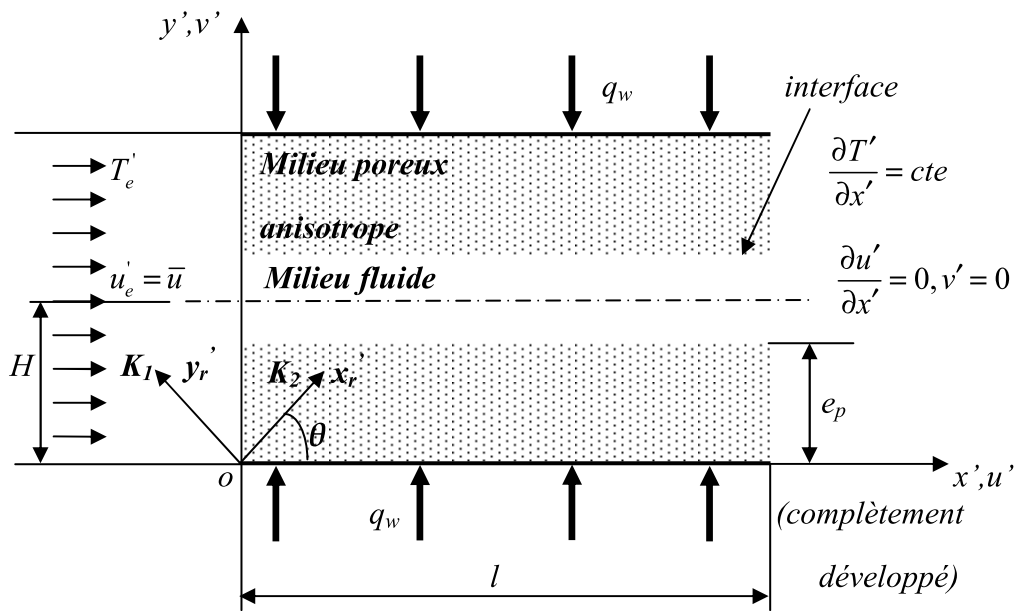


Figure III.1.a : modèle physique et système de coordonnées (configuration n°1)

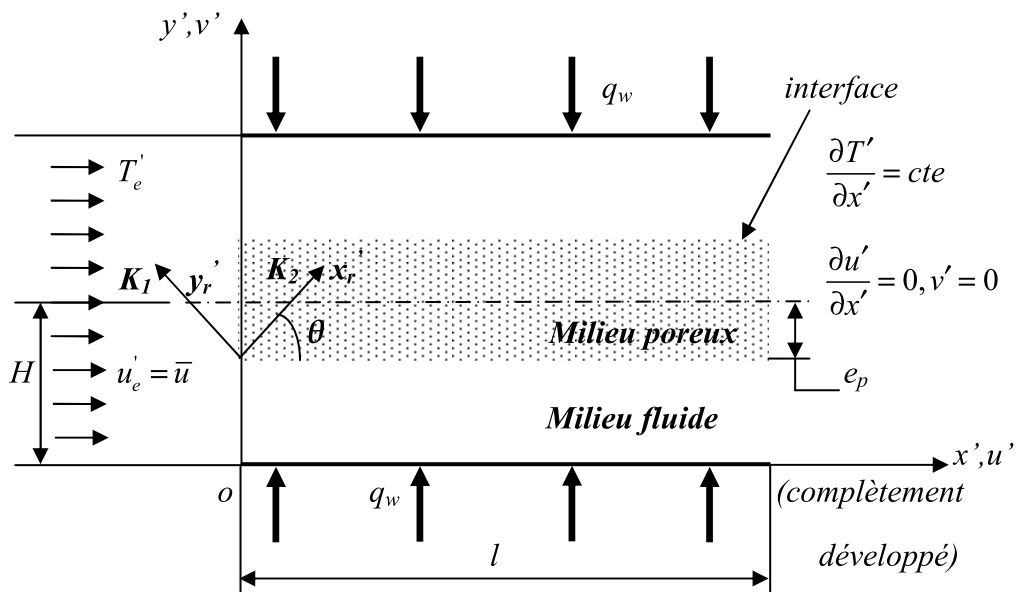


Figure III.1.b : modèle physique et système de coordonnées (configuration n°2)

III.2. Equations gouvernantes

Le phénomène physique étudié est gouverné par différentes équations, l'écoulement dans la région fluide est gouverné par les équations de Navier Stokes tandis que dans la région poreuse (matrice solide) l'écoulement est régi par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer, l'équation de continuité et l'équation de l'énergie.

III.2.1.hypothèses simplificatrices

Pour la modélisation du problème physique, nous adopterons les hypothèses de simplification suivantes afin de formuler notre problème :

- ✓ Ecoulement bidimensionnel (xoy).
- ✓ Fluide Newtonien et incompressible.
- ✓ Régime d'écoulement stationnaire et laminaire.
- ✓ Propriétés thermiques du fluide et de la matrice solide constantes.
- ✓ Transfert de chaleur par rayonnement négligeable.
- ✓ Forces de volume négligeables.
- ✓ Dissipation visqueuse négligeable.
- ✓ Pas de source interne de chaleur.
- ✓ Le fluide est en équilibre thermique local avec la matrice solide.

III.2.2. Equation de continuité

III.2.2.a Dans la région fluide

L'équation de continuité s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad (\text{III.1})$$

Après la projection sur les axes (x', y') on trouve :

$$\Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (\text{III.2})$$

III.2.2.b Dans la région poreuse

L'équation de continuité s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0 \quad (\text{III.3})$$

Et par projection sur les axes (x', y') on trouve :

$$\Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (\text{III.4})$$

III.2.3. Equation de conservation de quantité de mouvement

III.2.3.a Dans la région fluide

L'écoulement dans la région fluide est régi par l'équation de Navier-Stokes.

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}' \right) = -\vec{\nabla} p' + \mu_f \nabla^2 \vec{V}' \quad (\text{III.5})$$

Après l'introduction des hypothèses simplificatrices, Les équations de quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes s'écrivent comme suit:

- Projection suivant la direction axiale (x')

$$\rho_f \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu_f \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

- Projection suivant la direction transversale (y')

$$\rho_f \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \mu_f \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

III.2.3.b Dans la région poreuse

Pour un milieu poreux anisotrope l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho_f \left[\frac{\partial \vec{V}'_r}{\varepsilon \partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{V}'_r \cdot \nabla \vec{V}'_r \right] = -\vec{\nabla} P'_r + \rho_f \vec{F}'_v + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}'_r - \mu_f [K]^{-1} \vec{V}'_r - \rho_f \cdot F \cdot \sqrt{[K]^{-1}} |\vec{V}'_r| \vec{V}'_r \quad (\text{III.8})$$

$$\text{Ou : } |\vec{V}'_r| = \sqrt{u_r'^2 + v_r'^2}$$

\vec{V}'_r : la vitesse superficielle de l'écoulement dans le repère (x_r', y_r')

μ_f : La viscosité dynamique du fluide

P'_r : La pression

μ_{eff} : La viscosité effective

$[K]$: tenseur de perméabilité du milieu poreux anisotrope, K_1 et K_2 sont les valeurs de la perméabilité correspondant aux axes principaux, voir équation (III.9).

$$\text{Tel que : } [K] = \begin{bmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$\text{Soit : } [\mathbf{K}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{K}_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{K}_1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

ε : La porosité du milieu poreux.

- **Changement de repère :**

L'équation de quantité de mouvement (III.8) est écrite dans le repère (x_r', y_r') , cette équation peut être reformulée dans le repère (x', y') par l'utilisation des matrices de rotation reliant les composantes du vecteur vitesse \vec{V}_r' d'un système de coordonnées (x_r', y_r') à un système de coordonnées (x', y')

$$\begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

L'équation résultante en régime stationnaire sera (Cf. annexe B):

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial p'}{\partial x'} \\ -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{Bmatrix} + \mu_{eff} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nabla^2 u' \\ \nabla^2 v' \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

$$-\mu_f [\mathbf{K}]^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} - \rho_f F \sqrt{[\mathbf{K}]^{-1}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \sqrt{u'^2 + v'^2}$$

Tel que :

$$[\mathbf{K}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{K}_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{K}_1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

$$\sqrt{[\mathbf{K}]^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{K}_2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{K}_1}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

En multipliant l'équation résultante par l'inverse de la matrice de rotation on trouve l'équation suivante (Cf. annexe B):

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{Bmatrix} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial p'}{\partial x'} \\ -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{Bmatrix} + \mu_{eff} \begin{Bmatrix} \nabla^2 u' \\ \nabla^2 v' \end{Bmatrix} - \frac{\mu_f}{K_1} \begin{bmatrix} K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta \\ (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta & K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

$$- \frac{\rho_f F}{\sqrt{K_1}} \begin{bmatrix} \sqrt{K^*} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \\ (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta & \sqrt{K^*} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \sqrt{u'^2 + v'^2}$$

- **Projection suivant la direction axiale (x) :**

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] u' \quad (\text{III.17})$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] v'$$

- **Projection suivant la direction transversale (y) :**

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] u' \quad (\text{III.18})$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] v'$$

III.2.4. Equation d'énergie

III.2.4.a Région fluide

L'équation d'énergie pour un fluide newtonien, incompressible avec des propriétés physiques constantes sans dissipation visqueuse et sans source interne s'écrit:

$$(\rho C_p)_f \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{V}' \cdot \nabla T' \right) = k_f \nabla^2 T' \quad (\text{III.19})$$

Ce qui donne pour le cas stationnaire :

$$(\rho C_p)_f \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (\text{III.20})$$

III.2.4.b Région poreuse

L'équation d'énergie dans le milieu poreux est présentée comme suit:

$$(\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f \vec{V}' \nabla T' = k_{eff} \nabla^2 T' \quad (\text{III.21})$$

La forme scalaire pour le cas stationnaire devient:

$$(\rho C_p)_f \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_{eff} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (\text{III.22})$$

III.3. Condition aux limites hydrodynamiques et thermiques :

Selon l'axe de symétrie du canal les profils de vitesse et de température sont symétriques, seulement la moitié inférieure du conduit est pris en considération. Les conditions aux limites appropriées qui gouvernent les équations précédentes (III.2), (III.4), (III.6), (III.7), (III.17), (III.18), (III.20), et (III.22) sont :

- **La condition d'imperméabilité sur la paroi solide prend la forme :**
à $y' = 0$; $u' = 0, v' = 0$
- **La condition thermique pour la paroi (soumise à un flux thermique uniforme) est la suivante:**
à $y' = 0$; $\frac{\partial T'}{\partial y'} = -\frac{q_w}{k_{eff}}$
- **La condition sur l'axe de symétrie :**
à $y' = H$; $\frac{\partial u'}{\partial y'} = 0, v' = 0, \frac{\partial T'}{\partial y'} = 0$
- **La condition à l'entrée :**
à $x' = 0$; $u' = \bar{u}, v' = v'_e = 0, T' = T'_e$
- **Les conditions à la sortie (régime complètement développé) :**
à $x' = l$; $\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0, \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0, \frac{\partial T'}{\partial x'} = cte$

▪ **Les conditions à l'interface fluide-poreux :**

$$\text{à } y' = e_p$$

- **Egalité des vitesses :**

$$u'_f = u'_p; v'_f = v'_p$$

- **Egalité des contraintes :**

$$\mu_f \frac{\partial u'_f}{\partial y'} = \mu_{eff} \frac{\partial u'_p}{\partial y'}$$

$$\mu_f \frac{\partial v'_f}{\partial y'} = \mu_{eff} \frac{\partial v'_p}{\partial y'}$$

- **Egalité de température :**

$$T'_f = T'_p$$

- **Egalité des densités de flux de chaleur :**

$$k_f \left. \frac{\partial T'}{\partial y'} \right|_f = k_{eff} \left. \frac{\partial T'}{\partial y'} \right|_p$$

III.4. Analyse dimensionnelle

III.4.1. grandeurs adimensionnelles

Pour rendre adimensionnelle les équations gouvernantes et les conditions aux frontières déjà obtenues, les variables adimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$x = \frac{x'}{H}, y = \frac{y'}{H}, p = \frac{p'}{\rho_f u'^2}, T = \frac{T' - T'_e}{\Delta T'}, \Delta T' = \frac{q_w H}{k_f}$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{u} H}{\nu_f}, \nu_{eff} = \frac{\mu_{eff}}{\rho_f}, \nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}, u = \frac{u'}{\bar{u}}, v = \frac{v'}{\bar{u}}$$

III.4.2. Equations adimensionnelles

III.4.2.1. Equation de continuité

Pour les deux milieux (fluides et poreux) l'équation de continuité adimensionnelle s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.23})$$

III.4.2.2 Equations de conservation de quantité de mouvement :**III.4.2.2.a Région fluide**

- **Projection suivant la direction axiale(x)**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.24})$$

- **Projection suivant la direction transversale (y)**

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.25})$$

III.4.2.2.b Région poreuse

- **Projection suivant la direction axiale(x)**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{J}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re Da}} (K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{\text{Da}}} (\sqrt{K^*} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sqrt{u^2 + v^2} \right] u - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re Da}} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{\text{Da}}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u^2 + v^2} \right] v \quad (\text{III.26})$$

- **Projection suivant la direction transversale (y)**

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{J}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re Da}} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{\text{Da}}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u^2 + v^2} \right] u - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re Da}} (K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{\text{Da}}} (\sqrt{K^*} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sqrt{u^2 + v^2} \right] v \quad (\text{III.27})$$

III.4.2.3. Equation d'énergie :**III.4.2.3.a Région fluide**

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{P_r \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.28})$$

III.4.2.3.b Région poreuse

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{R_c}{P_r \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.29})$$

III.4.3. conditions aux limites adimensionnelles:

- **La condition d'imperméabilité sur la paroi solide prend la forme :**
à $y = 0$; $u = 0, v = 0$
- **La condition thermique pour la paroi soumise à un flux thermique uniforme est la suivante:**
à $y = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{R_c}$
- **La condition sur l'axe de symétrie :**
à $y = 1$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$
- **La condition à l'entrée :**
à $x = 0$; $u = 1, v = 0, T = 0$
- **Les conditions à la sortie (régime complètement développé) :**
à $x = \frac{l}{H} = L$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- **Les conditions à l'interface fluide-poreux :**
à $y = \frac{e_p}{H} = E$;
 - **Egalité des vitesses :**
 $u_f = u_p; v_f = v_p$
 - **Egalité des contraintes :**
 $\frac{\partial u_f}{\partial y} = R_\mu \frac{\partial u_p}{\partial y}$
 $\frac{\partial v_f}{\partial y} = R_\mu \frac{\partial v_p}{\partial y}$
 - **Egalité de température :**
 $T_f = T_p$
 - **Egalité des densités de flux de chaleur :**
 $\frac{\partial T_f}{\partial y} = R_c \frac{\partial T_p}{\partial y}$

III.5. Vitesse moyenne : La vitesse moyenne est définie par :

$$u'_m = \frac{1}{\rho(H.1)} \int_0^H \rho u' dy' \quad (\text{III.30})$$

Soit en utilisant les variables adimensionnelles : $u_m = \int_0^1 u dy$ (III.31)

III.6. Température moyenne : La température moyenne est définie par :

$$T'_m = \frac{1}{Hu'_m} \int_0^H u' T' dy' \quad (\text{III.32})$$

Avec les paramètres adimensionnels.

$$T_m = \frac{1}{u_m} \int_0^1 u T dy \quad (\text{III.33})$$

III.7. Le coefficient de frottement:

L'utilisation des milieux poreux dans un canal augmente le transfert de chaleur à travers le canal, cependant, la chute de pression augmente à travers le canal. Le coefficient de frottement pour un écoulement de fluide est défini comme [50]

$$f = \frac{2H.1. \left(-\frac{\partial p'}{\partial x'} \right)}{\frac{1}{2} \rho_f \bar{u}^2} \quad (\text{III.34})$$

Avec l'utilisation des variables adimensionnelles on trouve :

$$f = 4 \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{III.35})$$

$$\Rightarrow f(\text{Re})_{2H} = 4 \left(\frac{\bar{u}.2.H}{\nu_f} \right) \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 8. \text{Re.} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{III.36})$$

III.8. Le nombre de Nusselt :

Pour le cas d'un écoulement dans le canal partiellement rempli d'un milieu poreux, on définit le nombre de Nusselt comme suivant :

$$N_u = \frac{h.(2H)}{k_f} \quad (\text{III.37})$$

Où h : est le coefficient d'échange convectif.

On peut calculer le coefficient d'échange convectif local ' h ' par:

$$h = \frac{2 \cdot q_w}{(T_w' - T_m')} \quad (\text{III.38})$$

Soit :

$$Nu_u = \frac{4Hq_w}{k_f(T_w' - T_m')} \quad (\text{III.39})$$

Avec les paramètres adimensionnels on trouve :

$$Nu_u = \frac{4}{(T_w' - T_m')} \quad (\text{III.40})$$

Le nombre de Nusselt moyen le long du canal est calculé comme suit :

$$Nu_m = \frac{1}{L} \int_0^L Nu(x) dx ; L = \frac{l}{H} \quad (\text{III.41})$$

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons décrit les équations de base et les conditions aux limites associées régissant la convection forcée dans le canal partiellement rempli par une matrice dynamiquement anisotrope. Les équations résultantes forment un système d'équations différentielles partielles non-linéaires couplées. Ce sont par conséquent des équations difficiles à résoudre analytiquement et en général, on ne peut obtenir une solution de ces dernières que par l'utilisation de méthodes numériques. Pour la résolution du système d'équations couplées obtenu et les conditions aux limites associées.

Le prochain chapitre aura pour objectif la description de la méthode numérique adaptée à la présente étude.

Chapitre IV

Modélisation

Numérique

Chapitre -IV- Modélisation numérique

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons remarqué que les équations décrivant les phénomènes de transfert thermique et de mouvement sont trop complexes pour être résolues par une méthode analytique.

Nous avons utilisé pour la résolution de ces équations la méthode des volumes finis. L'utilisation de cette méthode nous permet de transformer le système d'équations gouvernantes (équations aux dérivées partielles) à des systèmes d'équations algébriques faciles à résoudre et d'avoir des résultats précis.

IV.1 Méthode de Résolution

La méthode des volumes finis est une classe des arrangements de discrétisation qui est couronnée de succès. Elle est intensivement employée dans les mécanismes des fluides, la météorologie, l'électromagnétisme, la simulation de dispositif semi-conducteur, les modèles des processus biologiques et beaucoup d'autres secteurs de technologie régis par un système d'équations qui peuvent être écrits sous une forme intégrale. On a choisi la méthode des volumes finis en vue de la géométrie du problème. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et les écoulements des fluides.

Lors de la résolution des équations, on suivra la procédure numérique, mise en place par (**Patankar**[51]). Basée sur la méthode des volumes finis, elle consiste dans un premier temps à intégrer l'équation considérée sur un volume bien défini appelé volume de contrôle (figure IV.1) entourant le point de calcul, et à estimer ensuite les différentes valeurs aux interfaces par des interpolations appropriées.

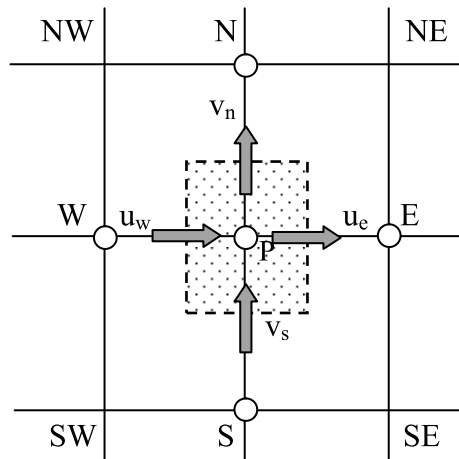


Figure IV.1: Volume de contrôle.

IV.2 Discrétisation du domaine physique

IV.2.1 Maillage

Le maillage est obtenu par la répartition du domaine physique dans les deux directions, horizontale et verticale, afin d'obtenir un grand nombre de volumes finis. Bien qu'il ne soit pas nécessaire que le maillage soit uniforme. Le centre d'un volume de contrôle typique est dénommé par P . Chaque volume de contrôle à l'intérieur du domaine de calcul est adjacent à quatre volumes de contrôles voisins. Les centres des volumes de contrôles voisins à l'est, à l'ouest, au nord et au sud du volume fini typique sont notés E , W , N et S . Les positions des faces séparant le volume de contrôle typique de ses voisins, à l'est, à l'ouest, au nord et au sud, sont notées e , w , n et s . Les dimensions horizontales des volumes de contrôles sont dénommées Δx . Ainsi, les dimensions horizontales des volumes de contrôles englobant les points P , N et S sont notées Δx . Les dimensions verticales des volumes de contrôles sont appelées Δy . Et donc, les dimensions verticales des volumes finis englobant les points P , E et W sont notées Δy . On appelle les distances entre le point P et les points E , W , N et S , δx_e , δx_w , δy_n et δy_s , respectivement. La détermination de toutes les dimensions, toutes les distances, les coordonnées des points et les coordonnées des faces, complète les spécifications géométriques du maillage qui s'avèrent nécessaires pour la discrétisation des équations différentielles dans les volumes finis et pour la représentation graphique des résultats (figure IV.2).

Les valeurs des quantités scalaires telles que la pression, la température sont stockés dans les nœuds au centre des volumes de contrôle

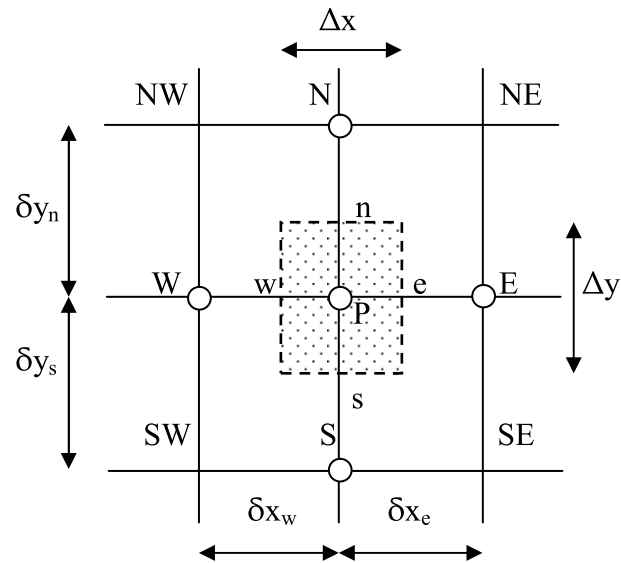


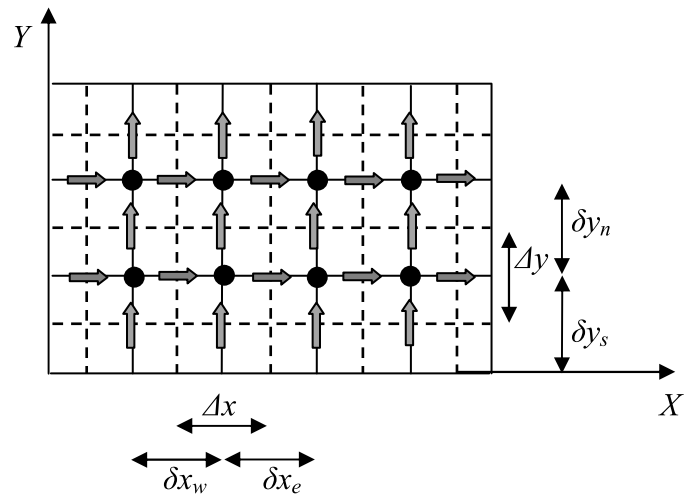
Figure IV.2: Maillage typique uniforme

IV.2.2 Maillage décalé

Nous avons utilisé un maillage uniforme décalé comme proposé par **Patankar** [51].

Le maillage typique décrit sera utilisé pour la discrétisation des équations à variables dépendantes scalaires. Cependant pour les variables dépendantes vectorielles (les composantes du vecteur de vitesse) il est recommandé d'utiliser un maillage décalé. L'idée du maillage décalé, est de stocker les composantes de la vitesse sur les faces des volumes finis.

Arbitrairement on a choisi de décaler le maillage typique dans la direction positive des axes. Le maillage de la composante horizontale de la vitesse a été décalé à droite par rapport au maillage typique, ainsi que le maillage de la composante verticale de la vitesse vers le haut par rapport au maillage typique. Le résultat de ces décalages est l'emplacement des composantes horizontales des vitesses aux milieux des faces verticales des volumes finis typiques; et l'emplacement des composantes verticales des vitesses aux milieux des faces horizontales des volumes finis typiques (figureIV.3).



- : Maillage principale
- : Maillage décalé
- : nœud de calcul de P et T
- ⇒ : vitesse axiale u
- ↑ : vitesse transversale v

Figure IV.3 maillage uniforme décalé

Remarque : Les vitesses à la face des mailles ont été calculées par une interpolation linéaire, qui a la même exactitude que l'approximation de différence centrale.

IV.3 La discrétisation des équations gouvernantes:

Les équations de conservation décrites dans le chapitre précédent peuvent être écrites sous la forme commune suivante :

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = S \tag{IV.1}$$

Cette équation représente une combinaison des flux de convection et de diffusion selon les directions x et y .

$$j_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$j_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

ϕ : Variable indépendante étudiée (u, v, T).

Γ : Coefficient de diffusion.

S : terme source.

L'équation (IV.1) de transport pour chaque variable ϕ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \quad (\text{IV.2})$$

On aboutit alors à l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (\text{IV.3})$$

On récapitule la correspondance entre la forme générale (IV.3) et nos équations dans les tableaux (IV.1.a et IV.1.b) suivants:

➤ **Zone fluide**

Equation	ϕ	Γ	j_x	j_y	S
Continuité	1	0	u	v	0
Mouvement X	u	$\frac{1}{\text{Re}}$	$uu - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x}$	$vu - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y}$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Mouvement Y	v	$\frac{1}{\text{Re}}$	$uv - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial x}$	$vv - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y}$	$-\frac{\partial p}{\partial y}$
Energie	T	$\frac{1}{P_r \text{Re}}$	$uT - \frac{1}{P_r \text{Re}} \frac{\partial T}{\partial x}$	$vT - \frac{R_c}{P_r \text{Re}} \frac{\partial T}{\partial y}$	0

Tableau IV.1.a : termes des équations de conservation dans la zone fluide

➤ Zone poreuse

Equation	ϕ	Γ	j_x	j_y	S
Continuité	1	0	u	v	0
Mouvement X	u	$\varepsilon^2 \frac{J}{\text{Re}}$	$uu - \frac{\varepsilon^2 J}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x}$	$vu - \frac{\varepsilon^2 J}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y}$	$-\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} + S_x$
Mouvement Y	v	$\varepsilon^2 \frac{J}{\text{Re}}$	$uv - \frac{\varepsilon^2 J}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial x}$	$vv - \frac{\varepsilon^2 J}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y}$	$-\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} + S_y$
Energie	T	$\frac{R_c}{P_r \text{Re}}$	$uT - \frac{R_c}{P_r \text{Re}} \frac{\partial T}{\partial x}$	$vT - \frac{R_c}{P_r \text{Re}} \frac{\partial T}{\partial y}$	0

Tableau IV.1.b : termes des équations de conservation dans la zone poreuse

Pour le terme source S_y et S_x peuvent s'écrire sous la forme linéaire suivante :

$$S_{x,y} = S_c + S_p \phi_p$$

Pour S_x :

$$S_c = - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re} Da} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{Da}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u^{*2} + v^{*2}} \right] v^*$$

$$S_p = - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re} Da} (K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{Da}} (\sqrt{K^*} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sqrt{u^{*2} + v^{*2}} \right]$$

Pour S_y :

$$S_p = - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re} Da} (K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{Da}} (\sqrt{K^*} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sqrt{u^{*2} + v^{*2}} \right]$$

$$S_c = - \left[\frac{\varepsilon^2}{\text{Re} Da} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \frac{F \varepsilon^2}{\sqrt{Da}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u^{*2} + v^{*2}} \right] u^*$$

* : indique l'itération précédente pour (u , et v).

