

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE GENIE CIVIL



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT

En GENIE CIVIL

Spécialité : Construction

Par :

ADMAN REDOUANE

Thème

**Contribution analytique et numérique
à l'étude du flambement dans les ossatures à nœuds semi rigides**

Soutenue publiquement le Lundi 22 Juin 2009, devant le jury composé de :

Mr. D. BENOUAR	Professeur (USTHB)	Président
Mr. H. AFRA	Docteur (CNERIB)	Directeur de thèse
Mr. A. AHMED-BENYAHIA	Professeur (USTHB)	Examineur
Mr. M. K. BERRAH	Professeur (ENP Alger)	Examineur
Mr. A. MEBARKI	Professeur (Univ. Paris-Est)	Examineur
Mr. M. SAIDANI	Professeur (Univ. Coventry)	Examineur

Dédicace

A la mémoire de mon Père et de ma sœur aînée Zahia

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu le professeur **H. Afra**, Directeur du Centre National d'Etudes et de Recherches Intégrées au Bâtiment (CNERIB), qui me fait l'honneur d'être mon directeur de thèse.

Je voudrais remercier le professeur **D. Benouar** de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB) de m'avoir honoré en acceptant de présider le jury de cette thèse de doctorat.

Mes plus vifs remerciements s'adressent aussi :

Au professeur **A. Ali Benyahia** de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB)

Au professeur **M. K. Berrah** de L'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Au professeur **A. Mébarki** de l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée (France)

Au professeur **M. Saidani** de l'Université de Coventry (UK)

De m'avoir honoré en acceptant d'examiner mon travail et de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens aussi à témoigner toute ma reconnaissance envers Docteur **M.-S. Baraka.**, qui m'a initié à la recherche et orienté sur la voie actuelle.

Je remercie mes amis et collègues de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB), particulièrement ceux de la Faculté de Génie civil. Un clin d'œil à tous les amis ayant partagé avec moi le bureau 56, avec une mention spéciale à **M'hammed Badaoui**.

Je remercie vivement le professeur **R. Maquoi** de m'avoir accueilli à deux reprises au sein du département Mécaniques des matériaux et structures (M&S) de l'Université de Liège (Belgique), durant la préparation de cette thèse.

Un grand merci au professeur **R. Delgado** (FEUP), et au professeur **L.M. Castro** (FEUP), pour tout l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail, en y consacrant beaucoup de leur temps. Leurs remarques et suggestions concernant l'aspect interprétation des résultats ont été accueillies de ma part avec beaucoup d'intérêt.

Je formule aussi mes sincères remerciements pour mes amis de Porto (FEUP), **Celeste, Joana, Luis Martelo** et tout particulièrement **Luis Miranda** qui m'ont accueilli dans leur laboratoire avec égard et beaucoup de respect.

Je veux par ailleurs remercier mes proches en particulier ma Mère, ma femme Khokha et mes enfants Kenzy et Nesma, de m'avoir soutenu et encouragé durant cette recherche.

Ce travail a été largement facilité grâce aux moyens logistiques mis à ma disposition par le Laboratoire du Bâti dans l'Environnement (LBE) de la Faculté de Génie Civil de L'USTHB.

Table des Matières

Dédicaces		ii
Remerciements		iii
Table des matières		v
Résumé		vii
Liste des symboles		viii
Liste des tableaux		x
Liste des figures		xi
Chapitre I.	<u>Introduction</u>	
I.1.	Généralités	1
I.1.1.	L'instabilité par flambement	1
I.1.2.	Les connexions nodales semi-rigides	3
I.2.	Etat des connaissances sur le comportement au second ordre d'une poutre-colonne	5
I.2.1.	La non linéarité géométrique	5
I.2.2.	L'imperfection initiale géométrique	10
I.2.3.	La non linéarité géométrique en présence d'assemblages semi-rigides	11
I.3	Objectifs de la thèse	15
Chapitre II.	<u>Analyse vis-à-vis du flambement d'un élément poutre-colonne</u>	
II.1.	Introduction	17
II.2.	Effets du second ordre	17
II.3.	Etude de la stabilité d'un élément poutre-colonne	19
II.3.1.	Equations d'équilibre	20
II.3.2.	Eléments de réduction	26
II.3.3.	Expression de la rotation de flexion	28
Chapitre III.	<u>Conditions aux limites et formulation matricielle</u>	
III.1.	Introduction	30
III.2	Equations de compatibilité	31
III.3.	Identification des constantes d'intégration	34
III.4.	Formulation des fonctions de forme	39
III.5.	Validation numérique des fonctions de forme	41
III.6.	Formulation élémentaire	50

Table des Matières

III.6.1.	Formulation de la matrice de rigidité élémentaire	50
III.6.2.	Charges nodales équivalentes	52
III.6.2.1.	Cas d'un chargement linéairement réparti	52
III.6.2.2.	Cas d'une imperfection géométrique initiale	54
Chapitre IV.	<u>Interprétation des résultats analytiques</u>	
IV.1.	Introduction	57
IV.2.	Effets des connexions semi-rigides : analyse au premier ordre	57
IV.2.1.	Effets de la semi-rigidité de rotation	58
IV.2.2.	Effets de couplage des semi-rigidités de rotation et de translation	61
IV.2.3.	Mise en évidence de l'effet de cisaillement	66
IV.3.	Analyse des effets du second ordre	69
Chapitre V.	<u>Mise en œuvre et validation numérique</u>	
V.1.	Introduction	77
V.2.	Modélisation des connexions semi-rigides	78
V.3.	Concept de la longueur effective de flambement	80
V.4.	Mise en œuvre de la résolution numérique	85
V.5.	Expérimentation numérique	88
Chapitre VI.	<u>Conclusions</u>	102
Bibliographie		104

ملخص

مساهمة هذا البحث العلمي تهدف لأجاد مقارنة تحليلية صارمة لعبارة عنصر التحليل الشامل لعارضة عمود إزاء فقد التوازن بالانبعاج. علاوة على ذلك العبارة صيغت بأخذ الأطراف العقدية للعنصر الشبه قاسية. هذه المقاربة تعمم عبارة عنصر عارضة-عمود لمواجهة أي احتمال للشروط الحدودية بين الطرف القاسي (الصامد) و الطرف المرتركز. النظر في هذا الجانب ينحصر على السطح الدوراني و الانسحابي. هذه العبارة ستأخذ كذلك تأثير معامل القص (G) على التشوهات الابتدائية و تأثير تغير الأبعاد الهندسي الأولوية.

