

N° d'ordre : 03/2016 - C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques



# THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **Doctorat 3<sup>eme</sup> Cycle**

En : Mathématiques

Spécialité : Equations aux dérivées partielles et applications

Par : **AGGOUNE Fatah**

---

## Écoulement d'un fluide magnétique incompressible avec la loi de Maxwell-Cattaneo

---

Soutenue publiquement le 14/01/2016, devant le jury composé de :

K. LEMRABET	Professeur	à l'USTHB	Président
Y. ATIK	Professeur	à l'ENS de Kouba	Examineur
M. S. MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M. MOUSSAOUI	Professeur	à l'ENS de Kouba	Examineur
K. HAMDACHE	Professeur	au Pôle Léonard de Vinci, Paris	Directeur
D. HAMROUN	Professeur	à l'USTHB	Co-Directrice

# Remerciements

Trouver les bons mots pour dire "Merci" est une chose difficile, d'autant plus dans une langue qui n'est pas sa langue maternelle. Je tiens tout d'abord à manifester ma plus profonde et sincère reconnaissance envers mes directeurs de thèse, Kamel Hamdache et Djamila Hamroun de m'avoir proposé un sujet d'étude passionnant et de m'avoir encouragé et encadré tout au long de ce travail. Ils ont su me communiquer leur goût pour les mathématiques en me faisant profiter de leur expérience, de leur vision de la recherche. Leurs points de vue et leurs conseils m'ont été très utiles et m'ont permis de mener à bien cette thèse. Djamila Hamroun a toujours fait preuve d'une totale confiance, d'un soutien et d'une gentillesse permanente à mon égard. Malgré son emploi du temps chargé, elle a toujours su trouver du temps à m'accorder aussi bien lors de l'encadrement scientifique que dans ma vie quotidienne par ses conseils et suggestions. Les échanges scientifiques avec Kamel Hamdache m'ont permis de découvrir et d'apprécier un champ d'investigation nouveau pour moi. Sa rigueur scientifique et ses conseils avisés m'ont aidé et motivé dans la réalisation de cette thèse. Tout deux ont su m'orienter et m'apporter l'optimisme et la confiance en moi nécessaire à la réalisation d'un tel projet et plus particulièrement dans les moments difficiles, où le doute m'effleurait. Ce sont des mathématiciens extrêmement brillants, mais également des travailleurs acharnés, qui resteront tous les deux pour moi des modèles et des sources d'inspiration. Pour tout cela, merci.

Je souhaite également remercier les membres de mon jury de thèse qui ont accepté de consacrer leur temps à la lecture de cette thèse. Je remercie Keddour Lemrabet d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse. Je tiens à remercier Youcef Atik et Mohand Moussaoui d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit, ce dont je suis très honoré. Je suis également très reconnaissant à Mohamed Said Moulay d'avoir accepté de participer à mon jury.

Je tiens à remercier le directeur du laboratoire AMNEDP, Djamel Teniou et tous les membres du laboratoire, de m'avoir accueilli et de m'avoir donné des conditions exceptionnelles pour réaliser ce travail. Je remercie tous mes enseignants qui m'ont guidé dans l'apprentissage des mathématiques pendant les trois cycles de ma formation.

Un grand merci à mes amis doctorants, Abdelkhalek Balehouane et Hichem Kasri, pour les bons et les mauvais moments que nous avons partagé pendant les années de l'université. Je vous remercie infiniment pour votre présence et votre soutien moral que vous m'avez apporté, merci pour votre amitié. Je pense aussi à tous les autres thésards, courage à vous tous pour la suite.

Je pense aujourd'hui avec beaucoup de tendresse à mes parents, à la confiance qu'ils m'accordent et leur soutien indéfectible, leurs sacrifices, leurs encouragements, mais aussi tout simplement et surtout pour leur amour. Je veux les remercier de tout mon coeur, ainsi que mes frères Abdenour, Billel et Riad et toute ma famille. Sans votre soutien et votre amour, tout ceci n'aurait jamais pu aboutir et je vous serai éternellement reconnaissant d'avoir su me donner les moyens d'arriver jusqu'ici.

Enfin, j'adresse mes remerciements à ma femme, pour sa patience angélique, son soutien quotidien et ses encouragements au cours de ces années de doctorat.

# Résumé

Dans cette thèse, nous étudions les équations décrivant la dynamique du transfert de chaleur dans un écoulement de fluide magnétique soumis à un champ magnétique appliqué. Dans le cas classique, la température se propage à vitesse infinie et le transfert est modélisé par la loi de Fourier. Pour pallier ce paradoxe, Cattaneo a proposé un modèle dans lequel la température se propage à vitesse finie. Cette loi de transfert de la chaleur est appelée loi de Maxwell-Cattaneo. Le système d'équations étudié est constitué des équations de Navier-Stokes incompressibles pour la vitesse  $U$  et la pression  $P$  du fluide magnétique, de l'équation de la magnétisation  $M$  de type Bloch-Torrey, des équations de la magnétostatique pour le champ magnétique  $H$  et des équations de transfert de chaleur de Maxwell-Cattaneo pour la température  $\theta$  et le flux de chaleur  $Q$ .

Le système d'équations étudié dans  $D_T = (0, T) \times D$  avec  $D$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $T > 0$  est le suivant

$$\operatorname{div} U = 0$$

$$\partial_t U + (U \cdot \nabla) U - \eta \Delta U + \nabla P = -\rho(\theta)g + \mu_0(M \cdot \nabla)H + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{curl}(M \times H)$$

$$\partial_t M + (U \cdot \nabla) M - \sigma \Delta M + \frac{1}{\delta}(M - \chi_0 H) = \frac{1}{2} \operatorname{curl} U \times M - \beta_0 M \times (M \times H) \quad (1)$$

$$\partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta = -\operatorname{div} Q$$

$$\tau(\partial_t Q - \gamma \Delta Q) = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl} U \times Q - Q - \nabla \mathcal{K}(\theta).$$

$$\operatorname{div}(H + M) = F, \quad \operatorname{curl} H = 0$$

où la densité  $\rho(\theta)$  et la fonction monotone  $\mathcal{K}(\theta)$  sont données par

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 - \beta(\theta - \theta^0)), \quad \mathcal{K}(\theta) = \kappa \theta + \alpha \theta^3. \quad (2)$$

Le système couplé noté par  $(\mathcal{P})$  est complété par les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned}
 U(0) &= U_0, \operatorname{div} U_0 = 0, M(0) = M_0, \theta(0) = \theta_0, Q(0) = Q_0 \quad \text{dans } D \\
 U &= 0, M \cdot \mathbf{n} = 0, \operatorname{curl} M \times \mathbf{n} = 0, H \cdot \mathbf{n} = 0, Q \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (3) \\
 \tau\gamma \operatorname{div} Q - \mathcal{K}(\theta) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_T
 \end{aligned}$$

où  $\Gamma_T = (0, T) \times \partial D$  et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire de la normale extérieure au bord de  $D$ .

Nous établissons un résultat d'existence globale d'une solution faible pour ce système en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et des techniques de régularisation, d'approximation, de monotonie et de compacité. Ce résultat a fait l'objet d'une publication dans la revue internationale *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* sous le titre de *Global weak solutions to magnetic fluid flows with nonlinear Maxwell-Cattaneo heat transfer law* voir [2].

**Mots clés :** Fluides magnétiques, équations de Navier-Stokes, magnétisation, équation de la magnétostatique, système de Maxwell-Cattaneo.

# Présentation de la thèse

Nous présentons ici le plan de cette thèse, en précisant les éléments principaux des chapitres composant ce manuscrit.

Dans le premier chapitre, nous présentons les caractéristiques générales des fluides magnétiques (ferrofluides), leur historique et propriétés physiques, nous donnons aussi certains domaines d'application de ces ferrofluides. Nous concluons ce chapitre par une présentation des équations décrivant la dynamique des ferrofluides.

Le chapitre 2 est consacré à quelques rappels théoriques. Nous commençons par quelques résultats concernant les espaces de Sobolev et les espaces  $L^p$ . Nous rappelons aussi quelques théorèmes utilisés tout au long de notre travail comme les théorèmes de compacité utilisés dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, le théorème de De Rham utilisé dans la démonstration d'existence de solutions des équations de Navier-Stokes, le théorème d'interpolation et les inégalités de Young, de Gronwall et de Bihari.

Dans le chapitre 3, nous présentons le résultat principal de notre travail qui est le résultat d'existence de solution faible pour un problème d'écoulement d'un fluide magnétique avec transfert de chaleur régi par la loi de Maxwell-Cattaneo. En premier lieu, nous présentons le problème étudié, puis nous donnons le résultat d'existence de solution faible pour ce problème. Ensuite, nous démontrons ce résultat en utilisant des techniques de régularisation, d'approximation, de monotonie et de compacité.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction générale aux ferrofluides</b>	<b>11</b>
1.1 Historique . . . . .	12
1.2 Stabilité des ferrofluides . . . . .	12
1.3 Propriétés physiques . . . . .	13
1.4 Applications . . . . .	16
1.5 Modèles physiques et équations . . . . .	17
<b>2 Quelques rappels</b>	<b>21</b>
2.1 Les espaces $L^p$ et les espaces de Sobolev . . . . .	21
2.2 Les espaces $L^p(0, T; X)$ . . . . .	23
2.3 Théorèmes de compacité . . . . .	24
2.3.1 Lemme d'Aubin . . . . .	24
2.3.2 Lemme de Lions . . . . .	25
2.4 Théorème de De Rham . . . . .	26
2.5 Théorème d'interpolation . . . . .	27
2.6 Inégalités . . . . .	27
2.6.1 Inégalités de Young . . . . .	27
2.6.2 Inégalités de Gronwall . . . . .	27
2.6.3 Inégalité de Bihari . . . . .	28
2.7 Opérateurs monotones . . . . .	29
<b>3 Solution faible pour un problème d'écoulement d'un fluide magnétique avec un transfert de chaleur régi par la loi de Maxwell-Cattaneo</b>	<b>30</b>
3.1 Introduction . . . . .	30

3.1.1	Position du problème . . . . .	30
3.1.2	Notations et espaces fonctionnels . . . . .	34
3.1.3	L'équation de la magnéto-statique . . . . .	36
3.2	Résultat principal . . . . .	38
3.2.1	Estimations a priori des solutions de $(\mathcal{P})$ . . . . .	38
3.2.2	Résultat d'existence . . . . .	46
3.3	Le problème régularisé $(\mathcal{P}_\nu)$ . . . . .	49
3.3.1	Estimations a priori pour le système (3.59) . . . . .	50
3.3.2	Résultat d'existence pour le problème $(\mathcal{P}_\nu)$ . . . . .	51
3.3.3	Solutions approchées de $(\mathcal{P}_\nu)$ . . . . .	52
3.3.4	Résolution du système $(\mathcal{P}_\nu^n)$ . . . . .	54
3.3.5	Passage à la limite . . . . .	61
3.4	Passage à la limite pour $\nu \rightarrow 0$ . . . . .	78
3.4.1	Problème auxiliaire . . . . .	78
3.4.2	Passage à la limite dans l'équation de la température . . . . .	82
	<b>Conclusion générale</b>	<b>88</b>
	<b>Annexes</b>	<b>89</b>
	<b>A Equation de transport</b>	<b>90</b>
	<b>B Régularité <math>L^p - L^q</math> de la solution d'une équation parabolique</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>

# Notations

$(\cdot; \cdot)$  : le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

$\times$  : le produit vectoriel.

$\nabla$  : le gradient.

$\Delta$  : l'opérateur laplacien.

div : la divergence.

curl : le rotationnel.

$\partial_n$  : la dérivée normale.

$\Omega$  : un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $\partial\Omega$  son bord.

$\mathbf{n}$  : la normale unitaire extérieure au bord  $\partial\Omega$ .

$\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $\Omega$  infiniment dérivables et à support compact dans  $\Omega$ .

$L^p(\Omega)$  espace de Lebesgue usuel.

$W^{m,p}(\Omega)$  et  $W_0^{m,p}(\Omega)$  espaces de sobolev.

$W^{-m,p'}(\Omega)$  l'espace dual de  $W_0^{m,p}(\Omega)$  et  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ .

$\mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^3$ ,  $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) = (W^{m,p}(\Omega))^3$ .

$\mathbb{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^3$  et  $\mathbb{H}_0^m(\Omega) = (H_0^m(\Omega))^3$ .

$\mathcal{C}(\Omega)$  ensemble des fonctions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

$\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  ensemble des fonctions  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  ensemble des fonctions  $k$  fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ .

$X$  un espace de Banach et  $X'$  son espace dual.

$\langle \cdot; \cdot \rangle_{X' \times X}$  le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ ,  $\|\cdot\|_X$  la norme dans  $X$ .

$\mathcal{C}([0, T]; X)$  ensemble des fonctions continue sur  $[0, T]$  à valeurs dans un espace de Banach  $X$ .

$L^p(0, T; X)$  espace de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach.

$\mathcal{D}([0, T]; X)$  espace des fonctions continûment différentiables à support compact dans  $[0, T]$ .

### Quelques formules d'intégrations

Soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  des champs vectoriels de classe  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  et  $\varphi, \psi$  des champs scalaires de classe  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

1. 
$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} \, dx$$
2. 
$$\int_{\Omega} \varphi \Delta \psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx$$
3. 
$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} \, dx - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds$$
4. 
$$\int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} (\operatorname{curl} \mathbf{u}) \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) \, dx$$

$$- \int_{\partial\Omega} (\operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

### Quelques identités vectorielles

1.  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{u}) = 0$
2.  $\operatorname{curl}(\nabla \varphi) = 0$
3.  $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{u}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{u}$
4.  $\operatorname{curl}(\varphi \mathbf{u}) = \varphi \operatorname{curl} \mathbf{u} + \nabla \varphi \times \mathbf{u}$
5.  $\operatorname{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{u} - (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v}$
6.  $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \operatorname{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
7.  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \operatorname{curl} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{curl} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}$
8.  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2$
9.  $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$
10.  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}).$

# Chapitre 1

## Introduction générale aux ferrofluides

Un fluide magnétique encore appelé ferrofluide est un liquide qui a de fortes propriétés magnétiques. Sous l'action d'un champ magnétique, ce liquide de couleur noire s'aimante et prend des formes spectaculaires.



FIGURE 1.1 – Un ferrofluide soumis à un champ magnétique.

(source : <https://www.wikipedia.org/>).

Les ferrofluides sont des solutions colloïdales très stables constituées de particules ferromagnétiques d'une taille de l'ordre de 10 nanomètres en suspension dans un liquide porteur non magnétique (huile, eau, . . .). Il est indispensable d'introduire un agent stabilisateur appelé surfactant afin d'augmenter la solubilité des particules

dans le liquide porteur et aussi pour assurer les forces de répulsion entre les particules afin d'éviter leur agglomération. Un ferrofluide typique est constitué par environ 5 à 10% de particules magnétiques, 10% de surfactant, et 85% de liquide porteur par volume. En absence d'un champ magnétique externe, l'orientation des particules ferromagnétiques est aléatoire et le liquide n'est pas magnétique, le mélange se comporte comme un liquide visqueux isotrope et homogène. Toutefois, quand un champ magnétique externe est appliqué, les moments magnétiques des particules s'alignent sur les lignes de champ magnétique, le liquide devient magnétique. Dans ce cas, le fluide n'est ni homogène ni isotrope et sa viscosité peut changer. Aussi, la surface du liquide se déforme en fonction de la géométrie du champ magnétique et les propriétés du fluide peuvent être ajustées en fonction du champ magnétique appliqué.

## 1.1 Historique

Les ferrofluides n'existent pas à l'état naturel, il faut les synthétiser. La première tentative répertoriée est due à Wilson en 1779, le fluide y était formé de fines particules de fer dans l'eau. Cependant, on ne peut parler d'une réelle synthèse de ferrofluide qu'à partir de 1963. C'est Stephen Papell [25] qui a effectué cette synthèse en mélangeant de la poudre de magnétite à du kérosène en présence d'acide oléique. Il a ensuite broyé le mélange pendant plus d'un mois jusqu'à obtention de particules dont la taille n'excède pas les 10 nm. Les particules sont recouvertes d'acide oléique, ce qui assure la stabilité de la solution colloïdale.

Peu après, les travaux de Rosenweig et ses collaborateurs [22, 31] présentent des améliorations sur le fluide de Papell et synthétisent un ferrofluide de saturation magnétique plus importante et surtout stable par rapport à la sédimentation. Il en découla une production industrielle et une commercialisation des ferrofluides. Depuis, la recherche scientifique apporte quotidiennement des avancées dans la synthèse des ferrofluides.

## 1.2 Stabilité des ferrofluides

Pour son utilisation à des fins industrielles, un ferrofluide doit être stable. La stabilité dépend de la taille des particules et de l'équilibre des forces s'exerçant sur le ferrofluide.

En premier lieu, il faut que le diamètre moyen des particules soit suffisamment petit pour éviter la sédimentation naturelle des grains sous l'effet de la gravité. Il faut également éviter que les particules ne s'agglomèrent entre elles et ne conduisent à des agrégats plus gros, susceptibles de sédimenter à leur tour.

Les forces qui s'exercent sur les particules ferrofluides sont

- **La force de Van der Waals**, qui est une force attractive de courte portée et de valeur proportionnelle à la dimension des particules,
- **L'interaction dipolaire** entre les particules due à l'aimantation spontanée des particules,
- **La force magnétique**, résultant de l'interaction entre les pôles des nanoparticules, elle est attractive lorsqu'un champ magnétique est appliqué,
- **La gravité** qui provoque la sédimentation de la solution.

En plus de ces forces, il convient d'ajouter le terme qui provient de l'agitation thermique et qui joue un rôle important dans la stabilité des ferrofluides.

## 1.3 Propriétés physiques

L'intérêt des ferrofluides réside dans leurs propriétés d'allier les effets mécaniques et magnétiques. Les deux paramètres principaux en jeu sont la saturation magnétique et la viscosité dynamique. Pour autant, il ne faut pas oublier les propriétés optiques de ces matériaux.

### Propriétés mécaniques et magnétiques

Les ferrofluides possèdent de très fortes propriétés magnétiques. Lorsque le fluide magnétique n'est soumis à aucun champ magnétique, les moments magnétiques portés par les nanoparticules sont orientés aléatoirement et l'aimantation totale du fluide est nulle. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les moments des particules ont tendance à s'aligner avec le champ auquel elles sont soumises. En augmentant l'intensité du champ, la polarisation des particules augmente et l'interaction entre elles devient plus forte. La magnétisation  $M$  des ferrofluides est alors proportionnelle à

l'intensité du champ magnétique appliqué  $H$ . Son niveau augmente jusqu'à la valeur définie par sa saturation magnétique, quand toutes les particules sont alignées. Au-delà de cette valeur, la magnétisation reste stationnaire.

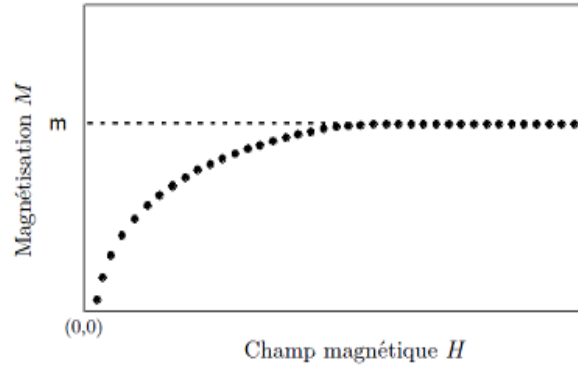


FIGURE 1.2 – La figure montre la courbe typique de magnétisation d'un ferrofluide. C'est dans la zone de transition de la courbe, avant d'atteindre la saturation, que se situent la plupart des applications du ferrofluide.

Dans la mesure où les interactions magnétiques entre les particules sont négligées, la théorie de Langevin décrit l'aimantation  $M$  du fluide en fonction du champ  $H$  par la loi (dite de Langevin)

$$M = \phi m L(\xi), \quad \xi = \mu_0 m V H / \kappa T, \quad L(\xi) = \cot(\xi) - \frac{1}{\xi}$$

où  $\phi$  est la fraction volumique des particules,  $m$  leur aimantation à saturation,  $V = \pi d^3/6$  est le volume de la particule,  $d$  est son diamètre,  $\kappa$  est la constante de Boltzmann,  $T$  est la température et  $\mu_0$  étant la perméabilité du vide.

L'aimantation d'un ferrofluide à saturation est égale, à la dilution près, à celle des matériaux qui composent ces particules. Par exemple, un ferrofluide standard, à base de maghémite, et de fraction volumique de l'ordre de 5%, possède une aimantation de 20 kA/m (kiloampères par mètre) à saturation.

Cette aimantation ainsi que diverses propriétés caractéristiques du ferrofluide (susceptibilité magnétique et diamètre moyen) peuvent être obtenues par une mesure de

sa courbe d'aimantation (c'est-à-dire de l'aimantation du ferrofluide  $M$ , en fonction du champ magnétique extérieur appliqué  $H$ ). L'ensemble de la courbe d'aimantation peut généralement être modélisé à l'aide de l'équation de Langevin.

Une autre propriété importante des ferrofluides est la modification des propriétés visqueuses, en fonction de l'intensité et de la direction du champ magnétique. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué au ferrofluide, la viscosité s'élève. En l'absence d'un champ magnétique la viscosité est conditionnée par celle du fluide porteur, et par la présence des particules dans le liquide qui augmente la viscosité. Cette variation est en fonction de la taille des particules et de leur concentration. Contrairement à la magnétisation, il n'y a pas a priori un niveau de saturation à partir duquel la viscosité reste constante. Les études sur les effets du champ magnétique sur la viscosité des ferrofluides sont bien développées pour un niveau de champ autour de la saturation magnétique. Cependant, aucune information n'est proposée dans la littérature concernant le comportement de la viscosité des ferrofluides une fois saturés, quand ils sont soumis à des niveaux encore plus élevés de champ magnétique.

Pour les suspensions colloïdales, l'écoulement provoque par effet visqueux la rotation des particules dans l'axe parallèle à sa vorticité. D'un point de vue microscopique, la rotation de chacune des particules peut être associée à un moment mécanique d  à un couple visqueux. Pour les ferrofluides, ce mouvement est important, car les particules en suspension sont magnétiques. En présence d'un champ magnétique, un couple apparaît sur les particules afin de les orienter dans la direction des lignes du champ. Ainsi, les couples visqueux et magnétiques vont interagir sur le mouvement des particules. Comme le couple est une grandeur vectorielle, l'orientation du champ magnétique est importante.

## Propriétés optiques

Dans la plupart des cas, les particules magnétiques d'un ferrofluide portent, en plus de leur moment magnétique, une anisotropie optique intrinsèque dont l'origine, encore controversée, est liée soit à une propriété cristalline des particules, soit à une anisotropie de forme. L'application d'un fort champ magnétique conduit à une

orientation des particules le long du champ et à une anisotropie globale du milieu qui devient biréfringent. Cette propriété subsiste à très faible dilution en particules magnétiques.

Les caractéristiques optiques particulières des ferrofluides ne se limitent pas à la biréfringence. Les ferrofluides sont aussi dichroïques sous l'influence d'un champ magnétique : lorsqu'il est éclairé par une lumière non polarisée et qu'on l'observe sous un certain angle par transparence, il apparaît bicolore. Ces caractéristiques sont utilisées dans de nombreuses applications des ferrofluides.

## 1.4 Applications

Les ferrofluides ont donné lieu à de nombreuses applications dans l'industrie et la recherche. Nous présentons ici quelques exemples d'applications des ferrofluides. Dans le domaine de l'ingénierie, une des applications les plus courantes des ferrofluides est la réalisation de joints d'étanchéité des arbres tournants. Le champ magnétique est généré par des aimants permanents annulaires placés autour de l'axe de rotation. Le gradient du champ maintient le ferrofluide en place, même en cas de pression élevée. Le frottement exercé par le joint de ferrofluide sur l'arbre est négligeable par rapport aux techniques mécaniques couramment utilisées : les arbres ont ainsi une durée de vie plus grande. Ce processus est utilisé dans certaines autres applications techniques comme à l'intérieur de disques durs, ils sont utilisés pour la lubrification et l'étanchéité des axes de moteur de disques durs en étant introduits entre l'enroulement et l'aimant assurant la lubrification et empêchant les poussières de se glisser dans l'interstice.

Les ferrofluides peuvent être rencontrés aussi dans des systèmes d'amortisseurs d'automobiles, d'aéronefs et de bateaux. Dans ce cas, leur propriété visqueuse est utilisée. À partir d'un champ magnétique appliqué, l'amortissement est ajusté en fonction de la charge ou du trajet à parcourir.

Les Ferrofluides sont aussi utilisés dans les haut-parleurs, ils permettent d'améliorer le transfert thermique au sein des enceintes audio ou des haut-parleurs électromagnétiques de grande qualité, afin d'obtenir un son de haute performance et sans surchauffe.

Dans le domaine biomédical, les ferrofluides sont utilisés pour séparer les groupes biologiques. Sous gradient de champ magnétique, on pourra isoler des cellules qui ont fixé des nanoparticules magnétiques. C'est ainsi par exemple qu'on sépare magnétiquement des globules rouges pathologiques en couplant aux nanoparticules magnétiques une protéine (l'annexine) qui se fixe sur un des phospholipides de la membrane cellulaire, exposé à l'extérieur de la cellule uniquement si celle-ci est endommagée. Ce même principe de tri magnétique peut être adapté à la séparation de macromolécules biologiques (des fragments d'ADN par exemple), de virus de bactéries.... à des fins diagnostiques.