L'intégration de l'équation générale (IV.1) sur les faces du volume de contrôle représentées dans la figure (IV.2) donne:

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial j_y}{\partial y} dx dy = \int_s^e \int_w^e S dx dy \quad (IV.4)$$

Après l'intégration de l'équation (IV.4) on trouve:

$$(j_e - j_w) + (j_n - j_s) = \bar{S} \Delta x \Delta y \quad (IV.5)$$

Tel que :

$$j_e = \int_s^e (j_x)_e dy = \left[\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_e \Delta y$$

$$j_w = \int_s^e (j_x)_w dy = \left[\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_w \Delta y$$

$$j_n = \int_w^e (j_y)_n dx = \left[\rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_n \Delta x$$

$$j_s = \int_w^e (j_y)_s dx = \left[\rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_s \Delta x$$

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_p$$

Nous intégrons l'équation de continuité sur le même volume de contrôle :

$$\int_w^e \int_s^e \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_w^e \int_s^e \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0 \quad (IV.6)$$

On obtient : $(u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x = 0 \quad (IV.7)$

Ce qui donne : $(F_e - F_w) + (F_n - F_s) = 0 \quad (IV.8)$

Tel que : $F_e = u_e \Delta y, F_w = u_w \Delta y, F_n = v_n \Delta x, F_s = v_s \Delta x$

Nous multiplions l'équation (IV.8) par ϕ_p , on obtient :

$$F_e \phi_p - F_w \phi_p + F_n \phi_p - F_s \phi_p = 0 \quad (IV.9)$$

En combinant l'équation (IV.5) et (IV.9), on trouve :

$$\left[(j_e - F_e \phi_p) - (j_w - F_w \phi_p) \right] + \left[(j_n - F_n \phi_p) - (j_s - F_s \phi_p) \right] = (S_c + S_p \phi_p) \Delta x \Delta y \quad (IV.10)$$

En utilisant les expressions de **Patankar**:

$$\begin{aligned}j_e - F_e \phi_p &= a_E (\phi_p - \phi_E) \\j_w - F_w \phi_p &= a_W (\phi_p - \phi_W) \\j_n - F_n \phi_p &= a_N (\phi_p - \phi_N) \\j_s - F_s \phi_p &= a_S (\phi_p - \phi_S)\end{aligned}$$

On obtient une équation discrétisée qui est une relation algébrique entre les valeurs de la variable ϕ au centre de la maille et celles des nœuds voisins :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (\text{IV.11})$$

Avec :

$$\begin{aligned}a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(+F_w, 0) \\a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(+F_s, 0) \\a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\a_p &= a_E + a_W + a_S + a_N - S_p \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \Delta y$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \Delta y$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta y_n} \Delta x$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} \Delta x$$

F_i ($i = e, w, n, s$) : Débit massique à travers les faces respectives du volume de contrôle.

D_i : Diffusion.

$P_i = F_i / D_i$: représente le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion (nombre de Peclet).

$A(|p_i|)$: La fonction d'interpolation qui dépend du schéma utilisé.

IV.3.1 Discrétisation des équations de quantité de mouvement avec un maillage décalé

La présence du gradient de pression dans les équations de quantité de mouvement impose l'utilisation d'un maillage décalé par rapport au volume de contrôle ordinaire (typique) afin de déterminer les composantes de vitesse u et v .

Les volumes de contrôle résultants du maillage décalé sont représentés sur les figures (IV.4.a) et (IV.4.b) suivantes :

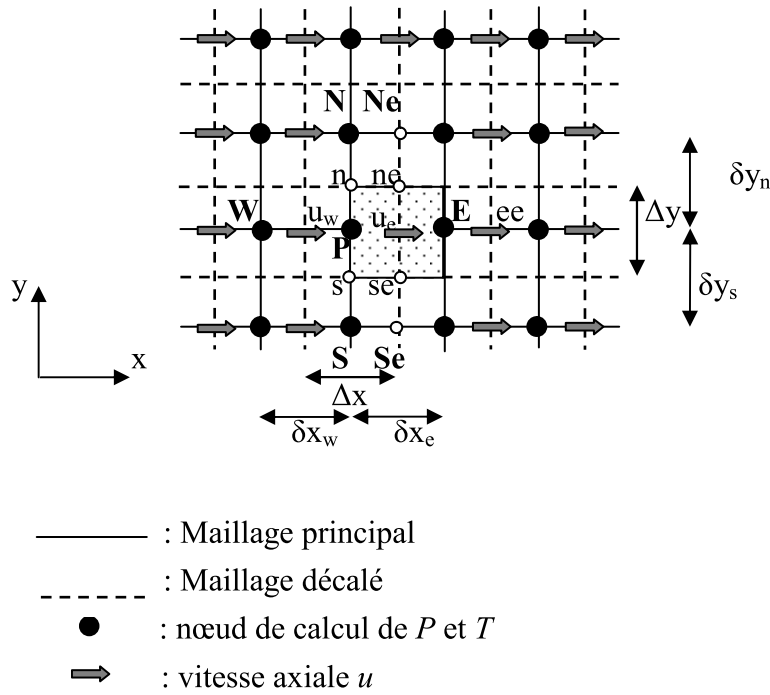


Figure IV.4.a: Volume de contrôle décalé vers la droite pour la composante « u » (VCu).

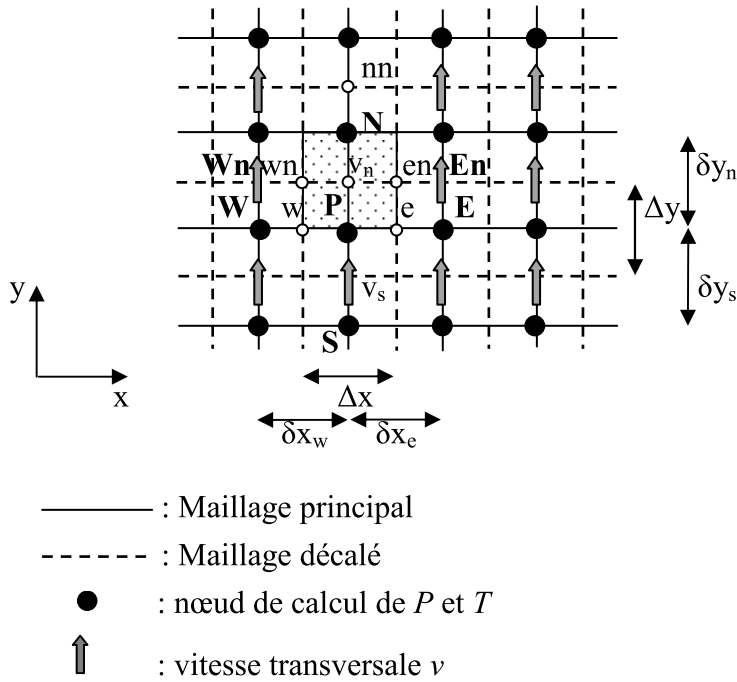


Figure IV.4.b: volume de contrôle décalé vers le haut pour la composante « v » (VC_v).

L'équation de quantité de mouvement suivant (ox) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial x} + S_x \quad (IV.12)$$

Par la même procédure nous intégrons l'équation (IV.12) sur le volume de contrôle décalé vers la droite présenté sur la figure (IV.4.a).

$$\int_{se}^{ne} \int_p^E \frac{\partial}{\partial x} (uu) dx dy + \int_{se}^{ne} \int_p^E \frac{\partial}{\partial y} (vu) dx dy = \int_{se}^{ne} \int_p^E \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy - \varepsilon^2 \int_{se}^{ne} \int_p^E \frac{\partial p}{\partial x} dx dy + \int_{se}^{ne} \int_p^E S_x dx dy \quad (IV.13)$$

On obtient une équation discrétisée pour la composante de la vitesse « u », sous la forme suivante :

$$a_e u_e = a_w u_w + a_{ee} u_{ee} + a_{se} u_{se} + a_{ne} u_{ne} + b_u + \varepsilon^2 (P_p - P_E) A_e \quad (IV.14)$$

Où :

A_e : La surface sur laquelle agissent la force de pression, $A_e = \Delta_y$.

$(P_p - P_E) A_e$: Force de pression agit sur la face verticale du volume de contrôle.

L'équation de quantité de mouvement suivant oy s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} + S_y \quad (IV.15)$$

Intégrons l'équation (IV.15) sur le volume de contrôle décalé vers le haut présenté sur la figure (IV.4.b).

$$\begin{aligned} \int_p^{N} \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial x} (uv) dx dy + \int_p^{N} \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial y} (vv) dx dy &= \int_p^{N} \int_{wn}^{en} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ -\varepsilon^2 \int_p^{N} \int_{wn}^{en} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \int_p^{N} \int_{wn}^{en} S_y dx dy & \end{aligned} \quad (IV.16)$$

On obtient une équation discrétisée pour la composante de la vitesse v , sous la forme suivante :

$$a_n v_n = a_{wn} v_{wn} + a_{En} v_{En} + a_s v_s + a_{nn} v_{nn} + b_v + \varepsilon^2 (P_p - P_N) A_n \quad (IV.17)$$

A_n : La surface sur laquelle agit la force de pression, $A_n = \Delta x$

$(p_p - p_N) A_n$: Force de pression agissant sur la face verticale du volume de contrôle

IV.3.1.1 Correction de la vitesse:

Le champ de vitesse ne satisfera l'équation de continuité que si le champ de pression est correct. On doit alors, choisir une valeur initiale P^* à laquelle correspond la solution u^* et v^* .

$$a_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b_u + \varepsilon^2 (P_p^* - P_E^*) A_e \quad (IV.18.a)$$

$$a_n v_n^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b_v + \varepsilon^2 (P_p^* - P_N^*) A_n \quad (IV.18.b)$$

La valeur que prendra la pression P^* est estimée de manière à ce que les vitesses u^* et v^* s'approchent progressivement après chaque itération à des valeurs qui satisferont l'équation de continuité.

Définissons les termes P' et u' et v' comme étant les corrections de pression et des composantes de vitesse.

On écrit alors :

$$P = P^* + P'$$

$$u = u^* + u'$$

$$v = v^* + v'$$

La soustraction des équations (IV.14) (IV.18.a) et les équations (IV.17) (IV.18.b) respectivement donnent:

$$a_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + \varepsilon^2 (p'_p - p'_E) A_e \quad (\text{IV.19.a})$$

$$a_n v'_n = \sum_{nb} a_{nb} v'_{nb} + \varepsilon^2 (p'_p - p'_N) A_n \quad (\text{IV.19.b})$$

Avec la considération de l'hypothèse simplificatrice introduite par **Patankar** qui néglige le terme $\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$, on trouve :

$$a_e u'_e = \varepsilon^2 (P'_p - P'_E) A_e \quad (\text{IV.20.a})$$

$$a_n v'_n = \varepsilon^2 (P'_p - P'_N) A_n \quad (\text{IV.20.b})$$

Et on peut écrire :

$$u'_e = d_e^u (P'_p - P'_E) \quad (\text{IV.21.a})$$

$$v'_n = d_n^v (P'_p - P'_N) \quad (\text{IV.21.b})$$

$$\text{Avec : } d_e^u = \frac{\varepsilon^2 A_e}{a_e}, \quad d_n^v = \frac{\varepsilon^2 A_n}{a_n}$$

On obtient donc l'équation suivante :

$$u_e = u_e^* + d_e^u (P'_p - P'_E) \quad (\text{IV.22.a})$$

$$v_n = v_n^* + d_n^v (P'_p - P'_N) \quad (\text{IV.22.b})$$

La discrétisation de l'équation de continuité donne :

$$u_e \Delta y - u_w \Delta y + v_n \Delta x - v_s \Delta x = 0 \quad (\text{IV.23})$$

On remplace (IV.22.a) et (IV.22.b) dans (IV.23)

$$\begin{aligned} & \left[u_e^* + d_e^u (P_P' - P_E') \right] \Delta y - \left[u_w^* + d_w^u (P_W' - P_P') \right] \Delta y \\ & + \left[v_n^* + d_n^v (P_P' - P_N') \right] \Delta x - \left[v_s^* + d_s^v (P_S' - P_P') \right] \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (IV.24)$$

Après simplification l'équation de continuité devient :

$$a_P P_P' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b_p \quad (IV.25)$$

Cette équation représente la correction de pression P'

Où : $a_p = d_e^u \Delta y + d_w^u \Delta y + d_n^v \Delta x + d_s^v \Delta x$

$$a_E = d_e^u \Delta y$$

$$a_W = d_w^u \Delta y$$

$$a_N = d_n^v \Delta x$$

$$a_S = d_s^v \Delta x$$

$$b_p = +u_e^* \Delta y - u_w^* \Delta y + v_n^* \Delta x - v_s^* \Delta x$$

Ce terme b_p tend vers zéro à la convergence.

IV.3.2 Discrétisation d'équation d'énergie:

L'équation d'énergie dans la région fluide (III.20), et dans la région poreuse (III.22) peut être écrite sous une forme générale comme suit :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (IV.26)$$

Tel que : $\Gamma = \frac{R_c}{P_r \text{Re}}$ (region poreuse); $\Gamma = \frac{1}{P_r \text{Re}}$ (region fluide)

On peut écrire l'équation (IV.26) sous la forme générale

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(uT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(vT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (IV.27)$$

On intègre l'équation d'énergie sur le volume de contrôle ordinaire :

$$\int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} \left(uT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} \left(vT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (IV.28)$$

Posons :

$$j_x = uT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$j_y = vT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial y}$$

On trouve :

$$\int_s^n [(j_x)_e - (j_x)_w] dy - \int_w^e [(j_y)_n - (j_y)_s] dx = 0 \quad (\text{IV.29})$$

Par la même procédure de discrétisation de l'équation de quantité de mouvement on obtient.

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (\text{IV.30})$$

Où : $S_p = S_c = 0$

IV.4 Schémas d'interpolation:

Les profils approximatifs décrivant la variation de ϕ entre les nœuds, sont exprimés par la fonction $A(|P|)$ spécifique pour chaque schéma numérique. Patankar [51] a cité les cinq schémas suivants :

IV.4.1 Schéma aux différences centrées

La fonction d'interpolation pour ce schéma est : $A(|P|) = 1 - 0.5|P|$

Ce schéma est limité aux petites valeurs de Reynolds (Re), et pour $(|P|) \leq 2$.

IV.4.2 Schéma apwind

La fonction d'interpolation pour ce schéma est : $A(|P|) = 1$

Ce schéma présente l'inconvénient de surestimer la diffusion à grande valeur de P , ce qui s'appelle (diffusion numérique).

IV.4.3 Schéma hybride

La fonction d'interpolation pour ce schéma est : $A(|P|) = [0.1 - 0.5|P|]$

Ce schéma présente l'inconvénient d'un écart maximal entre la solution exacte et ce schéma à $|P| = 2$.

IV.4.4 Schéma exponentiel

La fonction d'interpolation pour ce schéma est : $A(|P|) = \frac{|P|}{\exp|P| - 1}$

Pour un problème stationnaire 1D ce schéma permet d'obtenir la solution exacte pour n'importe quelle valeur du nombre Péclet P et n'importe quelle valeur du nombre de nœuds.

Cependant, ce schéma est assez peu utilisé car :

- les exponentielles coûtent cher à calculer numériquement.
- le schéma exponentiel n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

IV.4.5 Schéma de la loi de puissance (power-law)

La fonction d'interpolation pour ce schéma est : $A(|P|) = \left[0, (1 - 0.5|P|)^5 \right]$

Ce schéma est recommandé car il réalise une meilleure approximation de la courbe exacte et n'a pas de contraintes d'application.

Dans notre étude on a considéré une discrétisation des équations différentielles en utilisant le schéma numérique de la loi de puissance (power-law).

IV.5 Technique de relaxation:

Dans les méthodes itératives, pour la résolution des systèmes d'équations algébriques non-linéaires, souvent on veut ralentir ou accélérer, d'une itération à l'autre, les variations de la variable ϕ considérée. Ces processus sont appelés respectivement sous-relaxation (ralentit) et sur-relaxation (accélère).

La sur-relaxation est souvent utilisée avec la méthode de Gauss-Seidel, la méthode obtenue est très peu utilisée avec la méthode ligne par ligne.

La sous-relaxation est très pratique pour les problèmes non-linéaires car elle permet d'éviter la divergence des méthodes itératives utilisées pour la résolution.

Une des nombreuses méthodes de relaxation est celle consistant à utiliser un facteur de relaxation α_ϕ . Soit l'équation discrétisée suivante :

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \Rightarrow \phi_p = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (\text{IV.31})$$

Si ϕ_p^* est la valeur à l'itération précédente alors la relation (IV.31) peut être écrite ainsi :

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha_\phi \left[\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right] \quad (\text{IV.32})$$

Où α_ϕ est un facteur de relaxation introduit pour amortir le changement survenu à ϕ_p pendant une itération.

La relation (IV.32) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + (1 - \alpha_\phi) \frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_p^* \quad (\text{IV.33})$$

En fonction des valeurs que prend α_ϕ on définit deux types de relaxation pour faire converger les calculs selon les cas suivants :

- pour $1 < \alpha_\phi < 2$: on parle d'une sur-relaxation.
- pour $0 < \alpha_\phi < 1$: on parle d'une sous-relaxation.

Les composants de vitesse u et v sont sous-relaxés par un facteur de (0.9), et la composante de pression est sous-relaxée par un facteur de (0.5), et la température est sur-relaxée par un facteur de (1.1).

Remarques

- à la convergence de l'algorithme $\phi_p = \phi_p^*$ L'on vérifie l'équation de départ (IV.31) et ce pour n'importe quelle valeur de α_ϕ .
- Lorsque α_ϕ tend vers 0, d'une itération à l'autre, les variations de ϕ sont très lentes.
- Il n'y a pas de règle générale pour choisir la valeur optimale de α_ϕ . Cette valeur va dépendre de:
 - la nature du problème (non-linéarités, etc) ;
 - le nombre de nœuds du maillage ;
 - la méthode itérative utilisée.

Seule l'expérience numérique en faisant plusieurs tests pour un problème donné pourra permettre de dégager une valeur optimale entre assurer la convergence et augmenter sa vitesse.

Il est possible (mais pas très facile) de changer de facteur de relaxation α d'un point à l'autre du maillage et au cours des itérations.

IV.6 L'algorithme SIMPLE:

L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) a été créé par Patankar et Spalding (1972), [51].

Il consiste à corriger la pression et les composantes de vitesse à chaque itération.

Les étapes de l'algorithme sont comme suit :

1. l'estimation de la pression. Soit P^* le champ de pression estimé.
2. Les équations (IV.18.a) et (IV.18.b) sont résolues pour obtenir le champ de vitesse associé u^* et v^* .
3. la résolution de l'équation de correction de pression P' (IV.25), donne le champ de pression correct $P = P^* + P'$, et les équations de conservation de la quantité de mouvement (IV.22.a et IV.22.b) donnent le champ de vitesse correct (u, v) .

Les corrections de pression et de vitesse seront nulles à la convergence.

Il est possible que le processus itératif soit divergent. Pour remédier à cet inconvénient, pendant le processus itératif on peut utiliser la sous-relaxation:

$$P^{nouv} = P^* + \alpha_p P' \quad (IV.34)$$

Où $0 < \alpha_p < 1$ est un facteur de sous-relaxation.

Les composantes de la vitesse doivent aussi être sous-relaxées en utilisant les relations :

$$u^{nouv} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \quad (IV.35)$$

$$v^{nouv} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \quad (IV.36)$$

où α_u et α_v sont les facteurs de sous-relaxation pour les composantes de la vitesse, u et v tandis que $u^{(n-1)}$ et $v^{(n-1)}$ représentent leurs valeurs à l'itération précédente. On peut facilement montrer que les équations de conservation de la quantité de mouvement, en tenant compte du facteur de sous-relaxation, peuvent devenir :

$$\frac{a_e}{\alpha_u} u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u + \varepsilon^2 (p_p - p_E) A_e + \left[(1 - \alpha_u) \frac{a_e}{\alpha_u} \right] u_e^{(n-1)} \quad (IV.37)$$

$$\frac{a_n}{\alpha_v} v_n = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_v + \varepsilon^2 (p_p^* - p_N^*) A_n + \left[(1 - \alpha_v) \frac{a_n}{\alpha_v} \right] v_n^{(n-1)} \quad (IV.38)$$

L'équation de correction de pression est également affectée par le facteur de sous-relaxation et on peut montrer que :

$$d_e = \varepsilon^2 \frac{A_e}{a_e} \alpha_u, \quad d_w = \varepsilon^2 \frac{A_w}{a_w} \alpha_u, \quad d_n = \varepsilon^2 \frac{A_n}{a_n} \alpha_u, \quad d_s = \varepsilon^2 \frac{A_s}{a_s} \alpha_u$$

4. Contrôler le critère de convergence :
 - Si vérifié aller à l'étape suivante,
 - Sinon: prendre $P^*=P$ et redémarrer les calculs depuis la deuxième étape
5. Résolution de l'équation de l'énergie.

L'algorithme SIMPLE est une méthode pour calculer la pression et la vitesse mais quand d'autres variables sont couplées aux équations de conservation de la quantité de mouvement, par exemple la température, la résolution doit être séquentielle. La séquence des étapes dans l'algorithme SIMPLE est présentée à la figure (IV.5)

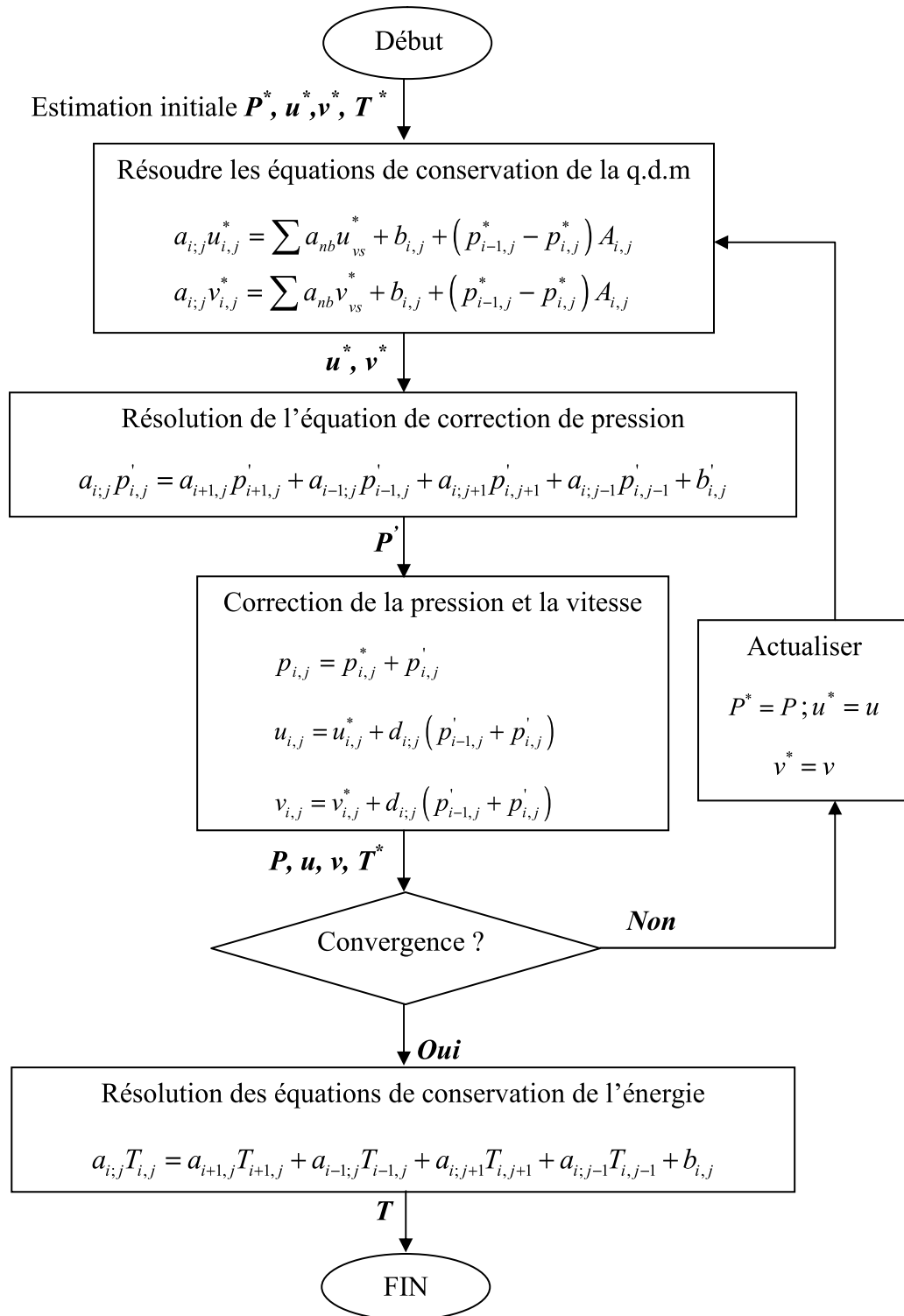


Figure IV.5 Algorithme SIMPLE

IV.7 Méthode de résolution:

Les équations auxquelles on a aboutit constituent en réalité un système algébrique tri-diagonale. On va résoudre le système d'équations itérativement par double balayage en utilisant l'algorithme de THOMAS (TDMA) (**T**ri-**D**iagonal-**M**atrix-**A**lgorithm).

