

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENNE

FACULTE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

THESE

Présentée Pour l'obtention du grade de MAGISTER

En : **MATHEMATIQUES.**

Spécialité : **ANALYSE : SYSTEMES DYNAMIQUES (EDO).**

Par: **IGHIL-AMEUR Mounira.**

THEME

LA SOMME D'UNE FONCTION

Soutenue Publiquement le 05 février 2003, devant le jury :

M ^r . M – AIDER	Maître de conférences à l'USTHB	Président
M ^r . R – BEBBOUCHI	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
M ^r . A-KESSI	Professeur à l'USTHB	Examineur
M ^r . M-ABID	Maître de conférences à l'USTHB	Examineur

Moi je vous dis que la vie est certes ténèbres, si
elle n'est accompagnée d'élan,
Que tout élan est aveugle, s'il n'est accompagné
de connaissance ,
Que toute connaissance est vaine, si elle
n'est accompagnée de travail,
Que tout travail est vide s'il n'est
accompagnée d'amour ;
Et que lorsque vous travaillez avec
amour, vous vous liez à vous mêmes, aux autres,
et à Dieu ».

Gibran

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

ρ A la mémoire de ma chère et regrettée sœur « Hanane » dont le souvenir reste gravé dans ma pensée.

ρ A mes parents qui ont montré un soutien sans faille par leur amour et leur dévouement.

ρ A monsieur Benferah que je ne saurai jamais remercier assez.

ρ A mes frères et sœurs .

ρ Et à ceux et celles qui me portent dans leur cœur.

REMERCIEMENTS

Ma profonde gratitude s'adresse à monsieur Rachid BEBBOUCHI, professeur à l'USTHB, pour son choix judicieux du sujet qu'il m'a proposé, pour sa disponibilité permanente à me venir en aide et pour ses orientations tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie : -

-
-
-
-

d'avoir bien voulu accepter d'être membres de jury et de l'honorer de leur présence .

Je tiens également à exprimer de vive voix toute ma reconnaissance à l'égard de tous mes enseignants, qui par leur contributions des années durant, m'ont aidé par leur dévouement et leur sérieux dans le travail à arriver à réaliser ce mémoire que, il est vrai, sans eux, je n'aurai jamais pu faire.

Enfin mes vives salutations s'adressent à tous ceux et celles qui m'ont accordé leur soutien de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

SOMMAIRE

CHAPITRE 0 :1

INTRODUCTION. 1

NOTATIONS. 3

CHAPITRE I : LA SOMME D'UNE FONCTION..... 4

I-1 INTRODUCTION. 4

I-2 DEFINITIONS. 5

THEOREME DE ROBINSON. 6

I-3 SOMMATION DES POINTILLES. 6

REMARQUES. 9

I-4 COMPARAISON DES SOMMES..... 12

EXEMPLE. 13

I-5 PROLONGEMENT D'UNE SOMME. 14

I-6 LA SOMMATION PAR ITERATION. 18

CHAPITRE II : LES FONCTIONS PERIODIQUES DE PERIODE INFINIMENT PETITE.20

II-1 INTRODUCTION. 20

II-2 DESCRIPTION MACROSCOPIQUE. 22

II-3 DESCRIPTION MICROSCOPIQUE. 24

II-4 UNICITE POUR LES EQUATIONS AUX DIFFERENCES. 27

CHAPITRE III : PRINCIPE DE RETRACTION POUR LES
EQUATIONS AUX DIFFERENCES. 30

III-1 INTRODUCTION. 30

III-2 PRELIMINAIRES. 31

III-3 THEOREME. 33

III-4 RESULTAT POUR LES EQUATIONS
DIFFERENTIELLES. 37

CONCLUSION.

REFERENCES.

CHAPITRE 0**INTRODUCTION**

L'étude des systèmes dynamiques discrets est basée en particulier sur l'étude des équations aux différences.

On peut considérer ces équations schématiquement sous deux aspects différents : l'aspect schéma numérique et l'aspect équation fonctionnelle, qui Correspondent à deux domaines généralement bien séparés des mathématiques.

On s'intéressera aux équations aux différences obtenues par une discrétisation par la méthode d'EULER de l'équation différentielle :

$$y' = f(x,y) . \quad \dots(1).$$

Qui conduit à l'équation aux différences :

$$\Delta_\varepsilon y(x) = f(x,y). \quad \dots(2).$$

Où Δ_ε est l'opérateur défini par :

$$\Delta_\varepsilon y(x) = \frac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon} .$$

(ε est un nombre réel strictement positif).

Dans la littérature sur le sujet on se ramène en général par une homothétie à $\varepsilon = 1$.

L'analyse non standard permet en considérant ε infiniment petit de réunir l'aspect schéma numérique et l'aspect équation fonctionnelle, et on peut se poser des questions qui relèvent en même temps du domaine fonctionnel et du domaine numérique ; par exemple :

« existe-t-il une solution de (2) qui soit à la fois S-continue et analytique et dont l'ombre est solution de l'équation (1) ? ».

Nous allons définir dans le « chapitre I » la notion de « SOMME D'UNE FONCTION » en distinguant parmi toutes les solutions de :

$$\Delta_\varepsilon y(x) = f(x). \quad (\text{avec quelques conditions sur } f),$$

la classe externe des solutions limitées dans un certain domaine.

L'unicité est alors remplacée par une quasi unicité à un exponentiellement petit près , ce qui implique en particulier l'unicité du développement en ε ombres.

La différence entre deux sommes d'une même fonction et qui coïncident en un point est ε - périodique et ceci nous poussera à étudier les fonctions périodiques de période infiniment petite et ce sera le sujet du chapitre II .

(c'est un travail qui a été fait par A-FRUCHARD et le point de départ de ce travail était une simple phrase de JEAN-LOUIS CALLOT : « je me demande à quoi peut ressembler une fonction périodique de période infiniment petite »).

Dans le chapitre III on essayera d'établir des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'au moins une solution de l'équation :

$$\Delta_\varepsilon y(x) = f(x, y(x)).$$

qui reste comprise entre les graphes de deux fonctions standard distinctes b et c .

Un résultat analogue sera énoncé pour les équations différentielles.

NOTATIONS :

- 1) ε est un nombre réel strictement positif infiniment petit.
- 2) Le symbole ϕ désigne une quantité quelconque infiniment petite : deux utilisations de ce symbole n'ont pas nécessairement la même valeur .
- 3) Le symbole $\mathbb{E}$ désigne une quantité limitée : deux utilisations de ce symbole n'ont pas forcément la même valeur.
- 4) $@$ désigne une quantité appréciable : deux utilisations de ce symbole n'ont pas forcément la même valeur.
- 5) $x \approx y$ signifie « x est infiniment proche de y ».
- 6) $x \approx \infty$ signifie « x est infiniment grand ».
- 7) $x \ll y$ signifie « x est appréciablement inférieur à y ».
- 8) Un nombre est dans $]] a, b [[$ s'il est appréciablement supérieur à a et appréciablement inférieur à b.
- 9) Si x est un nombre complexe limité , ${}^\circ x$ désigne l'ombre de x .C'est l'unique nombre complexe standard infiniment proche de x.
- 10) Une fonction interne f d'un ensemble E dans un ensemble F est S-continue en un point x de E si :

$$\forall y \in E ; \quad x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(y).$$
- 11) Une fonction interne de E dans F est dite de classe S° en un point x de E si f(x) est presque standard et si f est S-continue en x.

- 12) Une fonction f est dite de classe S° sur une partie interne A si f est de classe S° en tout point presque standard de A .
- 13) Si f est une fonction S -continue et limitée aux points limités, ${}^\circ f$ désigne l'ombre de f : c'est l'unique fonction standard qui prend des valeurs infiniment proches de celles de f aux points limités.
- 14) L'adjectif « exponentiellement » se rapporte à ε .
Ainsi x est exponentiellement proche de y si :

$$|x - y|^\varepsilon \ll 1.$$

De manière équivalente : $x = y + \varepsilon \exp\left(-\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}\right)$.

- 15) Une fonction f de classe S° admet un développement en ε ombre, s'il existe une suite de fonctions de classe S° ; $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que :

$$f = \sum_n f_n \varepsilon^n.$$

RESUME

Grâce à l'analyse non standard, on a contribué par l'utilisation des équations aux différences avec un pas infinitésimal à répondre à plusieurs problèmes soulevés dans le domaine des systèmes dynamiques discrets .

Nous nous sommes penchés dans ce travail uniquement sur les outils fondamentaux

utilisés pour la résolution de deux de ces problèmes.