Les fluides magnétiques sont également utilisés dans l'imagerie par résonance magnétique (IRM) comme agent de contraste; les particules en créant localement une inhomogénéité de champ magnétique modifient les temps de relaxation des protons. Une autre application est l'utilisation des ferrofluides en cancérologie, par hyperthermie magnétique : les nanoparticules sont injectées dans des tissus cancéreux, sous l'action d'un champ magnétique alternatif, ils entraînent une élévation de température de la tumeur. D'autres applications sont présentées plus en détail dans *Colloidal Magnetic Fluids* [23] et dans *Ferrofluids : Magnetically Controllable Fluids and Their Applications* [24].

## 1.5 Modèles physiques et équations

Lorsqu'on applique un champ magnétique à un ferrofluide, plusieurs phénomènes surviennent à cause de la réorientation des dipôles des nanoparticules ferromagnétiques. Un ensemble d'équations décrivant la ferrohydrodynamique est proposé par Rosensweig dans [22] et se compose des équations du mouvement du ferrofluide incompressible non conducteur

$$\operatorname{div} U = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - \eta \Delta U + \nabla P = (M \cdot \nabla)H$$

et des équations de la magnétostatique

$$\operatorname{curl} H = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad B = H + 4\pi M. \tag{1.2}$$

Dans ces équations  $U$  est la vitesse du fluide,  $P$  sa pression hydromagnétique,  $M$  représente la magnétisation,  $H$  le champ magnétique et  $B$  l'induction magnétique. Dans le modèle ci-dessus, on suppose que  $M$  et  $H$  sont parallèles. Mais généralement le moment magnétique est soumis à un couple magnétique créé par le champ magnétique et dans ce cas un terme supplémentaire  $M \times H$  est introduit dans l'équation de Navier-Stokes (1.1) qui devient

$$\rho(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) = -\nabla P + \eta \Delta U + (M \cdot \nabla)H + \frac{1}{2} \text{curl}(M \times H) \quad (1.3)$$

où  $(M \cdot \nabla)H$  est la force magnétique de Kelvin qui représente la convection du champ magnétique  $H$  dans la direction de l'aimantation  $M$  et le couple magnétique  $M \times H$  tend à retourner  $M$  dans la direction de  $H$ .

Le système comprend aussi une équation de la magnétisation  $M$ . Dans un liquide non magnétique, la magnétisation est décrite par l'équation

$$\partial_t M + (U \cdot \nabla)M = \omega \times M - \frac{1}{\tau_B}(M - M_0) \quad (1.4)$$

où  $U$  est la vitesse du fluide. Le premier terme du second membre de l'équation représente le changement de magnétisation causé par la rotation (de vitesse angulaire macroscopique  $\omega$ ) des particules magnétiques et le second terme représente le changement de la magnétisation vers une magnétisation d'équilibre  $M_0$  dépendant du temps de relaxation  $\tau_B$ . Le terme  $(U \cdot \nabla)M$  représente la convection de  $M$  dans la direction de la vitesse  $U$ .

Lorsque le liquide est magnétique, il convient de tenir compte du couple magnétique  $M \times H$  qui agit sur les particules. En notant  $\Omega = \frac{1}{2} \text{curl} U$  la vitesse angulaire microscopique du fluide, on a

$$6\eta\phi(\omega - \Omega) = M \times H \quad (1.5)$$

où  $\phi$  est la fraction volumique de la phase solide dispersée et l'équation de la magnétisation (1.4) devient

$$\partial_t M + (U \cdot \nabla)M = \frac{1}{2} \text{curl} U \times M - \frac{1}{\tau_B}(M - M_0) - \frac{1}{6\eta\phi} M \times (M \times H). \quad (1.6)$$

où le terme  $M \times (M \times H)$  tend à aligner  $M$  dans la direction de  $H$ .

Nous terminons cette introduction par décrire le transfert de chaleur dans le ferrofluide. La température  $\theta$  du fluide est généralement décrite par l'équation de transfert de chaleur linéaire

$$\partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta = -\operatorname{div} Q \quad (1.7)$$

où le flux de chaleur  $Q$  est donné par la loi de Fourier linéaire

$$Q = -\kappa \nabla \theta \quad (1.8)$$

et  $U$  est la vitesse du fluide. Pour éviter le paradoxe de la propagation instantanée de la chaleur inhérente à l'équation du type parabolique, un autre modèle a été proposé dans les travaux de Vernotte [38] et Cattaneo [10]. Dans ce modèle, la loi de Fourier (1.8) est remplacée par l'équation de flux de chaleur

$$\tau \partial_t Q + Q = -\kappa \nabla \theta \quad (1.9)$$

où  $\tau > 0$  est le temps de relaxation. Pour  $\tau = 0$ , on retrouve l'équation (1.8). En combinant l'équation de la température et l'équation de flux de chaleur, on constate que  $\theta$  satisfait une équation de type hyperbolique.

Le système (1.7)-(1.9) a été généralisé par Guyer et Krumhansl voir [18], par l'introduction d'un processus de diffusion dans (1.9) de sorte que l'équation de flux de chaleur devient

$$\tau(\partial_t Q - \gamma \Delta Q) = -Q - \kappa \nabla \theta \quad (1.10)$$

où  $\gamma > 0$  est un coefficient de diffusion (voir aussi [26, 27]). Lorsque la conductivité thermique est renforcée par les effets de rayonnement voir [15, 16, 17], la loi de Fourier linéaire est remplacée par une loi non linéaire

$$Q = -\nabla \mathcal{K}(\theta). \quad (1.11)$$

Dans [16], le modèle de transfert de chaleur par la loi de Fourier non linéaire dans un écoulement de fluide incompressible a été étudié.

Dans cette thèse, nous considérons la loi de Maxwell-Cattaneo non linéaire pour le transfert de chaleur qui est une généralisation de la loi de Fourier non linéaire, plus précisément, nous considérons que la dynamique du couple  $(\theta, Q)$  est régie par le système

$$\begin{aligned}\partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta &= -\operatorname{div} Q \\ \tau(\partial_t Q - \gamma \Delta Q) &= -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl} U \times Q - Q - \nabla \mathcal{K}(\theta).\end{aligned}\tag{1.12}$$

où  $\mathcal{K}(\theta)$  est une fonction monotone donnée par

$$\mathcal{K}(\theta) = \kappa \theta + \alpha \theta^3\tag{1.13}$$

$\kappa > 0$  et  $\alpha > 0$  étant des coefficients de conductivité thermique.

Le terme  $-\frac{\tau}{2} \operatorname{curl} U \times Q$  tient compte de la rotation des particules de vitesse angulaire  $\Omega = \frac{1}{2} \operatorname{curl} U$ .

# Chapitre 2

## Quelques rappels

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des résultats utilisés tout au long de ce travail. Nous commençons par des résultats concernant les espaces de Sobolev et les espaces  $L^p(0, T; X)$  où  $X$  désigne un espace de Banach.

### 2.1 Les espaces $L^p$ et les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous reprenons dans cette section certains résultats sur ces espaces. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter les ouvrages de Robert A. Adams [1] et de R. Dautary, J.L Lions [11].

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Pour  $1 \leq p < \infty$ , on note  $L^p(\Omega)$  l'espace de Lebesgue défini par

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p},$$

et pour  $p = \infty$ , on note

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u| < \infty\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u|.$$

On désigne par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $\Omega$  infiniment dérivables et à support compact dans  $\Omega$ .

Pour tout entier  $m \geq 0$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{m,p} = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

où la dérivé partielle  $\partial^\alpha$  est à prendre au sens faible (au sens des distributions). Il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

On désigne par  $W_0^{m,p}(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{m,p}(\Omega)$  et par  $W^{-m,p'}(\Omega)$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , l'espace dual de  $W_0^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme duale

$$\|u\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{\substack{\phi \in W_0^{m,p}(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{|\langle u, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}}.$$

Pour les fonctions vectorielles, nous utilisons les notations  $\mathbb{L}^p(\Omega)$ ,  $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ ,  $\mathbb{H}^m(\Omega)$ ,  $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ .

Nous donnons maintenant quelques résultats d'injection des espaces  $W^{1,p}$  dans les espaces  $L^p$ .

**Théorème 1** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $\partial\Omega$  borné, ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$  et soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On a

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 \leq p < N, \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) &\subset L^{p^*}(\Omega) && \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ \text{Si } p = N, \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) && \forall q \in [p, +\infty[, \\ \text{Si } p > N, \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) &\subset L^\infty(\Omega), \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec injections continues.

De plus, si  $p > N$ , pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad p.p. \quad x, y \in \Omega$$

avec  $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$  et  $C$  est une constante positive dépendant seulement de  $\Omega, p$  et  $N$ .  
En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ .

**Théorème 2 (Rellich-Kondrachov)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné de classe  $C^1$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 \leq p < N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[, \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ \text{Si } p = N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[, \\ \text{Si } p > N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec injections compactes.

**Proposition 1 (Inégalité de Poincaré)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , alors il existe une constante  $C \geq 0$  telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p < \infty. \tag{2.3}$$

**Proposition 2 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné, connexe et régulier de  $\mathbb{R}^N$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty \tag{2.4}$$

où  $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) \, dx$  est la valeur moyenne de  $u$  sur  $\Omega$ , le nombre  $|\Omega|$  désignant la mesure de Lebesgue du domaine  $\Omega$ .

## 2.2 Les espaces $L^p(0, T; X)$

Dans cette section, on présente brièvement quelques espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Soient  $T > 0$ ,  $X$  un espace de Banach, on définit les espaces suivants

$$\mathcal{C}([0, T]; X) = \{u : [0; T] \rightarrow X \text{ continue } \},$$

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0; T] \rightarrow X \text{ mesurable telle que } \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

et

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : [0; T] \rightarrow X \text{ mesurable telle que } \exists C > 0, \|u\|_X \leq C \text{ p.p. } t \in (0, T)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

**Remaque 1** Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(0, T; X)$  est un espace de Banach et pour tout  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mathcal{C}(0, T; X)$  est dense dans  $L^p(0, T; X)$ . Si  $1 < p < \infty$  est si  $X$  est réflexif, alors  $L^p(0, T; X)$  est réflexif (voir J. Droniou [14] et J. Simon [34]).

## 2.3 Théorèmes de compacité

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, le lemme d'Aubin-Lions (voir [21, 34]) est un outil très puissant. Il permet d'établir des résultats de compacité sur les solutions approchées et de faire le passage à la limite dans les termes non linéaires des équations.

### 2.3.1 Lemme d'Aubin

Soient  $X_0, X, X_1$  trois espaces de Banach avec  $X_0, X_1$  réflexifs et

$$X_0 \subset X \subset X_1 \quad \text{avec injections continues,} \quad (2.5)$$

et

$$\text{l'injection de } X_0 \text{ dans } X \text{ est compacte.} \quad (2.6)$$

Soit  $0 < T < \infty$ , on définit

$$W = \left\{ u \in L^p(0, T; X_0); u' = \frac{du}{dt} \in L^q(0, T; X_1) \right\}. \quad (2.7)$$

où  $1 < p, q < \infty$ . Muni de la norme

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;X_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;X_1)}$$

$W$  est un espace de Banach et on a le résultat suivant

**Théorème 3** *Sous les hypothèses (2.5), (2.6) et si  $1 < p, q < \infty$ , l'injection de  $W$  dans  $L^p(0, T; X)$  est compacte.*

La preuve du résultat de compacité dû à T. Aubin (voir le livre de J.L. Lions [21]) repose sur des raisonnements d'extraction de suites convergeant faiblement ; ce résultat demandait donc la réflexivité des espaces de Banach mis en jeu et des espaces de Sobolev de la forme  $W^{1,p}(0, T; X_1)$  avec  $1 < p < \infty$ .

Peu après J. Simon (voir [34]), donne une généralisation des résultats de compacité d'Aubin dans les cas non réflexifs, que nous présentons ici

**Théorème 4** *Sous les hypothèses (2.5), (2.6) tel que pour  $1 \leq p, q \leq \infty$ , on a*

1. *Si  $p < +\infty$ , l'injection de  $W$  dans  $L^p(0, T; X)$  est compacte.*
2. *Si  $p = +\infty$  et  $q > 1$ , l'injection de  $W$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; X)$  est compacte.*

Nous allons donner maintenant un autre lemme de compacité faisant intervenir la notion de dérivée fractionnaire (voir [21]).

### 2.3.2 Lemme de Lions

Soient  $X_0, X, X_1$  trois espaces de Hilbert qui satisfont les hypothèses (2.5) et (2.6). Soit  $v(t)$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $X_1$ , on note par  $\widehat{v}$  la transformée de Fourier en  $t$  de  $v$ ,

$$\widehat{v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2i\pi t\tau)v(t) dt.$$

La dérivée en temps  $t$  d'ordre  $\gamma$  de  $v$  est la transformée de Fourier inverse de  $(2i\pi\tau)^\gamma \widehat{v}$  c'est-à-dire

$$\widehat{D_t^\gamma v(\tau)} = (2i\pi\tau)^\gamma \widehat{v}.$$

Pour  $\gamma > 0$ <sup>1</sup> donné, on définit l'espace

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1) &= \{v \in L^2(\mathbb{R}; X_0), D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\} \\ &= \{v \in L^2(\mathbb{R}; X_0), |\tau|^\gamma \widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

---

1. Dans les applications, en général  $0 < \gamma < 1$ .

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{\mathcal{W}^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1)} = \left( \|v\|_{L^2(\mathbb{R}; X_0)}^2 + \|\tau^{|\gamma|} \widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}; X_1)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

On introduit ensuite  $\mathcal{W}^\gamma(0, T, X_0, X_1)$  espace des restrictions à  $(0, T)$  des fonctions de  $\mathcal{W}^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1)$ . C'est un espace de Hilbert pour la norme quotient :

$$\|v\|_{\mathcal{W}^\gamma(0, T, X_0, X_1)} = \inf \left\{ \|w\|_{\mathcal{W}^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1)} \mid w = v \text{ p.p. sur } (0, T) \right\}.$$

**Théorème 5** *Sous les hypothèses (2.5) et (2.6), l'injection de  $\mathcal{W}^\gamma(0, T, X_0, X_1)$  dans  $L^2(0, T; X)$  est compacte.*

Pour la démonstration voir le livre de J.L. Lions [21].

## 2.4 Théorème de De Rham

Le résultat suivant joue un rôle crucial dans la démonstration de l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes : une fois établie l'existence d'une solution de l'équation variationnelle sur la vitesse seule, il permet d'obtenir l'existence d'une pression associée à cette vitesse satisfaisant les équations générales (voir [35, 36]).

**Théorème 6** *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $w \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$  telle que*

$$\langle w; \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{div} \phi = 0.$$

*Alors il existe  $q \in L^2(\Omega)$  tel que  $w = \nabla q$ .*

La preuve de ce résultat est donnée dans ([36], p. 30, lemme 9). Ce résultat se généralise aux distributions dépendant du temps (voir [35]).

**Lemme 1** *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $w \in \mathcal{D}'(]0, T[; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$  telle que*

$$\langle w; \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{div} \phi = 0.$$

*Alors il existe  $q \in \mathcal{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$  tel que  $w = \nabla q$ .*

De plus  $q$  peut être choisi de telle sorte que l'application  $w \rightarrow q$  soit linéaire et continue de  $W^{s,r}(]0, T[; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$  dans  $W^{s,r}(]0, T[; L^2(\Omega))$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq r \leq \infty$ .

## 2.5 Théorème d'interpolation

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $p_1, p_2, q_1, q_2$  quatre réels dans  $[1, +\infty]$ . Si  $f \in L^{p_1}(I; L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(I; L^{q_2}(\Omega))$  alors pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , la fonction  $f$  est dans  $L^p(I, L^q(\Omega))$  pour  $p$  et  $q$  définis par

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}.$$

De plus

$$\|f\|_{L^p(I, L^q(\Omega))} \leq \|f\|_{L^{p_1}(I; L^{q_1}(\Omega))}^\theta \|f\|_{L^{p_2}(I; L^{q_2}(\Omega))}^{1-\theta}.$$

## 2.6 Inégalités

### 2.6.1 Inégalités de Young

- 

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

- avec  $\varepsilon$ ,

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}, \quad (a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$$

- soient  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (a, b > 0)$$

et

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q, \quad (a, b > 0, \varepsilon > 0)$$

pour  $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$ .

### 2.6.2 Inégalités de Gronwall

Le lemme de Gronwall, appelé aussi inégalité de Gronwall, permet l'estimation d'une fonction qui vérifie une certaine inégalité différentielle ou intégrale. Le lemme existe sous deux formes, intégrale et différentielle.

**Forme différentielle :** Soit  $\eta(\cdot)$  une fonction positive, absolument continue sur  $[0, T]$  qui satisfait p.p. pour tout  $t$  l'inégalité différentielle

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

où  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions positives et intégrables sur  $[0, T]$ . Alors

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s) ds\right) \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds\right] \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

**Forme intégrale :** Soit  $\xi$  une fonction positive, intégrable sur  $[0, T]$  telle que tout  $t \in [0, T]$ , on a l'inégalité intégrale

$$\xi(t) \leq a + b \int_0^t \xi(s) ds$$

où  $a, b$  sont deux constantes positives ou nulles. Alors

$$\xi(t) \leq a \exp(bt) \quad \forall t \in [0, T].$$

### 2.6.3 Inégalité de Bihari

Soit  $u$  et  $f$  deux fonctions positives continues définies sur  $\mathbb{R}^+$  et soit  $w$  une fonction continue croissante définie sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $w(u) > 0$  sur  $]0, +\infty[$ . Si  $u$  satisfait l'inégalité intégrale suivante,

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t f(s)w(u(s)) ds, \quad t \in [0, +\infty[$$

où  $\alpha$  est une constante positive, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(\alpha) + \int_0^t f(s) ds\right), \quad t \in [0, T]$$

où la fonction  $G$  est définie par

$$G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{w(y)}, \quad x \geq x_0 > 0,$$

et  $G^{-1}$  est la fonction inverse de  $G$ ,  $T > 0$  étant choisi de telle sorte que

$$G(\alpha) + \int_0^t f(s) ds$$

soit dans le domaine de définition de  $G^{-1}$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

## 2.7 Opérateurs monotones

Dans ce qui suit,  $X$  est un espace de Banach réflexif et séparable et  $A : X \rightarrow X'$  une application où  $X'$  est l'espace dual de  $X$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité (voir [21]).

**Définition 1** *On dit que*

i)  *$A$  est monotone si*

$$\forall u, v \in X, \quad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0$$

ii)  *$A$  est hémicontinue si pour tous  $u, v \in X$ , l'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto \langle A(u+tv), v \rangle$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .*

# Chapitre 3

## Solution faible pour un problème d'écoulement d'un fluide magnétique avec un transfert de chaleur régi par la loi de Maxwell-Cattaneo

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Position du problème

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la dynamique du transfert de chaleur dans un écoulement de fluide magnétique incompressible sous l'action d'un champ magnétique appliqué. Nous considérons un écoulement d'un fluide magnétique incompressible occupant un domaine  $D \subset \mathbb{R}^3$ , sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Les équations modélisant ce type d'écoulement ont été proposées par M.I. Shliomis [32], [33] et sont les suivantes.

Equations de Navier-Stokes satisfaites par la vitesse  $U$  et la pression hydromagnétique  $P$  du fluide magnétique

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U &= 0 \\ \rho(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - \eta \Delta U + \nabla P &= \mu_0 (M \cdot \nabla)H + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{curl}(M \times H) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\eta$  est le coefficient de viscosité du fluide et  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

Equation de la magnétisation satisfaite par  $M$

$$\partial_t M + (U \cdot \nabla) M + \frac{1}{\delta} (M - \chi_0 H) = \frac{1}{2} \operatorname{curl} U \times M - \beta_0 M \times (M \times H) \quad (3.2)$$

où  $\chi_0$  est la susceptibilité magnétique et  $\delta$  représente le temps de relaxation.

Le champ magnétique  $H$  satisfait dans  $\mathbb{R}^3$  les équations de la magnétostatique suivantes

$$\operatorname{div} (H + \chi(D)M) = -\operatorname{div} H_{ext}, \quad \operatorname{curl} H = 0 \quad (3.3)$$

où  $\chi(D)$  est la fonction caractéristique de  $D$ .

Dans [3] les auteurs ont considéré une régularisation de ce système, en introduisant une diffusion dans l'équation de la magnétisation

$$\partial_t M + (U \cdot \nabla) M - \sigma \Delta M + \frac{1}{\delta} (M - \chi_0 H) = \frac{1}{2} \operatorname{curl} U \times M - \beta_0 M \times (M \times H) \quad (3.4)$$

$\sigma > 0$  étant le coefficient de diffusion. Ils ont établi un résultat d'existence globale en temps de solutions faibles d'énergie finie en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Dans [5], les auteurs ont considéré un système différentiel proposé par Rinaldi et Zahn [30] et Rosensweig [31]. Le système est constitué des équations de Navier-Stokes satisfaites par la vitesse  $U$  et la pression  $P$  du fluide magnétique, l'équation de moment angulaire satisfaite par le moment angulaire  $\Omega$ , l'équation de la magnétisation satisfaite par la magnétisation  $M$  et les équations de la magnétostatique satisfaite par le champ magnétique  $H$ . En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, ils ont prouvé un résultat d'existence globale en temps de solutions faibles d'énergie finie. Le système d'équations étudié dans  $D_T = (0, T) \times D$  avec  $D$  un domaine borné, régulier de  $\mathbb{R}^3$  est le suivant

$$\operatorname{div} U = 0$$

$$\rho(\partial_t U + (U \cdot \nabla) U) - (\eta + \zeta) \Delta U + \nabla P = \mu_0 (M \cdot \nabla) H + 2\zeta \operatorname{curl} \Omega$$

$$\rho\kappa(\partial_t \Omega + (U \cdot \nabla) \Omega) - \eta' \nabla \Omega - (\eta' + \lambda') \nabla (\operatorname{div} \Omega) + \mu_0 M \times H + 2\zeta (\operatorname{curl} U - 2\Omega)$$

$$\partial_t M + (U \cdot \nabla) M - \sigma \Delta M = \Omega \times M - \frac{1}{\delta} (M - \chi_0 H)$$

$$\operatorname{div} (H + 4\pi M) = F, \quad \operatorname{curl} H = 0$$

où  $\rho, \kappa, \eta, \eta', \lambda', \delta, \chi_0, \mu_0$  et  $\sigma$  sont des constantes physiques positives,  $\rho$  est la densité du fluide,  $\eta$  est le coefficient de viscosité de cisaillement (dynamique) du fluide et  $\lambda$  le coefficient de viscosité de dilatation du fluide, tandis que  $\eta'$  et  $\lambda'$  sont les coefficients analogues à la viscosité de spin. Le coefficient  $\zeta$  est la viscosité de vortex et  $F$  est une fonction donnée. Le système est complété par les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned} U(0) = U_0, \quad \Omega(0) = \Omega_0, \quad M(0) = M_0 & \quad \text{dans } D \\ U = 0, \quad \Omega = 0, \quad \text{curl } M \times \mathbf{n} = 0 & \quad \text{sur } (0, T) \times \partial D \\ M \cdot \mathbf{n} = 0, \quad H \cdot \mathbf{n} = 0 & \quad \text{sur } (0, T) \times \partial D \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure au bord  $\partial D$ .

Dans [4] les auteurs ont considéré un modèle de transfert de chaleur dans un fluide magnétique incompressible, le système étudié est constitué des équations de Navier-Stokes, équations de la magnéto-statique et l'équation de la température. Ils ont établi un résultat d'existence globale en temps de solutions faibles d'énergie finie. Le modèle étudié dans  $D_T = (0, T) \times D$  avec  $D$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^3$  est le suivant

$$\begin{aligned} \text{div } U &= 0, \\ \rho(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - \eta \Delta U + \nabla p &= \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \\ \rho c_p (\partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta) - \kappa \Delta \theta &= -\mu_0 \theta \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \cdot (U \cdot \nabla) \mathbf{H} + \eta \Phi, \\ \text{div } (\mathbf{H} + \mathbf{M}) &= F, \quad \text{curl } \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où  $c_p$  est la chaleur spécifique à pression constante,  $\kappa$  est la conductivité thermique,  $\Phi$  est la dissipation visqueuse d'énergie qui a la forme

$$\Phi = (\nabla U + \nabla U^T) : \nabla U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2$$

et  $F$  une fonction donnée dans  $D_T$  qui représente l'effet de champ magnétique extérieur. La loi pour l'intensité de l'aimantation  $M = |\mathbf{M}| = M(\theta, H)$  où la magnétisation  $\mathbf{M} = r(\theta) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$  est une fonction non linéaire de la température  $\theta$  et de l'intensité

$H = |H|$  du champ magnétique  $H$  et

$$r(\theta) = r_0(\theta_c - \theta)^\beta \text{ pour tout } 0 \leq \theta \leq \theta_c,$$

où  $r_0, \beta$  sont des constantes positives, et  $\theta_c$  est la température de curie. Le système est complété par des conditions initiales et des conditions aux limites homogènes de Dirichlet pour la vitesse  $U$  et de Neumann pour la température  $\theta$ .