On fixe les variables dépendantes suivant une direction en les considérant comme les coefficients des équations à résoudre. On calcule les variables d'une ligne s'appuyant sur les valeurs dépendantes de la ligne précédente déjà connue.

La forme générale des équations à résoudre est :

$$a_{P(i,j)}\phi_{i,j} = a_{E(i,j)}\phi_{i,j} + a_{W(i,j)}\phi_{i-1,j} + a_{N(i,j)}\phi_{i,j+1} + a_{S(i,j)}\phi_{i,j-1} + b_{i,j} \quad (\text{IV.39})$$

A une itération donnée, l'équation (IV.39) donne en tout point suivant la direction verticale:

$$a_{P(i,j)}\phi_{i,j} = a_{E(i,j)}\phi_{i+1,j}^* + a_{W(i,j)}\phi_{i-1,j}^* + a_{N(i,j)}\phi_{i,j+1} + a_{S(i,j)}\phi_{i,j-1} + b_{i,j} \quad (\text{IV.40})$$

La méthode de résolution consiste à résoudre ces équations sur les lignes (x et y) qui se déplacent de façon à balayer l'ensemble du domaine de calcul.

Les ϕ^* désignent les valeurs connues à l'itération précédente.

On peut ainsi former une équation sur chaque nœud suivant la direction horizontale (E : est, W : west).

En utilisant la notation indicielle, on peut écrire :

$$A_{i,j}\phi_{i,j} = B_{i,j}\phi_{i,j+1} + C_{i,j}\phi_{i,j-1} + D_{i,j} \quad (\text{IV.41})$$

Avec :

$$A_{i,j} = a_{i,j}$$

$$B_{i,j} = a_{N(i,j)}$$

$$C_{i,j} = a_{S(i,j)}$$

$$D_{i,j} = a_{E(i,j)}\phi_{i+1,j}^* + a_{W(i,j)}\phi_{i-1,j}^* + b_{i,j}$$

Soient $P_{i,j}$ et $\psi_{i,j}$ deux coefficients tels que :

$$\phi_{i,j} = P_{i,j}\phi_{i,j+1} + \psi_{i,j} \quad (\text{IV.42})$$

$$\text{D'où} \quad \phi_{i,j-1} = P_{i,j-1}\phi_{i,j} + \psi_{i,j-1} \quad (\text{IV.43})$$

En remplaçant l'équation (IV.41) dans l'équation (IV.43) on obtient :

$$\phi_{i,j} = \left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j} - C_{i,j}P_{i,j-1}} \right) \phi_{i,j+1} + \left(\frac{C_{i,j}\phi_{i,j-1} + D_{i,j}}{A_{i,j} - C_{i,j}P_{i,j-1}} \right) \quad (\text{IV.44})$$

$$P_{i,j} = \left(\frac{B_{i,j}}{A_{i,j} - C_{i,j}P_{i,j-1}} \right) \psi_{i,j} + \left(\frac{C_{i,j}\phi_{i,j-1} + D_{i,j}}{A_{i,j} - C_{i,j}P_{i,j-1}} \right) \quad (\text{IV.45})$$

La procédure de calcul est la suivante :

- Calcul de $P_{i,j}$ et $\psi_{i,j}$ par la condition imposée à la frontière ($j=1$)
- Calcul de $\psi_{i,j}$ et $P_{i,j}$ par la relation (IV.45)
- Calcul de $\psi_{i,m}$ par la condition à la frontière ($j=m$)
- Calcul de $\phi_{i,j}$ de $j=m-1$ à $j=1$ par la relation (IV.42).

IV.8 Critère de convergence:

On peut vérifier la convergence après chaque itération. Le test de convergence est basé sur la comparaison entre les valeurs des variables dépendantes d'une itération à une autre et en chaque nœud du maillage. Pour atteindre la convergence dans nos calculs nous avons utilisé une erreur relative sur ϕ et qui s'écrit pour chaque variable :

$$\max \left| \frac{\phi - \phi^*}{\phi^*} \right| \leq \xi \quad (\text{IV.46})$$

Où ϕ^* est la valeur de ϕ à l'itération précédente.

Dans notre cas, on a fixé $\xi = 10^{-7}$ pour u , v et T .

Conclusion:

La plupart des phénomènes existants dans les applications technologiques sont exprimés en termes d'équations aux dérivées partielles, qui ne peuvent être résolues directement.

Pour cela on utilise une méthode de discrétisation qui nous permet de remplacer les équations aux dérivées partielles non linéaires par un système d'équations algébriques, nous avons choisi la méthode des volumes finis, pour la discrétisation en se basant sur le schéma (loi de puissance). Le système algébrique d'équation obtenu sous forme matricielle est résolu par l'algorithme de THOMAS (TDMA).

Dans la prochaine étape, nous validerons le code de calcul et nous discuterons les résultats obtenus.

Chapitre V

Résultats et

Discussions

Chapitre - V - Résultats et discussions

Introduction

Ce chapitre sera consacré à la présentation et l'analyse des résultats obtenus numériquement de la simulation à l'aide d'un programme basé sur l'algorithme SIMPLE. La résolution des équations a été faite sur un maillage uniforme (201×51), 201 nœuds dans la direction axiale et 51 dans la direction verticale.

L'épaisseur adimensionnelle de la matrice poreuse varie de 0 à 1, le nombre de Darcy de 10^{-4} à 10^{-1} , et le facteur d'aspect est égale à $l/H=50$. Les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur seront examinés en fonction du facteur de perméabilité anisotrope, de l'angle d'anisotropie, du nombre Darcy ainsi que de l'épaisseur de la couche poreuse. L'influence de ces paramètres sur les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur sera mise en évidence.

Avant d'entamer l'étude paramétrique qui étudie l'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et le mécanisme du transfert de chaleur en convection forcée laminaire, nous commencerons d'abord par la validation de notre code de calcul et l'effet du maillage.

V.1 Sensibilité au maillage et validation du code de calcul

Les calculs sont effectués pour un canal d'un facteur d'aspect égal à ($l/H=50$) ; la longueur du canal 50 est beaucoup plus longue que la longueur de développement de la température et de la vitesse.

Les calculs ont été effectués sur un nombre de Prandtl $Pr=0.7$, un coefficient de Forchheimer $F=0$, un nombre de Reynolds $Re=100$ qui assure un écoulement laminaire, et un rapport de conductivité thermique $R_c=K_{eff}/K_f=1$, un rapport de viscosité cinématique $J = \nu_{eff}/\nu_f=1$, et une porosité $\varepsilon=0.9$ dans le but de comparer nos résultats avec les investigations précédentes.

De manière à assurer que les résultats seront indépendants de la taille de la grille, différents maillages ont été examinés, principalement 160×20 , 160×40 , 180×40 , 180×50 , 200×50 et 220×50 . Et pour vérifier l'exactitude des résultats numériques et la fiabilité du code utilisé pour simuler un écoulement laminaire dans un canal partiellement ou entièrement rempli par un milieu poreux, une validation du code numérique a été faite en comparant les résultats de cette simulation avec les trois cas suivants :

- La validation du code de calcul que nous avons élaboré pour résoudre les équations du système étudié avec l'étude analytique d'un écoulement établi entre deux plaques planes horizontales, maintenues à un flux de chaleur constante (écoulement de Poiseuille) [52].

- Une deuxième validation avec l'étude de Degan et al [34] pour un écoulement établi entre deux plaques planes maintenues à un flux de chaleur constant et remplies par un milieu poreux dynamiquement anisotrope (le modèle utilisé dans cette solution est le modèle de Darcy-Brinkman).

- Une troisième validation avec la solution analytique que nous avons élaborée pour (configuration n°1) qui traite le cas d'écoulement dans un canal partiellement poreux (le modèle utilisé dans cette solution est le modèle de Darcy-Brinkman).

V.1.1 Validation avec l'écoulement de Poiseuille

Pour garantir la précision des résultats sans alourdir le code de calcul il est nécessaire de choisir au préalable un nombre de nœuds. Nous avons donc fait des essais avec plusieurs maillages comme il est apparaît au (tableau V.1).

Les résultats obtenus sont calculés en fonction d'un nombre de Darcy très élevé ($Da=10^5$).

Les résultats du (tableau V.1) indiquent qu'à partir d'une grille de (201 x 51) la solution numérique devient très peu sensible au maillage (erreur relative sur la vitesse maximale et sur le nombre de Nusselt dans la région établie inférieur à 1%).

Les résultats du (tableau V.2) montrent l'effet du rapport d'aspect sur le mouvement convectif Pour un nombre de maille constant 201x51, les résultats convergent très rapidement, le rapport d'aspect 50 a été adopté pour tous les cas examinés.

Dans l'essai de comparaison dans le (tableau V.2), nous avons employé la différence de la vitesse maximale, et du nombre de Nusselt dans la région établie. On remarque dans la comparaison des résultats avec l'écoulement de poiseuille [52] qu'il y a une concordance satisfaisante.

x×y	161×21	161×41	181×41	181×51	201×51	221×51
u_{max}	1.4631	1.4797	1.4799	1.4820	1.4823	1.4826
Erreur %	-	2.5015	0.01352	0.1419	0.02024	0.02024
Nu	8.4246	8.3382	8.3385	8.3200	8.3204	8.3209
Erreur %	-	1.0256	0.00360	0.2219	0.00481	0.00601

Tableau V.1 Effet du maillage sur la vitesse maximale u_{\max} , et sur le nombre de Nusselt Nu, pour : $Da=10^5$.

Rapport d'aspect	30	40	50	60	Écoulement de poiseuille
u_{\max}	1.4828	1.4832	1.4823	1.4748	1.5000
Nu	8.3457	8.3244	8.3204	8.3197	8.2350

Tableau V.2 Effet du rapport d'aspect pour un maillage de 201×51 .

Les calculs numériques ont vérifié en traçant la (Figure V.1), qui montre un accord acceptable entre le profil de vitesse axial développé et la solution analytique de l'écoulement de Poiseuille [52].

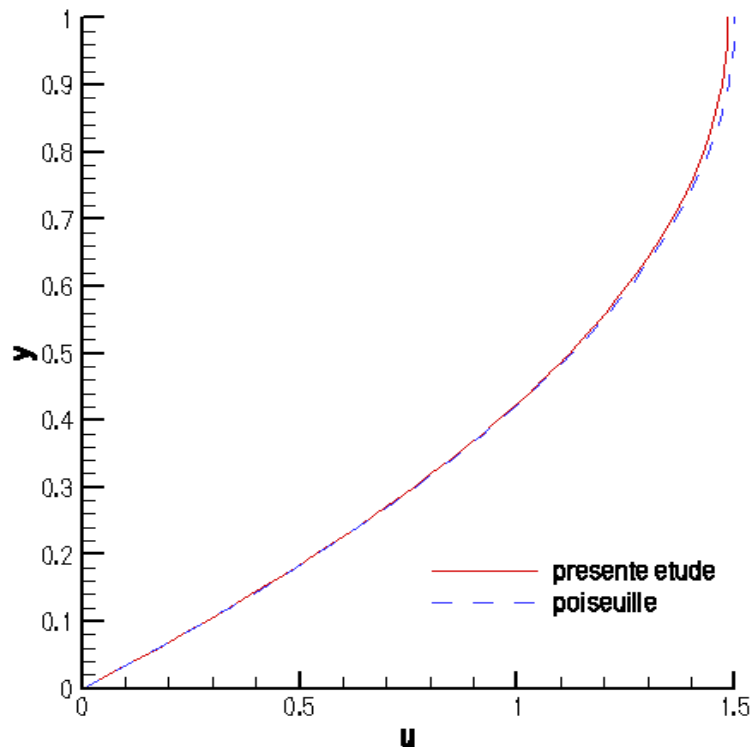


Figure V.1 comparaison entre le profil de vitesse analytique (poiseuille) et le profil de vitesse numérique (présente étude) dans une conduite sans milieu poreux (100% fluide) pour : $Da=10^5$.

V.1.2 Validation avec la solution analytique de Degan et al. [34]

L'effet du maillage sur la précision du code numérique utilisé est illustré dans le (tableau V.3) pour un nombre de Darcy $Da=10^{-1}$, et pour les conditions suivantes : ($Pr=0.7$, $Re=100$, $\varepsilon=0.9$, $F=0$, $K^*=0.1$, $\theta=90^\circ$).

Les résultats du (tableau V.3) indiquent qu'un maillage d'ordre (201 x 51) est suffisant pour avoir des valeurs minimales d'erreurs relatives de la vitesse maximale et du nombre de Nusselt dans la région établie.

Le (tableau V.4) montre les résultats numériques obtenus pour différentes valeurs du rapport d'aspect. Cependant, au fur et à mesure que l'on augmente le rapport d'aspect, les résultats deviennent constants, et proches de la solution analytique de Degan et al [34].

x× y	161× 21	161× 41	181× 41	181× 51	201× 51	221× 51
u_{max}	1.3133	1.3226	1.3227	1.3238	1.3241	1.3243
Erreur %	-	0.7081	0.00756	0.08316	0.02266	0.01510
Nu	9.0096	8.9504	8.9506	8.9361	8.9364	8.9368
Erreur %	-	0.6571	0.00223	0.1620	0.00336	0.00448

Tableau V.3 Effet du maillage sur la vitesse maximale u_{max} , et sur le nombre de Nusselt Nu pour $Da=10^{-1}$, et comparaison des résultats numériques et analytiques.

Facteur d'aspect	30	40	50	60	Degan et al [34]
u_{max}	1.3253	1.3249	1.3241	1.3208	1.3367
Nu	8.9655	8.9411	8.9364	8.9357	8.8612

Tableau V.4 Effet du rapport d'aspect pour un maillage de (201×51).

Dans la (figure V.2), nous avons présenté une comparaison entre le profil de vitesse donné par la présente étude dans la région établie et le profil de vitesse donné par Degan et al [34]. Cette Figure montre un très accord entre l'étude numérique actuelle et la solution analytique.

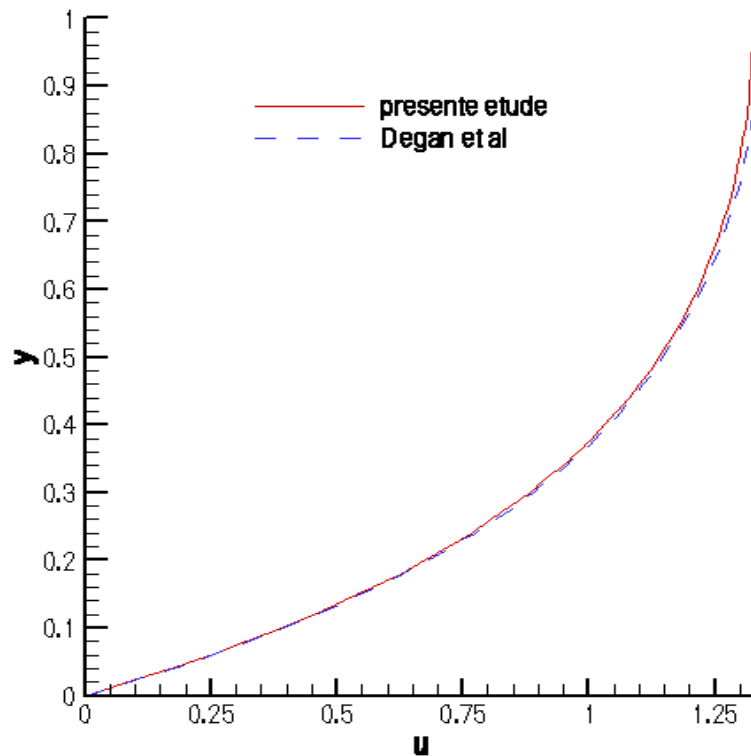


Figure V.2 comparaison entre le profil de vitesse numérique (présente étude) et le profil de vitesse donné par Degan et al [34] pour : $Da=10^{-1}$.

V.1.3 Validation avec la solution analytique (Cf. annexe A) pour un canal partiellement poreux

Dans la (figure V.3), nous avons présenté une comparaison entre le profil de vitesse donné par la présente étude dans la région établie et le profil de vitesse donné par la solution analytique (cf. annexe A) pour : $E=0.5$, $K^*=1$ et $Da=10^{-3}$. Cette Figure montre un très bon accord entre l'étude numérique actuelle et la solution analytique.

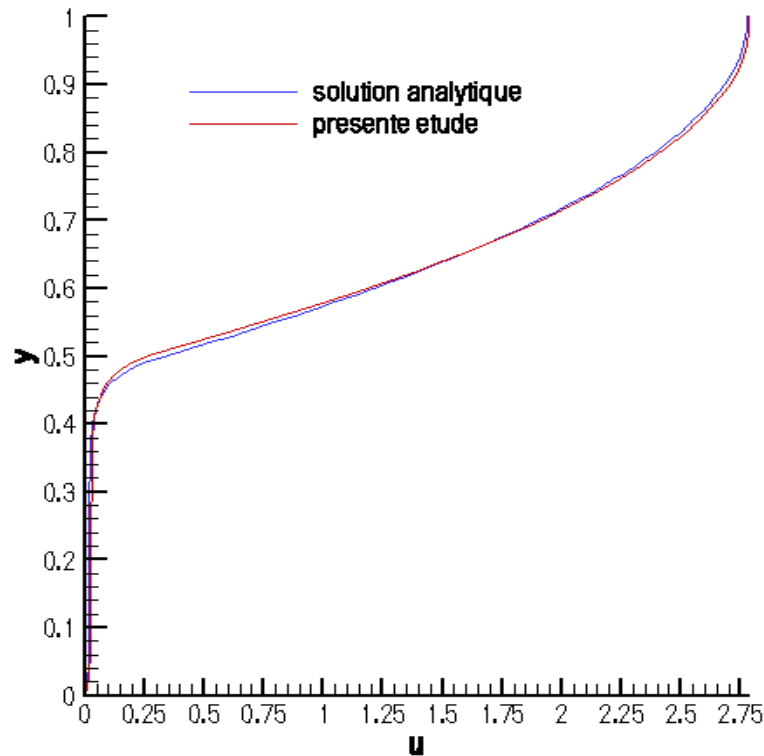


Figure V.3 comparaison entre le profil de vitesse numérique (présente étude) et le profil de vitesse donné par la solution analytique (annexe A) pour : $E=0.5$, $K^*=1$ et $Da=10^{-3}$.

V.2 Résultats obtenus

Maintenant, nous allons exposer et discuter les résultats que nous avons obtenus par notre code numérique. En raison des nombreux paramètres de contrôle qui gouvernent le problème étudié, tous les calculs ont été effectués avec les valeurs des paramètres suivants :

- le facteur d'aspect ($l/H=50$)
- la porosité ($\varepsilon=0.9$)
- le nombre de Prandtl ($Pr=0.7$)
- le nombre de Reynolds ($Re=100$)
- le rapport des conductivités thermiques ($R_c=1$, et $R_c=10$)
- le rapport de viscosité cinématique ($J=1$)
- le coefficient de Forchheimer ($F=0$.)
- le nombre de Darcy varie entre (10^{-4} et 10^{-1})
- un épaisseur de la couche variable $E=0$ (cas fluide), 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.(cas totalement poreux).
- Un angle d'anisotropie ($\theta=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ et 180°)

Ces résultats sont partagés en deux parties :

- La première concerne le cas d'un canal totalement rempli par une matrice poreuse.

- La deuxième concerne le cas d'un canal partiellement rempli par une matrice poreuse, pour connaître essentiellement l'effet de l'épaisseur de la couche poreuse sur le transfert de chaleur (2 configurations ont été étudiées)

V.2.1 Cas d'écoulement dans un canal totalement poreux

V.2.1.1. Effet du rapport de perméabilité anisotrope

Les figures (V.4.a, et V.4.b) montrent respectivement l'effet du rapport de perméabilité K^* sur le profil de vitesse et de température, quand ($Da=10^{-3}$, et $\theta=0^\circ$). La figure (V.4.a) indique que la vitesse au voisinage de la paroi est nulle, parce que selon le modèle de Brinkman les forces visqueuses sont prises en compte (condition de non-glissement sur le mur). La vitesse monte jusqu'à un maximum sur la ligne centrale du canal, dont la valeur dépend de la valeur du K^* , Cette figure montre que la vitesse dans la région centrale du canal est élevée par rapport à un milieu poreux isotrope correspondant ($K^*=1$), quand le rapport de perméabilité $K^* < 1$ ($K^*=0.1$). Une valeur de K^* plus petite que l'unité lorsque $\theta=0^\circ$ correspond à une perméabilité K_2 dans la direction horizontale plus importante que dans la direction transversale, de ce fait la vitesse est maximale dans la région centrale du canal. Naturellement, la tendance inverse est réalisée quand le rapport des perméabilités K^* est rendu plus grand que l'unité (c'est-à-dire, $K^* > 1$). Lorsque $K^* > 1$ et à cause de la faiblesse de la force du mouvement convectif dans la région centrale du canal, nous observons au voisinage des parois du canal une couche limite hydrodynamique mince et une vitesse d'écoulement plus élevée que celle correspondant à $K^* < 1$.

Afin de mieux expliquer et interpréter les résultats, nous présentons les résultats relatifs au champ de température autrement en adoptant comme nouvelle expression adimensionnelle de la température ($T_w - T$).

Les effets de K^* sur le profil de température sont illustrés dans la (figure V.4.b). Du fait de l'augmentation de la vitesse d'écoulement dans la région centrale pour $K^* < 1$ ($K^*=0.1$), on obtient des valeurs de la température adimensionnelle plus élevées pour ce rapport de perméabilités par rapport au cas isotrope $K^*=1$. Bien sûr la tendance s'inverse lorsque $K^* > 1$ ($K^*=10$) du fait du ralentissement de la vitesse de l'écoulement.

Lorsqu'on soumet la paroi à un flux de chaleur constant, plus la température au sein du domaine poreux s'approche de la température de la paroi plus le transfert de chaleur est amélioré (ou favorable) c'est ce que nous remarquons lorsque $K^* > 1$. Cela s'explique par le fait que la vitesse près de la paroi est la plus élevée lorsque la perméabilité $K_2 < K_1$ (c'est à dire $K^* > 1$)

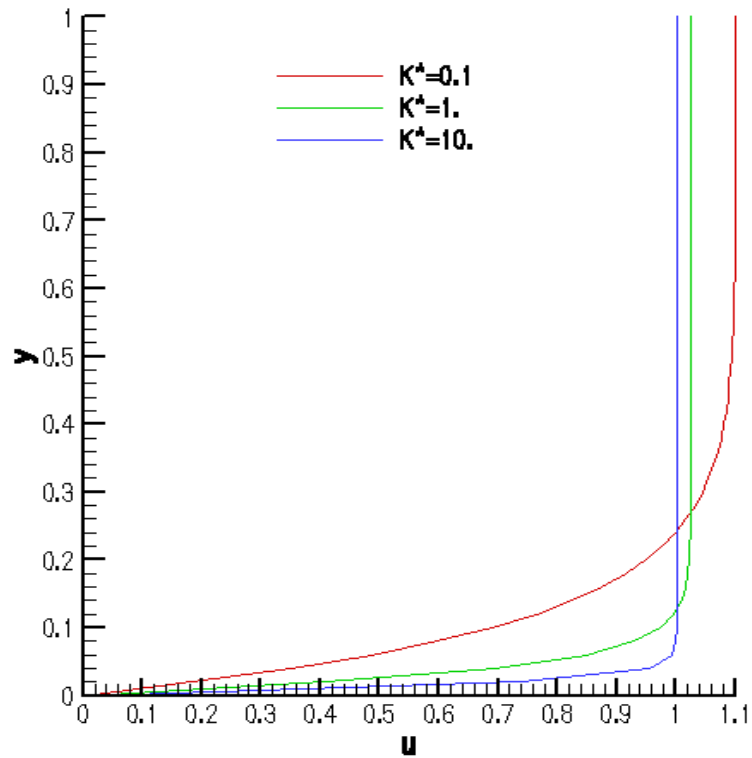


Figure V.4.a le profil de vitesse pour des valeurs différentes de K^* , et $\theta=0^\circ$, et $Da=10^{-3}$.

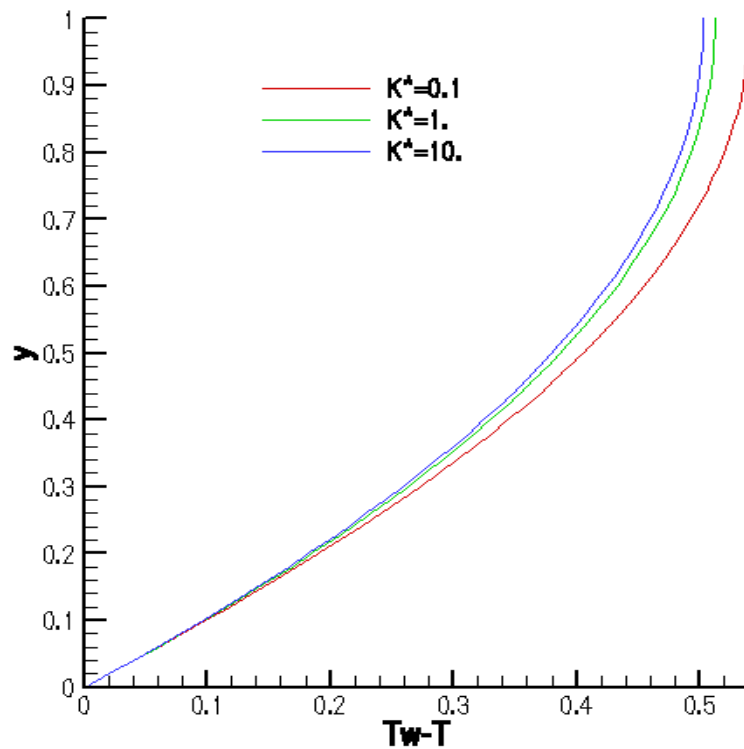


Figure V.4.b le profil de température pour des valeurs différentes de K^* ,
et $\theta=0^\circ$, et $Da=10^{-3}$.

La figure (V.4.c) illustre la variation du coefficient de transfert de chaleur le long du canal pour différents rapports de perméabilités. Du fait du ralentissement de l'écoulement dans la région centrale lorsque $K^* > 1$, et son accélération très proche de la paroi, créant ainsi un meilleur échange thermique par convection entre le fluide et la matrice poreuse par rapport au cas $K^* < 1$ ce qui contribue ainsi à augmenter le coefficient de transfert de chaleur.

La (figure V.4.d) illustre la variation du coefficient de frottement le long du canal pour différents rapports de perméabilités. Nous observons que le coefficient de frottement pour $K^* > 1$ devient plus élevé par rapport au cas isotrope et la tendance s'inverse pour $K^* < 1$. Ceci peut s'expliquer par le fait que lorsque $K^* > 1$, l'écoulement subit un ralentissement plus important que le cas isotrope dans la région centrale du canal comme le montre la (figure V.4.a), alors que l'écoulement devient plus fluide lorsque $K^* < 1$, du fait que la perméabilité dans la direction horizontale est plus élevée que celle dans la direction transversale.