Ce mémoire comporte trois chapitres.

Chapitre I : La somme d'une fonction.

On appelle somme d'une fonction standard f d'une variable réelle ou complexe une solution limitée de l'équation aux différences suivante :

$$\Delta_\varepsilon g = f \quad \dots (1).$$

où Δ_ε est l'opérateur défini par :

$$\Delta_\varepsilon g(x) = \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} .$$

et ε est un nombre réel strictement positif infiniment petit.

Le problème posé est : « A quelles conditions existe-t-il une somme de f ? ».

Pour résoudre ce problème nous avons répondu aux questions suivantes :

* A quoi ressemble une somme de f ?

* Supposons qu'on a une somme de f , peut-on la prolonger ?

* peut-on comparer deux sommes d'une même fonction ?

* Peut-on construire explicitement une somme de f ?

La réponse à la troisième question nous a poussés à faire une étude des fonctions ε périodiques et c'est justement le sujet du chapitre II.

Chapitre II : **Les fonctions périodique de** **période infiniment petite.**

Dans ce chapitre nous avons étudié les fonctions périodique de période infiniment petite et nous nous sommes restreints aux fonctions ε périodiques qui prennent des valeurs limitées dans une région macroscopique, et nous avons décrit leur comportement microscopique et macroscopique.

Nous avons établi ensuite un résultat concernant l'unicité pour les équations aux différences.

Chapitre III : **Principe de rétraction pour les** **équations aux différences.**

Dans ce chapitre nous avons utilisé le principe de rétraction pour établir des conditions suffisantes afin d'assurer l'existence d'une solution d'une équation aux différences qui reste comprise entre le graphe de deux fonctions.

Un résultat analogue a été énoncé pour les équations différentielles.

CHAPITRE I

LA SOMME D'UNE FONCTION

I-1) INTRODUCTION :

On appelle somme d'une fonction standard f d'une variable réelle ou complexe une solution limitée de l'équation aux différences suivante :

$$\Delta_\varepsilon g = f \quad \dots \quad (1).$$

Où Δ_ε est l'opérateur défini par :

$$\Delta_\varepsilon g(x) = \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} .$$

et ε est un nombre réel strictement positif infiniment petit.

On pourrait se ramener par une homothétie sur la variable à $\varepsilon = 1$, mais il est intéressant de garder ε infiniment petit et de se poser des questions d'ordre macroscopique : les solutions sont-elles S -continues ? limitées ? les solutions sont – elles infiniment proches d'une primitive de f ?

Dans ce point de vue on peut , au lieu de considérer des fonctions solutions , se contenter d'examiner les pointillés solutions, qui ne sont déterminés qu'aux points $x_0 + n \varepsilon$; ainsi l'utilisation d'un nombre infinitésimal permet de relier l'aspect équation fonctionnelle et l'aspect analyse numérique.

Dans la théorie des équations aux différences on rencontre une difficulté qui n'existe pas avec les équations différentielles : la connaissance d'une solution en

un point x_0 ne fournit à priori des renseignements sur la solution qu'aux points $x_0 + n \varepsilon$; $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas réel ; si on exige pour la solution d'être S-continue on en déduit une connaissance de la solution à un infiniment petit près. Mais dans le cas complexe , la connaissance à infiniment petit près d'une solution dans un domaine ne donne absolument aucun renseignement sur la fonction en dehors du domaine.

Nous allons répondre dans ce chapitre aux questions suivantes :

- * Etant donnée f standard analytique complexe dans un domaine D , existe-t-il une fonction analytique complexe g vérifiant : $g(x + \varepsilon) = g(x) + \varepsilon f(x)$ et qui soit limitée ?
- * A quoi ressemble une somme de f ?
- * Supposons qu'on a une somme de f , peut-on parler de son prolongement ?
- * peut-on comparer deux sommes d'une même fonction ?
- * Et enfin : peut-on construire explicitement une somme de f ?

Dans tout le chapitre , f est une fonction standard analytique d'une variable complexe.

I-2) DEFINITIONS :**DEFINITION (1) :**

Soit E un sous – ensemble interne ou externe de $\mathbb{R}$

On dira que f possède une somme sur E s'il existe une fonction analytique complexe g , limitée sur E , et telle que : $g(x + \varepsilon) = g(x) + \varepsilon f(x)$ pour tout x et pour tout ε infiniment petit strictement positif, tant que x et $x + \varepsilon$ sont dans E .

On s'intéressera à démontrer l'existence d'une fonction limitée g sans se préoccuper de sa valeur exacte ; en effet : étant donné un point x , il n'est pas indispensable de trouver une somme au point x exactement mais seulement en x à un infiniment petit près.

DEFINITION (2) :

Soit X un sous – ensemble de $\mathbb{R}$. Un point x appartient au S - intérieur de X si x est limité et s'il existe un disque de rayon appréciable centré en x et inclus dans X .

DEFINITION (3) :

On appelle S – domaine le S – intérieur d'un domaine standard.

THEOREME DE ROBINSON -CALLOT :

Si une fonction analytique est limitée dans un S – domaine D alors ses dérivées à tout ordre standard sont limitées dans D. De plus la fonction a une ombre analytique dans D et l'ombre de la dérivée coïncide avec la dérivée de l'ombre.

DEMONSTRATION : voir [8]

I-3) SOMMATION DES POINTILLES :

Commençons par étudier l'aspect pointillé .

La fonction à sommer n'est pas forcément standard , seulement presque standard et à valeurs complexes .

THEOREME 1 : (le cas régulier)

Soit ϕ une fonction continue et S – continue sur un intervalle réel limité $[a, b]$, à valeurs complexes , et ε un infiniment petit strictement positif.

Soit $t_0 \geq a$, $t_0 \approx a$ et n tel que $t_0 + n\varepsilon \leq b$, $t_0 + n\varepsilon \approx b$.

On a :

$$\int_a^b \phi(t) dt = \phi + \varepsilon \sum_{k=0}^n \phi(t_0 + k\varepsilon).$$

DEMONSTRATION :

On a :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^{t_0} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_0+k\varepsilon}^{t_0+(k+1)\varepsilon} \varphi(t) dt + \int_{t_0+n\varepsilon}^b \varphi(t) dt.$$

La fonction φ est S – continue sur $[a, b]$, donc :

$$\int_a^{t_0} \varphi(t) dt = (t_0 - a) (\varphi(a) + \phi) = \varepsilon \phi = \phi.$$

$$\int_{t_0+k\varepsilon}^{t_0+(k+1)\varepsilon} \varphi(t) dt = \varepsilon (\varphi(t_0+k\varepsilon) + \phi).$$

et

$$\int_{t_0+n\varepsilon}^b \varphi(t) dt = (b - (t_0+n\varepsilon)) (\varphi(b) + \phi) = \varepsilon \phi = \phi.$$

De plus $\varepsilon\varphi(t_0 + n\varepsilon)$ est infiniment petit , et puisque l'intervalle est limité ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon\phi = \phi.$$

En effet : $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon\phi = n\varepsilon\phi$, et comme $[a,b]$ est limité on aura : $n\varepsilon\phi = \phi$.

Donc :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \varepsilon \sum_{k=0}^n \varphi(t_0 + k\varepsilon) + \phi. \quad \blacklozenge$$

THEOREME 2 : (présence d'une singularité)

Soit φ une fonction décroissante sur un intervalle limité $]0, a]$, limitée en a et telle que l'intégrale impropre $\int_0^a \varphi$ converge et est limitée ; soit ε un nombre réel strictement positif infiniment petit ; soit t_0 strictement positif infiniment proche de 0 ; soit enfin n un entier tel que $t_0 + n\varepsilon < a$; $t_0 + n\varepsilon \approx a$

On a :

$$\int_0^a \varphi(t) dt = \phi + \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_0 + k\varepsilon)$$

DEMONSTRATION :

La décroissance de la fonction φ assure son intégrabilité locale et entraîne les inégalités suivantes :

$$\int_{t_0+k\varepsilon}^{t_0+(k+1)\varepsilon} \varphi(t) dt \leq \varepsilon \varphi(t_0+k\varepsilon) \leq \int_{t_0+(k-1)\varepsilon}^{t_0+k\varepsilon} \varphi(t) dt.$$

d'où :

$$\int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+n\varepsilon} \varphi(t) dt \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_0+k\varepsilon) \leq \int_{t_0}^{t_0+(n-1)\varepsilon} \varphi(t) dt.$$

D'après les hypothèses φ est limitée en tout point appréciable de $]0, a]$ et son intégrale sur tout intervalle infinitésimal est infiniment petite.