Dans notre travail, nous étudions la dynamique du transfert de chaleur dans un fluide magnétique selon la loi de transfert de Maxwell-Cattaneo suivante

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta &= -\operatorname{div} Q \\ \tau(\partial_t Q - \gamma \Delta Q) &= -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl} U \times Q - Q - \nabla \mathcal{K}(\theta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{K}(\theta)$  est une fonction monotone donnée par

$$\mathcal{K}(\theta) = \kappa \theta + \alpha \theta^3 \quad (3.7)$$

$\kappa > 0$  et  $\alpha > 0$  étant des coefficients de conductivité thermique.

Le système de Maxwell-Cattaneo (3.6) est couplé aux équations de Navier-Stokes incompressibles satisfaites par la vitesse du fluide  $U$  et la pression  $P$ , ainsi que l'équation de Bloch-Torrey satisfaite par la magnétisation  $M$  et les équations de la magnétostatique pour le champ magnétique  $H$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U &= 0 \\ \partial_t U + (U \cdot \nabla) U - \eta \Delta U + \nabla P &= -\rho(\theta)g + \mu_0(M \cdot \nabla)H \\ &\quad + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{curl}(M \times H) \\ \partial_t M + (U \cdot \nabla) M - \sigma \Delta M + \frac{1}{\delta}(M - \chi_0 H) &= \frac{1}{2} \operatorname{curl} U \times M \\ &\quad - \beta_0 M \times (M \times H) \end{aligned} \quad (3.8)$$

où la densité  $\rho(\theta)$  est donnée par

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 - \beta(\theta - \theta^0)) \quad (3.9)$$

$\rho_0$  est la densité du fluide à la température  $\theta^0$  et  $\beta$  est un coefficient de dilatation thermique. La fonction  $g$  représente la force de gravité,  $F$  est une fonction donnée

liée au champ magnétique appliqué et les constantes  $\eta, \mu_0, \sigma, \delta, \chi_0, \beta_0 > 0$  sont des paramètres physiques.

Le problème dans son ensemble est posé sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^3$  plus précisément  $D$  est un ouvert, borné, régulier et simplement connexe,  $\Gamma = \partial D$ . Pour  $T > 0$  fixé, on pose  $D_T = (0, T) \times D$  et  $\Gamma_T = (0, T) \times \Gamma$ . Le système (3.6)-(3.8) est complété par les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned} U(0) = U_0, \operatorname{div} U_0 = 0, M(0) = M_0, \text{ dans } D \\ U = 0, M \cdot \mathbf{n} = 0, \operatorname{curl} M \times \mathbf{n} = 0, H \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \Gamma_T \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \theta(0) = \theta_0, Q(0) = Q_0 \text{ dans } D \\ Q \times \mathbf{n} = 0, \tau \gamma \operatorname{div} Q - \mathcal{K}(\theta) = 0 \text{ sur } \Gamma_T \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Gamma$ .

L'objectif de ce travail est d'établir un résultat d'existence globale d'une solution faible au système (3.6)-(3.8)-(3.10)-(3.11) qu'on notera par  $(\mathcal{P})$ . Cette étude se décompose en plusieurs étapes. Dans la première étape, nous établissons quelques estimations a priori pour en déduire les espaces fonctionnels naturels associés aux solutions que nous cherchons  $(U, M, H, \theta, Q)$ . Ensuite, nous introduisons un problème régularisé en ajoutant un terme elliptique  $-\nu \nabla \cdot (|\nabla \theta|^2 \nabla \theta)$  dans l'équation de la température, ( $\nu > 0$  étant un paramètre) et nous démontrons l'existence de solutions faibles globales d'énergie finie du problème régularisé. Pour finir, nous établissons un résultat de compacité qui nous permettra de passer à la limite dans les termes non linéaires quand  $\nu \rightarrow 0$ . Nous concluons notre étude par un passage à la limite quand  $\nu$  tend vers zéro.

### 3.1.2 Notations et espaces fonctionnels

#### Notations

On note par  $\|\cdot\|$  et  $(\cdot, \cdot)$  la norme et le produit scalaire de l'espace de Hilbert  $L^2(D)$ . Si  $X$  est un espace de Banach, on note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  le produit de dualité

entre  $X'$  et  $X$  où  $X'$  est l'espace dual de  $X$  et  $\|\cdot\|_X$  la norme dans  $X$ .

Dans toute la suite le symbole  $C$  désignera une constante positive et parfois on notera par  $C_m$  pour préciser les paramètres dont dépend la constante  $C$ .

## Espaces fonctionnels

Nous introduisons quelques espaces fonctionnels utilisés dans la théorie des équations de Navier-Stokes incompressibles, voir par exemple [11, 37]

$$\mathcal{D}_s(D) = \{v \in \mathcal{D}(D, \mathbb{R}^3); \operatorname{div} v = 0 \text{ in } D\},$$

$$\mathcal{U} = \text{la fermeture de } \mathcal{D}_s(D) \text{ dans } \mathbb{H}^1(D),$$

$$\mathcal{U}_0 = \text{la fermeture de } \mathcal{D}_s(D) \text{ dans } \mathbb{L}^2(D),$$

caractérisé par

$$\mathcal{U}_0 = \{v \in \mathbb{L}^2(D); \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } D, v \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{U} = \{v \in \mathbb{H}_0^1(D); \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } D\}.$$

$\mathcal{U}_0$  est identifié avec son dual et nous avons  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}'$  où  $\mathcal{U}'$  est l'espace dual de  $\mathcal{U}$ .

Pour la magnétisation  $M$  et le flux de chaleur  $Q$ , nous introduisons respectivement les espaces de Hilbert suivants

$$\mathbb{H}_t^1(D) = \{M \in \mathbb{H}^1(D); M \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$\mathbb{H}_n^1(D) = \{Q \in \mathbb{H}^1(D); Q \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

munis de la norme  $\mathbb{H}^1(D)$ .

**Lemme 2** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $v$  dans  $\mathbb{H}_t^1(D)$  ou  $\mathbb{H}_n^1(D)$  nous avons l'estimation suivante*

$$\|\nabla v\| \leq C(\|v\|^2 + \|\operatorname{curl} v\|^2 + \|\operatorname{div} v\|^2)^{1/2}. \quad (3.13)$$

La norme  $\mathbb{H}^1(D)$  est équivalente à la norme  $(\|v\|^2 + \|\operatorname{curl} v\|^2 + \|\operatorname{div} v\|^2)^{1/2}$  sur les espaces  $\mathbb{H}_t^1(D)$  et  $\mathbb{H}_n^1(D)$ , voir par exemple [11].

Pour l'étude de l'équation de la magnéto-statique, on définit les espaces suivants

$$L_{\#}^2 = \left\{ \psi \in L^2(D); \int_D \psi(x) dx = 0 \right\} \text{ et } H_{\#}^1 = H^1(D) \cap L_{\#}^2$$

l'espace de Hilbert  $H_{\#}^1$  est muni de la norme  $\|\nabla\psi\|$  qui est équivalente à la norme usuelle de  $H^1(D)$  grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger : il existe une constante  $C > 0$  tel que pour tout  $\psi \in H_{\#}^1$ , nous avons

$$\|\psi\| \leq C\|\nabla\psi\|. \quad (3.14)$$

Nous introduisons aussi l'espace des fonctions faiblement continues à valeurs dans un espace de Hilbert  $V$

$$\mathcal{C}([0, T]; V \text{ weak}) = \{v : [0, T] \rightarrow V; (v(\cdot), w) \in \mathcal{C}([0, T]), \forall w \in V\}$$

où  $(\cdot, \cdot)$  est le produit scalaire de l'espace de Hilbert  $V$ .

### 3.1.3 L'équation de la magnéto-statique

Puisque  $H$  satisfait l'équation  $\text{curl} H = 0$ , alors  $H$  est irrotationnel et dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$ , c'est-à-dire  $H = \nabla\varphi$ .

Soit  $M \in \mathbb{L}^2(D)$  et  $F \in L_{\#}^2$ , nous considérons le problème suivant

$$\text{Trouver } \varphi \in H_{\#}^1; \quad \forall \psi \in H_{\#}^1, \quad \int_D (\nabla\varphi + M) \cdot \nabla\psi dx = - \int_D F\psi dx, \quad (3.15)$$

ce problème admet une unique solution  $\varphi$  dans  $H_{\#}^1$  et on a

$$\int_D \nabla\varphi \cdot M dx = -\|\nabla\varphi\|^2 - \int_D F\varphi dx. \quad (3.16)$$

Il s'ensuit l'estimation

$$\|\nabla\varphi\| \leq (\|M\| + C\|F\|). \quad (3.17)$$

En particulier l'application

$$\mathcal{H} : (M, F) \mapsto \varphi \quad (3.18)$$

est continue de  $\mathbb{L}^2(D) \times L_{\#}^2$  dans  $H_{\#}^1$ . En outre si nous testons l'équation (3.15) avec  $\psi - \int_D \psi dx, \psi \in H^1(D)$ , nous déduisons que

$$\int_D (\nabla\varphi + M) \cdot \nabla\psi dx = - \int_D F\psi dx, \quad \forall \psi \in H^1(D) \quad (3.19)$$

et  $H = \nabla\varphi$  résout le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(H + M) = F, & \operatorname{curl} H = 0 \text{ dans } D \\ (H + M) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

De plus, en utilisant les résultats de régularité des problèmes elliptique, nous concluons que si  $F \in L^2_{\sharp}(D)$  et  $M \in \mathbb{H}_t^1(D)$ , alors  $\varphi \in \mathbb{H}^2(D) \cap H^1_{\sharp}(D)$  et on a

$$\|\varphi\|_{H^2(D)} \leq C(\|\operatorname{div} M\| + \|F\|). \quad (3.20)$$

On déduit que  $H = \nabla\varphi \in \mathbb{H}_t^1(D)$  et on a

$$\|H\|_{H^1(D)} \leq C(\|\operatorname{div} M\| + \|F\|). \quad (3.21)$$

Ainsi,  $\mathcal{H}$  est une application continue de  $\mathbb{L}^2(D_T) \times L^2(0, T; L^2_{\sharp}(D))$  dans  $L^2(0, T; H^1_{\sharp}(D))$  et de  $H^1(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \times H^1(0, T; L^2_{\sharp}(D))$  dans  $H^1(0, T; H^1_{\sharp}(D))$ . De plus pour  $F \in H^1(0, T; L^2_{\sharp}(D))$  et  $M \in H^1(0, T; \mathbb{L}^2(D))$ , nous avons

$$\int_D (\nabla(\partial_t\varphi) + \partial_t M) \cdot \nabla\psi \, dx = - \int_D \partial_t F \psi \, dx, \forall \psi \in H^1(D), \quad t \in (0, T). \quad (3.22)$$

## 3.2 Résultat principal

### 3.2.1 Estimations a priori des solutions de $(\mathcal{P})$

Soit  $(U, M, H, \theta, Q)$  une solution assez régulière du système  $(\mathcal{P})$ .

#### Estimation a priori pour le système (3.8)

Nous multiplions l'équation de la magnétostatique par  $\varphi$  et nous intégrons par parties

$$- \int_D \nabla \cdot (\nabla \varphi + M) \varphi \, dx = - \int_D F \varphi \, dx$$

on a

$$- \int_D \nabla \cdot (\nabla \varphi + M) \varphi \, dx = \int_D (\nabla \varphi + M) \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Gamma} (\nabla \varphi + M) \varphi \cdot \mathbf{n} \, ds$$

comme  $(\nabla \varphi + M) \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_T$ , on obtient alors

$$\int_D |\nabla \varphi|^2 \, dx = - \int_D M \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D F \varphi \, dx$$

c'est-à-dire

$$\|H\|^2 = - \int_D M \cdot H \, dx - \int_D F \varphi \, dx. \quad (3.23)$$

Nous dérivons l'équation de la magnétostatique par rapport à  $t$ , pour obtenir

$$-\partial_t(\Delta \varphi) = \partial_t(\operatorname{div} M) - \partial_t F$$

et nous multiplions cette dernière par  $\varphi$  et par intégration par parties, on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H\|^2 = - \int_D \partial_t M \cdot H \, dx - \int_D \partial_t F \varphi \, dx. \quad (3.24)$$

Nous multiplions l'équation de Navier-Stokes par  $U$  et nous intégrons par parties par rapport à la variable d'espace, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_D \partial_t U \cdot U \, dx + \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot U \, dx - \eta \int_D \Delta U \cdot U \, dx + \int_D \nabla P \cdot U \, dx \\ &= - \int_D \rho(\theta) g \cdot U \, dx + \mu_0 \int_D (M \cdot \nabla) H \cdot U \, dx \\ & \quad + \frac{\mu_0}{2} \int_D \operatorname{curl}(M \times H) \cdot U \, dx. \end{aligned}$$

On a

1.  $\int_D \partial_t U \cdot U \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2,$
2.  $\int_D (U \cdot \nabla) U \cdot U \, dx = \sum_{i,j=1}^n \int_D U_i \cdot (D_i U_j) \cdot U_j \, dx = \sum_{i,j=1}^n \int_D U_i \cdot D_i \frac{(U_j)^2}{2} \, dx$   
 $= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_D D_i U_i \cdot (U_j)^2 \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_D \operatorname{div} U \cdot (U_j)^2 \, dx = 0,$
3.  $-\eta \int_D \Delta U \cdot U \, dx = \eta \int_D |\nabla U|^2 \, dx - \eta \int_{\Gamma} (\nabla U \cdot \mathbf{n}) U \, ds = \eta \|\nabla U\|^2,$
4.  $\int_D \nabla P \cdot U \, dx = - \int_D P \operatorname{div} U \, dx + \int_{\Gamma} P U \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \eta \|\nabla U\|^2 &= - \int_D \rho(\theta) g \cdot U \, dx + \mu_0 \int_D (M \cdot \nabla) H \cdot U \, dx \\ &\quad + \frac{\mu_0}{2} \int_D \operatorname{curl}(M \times H) \cdot U \, dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La force du gradient magnétique  $(M \cdot \nabla) H$  peut s'écrire sous la forme suivante, nous avons

$$\partial_k (M_i H_i) = H_i \partial_k M_i + M_i \partial_k H_i$$

comme  $\operatorname{curl} H = 0$  dans  $D_T$ , alors  $\partial_k H_i = \partial_i H_k$  donc  $M_i \partial_i H_k = \partial_k (M_i H_i) - H_i \partial_k M_i$ , d'où

$$\int_D (M \cdot \nabla) H \cdot U \, dx = \int_D \nabla (M \cdot H) \cdot U \, dx - \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx.$$

Par intégration par parties et avec  $\operatorname{div} U = 0$  dans  $D_T$  et  $U = 0$  sur  $\Gamma_T$ , on trouve

$$\int_D \nabla (M \cdot H) \cdot U \, dx = - \int_D (M \cdot H) \cdot \operatorname{div} U \, dx + \int_{\Gamma} (M \cdot H) U \cdot \mathbf{n} \, ds = 0,$$

alors

$$\int_D (M \cdot \nabla) H \cdot U \, dx = - \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx.$$

Ainsi l'égalité (3.25) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \eta \|\nabla U\|^2 &= - \int_D \rho(\theta) g \cdot U \, dx - \mu_0 \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx \\ &\quad + \frac{\mu_0}{2} \int_D \operatorname{curl}(M \times H) \cdot U \, dx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

D'autre part, pour contrôler le terme  $\left(-\mu_0 \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx\right)$ , nous multiplions l'équation de la magnétisation par  $H$  et nous intégrons par parties sur  $D$

$$\begin{aligned} \int_D \partial_t M \cdot H \, dx + \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx - \sigma \int_D \Delta M \cdot H \, dx + \frac{1}{\delta} \int_D (M - \chi_0 H) \cdot H \, dx \\ = \frac{1}{2} \int_D (\operatorname{curl} U \times M) \cdot H \, dx - \beta_0 \int_D M \times (M \times H) \cdot H \, dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} - \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx &= \int_D \partial_t M \cdot H \, dx - \sigma \int_D \Delta M \cdot H \, dx + \frac{1}{\delta} \int_D (M - \chi_0 H) \cdot H \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_D (\operatorname{curl} U \times M) \cdot H \, dx + \beta_0 \int_D M \times (M \times H) \cdot H \, dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Utilisant (3.23) et (3.24) pour obtenir

$$\int_D M \cdot H \, dx = -\|H\|^2 - \int_D F\varphi \, dx \quad (3.28)$$

et

$$\int_D \partial_t M \cdot H \, dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H\|^2 - \int_D \partial_t F\varphi \, dx. \quad (3.29)$$

Maintenant de la relation  $-\Delta M = \operatorname{curl}^2 M - \nabla(\operatorname{div} M)$ , on obtient

$$\begin{aligned} - \int_D \Delta M \cdot H \, dx &= \int_D \operatorname{curl} M \cdot \operatorname{curl} H \, dx + \int_D \operatorname{div} M \operatorname{div} H \, dx - \int_{\Gamma} (\operatorname{curl} M \times \mathbf{n}) \cdot H \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\operatorname{div} M)(H \cdot \mathbf{n}) \, ds \end{aligned}$$

et grâce aux conditions au bord  $\text{curl } M \times \mathbf{n} = 0$ ,  $H \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_T$  et la condition  $\text{curl } H = 0$  dans  $D_T$ , on déduit

$$\begin{aligned} - \int_D \Delta M \cdot H \, dx &= \int_D \text{div } M \text{div } H \, dx \\ &= - \int_D |\text{div } M|^2 \, dx + \int_D F \text{div } M \, dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De plus

$$\int_D M \times (M \times H) \cdot H \, dx = - \int_D (M \times H) \cdot (M \times H) \, dx = - \|M \times H\|^2. \quad (3.31)$$

En combinant (3.28)-(3.31) avec (3.27), on trouve

$$\begin{aligned} - \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot H \, dx &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H\|^2 - \frac{1}{\delta} (1 + \chi_0) \|H\|^2 - \beta_0 \|M \times H\|^2 \\ &\quad - \sigma \|\text{div } M\|^2 - \frac{1}{2} \int_D (\text{curl } U \times M) \cdot H \, dx - \int_D \partial_t F \varphi \, dx \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \int_D F \varphi \, dx + \sigma \int_D F \text{div } M \, dx. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En utilisant (3.26), (3.32) et l'égalité suivante

$$\int_D \text{curl}(M \times H) \cdot U \, dx = \int_D \text{curl } U \cdot (M \times H) \, dx = \int_D (\text{curl } U \times M) \cdot H \, dx$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|U\|^2 + \mu_0 \|H\|^2] + \eta \|\nabla U\|^2 + \frac{\mu_0}{\delta} (1 + \chi_0) \|H\|^2 + \mu_0 \sigma \|\text{div } M\|^2 \\ + \mu_0 \beta_0 \|M \times H\|^2 = - \int_D \rho(\theta) g \cdot U \, dx - \mu_0 \int_D \partial_t F \varphi \, dx \\ - \frac{\mu_0}{\delta} \int_D F \varphi \, dx + \mu_0 \sigma \int_D F \text{div } M \, dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nous multiplions l'équation de la magnétisation par  $M$ , et nous intégrons par parties par rapport à la variable d'espace, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_D \partial_t M \cdot M \, dx + \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot M \, dx - \sigma \int_D \Delta M \cdot M \, dx + \frac{1}{\delta} \int_D (M - \chi_0 H) \cdot M \, dx \\ = \frac{1}{2} \int_D (\text{curl } U \times M) \cdot M \, dx - \beta_0 \int_D M \times (M \times H) \cdot M \, dx \end{aligned}$$

et grâce à l'égalité  $(\operatorname{curl} U \times M) \cdot M = \operatorname{curl} U \cdot (M \times M) = 0$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|M\|^2 + \sigma (\|\operatorname{curl} M\|^2 + \|\operatorname{div} M\|^2) + \frac{1}{\delta} \|M\|^2 \\ + \frac{\chi_0}{\delta} \|H\|^2 = -\frac{\chi_0}{\delta} \int_D F \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

On additionne (3.33) et (3.34), on trouve l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|U\|^2 + \mu_0 \|H\|^2 + \mu_0 \|M\|^2] + \eta \|\nabla U\|^2 + \frac{\mu_0}{\delta} (1 + 2\chi_0) \|H\|^2 \\ + \frac{\mu_0}{\delta} \|M\|^2 + 2\mu_0 \sigma \|\operatorname{div} M\|^2 + \mu_0 \sigma \|\operatorname{curl} M\|^2 + \mu_0 \beta_0 \|M \times H\|^2 \\ = - \int_D \rho(\theta) g \cdot U \, dx - \mu_0 \int_D \partial_t F \varphi \, dx - \frac{\mu_0}{\delta} (1 + \chi_0) \int_D F \varphi \, dx \\ + \mu_0 \sigma \int_D F \operatorname{div} M \, dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Afin d'estimer le second membre de l'égalité (3.35), nous utilisons le lemme suivant

**Lemme 3** *Supposons que  $U \in \mathbb{L}^2(D_T)$ ,  $M \in L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$ ,  $\varphi \in L^2(0, T; H_{\#}^1)$  et  $F \in H^1(0, T; \mathbb{L}_{\#}^2)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante positive  $C_\epsilon$  dépendant de  $\epsilon$  et  $D$ , telle que pour p.p. dans  $(0, T)$  on ait*

$$\int_D |F \operatorname{div} M| \, dx \leq \epsilon \|\operatorname{div} M\|^2 + C_\epsilon \|F\|^2, \quad (3.36)$$

$$\int_D |F \varphi| \, dx \leq \epsilon \|H\|^2 + C_\epsilon \|F\|^2, \quad (3.37)$$

$$\int_D |\partial_t F \varphi| \, dx \leq \epsilon \|H\|^2 + C_\epsilon \|\partial_t F\|^2. \quad (3.38)$$

*Preuve.* Nous utilisons les inégalités de Young et Poincaré. L'estimation (3.36) est triviale et pour l'estimation (3.37), nous avons grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\|\varphi\|_{L^2(D)} \leq C \|\nabla \varphi\| = C \|H\|,$$

et grâce à l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \int_D |F\varphi| \, dx &\leq \frac{\epsilon}{C^2} \|\varphi\|^2 + C_\epsilon \|F\|^2 \\ &\leq \epsilon \|H\|^2 + C_\epsilon \|F\|^2. \end{aligned}$$

Par des arguments similaires nous obtenons l'estimation (3.38).