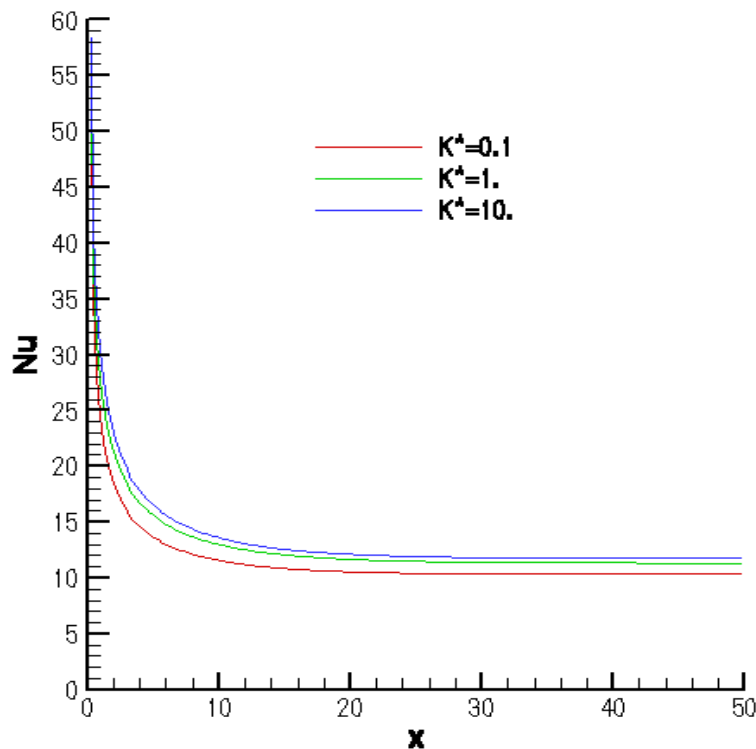


Figure V.4.c. le profil du nombre de Nusselt le long du canal pour des valeurs différentes de K^* , et $\theta=0^\circ$, et $Da=10^{-3}$.

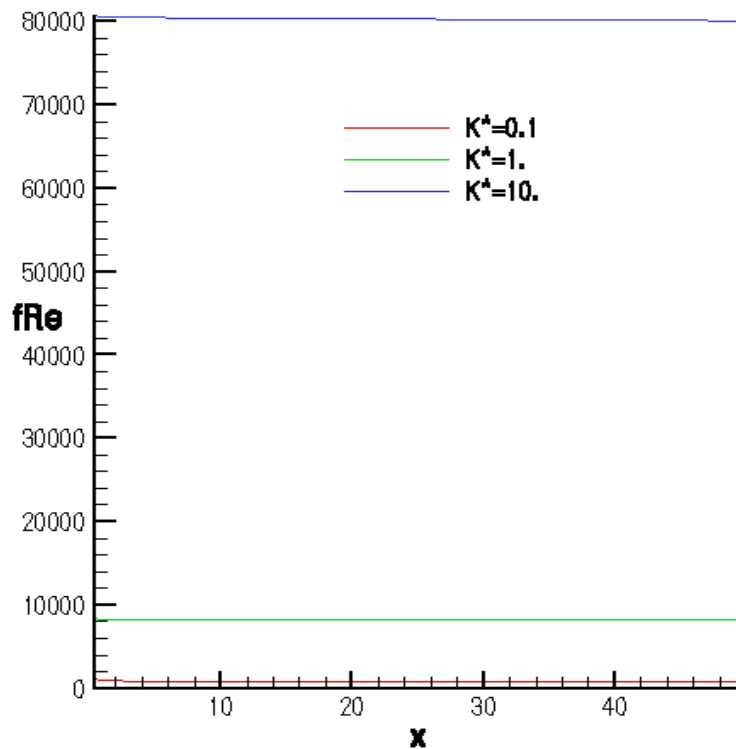


Figure V.4.d. Le profil du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différentes de K^* , et $\theta=0^\circ$, et $Da=10^{-3}$.

Dans la (figure V.5), le coefficient de frottement (fRe) est tracé comme une fonction du nombre Da dans le canal poreux pour $\theta = 45^\circ$, et pour des valeurs différentes de K^* (0.01, 1, et 5). Cette figure montre que, pour une valeur fixe du nombre Da , le coefficient de frottement dans la région établie est plus élevé quand $K^* = 5$ ($K^* > 1$) et plus faible quand $K^* = 0.01$ ($K^* < 1$), comparativement au cas d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$).

Les résultats indiquent que les courbes, pour une valeur indiquée de K^* tendent asymptotiquement vers la situation pure fluide ($fRe=24.2$). Le nombre de Darcy exigé pour atteindre cette limite augmente pendant que la valeur de K_1 est rendue plus grande.

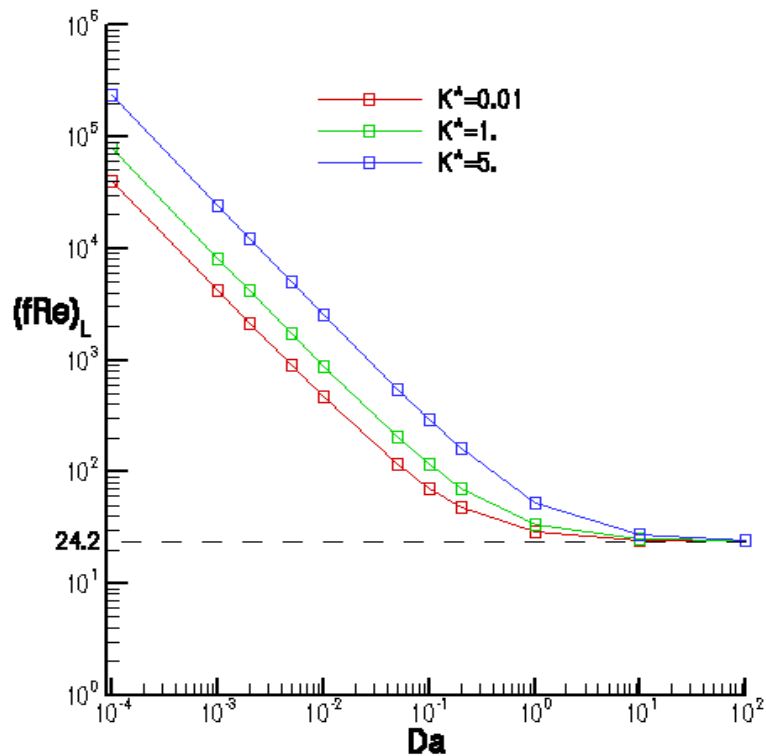


Figure V.5 effet du nombre de Darcy Da sur le coefficient de frottement pour $\theta=45^\circ$, et pour des valeurs différentes de K^* .

Dans la (figure V.6) le nombre de Nusselt est tracé en fonction du Da pour $\theta=0^\circ$ et pour des valeurs différentes de K^* ($K^*=0.25$, $K^*=1$, $K^*=5$). Nous observons d'après ce tracé que, quand le nombre Da est assez petit, le transfert de chaleur par convection augmente proportionnellement à K^* . Au fur et à mesure que le Da augmente, l'effet de l'anisotropie de la matrice poreuse devient de moins en moins important, et le coefficient de transfert de chaleur dans le canal tend progressivement vers une valeur constante égal à 8.32 indépendamment de l'anisotropie du milieu poreux (milieu fluide).

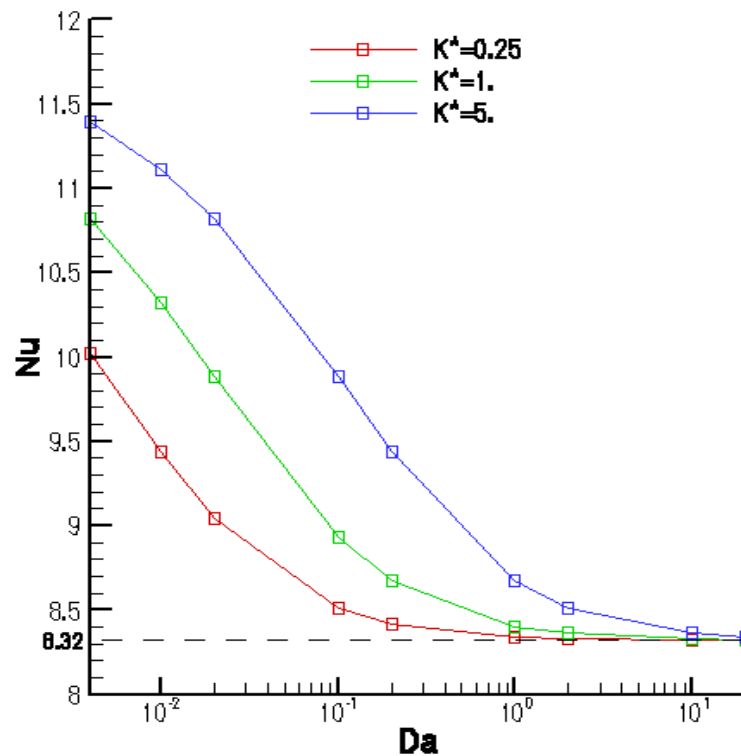


Figure V.6 comparaison du nombre de Nusselt moyen en fonction de Da pour des valeurs différentes de K^* , et pour $\theta=0^\circ$.

V.2.1.2 effet de l'angle d'anisotropie

Les effets de l'angle d'inclinaison θ des axes principaux sur les profils de vitesse et de température sont présentés dans les figures (V.7.a et V.7.b), pour $Da=10^{-2}$ et $K^*=0.25$ ($K^* < 1$). Nous observons une dépendance du profil de vitesse et de température avec l'angle d'inclinaison θ . Les résultats indiquent que la vitesse d'écoulement est maximum quand $\theta=0^\circ$ et minimum quand $\theta=90^\circ$ au voisinage du centre du canal. Ainsi, l'écoulement convectif est maximum quand l'orientation de l'axe (ox_r' ou oy_r') avec la basse perméabilité du milieu poreux anisotrope est parallèle à la pesanteur. Cependant à partir de la position $y=0.4$ lorsqu'on s'approche de la paroi cette tendance s'inverse et nous observons une accélération d'écoulement du fluide pour $\theta=90^\circ$.

Sur la (figure V.7.b) Du fait de l'augmentation de la vitesse de l'écoulement convectif pour $\theta=0^\circ$, on obtient des valeurs de la température adimensionnelle plus élevées pour cet angle d'orientation par rapport au cas $\theta=90^\circ$. Cependant plus la température au sein du domaine poreux s'approche de la température de la paroi plus le transfert de chaleur est favorisé c'est ce que nous remarquons lorsque $\theta=90^\circ$. Cela s'explique par le fait que la vitesse près de la paroi est la plus élevée lorsque l'angle $\theta=90^\circ$.

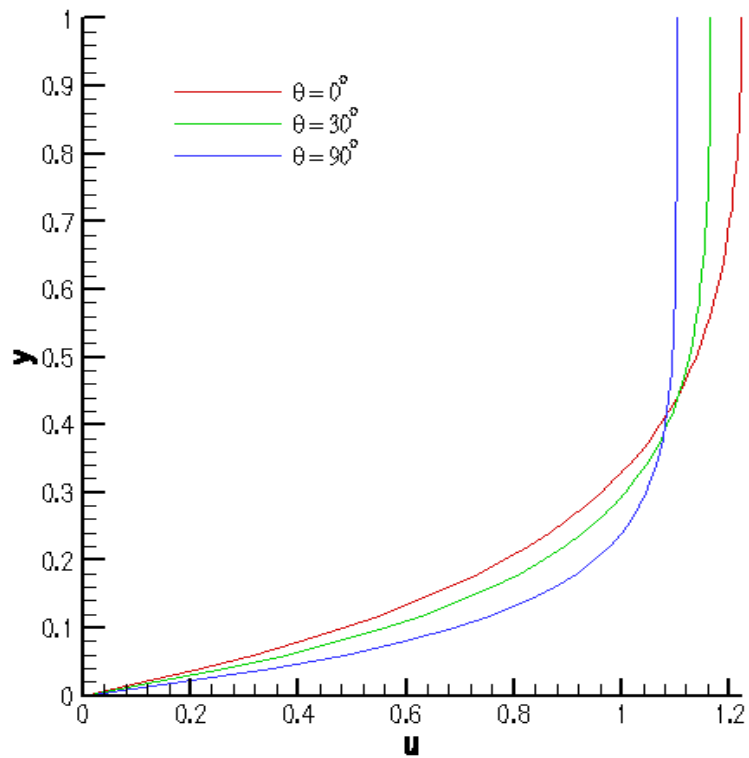


Figure V.7.a profil de vitesse pour des valeurs différentes de θ , et ($K^*=0.25$, et $Da=10^{-2}$)

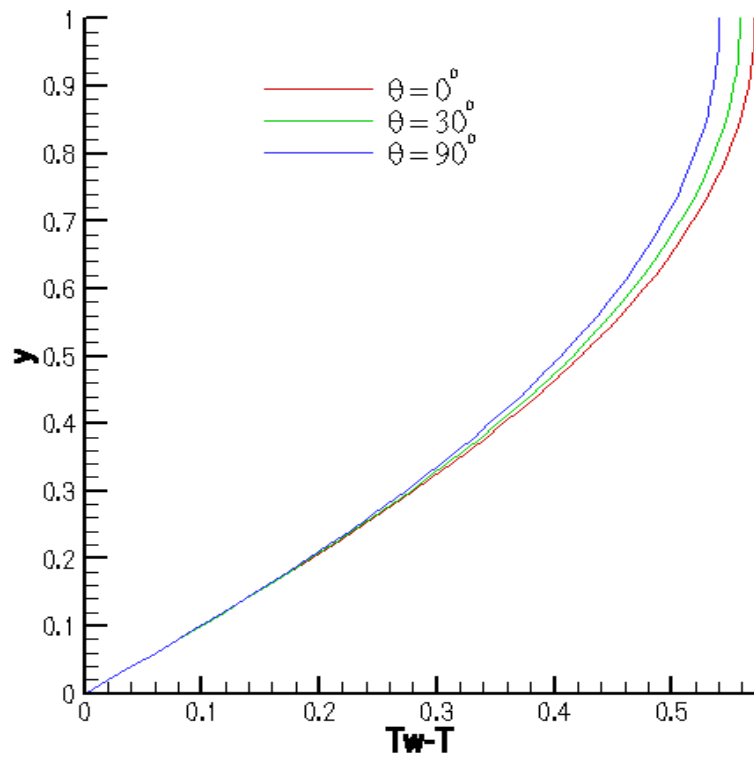


Figure V.7.b profil de température pour des valeurs différentes de θ , et $K^*=0.25$, et $Da=10^{-2}$

Les figures (V.7.c, et V.7.d), montre que le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement dans la région établie augmentent avec l'augmentation de l'angle d'anisotropie θ pour un facteur de perméabilité $K^*=0.25$ ($K^* < 1$) et un nombre de Darcy constant $Da=10^{-2}$ c'est-à-dire K_1 constant donc la perméabilité K_2 est supérieur à K_1 , le coefficient de frottement est minimum (maximum) si l'axe de perméabilité élevé K_2 est parallèle (perpendiculaire) à la direction de l'écoulement.

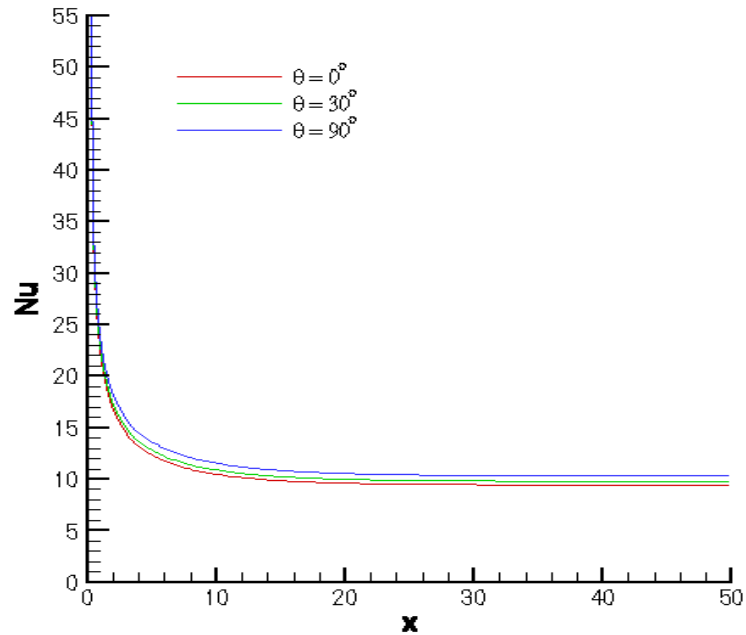


Figure V.7.c. le profil du nombre de Nusselt le long du canal pour des valeurs différents de θ , et $K^*=0.25$, et $Da=10^{-2}$

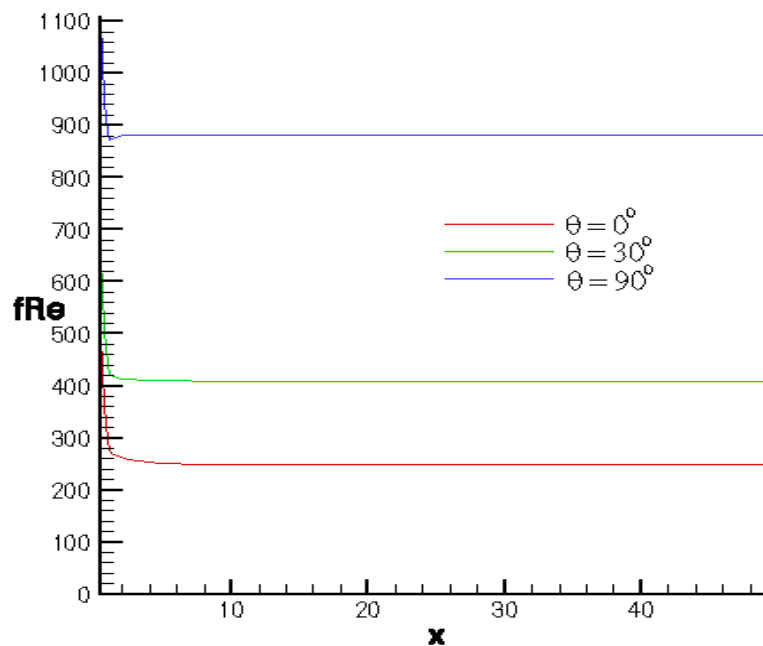


Figure V.7.d. Le profil du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différents de θ , et $K^*=0.25$, et $Da=10^{-2}$

Pour $K^* > 1$ ($K^* = 5$), les figures (V.8.a, et V.8.b) indiquent que la vitesse d'écoulement est maintenant maximum quand $\theta = 90^\circ$ et minimum $\theta = 0^\circ$ dans la région centrale du canal. Ainsi, le mouvement de convection est maximum quand l'orientation de l'axe (ox_r' ou oy_r') avec la basse perméabilité du milieu poreux anisotrope est parallèle à la pesanteur.

Le profil de la température est le même comportement décrit précédemment (Cf. figure.7.b) avec une température adimensionnelle plus élevée pour $\theta = 90^\circ$.

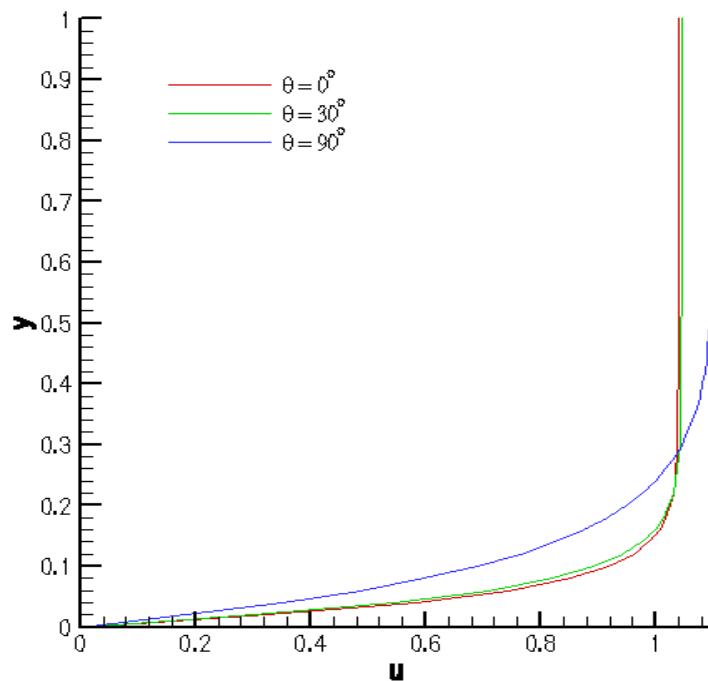


Figure V.8.a. profil de vitesse pour des valeurs différentes de θ , et $K^* = 5$, et $Da = 10^{-2}$.

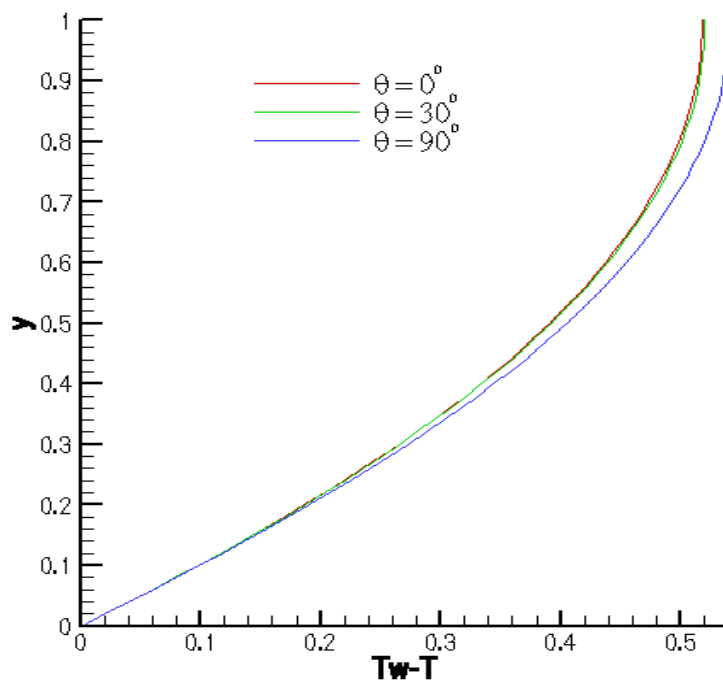


Figure V.8.b. profil de température pour des valeurs différentes de θ , et $K^* = 5$, et $Da = 10^{-2}$.

Dans le cas d'une perméabilité ($K^*=5$) supérieure au cas isotrope les figures (V.8.c, et V.8.d), montrent que le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement dans la région établie diminuent avec l'augmentation de l'angle d'anisotropie θ .

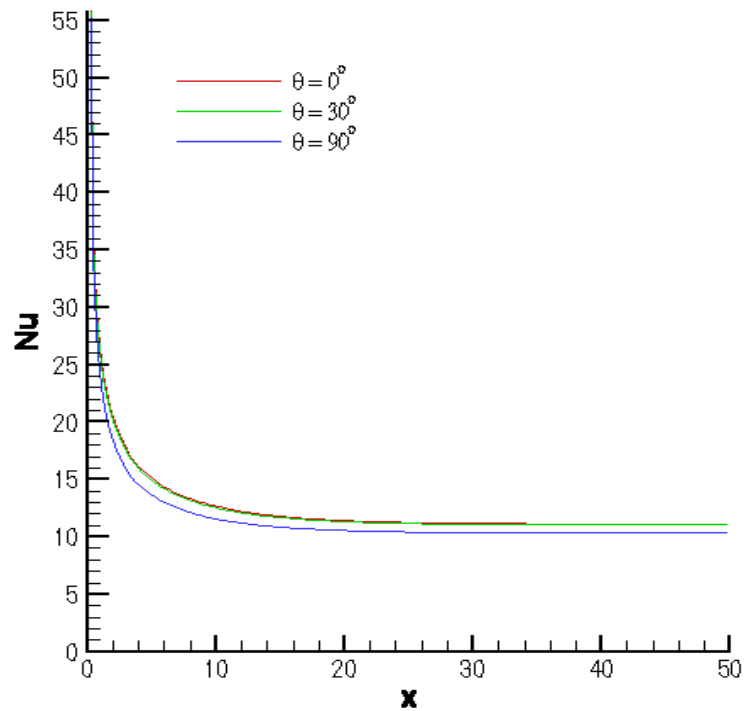


Figure V.8.c. le profil du nombre de Nusselt le long du canal pour des valeurs différentes de θ , et $K^*=5$, et $Da=10^{-2}$

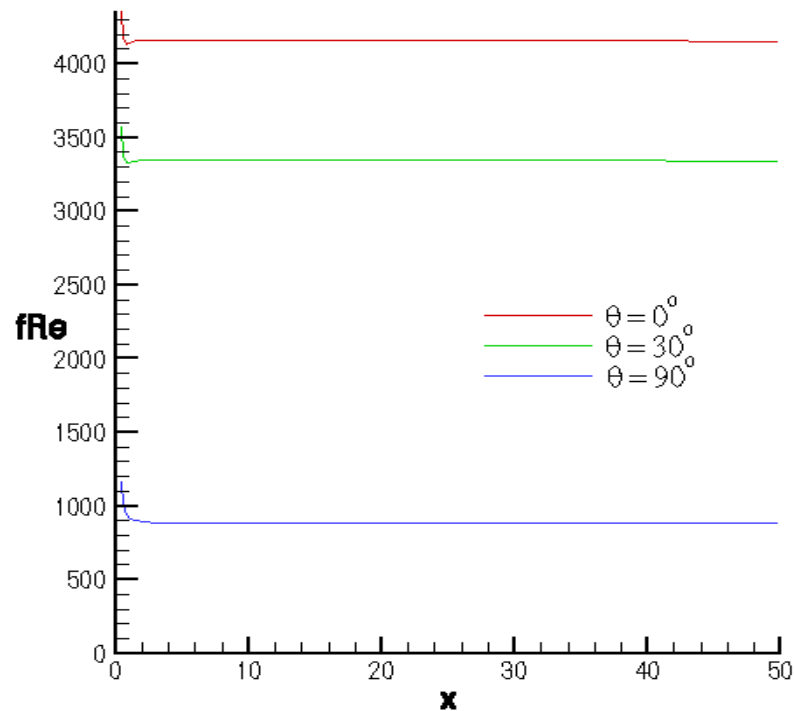


Figure V.8.d. Le profil du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différentes de θ , et $K^*=5$, et $Da=10^{-2}$

La (figure V.9) représente la variation du nombre de Nusselt dans la région établie en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour un nombre de Darcy (Da) variant entre 10^{-4} et 10^{-1} et pour $K^*=0.25$ et $K^*=5$.