On a :

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \varphi = \phi. \quad \text{et} \quad \int_{t_0+(n-1)\varepsilon}^{t_0+n\varepsilon} \varphi = \phi.$$

donc :

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_0+k\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_0+n\varepsilon} \varphi(t) dt + \phi.$$

On a de plus $\varepsilon \varphi(t_0+n\varepsilon) = \phi$ puisque $\varphi(t_0+n\varepsilon)$ est limitée ;

$$\int_{t_0+n\varepsilon}^a \varphi(t) dt = \phi \quad \text{et} \quad \int_0^{t_0} \varphi = \phi.$$

D'où :

$$\int_0^a \varphi(t) dt = \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_0 + k\varepsilon) + \phi. \quad \blacklozenge$$

REMARQUES :

• Si f est analytique au voisinage d'un point x et si g est une somme de f analytique au voisinage de x alors g est aussi analytique au voisinage de $x+\varepsilon$.

Par contre si l'une des deux fonctions (et une seulement) f ou g a une singularité en x alors g a une singularité de même type en $x+\varepsilon$.

Par conséquent si f a dans un voisinage macroscopique de x une seule singularité en x alors g a des singularités en : $x+\varepsilon, x+2\varepsilon, \dots$ Ainsi une seule singularité de f donne naissance à toute une ligne de singularités de g , placées

ou bien aux points $x+\varepsilon, x+2\varepsilon, \dots$, qui sont les points positivement congruents à x ,
ou bien aux points négativement congruents à x : $x, x-\varepsilon, x-2\varepsilon, \dots$ (selon la terminologie de Révérend BARNES [9]).

- On s'attend à ce qu'une somme de f soit infiniment proche d'une primitive de f , et c'est bien le cas :

soit g une somme de f dans le S – domaine D et soit x un point de D (donc limité) ; le segment $[x, x+\varepsilon]$ est contenu dans D , on a :

$$g(x+\varepsilon) = g(x) + \varepsilon \int_0^1 g'(x+\theta\varepsilon) d\theta. \text{ (formule de TAYLOR avec reste intégrale).}$$

puisque d'après le théorème de ROBINSON-CALLOT, g'' est limitée sur le segment $[x, x+\varepsilon]$, la formule :

$$g'(x+\theta\varepsilon) = g'(x) + \varepsilon \int_0^1 g''(x+\theta\varepsilon t) dt.$$

montre que pour tout θ dans $[0, 1]$ on a $g'(x+\theta\varepsilon) = g'(x) + \varepsilon \mathfrak{f}$.

en comparant la formule :

$$g(x+\varepsilon) = g(x) + \varepsilon (g'(x) + \varepsilon \mathfrak{f}).$$

avec la formule :

$$g(x+\varepsilon) = g(x) + \varepsilon f(x) \quad \dots (1)$$

on obtient :

$$g'(x) = f(x) + \varepsilon \mathfrak{f}.$$

qui par intégration donne :

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f + \varepsilon \mathfrak{L}.$$

Rien ne nous empêche de continuer : puisque pour n standard et x dans le domaine D , le théorème de ROBINSON-CALLOT entraîne que la fonction $g^{(n+1)}$ est limitée sur le segment $[x, x+\varepsilon]$, la formule de TAYLOR avec reste intégral donne :

$$g(x+\varepsilon) = g(x) + \varepsilon g'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} g''(x) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} g^{(n)}(x) + \varepsilon^{n+1} \mathfrak{L},$$

ce qui, en comparant avec la formule (1), donne pour tout x dans D :

$$f(x) = g'(x) + \frac{\varepsilon}{2} g''(x) + \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!} g^{(n)}(x) + \varepsilon^n \mathfrak{L}.$$

Ainsi on a l'identité sur D :

$$g' = f - \frac{\varepsilon}{2} g'' - \dots - \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!} g^{(n)} + \varepsilon^n \mathfrak{L}. \quad \dots (0)'$$

Le symbole $\mathfrak{L}$ désigne ici une fonction analytique limitée dans D ; ses dérivées à tout ordre standard sont donc elles aussi limitées (c'est là l'intérêt principal du théorème de ROBINSON-CALLOT : pouvoir écrire des égalités du type $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$).

On a donc, pour $p \leq n$, en dérivant p fois la formule (0) et en oubliant les

p derniers termes :

$$g^{(p+1)} = f^{(p)} - \frac{\varepsilon}{2} g^{(p+2)} \quad \dots \quad - \frac{\varepsilon^{n-p-1}}{(n-p)!} g^{(n)} + \varepsilon^{n-p} \varepsilon \quad \dots \quad (p)'$$

Le système formé de n lignes $(0)', \dots, (p)', \dots, (n-1)'$ est triangulaire de déterminant non nul, donc se résoud.

Ainsi, il suffit qu'une solution de (1) soit limitée pour qu'elle soit développable en ε -ombres et ce développement est unique. En conséquence, deux solutions de $\Delta_\varepsilon g = f$, limitées dans un S-domaine et qui coïncident en un point x_0 sont parfaitement indistinguables : elles ont le même développement en ε -ombres.

I-4) COMPARAISON DES SOMMES :

Deux sommes d'une même fonction qui prennent la même valeur en un point ont le même développement en ε -ombres. mais ça ne veut pas dire qu'on a unicité de la solution : en ajoutant une fonction périodique de période ε à une somme de f , on obtient encore une somme de f . D'ailleurs, une somme g étant fixée, toutes les autres sommes de même point de départ sont de la forme $g+p$ avec $p \in$ périodique.

On se pose donc la question suivante : à quoi ressemble une fonction analytique complexe ε -périodique ? (ce sera le sujet du chapitre II).

D'après ce qui précède, si cette fonction est limitée dans un S-domaine D , alors elle est développable en ε -ombres (en tant que somme de la fonction nulle) et son développement est identiquement nul.

Par périodicité, cette fonction est limitée dans la bande externe B obtenue en prolongeant D horizontalement :

$$B = \{ x \in \mathbb{C} ; \exists y \in D, \operatorname{Im}(x-y) = 0 \}.$$

Donc deux sommes d'une même fonction restent infiniment proches l'une de l'autre sur la bande B même si elles ne sont plus limitées. (En particulier elles ont les mêmes singularités dans la bande) Le résultat précis est le suivant :

THEOREME 3 :

Si f est analytique dans un S- domaine D et si g_1, g_2 sont deux sommes de f dans D qui prennent la même valeur en un point x_0 de D, alors :

Pour tout x dans la bande externe B prolongeant horizontalement D, on a :

$$|g_2(x) - g_1(x)| \leq \exp\left(\frac{-\pi d(x) + \phi}{\varepsilon}\right).$$

où $d(x)$ désigne la distance de x au bord de la bande.

DEMONSTRATION : voir [3].

EXEMPLE :

L'équation : $\Delta_\varepsilon g(x) = -\frac{1}{x^2}.$

possède une solution formelle dans le champ complexe :

$$g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(x + n\varepsilon)^2},$$

qui converge en – dehors des points $-n\varepsilon$, n dans $\mathbb{Z}$ et qui définit une fonction analytique avec des pôles aux points : $0, -\varepsilon, -2\varepsilon, \dots$

Macroscopiquement il se forme une coupure sur $\mathbb{R}^-$

On peut aussi regarder la solution :

$$g_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\varepsilon}{(x+(n+1)\varepsilon)^2}.$$

qui, elle, a une coupure sur $\mathbb{R}^+$.

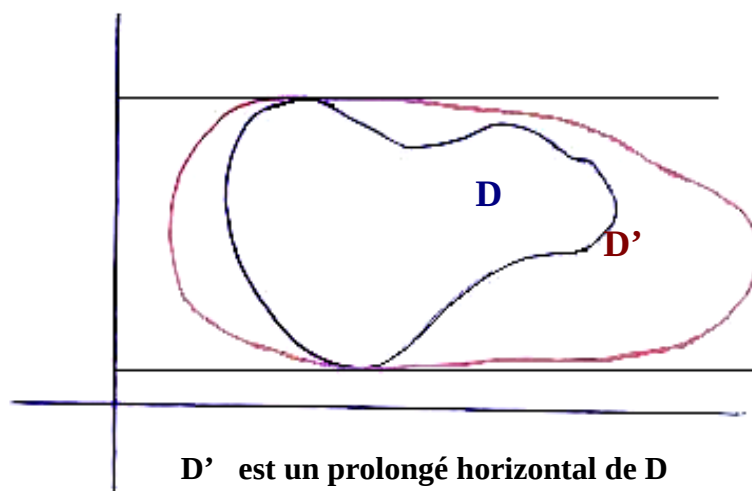
I-5) PROLONGEMENT D'UNE SOMME :

Supposons qu'on a une somme de f sur un S -domaine D : est-il possible de prolonger cette somme dans une direction quelconque tant qu'on ne rencontre pas de singularités de f ?