Résumé

Le travail mené dans le cadre de cette recherche vise à contribuer par le biais d'une approche analytique rigoureuse, à la formulation d'un élément poutre-colonne destiné à l'analyse globale d'une structure vis-à-vis de l'instabilité par flambement. Par ailleurs, cette formulation est envisagée en considérant les extrémités nodales de l'élément en question comme étant semi-rigides. Cette approche permettra de généraliser la formulation de l'élément poutre-colonne ainsi obtenu à toutes les éventualités de condition aux limites se situant entre les deux cas extrêmes parfaitement rigide et parfaitement articulé. Cet aspect sera considéré sur le double plan rotationnel et translationnel. D'autre part, Cette formulation se fera en tenant compte de l'influence du module de cisaillement G sur les déformations élémentaires et de la présence d'une imperfection géométrique initiale.

Abstract

The work undertaken within the framework of this research aims to contribute by the means of a rigorous analytical approach, to the formulation of an element beam-column intended for the global analysis of a structure with respect to instability by buckling. In addition, this formulation is considered by regarding the nodal ends of the element in question as being semi-rigid. This approach will allow generalizing the formulation of the element beam-column thus obtained, to all the possibilities of boundary conditions between the two extreme cases perfectly rigid and articulated perfectly. This aspect will be studied on both rotational and translational considerations. Moreover, this formulation will be done by taking into account the influence of the shear modulus G on the elementary deformations and of the presence of an initial geometrical imperfection.

Liste des symboles

E	Module de Young
G	Module de cisaillement
I	Moment d'inertie
r	Rayon de giration
A	Aire d'une section transversale
A_r	Aire réduite d'une section transversale
k_G	facteur de réduction relatif aux contraintes de cisaillement
l	Longueur d'un élément poutre
l_f	Longueur de flambement d'un élément poutre
K	Facteur de longueur effective de flambement
m	Coefficient de courbure additionnelle
ml	Module de stabilité (adimensionnel)
l_N	Longueur élastique de stabilité
l_G	Longueur élastique de cisaillement
λ_N	Paramètre de stabilité (adimensionnel)
λ_G	Paramètre de cisaillement (adimensionnel)
g_1	Paramètre de couplage entre les effets de cisaillement et du 2 nd ordre (adimensionnel)
A, B	Fonctions de stabilité d'une poutre-colonne à nœuds rigides
D	Dénominateur commun des fonctions de stabilité A et B
$A_s, B_s, C_s,$	Fonctions de stabilité d'une poutre-colonne à nœuds semi-rigides
D_s	Dénominateur commun des fonctions de stabilité A_s, B_s, C_s
C_1, C_2, C_3, C_4	Constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites
d_L	Dénominateur commun Constantes d'intégration C_1, C_2, C_3, C_4
R, R_i, R_j	Facteurs de rigidité
r_i, r_j	Degrés de fixation
f_r, f_i^r, f_j^r	Indexes de flexibilités relatifs aux différents ressorts de rotation
f_y, f_i^y, f_j^y	Indexes de flexibilités relatifs aux différents ressorts de translation
ε^e	Déformation élémentaire
u^e	Déplacement élémentaire
σ^e	Contrainte élémentaire
\overline{B}	Matrice déformation-déplacement
\overline{D}	Matrice constitutive
u_i, u_j	Déplacements élémentaires suivant l'axe (ox) longitudinal
v_i, v_j	Déplacements élémentaires suivant l'axe (oy) transversal
θ_i, θ_j	Rotations élémentaires autour de l'axe (oz) \perp au plan (oxy)
$\gamma, \gamma_i, \gamma_j$	Rotations élémentaires de cisaillement
ϕ, ϕ_i, ϕ_j	Rotations élémentaires globales
$\phi^r, \phi_i^r, \phi_j^r$	Rotations relatives aux connexions semi-rigides
ϕ_i^0, ϕ_j^0	Rotations élémentaires relatives à l'imperfection géométrique initiale
ϕ_i^b, ϕ_j^b	Rotations élémentaires de flexion
v_i^y, v_j^y	Déplacements relatifs aux connexions semi-rigides

S_b^r	Flexibilité de rotation propre à la poutre
S_i^r, S_j^r	Flexibilités de rotation relatives aux connexions semi-rigides
S_i^y, S_j^y	Flexibilités de déplacement relatives aux connexions semi-rigides
$M, M(x), M_i, M_j$	Moments fléchissants élémentaires
$T, T(x), T_i, T_j$	Efforts tranchants élémentaires
$N, N(x), N_i, N_j$	Efforts normaux élémentaires
Q	Effort résultant de N et T
a_t, b_t, c_t, d_t	Paramètres relatifs à l'expression du moment fléchissant $M(x)$
a_m, c_m, d_m	Paramètres relatifs à l'expression de l'effort tranchant $T(x)$
a_r, b_r, c_r, d_r	Paramètres relatifs à l'expression de la rotation propre à la flexion
$(T_i^q, M_i^q, T_j^q, M_j^q)$	Charges nodales équivalentes au chargement $q(x)$
$(T_i^0, M_i^0, T_j^0, M_j^0)$	Charges nodales équivalentes à l'imperfection initiale $y_0(x)$
N_{vi}, N_{vj}	Fonctions de forme relatives aux déplacements nodaux v_i et v_j
$N_{\theta i}, N_{\theta j}$	Fonctions de forme relatives aux rotations nodales θ_i et θ_j
$q(x)$	Chargement élémentaire linéairement réparti
$y_0(x)$	Imperfection géométrique initiale
v_0	Amplitude maximale de l'imperfection géométrique initiale
n	Paramètre de forme de l'imperfection géométrique initiale
$y_1(x)$	Déformée totale comptée de l'imperfection initiale $y_0(x)$
$y(x)$	Déformée totale comptée de l'axe de référence (ox)
$y_b(x)$	Déformée de flexion comptée de l'imperfection initiale $y_0(x)$
$y_s(x)$	Déformée de cisaillement comptée de l'imperfection initiale $y_0(x)$