Les résultats montrent qu'indépendamment du rapport K^* , la variation du nombre de Nusselt en fonction de l'angle θ est importante pour les valeurs élevées du nombre de Da alors que cette dépendance devient de plus en plus faible lorsque le nombre de Da devient très faible.

Les résultats représentés dans la figure affirment que l'insertion du milieu poreux dans la conduite est avantageuse, où le nombre de Nusselt prend sa valeur maximale ($Nu \approx 12$).

Les résultats indiquent que le Nu dépend fortement de l'orientation d'anisotropie du milieu poreux. Pour $K^*=0.25$, le transfert convectif est maximal à 90° c'est à dire, quand la perméabilité de la direction verticale est maximum, mais il est minimum à 0° et 180° , c'est-à-dire, quand la perméabilité dans la direction verticale est minimale.

L'inverse est vraie pour $K^*=5$, pour lequel le transfert de chaleur est maintenant minimum à 90° et maximum à 0° et 180° .

Nous avons donc pour $K^* > 1$ ($K^* < 1$), le Nu est minimum (maximum) à $\theta = 90^\circ$ et maximum (minimum) à 0° et 180° . Aussi, il découle de ces résultats qu'un transfert de chaleur convectif maximal (minimal) est atteint quand l'orientation de l'axe de la perméabilité élevée est parallèle (perpendiculaire) à la pesanteur.

Avec la diminution du nombre de Darcy (Da tend vers 0), le nombre de Nusselt Nu tend asymptotiquement vers une valeur constante qui ne dépend pas de K^* et de θ ($Nu=12$).

Lorsque nous augmentons le nombre Da, le transfert de chaleur dans le canal tend progressivement vers le cas purement fluide ($Nu=8.32$).

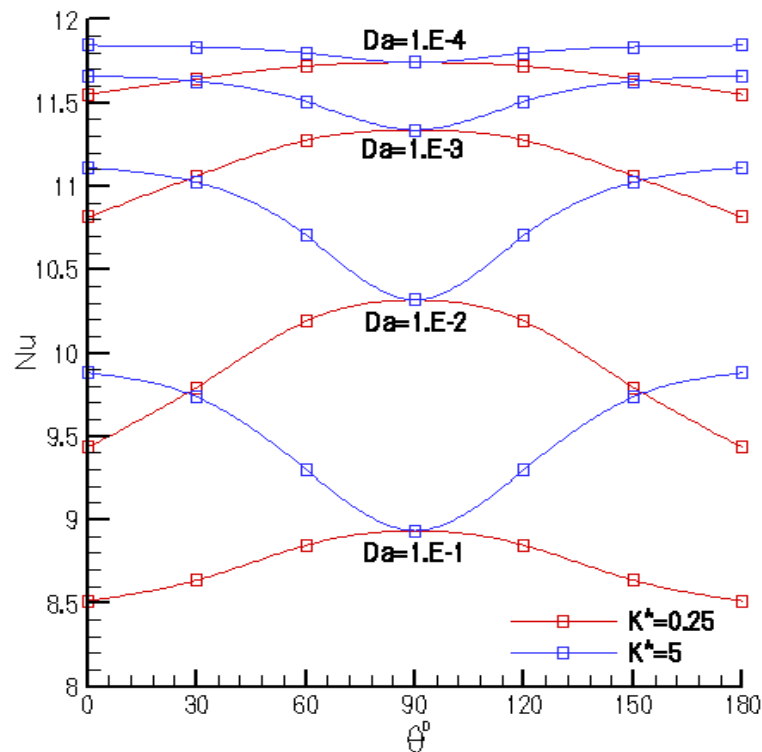


Figure V.9 effet du nombre de Darcy Da et de l'angle d'anisotropie θ sur le Nombre de Nusselt pour $K^*=0.25$ et $K^*=5$.

V.2.2. Cas du canal partiellement poreux (Configuration n°1 : couche poreuse du côté des parois)

V.2.2.1 Effet du rapport de perméabilité anisotrope

Les figures (V.10.a, et V.10.b) montrent respectivement l'effet du rapport de perméabilité K^* sur le profil de vitesse et de température, pour ($Da=10^{-3}$, et $\theta=0^\circ$, et une épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse $E=0.6$).

Nous observons, pour un rapport K^* donné, que la présence de la couche poreuse d'épaisseur finie tend à ralentir l'écoulement du fluide qui s'évade vers la région fluide offrant une moindre résistance à l'écoulement. La figure V.10.a montre que pour un rapport de perméabilité $K^* < 1$, c'est-à-dire la perméabilité dans la direction de l'écoulement plus élevée que celle dans le sens transversal, la couche poreuse offre moins de résistance et le fluide s'écoule plus facilement comparativement au cas isotrope ($K^*=1$). La tendance s'inverse lorsque la perméabilité dans la direction de l'écoulement plus faible que celle dans le sens transversal ($K^* > 1$), la couche poreuse offre plus de résistance comparativement au cas isotrope ($K^*=1$) et en raison de la faiblesse du mouvement convectif, une plus grande partie du débit massique s'échappe vers la région fluide (sans milieu poreux).

La vitesse maximale est atteinte sur l'axe de symétrie du canal ; la plus élevée étant celle correspondant au cas où $K^* > 1$ et la moins élevée celle correspondant au cas où $K^* < 1$.

L'effet de K^* sur le profil de température est illustré dans la (figure V.10.b). On observe une diminution de la température adimensionnelle pour $K^* = 0.1$ (écart entre la température et celle de la paroi est faible) et une augmentation de la température adimensionnelle pour $K^* = 10$ si l'on compare avec le cas isotrope ($K^* = 1$), l'écart entre la température et celle de la paroi pour les différentes courbes est plus important par rapport au canal complètement poreux. Les figures (V.10.c) et (V.10.d) montrent respectivement le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement locaux le long du canal pour différents rapports de perméabilités K^* (avec $\theta = 0^\circ$, $E = 0.6$, et $Da = 1.D^{-3}$). Les variations du nombre de Nusselt sur la figure (V.10.c) montrent que le coefficient de transfert de chaleur est maximal lorsque $K^* < 1$ ce qui vient conforter le fait que la vitesse du fluide est la plus élevée près des parois pour le cas $K^* < 1$ donnant lieu à un meilleur courant de convection. Sur cette figure nous observons aussi que la longueur d'établissement de l'écoulement dépend étroitement de K^* . La longueur la plus courte a lieu pour $K^* > 1$. Quant au coefficient de frottement (figure V.10.d), ces variations sont contraires à celle du nombre de Nusselt. Pour $K^* < 1$, il y a une opposition moindre à l'écoulement du fait que la perméabilité horizontale est moins faible que la perméabilité verticale donnant lieu ainsi un faible coefficient de frottement.

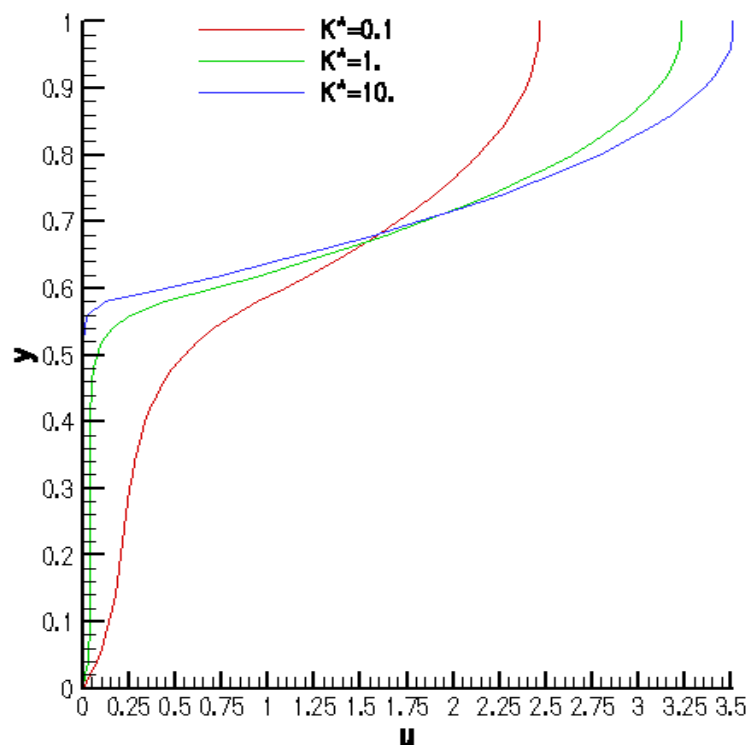


Figure V.10.a. le profil de vitesse pour des valeurs différents de K^* , et pour ($\theta = 0^\circ$, et $E = 0.6$, et $Da = 0.001$)

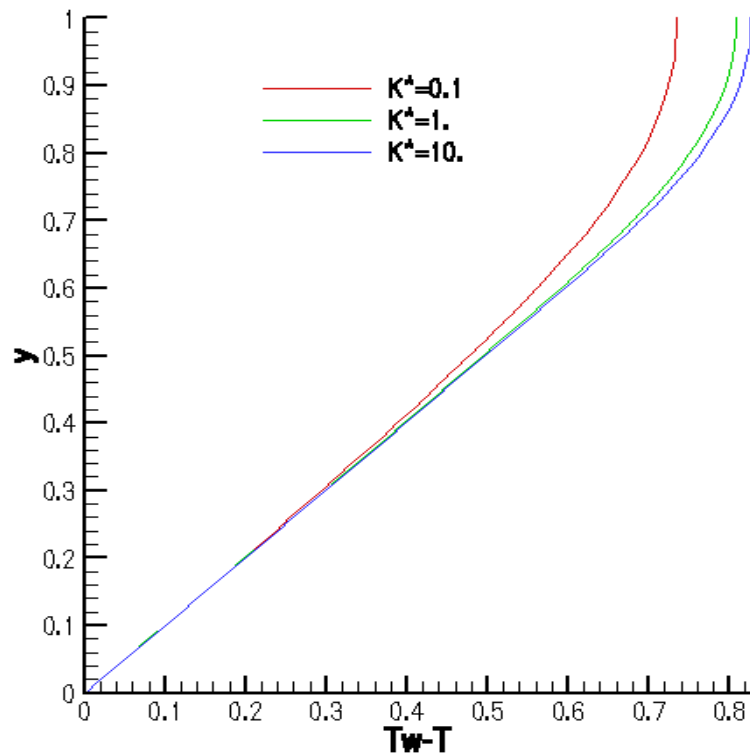


Figure V.10.b. le profil de température pour des valeurs différentes de K^* , et pour ($\theta=0^\circ$, et $E=0.6$, et $Da=0.001$)

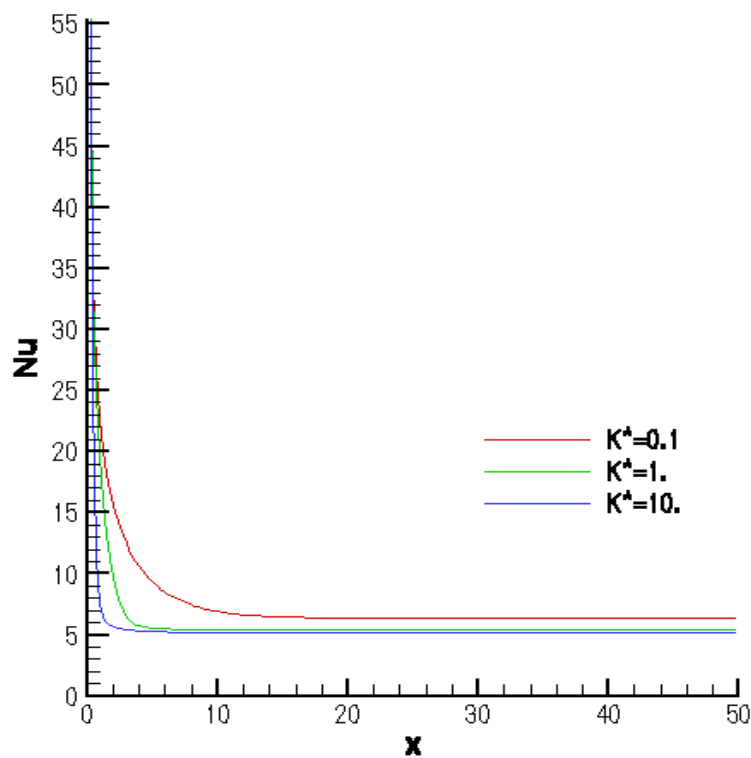


Figure V.10.c. la variation du nombre de Nusselt pour des valeurs différentes de K^* , et pour ($\theta=0^\circ$, et $E=0.6$, et $Da=0.001$).

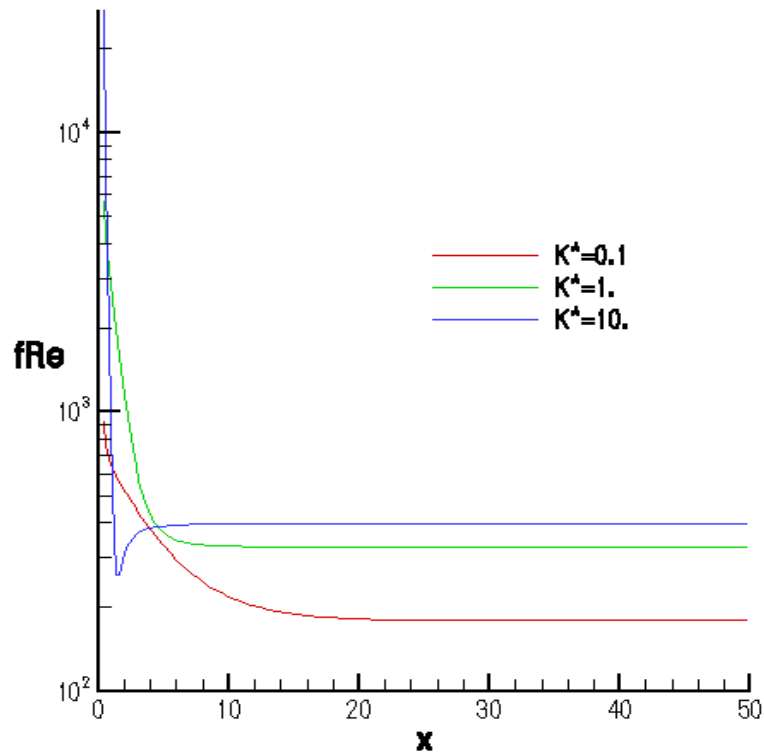


Figure V.10.d. la variation du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différentes de K^* , et pour ($\theta=0^\circ$, et $E=0.6$, et $Da=0.001$)

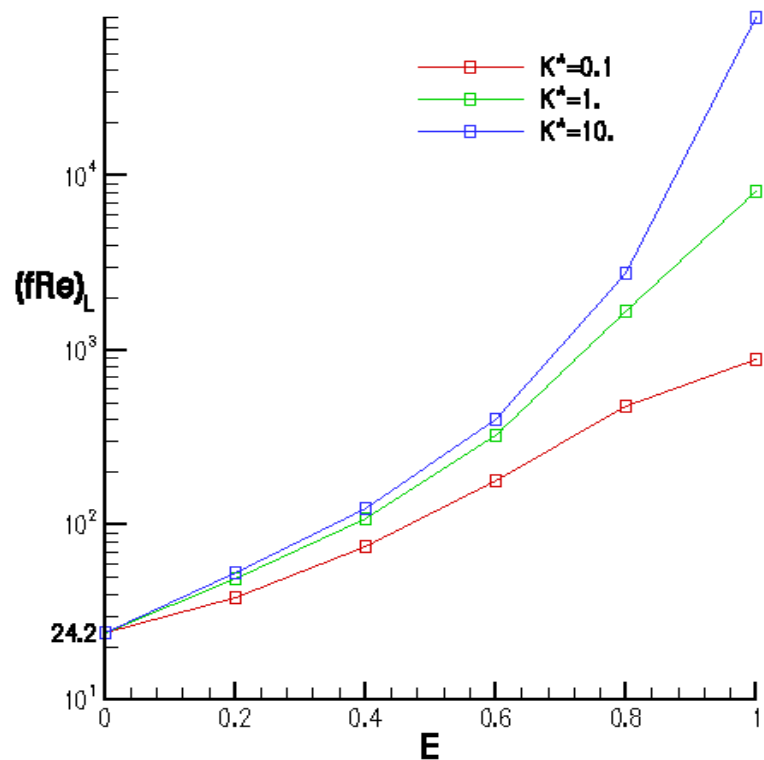


Fig. V.11. Variation du coefficient de frottement en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents K^* , $\theta=0^\circ$, $Da=10^{-3}$.

La (figure V.11) illustre la variation du coefficient de frottement en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents rapports de perméabilités.

Le coefficient de frottement est une fonction croissante de l'épaisseur de la couche poreuse. Pour une épaisseur E donnée et un angle d'orientation nul, le coefficient de frottement le plus élevé correspond à un rapport de perméabilité $K^* > 1$ c'est-à-dire lorsque la perméabilité dans la direction de l'écoulement est plus faible que celle de la direction transversale.

Les figures (V.12a et V12b) illustrent la variation du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents rapports de perméabilité, respectivement pour deux rapports de conductivités thermiques différents ($Rc=1$ et $Rc=10$).

Pour $Rc=1$, le nombre de Nusselt décroît avec l'augmentation de l'épaisseur E jusqu'à atteindre une valeur minimale pour une épaisseur E donnée. Ce résultat était prévisible car déjà rencontré dans la littérature pour le cas isotrope ($K^*=1$). Cette épaisseur optimale dépend du rapport de perméabilité K^* . Nous observons aussi qu'une matrice poreuse avec un rapport $K^* > 1$ donne lieu au plus bas coefficient de transfert de chaleur pour E inférieure ou égale à 0.93, cette tendance s'inverse pour $0.93 < E < 1$.

Pour $Rc=10$, le nombre de Nusselt devient une fonction croissante de l'épaisseur de la couche poreuse E . Pour une épaisseur E donnée, le nombre de Nusselt le plus élevé est obtenu pour un rapport de perméabilité $K^* < 1$.

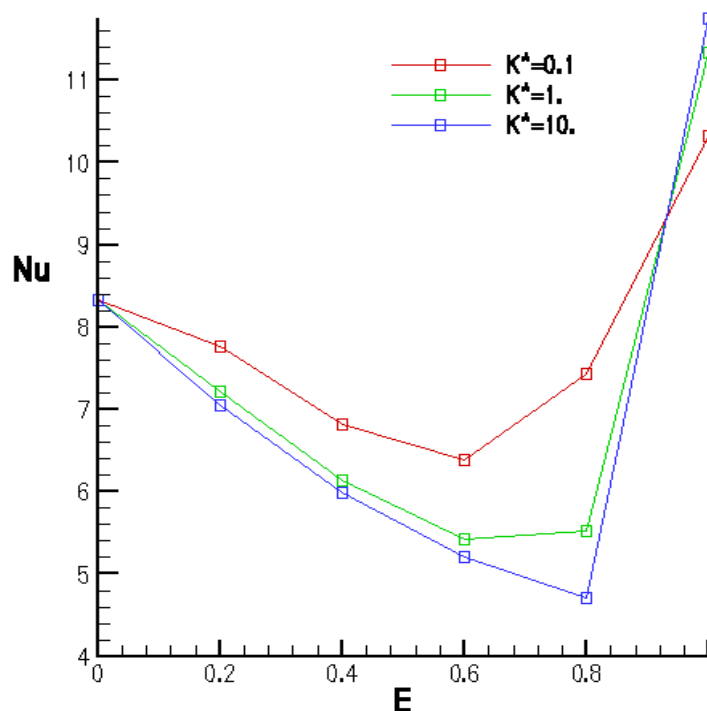


Fig. V.12.a. Variation du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents K^* , $\theta=0^\circ$, $Da=10^{-3}$, $Rc=1$

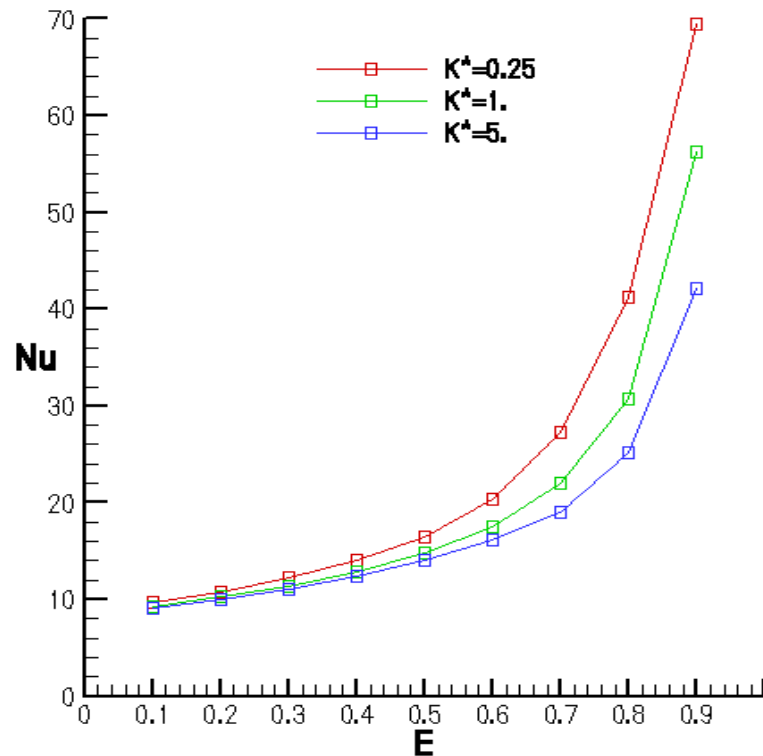


Fig. V.12.b Variation du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents K^* , $\theta=0^\circ$, $Da=10^{-3}$, $Rc=10$.

V.2.2.2 Effet de l'angle d'anisotropie

Les effets de l'angle d'inclinaison des axes principaux θ sur le profil de vitesse est présenté sur la (figure V.13.a), pour $Da=10^{-2}$, et $E=0.6$, et $K^*=0.25$ ($K^* < 1$). Les résultats indiquent que la vitesse d'écoulement dans la région poreuse est maximal quand $\theta=0^\circ$ (perméabilité dans le sens de l'écoulement plus grande), et minimal quand $\theta=90^\circ$ (perméabilité dans le sens de l'écoulement plus petite). Ainsi, la vitesse d'écoulement sur l'axe centrale du canal est maximale quand l'orientation de l'axe de la basse perméabilité du milieu poreux anisotrope est parallèle à la pesanteur, par contre dans la région fluide nous remarquons que la situation s'inverse à cause de la conservation de débit massique dans la section du canal.

Pour le profil de température (figure.V.13.b) nous observons un écart minimale entre la température et la température de la paroi pour $\theta=0^\circ$, et maximales pour $\theta=90^\circ$, ce qui explique les variations du nombre de Nusselt (figure.V.13.c) dont la valeur la plus élevée a lieu pour $\theta=0^\circ$. Tandis que le coefficient de frottement (figure.V.13.d) le plus élevé a lieu pour $\theta=90^\circ$ pour lequel la vitesse dans la couche poreuse est la plus faible.