DEFINITION 4 :

Soit D et D' deux domaines de $\mathbb{C}$, D' est un prolongé horizontal de D si :

- i) D est inclus dans D' .
- ii) $\forall x' \in D', \exists x \in D : \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} x' \text{ et } [x, x'] \subset D'$.



THEOREME 4 :

Soit D un domaine , D' est un prolongé horizontal de D .

Si f est analytique sur D' et s'il existe une somme g de f dans le S – intérieur de D

Alors il existe une somme de f qui prolonge g dans le S - intérieur de D' .

DEMONSTRATION :

Soit x' quelconque dans le S - intérieur de D' .Il existe x dans le S -intérieur de D et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $x' = x + n\varepsilon$.

Supposons pour fixer les idées que n est positif.

Si g est une somme de f sur le S - intérieur de D , on définit g au point x' par :

$$g(x') = g(x) + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\varepsilon) .$$

Puisque f est standard et sans singularité dans le halo du segment limité $[x, x']$, la fonction : $\varphi(t) = f(x+t)$ est continue et S - continue sur $[0, x-x']$, ce qui permet d'appliquer le théorème 1 du paragraphe I-3 .La fonction g est donc bien limitée en x' . ♦

Pour un prolongement dans une direction non réelle, on ne peut pas espérer un principe de prolongement général.

Si D_1 et D_2 sont deux S -domaines d'intersection non vide sur lesquels f est analytique , si g_1 est une somme de f sur D_1 et g_2 une somme de f sur D_2 telles que

g_1 et g_2 prennent la même valeur en un point de l'intersection alors g_1 et g_2 sont

infiniment proches sur toute l'intersection $D_1 \cap D_2$ mais rien ne permet d'affirmer

qu'il existe une somme de f sur $D_1 \cup D_2$.

Par exemple pour l'équation : $\Delta_\varepsilon g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On avait trouvé une somme de f dans le S- intérieur de 3^+ .

$$g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\varepsilon}{(x+(n+1)\varepsilon)^2} .$$

et une somme de f dans le S- intérieur de 3^- .

$$g_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(x+n\varepsilon)^2} .$$

mais il n'existe pas de somme de f dans le S- intérieur de $3/\{0\}$.

REMARQUE :

Il peut se produire dans certains cas des phénomènes de résonance.

Il y a résonance lorsque la fonction f possède deux singularités congruentes α

et $\alpha+n\varepsilon$, et lorsque la fonction $h(x) = f(x) + f(x+n\varepsilon)$ a une singularité non essentielle en α .

ON ECARTE LA SITUATION DE RESONANCE.

Soit D un S- domaine sur lequel f a une somme et soit x et x' dans D tels que $x - x'$ soit réel .

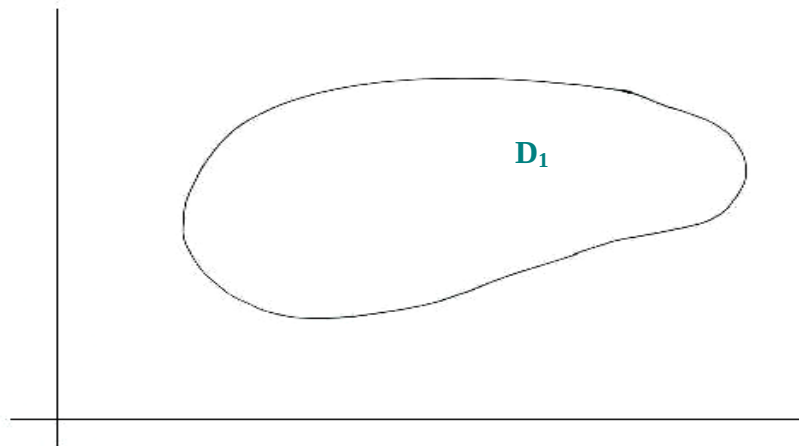
D'après ce qui précède, puisqu'il existe une même somme de f à la fois en x et en x' , c'est que la fonction f n'a pas de singularités dans le halo de $[x, x']$.

En prolongeant D horizontalement on obtient une somme de f dans un S -domaine qui contient $[x, x']$. Ainsi le domaine naturel où vit une somme de f a la propriété de contenir tout le segment $[x, x']$ dès qu'il contient deux points x et x' de même partie imaginaire.

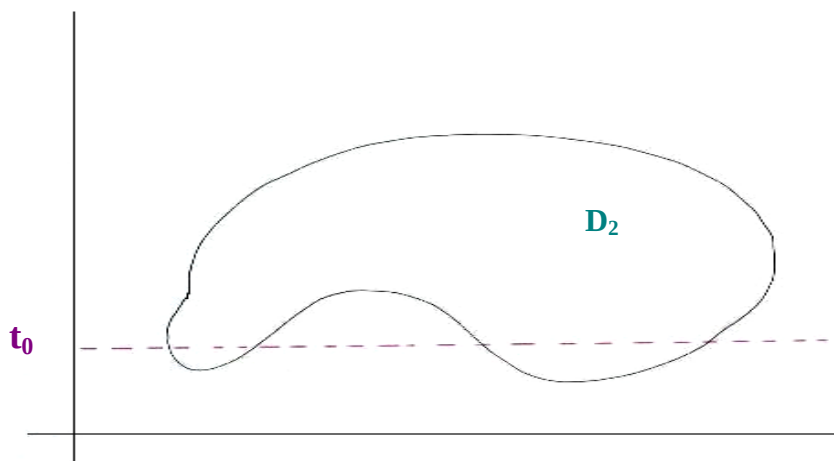
DEFINITION 5 :

Un domaine est dit horizontalement connexe si pour tout t dans $\mathcal{I}$:

$D \cap \{x \in \mathcal{D} ; \text{Im } x = t\}$ est connexe (éventuellement vide).



D_1 est horizontalement connexe



D_2 n'est pas horizontalement connexe

CONJECTURE :

Si f est analytique dans un domaine horizontalement connexe D , alors il existe une somme de f dans le S-intérieur de D .

DEFINITION 6 :

Un domaine D horizontalement connexe est dit maximal s'il existe un point de D dont la partie imaginaire est infiniment grande positive et un dont la partie imaginaire est infiniment grande négative.

Si l'on trouve une somme de f dans le S- intérieur d'un domaine horizontalement connexe maximal, le prolongement horizontal fournit une somme de f dans tout le S- intérieur de $\forall$ privé seulement de quelques demi droites horizontales issues de singularités de f .

I-6) LA SOMMATION PAR ITERATION :

Si l'on itère l'équation de récurrence :

$$g(x) = -\varepsilon f(x) + g(x + \varepsilon).$$

jusqu'à l'infini (seul point fixe de l'opérateur de translation $x \longrightarrow (x + \varepsilon)$) on

obtient une solution formelle :
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\varepsilon f(x + n\varepsilon).$$

Dans le cas idéal , une convergence suffisante de f vers zéro à l'infini permet

d'assurer la convergence de g (car l'écriture $\sum_{n=0}^{\infty} -\varepsilon f(x + n\varepsilon)$ aura un sens), ce qui

fournit une vraie solution de (1) en dehors des points négativement congruents de chaque singularité de f .

La méthode est vraiment simple , pour ne pas dire simpliste, mais c'est la méthode efficace pour l'expérimentation informatique.

FRUCHARD a fait une étude où il a présenté divers procédés de construction de sommes , qui dépendent essentiellement de la forme du domaine où la fonction f est analytique .

On peut dégager de cette étude l'énoncé suivant :

THEOREME 5 :

Soit f une fonction analytique sur un domaine horizontalement connexe Ω ;
on a les résultats suivants :

Si f est entière alors il existe une somme entière de f .

Si Ω est un disque , il existe une somme de f dans tout le disque (et pas seulement dans son S- intérieur).

Si Ω est une bande non horizontale et si f est à croissance au plus exponentielle sur cette bande , alors il existe une somme de f dans le S-intérieur de cette bande.

Si Ω est borné alors il existe une somme de f dans le S -intérieur de Ω .

DEMONSTRATION : voir [3] .

REMARQUE :

« LA SOMME D'UNE FONCTION » est l'outil fondamental utilisé par FRUCHARD pour la résolution du problème de la bifurcation retardée .