Liste des tableaux

- Tableau V.1** Expressions du facteur de correction α_k en présence d'une extrémité non rigide
- Tableau V.2** Valeurs des paramètres mI , K et P correspondant aux situations (a), (b), (c) et (d) de l'exemple N°1
- Tableau V.3** Données géométriques relatives à la structure de l'exemple N°2
- Tableau V.4** Comparaison des valeurs du facteur K de l'exemple N°2
- Tableau V.5** Données géométriques relatives à la structure de l'exemple N°3
- Tableau V.6** Détails de calcul de l'exemple N°3 selon la méthode de LeMessurier
- Tableau V.7** Détails de calcul de l'exemple N°3 selon la méthode de Lui
- Tableau V.8** Comparaison des valeurs du facteur K , cas (a) et cas (b) de l'exemple N°3
- Tableau V.9** Comparaison des valeurs du facteur K , cas (a), cas (b) et cas (c) de l'exemple N°3

Liste des figures

- Figure I.1** Différentes approches d'analyse non linéaire des structures (courbes chargement-déplacement)
- Figure I.2** Modèle d'élément poutre à extrémités nodales semi-rigides
- Figure I.3** Représentation qualitative des lois de comportements $M-\Phi$
- Figure I.4** Courbes de variation de la fonction de stabilité A obtenue par différentes approches
- Figure I.5** Courbes de variation de la fonction de stabilité B obtenue par différentes approches
- Figure I.6** Approximation du comportement non linéaire d'un assemblage par un modèle bi linéaire
-
- Figure II.1** Mise en évidence des effets P- δ et P- Δ relatifs à un élément poutre-colonne
- Figure II.2** Modèles Différents comportements non linéaires d'une structure (courbes chargement-déplacement)
- Figure II.3** Modélisation de l'élément poutre-colonne à étudier
- Figure II.4** Représentation d'un tronçon (dx) de l'élément poutre-colonne considéré
-
- Figure III.1** Modèle élémentaire associant la présence de connexions semi-rigides de rotation et de translation
- Figure III.2** Mise en évidence de l'influence de l'effort axial sur les fonctions de forme.
(a) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_i (b) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_j (c) : fonction de forme relative au déplacement transversal θ_i (d) : fonction de forme relative au déplacement transversal θ_j
- Figure III.3** Mise en évidence de l'influence de l'effort axial et du module de cisaillement G sur les fonctions de forme
(a) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_i (b) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_j (c) : fonction de forme relative à la rotation θ_i (d) : fonction de forme relative à la rotation θ_j
- Figure III.4** Comparaison avec la solution élément fini (SL. Chan) : polynôme de degré 5
(a) : fonction de forme relative à la rotation θ_i (b) : fonction de forme relative à la rotation θ_j
- Figure III.5** Mise en évidence de l'effet de relaxation de la rotation nodale sur les fonctions de forme
(a) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_i (b) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_j (c) : fonction de forme relative à la rotation θ_i (d) : fonction de forme relative à la rotation θ_j
- Figure III.6** Mise en évidence de l'effet de relaxation des rotations nodales sur les fonctions de forme.
(a) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_i (b) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_j (c) :

- fonction de forme relative à la rotation θ_i (d) :
fonction de forme relative à la rotation θ_j
- Figure III.7 Mise en évidence de l'effet de relaxation du déplacement transversal du nœud (i) sur les fonctions de forme,
(a) : fonction de forme relative au déplacement transversal v_i (b) :
fonction de forme relative au déplacement transversal v_j (c) :
fonction de forme relative à la rotation θ_i (d) :
fonction de forme relative à la rotation θ_j
- Figure III.8 Orientation des charges nodales équivalentes $(M_i^q, M_j^q, T_i^q, T_j^q)$
- Figure III.9 Variation de l'effort tranchant à l'extrémité (i) équivalent nodal d'un chargement uniformément réparti $q(x)$
- Figure III.10 Variation du moment fléchissant à l'extrémité (i) équivalent nodal d'un chargement uniformément réparti $q(x)$
- Figure III.11 Orientation des charges nodales équivalentes $(M_i^o, M_j^o, T_i^o, T_j^o)$ (cas : n=1)
- Figure III.12 Orientation des charges nodales équivalentes $(M_i^o, M_j^o, T_i^o, T_j^o)$ (cas : n=2)
- Figure III.13 Variation de l'effort tranchant à l'extrémité (i) équivalent nodal de l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$ (cas : n=1)
- Figure III.14 Variation du moment fléchissant à l'extrémité (i) équivalent nodal de l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$ (cas : n=1)
- Figure III.15 Variation de l'effort tranchant à l'extrémité (i) équivalent nodal de l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$ (cas : n=2)
- Figure III.16 Variation du moment fléchissant à l'extrémité (i) équivalent nodal de l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$ (cas : n=2)
- Figure IV.1 Aperçu des conséquences liées à la nature des conditions aux limites :
-(a), (b), (c) : différentes situations de condition aux limites
-(d), (e), (f) : variation de la distribution des moments fléchissants
-(g), (h), (i) : variation de la charge critique de flambement
- Figure IV.2 Élément poutre à extrémités rigides vis-à-vis des déplacements transversaux et semi-rigides vis-à-vis des rotations de flexion
- Figure IV.3 Mise en évidence des facteurs de rigidité associés aux moments de flexions d'un élément poutre avec conditions aux limites en rotation :
(a) semi-rigide en (i), parfaitement rigide en (j)
(b) semi-rigide en (i), parfaitement articulé en (j)
- Figure IV.4 Analyse de la déformée, du moment de flexion et de l'effort tranchant d'une poutre avec :
(a) extrémités (i) et (j) parfaitement articulées
(b) extrémités (i) et (j) semi-rigides en rotations
(c) extrémités (i) et (j) parfaitement rigides
- Figure IV.5 Élément poutre à extrémités semi-rigides vis-à-vis des déplacements transversaux et des rotations de flexion
- Figure IV.6 Mise en évidence des facteurs de rigidité associés aux moments de flexions et efforts tranchants d'un élément poutre avec les conditions aux limites suivantes :
(a) rotation et déplacement semi-rigide en (i), rotation libre, déplacement nul en (j)
(b) rotation et déplacement semi-rigide en (i), rotation et déplacement nuls en (j)