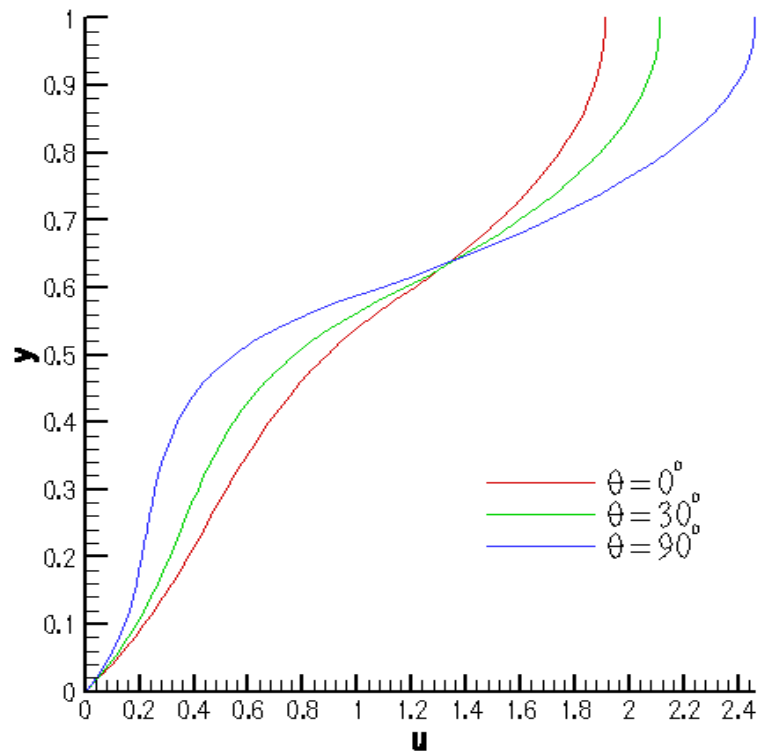


Figure V.13.a. profil de vitesse pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=0.25$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

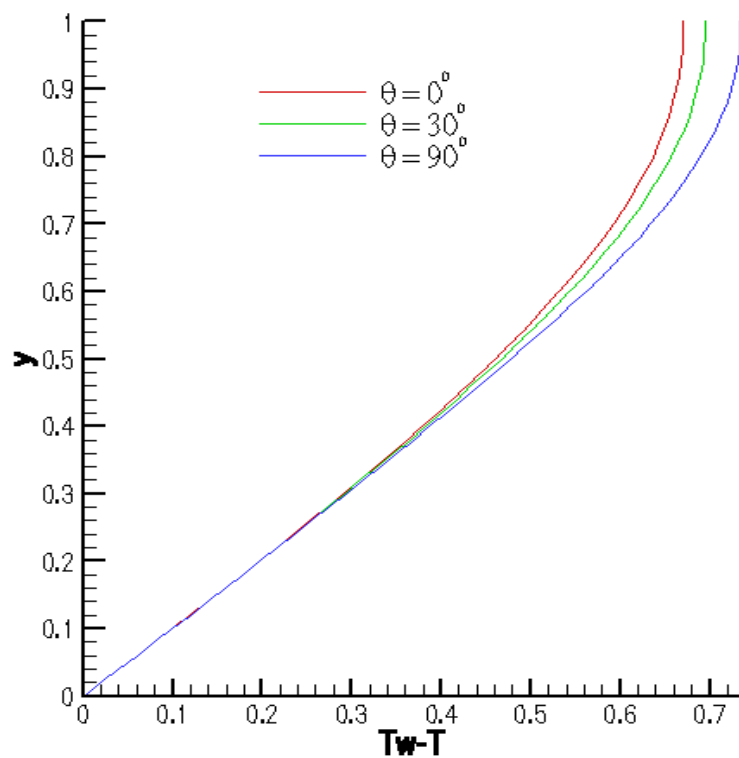


Figure V.13.b. profil de température pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=0.25$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

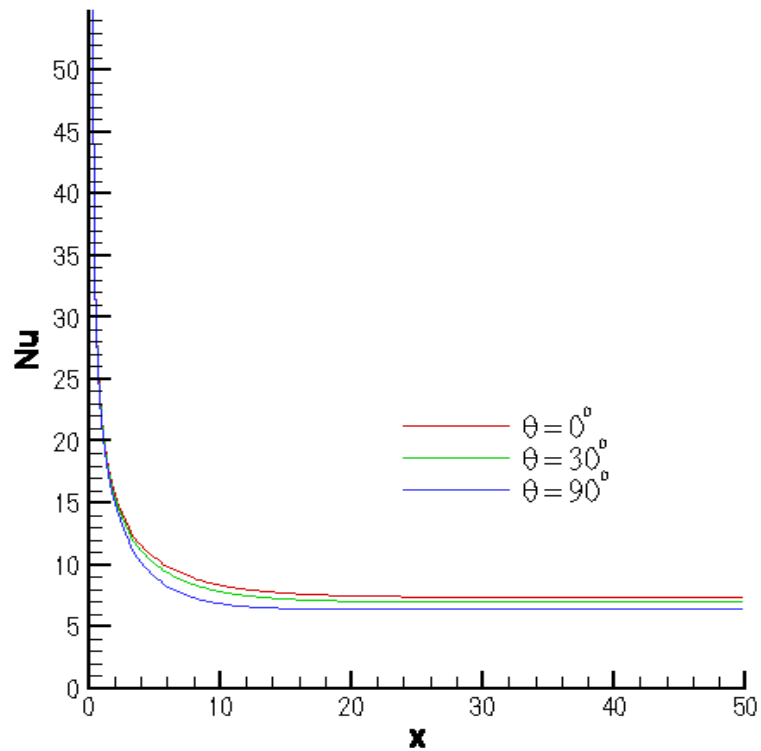


Figure V.13.c. la variation du nombre de Nusselt le long du canal pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=0.25$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

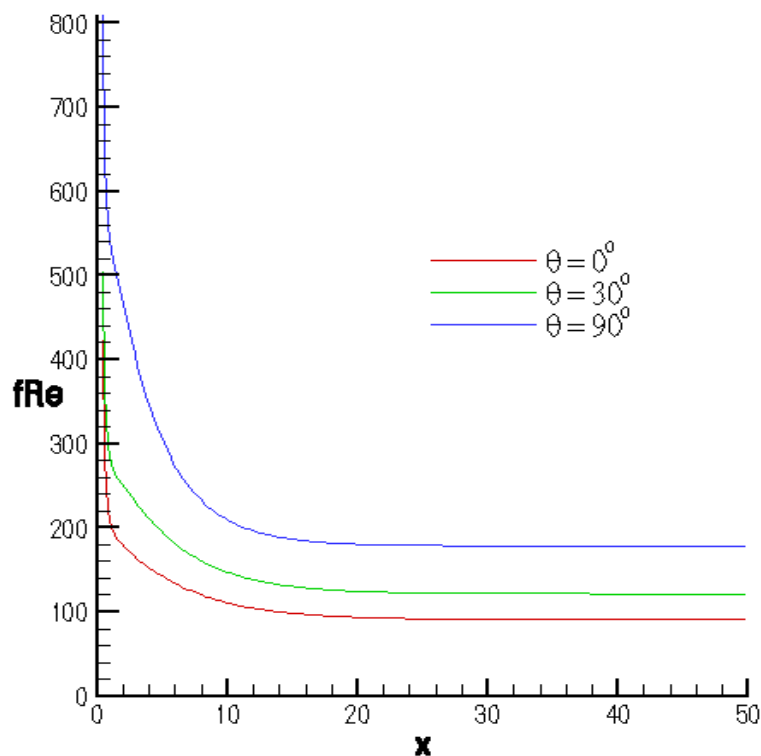


Figure V.13.d. la variation du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=0.25$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

Les effets de l'angle d'inclinaison des axes principaux θ sur le profil de vitesse est présenté sur la (figure V.14.a) pour $K^*=5$ ($K^*>1$), en fixant $Da=10^{-2}$ et $E=0.6$,

Les résultats indiquent que la vitesse dans la région poreuse est maximal quand $\theta=90^\circ$ (perméabilité dans le sens de l'écoulement plus grande), et minimal quand $\theta=0^\circ$ (perméabilité dans le sens de l'écoulement plus faible). Ainsi, la vitesse est maximale quand l'orientation de l'axe de la basse perméabilité du milieu poreux anisotrope est parallèle à la pesanteur, par contre dans la région fluide nous remarquons que la situation s'inverse à cause de la conservation de débit massique dans la section du canal.

Pour le profil de température (figure.V.14.b) nous observons des valeurs minimales de température pour $\theta=90^\circ$ (la température s'approche de la température de la paroi), et maximales pour $\theta=0^\circ$, (la température s'écarte de la température de la paroi) ce qui explique les variations du nombre de Nusselt (figure.V.14.c) dont la valeur la plus élevée a lieu pour $\theta=90^\circ$. Tandis que le coefficient de frottement (figure.V.14.d) le plus élevé a lieu pour $\theta=0^\circ$ pour lequel la vitesse dans la couche poreuse est la plus faible.

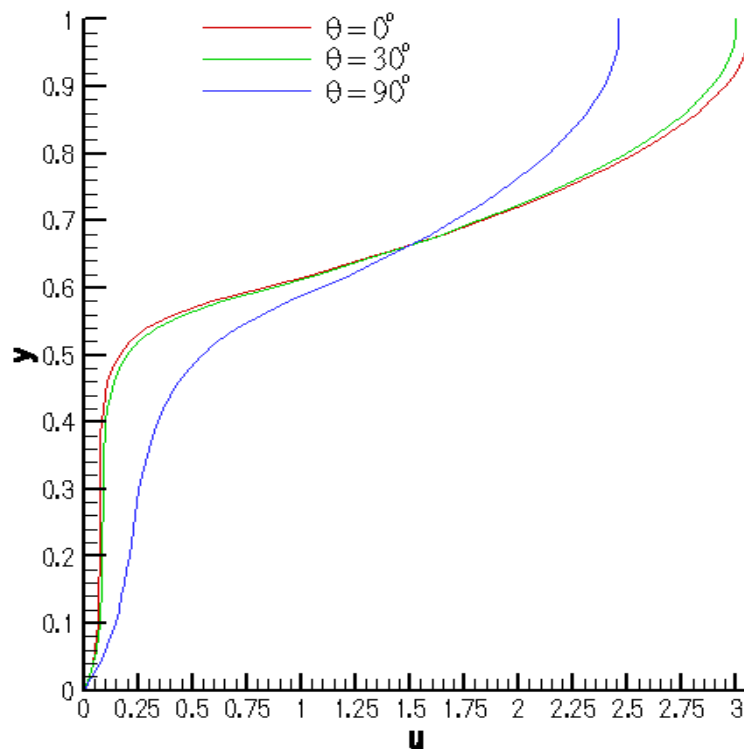


Figure V.14.a. profil de vitesse pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=5$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

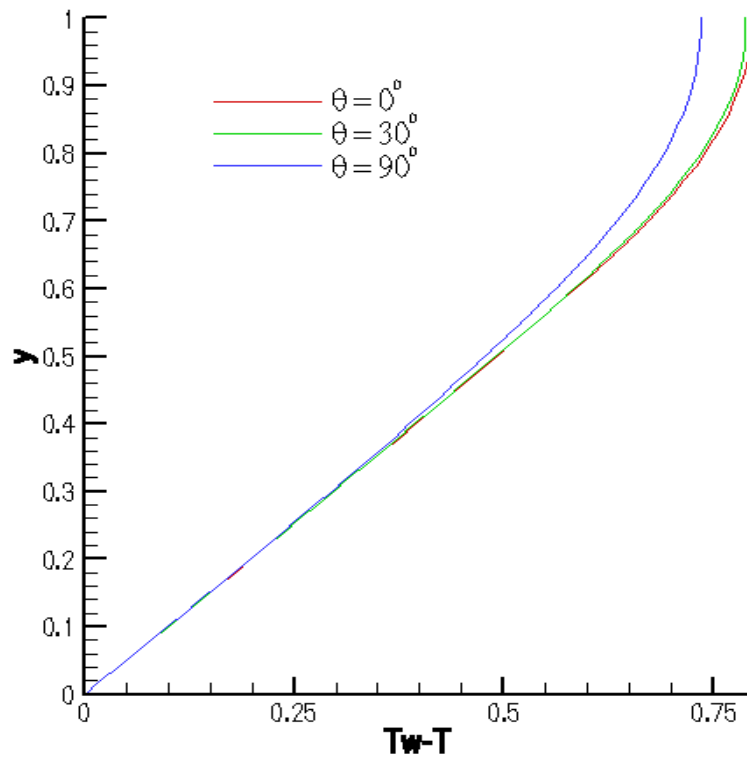


Figure V.14.b. profil de température pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=5$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

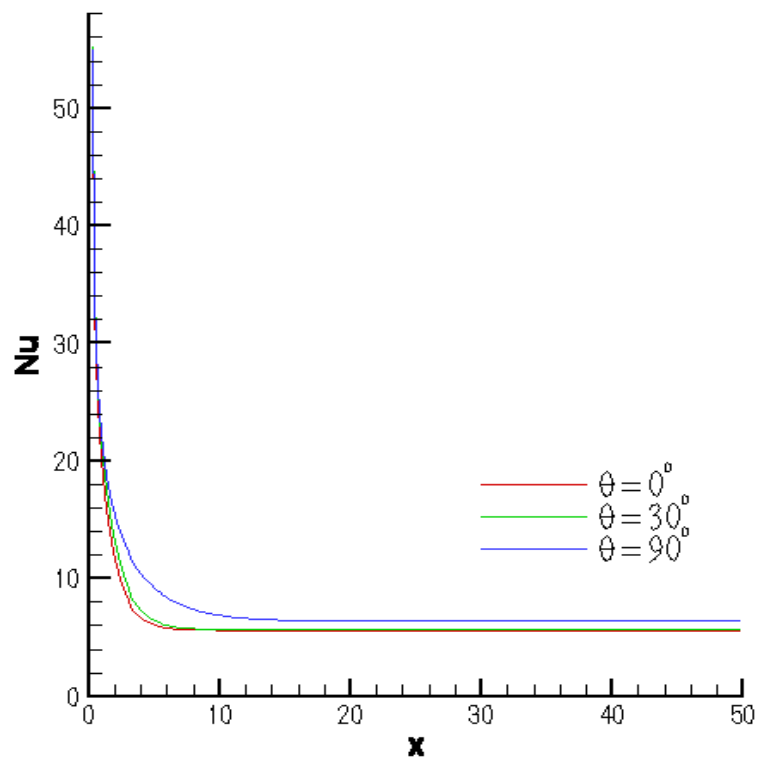


Figure V.14.c. la variation du nombre de Nusselt le long du canal pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=5$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

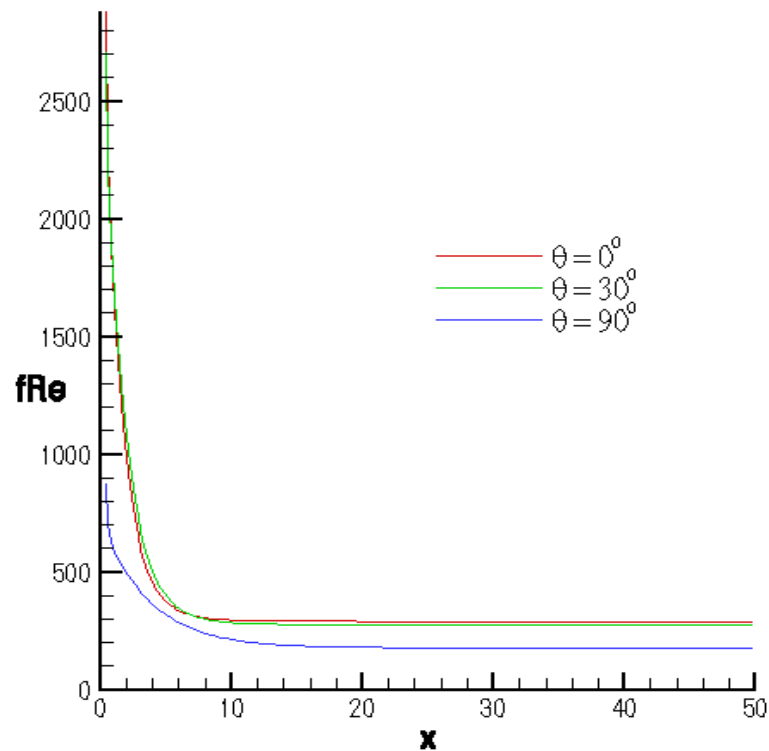


Figure V.14.d. la variation du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différentes de θ , et pour ($K^*=5$, $E=0.6$ et $Da=0.01$).

La (figure V.15) représente la variation du nombre de Nusselt dans la région établie en fonction de l'angle d'anisotropie θ pour $K^*=0.25$ et $K^*=5$ avec un nombre de Darcy (Da) variant de 10^{-4} à 10^{-1} et pour une épaisseur de la couche poreuse fixée ($E=0.6$).

Les résultats indiquent que le Nu dépend fortement de l'orientation d'anisotropie du milieu poreux. Pour $K^*=0.25$, le transfert convectif est au minimum à 90° c'est à dire, quand la perméabilité de la direction verticale est maximum, mais il est maximum à 0° et 180° , c'est à dire, quand la perméabilité dans la direction verticale est minimum.

L'inverse est vrai pour $K^*=5$, pour lequel le transfert de chaleur est maintenant maximum à 90° et minimum à 0° et 180° , c'est-à-dire pour $K^* > 1$ ($K^* < 1$), le nombre de Nusselt Nu est maximum (minimum) à $\theta=90^\circ$ et minimum (maximum) à 0° et 180° . Ainsi, il découle de ces résultats qu'un transfert de chaleur convectif est minimum (maximum), quand l'orientation de l'axe de la perméabilité élevée de l'anisotropie est parallèle (perpendiculaire) à la pesanteur.

Remarque: L'influence de l'angle d'anisotropie et du facteur de perméabilité anisotrope sur le nombre de Nusselt pour $E=0.6$ est inversée si l'on compare avec le cas totalement poreux $E=1$ (Cf. figure .V.9).

Pour le domaine purement de Darcy (Da tend vers 0), le nombre de Nusselt Nu tend vers une valeur constante qui ne dépend pas de K^* et de θ . De la même façon lorsqu'on augmente le nombre de Darcy Da , le nombre de Nusselt devient plus grand et tend vers le cas purement fluide.

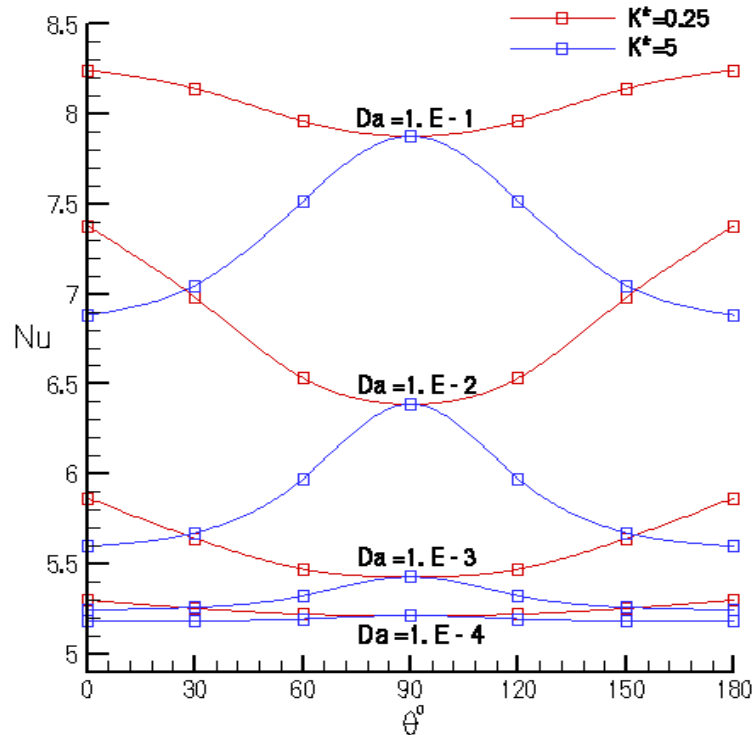


Figure V.15 Effet du nombre de Darcy Da et de l'angle d'anisotropie θ sur le Nombre de Nusselt pour ($K^*=0.25$ et $K^*=5$), et ($E=0.6$).

L'effet de l'épaisseur de la couche poreuse, et du nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt, sur le coefficient de frottement pour un rapport de perméabilité anisotrope $K^*=0.25$, est étudié pour des valeurs différentes de l'angle d'anisotropie ($\theta=0^\circ$, $\theta=30^\circ$, $\theta=90^\circ$) (voir respectivement les figures V.16.a, et V.16.b).

Le nombre de Nusselt décroît avec l'augmentation de l'épaisseur E jusqu'à atteindre une valeur minimale pour une épaisseur E donnée. Cette épaisseur optimale ne dépend presque pas du nombre de Darcy. Nous observons aussi qu'une matrice poreuse avec un nombre de Darcy très faible donne lieu au plus bas coefficient de transfert de chaleur pour E inférieure ou égale à 0.9, cette tendance s'inverse pour $0.9 < E < 1$.

Le nombre de Nusselt dépasse le cas purement fluide pour une épaisseur E qui se situe entre (0.9 et 1).

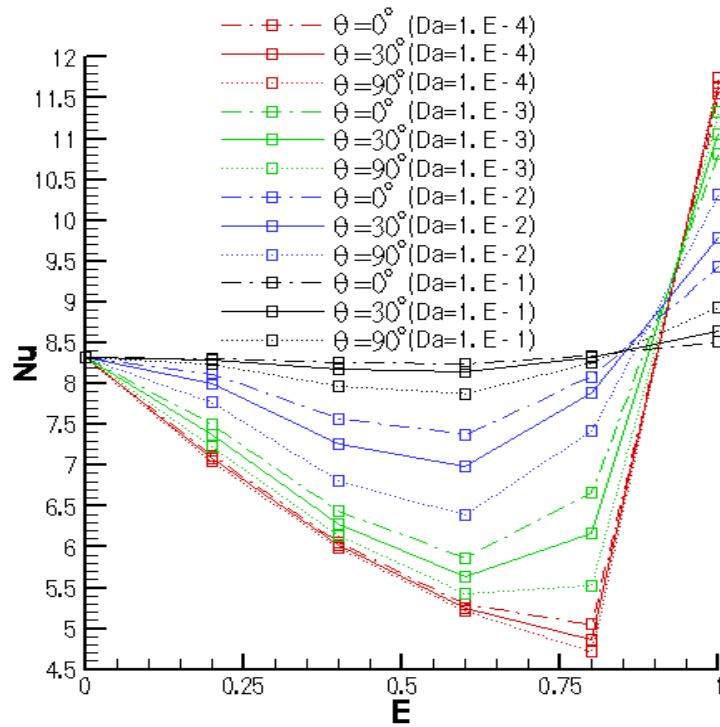


Figure V.16.a Effet combiné de l'angle d'anisotropie, du nombre de Darcy Da et de l'épaisseur E sur le nombre de Nusselt dans la région établie, pour ($K^*=0.25$).

La (figure V.16.b), montre que le coefficient de frottement varie proportionnellement avec l'épaisseur E et aussi avec l'angle θ .

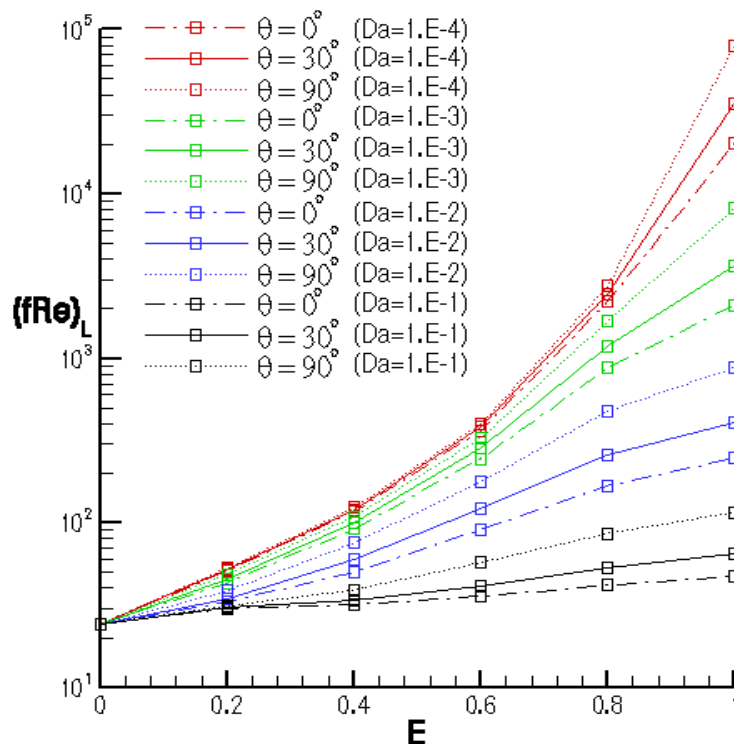


Figure V.16.b Effet combiné de l'angle d'anisotropie, du nombre de Darcy Da et de l'épaisseur E sur le coefficient de frottement dans la région établie, pour ($K^*=0.25$).

V.2.3. Cas du canal partiellement poreux (Configuration n°2 : couche poreuse au centre du canal)

V.2.3.1. Effet du rapport des perméabilités

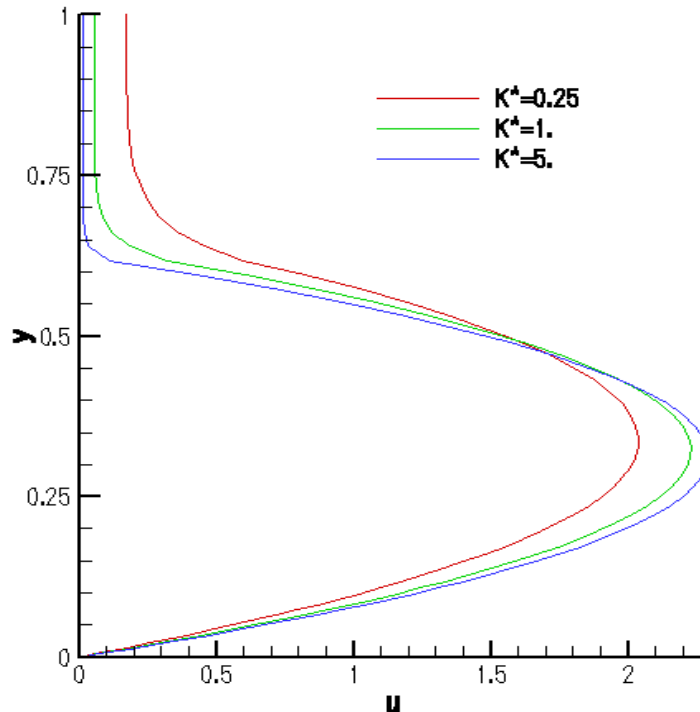


Figure V. 17.a Profil de vitesse pour des valeurs différents de K^* , et pour ($\theta=0^\circ$, et $E=0.4$, et $Da=0.001$)

Les figures (V. 17.a, et V. 17.b) montrent respectivement l'effet du rapport de perméabilité K^* sur le profil de vitesse et de température, pour ($Da=0.001$, et $\theta=0^\circ$, et une épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse $E=0.4$).

Nous observons, pour un rapport K^* donné, que la présence de la couche poreuse d'épaisseur finie tend à ralentir l'écoulement du fluide au centre du canal pour le pousser à s'évader vers la région fluide entre la couche poreuse et la paroi solide du canal où l'écoulement s'accélère puisque le fluide rencontre une moindre résistance à l'écoulement. La (figure V. 17.a) montre que pour un rapport de perméabilité $K^* < 1$, c'est-à-dire la perméabilité dans la direction de l'écoulement plus élevée que celle dans le sens transversal, la couche poreuse offre moins de résistance et le fluide s'écoule plus facilement comparativement au cas isotrope ($K^*=1$). La tendance s'inverse lorsque la perméabilité dans la direction de l'écoulement plus faible que celle dans le sens transversal ($K^* > 1$), la couche poreuse offre plus de résistance comparativement au cas isotrope ($K^*=1$). Par conséquent lorsque $K^* > 1$ et en raison de la faiblesse du mouvement convectif, dans la couche poreuse une plus grande partie du débit massique s'échappe vers la région fluide (sans milieu poreux).

La vitesse maximale est atteinte près de l'axe de symétrie de la région fluide du canal ($y=0.3$) ; la plus élevée étant celle correspondant au cas où $K^* > 1$ et la moins élevée celle correspondant au cas où $K^* < 1$.

L'effet de K^* sur le profil de température est illustré dans la (figure V. 17.b). On observe une diminution de la différence entre la température et celle de la paroi pour $K^* = 0.25$ ($K^* < 1$) et une augmentation de la différence pour $K^* = 5$ ($K^* > 1$) si l'on compare avec le cas isotrope ($K^* = 1$).

Les figures (V. 17.c) et (V. 17.d) montrent que le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement dans la région établie augmentent avec l'augmentation du rapport des perméabilités K^* .

Les figures (V.17.c) et (V.17.d) montrent respectivement le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement locaux le long du canal pour différents rapports de perméabilités K^* (avec $\theta=0^\circ$, $E=0.4$, et $Da=1.D^{-3}$). Les variations du nombre de Nusselt sur la figure (V.17.c) montrent que le coefficient de transfert de chaleur est maximal lorsque $K^* > 1$ ce qui vient conforter le fait que la vitesse du fluide est la plus élevée près des parois pour le cas $K^* > 1$ donnant lieu à un meilleur courant de convection. Sur cette figure nous observons aussi que la longueur d'établissement de l'écoulement est pratiquement indépendante de K^* . Quant au coefficient de frottement, le sens de ces variations est pratiquement le même que celui du nombre de Nusselt. Pour $K^* > 1$, il y a une opposition plus forte à l'écoulement du fait que la perméabilité horizontale est plus basse que la perméabilité verticale donnant lieu à un coefficient de frottement plus élevé.