CHAPITRE II
LES FONCTIONS PERIODIQUES
DE PERIODE INFINIMENT PETITE

II- 1) INTRODUCTION :

Dans le paragraphe (I-4) le problème qui s'est posé était le suivant :

« A quoi ressemble une fonction analytique complexe périodique de période infiniment petite ? ».

Ce sera le sujet de ce chapitre.

Dans l'étude des équations aux différences on rencontre une difficulté : c'est la non unicité des solutions.

Par exemple pour les équations linéaires les solutions sont définies à une fonction périodique près .

En d'autre termes les fonctions périodiques y jouent le rôle des constantes d'intégration pour les équations différentielles.

Un type particulier d'équations aux différences est celui des équations résultant d'une discrétisation d'équations différentielles, avec un pas de discrétisation ε .

L'analyse non- standard permet de supposer ce pas ε infiniment petit ; les problèmes d'unicité reviennent alors à l'étude des fonctions périodiques de période ε infiniment petite .On peut en outre se restreindre aux fonctions ε -périodiques qui prennent des valeurs limitées dans une région macroscopique.

En analyse réelle, les fonctions ε - périodiques limitées ont à priori un comportement imprévisible .elles peuvent même ne pas avoir d'ombre du tout. Tout ce que l'on peut dire est que , si la fonction est continue , l'ombre de son graphe est la bande constituée des points d'abscisse comprise entre $^{\circ}m$ et $^{\circ}M$, où m et M sont le minimum et le maximum de la fonction sur une période . Si la fonction est de plus S-continue on en déduit que son ombre est constante sur $\mathbb{R}$ mais cela ne présume en rien en ce qui concerne la dérivée de la fonction : celle ci peut manifester un crépitement incontrôlable à une échelle microscopique.

On va décrire dans ce chapitre le comportement macroscopique et microscopique d'une fonction analytique complexe périodique de période infiniment petite.

On établira ensuite un résultat concernant l'unicité pour les équations aux différences .

Deux lemmes d'analyse complexe infinitésimale sont à citer :

LEMME 1 : (c'est une version d'un théorème de LIOUVILLE infinitésimal)

Une fonction analytique limitée sur un ensemble interne contenant tous les nombres complexes appréciables est presque constante sur les appréciables.

LEMME 2 : (c'est une version d'un principe infinitésimal qui rappelle le principe des zéros isolés)

Une fonction limitée sur un domaine appréciable D et s'annulant un nombre ω infiniment grand de fois dans D prend des valeurs exponentiellement petites par rapport à ω aux points appréciables à l'intérieur de D .

DEMONSTRATION : voir [4].

PROPOSITION :

• L'ensemble des fonctions périodiques de période infiniment petite muni de l'addition et de la multiplication est un anneau.

En effet :

1) L'ensemble des fonctions ε -périodiques est non vide.

2) On a la stabilité par rapport à l'addition :

Soient f et g deux fonctions ε -périodiques.

$$(f+g)(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon) + g(x+\varepsilon) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

donc $f+g$ est ε -périodique.

3) On a la stabilité par rapport à la multiplication :

Soient f et g deux fonctions ε -périodiques.

$$fg(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon) g(x+\varepsilon) = f(x) g(x) = fg(x).$$

donc fg est ε -périodique.

II-2) DESCRIPTION MACROSCOPIQUE :

Soit f une fonction analytique complexe périodique de période infiniment petite ε , prenant des valeurs limitées dans le halo d'un point limité x_0 .

Par permanence f est limitée dans un voisinage standard de x_0 et par périodicité f est limitée dans une bande horizontale standard $B : B = \{ x \in \mathbb{C} / a < \text{Im}(x) < b \}$ contenant x_0 .

Le théorème de ROBINSON-CALLOT fournit alors la description suivante :

- i) f est S -continue dans le S -intérieur de B .
- ii) son ombre ${}^\circ f$ est analytique dans la bande B .
- iii) les dérivées à tout ordre standard de ${}^\circ f$ coïncident avec les ombres de dérivées de f .

Par ailleurs, puisque pour tout n dans $\mathbb{Z}$ on a $f(x_0 + n\varepsilon) = f(x_0)$, ${}^\circ f$ est constante égale à ${}^\circ(f(x_0))$ sur la droite $\{ \text{Im}(x) = \text{Im}(x_0) \}$; elle est donc constante sur la bande B d'après le principe des zéros isolés. Ainsi les dérivées de f à tout ordre standard sont infiniment petites dans le S -intérieur de B .

On peut considérer une bande de largeur maximale sur laquelle la fonction est limitée. Là encore le théorème de ROBINSON-CALLOT offre une bonne description du comportement de la fonction au bord de la bande.

THEOREME 6 :

Soit f une fonction analytique complexe périodique de période infiniment petite ε , limitée dans le halo d'un point limité x_0 .

Il existe α et β dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $\alpha \ll \text{Im}(x_0) \ll \beta$ tels que :

i) f est S -continue et a une ombre constante dans le S -intérieur de la bande :

$$B = \{ x \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \alpha \leq \text{Im}(x) \leq \beta \}.$$

ii) pour tout entier standard n et tout x dans B : $f^{(n)}(x) \approx 0$.

iii) Si $\alpha \neq -\infty$ et si $\text{Im}(x) \approx \alpha$ alors f prend toutes les valeurs limitées sauf au plus une partie du halo d'un point (dans le halo de x) ; résultat analogue concernant le bord $\{ \text{Im}(x) \approx \beta \}$ lorsque $\beta \neq \infty$.

d) Si $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$ alors f est constante.

DEMONSTRATION :

Soit $\alpha = \inf \{ h \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{C}, h \leq \text{Im}(x) \leq \text{Im}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1 \}$.

Et $\beta = \sup \{ h \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{C}, \text{Im}(x_0) \leq \text{Im}(x) \leq h \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1 \}$.

$$\alpha \ll \text{Im}(x_0) \ll \beta.$$

Comme f est ε -périodique, $f(x_0 + k\varepsilon) = f(x_0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'où f est constante égale à $^\circ(f(x_0))$ sur la droite $\{ \text{Im } x = \text{Im } x_0 \}$, elle est donc constante dans le S -intérieur de B (d'après le principe des zéros isolés),

où : $B = \{ x \in \mathbb{C} / \alpha \leq \text{Im } x \leq \beta \}$.

Et d'après le théorème de ROBINSON-CALLOT, f est S -continue et $f^{(n)}$ est infiniment petite dans B pour tout n standard . Ceci prouve les points (i) et (ii).

Si $\alpha \neq -\infty$ il existe x_1 avec $|f(x_1) - f(x_0)| = 1$ et $\text{Im}(x_1) = \alpha$. Mais par permanence, il existe x_2 avec $f(x_2) \approx f(x_0)$ et $\text{Im}(x_2) \approx \alpha$. Soit maintenant x tel que $\text{Im}(x) \approx \alpha$.

Il existe n_1, n_2 dans $\mathbb{Z}$ tels que $x_1 + n_1\varepsilon \approx x$ et $x_2 + n_2\varepsilon \approx x$.

On a par périodicité $|f(x_1 + n_1\varepsilon) - f(x_0)| \geq 1$.

Et $f(x_2 + n_2\varepsilon) \approx f(x_0)$ donc f n'est pas S - continue en x .

D'après le théorème de ROBINSON-CALLOT , f prend toutes les valeurs limitées sauf au plus une partie du halo d'un point (dans le halo de x).

De même, si β n'est pas infini, f prend toutes les valeurs limitées – sauf au plus une partie du halo d'un point – dans le halo de n'importe quel point de partie imaginaire infiniment proche de β .

Enfin si $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$, f est majorée par 1 en module sur $\mathbb{Z}$ tout entier , donc constante d'après le théorème de LIOUVILLE . ♦

II-3) DESCRIPTION MICROSCOPIQUE :

Soit f une fonction analytique complexe ε - périodique limitée dans le halo d'un point limité x_0 .

Avec les notations du théorème du paragraphe (II-2) f est bornée par 1 sur la

bande interne $B = \{ x \in \mathbb{C} / \alpha \leq \operatorname{Im}(x) \leq \beta \}$.

Soit $d(x) = \inf \{ \operatorname{Im}(x) - \alpha, \beta - \operatorname{Im}(x) \}$ la distance de x au bord de B .