- Figure IV.7** Analyse de la déformée, du moment de flexion et de l'effort tranchant d'une poutre avec :
- (a) rotations et déplacements nuls en (i) et (j)
 - (b, c) rotation et déplacement nuls en (i), rotation nulle (j) et déplacement semi-rigide en (j)
- Figure IV.8** Variation des moments fléchissants d'extrémité d'une poutre en présence :
- (a) d'un ressort de rotation à rigidité variable en (i)
 - (b) de deux ressorts identiques de rotation à rigidités variables en (i) et (j)
 - (c) d'un ressort de translation à rigidité variable en (i)
 - (d) d'un ressort de translation à rigidité variable et d'une articulation parfaite en (i)
- Figure IV.9** Variation des efforts tranchants d'extrémité d'une poutre en présence :
- (a) d'un ressort de rotation à rigidité variable en (i)
 - (b) de deux ressorts identiques de rotation à rigidités variables en (i) et (j)
 - (c) d'un ressort de translation à rigidité variable en (i)
 - (d) d'un ressort de translation à rigidité variable et d'une articulation parfaite en (i)
- Figure IV.10** Élément poutre à extrémités semi-rigides vis-à-vis des déplacements transversaux et des rotations de flexion et tenant compte de l'influence du module de cisaillement G sur les rotations de flexion
- Figure IV.11** Mise en évidence de l'influence du module de cisaillement G sur les variations de la déformée, du moment de flexion et de l'effort tranchant d'une poutre en présence :
- (a,b,c) d'un ressort de rotation à rigidité relative ($f_{ri}=0.5$) à l'extrémité (i)
 - (d,e,f) d'un ressort de translation à rigidité relative ($f_{yi}=0.01$) à l'extrémité (i)
- Figure IV.12** Différents exemples de modes de flambement et facteurs K respectifs
- Figure IV.13** Courbes de variation du facteur de longueur effective de flambement K : (élément poutre-colonne à nœuds (i et j), semi rigides en rotation , fixes en translation)
- Figure IV.14** Courbes de variation du facteur de longueur effective de flambement K : (élément poutre-colonne à nœuds : (i) encastré et (j) complètement semi-rigide)
- Figure IV.15** Courbes de variation du facteur de longueur effective de flambement K : (élément poutre-colonne à nœuds : (i) quasi articulé et (j) complètement semi-rigide)
- Figure IV.16** Abaque $0.5 < K < 0.6$, facteur de longueur effective de flambement d'un élément poutre-colonne
- Figure IV.17** Abaque $0.95 < K < 0.96$, facteur de longueur effective de flambement d'un élément poutre-colonne
- Figure IV.18** Abaque $1.4 < K < 1.8$, facteur de longueur effective de flambement d'un élément poutre-colonne
- Figure IV.19** Abaque $1.4 < K < 3.8$, facteur de longueur effective de flambement d'un élément poutre-colonne
- Figure V.1** Modèle d'assemblage poutre-poteau
- Figure V.2** Exemples de lois de comportements ($M-\theta$) et modèles d'assemblages
- Figure V.3** Modèle sous ensemble de structure pour l'évaluation du facteur K
- Figure V.4** Abaques d'évaluation du facteur K de longueur effective d'un élément poutre-colonne
- Figure V.5** Procédure de chargement pas à pas avec processus itératif de substitution
- Figure V.6** Élément poutre à extrémités nodales semi-rigides, soumis à l'action d'un chargement axial en présence d'une imperfection géométrique initiale $y_0(x)$
- Figure V.7** Courbes de variation : flèches par ml , correspondant aux situations (a), (b), (c) et (d) de l'exemple proposé

- Figure V.8** Structure correspondant à l'exemple N°2
- Figure V.9** Analyse au second ordre de l'exemple N°. 2
- (a) : comportement global (P Vs. $\Delta_E^{hor.}$)
- (b), (c) : comportement local de l'élément (ED), (P Vs. N_{ED}), (P Vs. K_{ED}).
- Figure V.10** Analyse au second ordre de l'exemple N°. 2
- (a) : comportement global (P Vs. $\Delta_E^{hor.}$)
- (b), (c) : comportement local de l'élément (EF), (P Vs. N_{EF}), (P Vs. K_{EF}).
- Figure V.11** Structure correspondant à l'exemple N°3
- Figure V.12** Structure correspondant à l'exemple N°3 avec chargement horizontal en B

I.1 Généralités

I.1.1 L'instabilité par flambement

La vérification de la stabilité est une étape importante dans une analyse de structure. A ce jour, cet aspect fait l'objet d'une attention particulière de la part de nombreux scientifiques du domaine, en raison de la complexité des équations mathématiques qui traduisent ce comportement.

La perte de stabilité d'une structure est un phénomène très sévère, car se manifestant de façon imprévisible et spontanée. Ce comportement est très fréquent dans les structures élancées, particulièrement celles constituées d'éléments poutre-colonnes, connues pour être très vulnérables, entre autres à l'instabilité par flambement.

Depuis longtemps déjà, il était connu que la charge critique de ruine par flambement, d'un élément poutre-colonne, était dictée par la nature des conditions aux limites de l'élément et du niveau de compression auquel ce dernier est soumis. Par la suite, cette charge critique a notamment été associée à la notion de 'longueur effective de flambement', que l'on retrouve dans quasiment l'ensemble des codes et règlements de calculs élaborés à ce jour.

Wood [79,80,81,82], était parmi les précurseurs dans la formulation liée à cette notion, en proposant dans le milieu des années 1970 des courbes graphiques de dimensionnement permettant une quantification rigoureuse de la longueur effective de flambement d'une poutre-colonne, associée à différentes situations non conventionnelles de condition aux limites, et pouvant appartenir soit à des structures à nœuds fixes ou alors à des structures à nœuds déplaçables.