Maintenant, nous estimons le premier terme de second membre dans (3.35) pour cela nous utilisons les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Poincaré et de Young

$$\begin{aligned} \left| - \int_D \rho(\theta) g \cdot U \, dx \right| &\leq \|g\|_{L^\infty(D)} \|\rho(\theta)\| \|U\| \leq C \|\rho(\theta)\| \|\nabla U\| \\ &\leq \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 + C_\eta \|\rho(\theta)\|^2. \end{aligned}$$

Utilisant (3.36)-(3.38), on déduit de (3.35)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|U\|^2 + \mu_0 \|H\|^2 + \mu_0 \|M\|^2] &+ \eta \|\nabla U\|^2 + \frac{\mu_0}{\delta} (1 + 2\chi_0) \|H\|^2 \\ &+ \frac{\mu_0}{\delta} \|M\|^2 + 2\mu_0 \sigma \|\operatorname{div} M\|^2 + \mu_0 \sigma \|\operatorname{curl} M\|^2 + \mu_0 \beta_0 \|M \times H\|^2 \\ &\leq \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 + C_\eta \|\rho(\theta)\|^2 + \mu_0 (\epsilon \|H\|^2 + C_\epsilon \|\partial_t F\|^2) \\ &+ \frac{\mu_0}{\delta} (1 + \chi_0) (\epsilon \|H\|^2 + C_\epsilon \|F\|^2) + \mu_0 \sigma (\epsilon \|\operatorname{div} M\|^2 + C_\epsilon \|F\|^2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|U\|^2 + \mu_0 \|H\|^2 + \mu_0 \|M\|^2] &+ \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 + \left[ \frac{\mu_0}{\delta} (1 + 2\chi_0) - \frac{\mu_0}{\delta} (1 + \chi_0) \epsilon - \mu_0 \epsilon \right] \|H\|^2 \\ &+ \frac{\mu_0}{\delta} \|M\|^2 + 2\mu_0 \sigma \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \|\operatorname{div} M\|^2 + \mu_0 \sigma \|\operatorname{curl} M\|^2 + \mu_0 \beta_0 \|M \times H\|^2 \\ &\leq C_\eta \|\rho(\theta)\|^2 + \mu_0 C_\epsilon \|\partial_t F\|^2 + \frac{\mu_0}{\delta} (1 + \chi_0) C_\epsilon \|F\|^2 + \mu_0 \sigma C_\epsilon \|F\|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Intégrant entre 0 et  $t$ , en choisissant  $0 < \epsilon < 1$ , on obtient

$$\mathcal{E}_{nsbt}(t) + \int_0^t \mathcal{F}_{nsbt}(s) \, ds \leq \mathcal{E}_{nsbt,0} + C \int_0^t \|\rho(\theta(s))\|^2 \, ds + C \int_0^t \|G(s)\|^2 \, ds \quad (3.41)$$

pour tout  $t \geq 0$ , où  $C > 0$  est une constante et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{nsbt}(t) &= \frac{1}{2} \|U(t)\|^2 + \frac{\mu_0}{2} (\|M(t)\|^2 + \|H(t)\|^2) \\ \mathcal{E}_{nsbt,0} &= \frac{1}{2} \|U_0\|^2 + \frac{\mu_0}{2} (\|M_0\|^2 + \|H_0\|^2) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{nsbt}(t) &= \eta \|\nabla U(t)\|^2 + \mu_0 \sigma (\|\operatorname{curl} M(t)\|^2 + 2\|\operatorname{div} M(t)\|^2) + \frac{\mu_0}{\delta} \|M(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\mu_0}{\delta} (1 + 2\chi_0) \|H(t)\|^2 + \beta_0 \mu_0 \|M(t) \times H(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$G(t) = \|F(t)\|^2 + \|\partial_t F(t)\|^2. \quad (3.44)$$

### Estimation a priori pour le système Maxwell-Cattaneo (3.6)

Soit  $\varpi$  la primitive de  $\mathcal{K}$  définie par

$$\varpi(\theta) = \frac{\kappa}{2} \theta^2 + \frac{\alpha}{4} \theta^4. \quad (3.45)$$

Nous multiplions l'équation de la température  $\theta$  par  $\mathcal{K}(\theta)$  et l'équation de flux de chaleur par  $Q$  et par intégration par parties, on trouve

$$\int_D \partial_t \theta \mathcal{K}(\theta) \, dx + \int_D (U \cdot \nabla) \theta \mathcal{K}(\theta) \, dx = - \int_D \operatorname{div} Q \mathcal{K}(\theta) \, dx.$$

On a

$$1. \int_D \partial_t \theta \mathcal{K}(\theta) \, dx = \int_D \partial_t \theta (\kappa \theta + \alpha \theta^3) \, dx = \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \frac{\alpha}{4} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^4(D)}^4,$$

$$\begin{aligned} 2. \int_D (U \cdot \nabla) \theta \mathcal{K}(\theta) \, dx &= \int_D (U \cdot \nabla) \theta (\kappa \theta + \alpha \theta^3) \\ &= \kappa \int_D (U \cdot \nabla) \theta \theta \, dx + \alpha \int_D (U \cdot \nabla) \theta \theta^3 \, dx = 0. \end{aligned}$$

En effet, comme  $\operatorname{div} U = 0$  alors

$$\begin{aligned} \int_D (U \cdot \nabla) \theta \theta^3 \, dx &= \sum_{i=1}^n \int_D U_i \cdot (D_i \theta) \theta^3 \, dx = \sum_{i=1}^n \int_D U_i \cdot D_i \frac{(\theta)^4}{4} \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_D D_i U_i (\theta)^4 \, dx = 0. \end{aligned}$$

De même  $\int_D (U \cdot \nabla) \theta \theta \, dx = 0$ . Ainsi, on obtient

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\kappa}{2} \|\theta\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\theta\|_{L^4(D)}^4 \right] = - \int_D \operatorname{div} Q \mathcal{K}(\theta) \, dx. \quad (3.46)$$

D'autre part, nous multiplions l'équation du flux de chaleur par  $Q$  et intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \tau \int_D \partial_t Q \cdot Q \, dx - \tau \gamma \int_D \Delta Q \cdot Q \, dx &= -\frac{\tau}{2} \int_D (\operatorname{curl} U \times Q) \cdot Q \, dx - \int_D Q \cdot Q \, dx \\ &\quad - \int_D \nabla \mathcal{K}(\theta) \cdot Q \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant la relation  $-\Delta Q = \operatorname{curl}^2 Q - \nabla(\operatorname{div} Q)$ , on déduit

$$\begin{aligned} - \int_D \Delta Q \cdot Q \, dx &= \int_D \operatorname{curl} Q \cdot \operatorname{curl} Q \, dx + \int_D \operatorname{div} Q \operatorname{div} Q \, dx - \int_{\Gamma} (\operatorname{curl} Q \times \mathbf{n}) \cdot Q \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\operatorname{div} Q)(Q \cdot \mathbf{n}) \, ds \end{aligned}$$

et comme  $Q \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_T$ , alors la relation  $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A)$  donne

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{curl} Q \times \mathbf{n}) \cdot Q \, ds = - \int_{\Gamma} \operatorname{curl} Q \cdot (Q \times \mathbf{n}) \, ds = 0.$$

Comme  $Q \times Q = 0$ , alors

$$-\frac{\tau}{2} \int_D (\operatorname{curl} U \times Q) \cdot Q \, dx = -\frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U \cdot (Q \times Q) \, dx = 0.$$

D'autre part

$$- \int_D \nabla \mathcal{K}(\theta) \cdot Q \, dx = \int_D \mathcal{K}(\theta) \operatorname{div} Q \, dx - \int_{\Gamma} \mathcal{K}(\theta) Q \cdot \mathbf{n} \, ds$$

En utilisant la condition au limite  $\tau \gamma \operatorname{div} Q - \mathcal{K}(\theta) = 0$  sur  $\Gamma_T$ , on obtient

$$\int_{\Gamma} (\tau \gamma \operatorname{div} Q - \mathcal{K}(\theta))(Q \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0.$$

Ainsi, on obtient l'égalité d'énergie suivante

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|Q\|^2 + \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2) + \|Q\|^2 = \int_D \operatorname{div} Q \mathcal{K}(\theta) \, dx. \quad (3.47)$$

On additionne (3.46) et (3.47), on trouve

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\kappa}{2} \|\theta\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\theta\|_{L^4(D)}^4 + \frac{\tau}{2} \|Q\|^2 \right] + \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2) + \|Q\|^2 = 0 \quad (3.48)$$

d'où en intégrant entre 0 et  $t$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\kappa}{2} \|\theta(t)\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\theta(t)\|_{L^4(D)}^4 + \frac{\tau}{2} \|Q(t)\|^2 \right] + \int_0^t \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q(s)\|^2 + \|\operatorname{div} Q(s)\|^2) + \|Q(s)\|^2 ds \\ & = \frac{\kappa}{2} \|\theta_0\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\theta_0\|_{L^4(D)}^4 + \frac{\tau}{2} \|Q_0\|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

On obtient donc l'estimation d'énergie suivante pour le système de Maxwell-Cattaneo

$$\mathcal{E}_{mc}(t) + \int_0^t \mathcal{F}_{mc}(s) ds \leq \mathcal{E}_{mc,0} \quad (3.50)$$

pour tout  $t \geq 0$  avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mc}(t) &= \int_D \varpi(\theta(t)) dx + \frac{\tau}{2} \|Q(t)\|^2, \\ \mathcal{E}_{mc,0} &= \int_D \varpi(\theta_0) dx + \frac{\tau}{2} \|Q_0\|^2, \\ \mathcal{F}_{mc}(t) &= \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q(t)\|^2 + \|\operatorname{div} Q(t)\|^2) + \|Q(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nous additionnons les deux estimations (3.41) et (3.50) et nous obtenons pour le système couplé  $(\mathcal{P})$  l'inégalité suivante

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{F}(s) ds \leq \mathcal{E}_0 + C \int_0^t \|\rho(\theta(s))\|^2 ds + C \int_0^t G(s) ds \quad (3.52)$$

où l'énergie totale  $\mathcal{E}$  et l'énergie totale de dissipation  $\mathcal{F}$  sont définies par

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{nsbt}(t) + \mathcal{E}_{mc}(t), \quad \mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_{nsbt}(t) + \mathcal{F}_{mc}(t). \quad (3.53)$$

### 3.2.2 Résultat d'existence

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} & U_0 \in \mathcal{U}_0, \quad M_0, Q_0 \in \mathbb{L}^2(D), \quad \operatorname{div} Q_0 \in L^{12/11}(D), \quad \theta_0 \in L^4(D), \\ & g \in \mathbb{L}^\infty(D_T), \quad F \in H^1(0, T; L^2(D)), \\ & \int_D F(t) dx = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Avant d'énoncer le théorème d'existence nous donnons la définition d'une solution faible globale au problème  $(\mathcal{P})$ .

**Définition 2**  $(U, M, H, \theta, Q)$  est une solution faible globale, d'énergie finie du problème (P) si

$$\begin{aligned}
 U &\in L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U}) \\
 M &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)) \\
 H &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)) \\
 Q &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D)) \\
 \theta &\in L^\infty(0, T; L^4(D))
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

et de plus

(i) L'équation de quantité de mouvement est satisfaite faiblement dans le sens où pour tout  $v \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \int_D U \cdot v \, dx + \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot v \, dx + \eta \int_D \nabla U \cdot \nabla v \, dx \\
 &= - \int_D \rho(\theta) g \cdot v \, dx + \mu_0 \int_D (M \cdot \nabla) H \cdot v \, dx + \frac{\mu_0}{2} \int_D M \times H \cdot \text{curl } v \, dx \\
 &U(0) = U_0
 \end{aligned}$$

(ii) La magnétisation satisfait pour tout  $w \in \mathbb{H}_t^1(D)$  la formulation faible

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \int_D M \cdot w \, dx + \int_D (U \cdot \nabla) M \cdot w \, dx + \sigma \int_D \text{curl } U \cdot \text{curl } w \, dx \\
 &+ \sigma \int_D \text{div } M \text{div } w \, dx + \frac{1}{\delta} \int_D (M - \chi_0 H) \cdot w \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_D \text{curl } U \times M \cdot w \, dx - \beta_0 \int_D M \times H \cdot M \times w \, dx \\
 &M(0) = M_0
 \end{aligned}$$

(iii) Le champ magnétique donné par  $H = \nabla \varphi$  où  $\varphi \in L^\infty(0, T; L_\sharp^2)$ , satisfait pour tout  $\psi \in H_\sharp^1$  l'équation

$$\int_D (\nabla \varphi(t) + M(t)) \cdot \nabla \psi \, dx = - \int_D F(t) \psi \, dx$$

(iv) Le couple  $(\theta, Q)$  satisfait le système de Maxwell-Cattaneo dans le sens suivant

$$\int_{D_T} \theta(\partial_t a + U \cdot \nabla a) dx dt = \int_{D_T} \operatorname{div} Q a dx dt - \int_D \theta_0 a(0) dx$$

pour tout  $a \in \mathcal{D}([0, T] \times \overline{D})$  et pour tout  $b \in \mathbb{H}_n^1(D)$  avec  $\operatorname{div} b \in L^4(D)$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \int_{D_T} Q \cdot b dx + \tau \gamma \int_D (\operatorname{curl} Q \cdot \operatorname{curl} b + \operatorname{div} Q \operatorname{div} b) dx \\ + \int_D Q \cdot b dx + \frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U \times Q \cdot b dx = \int_D \mathcal{K}(\theta) \operatorname{div} b dx \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$Q(0) = Q_0.$$

De plus, les estimations d'énergie (3.41) et (3.50) sont satisfaites pour tout  $t \in [0, T]$ .

## Remaque 2

1. Nous obtenons la pression  $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(D))$  en utilisant le théorème de De Rham (voir chapitre précédent).
2. À partir des formulations faibles, nous déduisons que

$$(\partial_t U, \partial_t M, \partial_t Q) \in L^1(0, T; \mathcal{U}' \times (H_t^1(D))' \times (H_n^1(D))')$$

d'où  $(U, M, Q) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{U}' \times (H_t^1(D))' \times (H_n^1(D))')$  et les conditions initiales ont un sens et de plus  $U, M, Q \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{L}^2(D))$  weak).

3. La théorie des équations de transport conduit au résultat  $\theta \in \mathcal{C}([0, T]; L^4(D))$  weak  $\cap \mathcal{C}([0, T]; L^p(D))$ , pour tout  $1 \leq p < 4$  (voir [9]), qui donne un sens à la condition initiale.

**Théorème 7** Sous les hypothèses (3.54), le problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution faible globale  $(U, M, H, \theta, Q)$  d'énergie finie. De plus, on a la régularité supplémentaire suivante

$$\theta \in L^{36/11}(0, T; L^{36/7}(D)). \quad (3.57)$$

Nous démontrons ce résultat d'existence en plusieurs étapes, en utilisant une méthode de régularisation et certains résultats de compacité. Premièrement, nous

introduisons un problème régularisé noté  $(\mathcal{P}_\nu)$  en ajoutant un terme elliptique  $-\nu \nabla \cdot (|\nabla \theta|^2 \nabla \theta)$  dans l'équation de la température ( $\nu > 0$  étant un paramètre). Ensuite, nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin pour obtenir une suite de solutions approchées  $(U_n, M_n, H_n, \theta_n, Q_n)$  qui converge vers  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$ , solution faible globale d'énergie finie de système  $(\mathcal{P}_\nu)$ .

À la fin, nous introduisons un problème auxiliaire satisfait par  $\zeta_\nu = \tau \gamma \operatorname{div} Q_\nu - \mathcal{K}(\theta_\nu)$  et nous établissons un résultat de compacité vérifié par  $\zeta_\nu$  qui nous permettra de passer à la limite dans le terme non linéaire  $\mathcal{K}(\theta_\nu)$  quand  $\nu \rightarrow 0$ . Ainsi, nous obtenons une solution faible globale d'énergie finie du système  $(\mathcal{P})$ .

### 3.3 Le problème régularisé $(\mathcal{P}_\nu)$

Soient  $\nu > 0$  un petit paramètre et  $(\theta_0^\nu)$  telle que

$$(\theta_0^\nu) \subset W^{1,4}(D), \quad \theta_0^\nu \rightarrow \theta_0 \text{ fortement dans } L^4(D). \quad (3.58)$$

Le problème régularisé  $(\mathcal{P}_\nu)$  est le système formé par le problème (3.8)-(3.11) couplé au système régularisé de Maxwell-Cattaneo suivant

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + (U \cdot \nabla) \theta - \nu \nabla \cdot (|\nabla \theta|^2 \nabla \theta) &= -\operatorname{div} Q \text{ dans } D_T \\ \tau(\partial_t Q - \gamma \Delta Q) &= -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl} U \times Q - Q - \nabla \mathcal{K}(\theta) \text{ dans } D_T \\ \nu |\nabla \theta|^2 \nabla \theta \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad Q \times \mathbf{n} = 0, \quad \tau \gamma \operatorname{div} Q - \mathcal{K}(\theta) = 0 \text{ sur } \Gamma_T \\ \theta(0) &= \theta_0^\nu, \quad Q(0) = Q_0 \text{ dans } D. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Notez que nous utilisons l'opérateur elliptique non linéaire  $-\nu \nabla \cdot (|\nabla \theta|^2 \nabla \theta)$  au lieu de  $-\nu \Delta \theta$  qui est généralement utilisé pour régulariser les équations de transport, afin d'obtenir des solutions approchées  $\theta_\nu$  appartenant à  $W^{1,4}(D)$  et donc à  $L^\infty(D)$ .

Nous allons résoudre ce problème en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin qui permet de se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires. On construit ainsi une suite de solutions approchées  $(U_n, M_n, H_n, \theta_n, Q_n)$ . Ensuite, nous utilisons la méthode de compacité de Lions afin de passer à la limite dans les termes non linéaires. À la fin, nous passons à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### 3.3.1 Estimations a priori pour le système (3.59)

Nous procédons comme précédemment pour obtenir des estimations a priori pour le système (3.59). Nous multiplions l'équation de la température par  $\mathcal{K}(\theta)$  et l'équation de flux de chaleur par  $Q$  et par intégration par parties, on trouve

$$\mathcal{E}_{mc}(t) + \int_0^t \mathcal{F}_{mc}(s) ds + \nu \int_0^t \mathcal{R}(s) ds \leq \mathcal{E}_{mc,0}^\nu \quad (3.60)$$

pour tout  $t \geq 0$  où

$$\mathcal{R}(t) = \kappa \|\nabla\theta\|_{L^4(D)}^4 + 3\alpha \int_D \theta^2 |\nabla\theta|^4 dx \quad (3.61)$$

ce qui est bien défini grâce à l'injection de Sobolev  $W^{1,4}(D) \subset \mathcal{C}(\overline{D})$  et

$$\mathcal{E}_{mc,0}^\nu = \int_D \left( \frac{\kappa}{2} |\theta_0^\nu|^2 + \int_D \frac{\alpha}{4} |\theta_0^\nu|^4 \right) dx + \|Q_0\|^2.$$

En effet, grâce à la condition aux limites  $\nu |\nabla\theta|^2 \nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_T$ , nous avons

$$\begin{aligned} -\nu \int_D \nabla \cdot (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \mathcal{K}(\theta) dx &= -\nu \int_D \nabla \cdot (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) (\kappa\theta + \alpha\theta^3) dx \\ &= -\kappa\nu \int_D \nabla \cdot (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \theta dx - \alpha\nu \int_D \nabla \cdot (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \theta^3 dx \\ &= \kappa\nu \int_D (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot \nabla\theta dx - \kappa \int_\Gamma \theta (\nu |\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot \mathbf{n} ds \\ &\quad + \alpha\nu \int_D (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot \nabla\theta^3 dx - \alpha \int_\Gamma \theta^3 (\nu |\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \nu\kappa \int_D |\nabla\theta|^4 dx + \alpha\nu \int_D (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot \nabla\theta^3 dx. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\alpha\nu \int_D (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot \nabla\theta^3 dx = \alpha\nu \int_D (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \cdot (3\theta^2 \nabla\theta) dx = 3\alpha\nu \int_D \theta^2 |\nabla\theta|^4 dx$$

d'où

$$-\nu \int_D \nabla \cdot (|\nabla\theta|^2 \nabla\theta) \mathcal{K}(\theta) dx = \nu \left( \kappa \int_D |\nabla\theta|^4 dx + 3\alpha \int_D \theta^2 |\nabla\theta|^4 dx \right).$$

Utilisant les estimations précédentes (3.41) et (3.60), on obtient l'estimation d'énergie associée au problème couplé  $(\mathcal{P}_\nu)$  donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{F}(s) ds + \nu \int_0^t \mathcal{R}(s) ds &\leq C + C \int_0^t \|\rho(\theta(s))\|^2 ds \\ &+ C \int_0^t \|G(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (3.62)$$

où  $C > 0$  ne dépend pas de  $\nu$ .

### 3.3.2 Résultat d'existence pour le problème $(\mathcal{P}_\nu)$

**Théorème 8** *Sous les hypothèses (3.54), le problème  $(\mathcal{P}_\nu)$  admet une solution faible globale  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$  d'énergie finie telle que*

$$\begin{aligned} U_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U}) \\ M_\nu, H_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)) \\ Q_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D)) \\ \theta_\nu &\in L^\infty(0, T; L^4(D)) \cap L^4(0, T; W^{1,4}(D)) \end{aligned} \quad (3.63)$$

et satisfait les estimations d'énergie (3.60) et (3.62) et le problème dans le sens suivant

(i)  $U_\nu(0) = U_0$  et pour tout  $v \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D U_\nu \cdot v dx + \int_D (U_\nu \cdot \nabla) U_\nu \cdot v dx + \eta \int_D \nabla U_\nu \cdot \nabla v dx \\ = - \int_D \rho(\theta_\nu) g \cdot v dx + \mu_0 \int_D (M_\nu \cdot \nabla) H_\nu \cdot v dx + \frac{\mu_0}{2} \int_D M_\nu \times H_\nu \cdot \text{curl } v dx \end{aligned}$$

(ii)  $M_\nu(0) = M_0$  et pour tout  $w \in \mathbb{H}_t^1(D)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D M_\nu \cdot w dx + \int_D (U_\nu \cdot \nabla) M_\nu \cdot w dx + \sigma \int_D \text{curl } M_\nu \cdot \text{curl } w dx \\ + \sigma \int_D \text{div } M_\nu \text{div } w dx + \frac{1}{\delta} \int_D (M_\nu - \chi_0 H_\nu) \cdot w dx \\ = \frac{1}{2} \int_D \text{curl } U_\nu \times M_\nu \cdot w dx - \beta_0 \int_D M_\nu \times H_\nu \cdot M_\nu \times w dx \end{aligned}$$

(iii)  $\theta_\nu(0) = \theta_0^\nu$  et pour tout  $a \in W^{1,4}(D)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_D \theta_\nu a \, dx - \int_D \theta_\nu U \cdot \nabla a \, dx \\ & + \nu \int_D |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \cdot \nabla a \, dx = - \int_D \operatorname{div} Q_\nu a \, dx \end{aligned} \quad (3.64)$$

(iv)  $Q_\nu(0) = Q_0$  et pour tout  $b \in \mathbb{H}_n^1(D)$

$$\begin{aligned} & \tau \frac{d}{dt} \int_D Q_\nu \cdot b \, dx + \tau \gamma \int_D (\operatorname{curl} Q_\nu \cdot \operatorname{curl} b + \operatorname{div} Q_\nu \operatorname{div} b) \, dx \\ & + \frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu \cdot b \, dx = - \int_D Q_\nu \cdot b \, dx + \int_D \mathcal{K}(\theta_\nu) \operatorname{div} b \, dx \end{aligned}$$

avec  $H_\nu = \nabla \varphi_\nu$  où  $\varphi_\nu = \mathcal{H}(M_\nu, F)$  est défini dans (3.18).

### 3.3.3 Solutions approchées de $(\mathcal{P}_\nu)$

Soit  $\nu > 0$  fixé, on considère la formulation faible  $(\mathcal{P}_\nu)$  donnée au théorème 8. Afin de résoudre ce problème par la méthode de Faedo-Galerkine, on introduit les bases Hilbertiennes  $(V_j)_{j \geq 1}$ ,  $(W_j)_{j \geq 1}$ ,  $(\Phi_j)_{j \geq 1}$  des espaces de Hilbert  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbb{H}_t^1(D)$ ,  $\mathbb{H}_n^1(D)$  respectivement et la base  $(v_j)_{j \geq 1}$  de  $W^{1,4}(D)$ . Pour plus de simplicité, nous supposons que ces bases sont orthonormées dans  $L^2(D)$ .

On cherche la solution approchée du système  $(\mathcal{P}_\nu)$  de la forme suivante

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) V_j, & M_n(t) &= \sum_{j=1}^n \beta_j(t) W_j, \\ \theta_n(t) &= \sum_{j=1}^n a_j(t) v_j, & Q_n(t) &= \sum_{j=1}^n b_j(t) \Phi_j \end{aligned} \quad (3.65)$$

satisfaisant pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq j \leq n$

(i)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_D U_n \cdot V_j \, dx + \int_D (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot V_j \, dx + \eta \int_D \nabla U_n \cdot \nabla V_j \, dx \\ & = - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot V_j \, dx + \mu_0 \int_D (M_n \cdot \nabla) H_n \cdot V_j \, dx \\ & \quad + \frac{\mu_0}{2} \int_D M_n \times H_n \cdot \operatorname{curl} V_j \, dx \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$U_n(0) = U_{0n}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_D M_n \cdot W_j \, dx + \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot W_j \, dx \\
 & + \sigma \int_D \operatorname{curl} M_n \cdot \operatorname{curl} W_j \, dx + \sigma \int_D \operatorname{div} M_n \operatorname{div} W_j \, dx \\
 & + \frac{1}{\delta} \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot W_j \, dx = \frac{1}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times M_n \cdot W_j \, dx \\
 & - \beta_0 \int_D M_n \times H_n \cdot M_n \times W_j \, dx \\
 & M_n(0) = M_{0n}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_D \theta_n v_j \, dx - \int_D \theta_n U_n \cdot \nabla v_j \, dx + \nu \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla v_j \, dx \\
 & = - \int_D \operatorname{div} Q_n v_j \, dx \\
 & \theta_n(0) = \theta_{0n}^\nu
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & \tau \frac{d}{dt} \int_D Q_n \cdot \Phi_j \, dx + \tau \gamma \int_D (\operatorname{curl} Q_n \cdot \operatorname{curl} \Phi_j + \operatorname{div} Q_n \operatorname{div} \Phi_j) \, dx \\
 & = - \frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times Q_n \cdot \Phi_j \, dx - \int_D Q_n \cdot \Phi_j \, dx \\
 & + \int_D \mathcal{K}(\theta_n) \operatorname{div} \Phi_j \, dx \\
 & Q_n(0) = Q_{0n}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

où

$$\begin{aligned}
 & H_n = \nabla \varphi_n, \quad \varphi_n = \mathcal{H}(M_n, F) \\
 & U_{0n} = \sum_{j=1}^n \alpha_{0n}^j V_j, \quad M_{0n} = \sum_{j=1}^n \beta_{0n}^j W_j, \\
 & \theta_{0n}^\nu = \sum_{j=1}^n a_{0n}^{\nu,j} v_j, \quad Q_{0n} = \sum_{j=1}^n b_{0n}^j \Phi_j.
 \end{aligned}$$

Nous supposons que

$$\begin{aligned} (U_{0n}, M_{0n}, Q_{0n}) &\rightarrow (U_0, M_0, Q_0) \text{ fortement dans } (\mathbb{L}^2(D))^3 \\ \theta_{0n}' &\rightarrow \theta_0' \text{ fortement dans } W^{1,4}(D). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ce problème sera noté  $(\mathcal{P}_\nu^n)$ .