THEOREME 7 :

Avec les hypothèses et notations précédentes ; pour tout x dans B on a :

$$\left| f(x) - f\left(i \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right| = \varepsilon \exp\left(-\frac{2\pi d(x)}{\varepsilon}\right).$$

DEMONSTRATION :

Posons $r = \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}\right)$ et $R = \exp\left(-\frac{2\pi\beta}{\varepsilon}\right)$.

soit C la couronne définie comme suit :

$$C = \{ u \in \mathbb{C} / r \leq |u| \leq R \}.$$

Soit la fonction Π définie dans C par :

$$\Pi(x) = \exp\left(-\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\right).$$

Grâce à la périodicité de f et l'injectivité de Π sur une période, on a :

$$\Pi(x_1) = \Pi(x_2) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x_2 = x_1 + k\varepsilon \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Donc l'application $\varphi(u) = f(\Pi^{-1}(u)) = f\left(-\frac{\varepsilon}{2i\pi} \log u\right)$ est analytique uniforme

sur C , bien que le logarithme soit multiforme.

Si $u = \Pi(x)$, on a $\frac{r}{|u|} = \exp\left(\frac{2\pi(\alpha - \text{Im}(x))}{\varepsilon}\right)$.

et $\frac{|u|}{R} = \exp\left(\frac{2\pi(\alpha - \text{Im}(x))}{\varepsilon}\right)$.

Donc : $\exp\left(\frac{-2\pi d(x)}{\varepsilon}\right) = \max\left(\frac{|u|}{R}, \frac{r}{|u|}\right)$.

Ainsi la preuve du théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME :

Si φ est une fonction analytique et limitée dans la couronne C :

$$C = \{ u \in \mathbb{C} / r \leq |u| \leq R \}.$$

Alors pour tout u dans C

$$\varphi(u) - \varphi(\sqrt{rR}) \leq \max\left(\frac{|u|}{R}, \frac{r}{|u|}\right).$$

DEMONSTRATION :

Remarquons que pour tout u dans la couronne :

$$\max\left(\frac{|u|}{R}, \frac{r}{|u|}\right) \geq \sqrt{\frac{r}{R}}$$

Le résultat n'a donc d'intérêt que si r est infiniment plus petit que R , c'est à dire pour des couronnes de module infiniment grand.

Soit u dans C . Si $\frac{|u|}{R}$ ou $\frac{r}{|u|}$ n'est pas infiniment petit la conclusion dit

simplement que : $\varphi(u) - \varphi(\sqrt{rR})$ est limité, ce qui découle directement de l'hypothèse.

Supposons donc que $\frac{|u|}{R}$ et $\frac{r}{|u|}$ sont infiniment petits et posons $u_0 = \sqrt{rR}$

D'après la formule de Cauchy :

$$\varphi(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z|=R\} \cup \{|z|=r\}} \frac{\varphi(z)}{z-u} dz .$$

et

$$\varphi(u_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z|=R\} \cup \{|z|=r\}} \frac{\varphi(z)}{z-u_0} dz .$$

donc :

$$\begin{aligned} \varphi(u) - \varphi(u_0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z|=R\} \cup \{|z|=r\}} \left(\frac{1}{z-u} - \frac{1}{z-u_0} \right) \varphi(z) dz . \\ &= \frac{u-u_0}{2i\pi} \int_{\{|z|=R\} \cup \{|z|=r\}} \frac{1}{(z-u)(z-u_0)} \varphi(z) dz . \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &\leq \frac{|u| + |u_0|}{2\pi} \left(\frac{2\pi r}{(|u|-r)(|u_0|-r)} + \frac{2\pi r}{(R-|u|)(R-|u_0|)} \right) . \\ &\leq (|u| + |u_0|) \left(\frac{r}{|u||u_0|} + \frac{R}{R^2} \right) (1 + \Phi) . \\ &\leq \left(\frac{r}{|u|} + 2\sqrt{\frac{r}{R}} + \frac{|u|}{R} \right) (1 + \Phi) . \end{aligned}$$

$$\leq 4 \max \left(\frac{r}{|u|}, \frac{|u|}{R}, \sqrt{\frac{r}{R}} \right) (1 + \Phi) .$$

donc :

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = \varepsilon \max \left(\frac{r}{|u|}, \frac{|u|}{R} \right) .$$

II-4) UNICITE POUR LES EQUATIONS AUX DIFFERENCES :

Soit F une fonction analytique de $\forall^2$ dans $\forall$.

Et soit l'équation : $\Delta_\varepsilon y(x) = F(x, y(x)) \dots (1)$.

L'équation (1) s'obtient en discrétisant par la méthode d'EULER l'équation différentielle $y' = F(x, y)$.

Dans le cas d'une équation de la forme $\Delta_\varepsilon y(x) = F(x)$, la différence de deux solutions partant d'un même point $y_1 - y_2$ est une fonction ε - périodique.

Si les deux solutions sont limitées dans le halo d'un point x_0 et prennent la même valeur en x_0 , d'après ce qui précède, leur différence est exponentiellement petite dans une bande de largeur appréciable.

En effet , la différence de deux solutions de l'équation (1) n'est pas toujours ε - périodique .

Considérons deux solutions analytiques de (1) prenant la même valeur y_0 en un point x_0 et limitées dans le halo de x_0 ; par permanence, elles sont limitées dans un rectangle standard .

$$\{ x \in \mathbb{V} / \operatorname{Re}(x-x_0) \leq 1 \text{ et } |\operatorname{Im}(x-x_0)| \leq h \}.$$

De plus y_1 et y_2 prennent la même valeur en tout point du rectangle de la forme $x_0 + k\varepsilon$, k dans $\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi des résultats macroscopiques identiques à ceux exposés au paragraphe (II-2) : la différence $f = y_1 - y_2$ est infiniment petite, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre limité dans le S -intérieur du rectangle puisque son ombre y est nulle.

Nous allons voir que cette différence y est même exponentiellement petite.

On suppose pour simplifier que $x_0 = 0$.

THEOREME 8 :

Soit F une fonction standard holomorphe de $\mathbb{V}^2$ dans $\mathbb{V}$ et soit :

$$R_0 = \{ x \in \mathbb{V} / |\operatorname{Re}(x)| \leq 1 \text{ et } |\operatorname{Im}(x)| \leq h \}, \text{ un rectangle standard centré en } 0.$$

On suppose qu'il existe deux solutions analytiques y_1 et y_2 de l'équation :

$$\Delta_\varepsilon y = F(x, y) \quad \dots (1).$$

limitées sur R_0 et telles que $y_1(0) = y_2(0) = y_0$.

On suppose de plus que l'équation différentielle associée $y' = F(x, y)$ possède une unique solution y de condition initiale $y(0) = {}^\circ y_0$, définie dans la bande

$$B = \{ x \in \mathbb{V} / |\operatorname{Im}(x)| \leq h \}.$$

Alors pour tout x limité dans la bande B , on a :

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \exp \left(\frac{-\pi d(x) + \phi}{\varepsilon} \right).$$

Avec $d(x) = h - |\operatorname{Im}(x)|$.

DEMONSTRATION: voir [4].

CHAPITRE III

PRINCIPE DE RETRACTION POUR LES

EQUATIONS AUX DIFFERENCES

III-1) INTRODUCTION :

Soit l'équation aux différences suivante :

$$\Delta_\varepsilon u(k) = f(k, u(k)) \dots\dots (1)$$

avec f une fonction standard réelle .

soit $A(a)$ l'ensemble défini par : $A(a) = \{ a, a+\varepsilon, \dots \}$; a réel standard.

Et Δ_ε est l'opérateur défini par :

$$\Delta_\varepsilon = \frac{u(k+\varepsilon)-u(k)}{\varepsilon} ,$$

ε étant un nombre réel strictement positif infiniment petit.

On suppose de plus que si b et c sont deux fonctions réelles standard qui vérifient :

$b(k) \ll c(k)$, pour tout $k \in A(a)$.

$\forall y_0 \in [b(a), c(a)]$, l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ possède une unique solution u de condition initiale $u(a) = y_0$.

Notre but est d'établir des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'au moins une solution de (1) qui vérifie :

$b(k) < u(k) < c(k)$, pour tout $k \in A(a)$.

Pour cela nous définissons une nouvelle notion : celle « d'un point de type sortie stricte de Ω » avec $\Omega = \{ (k, \alpha) \text{ tel que : } k \in A(a) \text{ et } b(k) < \alpha < c(k) \}$.

REMARQUE :

f , a , b et c sont supposés standard ; par transfert les résultats resteront vrais pour f , a , b et c quelconques.

Considérons l'équation aux différences suivante :

$$\Delta_{\varepsilon} u(k) = \frac{u(k+\varepsilon) - u(k)}{\varepsilon} .$$

ε étant un nombre réel strictement positif infiniment petit.