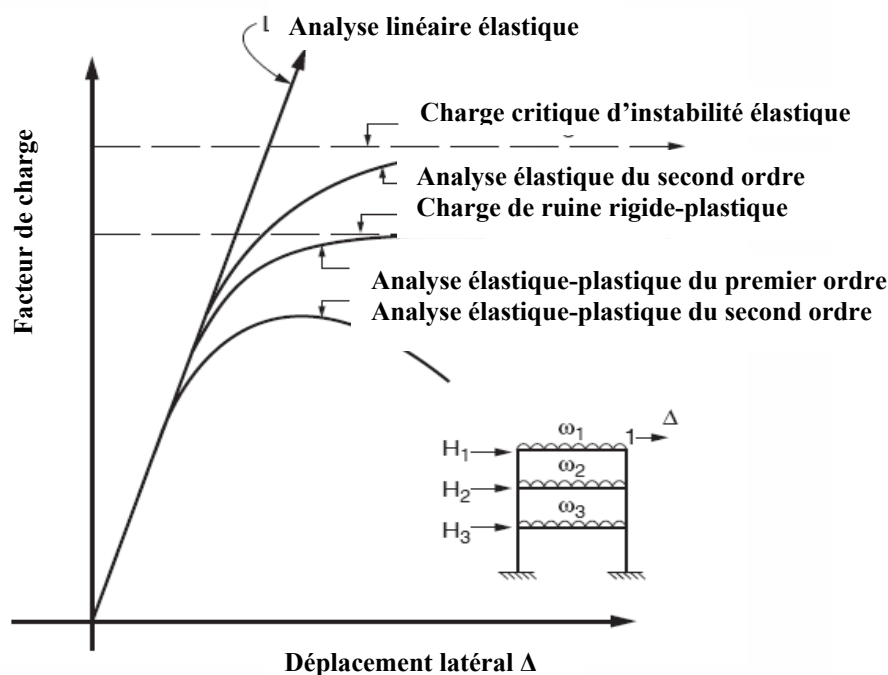
Aussi, il y a lieu de relever que durant ces dix dernières années, de nombreux chercheurs comme Nethercot, Girgin et al. [63, 46], ont souligné les faiblesses de cette méthode, surtout quand il s'agit des structures à nœuds déplaçables. Cette situation nouvelle fera évoluer les codes et règlements, vers des restrictions plus sévères quant à l'utilisation de cette méthode.

Ainsi, on a pu observer que les réglementations les plus récentes comme l'Eurocode [40,41] préconisent pour le calcul des structures élancées à modérément élancées de remplacer la méthode de la longueur effective par une analyse globale non linéaire du second ordre. Cette démarche s'explique par les résultats irrationnels auxquels aboutit cette méthode dans l'analyse des structures à nœuds déplaçables. En effet, cette méthode fait ressortir pour des éléments appartenant à ce type de structure des valeurs de longueur effective supérieures de plus de 10 fois la longueur réelle ; ce

qui correspond à un résultat de grande ampleur comparativement au cas classique de la console dont la longueur effective vaut 2 fois la longueur réelle.

Cette méthode reste malgré tout d'actualité, en raison des difficultés que rencontrent les chercheurs à proposer une méthode d'analyse qui allie sa simplicité à la fiabilité et la rigueur d'une analyse globale du second ordre de son côté beaucoup plus coûteuse en temps et très lourde par sa formulation.

D'une façon générale, l'analyse des structures vis-à-vis de la stabilité peut être réalisée à différents niveaux de complexité. La figure (I.1) en dresse un aperçu global par le biais de la représentation schématique de la relation chargement-déplacement d'une structure quelconque.



Différentes approches d'analyse non linéaire des structures (courbes chargement-déplacement)

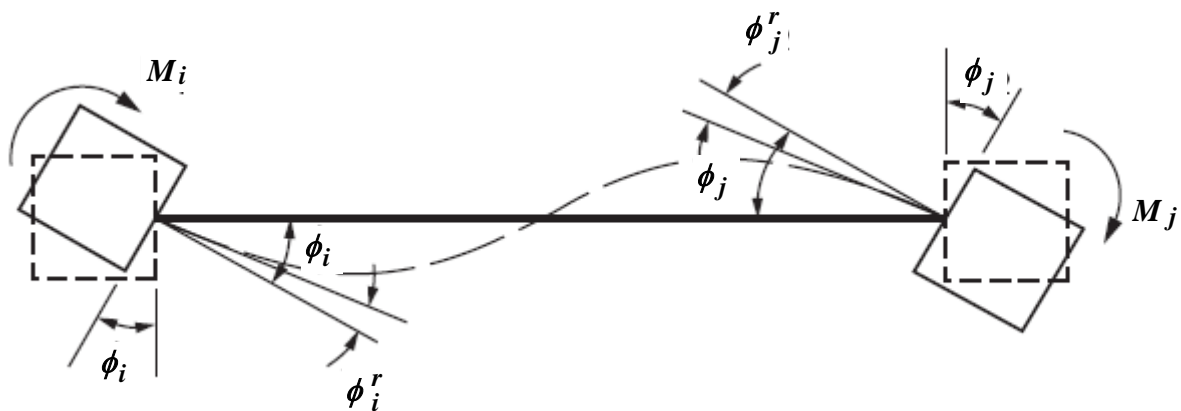
Figure I.1

I.1.2 Les connexions nodales semi-rigides

Par ailleurs, un travail considérable a été mené durant ces dernières années en ce qui concerne les systèmes d'assemblages assurant la connexion entre différents éléments d'une structure et dont le comportement peut altérer de façon significative la réponse globale. En effet dans les modélisations classiques, les connexions nodales sont considérées dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

- Rigide : ce qui suppose au droit de ces connexions, les angles entre éléments invariables.
- Articulée : ce qui suppose au droit de ces connexions, les angles entre éléments libres en rotation.

En réalité dans beaucoup de structure, notamment les ossatures métalliques, la connexion nodale épouse un comportement totalement différent, qui se situe à mi-chemin des deux situations précédemment idéalisées, ceci en raison de la présence d'assemblages destinés à assurer la liaison entre les différents éléments qui constituent la structure. Cette situation peut être modélisée, de façon simplifiée par le biais d'un ressort en rotation destiné à traduire la relation entre le moment M agissant dans la connexion et la rotation ϕ^r qui résulte dans l'assemblage, comme le montre la figure I.2 ci-dessous.