### 3.3.4 Résolution du système $(\mathcal{P}_\nu^n)$

Nous injectons la solution approchée  $(U_n, M_n, \theta_n, Q_n)$  dans la formulation faible  $(\mathcal{P}_\nu)$  donné au théorème 8 et nous obtenons les équations suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \int_D V_i \cdot V_j \, dx \right) \alpha_i'(t) + \eta \sum_{i=1}^n \left( \int_D \nabla V_i \cdot \nabla V_j \, dx \right) \alpha_i(t) \\ = - \int_D (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot V_j \, dx - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot V_j \, dx \\ + \mu_0 \int_D (M_n \cdot \nabla) H_n \cdot V_j \, dx + \frac{\mu_0}{2} \int_D (M_n \times H_n) \cdot \text{curl } V_j \, dx, \\ j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\alpha_i(0) = \alpha_{0i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \int_D W_i \cdot W_j \, dx \right) \beta_i'(t) + \sigma \sum_{i=1}^n \left( \int_D (\text{curl } W_i \cdot \text{curl } W_j + \text{div } W_i \text{div } W_j) \, dx \right) \beta_i(t) \\ = - \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot W_j \, dx - \frac{1}{\delta} \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot W_j \, dx \\ + \frac{1}{2} \int_D \text{curl } U_n \times M_n \cdot W_j \, dx - \beta_0 \int_D M_n \times H_n \cdot M_n \times W_j \, dx, \\ j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\beta_i(0) = \beta_{0i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \int_D v_i \cdot v_j \, dx \right) a_i'(t) = \int_D \theta_n U_n \cdot \nabla v_j \, dx - \nu \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla v_j \, dx \\ - \int_D \text{div } Q_n v_j \, dx \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$v_i(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned}
 & \tau \sum_{i=1}^n \left( \int_D \Phi_i \cdot \Phi_j \, dx \right) b'_i(t) + \sum_{i=1}^n \left( \int_D \Phi_i \cdot \Phi_j \, dx \right) b_i(t) \\
 & \quad + \tau \gamma \sum_{i=1}^n \left( \int_D (\operatorname{curl} \Phi_i \cdot \operatorname{curl} \Phi_j + \operatorname{div} \Phi_i \operatorname{div} \Phi_j) \, dx \right) b_i(t) \\
 & = -\frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times Q_n \cdot \Phi_j \, dx + \int_D \mathcal{K}(\theta_n) \operatorname{div} \Phi_j \, dx \quad j = 1, \dots, n \\
 & b_i(0) = b_{0i}, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Soient les fonctions à valeurs vectorielles  $\alpha^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta^n = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $a^n = (a_1, \dots, a_n)$  et  $b^n = (b_1, \dots, b_n)$ , nous considérons la fonction

$$t \in [0, T] \rightarrow \gamma_n(t) = (\alpha^n(t), \beta^n(t), a^n(t), b^n(t)) \in (\mathbb{R}^n)^4,$$

alors  $\gamma_n$  satisfait le système différentiel ordinaire

$$\gamma'_n + A_n \gamma_n = Z_n(t, \gamma_n), \quad \gamma_n(0) = \gamma_{0n} \tag{3.75}$$

où  $\gamma_{0n} = (\alpha_{0n}, \beta_{0n}, a_{0n}^\nu, b_{0n}) \in (\mathbb{R}^n)^4$ ,  $A_n$  est une matrice constante de  $n^4 \times n^4$

$$A_n = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^4 \end{pmatrix}$$

définie par

$$\begin{aligned}
 A_{i,j}^1 &= \eta \int_D \nabla V_i \cdot \nabla V_j \, dx, \quad A_{i,j}^2 = \sigma \int_D (\operatorname{curl} W_i \cdot \operatorname{curl} W_j + \operatorname{div} W_i \operatorname{div} W_j) \, dx \\
 A_{i,j}^4 &= \tau \gamma \int_D (\operatorname{curl} \Phi_i \cdot \operatorname{curl} \Phi_j + \operatorname{div} \Phi_i \operatorname{div} \Phi_j) \, dx + \int_D \Phi_i \cdot \Phi_j \, dx
 \end{aligned}$$

pour  $1 \leq i, j \leq n$  et le champ de vecteurs  $Z_n = (Z_n^1, Z_n^2, Z_n^3, Z_n^4) \in (\mathbb{R}^n)^4$  est défini comme suit

$$\begin{aligned}
 Z_{nj}^1(t, \gamma_n) &= - \int_D (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot V_j \, dx - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot V_j \, dx \\
 &\quad + \mu_0 \int_D (U_n \cdot \nabla) H_n \cdot V_j \, dx + \frac{\mu_0}{2} \int_D M_n \times H_n \cdot \operatorname{curl} V_j \, dx \\
 Z_{nj}^2(t, \gamma_n) &= - \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot W_j \, dx - \frac{1}{\delta} \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot W_j \, dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times M_n \cdot W_j \, dx - \beta_0 \int_D M_n \times H_n \cdot M_n \times W_j \, dx \\
 Z_{nj}^3(t, \gamma_n) &= \int_D \theta_n U_n \cdot \nabla v_j \, dx - \nu \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla v_i \, dx - \int_D \operatorname{div} Q_n v_j \, dx \\
 Z_{nj}^4(t, \gamma_n) &= -\frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times Q_n \cdot \Phi_j \, dx + \int_D \mathcal{K}(\theta_n) \operatorname{div} \Phi_j \, dx
 \end{aligned}$$

pour  $1 \leq j \leq n$ .

Notez que  $Z_n$  a la même régularité en temps  $t$  que la fonction  $F$  apparaissant dans l'équation de la magnétostatique et elle est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable  $\gamma_n$ . Par conséquent, il existe une unique solution maximale  $\gamma_n$  de (3.75) définie sur un intervalle de temps  $[0; T_n]$  satisfaisant  $\gamma_n \in H^1(0, T_n; (\mathbb{R}^n)^4)$ .

Nous allons maintenant établir des estimations d'énergie sur la solution approchée  $(U_n, M_n, \theta_n, Q_n)$  indépendantes de  $n$  qui nous assureront tout d'abord que  $T_n = T$ . De plus, ces estimations, nous permettront par la suite d'établir l'existence de sous-suites faiblement convergentes dans des espaces appropriés et de justifier ainsi le passage à la limite dans le problème approché.

## Estimations d'énergie

Soit  $(U_n, M_n, \theta_n, Q_n)$  la solution approchée de  $(\mathcal{P}_\nu^n)$  définie sur  $(0, T_n)$ . Nous multiplions l'équation (3.69) par  $b_j$  et nous additionnons ces équations pour  $1 \leq j \leq n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|Q_n\|^2 + \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q_n\|^2 + \|\operatorname{div} Q_n\|^2) + \|Q_n\|^2 \\
 &= \int_D \mathcal{K}(\theta_n) \operatorname{div} Q_n \, dx.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Nous utilisons l'équation (3.68) que nous multiplions par le  $j$ -ième coefficient de la projection orthogonale de  $\mathcal{K}(\theta_n)$  sur le sous-espace de  $L^2(D)$  engendré par  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  et nous additionnons les égalités pour  $1 \leq j \leq n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa}{2} \|\theta_n\|^2 + \frac{\alpha}{4} \|\theta_n\|_{L^4(D)}^4 \right) + \nu(\kappa \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 + 3\alpha \int_D \theta_n^2 |\nabla \theta_n|^4 dx) \\ = - \int_D \operatorname{div} Q_n \mathcal{K}(\theta_n) dx. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Nous rassemblons (3.76) et (3.77), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\kappa \|\theta_n\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\theta_n\|_{L^4(D)}^4 + \tau \|Q_n\|^2) + \nu \kappa \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 \\ + 3\nu\alpha \|\theta_n |\nabla \theta_n|^2\|^2 + \tau\gamma (\|\operatorname{curl} Q_n\|^2 + \|\operatorname{div} Q_n\|^2) + \|Q_n\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Par conséquent, en intégrant entre 0 et  $t$  et en utilisant (3.70), on déduit que

$$\begin{aligned} (\kappa \|\theta_n\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\theta_n\|_{L^4(D)}^4 + \tau \|Q_n\|^2)(t) + 2\nu \int_0^t \kappa \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 ds \\ + 2 \int_0^t (3\nu\alpha \|\theta_n |\nabla \theta_n|^2\|^2 + \tau\gamma (\|\operatorname{curl} Q_n\|^2 + \|\operatorname{div} Q_n\|^2) + \|Q_n\|^2) ds \\ = \kappa \|\theta_{0n}^\nu\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\theta_{0n}^\nu\|_{L^4(D)}^4 + \tau \|Q_{0n}\|^2 \leq C \end{aligned} \quad (3.79)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $n$ .

De manière similaire, nous multiplions l'équation (3.66) par  $\alpha_j(t)$  et nous additionnons pour  $j = 1, \dots, n$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_n\|^2 + \eta \|\nabla U_n\|^2 = - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot U_n dx - \mu_0 \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot H_n dx \\ + \frac{\mu_0}{2} \int_D (M_n \times H_n) \cdot \operatorname{curl} U_n dx \end{aligned} \quad (3.80)$$

En utilisant (3.19) et (3.22) pour l'inconnue  $\varphi_n$  et la donnée  $M_n$  avec la fonction test  $\psi = \varphi_n$ , on obtient

$$\int_D H_n \cdot M_n dx = -\|H_n\|^2 - \int_D F \varphi_n dx \quad (3.81)$$

$$\int_D H_n \cdot \partial_t M_n dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_n\|^2 - \int_D \partial_t F \varphi_n dx. \quad (3.82)$$

Maintenant, nous multiplions l'équation (3.67) par le  $j$ -ième coefficient de la projection orthogonale de  $H_n$  sur le sous-espace de  $\mathbb{L}^2(D)$  engendré par  $(W_i)_{1 \leq i \leq n}$  et additionnons les égalités pour  $1 \leq j \leq n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_D \partial_t M_n \cdot H_n \, dx + \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot H_n \, dx \\ & + \sigma \int_D \operatorname{div} M_n \operatorname{div} H_n \, dx + \frac{1}{\delta} \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot H_n \, dx \\ & = \frac{1}{2} \int_D (\operatorname{curl} U_n \times M_n) \cdot H_n \, dx + \beta_0 \|M_n \times H_n\|^2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot H_n \, dx = - \int_D \partial_t M_n \cdot H_n \, dx \\ & - \frac{1}{\delta} \int_D M_n \cdot H_n \, dx - \sigma \int_D \operatorname{div} M_n (F - \operatorname{div} M_n) \, dx \\ & + \frac{\chi_0}{\delta} \|H_n\|^2 + \frac{1}{2} \int_D (\operatorname{curl} U_n \times M_n) \cdot H_n \, dx + \beta_0 \|M_n \times H_n\|^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

et donc

$$\begin{aligned} & \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot H_n \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|H_n\|^2 + \int_D (\partial_t F + \frac{1}{\delta} F) \varphi_n \, dx \\ & + \sigma \|\operatorname{div} M_n\|^2 - \sigma \int_D \operatorname{div} M_n F \, dx \\ & + \frac{1 + \chi_0}{\delta} \|H_n\|^2 + \frac{1}{2} \int_D (\operatorname{curl} U_n \times M_n) \cdot H_n \, dx + \beta_0 \|M_n \times H_n\|^2. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Comme

$$\int_D (M_n \times H_n) \cdot \operatorname{curl} U_n \, dx = \int_D (\operatorname{curl} U_n \times M_n) \cdot H_n \, dx,$$

l'égalité (3.80) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_n\|^2 + \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} \|H_n\|^2 + \eta \|\nabla U_n\|^2 + \mu_0 \sigma \|\operatorname{div} M_n\|^2 + \frac{\mu_0(1 + \chi_0)}{\delta} \|H_n\|^2 \\ & + \mu_0 \beta_0 \|M_n \times H_n\|^2 = - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot U_n \, dx - \mu_0 \int_D (\partial_t F + \frac{1}{\delta} F) \varphi_n \, dx \\ & + \mu_0 \sigma \int_D \operatorname{div} M_n F \, dx. \end{aligned} \quad (3.86)$$

De même, nous multiplions l'équation (3.67) par  $\beta_j(t)$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|M_n\|^2 + \sigma \|\operatorname{curl} M_n\|^2 + \sigma \|\operatorname{div} M_n\|^2 + \frac{1}{\delta} \|M_n\|^2 \\ & = \frac{\chi_0}{\delta} \int_D H_n \cdot M_n \, dx \end{aligned} \quad (3.87)$$

et en utilisant (3.81), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|M_n\|^2 + \sigma \|\operatorname{curl} M_n\|^2 + \sigma \|\operatorname{div} M_n\|^2 + \frac{1}{\delta} \|M_n\|^2 \\ & = -\frac{\chi_0}{\delta} \|H_n\|^2 - \frac{\chi_0}{\delta} \int_D F \varphi_n \, dx. \end{aligned} \quad (3.88)$$

On additionne (3.86) avec (3.88), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|U_n\|^2 + \mu_0 \|M_n\|^2 + \mu_0 \|H_n\|^2) + \eta \|\nabla U_n\|^2 \\ & + \mu_0 \sigma (\|\operatorname{curl} M_n\|^2 + 2\|\operatorname{div} M_n\|^2) + \frac{\mu_0}{\delta} \|M_n\|^2 \\ & + \frac{\mu_0(1+2\chi_0)}{\delta} \|H_n\|^2 + \mu_0 \beta_0 \|M_n \times H_n\|^2 = - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot U_n \, dx \\ & - \mu_0 \int_D \partial_t F \varphi_n \, dx - \frac{\mu_0(1+\chi_0)}{\delta} \int_D F \varphi_n \, dx + \mu_0 \sigma \int_D \operatorname{div} M_n F \, dx. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Par intégration par parties entre 0 et  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|U_n\|^2 + \mu_0 (\|M_n\|^2 + \|H_n\|^2))(t) + \eta \int_0^t \|\nabla U_n\|^2 \, ds \\ & + \int_0^t (\mu_0 \sigma (\|\operatorname{curl} M_n\|^2 + 2\|\operatorname{div} M_n\|^2) + \frac{\mu_0}{\delta} \|M_n\|^2) \, ds \\ & + \int_0^t \frac{\mu_0(1+2\chi_0)}{\delta} \|H_n\|^2 \, ds + \mu_0 \beta_0 \int_0^t \|M_n \times H_n\|^2 \, ds \\ & = \frac{1}{2} (\|U_{0n}\|^2 + \mu_0 (\|M_{0n}\|^2 + \|H_{0n}\|^2)) \\ & - \int_0^t \int_D \rho(\theta_n) g \cdot U_n \, dx \, ds - \frac{\mu_0(1+\chi_0)}{\delta} \int_0^t \int_D F \varphi_n \, dx \, ds \\ & - \mu_0 \int_0^t \int_D \partial_t F \varphi_n \, dx \, ds + \mu_0 \sigma \int_0^t \int_D F \operatorname{div} M_n \, dx \, ds \end{aligned} \quad (3.90)$$

où

$$H_{0n} = \nabla \varphi_{0n}, \quad \varphi_{0n} = \mathcal{H}(M_{0n}, F(0)). \quad (3.91)$$

D'autre part, nous avons grâce aux inégalités de Young et Poincaré les inégalités suivantes

$$\left| \int_0^t \int_D \rho(\theta_n) g \cdot U_n \, dx ds \right| \leq C_T + C \int_0^t \|\theta_n\|^2 \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|U_n\|^2 \, ds.$$

Comme  $\|\varphi_n\| \leq C \|\nabla \varphi_n\| = C \|H_n\|$ , alors en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0(1 + \chi_0)}{\delta} \left| \int_0^t \int_D F \varphi_n \, dx ds \right| + \mu_0 \left| \int_0^t \int_D \partial_t F \varphi_n \, dx ds \right| \leq \\ & C(\|F\|_{L^2(D_T)}^2 + \|\partial_t F\|_{L^2(D_T)}^2) + \frac{\mu_0(1 + 2\chi_0)}{2\delta} \int_0^t \|H_n\|^2 \, ds. \end{aligned}$$

De même

$$\mu_0 \sigma \left| \int_0^t \int_D F \operatorname{div} M_n \, dx ds \right| \leq C \|F\|_{L^2(D_T)}^2 + \mu_0 \sigma \int_0^t \|\operatorname{div} M_n\|^2 \, ds.$$

Dans ces inégalités, les constantes  $C$  et  $C_T$  sont indépendantes de  $n$ . Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|U_n\|^2 + \mu_0 (\|M_n\|^2 + \|H_n\|^2))(t) \\ & + \int_0^t \left[ \eta \|\nabla U_n\|^2 + \mu_0 \sigma (\|\operatorname{curl} M_n\|^2 + \|\operatorname{div} M_n\|^2) + \frac{\mu_0}{\delta} \|M_n\|^2 \right] \, ds \\ & + \int_0^t \left[ \frac{\mu_0(1 + 2\chi_0)}{2\delta} \|H_n\|^2 + \beta_0 \mu_0 \|M_n \times H_n\|^2 \right] \, ds \\ & \leq C_n + C_T + C \int_0^t \|\theta_n\|^2 \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|U_n\|^2 \, ds \end{aligned} \tag{3.92}$$

où

$$C_n = \frac{1}{2} (\|U_{0n}\|^2 + \mu_0 (\|M_{0n}\|^2 + \|H_{0n}\|^2)) \leq C$$

et la constante  $C$  est indépendante de  $n$  compte tenu de (3.70), (3.91) et (3.17). Grâce à l'estimation (3.79), nous déduisons que

$$\begin{aligned} (\|U_n\|^2 + \mu_0 (\|M_n\|^2 + \|H_n\|^2))(t) & \leq C + \int_0^t \|U_n\|^2 \, ds \\ & \leq C + \int_0^t \|U_n\|^2 + \mu_0 (\|M_n\|^2 + \|H_n\|^2) \, ds. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous déduisons que

$$\|U_n(t)\|^2 + \|M_n(t)\|^2 + \|H_n(t)\|^2 \leq C + \exp(Ct). \quad (3.93)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|U_n\|^2 + \mu_0(\|M_n\|^2 + \|H_n\|^2))(t) \\ & + \int_0^t \left[ \eta \|\nabla U_n\|^2 + \mu_0 \sigma (\|\operatorname{curl} M_n\|^2 + \|\operatorname{div} M_n\|^2) + \frac{\mu_0}{\delta} \|M_n\|^2 \right] ds \\ & + \int_0^t \left[ \frac{\mu_0(1 + 2\chi_0)}{2\delta} \|H_n\|^2 + \beta_0 \mu_0 \|M_n \times H_n\|^2 \right] ds \leq C + \exp(Ct) \end{aligned} \quad (3.94)$$

avec  $C$  indépendante de  $n$ . On déduit donc que  $T_n = T$  pour tout  $n \geq 1$ .

### 3.3.5 Passage à la limite

Soit  $\nu$  fixé, les estimations (3.79) et (3.94) nous permettent d'en déduire le lemme suivant

#### Lemme 4

- $(U_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U})$
- $(M_n)_n$  et  $(H_n)_n$  sont uniformément bornées dans  $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$
- $(M_n \times H_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$
- $(Q_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D))$
- $(\theta_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; L^4(D)) \cap L^4(0, T; W^{1,4}(D))$ .

Notez que nous obtenons l'estimation uniforme de  $(H_n)_n$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$  en utilisant l'estimation de  $(M_n)_n$  et (3.21). En effet, nous avons d'après (3.21)

$$\begin{aligned} \int_0^t \|H_n\|_{H^1(D)}^2 ds & \leq C \int_0^t (\|\operatorname{div} M_n\| + \|F\|)^2 ds \\ & \leq C \left( \int_0^t \|\operatorname{div} M_n\|^2 ds + \int_0^t \|F\|^2 ds + 2 \int_0^t \|\operatorname{div} M_n\| \|F\| ds \right) \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de young on obtient

$$\int_0^t \|H_n\|_{H^1(D)}^2 ds \leq C \left( \int_0^t \|\operatorname{div} M_n\|^2 ds + \int_0^t \|F\|^2 ds \right) \leq C.$$

Grâce au lemme 4, il existe des fonctions  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$  telles que

$$\begin{aligned} U_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathcal{U}), \\ M_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)), \\ H_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)), \\ \theta_\nu &\in L^\infty(0, T; L^4(D)) \cap L^4(0, T; W^{1,4}(D)) \\ Q_\nu &\in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D)) \end{aligned}$$

pour lesquelles on a les convergences suivantes

**Lemme 5** *Soit  $\nu > 0$  fixé, il existe des sous-suites encore notées  $(U_n), (M_n), (H_n), (Q_n)$  et  $(\theta_n)$  telles que lorsque  $n \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} U_n &\rightharpoonup U_\nu \text{ faiblement} - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathcal{U}) \\ M_n &\rightharpoonup M_\nu \text{ faiblement} - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)) \\ H_n &\rightharpoonup H_\nu \text{ faiblement} - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D)) \\ Q_n &\rightharpoonup Q_\nu \text{ faiblement} - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D)) \\ \theta_n &\rightharpoonup \theta_\nu \text{ faiblement} - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^4(D)) \text{ et faiblement dans } L^4(0, T; W^{1,4}(D)). \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\|\nabla\theta_n\|^2 \nabla\theta_n \rightharpoonup \Lambda_\nu \text{ faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}(D_T). \quad (3.95)$$

La dernière convergence est une conséquence de (3.79) puisque

$$\|\|\nabla\theta_n\|^2 \nabla\theta_n\|_{L^{\frac{4}{3}}(D_T)} \leq \|\nabla\theta_n\|_{L^4(D_T)}^3 \leq C.$$

Afin de passer à la limite dans les termes non linéaires, nous établissons un résultat de convergence forte dans certains espaces et pour utiliser les résultats de compacité, on doit estimer les dérivées en temps des solutions approchées.

Nous commençons par l'estimations de  $(\partial_t \theta_n)_n$ . Nous multiplions l'équation (3.68) par  $a'_j(t)$  et nous additionnons les égalités obtenues pour  $1 \leq j \leq n$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_D \partial_t \theta_n v_j a'_j(t) dx - \sum_{j=1}^n \int_D \theta_n U_n \cdot \nabla v_j a'_j(t) dx + \nu \sum_{j=1}^n \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla v_j a'_j(t) dx \\ = - \sum_{j=1}^n \int_D \operatorname{div} Q_n v_j a'_j(t) dx. \end{aligned}$$

Comme  $U_n$  est nulle au bord, on déduit que

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n \int_D \theta_n U_n \cdot \nabla v_j a'_j(t) dx &= \sum_{j=1}^n \int_D \operatorname{div}(\theta_n U_n) \cdot v_j a'_j(t) dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} (\theta_n U_n) \cdot \mathbf{n} v_j ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_D \operatorname{div}(\theta_n U_n) \cdot v_j a'_j(t) dx = \int_D \operatorname{div}(\theta_n U_n) \cdot \partial_t \theta_n dx \\ &= \int_D \partial_t \theta_n \nabla \theta_n \cdot U_n dx. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \nu \sum_{j=1}^n \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla v_j a'_j(t) dx &= \nu \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \partial_t \nabla \theta_n dx = \nu \int_D |\nabla \theta_n|^2 \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \theta_n|^2 \right) dx \\ &= \frac{\nu}{4} \frac{d}{dt} \int_D |\nabla \theta_n|^4 dx \end{aligned}$$

donc

$$\|\partial_t \theta_n\|^2 + \int_D \partial_t \theta_n \nabla \theta_n \cdot U_n dx + \frac{\nu}{4} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 = - \int_D \operatorname{div} Q_n \partial_t \theta_n dx. \quad (3.96)$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Young, on trouve

$$\begin{aligned} \left| \int_D \partial_t \theta_n \nabla \theta_n \cdot U_n dx \right| &\leq \|\partial_t \theta_n\| \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)} \|U_n\|_{L^4(D)} \\ &\leq \frac{1}{4} \|\partial_t \theta_n\|^2 + \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^2 \|U_n\|_{L^4(D)}^2 \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_D \operatorname{div} Q_n \partial_t \theta_n dx \right| \leq \|\operatorname{div} Q_n\| \|\partial_t \theta_n\| \leq \|\operatorname{div} Q_n\|^2 + \frac{1}{4} \|\partial_t \theta_n\|^2.$$

Donc (3.96) donne

$$\|\partial_t \theta_n\|^2 + \frac{\nu}{4} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 \leq \frac{1}{2} \|\partial_t \theta_n\|^2 + \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^2 \|U_n\|_{L^4(D)}^2 + \|\operatorname{div} Q_n\|^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\|\partial_t\theta_n\|^2 + \frac{\nu}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^4 \leq \|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^2\|U_n\|_{L^4(D)}^2 + \|\operatorname{div} Q_n\|^2$$

d'où il résulte que

$$\|\partial_t\theta_n\|^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^4 \leq 2\|\operatorname{div} Q_n\|^2 + 2\|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^2\|U_n\|_{L^4(D)}^2. \quad (3.97)$$

Nous intégrons entre 0 et  $t$ , et nous utilisons (3.70) et (3.79), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\partial_t\theta_n\|^2 ds + \frac{\nu}{2}\|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^4 &\leq \frac{\nu}{2}\|\nabla\theta_{0n}^\nu\|_{L^4(D)}^4 \\ &+ 2\int_0^t \|\operatorname{div} Q_n\|^2 ds + 2\int_0^t \|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^2\|U_n\|_{L^4(D)}^2 ds \\ &\leq C + 2\int_0^t \|\nabla\theta_n\|_{L^4(D)}^2\|U_n\|_{L^4(D)}^2 ds \end{aligned} \quad (3.98)$$

avec  $C$  indépendante de  $n$ .