III-2 PRELIMINAIRES :

Considérons les deux ensembles suivants :

$$B_1 = \{ (k, b(k)) \text{ tel que } k \in A(a) \} .$$

$$B_2 = \{ (k, c(k)) \text{ tel que } k \in A(a) \} .$$

Soit S l'ensemble défini par :

$$S = \{ u \text{ solution de (1) telle que } u(a) = y_0 \text{ et } y_0 \in [b(a), c(a)] \} .$$

Définissons de plus sur $A(a) \times S$ les deux fonctions :

$$\begin{aligned} U_1 : A(a) \times S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (k, u) &\longrightarrow u(k) - b(k). \end{aligned}$$

$$U_2 : A(a) \times S \longrightarrow 3.$$

$$(k,u) \longrightarrow c(k) - u(k)$$

$$\Delta_\varepsilon U_1(k,u) = f(k, u(k)) - \frac{1}{\varepsilon} (b(k+\varepsilon) - b(k)) .$$

$$\Delta_\varepsilon U_2(k,u) = f(k, u(k)) - \frac{1}{\varepsilon} (c(k+\varepsilon) - c(k)).$$

DEFINITIONS :

DEFINITION (1) :

Le point $(k, u(k))$ de B_1 est appelé un point de type « SORTIE STRICTE DE L'ENSEMBLE Ω » si :

$$\Delta_\varepsilon U_1(k, u(k)) < 0.$$

DEFINITION (2) :

Un point $(k, u(k))$ de B_2 est dit un point de type « SORTIE STRICTE DE L'ENSEMBLE Ω » si :

$$\Delta_\varepsilon U_2(k, u(k)) > 0.$$

LEMME (1) :

Un point $(k, u(k)) \in B_1 \cup B_2$ est un point de type « sortie stricte de Ω » si et seulement si :

$$\varepsilon f(k, u(k)) + b(k) - b(k+\varepsilon) < 0 \quad \text{dans le cas où } (k, u(k)) \in B_1.$$

$$\varepsilon f(k, u(k)) + c(k) - c(k+\varepsilon) > 0 \quad \text{dans le cas où } (k, u(k)) \in B_2.$$

DEMONSTRATION : évidente.

Nous allons énoncer un théorème dont la démonstration se fait par la méthode « du rétracté ».

Pour cela , nous aurons besoin du résultat topologique suivant :

I) DEFINITION :

Soient A et B deux parties d'un espace topologique telles que : $A \subset B$

Soit $\pi : B \longrightarrow A$ une application continue telle que :

$$\pi(p) = p \quad \forall p \in A.$$

π est dite une rétraction de B sur A.

Lorsqu'une telle application existe , A est dit le rétracté de B.

II) LEMME(2) :

- Le bord d'une boule ne peut jamais être le rétracté de cette boule. En particulier, le bord d'un intervalle ne peut jamais être le rétracté de cet intervalle.

(voir [5]).

III3) THEOREME 1:

Soit l'équation aux différences suivante :

$$\Delta_\varepsilon u(k) = f(k, u(k)) \quad \dots \quad (1)$$

f étant une fonction réelle continue standard définie sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$, et b et c des fonctions standard de $A(a)$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons que : $\forall y_0 \in [b(a), c(a)]$; l'équation différentielle : $u' = f(k, u)$ possède une unique solution u de condition initiale $u(a) = y_0$.

Si, de plus, pour tout $k \in A(a)$:

$$\varepsilon f(k, u(k)) + u(k) - b(k+\varepsilon) < 0 \quad \text{dans le cas où } u(k) \leq b(k), \quad (H1)$$

$$\varepsilon f(k, u(k)) + u(k) - c(k+\varepsilon) > 0 \quad \text{dans le cas où } u(k) \geq c(k), \quad (H2)$$

Alors il existe une condition initiale y^* avec : $b(a) < y^* < c(a)$.

telle que la solution « u » de (1) de condition initiale y^* (c'est à dire $u(a) = y^*$)

vérifie : $b(k) < u(k) < c(k) \quad \forall k \in A(a)$.

DEMONSTRATION :

Faisons une démonstration par l'absurde.

Pour tout y_0 dans $[b(a), c(a)]$

Il existe une solution de (1) qui vérifie :

$u(a) = y_0$ et on a de plus l'existence d'un $k_0 \in A(a+\varepsilon)$ tel que :

$u(k_0) \geq c(k_0)$ ou $u(k_0) \leq b(k_0)$.

d'après les hypothèses (H1) et (H2) on a :

si $u(k_0) \geq c(k_0)$ alors $\forall k > k_0$ on aura $u(k) > c(k)$.

c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{Z} : u(k_0+n\varepsilon) > c(k_0+n\varepsilon)$.

et si $u(k_0) < b(k_0)$ alors : $\forall k > k_0$ on aura $u(k) < b(k)$.

c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{Z} ; u(k_0+n\varepsilon) < b(k_0+n\varepsilon)$.

et d'après le lemme (1) tous les points de $B_1 \cup B_2$ sont des points de type

«sortie stricte de Ω »

Nous allons montrer que dans ce cas, on peut prouver l'existence d'une rétraction de $[b(a), c(a)]$ sur $\{b(a), c(a)\}$; ce qui est impossible.

Soit $y_0 \in [b(a), c(a)]$.

Nous avons supposé par l'absurde qu'il existe une solution u associée à y_0 et qu'il existe un $k_0 \in A(a+\varepsilon)$ tel que :

$$u(k_0) \leq b(k_0) \quad \text{ou} \quad u(k_0) \geq c(k_0).$$

Et cette solution peut ne pas être unique ; mais d'après le théorème de

FRUCHARD énoncé dans le paragraphe (II-4), si u_2 est une autre solution associée à y_0 , u_2 est exponentiellement proche de u .

Donc on a unicité de l'ombre.

Soit P_1 l'application définie sur $[b(a), c(a)]$ par :

$$P_1 : [b(a), c(a)] \longrightarrow 3.$$

$$y_0 \longmapsto {}^\circ u(k_0).$$

Soient P_2' , P_2'' et P_2 les applications définies comme suit :

$P_2' : \text{graphe de } b \longrightarrow \{b(a)\}.$

$$x \longmapsto b(a).$$

$P_2'' : \text{graphe de } c \longrightarrow \{c(a)\}.$

$$x \longmapsto c(a).$$

$P_2 : (\text{graphe de } b) \cup (\text{graphe de } c) \longrightarrow \{b(a), c(a)\}.$

Telle que : $P_2 \big|_{\text{graphe de } b} = P_2'.$

et

$$P_2 \big|_{\text{graphe de } c} = P_2''.$$

Soit P l'application définie sur $[b(a), c(a)]$ à valeurs dans $\{b(a), c(a)\}$ définie

par : $P = P_2 \circ P_1.$

P est S -continue :

Soit $y_1 \approx y_0.$

On a $P(y_1) = P(y_0).$

En effet :

i) Si $P(y_1) = b(a)$ on aura nécessairement :

$P(y_0) = b(a)$ il ne peut pas être égale à $c(a)$; car deux solutions issues de points infiniment proches restent infiniment proches.

ii) De même si : $P(y_1) = c(a)$ on aura nécessairement :

$p(y_0) = c(a)$ (pour les mêmes raisons que (i)).

P est aussi continue :

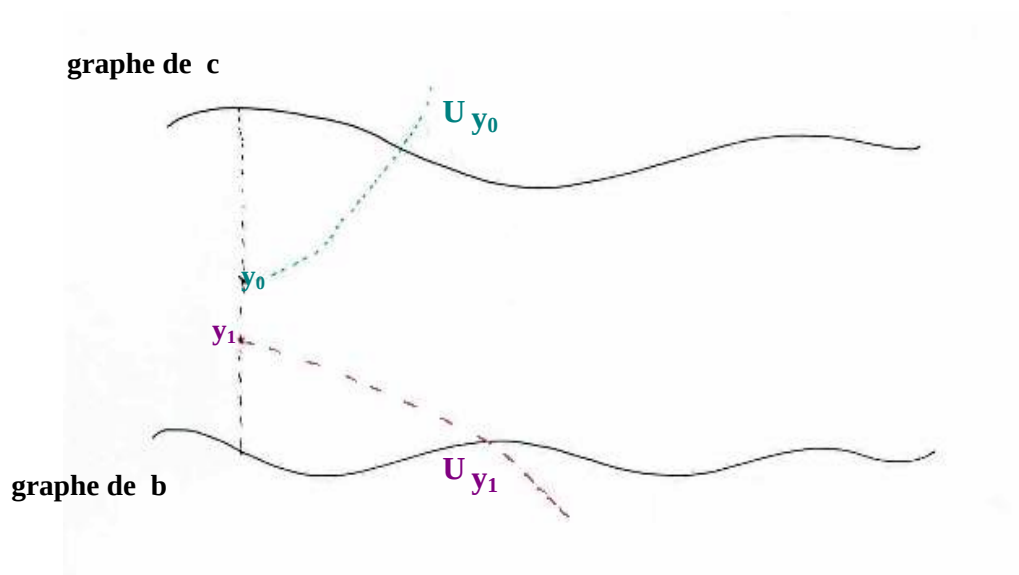
Soit y_0 dans $[b(a), c(a)]$ et soit $\varepsilon > 0$.