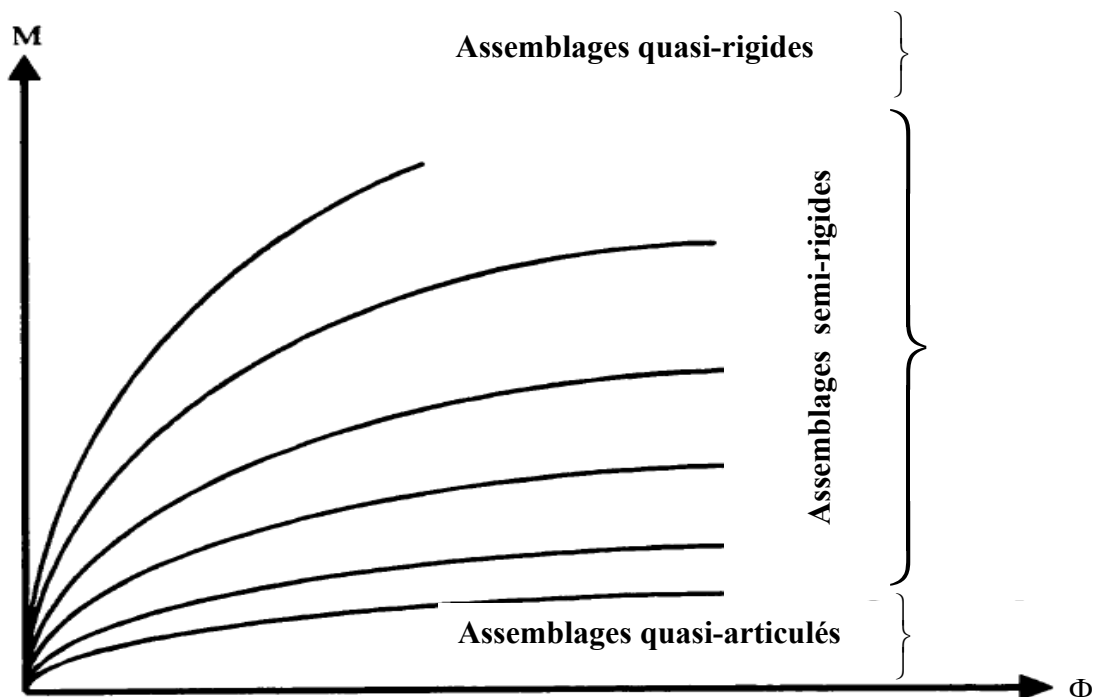
Modèle d'élément poutre à extrémités nodales semi-rigides

Figure I.2

Cette forme simplifiée de modélisation nodale est identifiée dans la littérature [38,42,45] par l'expression '**connexion semi-rigide**', dont on traduit le comportement de la partie ressort par le biais de la relation (I.1), dans laquelle S^r , ϕ^r et M désignent respectivement la souplesse, la rotation et le moment au droit du ressort. A titre indicatif, la connexion est considérée comme parfaitement rigide lorsque S^r égale à zéro, parfaitement articulée lorsque S^r tend vers l'infini, ce qui correspond aux deux situations classiques extrêmes citées précédemment.

$$\phi^r = S^r \times M \quad (\text{I.1})$$

Il est à présent bien établi que les différents assemblages que l'on réalise dans la pratique ont une influence directe sur la réponse globale d'une structure. Dans ce domaine précisément, de nombreuses études expérimentales ont permis d'aboutir à une meilleure connaissance du comportement des connexions réalisées à partir de systèmes d'assemblages, notamment vis-à-vis du comportement Moment-rotation qui obéit qualitativement à la loi $M-\Phi$ représentée par l'une des courbes données par la figure I.3 ci-après.



Représentation qualitative des lois de comportements $M-\Phi$

Figure I.3

I.2 Etat des connaissances sur le comportement au 2nd ordre d'une poutre-colonne

La recherche dans le domaine de l'analyse non linéaire des structures, est d'un point de vue littéraire un sujet très vaste, avec des périodes historiques de développements que l'on peut aisément associer au traitement de certains aspects particuliers de comportement.

On citera à titre d'exemple, le comportement du matériau par le biais du concept de rotule plastique dans les années 1960, le comportement non linéaire lié à la géométrie (effets du second ordre) déjà soulevé au début des années 1930 puis formalisé dans les années 1970, le comportement relatif aux connexions semi-rigides durant les années 1980, le comportement sous l'effet de la chaleur (hautes températures) depuis les années 1990.

Cette dernière décennie se singularise par le souci d'améliorer les formulations déjà existantes afin de rendre les approches d'analyses globales plus fiables et souples à la fois.

La présente revue bibliographique, sera sélective et focalisée en particulier sur les différentes approches développées à ce jour en ce qui concerne les aspects liés au comportement non linéaire géométrique d'une part, et le couplage qui en résulterait en présence des connexions semi-rigides, d'autre part.

I.2.1 La non linéarité géométrique

L'analyse non linéaire géométrique, ou encore l'analyse du second ordre (selon les auteurs) vise un double objectif :

- Prise en compte de la perte de rigidité de flexion en raison de l'influence des forces de compression sur les déformées élémentaires associées aux rotations nodales. Cet aspect est communément désigné par 'effet P- δ '.
- Prise en compte de la perte de rigidité de flexion en raison de l'influence des forces de compression sur les déformées élémentaires associées aux déplacements transversaux des extrémités nodales. Cet aspect est communément désigné par 'effet P- Δ '.

Le débat concernant ce type d'analyse semble actuellement se focaliser sur la recherche d'une formulation appropriée de la matrice de rigidité d'un élément poutre-

colonne, capable d'intégrer à la fois, localement l'effet P- δ ' et globalement l'effet P- Δ particulièrement pour les structures à nœuds déplaçables.