On pose  $y(t) = \|\nabla\theta_n(t)\|_{L^4(D)}^4$  et  $z(t) = \|U_n\|_{L^4(D)}^2$  alors de (3.98),  $y(t)$  satisfait l'inégalité intégrale suivante

$$y(t) \leq C_\nu + 2M_\nu \int_0^t \sqrt{y(s)} z(s) ds.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Gronwall-Bellman-Bihari (voir [6]) et nous concluons que

$$y(t) \leq \left( \sqrt{C_\nu} + M_\nu \int_0^t z(s) ds \right)^2.$$

On obtient donc pour tout  $t \in [0, T]$  l'estimation suivante

$$\|\nabla\theta_n(t)\|_{L^4(D)}^2 \leq \sqrt{C_\nu} + M_\nu \int_0^t \|U_n(s)\|_{L^4(D)}^2 ds$$

qui nous permet de déduire

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\partial_t\theta_n\|^2 ds &\leq C + 2\sqrt{C_\nu} \int_0^T \|U_n(s)\|_{L^4(D)}^2 ds \\ &+ 2M_\nu \left( \int_0^T \|U_n(s)\|_{L^4(D)}^2 ds \right)^2. \end{aligned} \quad (3.99)$$

En effet, on a de (3.98)

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|\partial_t \theta_n\|^2 ds &\leq C + 2 \int_0^T \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^2 \|U_n\|_{L^4(D)}^2 ds \\
 &\leq C + 2 \int_0^T \left( \sqrt{C_\nu} + M_\nu \int_0^T \|U_n(s)\|_{L^4(D)}^2 ds \right) \|U_n\|_{L^4(D)}^2 ds \\
 &\leq C + 2\sqrt{C_\nu} \int_0^T \|U_n\|_{L^4(D)}^2 ds + 2M_\nu \left( \int_0^T \|U_n(s)\|_{L^4(D)}^2 ds \right)^2.
 \end{aligned}$$

On déduit donc que  $(\partial_t \theta_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^2(D_T)$  par rapport à  $n$ .

Maintenant, nous allons estimer  $\partial_t U_n$ ,  $\partial_t M_n$  et  $\partial_t Q_n$ . Pour cela nous utilisons les notations suivantes. Pour une fonction  $f$  définie sur  $[0, T]$  à valeurs dans un espace  $\mathcal{V}$ , soit  $\tilde{f}$  une fonction égale à  $f$  sur  $[0, T]$  et à 0 ailleurs et soit  $\widehat{f}$  sa transformée de Fourier définie par

$$\widehat{f}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2i\pi t\tau) \tilde{f}(t) dt = \int_0^T \exp(-2i\pi t\tau) f(t) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Nous montrons que pour  $0 < \gamma_0 < 1/4$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2 d\tau \leq C. \tag{3.100}$$

Nous procédons comme dans [37] (voir aussi [21]) et comme  $(U_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; \mathcal{U})$ , il suffit de vérifier que

$$|\tau| \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2 \leq C \|\widehat{U}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}} + C \|\widehat{U}_n(\tau)\|, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.101}$$

On écrit l'équation (3.66) sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \int_D U_n \cdot V_j dx = \langle \mathcal{L}_n, V_j \rangle, \quad U_n(0) = U_{0n} \tag{3.102}$$

pour tout  $1 \leq j \leq n$  où la forme linéaire  $\mathcal{L}_n$  est définie sur  $\mathcal{U}$  par

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{L}_n, \psi \rangle &= - \int_D (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot \psi dx - \eta \int_D \nabla U_n \cdot \nabla \psi dx - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot \psi dx \\
 &\quad + \mu_0 \int_D (M_n \cdot \nabla) H_n \cdot \psi dx + \frac{\mu_0}{2} \int_D M_n \times H_n \cdot \text{curl } \psi dx.
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Nous avons  $\mathcal{L}_n \in \mathcal{U}'$  p.p.  $t \in (0, T)$  et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_n\|_{\mathcal{U}'} &\leq C(\|U_n\|_{H^1(D)}^2 + \|U_n\|_{H^1(D)} + \|\rho(\theta_n)\| \\ &\quad + \|M_n\|_{H^1(D)}\|H_n\|_{H^1(D)} + \|M_n \times H_n\|). \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_n\|_{\mathcal{U}'} &= \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{U}} \leq 1} |\langle \mathcal{L}_n, \psi \rangle| = \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{U}} \leq 1} \left| \int_D (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot \psi \, dx + \eta \int_D \nabla U_n \cdot \nabla \psi \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_D \rho(\theta_n) g \cdot \psi \, dx - \mu_0 \int_D (M_n \cdot \nabla) H_n \cdot \psi \, dx - \frac{\mu_0}{2} \int_D M_n \times H_n \cdot \operatorname{curl} \psi \, dx \right|. \end{aligned}$$

Soit  $\psi \in \mathcal{U}$ , grâce à l'inégalité de Hölder et à l'aide de l'injection de Sobolev  $H^1(D) \subset L^6(D)$ , on a pour  $\|\psi\|_{\mathcal{U}} \leq 1$

$$\begin{aligned} \left| - \int_D \rho(\theta_n) g \cdot \psi \, dx \right| &\leq \|\rho(\theta_n)\|_{L^2(D)} \|g\|_{L^\infty(D)} \|\psi\|_{L^2(D)} \\ &\leq C \|\rho(\theta_n)\|_{L^2(D)}, \\ \left| \int_D (M_n \cdot \nabla) H_n \cdot \psi \, dx \right| &\leq \|M_n\|_{L^6(D)} \|\nabla H_n\|_{L^2(D)} \|\psi\|_{L^3(D)} \\ &\leq C \|M_n\|_{H^1(D)} \|H_n\|_{H^1(D)} \|\psi\|_{H^1(D)} \\ &\leq C \|M_n\|_{H^1(D)} \|H_n\|_{H^1(D)}, \\ \left| \int_D (M_n \times H_n) \cdot \operatorname{curl} \psi \, dx \right| &\leq \|M_n \times H_n\|_{L^2(D)} \|\operatorname{curl} \psi\|_{L^2(D)} \\ &\leq C \|M_n \times H_n\|_{L^2(D)} \|\nabla \psi\|_{L^2(D)} \\ &\leq C \|M_n \times H_n\|_{L^2(D)}, \\ \left| \int_D \nabla U_n \cdot \nabla \psi \, dx \right| &\leq \|\nabla U_n\|_{L^2(D)} \|\nabla \psi\|_{L^2(D)} \\ &\leq \|U_n\|_{H^1(D)} \|\psi\|_{\mathcal{U}} \\ &\leq \|U_n\|_{H^1(D)}, \\ \left| \int_D (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot \psi \, dx \right| &\leq \|U_n\|_{L^6(D)} \|\nabla U_n\|_{L^2(D)} \|\psi\|_{L^3(D)} \\ &\leq C \|U_n\|_{H^1(D)}^2, \end{aligned}$$

d'où notre estimation et nous concluons grâce au lemme 4 que  $(\mathcal{L}_n)$  est uniformément bornée dans  $L^1(0, T; \mathcal{U}')$ . Ensuite, on réécrit l'équation (3.66) comme suit

$$\frac{d}{dt} \int_D \tilde{U}_n \cdot V_j dx = \langle \tilde{\mathcal{L}}_n, V_j \rangle + \left( \int_D U_{0n} \cdot V_j dx \right) \delta_0 - \left( \int_D U_n(T) \cdot V_j dx \right) \delta_T \quad (3.104)$$

pour  $1 \leq j \leq n$  où  $\delta_0$  (respectivement  $\delta_T$ ) est la masse de Dirac en 0 (respectivement  $T$ ). Par transformée de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} 2i\pi\tau \int_D \widehat{U}_n \cdot V_j dx &= \langle \widehat{\mathcal{L}}_n, V_j \rangle + \int_D U_{0n} \cdot V_j dx \\ &\quad - \exp(-2i\pi T\tau) \int_D U_n(T) \cdot V_j dx \end{aligned} \quad (3.105)$$

Ensuite, nous multiplions l'égalité (3.105) par  $\overline{\widehat{\alpha}_j(\tau)}$  conjugué de  $\widehat{\alpha}_j(\tau)$  et nous additionnons les égalités pour  $1 \leq j \leq n$  pour obtenir

$$2i\pi\tau \|\widehat{U}_n\|^2 = \langle \widehat{\mathcal{L}}_n, \overline{\widehat{U}_n} \rangle + \int_D U_{0n} \cdot \overline{\widehat{U}_n} dx - \exp(-2i\pi T\tau) \int_D U_n(T) \cdot \overline{\widehat{U}_n} dx. \quad (3.106)$$

Nous avons pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\widehat{\mathcal{L}}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}'} \leq \int_0^T \|\mathcal{L}_n(t)\|_{\mathcal{U}'} dt \leq C,$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'identité de Plancherel, on trouve

$$2i\pi\tau \|\widehat{U}_n\|^2 \leq \|\widehat{\mathcal{L}}_n\|_{\mathcal{U}'} \|\widehat{U}_n\|_{\mathcal{U}} + \|U_{0n}\| \|\widehat{U}_n\| + C \|U_n(T)\| \|\widehat{U}_n\|.$$

Comme  $(U_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U})$  et  $\|U_n(T)\| \leq C$ ,  $\|U_{0n}\| \leq C$ , on déduit que

$$|\tau| \|\widehat{U}_n\|^2 \leq C \|\widehat{U}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}} + C \|\widehat{U}_n(\tau)\|, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Ainsi on obtient (3.101) et grâce à l'inégalité de Poincaré, on a

$$|\tau| \|\widehat{U}_n\|^2 \leq C \|\widehat{U}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour  $\gamma_0$  fixé,  $0 < \gamma_0 < 1/4$ , on a

$$|\tau|^{2\gamma_0} \leq c(\gamma_0) \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma_0}}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2 d\tau &\leq c(\gamma_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leq c(\gamma_0) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{U}_n(\tau)\|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau| \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} d\tau \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité de Parseval, nous déduisons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{U}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}}^2 d\tau = \int_0^T \|U_n(t)\|_{\mathcal{U}}^2 dt \leq C.$$

Comme  $\frac{1}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $\widehat{U}_n$  demeure dans un borné de  $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{U})$ , alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau| \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} d\tau \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{U}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}}^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} d\tau \leq C$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Parseval, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{U}_n(\tau)\|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} d\tau &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{U}_n(\tau)\|_{\mathcal{U}}}{1+|\tau|^{1-2\gamma_0}} d\tau \\ &\leq C \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|\tau|^{1-2\gamma_0})^2} d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|U_n(t)\|_{\mathcal{U}}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{U}_n(\tau)\|^2 d\tau \leq C.$$

Nous procédons d'une manière similaire pour  $\partial_t M_n$  et  $\partial_t Q_n$  et nous montrons que pour tout  $0 < \gamma_0 < 1/4$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{M}_n(\tau)\|^2 d\tau \leq C, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{Q}_n(\tau)\|^2 d\tau \leq C. \quad (3.107)$$

Pour cela, on réécrit les équations (3.67) et (3.69) sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_D M_n \cdot W_j dx = \langle \mathcal{Z}_n, W_j \rangle, \quad M_n(0) = M_{0n} \quad (3.108)$$

$$\frac{d}{dt} \int_D Q_n \cdot \Phi_j dx = \langle \mathcal{S}_n, \Phi_j \rangle, \quad Q_n(0) = Q_{0n} \quad (3.109)$$

pour tout  $1 \leq j \leq n$  où les formes linéaires  $\mathcal{Z}_n$  et  $\mathcal{S}_n$  sont définies sur  $\mathbb{H}_t^1(D)$  et  $\mathbb{H}_n^1(D)$  respectivement par

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_n, \psi \rangle &= - \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot \psi \, dx - \sigma \int_D \operatorname{curl} M_n \cdot \operatorname{curl} \psi \, dx \\ &\quad - \sigma \int_D \operatorname{div} M_n \operatorname{div} \psi \, dx - \frac{1}{\delta} \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot \psi \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times M_n \cdot \psi \, dx - \beta_0 \int_D M_n \times H_n \cdot M_n \times \psi \, dx, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_n, \psi \rangle &= -\tau\gamma \int_D (\operatorname{curl} Q_n \cdot \operatorname{curl} \psi + \operatorname{div} Q_n \operatorname{div} \psi) \, dx - \frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times Q_n \cdot \psi \, dx \\ &\quad - \int_D Q_n \cdot \psi \, dx + \int_D \mathcal{K}(\theta_n) \operatorname{div} \psi \, dx. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Nous avons  $\mathcal{Z}_n \in (\mathbb{H}_t^1(D))'$  p.p.  $t \in (0, T)$  et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_n\|_{(\mathbb{H}_t^1(D))'} &\leq C(\|U_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} \|M_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} + \chi_0 \|H_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} \\ &\quad + \|M_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} \|M_n \times H_n\|_{\mathbb{L}^2(D)}). \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_n\|_{(\mathbb{H}_t^1(D))'} &= \sup_{\|\psi\|_{\mathbb{H}_t^1(D)} \leq 1} |\langle \mathcal{Z}_n, \psi \rangle| \\ &= \sup_{\|\psi\|_{\mathbb{H}_t^1(D)} \leq 1} \left| - \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot \psi \, dx - \sigma \int_D \operatorname{curl} M_n \cdot \operatorname{curl} \psi \, dx \right. \\ &\quad \left. - \sigma \int_D \operatorname{div} M_n \operatorname{div} \psi \, dx - \frac{1}{\delta} \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot \psi \, dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times M_n \cdot \psi \, dx - \beta_0 \int_D M_n \times H_n \cdot M_n \times \psi \, dx \right|. \end{aligned}$$

Soit  $\psi \in \mathbb{H}_t^1(D)$ , grâce à l'inégalité de Hölder et à l'aide de l'injection de Sobolev  $H^1(D) \subset L^6(D)$ , on a pour  $\|\psi\|_{\mathbb{H}_t^1(D)} \leq 1$

$$\begin{aligned} \left| \int_D (U_n \cdot \nabla) M_n \cdot \psi \, dx \right| &\leq \|U_n\|_{\mathbb{L}^6(D)} \|\nabla M_n\|_{\mathbb{L}^2(D)} \|\psi\|_{\mathbb{L}^3(D)} \\ &\leq C \|U_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} \|M_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} \|\psi\|_{\mathbb{H}^1(D)} \\ &\leq C \|U_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} \|M_n\|_{\mathbb{H}^1(D)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_D \operatorname{curl} M_n \cdot \operatorname{curl} \psi \, dx \right| &\leq \| \operatorname{curl} M_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| \operatorname{curl} \psi \|_{\mathbb{L}^2(D)} \\
 &\leq C \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} \\
 &\leq C \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_D \operatorname{div} M_n \operatorname{div} \psi \, dx \right| &\leq \| \operatorname{div} M_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| \operatorname{div} \psi \|_{\mathbb{L}^2(D)} \\
 &\leq C \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} \\
 &\leq C \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_D (M_n - \chi_0 H_n) \cdot \psi \, dx \right| &\leq \left| \int_D M_n \cdot \psi \, dx \right| + \chi_0 \left| \int_D H_n \cdot \psi \, dx \right| \\
 &\leq \| M_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| \psi \|_{\mathbb{L}^2(D)} + \chi_0 \| H_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| \psi \|_{\mathbb{L}^2(D)} \\
 &\leq \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} + \chi_0 \| H_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} \\
 &\leq \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} + \chi_0 \| H_n \|_{\mathbb{H}^1(D)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_D \operatorname{curl} U_n \times M_n \cdot \psi \, dx \right| &\leq \| \operatorname{curl} U_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| M_n \|_{\mathbb{L}^6(D)} \| \psi \|_{\mathbb{L}^3(D)} \\
 &\leq C \| \nabla U \|_{\mathbb{L}^2} \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} \\
 &\leq C \| U_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} \\
 &\leq C \| U_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_D M_n \times (M_n \times H_n) \cdot \psi \, dx \right| &\leq \| M_n \|_{\mathbb{L}^6(D)} \| M_n \times H_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| \psi \|_{\mathbb{L}^3(D)} \\
 &\leq C \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| M_n \times H_n \|_{\mathbb{L}^2(D)} \| \psi \|_{\mathbb{H}^1(D)} \\
 &\leq C \| M_n \|_{\mathbb{H}^1(D)} \| M_n \times H_n \|_{\mathbb{L}^2(D)}.
 \end{aligned}$$

Nous avons aussi  $\mathcal{S}_n \in (\mathbb{H}_n^1(D))'$  p.p.  $t \in (0, T)$  et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_n\|_{(\mathbb{H}_n^1(D))'} &= \sup_{\|\psi\|_{\mathbb{H}_n^1(D)} \leq 1} |\langle \mathcal{S}_n, \psi \rangle| \\ &= \sup_{\|\psi\|_{\mathbb{H}_n^1(D)} \leq 1} \left| -\tau \gamma \int_D (\operatorname{curl} Q_n \cdot \operatorname{curl} \psi + \operatorname{div} Q_n \operatorname{div} \psi) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau}{2} \int_D \operatorname{curl} U_n \times Q_n \cdot \psi dx - \int_D Q_n \cdot \psi dx + \int_D \mathcal{K}(\theta_n) \operatorname{div} \psi dx \right| \end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathcal{S}_n\|_{(\mathbb{H}_n^1(D))'} \leq C(\|Q_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} + \|U_n\|_{\mathbb{H}^1(D)}\|Q_n\|_{\mathbb{H}^1(D)} + \|\mathcal{K}(\theta_n)\|_{\mathbb{L}^{3/4}(D)}).$$

Nous concluons grâce au lemme 4 que  $(\mathcal{Z}_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^1(0, T; (\mathbb{H}_t^1(D))')$  et  $(\mathcal{S}_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^1(0, T; (\mathbb{H}_n^1(D))')$ . Ensuite, on réécrit les équations (3.67) et (3.69) comme suit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \widetilde{M}_n \cdot W_j dx &= \langle \widetilde{\mathcal{Z}}_n, W_j \rangle + \left( \int_D M_{0n} \cdot W_j dx \right) \delta_0 \\ &\quad - \left( \int_D M_n(T) \cdot W_j dx \right) \delta_T \end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \widetilde{Q}_n \cdot \Phi_j dx &= \langle \widetilde{\mathcal{S}}_n, \Phi_j \rangle + \left( \int_D Q_{0n} \cdot \Phi_j dx \right) \delta_0 \\ &\quad - \left( \int_D Q_n(T) \cdot \Phi_j dx \right) \delta_T \end{aligned} \tag{3.113}$$

pour  $1 \leq j \leq n$  où  $\delta_0$  (respectivement  $\delta_T$ ) est la masse de Dirac en 0 (respectivement  $T$ ). Par transformée de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} 2i\pi\tau \int_D \widehat{M}_n \cdot W_j dx &= \langle \widehat{\mathcal{Z}}_n, W_j \rangle + \int_D M_{0n} \cdot W_j dx \\ &\quad - \exp(-2i\pi T\tau) \int_D M_n(T) \cdot W_j dx, \end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned} 2i\pi\tau \int_D \widehat{Q}_n \cdot \Phi_j dx &= \langle \widehat{\mathcal{S}}_n, \Phi_j \rangle + \int_D Q_{0n} \cdot \Phi_j dx \\ &\quad - \exp(-2i\pi T\tau) \int_D Q_n(T) \cdot \Phi_j dx. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Ensuite, nous multiplions l'égalité (3.114) par  $\overline{\widehat{\beta}}_j(\tau)$  conjugué de  $\beta_j(\tau)$  et (3.115) par  $\overline{\widehat{b}}_j(\tau)$  conjugué de  $b_j(\tau)$  et nous additionnons les égalités pour  $1 \leq j \leq n$ , pour

trouver

$$2i\pi\tau\|\widehat{M}_n\|^2 = \langle \widehat{\mathcal{Z}}_n, \widehat{M}_n \rangle + \int_D M_{0n} \cdot \overline{\widehat{M}_n} \, dx - \exp(-2i\pi T\tau) \int_D M_n(T) \cdot \overline{\widehat{M}_n} \, dx \quad (3.116)$$

$$2i\pi\tau\|\widehat{Q}_n\|^2 = \langle \widehat{\mathcal{S}}_n, \widehat{Q}_n \rangle + \int_D Q_{0n} \cdot \overline{\widehat{Q}_n} \, dx - \exp(-2i\pi T\tau) \int_D Q_n(T) \cdot \overline{\widehat{Q}_n} \, dx. \quad (3.117)$$

Nous suivons les mêmes étapes que celles utilisées dans l'estimation de  $\partial_t U_n$  pour conclure que pour tout  $0 < \gamma_0 < 1/4$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{M}_n(\tau)\|^2 \, d\tau \leq C, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma_0} \|\widehat{Q}_n(\tau)\|^2 \, d\tau \leq C.$$

Les résultats ci-dessus sont résumés dans le lemme suivant.

**Lemme 6** *Il existe  $C_\nu > 0$  tel que pour tout  $n$*

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma_0} (\|\widehat{U}_n(\tau)\|^2 + \|\widehat{M}_n(\tau)\|^2 + \|\widehat{Q}_n(\tau)\|^2) \, d\tau \leq C_\nu \quad (3.118)$$

et

$$\|\partial_t \theta_n\|_{L^2(D_T)} \leq C_\nu. \quad (3.119)$$

En combinant les estimations du lemme 4 et lemme 6 et en appliquant le lemme de compacité de Lions pour  $(U_n, M_n, Q_n)$  et le lemme de compacité d'Aubin pour  $\theta_n$  (voir [34]), nous obtenons les résultats de convergence forte suivants.

**Lemme 7** *Pour  $\nu > 0$  fixé, on a*

$$(U_n, M_n, H_n, \theta_n, Q_n) \rightarrow (U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu) \text{ fortement dans } (\mathbb{L}^2(D_T))^5 \quad (3.120)$$

De plus, on a  $H_\nu = \mathcal{H}(M_\nu, F)$ .

*Preuve.* Nous avons  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}'$  et l'injection de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{U}_0$  est compacte puisque l'injection  $\mathbb{H}_0^1(D) \subset \mathbb{L}^2(D)$  est compacte.  $(U_n)_n$  demeure dans un borné de  $L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U})$  et  $(|\tau|^\gamma \widehat{U}_n)_n$  demeure dans un borné de  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{L}^2(D))$ ; en appliquant le théorème de compacité de Lions (voir chapitre 2), on peut extraire une sous-suite encore notée  $(U_n)_n$  telle que

$$U_n \rightarrow U_\nu \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D)).$$

Nous démontrons de la même façon les convergences de  $(M_n, Q_n)$  en appliquant le lemme de compacité de Lions.

D'autre part,  $(\theta_n)_n$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; L^4(D)) \cap L^4(0, T; W^{1,4}(D))$  et  $\partial_t \theta_n$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; L^2(D))$ . On applique le théorème de compacité d'Aubin, on déduit que l'on peut extraire une sous-suite encore notée  $(\theta_n)_n$  telle que

$$\theta_n \rightarrow \theta_\nu \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^2(D)).$$

La convergence forte de  $(H_n)_n$  est une conséquence de la continuité de l'opérateur  $\mathcal{H}$ .

## Passage à la limite dans l'équation de la température

Dans cette partie, nous détaillons la procédure de passage à la limite dans l'équation de la température  $\theta_n$ . Nous commençons par l'introduction de quelques notations.

Soient  $W = W^{1,4}(D)$  et  $A$  un opérateur nonlinéaire défini sur  $W$  par

$$\langle A(\varphi), \psi \rangle = \int_D |\nabla \varphi|^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx, \quad \forall \varphi, \psi \in W. \quad (3.121)$$

Alors  $A(\varphi) \in W'$  pour tout  $\varphi \in W$  et

$$\|A(\varphi)\|_{W'} \leq \|\nabla \varphi\|_{L^4(D)}^3. \quad (3.122)$$

On définit aussi sur  $\mathbb{L}^2(D) \times L^4(D)$  l'opérateur bilinéaire  $B$  par

$$\langle B(\xi, \varphi), \psi \rangle = \int_D \varphi \xi \cdot \nabla \psi \, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{L}^2(D), \varphi \in L^4(D), \psi \in W.$$

Alors  $B(\xi, \varphi) \in W'$  pour tout  $(\xi, \varphi) \in \mathbb{L}^2(D) \times L^4(D)$  et

$$\|B(\xi, \varphi)\|_{W'} \leq \|\varphi\|_{L^4(D)} \|\xi\|. \quad (3.123)$$

Notons que  $L^2(D) \subset W'$  avec

$$\|f\|_{W'} \leq (|D|^{1/4} \|f\|), \quad \forall f \in L^2(D). \quad (3.124)$$

où  $|D|$  est la mesure de Lebesgue du domaine  $D$ . Nous multiplions l'équation (3.68) par une fonction  $f \in \mathcal{C}^1([0, T])$  telle que  $f(T) = 0$ . Par intégration par parties on

obtient pour tout  $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{D_T} f'(t) \theta_n v_j \, dx dt - f(0) \int_D \theta_{0n}^\nu v_j \, dx \\
 & - \int_{D_T} f(t) \theta_n U_n \cdot \nabla v_j \, dx dt + \nu \int_{D_T} f(t) |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla v_j \, dx dt \\
 & = - \int_{D_T} f(t) \operatorname{div} Q_n v_j \, dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

On fixe  $j \geq 1$  et on fait tendre  $n$  vers l'infini. En utilisant les résultats de convergence précédents et la convergence forte  $\theta_{0n}^\nu \rightarrow \theta_0^\nu$  dans  $L^2(D)$ , on obtient pour tout  $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{D_T} f'(t) \theta_\nu v_j \, dx dt - f(0) \int_D \theta_0^\nu v_j \, dx \\
 & - \int_{D_T} f(t) \theta_\nu U_\nu \cdot \nabla v_j \, dx dt + \nu \int_{D_T} f(t) \Lambda_\nu \cdot \nabla v_j \, dx dt \\
 & = - \int_{D_T} f(t) \operatorname{div} Q_\nu v_j \, dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

Par conséquent, pour tout  $a \in W^{1,4}(D)$  et  $f \in \mathcal{C}^1([0, T])$  telle que  $f(T) = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
 & - \int_{D_T} f'(t) \theta_\nu a \, dx dt - f(0) \int_D \theta_0^\nu a \, dx - \int_{D_T} f(t) \theta_\nu U_\nu \cdot \nabla a \, dx dt \\
 & + \nu \int_{D_T} f(t) \Lambda_\nu \cdot \nabla a \, dx dt = - \int_{D_T} f(t) \operatorname{div} Q_\nu a \, dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

En particulier pour  $f \in \mathcal{D}(]0, T[)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_D \theta_\nu a \, dx - \int_D \theta_\nu U_\nu \cdot \nabla a \, dx + \nu \int_D \Lambda_\nu \cdot \nabla a \, dx \\
 & = - \int_D \operatorname{div} Q_\nu a \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[)
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

pour tout  $a \in W^{1,4}(D)$  et  $\Lambda_\nu$  est définie dans (3.95). Ainsi, on obtient dans  $\mathcal{D}'(D)$  et p.p.  $t \in (0, T)$

$$\partial_t \theta_\nu - B(U_\nu, \theta_\nu) + \nu \Lambda_\nu = -\operatorname{div} Q_\nu. \tag{3.129}$$

**Remaque 3** D'après l'équation (3.129), on a  $\partial_t \theta_\nu = B(U_\nu, \theta_\nu) - \nu \Lambda_\nu - \operatorname{div} Q_\nu$  et comme  $B(U_\nu, \theta_\nu) \in L^2(0, T; (W^{1,4}(D))')$ ,  $\Lambda_\nu \in L^{\frac{4}{3}}(D_T)$  et  $\operatorname{div} Q_\nu \in L^2(0, T; L^2(D))$ , alors on déduit que  $\partial_t \theta_\nu \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; (W^{1,4}(D))')$ .