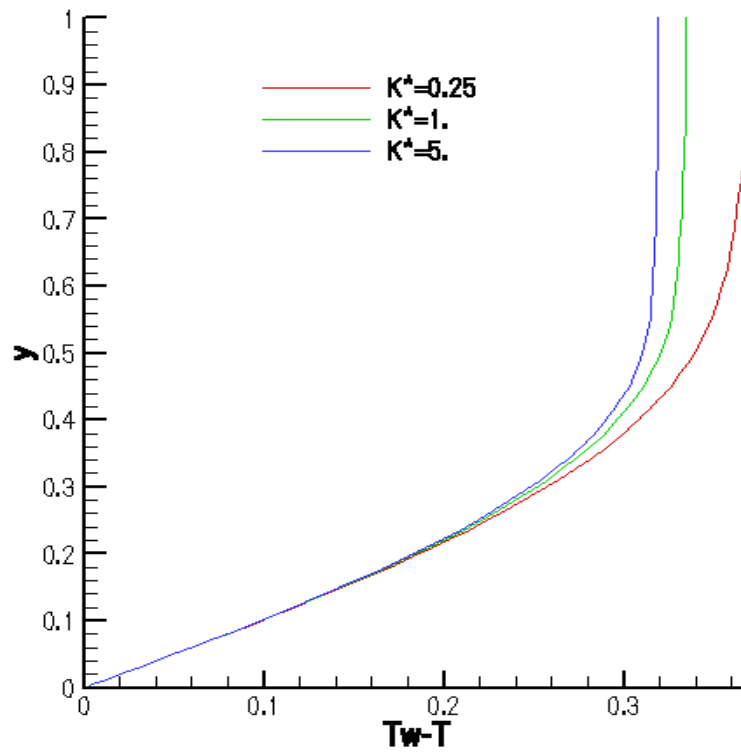


Figure V. 17.b Profil de température pour des valeurs différents de K^* , et pour ($\theta=0^\circ$, $E=0.4$, et $Da=0.001$)

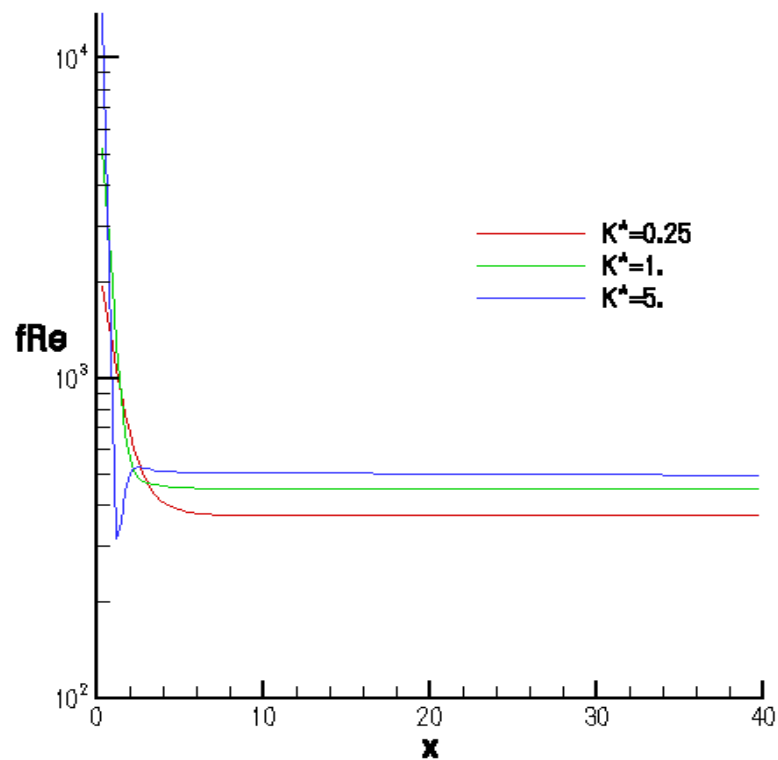


Figure V. 17.c Variation du coefficient de frottement le long du canal pour des valeurs différentes de K^* ($E=0.4$, $\theta=0^\circ$, et $Da=10^{-3}$).

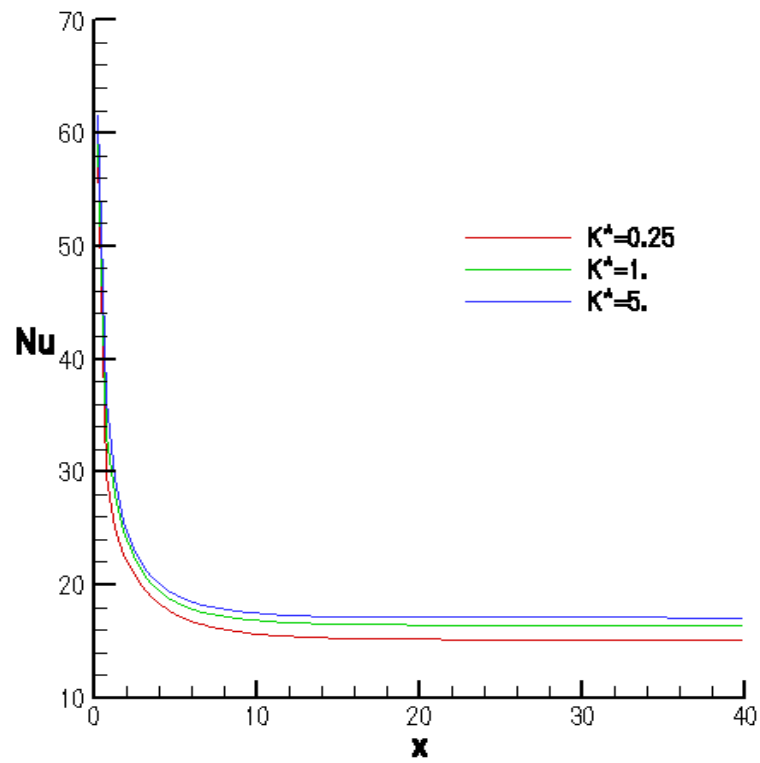


Figure V. 17.d Variation du nombre de Nusselt le long du canal pour des valeurs différentes de K^* ($E=0.4$, $\theta=0^\circ$, et $Da=10^{-3}$).

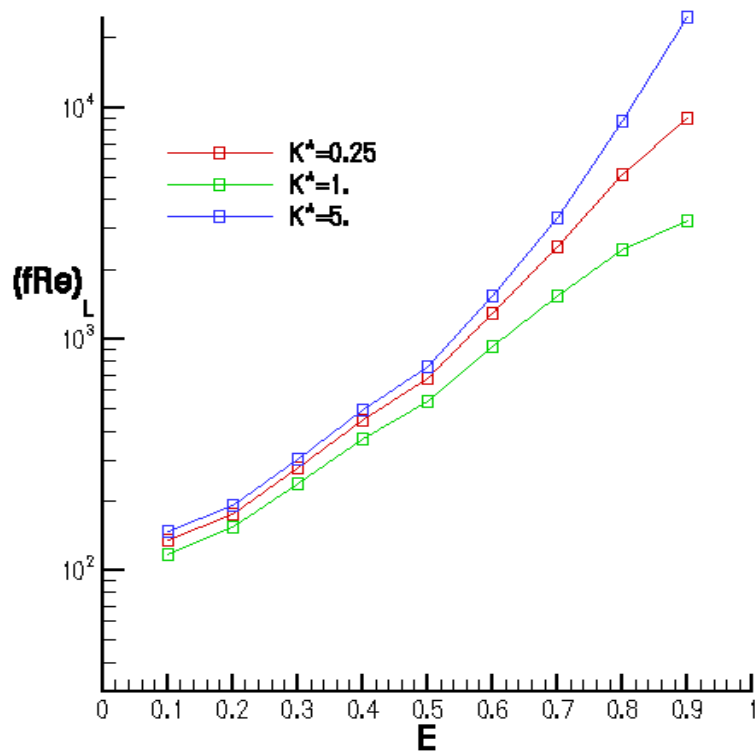


Fig. V.18 Variation du coefficient de frottement en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour des valeurs différentes de K^* , $\theta=0^\circ$, $Da=10^{-3}$.

La (figure V.18) illustre la variation du coefficient de frottement dans la région établie en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents rapports de perméabilité.

Le coefficient de frottement est une fonction croissante de l'épaisseur de la couche poreuse. Pour une épaisseur E donnée et un angle d'orientation nul, le coefficient de frottement le plus élevé correspond à un rapport de perméabilité $K^* > 1$ c'est-à-dire lorsque la perméabilité dans la direction de l'écoulement est plus faible que celle de la direction transversale.

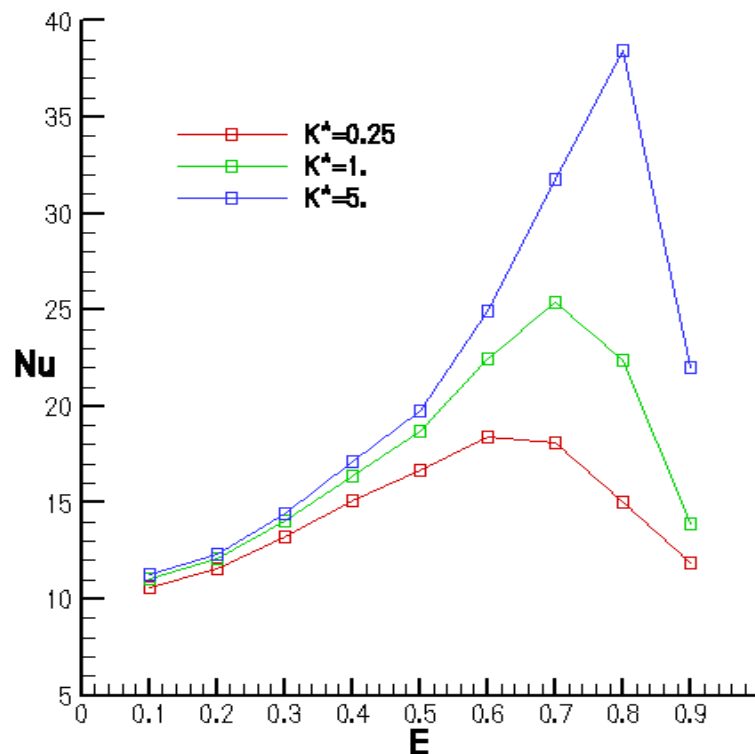


Figure. V.19.a Variation du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour des valeurs différentes de K^* , $\theta=0^\circ$, $Da=10^{-3}$, $Rc=1$.

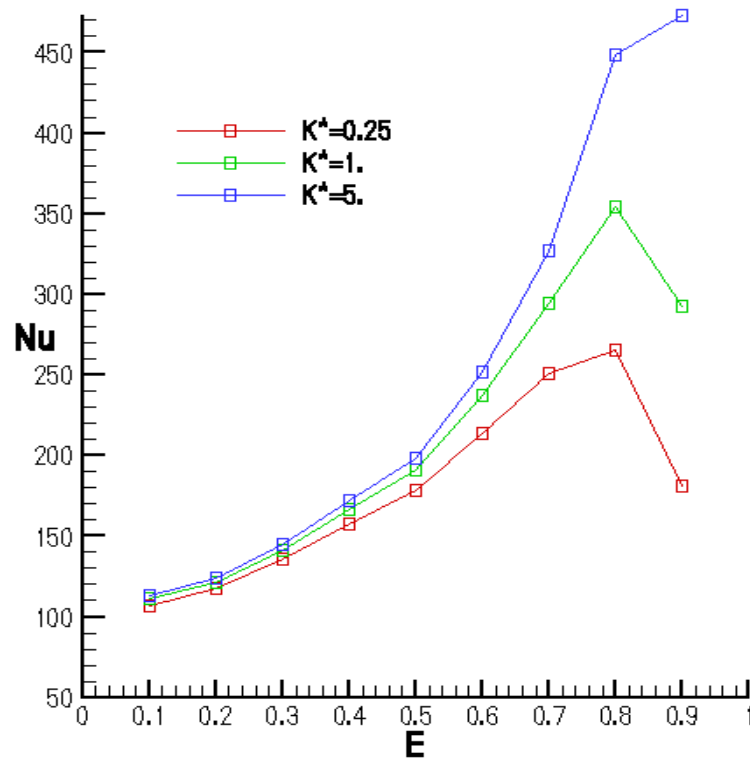


Fig. V.19.b Variation du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour des valeurs différentes de K^* , $\theta=0^\circ$, $Da=10^{-3}$, $Rc=10$.

Les figures (V.19.a et V.19.b), illustrent la variation du coefficient de transfert de chaleur en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse E pour différents rapports de perméabilité, respectivement pour deux rapports de conductivités thermiques ($Rc=1$ et $Rc=10$). Les deux graphes sont similaires d'un point de vue qualitatif, avec cependant des valeurs plus élevées du nombre de Nusselt pour le cas de $Rc=10$. Ce résultat était prévisible car déjà rencontré dans la littérature pour le cas isotrope ($K^*=1$). Par rapport à la configuration n°1 (Cf. figure V.12.a), cette fois ci le nombre de Nusselt croît avec l'augmentation de l'épaisseur E jusqu'à atteindre une valeur maximale pour une épaisseur E donnée. Cette épaisseur optimale dépend du rapport de perméabilité K^* . Nous observons aussi qu'une matrice poreuse avec un rapport $K^*>1$ donne lieu à un meilleur coefficient de transfert de chaleur.

Conclusion

Des résultats détaillés ont été présentés pour étudier la convection forcée dans un canal entièrement ou partiellement rempli par un milieu poreux. Ces résultats sont :

1. Le rapport de perméabilité K^* , l'angle d'inclinaison θ , et l'épaisseur de la matrice poreuse ont une influence forte sur le transfert de chaleur ;

2. Le taux de transfert de chaleur dans le canal totalement poreux est augmenté pendant que le rapport K^* est rendu plus grand que l'unité quand $\theta=0^\circ$. (C'est-à-dire,

quand la perméabilité dans la direction verticale est plus grande que celle dans la direction horizontale) ;

3. Un taux de transfert de chaleur maximum (minimum) à travers le canal totalement poreux est obtenu quand la matrice poreuse est orientée de telle manière que l'axe de la perméabilité le plus élevée est parallèle (perpendiculaire) à la pesanteur ;

4. l'utilisation d'un canal partiellement poreux permet de réduire le coefficient de frottement et d'augmenter le coefficient de transfert de chaleur dans le cas d'un rapport de conductivités thermiques $R_c > 1$ ($R_c = 10$) comparativement au canal totalement poreux.

5. Dans le cas d'un canal partiellement poreux, la configuration n°2 est meilleure que la configuration n°1 d'un point de vue thermique mais donne lieu à un coefficient de frottement légèrement supérieur.

Conclusion générale

La simulation numérique du transfert de chaleur par convection forcée pour un régime laminaire et stationnaire dans un canal partiellement rempli d'une matière poreuse dynamiquement anisotrope c'est l'objectif principal de notre étude. Pour cet effet nous avons considéré un écoulement dans un canal plan horizontal dont les parois sont soumises à un flux de chaleur constante ; l'écoulement dans le milieu poreux a été décrit par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer.

Nous avons, au cours de ce travail, élaboré un code de calcul basé sur l'algorithme de « SIMPLE » et la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, et de l'énergie qui gouverne le transfert de chaleur. Le système d'équations discrétisées a été résolu par une méthode itérative à double balayage en utilisant l'algorithme de Thomas TDMA ; le code de calcul a été validé en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature et la solution analytique que nous avons élaborée.

Nous avons commencé notre étude par le cas de l'écoulement dans le canal totalement rempli par un milieu poreux pour bien déterminer après l'effet des paramètres d'anisotropie et de l'épaisseur de la couche du milieu poreux sur le transfert de chaleur. Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse, de la perméabilité anisotrope, de l'angle d'anisotropie, et du nombre de Darcy sur le transfert de chaleur. Les résultats obtenus sont :

1. Un taux de transfert de chaleur est maximum (minimum) à travers le canal totalement poreux est obtenu quand la matrice poreuse est orientée de telle manière que l'axe principal avec une perméabilité plus élevée est parallèle (perpendiculaire) à la pesanteur.
2. Le nombre de Nusselt est inversement proportionnel au nombre de Darcy dans le cas totalement poreux
3. l'utilisation d'un canal partiellement poreux permet de réduire le coefficient de frottement et d'augmenter le coefficient de transfert de chaleur dans le cas d'un rapport de conductivités thermiques $R_c > 1$ ($R_c = 10$) comparativement au canal totalement poreux.
4. Pour les deux configurations, le coefficient de frottement est une fonction croissante de l'épaisseur de la couche poreuse. Pour une épaisseur E donnée et un angle d'orientation nul, le coefficient de frottement le plus élevé correspond à un rapport de perméabilité $K^* > 1$ c'est-à-dire lorsque la perméabilité dans la direction de l'écoulement est plus faible que celle de la direction transversale.

5. Pour la configuration n°1, le nombre de Nusselt décroît avec l'augmentation de l'épaisseur E jusqu'à atteindre une valeur minimale pour une épaisseur E donnée lorsque $Rc=1$. Cette épaisseur optimale dépend du rapport de perméabilité K^* . Une matrice poreuse avec un rapport $K^*>1$ donne lieu au plus bas coefficient de transfert de chaleur.
6. Pour la configuration n°1, le nombre de Nusselt devient une fonction croissante de l'épaisseur de la couche poreuse E lorsque $Rc=10$. Pour une épaisseur E donnée, le nombre de Nusselt le plus élevé est obtenu pour un rapport de perméabilité $K^*<1$.
7. Pour la configuration n°2, le nombre de Nusselt croît avec l'augmentation de l'épaisseur E jusqu'à atteindre une valeur maximale pour une épaisseur E donnée. Cette épaisseur optimale dépend du rapport de perméabilité K^* . Une matrice poreuse avec un rapport $K^*>1$ donne lieu à un meilleur coefficient de transfert de chaleur.
8. Dans le cas d'un canal partiellement poreux, la configuration n°2 est meilleure que la configuration n°1 d'un point de vue thermique mais donne lieu à un coefficient de frottement légèrement supérieur.

En perspectives, nous proposons de faire des études spécifiques avec une couche poreuse thermiquement anisotrope, avec des propriétés thermo physiques variables, et avec un équilibre thermique non local.

Références bibliographiques

- [1] Kambiz Vafai, Handbook of Porous Media, second edition, (2005).
- [2] Nield, D. A and Bejan, A. (1992). Convection in porous media. Springer-Verlag, New York
- [3] Jorge P. Arenas, Malcolm J. Crocker, Recent Trends in Porous Sound-Absorbing Materials. Sound & Vibration/July 2010
- [4] Zhang Jian-zhong, Wang Jiu-gen, MA Jia-ju, Porous structures of natural materials and bionic design, J Zhejiang Univ SCI 2005 6 A (10):1095-1099.
- [5] R. Helmig. Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface: A Contribution to the Modelling of Hydrosystems. Springer, 1997.
- [6] E. scheidgger. The physics of flow through porous media, University of Toronto press, 3rd Edition 1974.
- [7] M. Kaviany, principals of heat transfer in porous media, Springer –Verlag, 2nd Edition New York 1995.
- [8] j. Bear, Dynamics of fluids in porous media, New York, 3^e Ed. University of Toronto press. (1972).
- [9] E.Guyon, J.P Hulin, L.Petit, Hydrodynamique physique, EDP sciences/ CNRS Edition, (2001)
- [10] H.darcy, les fontaines publiques de la ville de Dijon, librairie des corps impériaux des ponts et chaussées et des mines, Paris, (1856)
- [11] D.A.Nield, A.Bejan, Convection in Porous Media, Springer, Second Edition,(1999)
- [12] F.Forchheimer, Wassergnengung. Durch. Boden, Z.Vereines. Deutcher Ingenieure, XXXXV, 49p. 1736-1741, et 50, p. 1781-1788, (1901)
- [13] P. Nithiarasu , K.N. Seetharamu et T. Sundararajan : Finite element modelling of flow, heat and mass transfer in fluid saturated porous media. (2002). Archives of Computational Methods in Engineering, 9(1):3-42.
- [14] M. Muskat, The flow of homogeneous fluids through porous media, The Maple press Company, York, PA, (1946)
- [15] R.C. Givler, S.A. Altobelli, A. Determination of effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model. (1994). J.Fluid. Mech. 258, 355-370.
- [16] M. Combarous, S. A. Bories, Modélisation de la convection d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide. (1974). int. J. Heat Mass Transfer. 17, 505-514.

- [17] Baili Zhang and Yong Zhao, A numerical method for simulation of forced convection in a composite porous/fluid system. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.21, 432-441, 2000
- [18] M. Quintard et S. Whitaker, One and two-equation models for transient diffusion process in two-phase systems (1993), *Advances in heat Transfer*, 23, 369-464.
- [19] Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier Publishing Company, Inc, New York.
- [20] Ingham, D. B. and POP, I. (1998). *Transport Phenomena in Porous Media*, Pergamon
- [21] Burns, P. J, Chow, L. C. and Tien, C. L. (1977). Convection in a Vertical Slot Filled Porous Insulation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29, 919-926.
- [22] Nilsen, T, et Storetletten, L. (1990). An Analytical Study on Natural Convection in Isotropic and Anisotropic Porous Channels, *Trans ASME: J. Heat Transfer*, 112, 396-401.
- [23] Ni, J, et Beckermann, C. (1991). Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media, *Trans. ASME: J. Heat Transfer*, 113, 1033-1037.
- [24] Zhang, X. Nguyen, T. H. and Kahawita, R. (1993) Convective Flow and Heat Transfer in an Anisotropic Porous Layer With Principal Axes Non-coincident With The Gravity Vector, *ASME HTD*. 264, 79-86.
- [25] Kimura, S. and Masuda, Y. and Hayashi, K. (1993). Natural Convection in an Anisotropic Porous Medium Heated From the Side, *Heat Transfer Japanese Research*, 22, 139-153.
- [26] Chang, W. J. and Liu, H. C. (1994). Natural Convection in a Vertical Cylinder Filled with an Anisotropic Porous Medium, *Int. J. Heat Transfer*, 36, 3361-3367.
- [27] G. Degan, P. Vasseur and E. Bilgen. (1995). Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer, *int. J. Heat Mass Transfer*. 38, 1975-1987.
- [28] G.Degan, P.vasseur. (1997). Boundary-layer regime in a vertical porous layer with anisotropic permeability and boundary effects, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 18, 334-343.
- [29] J.H.Yang, S.L.Lee. (1999). Effect of anisotropy on transport phenomena in anisotropic porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42, 2673-2681
- [30] P. Nithiarasu, K. S. Sujatha, K. Ravindran, T. Sundararajan, K.N. Seetharamu. (2000). Non-Darcy natural convection in a hydrodynamically and thermally anisotropic porous medium, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 188, 413-430
- [31] J.C.Leong, F.C.Lai. (2001). Effective Permeability of a Layered Porous Cavity, *Trans. ASME: J. Heat Transfer*, 123, 512-519.

- [32] Gerard Degan, patrick vasseur. (2002). Aiding mixed convection through a vertical anisotropic porous channel with oblique principal axes, *International journal of Engineering Science* 40, 193-209.
- [33] A. Nakayama, F. Kuwahara, T. Umemoto, T. Hayashi (2002). Heat and Fluid Flow within an Anisotropic Porous Medium, *Trans. ASME: J. Heat Transfer*, 124, 746-753.
- [34] G. Degan, S. Zohoun, P. Vasseur. (2002). Forced convection in horizontal porous channels with hydrodynamic anisotropy, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, 3181–3188
- [35] I.S. Shivakumara, Jinho Lee, A.L. Mamathaand M. Ravisha, Boundary and thermal non-equilibrium effects on convective instability in an anisotropic porous layer, *Journal of Mechanical Science and Technology* 25 (4) (2011) 911~921
- [36] B. S. Bhadauriam, Anoj Kumar, Jogendra Kumar, Nirmal C. Sacheti, Pallath Chandran, Natural convection in a rotating anisotropic porous layer with internal heat generation. *Trans Porous Med* (2011) 90:687–705
- [37] B. S. Bhadauria, Double-Diffusive Convection in a Saturated Anisotropic Porous Layer with Internal Heat Source. *Trans Porous Med* (2012) 92:299–320
- [38] M. S. Malashetty , Irfana Begum, The Effect of Rotation on the Onset of Double Diffusive Convection in a Sparsely Packed Anisotropic Porous Layer. *Trans Porous Med* (2011) 88:315–345.
- [39] Fattah, Q.N. and Hoopes, J. A. (1985). Dispersion in Anisotropic Homogeneous Porous Media, *J. Hydraulic Engineering-ASCE*, 111, 810-827.
- [40] Howle, L. E. and Georgiadis, J. G. (1994). Natural Convection in Porous Media with Anisotropic Dispersive Thermal Conductivity, *In. J. Heat Mass Transfer*, 37, 1081-1094
- [41] Trevisan, O. V. and Bejan, A. (1985), Mass and Heat Transfer by Natural Convection in a Vertical slot filled with porous Medium, *In. J. Heat Mass Transfer*, 29, 403-415.
- [42] Nguyen, H. D. Paik, S. and Dogulass, R.W. (1994). Study of Double-Diffusive convection in Layered Anisotropic Porous Media, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 26, 489-505.
- [43] Costa, V. A .F. (1997). Double Diffusive Natural Convection in a Square Enclosure with Heat and Mass Diffusive Walls, *In. J. Heat Mass Transfer*, 40, 4061-4071.
- [44] Fard, M. K. Mojtabi, M. C. C. and Vafai, K. (1997). Non-Darcian Effects on Double-Diffusive Convection within a Porous Medium, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 31, 837-852.

- [45] Bera, P. Eswaran, V. and Singh, P. (1998). Numerical Study of Heat and Mass Transfer in an Anisotropic Porous Enclosure Due to Constant Heating and Cooling, Numerical Heat Transfer, Part A, 34, 887-905.
- [46] Storesletten, L. (1998), Effects of Anisotropy on Convective Flow through Porous Media, Transport Phenomena in Porous Media, pp. 261-282, Editors: INCHAM, D. B. and POP, I., PERGAMON.
- [47] A.V. Kuznetsov. Analytical Investigation of the Fluid Flow in the Interface Region between a Porous Medium and a Clear Fluid in Channels Partially Filled with a Porous Medium. (1996). Applied Scientific Research 56, 53--67
- [48] A.V.Kuznetsov. Study of Forced Convection in the Presence of a Liquid-Porous-Medium Interface. (1997). Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 70, 853-859
- [49] A.V.Kuznetsov. Analytical investigation of forced convection from a flat plate enhanced by a porous substrate.(1999). Acta Mechanica 137, 211-223
- [50] O Cekmer · M Mobedi · B Ozerdem, I Pop ,Fully Developed Forced Convection in a Parallel Plate Channel with a Centered Porous Layer. Transp Porous Med (2012) 93:179–201
- [51] S.V.Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, 1980, McGRAWHill, New York.
- [52] Incropera, Dewitt, Bergman, Lavine, introduction to heat transfer, imprimer aux états unis 2007.
- [53] Bejan, A., Heat Transfer. John Wiley & Sons, New York (1993)

Annexes

Annexe A

Solution analytique

La résolution d'un tel système, de manière analytique est compliquée. Cependant, dans le cas d'utiliser le modèle de Darcy-Brinkman dans la région poreuse, une solution analytique approximative est possible. Le modèle résultant donne un aperçu général sur l'écoulement et le champ de température et du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement, la dépendance du nombre de Nusselt à l'égard de plusieurs paramètres du problème est étudiée.