A cet effet, on distingue deux principales approches de formulation :

- La formulation par fonctions de stabilité exactes
- La formulation par fonctions de stabilité approchées

Dans la formulation par fonctions de stabilité exactes, la matrice de rigidité de l'élément est obtenue à partir de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre (I.2) d'un élément poutre-colonne. Cette résolution permet d'aboutir à différentes solutions de forme trigonométrique de la déflexion $y(x)$ [4,29], selon que l'effort axial soit de compression ou de traction. La non linéarité géométrique intervient dans cette solution, par le biais de la courbure additionnelle induite par l'interaction entre l'effort axial N et la déflexion $y(x)$ de l'élément.

$$y(x)'' + \frac{N}{EI} y(x) = - \frac{M(x)}{EI} \quad (I.2)$$

Dans la relation (I.2), $y(x)''$ désigne la dérivée seconde de la déflexion $y(x)$, $M(x)$ désigne le moment de flexion agissant le long de l'élément, EI désigne le produit entre le module de Young 'E' du matériau constituant l'élément et l'inertie 'I' de la section élémentaire.

La résolution de cette équation différentielle, permet d'aboutir à la déflexion $y(x)$ qui s'écrit en fonction de quatre constantes d'intégration que l'on peut définir par le biais de quatre conditions aux limites arbitraires de déplacement et de rotation ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$), choisies par rapport aux deux extrémités de l'élément. Ainsi il devient aisé de définir les quatre constantes d'intégration, et finalement exprimer la déflexion $y(x)$ en fonction des déplacements et rotations nodaux. Par la suite, il ne reste plus qu'à établir une relation directe entre les efforts nodaux (T_i, M_i, T_j, M_j) et les déplacements et rotations ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$) pour exprimer la matrice de rigidité de l'élément considéré. A titre indicatif, on peut exprimer le comportement flexionnel d'une poutre-colonne vis-à-vis des rotations nodales par le biais de la relation matricielle de rigidité suivante :

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

Où A et B représentent les fonctions de stabilité données par la relation (I.4) suivante :

$$\begin{cases} A = ml (ml \cos(ml) - \sin(ml)) / D \\ B = -ml (ml - \sin(ml)) / D \\ \text{Avec :} \\ D = -2 + 2 \cos(ml) + ml \sin(ml) \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Où ml désigne un paramètre adimensionnel qui caractérise le niveau de chargement axial (ici de compression) vis-à-vis de l'instabilité d'un élément poutre-colonne :

$$ml = \sqrt{\frac{|N|}{EI}} l \quad (\text{I.5})$$

La deuxième formulation est quant à elle basée sur une approche par éléments finis [59], qui tient compte de la non linéarité géométrique par l'intermédiaire des termes du second ordre que l'on peut introduire par le biais de la relation déformation-déplacement qui se présente sous la forme (I.6) suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}^e \quad (\text{I.6})$$

Dans la précédente relation, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ désigne la déformation élémentaire, \mathbf{u}^e les déplacements élémentaires et $\bar{\mathbf{B}}$ la matrice déformation-déplacement. D'autre part, les contraintes $\boldsymbol{\sigma}^e$ dans l'élément peuvent être liées aux déformations de l'élément par le biais de la matrice constitutive $\bar{\mathbf{D}}$ comme le montre la relation (I.7) ci-après.

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{I.7})$$

Enfin dans cette approche, la fonction de déflexion $y(x)$ est obtenue approximativement par le biais d'une combinaison de fonctions, de forme polynomiale, associées respectivement aux déplacements et rotations nodaux comme le montre la relation (I.8) ci-après.

$$y(x) = N_{\theta i} \theta_i + N_{v i} v_i + N_{\theta j} \theta_j + N_{v j} v_j \quad (\text{I.8})$$

$N_{\theta i}$, $N_{v i}$, $N_{\theta j}$, $N_{v j}$, sont des fonctions de forme, généralement choisies de forme polynomiale et pouvant être cubiques ou de degrés supérieurs.

Ainsi par le biais de la première variation de la fonctionnelle de l'énergie, on peut aisément établir la matrice de rigidité de l'élément poutre-colonne. Dans le cas où la déflexion $y(x)$ est approximée par des fonctions de forme polynomiale du troisième degré, les fonctions de stabilité A et B présentées par la relation (I.4) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} A = 4 \left(1 - \frac{ml^2}{30} \right) \\ B = 2 \left(1 + \frac{ml^2}{60} \right) \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas où la déflexion $y(x)$ est approximée par des fonctions de forme polynomiale du cinquième degré comme proposée par Chan [22], ces mêmes fonctions de stabilité deviennent :

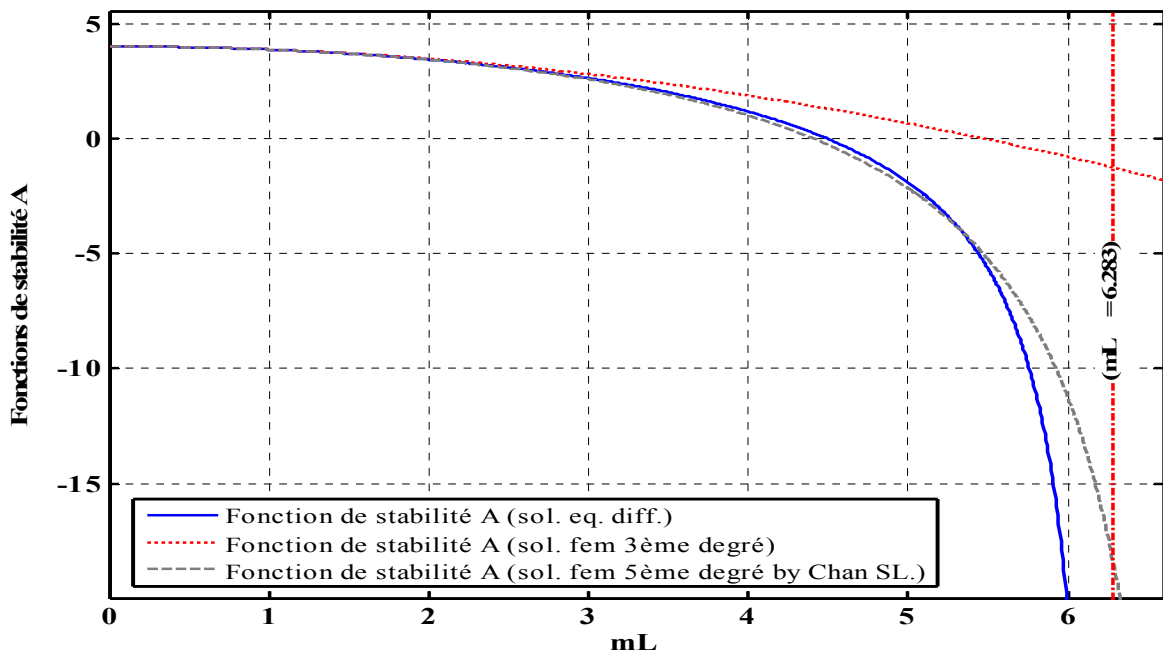
$$\begin{cases} A = 4 (3840 - 256ml^2 + 3ml^4) / (ml^2 - 80) / (ml^2 - 48) \\ B = 2 (3840 - 64ml^2 + ml^4) / (ml^2 - 80) / (ml^2 - 48) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Le paramètre ml est défini par la relation (I.5) précédente.