De plus, comme  $\theta_\nu \in L^4(0, T; W^{1,4}(D))$  alors  $\theta_\nu \in \mathcal{C}([0, T]; L^4(D))$  ce qui donne un sens à la condition initiale  $\theta_\nu(0)$  et en multipliant l'équation (3.128) par la fonction  $f \in \mathcal{C}^1([0, T])$  telle que  $f(T) = 0$  et par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} - \int_{D_T} f'(t) \theta_\nu a \, dx dt - f(0) \int_D \theta_\nu(0) a \, dx - \int_{D_T} f(t) \theta_\nu U_\nu \cdot \nabla a \, dx dt \\ + \nu \int_{D_T} f(t) \Lambda_\nu \cdot \nabla a \, dx dt = - \int_{D_T} f(t) \operatorname{div} Q_\nu a \, dx dt \end{aligned} \quad (3.130)$$

pour tout  $a \in W^{1,4}(D)$ . En comparant (3.127) et (3.130), nous déduisons que

$$\theta_\nu(0) = \theta_0^\nu. \quad (3.131)$$

Ensuite, comme  $(\theta_n(T))_n$  est bornée dans  $L^4(D)$ , il existe au moins une sous-suite  $(\theta_{n_k}(T))_{n_k}$  qui converge faiblement dans  $L^4(D)$  et en procédant comme ci-dessus, en utilisant la fonction test  $f \in \mathcal{C}^1([0, T])$  avec  $f(0) = 0$ , nous prouvons que

**Lemme 8**

$$\theta_n(T) \rightharpoonup \theta_\nu(T) \text{ faiblement dans } L^4(D).$$

Maintenant, nous allons prouver le lemme suivant.

**Lemme 9** Soit  $\Lambda_\nu$  la limite faible de  $(|\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n)_n$  dans  $\mathbb{L}^{4/3}(D_T)$ . Nous avons

$$\Lambda_\nu = |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu.$$

*Preuve.* Nous utilisons la monotonie de l'opérateur  $A$  défini dans (3.121). Nous posons

$$A_n(\varphi) = \int_0^T \langle A(\theta_n) - A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^4(0, T; W^{1,4}(D)).$$

Nous multiplions l'équation (3.68) par  $a_j$  et nous additionnons ces équations pour  $1 \leq j \leq n$ , ensuite nous intégrons entre 0 et  $T$ , nous obtenons

$$\frac{1}{2} \|\theta_n(T)\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 ds = \frac{1}{2} \|\theta_{0n}^\nu\|^2 - \int_{D_T} \operatorname{div} Q_n \theta_n \, dx dt. \quad (3.132)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 A_n(\varphi) &= \int_0^T \langle A(\theta_n) - A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt \\
 &= \int_0^T \langle A(\theta_n), \theta_n - \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt \\
 &= \int_0^T \int_D |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla \theta_n dx - \int_{D_T} |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt \\
 &= \int_0^T \int_D |\nabla \theta_n|^4 dxdt - \int_{D_T} |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt \\
 &= \int_0^T \|\nabla \theta_n\|_{L^4(D)}^4 dt - \int_{D_T} |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt.
 \end{aligned}$$

Nous utilisons (3.132) nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned}
 A_n(\varphi) &= - \int_{D_T} |\nabla \theta_n|^2 \nabla \theta_n \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_n - \varphi \rangle dt \\
 &\quad + \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{2} (\|\theta_{0n}^\nu\|^2 - \|\theta_n(T)\|^2) dx - \int_{D_T} \operatorname{div} Q_n \theta_n dxdt \right].
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

Par conséquent grâce aux résultats de convergence précédents, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \limsup A_n(\varphi) &\leq - \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_\nu - \varphi \rangle dt \\
 &\quad + \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{2} (\|\theta_0^\nu\|^2 - \|\theta_\nu(T)\|^2) dx - \int_{D_T} \operatorname{div} Q_\nu \theta_\nu dxdt \right].
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Nous posons  $a = \theta_\nu$  dans l'équation (3.128) et nous intégrons par rapport au temps, nous trouvons

$$\frac{1}{2} (\|\theta_\nu(T)\|^2 - \|\theta_0^\nu\|^2) + \nu \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \theta_\nu dxdt = - \int_{D_T} \operatorname{div} Q_\nu \theta_\nu dxdt,$$

alors

$$\frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{2} (\|\theta_0^\nu\|^2 - \|\theta_\nu(T)\|^2) dx - \int_{D_T} \operatorname{div} Q_\nu \theta_\nu dxdt \right] = \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \theta_\nu dxdt.$$

Nous utilisons l'inégalité (3.134), nous déduisons que

$$\limsup A_n(\varphi) \leq \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot (\nabla \theta_\nu - \nabla \varphi) dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_\nu - \varphi \rangle dt. \tag{3.135}$$

Donc, pour tout  $\varphi \in L^4(0, T; W^{1,4}(D))$  nous avons

$$0 \leq \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot (\nabla \theta_\nu - \nabla \varphi) \, dxdt - \int_0^T \langle A(\varphi), \theta_\nu - \varphi \rangle \, dt. \quad (3.136)$$

On montre que cette inégalité détermine en fait  $\Lambda_\nu$  en utilisant un procédé caractéristique des opérateurs monotones. Soit  $\psi \in L^4(0, T; W^{1,4}(D))$  quelconque, en appliquant (3.136) à  $\varphi = \theta_\nu - \lambda\psi$  avec  $\lambda > 0$ , on obtient

$$0 \leq \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt - \int_0^T \langle A(\theta_\nu - \lambda\psi), \psi \rangle \, dt. \quad (3.137)$$

Nous faisons tendre  $\lambda$  vers 0 et comme  $A$  est hémicontinu, il vient

$$0 \leq \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt - \int_{D_T} |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt \quad (3.138)$$

pour tout  $\psi \in L^4(0, T; W^{1,4}(D))$ .

En appliquant encore une fois (3.136) à  $\varphi = \theta_\nu + \lambda\psi$  avec  $\lambda > 0$ , on obtient

$$\int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt - \int_{D_T} |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt \leq 0 \quad (3.139)$$

pour tout  $\psi \in L^4(0, T; W^{1,4}(D))$ , alors de (3.138) et (3.139) on conclut que

$$\forall \psi \in L^4(0, T; W^{1,4}(D)) \quad \int_{D_T} \Lambda_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt = \int_{D_T} |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \cdot \nabla \psi \, dxdt$$

alors  $\Lambda_\nu = |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu$ , d'où le résultat.

Nous suivons le même principe pour passer à la limite dans les autres équations du système, grâce aux résultats de convergence du lemme 7, on déduit que  $U_\nu, M_\nu$  et  $Q_\nu$  satisfont les formulations faibles données au théorème 8. Pour vérifier les conditions initiales correspondantes, on peut procéder comme pour  $\theta_\nu$  et afin de prouver les estimations d'énergie (3.79) et (3.92), nous multiplions (3.60) et (3.62) par une fonction test  $f \in \mathcal{D}(]0, T[)$  telle que  $f \geq 0$  et nous intégrons entre 0 et  $T$ . Ainsi, en utilisant le lemme 5, nous pouvons prendre la  $\liminf$  qui conduit aux résultats souhaités. Ainsi, on obtient une solution faible globale d'énergie finie du système  $(\mathcal{P}_\nu)$ .

## 3.4 Passage à la limite pour $\nu \rightarrow 0$

### 3.4.1 Problème auxiliaire

Pour  $\nu > 0$ , soient  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$  la solution du problème  $(\mathcal{P}_\nu)$  donnée par le théorème 8. Comme l'énergie du système ne permet pas de contrôler les gradients de la température, nous introduisons un problème auxiliaire satisfait par la fonction auxiliaire suivante

$$\zeta_\nu = \tau\gamma \operatorname{div} Q_\nu - \mathcal{K}(\theta_\nu) \quad (3.140)$$

et nous établissons quelque résultat de compacité pour la fonction auxiliaire  $\zeta_\nu$ . La convergence forte de  $\zeta_\nu$  est cruciale pour passer à la limite dans le terme non linéaire  $\mathcal{K}(\theta_\nu)$ . La fonction  $\zeta_\nu$  satisfait l'équation suivante

$$\partial_t \zeta_\nu - \gamma \Delta \zeta_\nu = -\gamma \operatorname{div} Q_\nu - \frac{\tau\gamma}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu). \quad (3.141)$$

En effet, en calculant la divergence de l'équation de flux de chaleur dans (3.59), on trouve

$$\tau(\partial_t \operatorname{div} Q_\nu - \gamma \Delta \operatorname{div} Q_\nu) = -\frac{\tau}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \operatorname{div} Q_\nu - \Delta \mathcal{K}(\theta_\nu)$$

c'est-à-dire

$$\tau \partial_t \operatorname{div} Q_\nu - \Delta(\tau\gamma \operatorname{div} Q_\nu - \mathcal{K}(\theta_\nu)) = -\frac{\tau}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \operatorname{div} Q_\nu.$$

On ajoute et on retranche  $\frac{1}{\gamma} \partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu)$

$$\tau \partial_t \operatorname{div} Q_\nu - \frac{1}{\gamma} \partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu) + \frac{1}{\gamma} \partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu) - \Delta \zeta_\nu = -\frac{\tau}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \operatorname{div} Q_\nu,$$

on multiplie par  $\gamma$

$$\tau\gamma \partial_t \operatorname{div} Q_\nu - \partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu) - \gamma \Delta \zeta_\nu = -\frac{\gamma\tau}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \gamma \operatorname{div} Q_\nu - \partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu)$$

et on obtient l'équation (3.141).

D'autre part, nous multiplions l'équation de la température dans (3.59) par  $\mathcal{K}'(\theta_\nu)$ , on obtient

$$\partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu) + U_\nu \cdot \nabla \mathcal{K}(\theta_\nu) - \nu \mathcal{K}'(\theta_\nu) \nabla \cdot (|\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu) = -\mathcal{K}'(\theta_\nu) \operatorname{div} Q_\nu. \quad (3.142)$$

En utilisant l'équation précédente (3.141) on déduit que

$$\partial_t \mathcal{K}(\theta_\nu) = -\partial_t \zeta_\nu + \gamma \Delta \zeta_\nu - \frac{\gamma \tau}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \gamma \operatorname{div} Q_\nu.$$

On remplace dans (3.142), on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_\nu - \gamma \Delta \zeta_\nu &= -\frac{\gamma \tau}{2} \operatorname{div}(\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu) - \gamma \operatorname{div} Q_\nu + U_\nu \cdot \nabla \mathcal{K}(\theta_\nu) \\ &\quad - \nu \mathcal{K}'(\theta_\nu) \nabla \cdot (|\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu) + \mathcal{K}'(\theta_\nu) \operatorname{div} Q_\nu. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{K}'(\theta_\nu) = \kappa + 3\alpha\theta_\nu^2$  et  $\nabla(3\alpha\theta_\nu^2) = 6\alpha\theta_\nu \nabla \theta_\nu$ , alors

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_\nu - \gamma \Delta \zeta_\nu &= (\kappa - \gamma) \operatorname{div} Q_\nu + \operatorname{div} [U_\nu \mathcal{K}(\theta_\nu) - \nu \kappa |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu - 3\alpha \nu \theta_\nu^2 |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \\ &\quad - \frac{\gamma \tau}{2} (\operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu)] + 3\alpha \theta_\nu^2 \operatorname{div} Q_\nu + 6\alpha \theta_\nu |\nabla \theta_\nu|^4. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $\zeta_\nu$  satisfait le problème auxiliaire suivant

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_\nu - \gamma \Delta \zeta_\nu &= g_\nu + \operatorname{div} G_\nu + \mu_\nu \text{ dans } D_T \\ \zeta_\nu(0) &= \zeta_0^\nu \text{ dans } D, \quad \zeta_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_T \end{aligned} \tag{3.143}$$

où  $\zeta_0^\nu = \tau \gamma \operatorname{div} Q_0 - \mathcal{K}(\theta_0^\nu)$  et

$$\begin{aligned} g_\nu &= (\kappa - \gamma) \operatorname{div} Q_\nu \\ G_\nu &= U_\nu \mathcal{K}(\theta_\nu) - \nu \kappa |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \\ &\quad - 3\alpha \nu \theta_\nu^2 |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu - \frac{\tau \gamma}{2} \operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu \\ \mu_\nu &= 6\nu \alpha \theta_\nu |\nabla \theta_\nu|^4 + 3\alpha \theta_\nu^2 \operatorname{div} Q_\nu. \end{aligned} \tag{3.144}$$

On note que  $\zeta_0^\nu$  converge fortement dans  $L^{\frac{4}{3}}(D)$  vers  $\zeta_0 = \tau \gamma \operatorname{div} Q_0 - \mathcal{K}(\theta_0)$  et nous avons le résultat suivant

**Lemme 10** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\nu$  telle que*

$$\begin{aligned} \|g_\nu\|_{L^2(0,T; L^2(D))} &\leq C \\ \|G_\nu\|_{L^{4/3}(0,T; \mathbb{L}^{12/11}(D))} &\leq C \\ \|\mu_\nu\|_{L^1(0,T; L^1(D))} &\leq C. \end{aligned} \tag{3.145}$$

*Preuve.* Nous utilisons les estimations d'énergie (3.60) et (3.62) satisfaites par  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$ . On déduit que  $g_\nu$  est bornée dans  $L^2(0, T; L^2(D))$ . Pour la deuxième estimation, nous écrivons  $G_\nu$  sous la forme suivante

$$G_\nu = G_{1,\nu} - G_{2,\nu} - G_{3,\nu} - G_{4,\nu}$$

avec

$$G_{1,\nu} = U_\nu \mathcal{K}(\theta_\nu), \quad G_{2,\nu} = \nu \kappa |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu,$$

$$G_{3,\nu} = 3\alpha \nu \theta_\nu^2 |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu, \quad G_{4,\nu} = \frac{\tau \gamma}{2} \operatorname{curl} U_\nu \times Q_\nu.$$

Grâce à l'injection continue de  $L^2(0, T; \mathcal{U})$  dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^6(D))$ ,  $U_\nu$  est bornée dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^6(D))$  par rapport à  $\nu$  et comme  $\mathcal{K}(\theta_\nu)$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^{\frac{4}{3}}(D))$ , nous déduisons que  $G_{1,\nu}$  est bornée dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^{12/11}(D))$ . Nous avons aussi  $G_{2,\nu}$  bornée dans  $L^{4/3}(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(D))$ .

Maintenant comme  $Q_\nu$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}^1(D))$ , alors en utilisant un résultat d'interpolation, nous obtenons que  $Q_\nu$  est bornée dans  $L^4(0, T; \mathbb{L}^3(D))$  et comme  $\operatorname{curl} U_\nu$  est bornée dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$ , nous concluons que  $G_{4,\nu}$  est bornée dans  $L^{4/3}(0, T; \mathbb{L}^{6/5}(D))$ .

Pour  $G_{3,\nu}$ , nous écrivons  $|G_{3,\nu}| = (3\alpha \nu) h_\nu k_\nu$  avec

$$h_\nu = |\theta_\nu|^{3/2} |\nabla \theta_\nu|^3 \in L^{4/3}(0, T; L^{4/3}(D))$$

$$k_\nu = |\theta_\nu|^{1/2} \in L^\infty(0, T; L^8(D)).$$

ainsi  $G_{3,\nu} \in L^{4/3}(0, T; L^{8/7}(D))$  et p.p.  $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|G_{3,\nu}(t)\|_{L^{8/7}(D)} &\leq 3\alpha \nu \|h_\nu(t)\|_{L^{4/3}(D)} \|k_\nu(t)\|_{L^8(D)} \\ &\leq 3\alpha \nu \left( \int_D |\theta_\nu|^2 |\nabla \theta_\nu|^4 dx \right)^{3/4} \|\theta_\nu\|_{L^4(D)}^{1/2}, \end{aligned}$$

alors

$$\|G_{3,\nu}\|_{L^{4/3}(0, T; L^{8/7}(D))} \leq 3\alpha \nu \left( \int_{D_T} |\theta_\nu|^2 |\nabla \theta_\nu|^4 dx dt \right)^{3/4} \|\theta_\nu\|_{L^\infty(0, T; L^4(D))}^{1/2}$$

et nous déduisons que  $G_{3,\nu}$  est uniformément bornée dans  $L^{4/3}(0, T; \mathbb{L}^{8/7}(D))$  par rapport à  $\nu$  ce qui implique que  $G_\nu$  est bornée dans  $L^{4/3}(0, T; \mathbb{L}^{12/11}(D))$ .

Pour montrer l'estimation de  $\mu_\nu$ , nous procédons comme suit. Nous écrivons  $\mu_\nu = \mu_{1,\nu} + \mu_{2,\nu}$  avec  $\mu_{1,\nu} = 6\nu\alpha\theta_\nu|\nabla\theta_\nu|^4$  and  $\mu_{2,\nu} = 3\alpha\theta_\nu^2\operatorname{div} Q_\nu$ . Pour le second terme,  $\operatorname{div} Q_\nu$  est bornée dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$  et  $|\theta_\nu|^2$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(D))$  ce qui nous permet de déduire que  $\mu_{2,\nu}$  est bornée dans  $L^2(0, T; L^1(D))$ . Par contre pour le premier terme, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{D_T} |\mu_{1,\nu}| \, dxdt &= 6\alpha\nu \int_{D_T} |\theta_\nu| |\nabla\theta_\nu|^4 \, dxdt \\ &\leq 6\alpha\nu \int_{\{|\theta_\nu| \leq 1\}} |\nabla\theta_\nu|^4 \, dxdt + 6\alpha\nu \int_{\{|\theta_\nu| > 1\}} |\theta_\nu|^2 |\nabla\theta_\nu|^4 \, dxdt \leq C. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Afin d'utiliser les résultats de régularité connus sur les solutions des équations paraboliques, nous décomposons la fonction  $\zeta_\nu$  en deux termes  $\zeta_{1,\nu}$  et  $\zeta_{2,\nu}$  tels que  $\zeta_\nu = \zeta_{1,\nu} + \zeta_{2,\nu}$  où  $\zeta_{1,\nu}$  satisfait le problème

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_{1,\nu} - \gamma \Delta \zeta_{1,\nu} &= g_\nu + \operatorname{div} G_\nu \text{ dans } D_T \\ \zeta_{1,\nu}(0) &= \zeta_0^\nu \text{ dans } D, \quad \zeta_{1,\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_T \end{aligned} \quad (3.147)$$

avec  $g_\nu$  et  $G_\nu$  qui sont bornées dans  $L^{12/11}(0, T; \mathbb{L}^{12/11}(D))$ ,  $\zeta_0^\nu$  est bornée dans  $L^{\frac{4}{3}}(D)$ .

La fonction  $\zeta_{2,\nu}$  vérifie le problème

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_{2,\nu} - \gamma \Delta \zeta_{2,\nu} &= \mu_\nu \text{ dans } D_T \\ \zeta_{2,\nu}(0) &= 0 \text{ dans } D, \quad \zeta_{2,\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_T \end{aligned} \quad (3.148)$$

avec  $\mu_\nu$  bornée dans  $L^1(0, T; L^1(D))$ . Nous avons le résultat

**Lemme 11** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\nu$  telle que*

$$\begin{aligned} \|\zeta_{1,\nu}\|_{L^{12/11}(0,T;W^{1,12/11}(D))} + \|\partial_t \zeta_{1,\nu}\|_{L^{12/11}(0,T;W^{-1,12/11}(D))} &\leq C \\ \|\zeta_{2,\nu}\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(D))} + \|\partial_t \zeta_{2,\nu}\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(D))+L^1(0,T;L^1(D))} &\leq C \end{aligned} \quad (3.149)$$

pour tout  $1 \leq p < \frac{5}{4}$ .

*Preuve.* Pour montrer l'estimation de  $\zeta_{1,\nu}$ , nous utilisons un résultat sur les estimations  $L^p - L^q$  des solutions d'équations parabolique (voir [13, 17]). Pour l'estimation de  $\zeta_{2,\nu}$ , nous utilisons un résultat de L. Boccardo et T. Gallouët donné dans [4], voir

aussi [7]. L'estimation de  $\partial_t \zeta_{1,\nu}$  est déduite à partir de l'équation (3.148).

Nous utilisons les estimations précédentes sur la fonction  $\zeta_\nu$  et le lemme de compacité d'Aubin (voir [34]) nous obtenons le résultat de convergence suivant

**Lemme 12** *Il existe des fonctions  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  telles que pour des sous-suites encore notées  $(\zeta_{1,\nu})$ ,  $(\zeta_{2,\nu})$  et  $(\zeta_\nu)$ , nous avons*

$$\begin{aligned} \zeta_{1,\nu} &\rightarrow \zeta_1 \text{ fortement dans } L^{12/11}(0, T; L^{q_1}(D)), \quad 1 \leq q_1 < (12/11)^* = 12/7 \\ \zeta_{2,\nu} &\rightarrow \zeta_2 \text{ fortement dans } L^p(0, T; L^{q_2}(D)), \quad 1 \leq q_2 < p^* = \frac{3p}{3-p}, \quad 1 \leq p < 5/4 \\ \zeta_\nu &\rightarrow \zeta \text{ fortement dans } L^{12/11}(0, T; L^{q_1}(D)), \quad 1 \leq q_1 < 12/7, \end{aligned} \tag{3.150}$$

avec  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ .

### 3.4.2 Passage à la limite dans l'équation de la température

Soient  $\nu > 0$  et  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$  solutions faible de problème  $(\mathcal{P}_\nu)$ . Grâce à l'estimation (3.60) nous déduisons le résultat de convergence suivant

**Lemme 13**

$$\begin{aligned} \theta_\nu &\rightharpoonup \theta \text{ faiblement } \text{--}\star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^4(D)) \\ \nu |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu &\rightarrow 0 \text{ fortement dans } \mathbb{L}^{4/3}(D_T). \end{aligned} \tag{3.151}$$

Maintenant, supposons momentanément que

$$\begin{aligned} U_\nu &\rightarrow U \text{ fortement dans } \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{U}_0), \\ \operatorname{div} Q_\nu &\rightharpoonup \operatorname{div} Q \text{ faiblement dans } L^2(D_T), \end{aligned} \tag{3.152}$$

ainsi nous pouvons passer à la limite quand  $\nu \rightarrow 0$  dans l'équation de  $\theta_\nu$  et on obtient le résultat suivant

**Lemme 14**  $\theta \in L^\infty(0, T; L^4(D))$  est solution faible de l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta &= -\operatorname{div} Q \quad \text{dans } D_T \\ \theta(0) &= \theta_0 \quad \text{dans } D. \end{aligned} \tag{3.153}$$

De plus,  $\theta \in C([0, T]; L^q(D))$  pour tout  $q < 4$  et  $\theta \in C([0, T]; L^4(D))$  weak).