D'après ce qui précède si $y \approx y_0$ alors $P(y) - p(y_0) = 0 < \varepsilon$.

d'où :

$\forall y_0 \in [b(a), c(a)], \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ (η infiniment petit) tel que :

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow |p(y) - p(y_0)| < \varepsilon.$$



De plus : $P(b(a)) = b(a)$.

Et $P(c(a)) = c(a)$.

P est une rétraction de $[b(a), c(a)]$ sur $\{b(a), c(a)\}$ ce qui est impossible

d'après le lemme (2).

II-4 RESULTAT POUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

THEOREME 2:

Soit l'équation différentielle suivante :

$$u' = f(k, u) \quad \dots (1).$$

f une fonction standard réelle définie sur : $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$, standard.

Soient « b » et « c » deux fonctions standard dérivables telles que :

$$b(k) < c(k) \quad \forall k \in [a, +\infty[.$$

Supposons que pour chaque point $y \in [b(a), c(a)]$ le problème :

$$\begin{cases} u' = f(k, u). \\ u(a) = y. \end{cases}$$

admet une unique solution U_y .

Supposons de plus que :

$$f(k, u(k)) < b'(k) \quad \forall k \in [a, +\infty[.$$

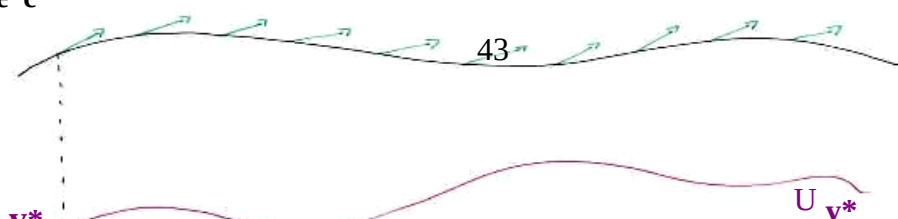
$$f(k, u(k)) > c'(k) \quad \forall k \in [a, +\infty[.$$

ALORS :

$\exists y^* \in]b(a), c(a)[$ tel que la solution U_{y^*} associée à y^* vérifie :

$$b(k) < U_{y^*}(k) < c(k) \quad \forall k \in [a, +\infty[.$$

graphe de c



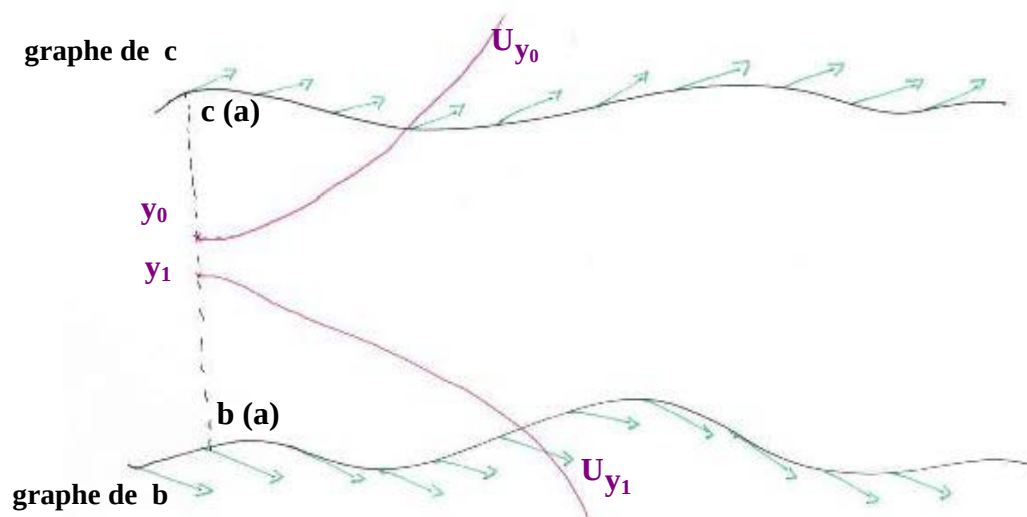
On a ainsi un piège à trajectoires

DEMONSTRATION :

Supposons que :

$\forall y \in [b(a), c(a)], \exists k_y \in [a, +\infty[$ tel que la solution U_y associée à y vérifie :

$$U_y(k_y) \leq b(k_y) \quad \text{ou} \quad U_y(k_y) \geq c(k_y).$$



Comme :

$$f(k, u(k)) < b'(k) \quad \forall k \in [a, +\infty[.$$

$$f(k, u(k)) > c'(k) \quad \forall k \in [a, +\infty[.$$

On aura :

$$\text{Si } U_y(k_y) \leq b(k_y) \quad \text{alors } \forall k > k_y \quad U_y(k) < b(k).$$

$$\text{Si } U_y(k_y) \geq c(k_y) \quad \text{alors } \forall k > k_y \quad U_y(k) > c(k).$$

Soit l'application P définie sur $[b(a), c(a)]$ à valeurs dans $\{b(a), c(a)\}$ définie par : $P = P_2 \circ P_1$.

P_2 définie précédemment.

P_1 définie comme suit :

$$\begin{array}{ccc} P_1 : [b(a), c(a)] & \longrightarrow & 3 \\ y & \longmapsto & U_y(k_y) \end{array}$$

P_1 est continue grâce à la dépendance continue par rapport aux conditions initiales.

P_2 est continue (évident).

Donc P est continue.

De plus

$$P(b(a)) = b(a).$$

et

$$P(c(a)) = c(a).$$

P est donc une rétraction de $[b(a), c(a)]$ sur $\{b(a), c(a)\}$ ce qui est impossible.

CONCLUSION

L'analyse non standard permet de relier deux aspects bien distincts des équations aux différences : l'aspect équation fonctionnelle et l'aspect analyse numérique.

Notre travail a consisté tout d'abord à définir la notion de « somme d'une fonction » en distinguant parmi toutes les solutions de :

$\Delta_\varepsilon y(x) = f(x)$ (avec quelques conditions sur f), la classe externe des solutions limitées dans un certain domaine.

La différence entre deux sommes d'une même fonction et qui coïncident en un point est ε périodique, ceci nous a poussé à étudier les fonctions périodiques de période infiniment petite.

Dans la seconde partie, nous avons construit un piège à trajectoires en utilisant le principe de rétraction.

Ainsi, l'analyse non standard promet d'intéressantes investigations dans le domaine des systèmes dynamiques discrets .

REFERENCES

- [1] R . BEBBOUCHI : Equations différentielles perturbées et analyse
non standard, OPU 1987.
- [2] R . BEBBOUCHI : Equations différentielles ordinaires.
Propriétés topologiques de l'ensemble des solutions passant
par un point, publication IRMA 1980.
- [3] K . BORSUK : Theory of retracts, PWN , Warsaw 1967.
- [4] R.W.BARNES : The linear difference equation of the first order proc .
London Math, soc 2^{ème} série, t II, 1904 (p 438-469).
- [5] H . CHELLAH : Itération de fonctions complexes et fractals, thèse de
magister soutenue à l'USTHB en février 2000 .
- [6] F . DIENER ; G . REEB : Analyse non standard.
HERMANN, éditeurs des sciences et des arts 1989.
- [7] J . DIBLIK : Retract principle for difference equation.
Technical university of Brno,technico 8,61600 Brno,
Czech Republic 1998.

[8] A . FRUCHARD : La somme d'une fonction, prépublication IRMA 1993.

[9] A . FRUCHARD : Les fonctions périodiques de période infiniment petite.
prépublication IRMA 1994.

[10] A . FRUCHARD : Contributions dans le domaine des équations aux différences
avec petit pas : théorie et application, prépublication IRMA 1994.

[11] S . GODOUNOV , V . RIABENKI : Schemas aux differences .
OPU 1987.