A.1. Formulation et résolution mathématiques

On a défini le modèle physique illustrant le problème considéré dans le chapitre III. Cependant sur la figure A.1, seule la moitié inférieure du canal y est représentée.

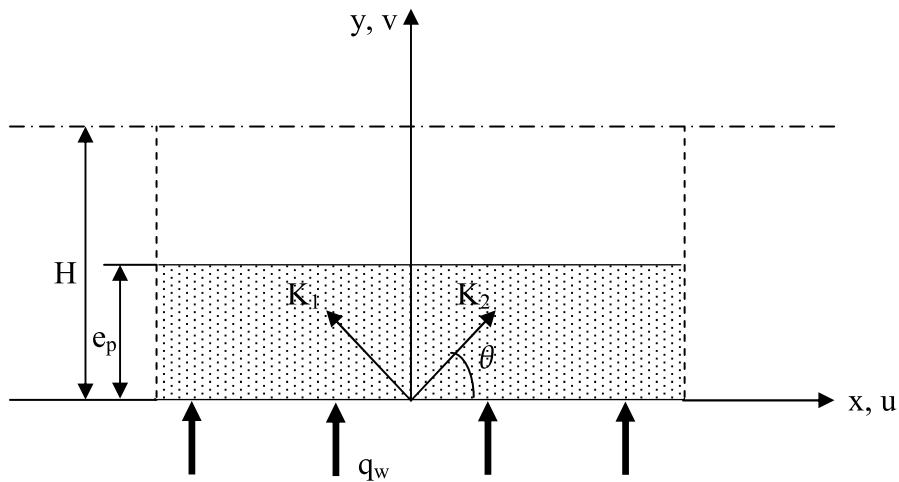


Figure A.1. Domaine physique et système de coordonnées

Les équations gouvernantes pour ce problème (convection forcée stationnaire) peuvent être présentées comme suit :

$$-\vec{\nabla}P + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}_p - \mu_f [K]^{-1} \vec{V}_p = 0, \quad 0 \leq y \leq e_p, \quad (A.1)$$

$$-\vec{\nabla}P + \mu_f \nabla^2 \vec{V}_f = 0, \quad e_p \leq y \leq H, \quad (A.2)$$

$$(\rho C_p)_f \vec{V}_p \nabla T_p = k_{eff} \nabla^2 T_p, \quad 0 \leq y \leq e_p, \quad (A.3)$$

$$(\rho C_p)_f \vec{V}_f \nabla T_f = k_f \nabla^2 T_f, \quad e_p \leq y \leq H, \quad (A.4)$$

$$\nabla \vec{V}_p = 0, \quad 0 \leq y \leq e_p, \quad (A.5)$$

$$\nabla \vec{V}_f = 0, \quad e_p \leq y \leq H, \quad (A.6)$$

L'équation (A.1) est l'équation de mouvement pour la région poreuse (modèle de Darcy-Brinkman), alors que l'équation (A.2) est l'équation de mouvement pour la région fluide. Les équations (A.3) et (A.4) sont les équations d'énergie pour la région poreuse et fluide. Suivant [19] [28], le terme de transfert de chaleur par conduction longitudinale est négligé dans les équations (A.3) et (A.4), Les équations (A.5) et (A.6) sont les équations de continuité pour la région poreuse et fluide.

où \vec{V}_p, \vec{V}_f sont les vitesses d'écoulement dans le milieu poreux et fluide, \vec{T}_p, \vec{T}_f sont les températures du milieu poreux et fluide, $(\rho C_p)_f$ la capacité calorifique du fluide, μ_f la viscosité dynamique du fluide, p la pression, μ_{eff} la viscosité dynamique effective, k_f la conductivité thermique du fluide, k_{eff} est la conductivité thermique effective. ρ_f La densité du fluide. Le tenseur de perméabilité de second ordre symétrique $[K]$ est défini comme suit:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 \sin^2 \theta + K_2 \cos^2 \theta & (K_2 - K_1) \sin \theta \cos \theta \\ (K_2 - K_1) \sin \theta \cos \theta & K_2 \sin^2 \theta + K_1 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

On suppose pour un écoulement établie dans le canal que la vitesse dépend de la coordonnée transversale y (c'est à dire, $u_p = u_p(y)$, $u_f = u_f(y)$), La composante de vitesse transversale doit être ($v_p = v_f = 0$). La température est assumée pour être une fonction de y . Aucune supposition n'est faite en ce qui concerne la variation de pression (réellement il n'est pas une fonction linéaire de x comme il est supposé souvent). Ainsi, les équations gouvernantes (A.1) à (A.4) peuvent être réduites à:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{eff} \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} - \frac{\mu_f}{K_1} a u_p = 0, \quad 0 \leq y \leq e_p, \quad (A.8)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} = 0, \quad e_p \leq y \leq H, \quad (A.9)$$

$$u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} = \frac{k_{eff}}{(\rho C_p)_f} \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2}, \quad 0 \leq y \leq e_p, \quad (A.10)$$

$$u_f \frac{\partial T_f}{\partial x} = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f} \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2}, \quad e_p \leq y \leq H, \quad (A.11)$$

Dont: $a = \sin^2 \theta + K^* \cos^2 \theta$

Les conditions aux limites appropriées pour les équations (A.8) - (A.11) sont :

$$y = 0 : \quad u_p = 0, q_w = -k_{eff} \frac{\partial T_p}{\partial y} \quad (A.12)$$

$$y = e_p : \quad u_p = u_f, \mu_{eff} \frac{\partial u_p}{\partial y} = \mu_f \frac{\partial u_f}{\partial y}, T_p = T_f, k_{eff} \frac{\partial T_p}{\partial y} = k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \quad (A.13)$$

$$y = H : \quad \frac{\partial u_f}{\partial y} = 0, \frac{\partial T_f}{\partial y} = 0 \quad (A.14)$$

Dans la région totalement développée du canal avec un flux thermique uniforme sur la paroi, $\partial T/\partial x$ du côté gauche des équations (A.10) et (A.11) est constant [53]. La valeur $\partial T/\partial x$ peut alors être trouvée du bilan énergétique suivant (voir figure A.2):

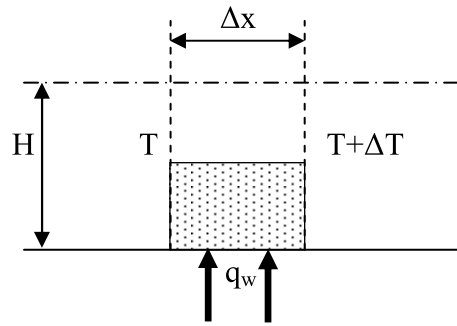


Figure A.2. Volume élémentaire du canal

$$q_w \Delta x \cdot 1 = \dot{m} (C_p)_f \Delta T \quad \text{Tel que} \quad \dot{m} = \rho_f \cdot u_m \cdot H \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q_w}{\rho_f \cdot u_m \cdot H \cdot (C_p)_f} \quad (A.15)$$

Où u_m : est la vitesse d'écoulement moyenne.

On introduit les variables adimensionnelles, les équations d'énergie et de mouvement (A.8), (A.9), (A.10) et (A.11) peuvent être écrites sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial^2 u'_p}{\partial y'^2} - \frac{a}{R_\mu Da} u'_p = -\frac{1}{R_\mu}, \quad 0 \leq y' \leq E, \quad (A.16)$$

$$\frac{\partial^2 u'_f}{\partial y'^2} = -1, \quad E \leq y' \leq 1, \quad (A.17)$$

$$\frac{\partial^2 T'_p}{\partial y'^2} = \frac{u'_p}{u'_m}, \quad 0 \leq y' \leq E, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial^2 T'_f}{\partial y'^2} = R_c \frac{u'_f}{u'_m}, \quad E \leq y' \leq 1, \quad (\text{A.19})$$

Dans les équations (A.16, A.17, A.18 et A.19) les variables adimensionnelles utilisées sont:

$$u' = \frac{u}{U}; \quad y' = \frac{y}{H}; \quad Da = \frac{K_1}{H^2}; \quad \Delta T = \frac{q_w H}{k_{eff}}; \quad U = -\frac{H^2}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$T' = \frac{T - T_w}{\Delta T}; \quad \Delta T = T_m - T_w; \quad R_\mu = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f}; \quad R_c = \frac{k_{eff}}{k_f}; \quad E = \frac{e_p}{H}.$$

T_w : est la température de la paroi,

T_m : est la température moyenne,

Par approximation,

$$R_\mu = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f} : \text{La viscosité relative prise est égale à l'unité (c'est à dire, } \mu_{eff} \approx \mu_f \text{).}$$

$$R_c = \frac{k_{eff}}{k_f} : \text{Le rapport de conductivité prise est égal à l'unité (c'est à dire, } k_{eff} \approx k_f \text{).}$$

Les équations (A.16, A.17, A.18 et A.19) doivent être résolues avec les conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

$$y' = 0: \quad u'_p = 0, \quad T'_p = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$y' = E: \quad u'_p = u'_f, \quad R_\mu \frac{\partial u'_p}{\partial y'} = \frac{\partial u'_f}{\partial y'}, \quad T'_p = T'_f, \quad R_c \frac{\partial T'_p}{\partial y'} = \frac{\partial T'_f}{\partial y'} \quad (\text{A.21})$$

$$y' = 1: \quad \frac{\partial u'_p}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial T'_f}{\partial y'} = 0 \quad (\text{A.22})$$

La résolution des Equation (A.16) et (A.17) définit la distribution de vitesse exprimée par :

$$u'_p = A_1 e^{\alpha y'} + B_1 e^{-\alpha y'} + \frac{Da}{a} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tel que } \alpha = \sqrt{\frac{a}{R_\mu Da}}$$

$$u'_f = -\frac{y'^2}{2} + A_2 y' + B_2 \quad (\text{A.24})$$

En utilisant les conditions hydrodynamiques (A.20, A.21 et A.22), on trouve les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} A_2 &= 1 \\ B_1 &= \frac{-\frac{Da}{a} e^{\alpha E} - \frac{(1-E)}{R_\mu \cdot \alpha}}{(e^{\alpha E} + e^{-\alpha E})} \\ A_1 &= -\frac{Da}{a} - B_1 \\ B_2 &= A_1 e^{\alpha E} + B_1 e^{-\alpha E} + \frac{Da}{a} + \frac{E^2}{2} - A_2 E \end{aligned}$$

Où la vitesse moyenne d'écoulement, est définie par :

$$u_m = \frac{1}{H} \int_0^H u \cdot dy \quad (\text{A.25})$$

u_m : est calculé en terme adimensionnelle par :

$$u'_m = \int_0^1 u' \cdot dy' = \int_0^E u'_p \cdot dy' + \int_E^1 u'_f \cdot dy' \quad (\text{A.26})$$

Après l'intégration on trouve :

$$u'_m = \frac{A_1}{\alpha} (e^{\alpha E} - 1) - \frac{B_1}{\alpha} (e^{-\alpha E} - 1) + \frac{Da}{a} E - \frac{(1-E^3)}{6} + \frac{A_2}{2} (1-E^2) + B_2 (1-E) \quad (\text{A.27})$$

La résolution des équations (A.18) et (A.19) définit la distribution de température exprimée ainsi :

$$T'_p = \frac{1}{u'_m} \left[\frac{A_1}{\alpha^2} e^{\alpha y'} + \frac{B_1}{\alpha^2} e^{-\alpha y'} + \frac{Da}{2a} y'^2 + A_3 y' + B_3 \right] \quad (\text{A.28})$$

$$T'_f = \frac{R_c}{u'_m} \left[-\frac{y'^4}{24} + \frac{A_2}{6} y'^3 + \frac{B_2}{2} y'^2 + A_4 y' + B_4 \right] \quad (\text{A.29})$$

Utilisant les conditions aux limites (A.20, A.21 et A.22), on trouve les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}
 B_3 &= -\frac{(A_1 + B_1)}{\alpha^2} \\
 A_4 &= \frac{1}{6} - \frac{A_2}{2} - B_2 \\
 A_3 &= -\frac{E^3}{6} + \frac{A_2}{2} E^2 + B_2 E + A_4 - \frac{A_1}{\alpha} e^{\alpha E} + \frac{B_1}{\alpha} e^{-\alpha E} - \frac{Da}{a} E \\
 B_4 &= \frac{1}{R_c} \left[-\frac{A_1}{\alpha^2} e^{\alpha E} + \frac{B_1}{\alpha^2} e^{-\alpha E} + \frac{Da}{2a} E^2 + A_3 E + B_3 \right] + \frac{E^4}{24} - \frac{A_2}{6} E^3 - \frac{B_2}{2} E^2 - A_4 E
 \end{aligned}$$

Où la température moyenne, est définie par :

$$T_m = \frac{1}{H.u_m} \int_0^H u.T.dy \quad (A.30)$$

T_m est calculé en terme adimensionnel par :

$$T'_m = \frac{1}{u'_m} \int_0^1 u'T'.dy' = \frac{1}{u'_m} \left[\int_0^E u'_p T'_p .dy' + \int_E^1 u'_f T'_f .dy' \right] \quad (A.31)$$

Après l'intégration on trouve :

$$\begin{aligned}
 T'_m &= \frac{1}{u'_m} \left[\begin{aligned}
 &\frac{A_1^2}{2\alpha^3} (e^{2\alpha E} - 1) + \frac{B_1^2}{2\alpha^3} (e^{-2\alpha E} - 1) + \left(\frac{A_1 B_3}{\alpha} + \frac{Da A_1}{a \alpha^3} \right) (e^{\alpha E} - 1) \\
 &- \left(\frac{B_1 B_3}{\alpha} + \frac{Da B_1}{a \alpha^3} \right) (e^{-\alpha E} - 1) + \frac{Da^2}{6a^2} E^3 + \frac{A_3}{2} \frac{Da}{a} E^2 + \left(\frac{2A_1 B_1}{\alpha^2} + \frac{Da B_3}{a} \right) E \\
 &+ \frac{Da A_1}{2a} \left[e^{\alpha E} \left(\frac{E^2}{\alpha} - \frac{2E}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) - \frac{2}{\alpha^3} \right] + \frac{Da B_1}{2a} \left[e^{-\alpha E} \left(-\frac{E^2}{\alpha} - \frac{2E}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) + \frac{2}{\alpha^3} \right] \\
 &+ A_1 A_3 \left[e^{\alpha E} \left(\frac{E}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \right] + B_1 A_3 \left[e^{-\alpha E} \left(-\frac{E}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \right]
 \end{aligned} \right] \quad (A.32) \\
 &+ \frac{R_c}{u'_m} \left[\begin{aligned}
 &\frac{(1-E^7)}{336} - \frac{(1-E^6)}{48} + \left(\frac{A_2^2}{6} - \frac{7B_2}{24} \right) \frac{(1-E^5)}{5} + \left(\frac{2A_2 B_2}{3} - \frac{A_2}{2} \right) \frac{(1-E^4)}{4} \\
 &+ \left(\frac{B_2^2}{2} + A_2 A_4 - \frac{B_4}{2} \right) \frac{(1-E^3)}{3} + (A_2 B_4 + A_4 B_2) \frac{(1-E^2)}{2} + B_4 B_2 (1-E)
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Le nombre de Nusselt pour un écoulement établi est alors défini par:

$$2q_w = h(T_w - T_m) \Rightarrow \frac{4Hq_w}{k_{eff}} = \frac{2Hh}{k_{eff}}(T_w - T_m) \quad \text{tel que } Nu = \frac{2Hh}{k_{eff}}$$

Donc :

$$Nu = \frac{4Hq_w}{k_{eff}(T_w - T_m)} \quad (\text{A.33})$$

Ce qui devient après l'adimensionnement:

$$Nu' = -\frac{4}{T_m'} \quad (\text{A.34})$$

h : le coefficient de transfert de chaleur par convection.

Le coefficient de frottement est défini comme suivant :

$$f = \frac{2H \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right)}{\frac{1}{2} \rho_f u_m^2} \quad (\text{A.35})$$

$$\Rightarrow fRe = \frac{2H \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) u_m \cdot 2.H}{\frac{1}{2} \rho_f u_m^2 \nu_f} \quad (\text{A.36})$$

Cette formule est calculé en terme adimensionnel par :

$$fRe = \frac{8}{u_m'} \quad (\text{A.37})$$

Annexe B

Changement de repère

L'équation de quantité de mouvement en régime stationnaire est écrite dans le repère (x_r', y_r') comme suivant:

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \vec{V}_r' \cdot \nabla \vec{V}_r' = -\vec{\nabla} P_r' + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}_r' - \mu_f [K]^{-1} \vec{V}_r' - \rho_f F \sqrt{[K]^{-1}} |\vec{V}_r'| \vec{V}_r' \quad (\text{B.1})$$

L'équation (B.1) peut s'écrire comme suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{Bmatrix} u_r' \frac{\partial}{\partial x_r'} + v_r' \frac{\partial}{\partial y_r'} \\ u_r' \frac{\partial}{\partial x_r'} + v_r' \frac{\partial}{\partial y_r'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial p_r'}{\partial x_r'} \\ -\frac{\partial p_r'}{\partial y_r'} \end{Bmatrix} + \mu_{eff} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_r'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_r'^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_r'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_r'^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} \\ -\mu_f [K]^{-1} \begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} - \rho_f F \sqrt{[K]^{-1}} \sqrt{u_r'^2 + v_r'^2} \begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} & \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Pour écrire cette équation dans le repère (x', y') on utilise la matrice de rotation suivant :

$$\begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Et l'inverse de cette matrice est écrit comme suivant :

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r' \\ v_r' \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

L'équation (B.2) devient

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \frac{\partial}{\partial x'} + v' \frac{\partial}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial}{\partial x'} + v' \frac{\partial}{\partial y'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial p'}{\partial x'} \\ -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{Bmatrix} + \mu_{eff} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \\ -\mu_f [K]^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} - \rho_f F \sqrt{[K]^{-1}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \sqrt{u'^2 + v'^2} & \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Tel que :

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\sqrt{[\mathbf{K}]^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{K_2} & \\ 0 & 1 \\ & \sqrt{K_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

En multipliant l'équation résultante par l'inverse de la matrice de rotation:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p'}{\partial x'} \\ -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{array} \right\} \\ + \mu_{\text{eff}} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \end{array} \right\} - \mu_f \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/K_2 & 0 \\ 0 & 1/K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \end{array} \right\} \\ - \rho_f F \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{K_2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{K_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \end{array} \right\} \sqrt{u'^2 + v'^2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La multiplication des deux premières matrices donne :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p'}{\partial x'} \\ \frac{\partial p'}{\partial y'} \end{array} \right\} \\ + \mu_{\text{eff}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \end{array} \right\} - \mu_f \begin{bmatrix} 1/K_2 \cos \theta & -1/K_1 \sin \theta \\ 1/K_2 \sin \theta & 1/K_1 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \end{array} \right\} \\ - \rho_f F \begin{bmatrix} 1/\sqrt{K_2} \cos \theta & -1/\sqrt{K_1} \sin \theta \\ 1/\sqrt{K_2} \sin \theta & 1/\sqrt{K_1} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \end{array} \right\} \sqrt{u'^2 + v'^2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

On continue la multiplication et on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p'}{\partial x'} \\ -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{array} \right\} + \mu_{\text{eff}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \end{array} \right\} \\ - \mu_f \begin{bmatrix} 1/K_2 \cos^2 \theta + 1/K_1 \sin^2 \theta & 1/K_2 \cos \theta \sin \theta - 1/K_1 \cos \theta \sin \theta \\ 1/K_2 \cos \theta \sin \theta - 1/K_1 \cos \theta \sin \theta & 1/K_2 \sin^2 \theta + 1/K_1 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \end{array} \right\} \\ - \rho_f F \begin{bmatrix} 1/\sqrt{K_2} \cos^2 \theta + 1/\sqrt{K_1} \sin^2 \theta & 1/\sqrt{K_2} \cos \theta \sin \theta - 1/\sqrt{K_1} \cos \theta \sin \theta \\ 1/\sqrt{K_2} \cos \theta \sin \theta - 1/\sqrt{K_1} \cos \theta \sin \theta & 1/\sqrt{K_2} \sin^2 \theta + 1/\sqrt{K_1} \cos^2 \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \end{array} \right\} \sqrt{u'^2 + v'^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Et on peut écrire cette équation comme suivant :

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \begin{Bmatrix} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial p'}{\partial x'} \\ -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{Bmatrix} + \mu_{eff} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \end{Bmatrix} \quad (B.11)$$

$$\frac{\mu_f}{K_1} \begin{bmatrix} K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & K^* \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ K^* \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\rho_f F}{\sqrt{K_1}} \begin{bmatrix} \sqrt{K^*} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \sqrt{K^*} \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \sqrt{K^*} \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & \sqrt{K^*} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \sqrt{u'^2 + v'^2}$$

- **Projection suivant la direction axiale (x) :**

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] u' \quad (B.12)$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] v'$$

- **Projection suivant la direction transversale (y) :**

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* - 1) \sin \theta \cos \theta + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} - 1) \sin \theta \cos \theta \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] u' \quad (B.13)$$

$$- \left[\frac{\mu_f}{K_1} (K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \rho_f \frac{F}{\sqrt{K_1}} (\sqrt{K^*} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sqrt{u'^2 + v'^2} \right] v'$$

Résumé

Ce document récapitule une étude numérique de la convection forcée en régime laminaire et stationnaire à l'intérieur d'un canal horizontal plat partiellement ou entièrement rempli d'un milieu poreux. Nous supposons que le milieu poreux est hydro-dynamiquement anisotrope, et que les parois sont maintenues à un flux de chaleur constant. Nous avons utilisé le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour décrire l'écoulement dans la région poreuse. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour la résolution des équations de conservation de la masse, et de quantités de mouvement, de l'énergie, et les conditions aux limites associées. Le présent travail a pour objectif de préciser la nature des mouvements convectifs en milieu poreux anisotrope. Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence l'influence du rapport de perméabilité anisotrope K^* ($0.1 \leq K^* \leq 10$), l'angle d'anisotropie θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), l'épaisseur de la couche poreuse E ($0 \leq E \leq 1$), le nombre de darcy Da ($10^{-4} \leq Da \leq 10^{-1}$), et du rapport des conductivités thermiques ($R_c=1$, et $R_c=10$) essentiellement sur le nombre de Nusselt et sur la chute de pression. L'analyse des résultats révèle que le remplissage partiel du canal a pour but d'augmenter le transfert de chaleur par-rapport à un canal sans milieu poreux, et réduire la chute de pression par-rapport à un canal totalement remplie d'un milieu poreux.

Mots clés : Milieu poreux, anisotrope, Canal horizontal, Modèle Darcy-Brinkman-Forchheimer, Convection forcée, Volumes finis, canal partiellement poreux, algorithme SIMPLE.

Abstract

This document summarizes a numerical study of a laminar and stationary forced convection inside a flat horizontal channel partially or completely filled with a porous medium, it is assumed that the porous medium is anisotropic hydro-dynamically, and the walls are maintained at a constant heat flux. The model of Darcy-Brinkman-Forchheimer is used to describe the flow in the porous region. The numerical finite volume method is used for solving the equations of conservation of mass and momentum and energy, and the associated boundary conditions. The present work aims specify the nature of the convective motions in anisotropic porous medium, the results allowed to highlight the influence of the anisotropic permeability ratio K^* ($0.1 \leq K^* \leq 10$), and the angle anisotropy θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) and the thickness E of the porous layer ($0 \leq E \leq 1$), and the number of Darcy Da ($10^{-4} \leq Da \leq 10^{-1}$), and ratio of thermal conductivities ($R_c=1$, et $R_c=10$) essential on the Nusselt number and the pressure drop. The analysis of the results shows that the partial filling of the channel is intended to increase the heat transfer compared with a channel without porous medium, and reduce the pressure drop compared with a fully-filled channel with a porous medium.

Keywords: Porous media, anisotropic, horizontal Canal, Model Darcy-Brinkman-Forchheimer, forced convection, finite volumes, partially porous canal, SIMPLE algorithm.

ملخص

تلخص هذه الوثيقة دراسة عددية لحمل الحرارة بقوة وبتدفق صفحي وثابت داخل قناة أفقية ومسطحة مملوءة جزئياً أو كلياً بوسط مسامي، بفرض أن الوسط المسامي هو متباين الخواص الهيدروديناميكية، و الجدران معرضة لتدفق حراري ثابت، نستخدم نموذج Darcy-Brinkman-Forchheimer لوصف الجريان في المنطقة المسامية. يتم استخدام الطريقة العددية للحجوم المنتهية من أجل حل معادلات حفظ الكتلة، وكمية الحركة، والطاقة، مع الشروط الحدية المرتبطة، بهدف العمل الحالي إلى تحديد طبيعة حركة الحمل الحراري في وسط مسامي متباين الخواص، النتائج المتحصل عليها تسمح بتسليط الضوء على تأثير نسبة النفاذية المتباينة الخواص $(0.1 \leq K^* \leq 10)$ ، وزاوية التباين $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ ، وسمك الطبقة المسامية $E(0 \leq E \leq 1)$ ، وعدد Darcy $(10^{-4} \leq Da \leq 10^{-1})$ ، ونسبة التوصيل الحراري $(R_c=10$ و $R_c=1)$ بالأخص على عدد Nusselt وعلى هبوط الضغط. تحليل النتائج تبين أن ملء القناة جزئياً يهدف إلى رفع النقل الحراري مقارنة مع قناة لا تحتوي على وسط مسامي، وتخفيض هبوط الضغط مقارنة مع قناة مملوءة كلياً بوسط مسامي.

الكلمات المفتاحية: وسط مسامي، متباين الخواص، قناة أفقية، نموذج Darcy-Brinkman-Forchheimer، الحمل الحراري بقوة، الحجوم المنتهية، قناة مسامية مملوءة جزئياً، خوارزمية SIMPLE.