Nous rappelons que  $\theta \in L^\infty(0, T; L^4(D))$  est une solution faible de (3.153) si

$$\int_{D_T} \theta(\partial_t a + U \cdot \nabla a) dxdt = \int_{D_T} \operatorname{div} Q a dxdt - \int_D \theta_0 a(0) dx \quad (3.154)$$

pour tout  $a \in \mathcal{D}([0, T[ \times \bar{D}])$  et l'équation (3.153) est satisfaite dans  $\mathcal{D}'(D_T)$ . Le résultat de régularité donnée dans le lemme 14 est bien connue dans la théorie de l'équation de transport (voir annexe A.2), qui donne un sens à la condition initiale dans (3.153). En outre, nous avons

**Lemme 15**

$$\theta_\nu(T) \rightharpoonup \theta(T) \text{ faiblement dans } L^2(D).$$

*Preuve.*  $\theta(T)$  est bien défini dans  $L^2(D)$ . Soit  $v$  la limite faible de  $\theta_\nu(T)$  dans  $L^4(D)$  et  $L^2(D)$ . Nous utilisons des fonctions test  $a \in \mathcal{D}(D)$  dans l'équation (3.64) de  $\theta_\nu$ , nous multiplions par  $f \in \mathcal{D}([0, T])$  et par intégration entre 0 et  $T$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} f(T) \int_D \theta_\nu(T) a dx &= \int_{D_T} f(t) \theta_\nu U_\nu \cdot \nabla a dxdt \\ &\quad - \nu \int_{D_T} f(t) |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \cdot \nabla a dxdt - \int_{D_T} f(t) \operatorname{div} Q_\nu a dxdt. \end{aligned}$$

En passant ainsi à la limite, nous obtenons

$$f(T) \int_D v a dx = \int_{D_T} f(t) \theta U \cdot \nabla a dxdt - \int_{D_T} f(t) \operatorname{div} Q a dxdt.$$

En utilisant l'équation (3.153) de  $\theta$ , nous déduisons que pour tout  $a \in \mathcal{D}(D)$ ,  $f \in \mathcal{D}([0, T])$

$$f(T) \int_D v a dx = f(T) \int_D \theta(T) a dx$$

d'où  $v = \theta(T)$ .

Afin d'identifier la limite faible du terme non linéaire  $\mathcal{K}(\theta_\nu)$ , nous réécrivons l'équation de  $\theta_\nu$  (3.59) en utilisant  $\zeta_\nu$

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_\nu + U_\nu \cdot \nabla \theta_\nu - \nu \nabla \cdot (|\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu) + \frac{1}{\tau \gamma} \mathcal{K}(\theta_\nu) &= -\frac{1}{\tau \gamma} \zeta_\nu \text{ dans } D_T \\ \theta_\nu(0) = \theta_0^\nu \text{ dans } D, \quad \nu |\nabla \theta_\nu|^2 \nabla \theta_\nu \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_T. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Sous les hypothèses (3.152), on a

**Lemme 16** Soit  $\chi$  la limite faible  $-\star$  de  $\mathcal{K}(\theta_\nu)$  dans  $L^\infty(0, T; L^{4/3}(D))$ . On a

$$\chi = \mathcal{K}(\theta).$$

*Preuve.* On utilise la monotonie de la fonction  $\mathcal{K}$  et la convergence forte dans  $L^1(0, T; L^{4/3}(D))$  de  $\zeta_\nu$  donnée dans le lemme 12. On pose

$$a_\nu(\varphi) = \int_{D_T} (\mathcal{K}(\theta_\nu) - \mathcal{K}(\varphi))(\theta_\nu - \varphi) \, dxdt \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^\infty(0, T; L^4(D)).$$

Nous multiplions l'équation (3.155) par  $\theta_\nu$  et par intégration sur  $D_T$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau\gamma} \int_{D_T} \mathcal{K}(\theta_\nu)\theta_\nu \, dxdt &= -\frac{1}{\tau\gamma} \int_{D_T} \zeta_\nu\theta_\nu \, dxdt - \nu \int_{D_T} |\nabla\theta_\nu|^4 \, dxdt \\ &\quad -\frac{1}{2} \int_D \theta_\nu^2(T)dx + \frac{1}{2} \int_D (\theta_0^\nu)^2 \, dx. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a_\nu(\varphi) &= - \int_{D_T} \mathcal{K}(\theta_\nu)\varphi \, dxdt - \int_{D_T} \mathcal{K}(\varphi)(\theta_\nu - \varphi) \, dxdt - \int_{D_T} \zeta_\nu\theta_\nu \, dxdt \\ &\quad -\tau\gamma\nu \int_{D_T} |\nabla\theta_\nu|^4 \, dxdt - \frac{\tau\gamma}{2} \int_D \theta_\nu^2(T)dx + \frac{\tau\gamma}{2} \int_D (\theta_0^\nu)^2 \, dx. \end{aligned}$$

D'après le lemme 15, nous avons

$$\liminf \int_D |\theta_\nu(T)|^2 \, dx \geq \int_D |\theta(T)|^2 \, dx$$

donc en utilisant l'hypothèse (3.58), nous obtenons

$$\begin{aligned} \limsup a_\nu(\varphi) &\leq - \int_{D_T} \chi\varphi \, dxdt - \int_{D_T} \mathcal{K}(\varphi)(\theta - \varphi) \, dxdt - \int_{D_T} \zeta\theta \, dxdt \\ &\quad -\frac{\tau\gamma}{2} \int_D \theta^2(T)dx + \frac{\tau\gamma}{2} \int_D \theta_0^2 \, dx \end{aligned}$$

pour tout  $\varphi$  dans  $L^\infty(0, T; L^4(D))$ . D'autre part, en prenant la limite dans la formulation faible du problème (3.155), nous déduisons que  $\theta$  satisfait l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t\theta + U \cdot \nabla\theta + \frac{1}{\tau\gamma}\chi &= -\frac{1}{\tau\gamma}\zeta \text{ dans } D_T \\ \theta(0) &= \theta_0 \text{ dans } D. \end{aligned} \tag{3.156}$$

Nous multiplions cette équation par  $\theta$ , nous obtenons

$$- \int_{D_T} \zeta \theta \, dxdt - \frac{\tau\gamma}{2} \int_D \theta^2(T) dx + \frac{\tau\gamma}{2} \int_D \theta_0^2 \, dx = \int_{D_T} \chi \theta \, dxdt.$$

donc

$$\limsup a_\nu(\varphi) \leq \int_{D_T} \chi(\theta - \varphi) \, dxdt - \int_{D_T} \mathcal{K}(\varphi)(\theta - \varphi) \, dxdt.$$

On déduit que

$$\int_{D_T} (\chi - \mathcal{K}(\varphi))(\theta - \varphi) \, dxdt \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^\infty(0, T; L^4(D)). \quad (3.157)$$

En prenant dans (3.157)  $\varphi = \theta - \lambda\psi$  avec  $\lambda > 0, \psi \in L^\infty(0, T; L^4(D))$ , on trouve

$$\int_{D_T} (\chi - \mathcal{K}(\theta - \lambda\psi))\psi \, dxdt \geq 0, \quad \forall \psi \in L^\infty(0, T; L^4(D)), \forall \lambda > 0 \quad (3.158)$$

et faisant tendre  $\lambda$  vers 0, on trouve

$$\int_{D_T} (\chi - \mathcal{K}(\theta))\psi \, dxdt \geq 0, \quad \forall \psi \in L^\infty(0, T; L^4(D)) \quad (3.159)$$

et on conclut que  $\chi = \mathcal{K}(\theta)$ .

Pour conclure la preuve du théorème 2, nous passons à la limite dans les équations du problème  $(\mathcal{P}_\nu)$  lorsque  $\nu$  tend vers 0, et pour cela nous établissons quelques estimations uniformes sur la solution  $(U_\nu, M_\nu, H_\nu, \theta_\nu, Q_\nu)$  donnée dans le théorème 8. Grâce aux estimations (3.60) et (3.62) nous déduisons les estimations uniformes suivantes

**Lemme 17**

- $(U_\nu)$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U})$
- $(M_\nu)$  et  $(H_\nu)$  sont uniformément bornées dans  $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$
- $(M_\nu \times H_\nu)$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$
- $(Q_\nu)$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D))$

Pour traiter les termes non linéaires, nous établissons des estimations sur les dérivées en temps  $(\partial_t U_\nu), (\partial_t M_\nu)$  et  $(\partial_t Q_\nu)$ . Pour  $(\partial_t U_\nu)$ , on déduit de la formulation faible de l'équation de  $U_\nu$  que dans  $\mathcal{D}'(D)$ , p.p.  $t \in (0, T)$

$$\partial_t U_\nu = -\mathcal{L}_\nu \quad (3.160)$$

où la forme linéaire  $\mathcal{L}_\nu$  est définie sur  $\mathcal{U}$  par

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\nu, \varphi \rangle &= \int_D (U_\nu \cdot \nabla) U_\nu \cdot \varphi \, dx + \eta \int_D \nabla U_\nu \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_D \rho(\theta_\nu) g \cdot \varphi \, dx \\ &\quad - \mu_0 \int_D (M_\nu \cdot \nabla) H_\nu \cdot \varphi \, dx - \frac{\mu_0}{2} \int_D M_\nu \times H_\nu \cdot \operatorname{curl} \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Donc  $\mathcal{L}_\nu \in \mathcal{U}'$  p.p.  $t \in (0, T)$  et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\nu\|_{\mathcal{U}'} &\leq C(\|U_\nu\|_{H^1(D)}^2 + \|U_\nu\|_{H^1(D)} + \|\rho(\theta_\nu)\| + \\ &\quad \|M_\nu\|_{H^1(D)} \|H_\nu\|_{H^1(D)} + \|M_\nu \times H_\nu\|) \leq C \end{aligned}$$

grâce aux estimations du lemme 17. On déduit que  $\partial_t U_\nu$  est uniformément bornée dans  $L^1(0, T; \mathcal{U}')$  et on refait le même travail pour  $\partial_t M_\nu$  et  $\partial_t Q_\nu$ , on obtient

**Lemme 18**  $(\partial_t U_\nu), (\partial_t M_\nu)$  et  $(\partial_t Q_\nu)$  sont uniformément bornées par rapport à  $\nu$  dans  $L^1(0, T; \mathcal{U}')$ ,  $L^1(0, T; (\mathbb{H}_t^1(D))')$  et  $L^1(0, T; (\mathbb{H}_n^1(D))')$  respectivement.

Ainsi on obtient le résultat de convergence suivant

**Lemme 19** Il existe des sous-suites encore notée  $(U_\nu), (M_\nu), (H_\nu), (Q_\nu)$  telles que lorsque  $\nu \rightarrow 0$

$$U_\nu \rightharpoonup U \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathcal{U})$$

$$M_\nu \rightharpoonup M \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$$

$$H_\nu \rightharpoonup H \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$$

$$Q_\nu \rightharpoonup Q \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \text{ et faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D))$$

de plus

$$(U_\nu, M_\nu, H_\nu, Q_\nu) \rightarrow (U, M, H, Q) \text{ fortement dans } (\mathbb{L}^2(D_T))^4 \quad (3.162)$$

où  $H = \mathcal{H}(M, F)$ .

Notez que grâce au lemme 19, les hypothèses (3.152) sont satisfaites et conduisent à la convergence de l'équation de la température.

En procédant comme pour la preuve du théorème 8, nous vérifions que  $(U, M, H, \theta, Q)$

est une solution faible d'énergie finie du problème  $(\mathcal{P})$  ce qui conduit à la conclusion de la première partie du théorème 7.

Pour la régularité  $L^p - L^q$  de la température  $\theta$ , il suffit de montrer le résultat suivant

**Lemme 20** *Sous les hypothèses (3.54), la température régularisée  $\theta_\nu$  est uniformément bornée dans  $L^{36/11}(0, T; L^{36/7}(D))$  par rapport à  $\nu$ .*

*Preuve.* Grâce à l'estimation (3.149) et en utilisant l'injection de Sobolev  $W^{1, 12/11}(D) \subset L^{12/7}(D)$ ,  $(\zeta_\nu)$  est uniformément bornée dans  $L^{12/11}(0, T; L^{12/7}(D))$  et à partir de la relation  $\alpha\theta_\nu^3 = -\zeta_\nu + \tau\gamma\operatorname{div} Q_\nu - \kappa\theta_\nu$ , on déduit que  $(\theta_\nu)$  est uniformément bornée dans  $L^{36/11}(0, T; L^{36/7}(D))$ .

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié un modèle mathématique de transfert de chaleur dans un fluide magnétique soumis à un champ magnétique extérieur. La nouveauté dans ce modèle est l'utilisation de la loi Maxwell-Cattaneo non linéaire couplant la température  $\theta$  et le flux de chaleur  $Q$  pour le transfert de chaleur dans le fluide.

Le système étudié comporte plusieurs inconnues : la vitesse et la pression du fluide décrites par les équations de Navier-Stokes incompressible, la magnétisation décrite par l'équation de Bloch-Torrey, le champ magnétique vérifiant l'équation de la magnétostatique et enfin la température et le flux de chaleur dont les évolutions sont décrites par le système de Maxwell-Cattaneo.

Dans ce travail, nous avons réussi à établir un résultat d'existence globale en temps de solutions faibles d'énergie finie pour ce système, en utilisant les méthodes de régularisation, d'approximation, de monotonie et de compacité. Le point crucial et original est l'étude du système de Maxwell-Cattaneo. Nous avons régularisé le système Maxwell-Cattaneo en introduisant un terme elliptique dépendant d'un petit paramètre dans l'équation de transport satisfaite par la température. Ce dernier problème est résolu par la méthode de Faedo-Galerkin, mais malheureusement l'énergie du système ne permet pas de contrôler les gradients de la température. Afin d'établir la compacité nécessaire pour traiter les termes non linéaires nous avons introduit un système auxiliaire vérifié par une fonction auxiliaire dont les propriétés de régularité ont permis d'obtenir non seulement la compacité de la température, mais aussi de montrer un effet régularisant sur la température.

Ce travail de thèse m'a permis de développer des compétences scientifiques, d'apprendre et de maîtriser de nombreux outils et méthodes d'analyse non linéaire. Il m'a permis aussi d'apprendre à appréhender des systèmes complexes d'équations aux dérivées partielles.

# Annexe A

## Equation de transport

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné régulier et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure au bord de  $D$ . Nous présentons ici quelques résultats sur le problème de Cauchy associée à l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

pour un champ de vitesse  $v$  donné à divergence nulle et tangent au bord ( $v \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ ).

### Solutions fortes

Sous les hypothèses de régularité sur le champ de vecteurs  $v$ , le système (A.1) peut être résolu aisément par la méthode des caractéristiques. Celle-ci revient à constater que la solution de (A.1), si elle existe et si elle est suffisamment régulière, vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre le long des trajectoires  $Z$  du flot associé à  $v$  qui sont les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} Z(s, t, x) = v(s, Z(s, t, x)), \\ Z(t, t, x) = x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ces trajectoires sont appelées les courbes caractéristiques de l'équation.  $Z(s, t, x)$  représente la position à l'instant  $s$  d'une particule fluide située au point  $x$  à l'instant  $t$ . On a, alors le résultat suivant (voir [9]).

**Proposition 3** Si  $\theta_0$  est régulière, l'unique solution régulière de (A.1) est donnée par

$$\theta(t, x) = \theta_0(Z(0, t, x)).$$

**Remaque 4** Dans le cas d'une équation de transport avec un second membre  $f(t, x)$  régulier, la solution est

$$\theta(t, x) = \theta_0(Z(0, t, x)) + \int_0^t f(s, Z(s, t, x)) ds.$$

## Solutions faibles

**Définition 3** Soient  $\theta_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , on dit que  $\theta \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  est solution faible si

$$\int_0^T \int_\Omega \theta(\partial_t a + v \cdot \nabla a) dx dt = - \int_\Omega \theta_0 a(0) dx \quad (\text{A.3})$$

pour tout  $a \in \mathcal{D}([0, T[ \times \bar{\Omega})$ .

**Proposition 4** Soient  $\theta_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $v$  un champ Lipschitzien tel que  $\operatorname{div} v = 0$  dans  $\Omega$  et  $v \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . La fonction

$$\theta(t, x) = \theta_0(Z(0, t, x)),$$

est une solution faible de l'équation de transport.

**Théorème 9** Soient  $\theta_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^1(0, T; (L^{p'}(\Omega))^N)$  (avec  $p' = \frac{p}{p-1}$ ),  $\operatorname{div} v = 0$  dans  $\Omega$  et  $v \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Il existe au moins une solution faible de l'équation de transport.

Dans le cas d'un champ à divergence nulle et tangent au bord et  $v \in L^1(0, T; (W^{1,p'}(\Omega))^N)$ , Di Perna et Lions [12] ont montré l'existence et l'unicité des solutions faibles dans  $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$  du problème de Cauchy (A.1) avec donnée initiale  $\theta_0$  dans  $L^p(\Omega)$ , pour tout  $p \in [1, +\infty]$ . Ils ont établi que toutes les solutions faibles de cette équation sont des solutions renormalisées. Cela signifie que pour toute fonction régulière  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne croît pas trop vite à l'infini, la fonction  $\beta(\theta)$  est solution de l'équation de transport

$$\partial_t \beta(\theta) + v \cdot \nabla \beta(\theta) = \beta'(\theta)(\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta) = 0,$$

avec la donnée initiale  $\beta(\theta_0)$ . Cette propriété, permet en particulier de démontrer l'unicité des solutions faibles, des estimations du type principe du maximum et également la continuité en temps des solutions de (A.1) à valeurs dans  $L^p(\Omega)$ .

**Théorème 10** *Soient  $\theta_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^1(0, T; (W^{1,p'}(\Omega))^n)$ , tel que*

$$\operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } v \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

*Le problème (A.1) admet une unique solution faible  $\theta \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ . De plus  $\theta \in \mathcal{C}([0, T]; L^q(\Omega))$ ,  $\forall q < p$  et  $\theta \in \mathcal{C}([0, T]; L^p(\Omega))$  weak.*

Des résultats similaires sont obtenus pour l'équation de transport non homogène avec un second membre  $f \in L^1(0, T; L^p(\Omega))$  pour tout  $p \in ]1, +\infty]$ .

## Annexe B

# Régularité $L^p - L^q$ de la solution d'une équation parabolique

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $T > 0$ . Nous donnons ici un résultat de régularité des solutions du système parabolique suivant sur un domaine borné avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}u = -\operatorname{div} g + f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où  $\mathcal{A}u = -\Delta u$ . On note par

$$\mathcal{W} = \left\{ u \in L^q(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)); \partial_t u \in L^q(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \right\}$$

**Théorème 11** *Soient  $p, q \in ]1, \infty[$  et  $\Omega$  un domaine borné. Pour tout  $f, g \in L^q(0, T; L^p(\Omega))$  il existe une unique solution  $u \in \mathcal{W}$  du problème (B.1). De plus il existe une constante  $C > 0$  tel que*

$$\|u\|_{L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^q(0,T;W^{-1,p}(\Omega))} \leq C(\|f\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} + \|g\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))}).$$

H. Dong et D. Kim [13] ont généralisé ces résultats aux systèmes parabolique dans lesquels l'opérateur est défini par  $\mathcal{A}u = -D_\alpha(A^{\alpha\beta}D_\beta u + A^\alpha) + B^\alpha D_\alpha u + Cu$  avec des coefficients  $A^{\alpha\beta}$  vérifiant des hypothèses assez faibles.

Maintenant, nous allons donner un résultat dû à Boccardo et Gallouët [7, 8] sur l'existence et la régularité des solutions de l'équation parabolique non linéaire

suivante

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}(u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega) \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathcal{A}$  est l'opérateur p-Laplacien

$$\mathcal{A}(u) = -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du), \quad \text{avec } p > 1 + \frac{N}{N+1} \quad (\text{B.3})$$

et donc en particulier pour  $p = 2$  dans le cas  $N = 3$ .

Dans [7] Boccardo et Gallouët ont établi un résultat d'existence des solutions de l'équations parabolique (B.2). Ensuite, L. Boccardo, T. Gallouët et J. L. Vazquez dans [8] ont étudié la régularité des solutions de problème (B.2) et ils ont établi le résultat suivant

**Théorème 12** *Soit  $\mathcal{A}$  l'opérateur défini par (B.3). Supposons que*

$$f \in L^m((0, T) \times \Omega), \quad (\text{B.4})$$

où  $1 \leq m < \frac{pN}{pN - N + p}$ , alors il existe au moins une solution  $u \in L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$  de (B.2), pour tout  $q < \left(p - \frac{N}{m + N}\right) m$ .

# Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York-London.
- [2] F. Aggoune, K. Hamdache and D. Hamroun, *Global weak solutions to magnetic fluid flows with nonlinear Maxwell-Cattaneo heat transfer law*, Journal of Math. Fluid Mech. Vol 17, Issue 1, pp 103-127 (2015).
- [3] Y. Amirat, K. Hamdache, *Global weak solutions to a ferrofluidflow model*, Math. Methods Appl. Sci. 31(2), 123-151 (2007).
- [4] Y. Amirat, K. Hamdache, *Heat transfer in incompressible magnetic fluid*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics V. 14, N. 2, 217-247 (2012).
- [5] Y. Amirat, K. Hamdache and F. Murat *Global weak solutions to the equations of motion for magnetic fluids*, J.Math.Fluid Mech, Vol. 10(8),326-351, 2008.
- [6] I. Bihari, *A generalization of a lemma of Bellman and its application to the uniqueness problems of differential equations*, Acta Mathematica Hungarica. Volume 7, Numéro 1, p-p 81-94 (1956).
- [7] L. Boccardo, T. Gallouët , *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measures data*, Functionnal Analysis, 87 , 149-169 (1989).
- [8] L. Boccardo, T. Gallouët et J. L. Vazquez *Some regularity results for some non linear parabolic equations in  $L^1$* , Renb. sem. Mat. univ. Pol. Torino, Fascicolo Speciale (1989), 69 74.
- [9] F. Boyer, *A propos de l'équation de transport. Problèmes de traces. Régularité des solutions*, Conférence Grenoble, 10 février 2005.
- [10] M.C. Cattaneo *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*, Note CRAS, Série I, 247, 431-433 (1958).
- [11] R. Dautary, J.L Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tome 2, Masson (1985).

- [12] R.J. Di Perna, P.L. Lions *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math 511-547 (1989).
- [13] H. Dong and D. Kim,  $L_p$  solvability of divergence type parabolic and elliptic systems with partially BMO coefficients, Calc. Var. 40 : 357-389 (2011).
- [14] J. Droniou, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles*, [http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf](http://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf).
- [15] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and it Applications.
- [16] E. Feireisl, J. Málek, *On the Navier-Stokes equations with temperature-dependant transport coefficients*, Differential Equations and Nonlinear Mechanics, 90616, 1-14 (2006).
- [17] E. Feireisl, A. Novotný *Singular limits in theormodynamics of viscous fluids*, Advances in Mathematical Fluids Mechanics. Birkhauser.
- [18] R.A Guyer, J.A Krumhansl *Solution of the linearized phonon Boltzman equation*, Physical Review, 148(2), 766-778 (1996).
- [19] C. Lin, L.E. Payne, *Continuous dependence on spatial geometry for the generalized Maxwell-Cattaneou system* , Math. Meth. in the Appl. Sciences, 24, 1113-1124 (2001).
- [20] C. Lin, L.E. Payne, *Continuous dependence of heat flux on spatial geometry for generalized Maxwell-Cattaneo system*, Z. angew. Math. Phys. Doi 10.1007/s00033-004-1136-1 (2004).
- [21] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod (1969).
- [22] J.L. Neuringer, R.E. Rosensweig *Ferrohydrodynamics*, : Phys. Fluids 7, 1927 (1964).
- [23] S. Odenbach, ed., *Colloidal Magnetic Fluids : Basics, Development and Application of Ferrofluids*, , Lect. Notes Phys. 763 (Springer, Berlin Heidelberg 2009).
- [24] S. Odenbach, ed., *Ferrofluids : Magnetically Controllable Fluids and Their Applications*, vol. 594 of Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Heidelberg, 2002).

- [25] S. Papell, *Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particules*, Brevet US 3.215.572 (1963).
- [26] L.E. Payne, P.W. Schaefer, J.C. Song, *Improved bounds for some nonstandard problems in generalized heat conduction*, J. Math. anal. Appl. 298, 325-340 (2004).
- [27] L.E. Payne, J.C. Song, *Improved spatial decay bounds in generalized heat conduction*, Z. angew. Math. Phys. 56, 805-820 (2005).
- [28] S. Pranesh, R.V. Kiran, *Study of Rayleigh-Bénard magneto convection micro polar fluid with Maxwell-Cattaneo law*, Applied mathematics, 3, 417-424 (2012).
- [29] S. Pranesh, A. K. Narayanappa, *effect of non-uniform concentration gradient on the Onset of double-diffusive convection in micro polar fluid*, Applied mathematics, 470- 480 (2010).
- [30] C. Rinaldi, M. Zahn, *Effects of spin viscosity on ferrofluids flow profiles in alternating and rotating magnetic fields*, Phys. Fluids 14 (8) (2002) 2847-2870.
- [31] R.E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, Inc., 1997.
- [32] M.I. Shliomis, *Effective viscosity of magnetic suspension*, Sov. Phys. JETP 34 (1972) 1291-1294.
- [33] M.I. Shliomis, *Ferrohydrodynamics : Retrospective and Issues*, in "*Ferrofluids : Magnetically controllable fluids and their applications*", ed by S. Odenbache (Ed.), Lecture Notes in Phys., vol. 594, Springer- Verlag, Heidelberg, 2002, pp. 85-111.
- [34] J. Simon, *Compactness sets in the space  $L^p(0, T; B)$* , Ann. Math. Pura. Appl. IV, Vol 146 (1985), pp. 65-96.
- [35] J. Simon, *Non-homogeneous viscous incompressible fluids : existence of velocity, density and pressure*, S.I.A.M. J. Math. Anal., 21, no 5 (1990), 1093-1117.
- [36] L. Tartar, *Topics in nonlinear analysis*, Publ. Math. Orsay, France, 1978.
- [37] R. Temam, *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*, North Holland (1979).
- [38] M.P. Vernotte *Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur*, C.R Acad. Sci. Paris 246, 3154 (1958).