Les fonctions de stabilité A et B, obtenues respectivement en (I.4), (I.9), et (I.10) permettent de mesurer l'important écart séparant ces différentes formulations. Une représentation graphique de ces fonctions de stabilité comme le montrent les figures (I.4) et (I.5) met d'emblée en évidence la faiblesse de la solution obtenue par approximation du troisième degré, on peut observer par ailleurs que la solution du cinquième degré proposée par Chan semble relativement proche de la solution exacte jusqu'à un niveau de charge axiale correspondant à $ml = \pi$ puis s'en écarte substantiellement pour des niveaux de charge supérieurs à $ml = 5.5$.

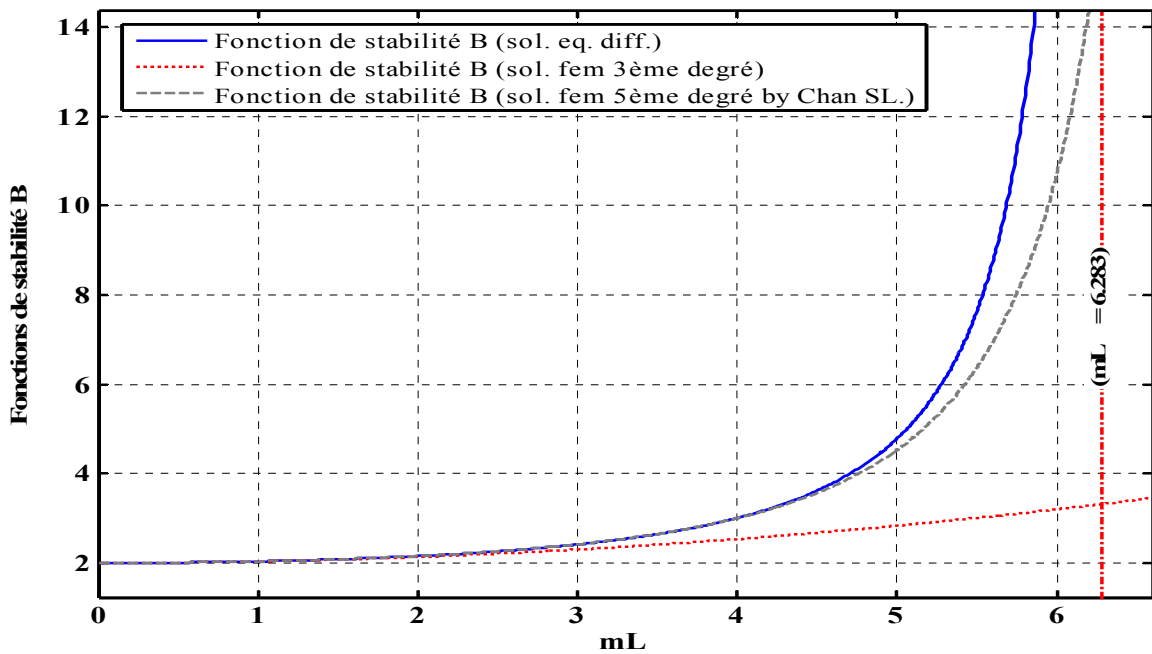
De plus, il est important de noter qu'à la valeur d'abscisse $ml = 2\pi$, la solution exacte obtenue à partir de la résolution de l'équation différentielle donnée par la relation (I.2) présente une asymptote, contrairement aux deux solutions obtenues par éléments finis qui se distinguent en cette même abscisse par des valeurs bien définies. En fait, cette dernière observation est suffisamment riche en enseignements, car on y distingue d'après la solution exacte, que l'instabilité de l'élément se traduit mathématiquement par une tendance asymptotique des fonctions de stabilité au voisinage d'une valeur ml correspondant à l'effort axial critique de l'élément.

A titre indicatif, la valeur d'abscisse $ml = 2\pi$ correspond dans ce qui vient d'être énoncé à la limite d'instabilité d'une poutre-colonne bi encastree.



Courbes de variation de la fonction de stabilité A obtenue par différentes approches

Figure I.4



Courbes de variation de la fonction de stabilité B obtenue par différentes approches

Figure I.5

A la lecture des nombreuses publications consacrées à cette question, il y a quasiment unanimité quant à la robustesse de la solution exacte obtenue à partir de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre, cependant d'aucuns déplorent le fait que cette solution soit confinée à la seule formulation exacte de la matrice de rigidité par le biais des fonctions de stabilité. Cette solution serait de l'avis de nombreux chercheurs [30,70] plus intéressante si elle venait à être complétée dans sa formulation pour permettre de tenir compte des effets d'une imperfection géométrique initiale et d'un chargement transversal quelconque associés à l'élément considéré.

Par ailleurs, il a été observé que la formulation par approche élément fini devient inconsistante dès que le paramètre ml qui traduit le niveau de chargement axial dépasse un seuil correspondant à la moitié de la charge critique de flambement. Cette situation est d'autant plus déplorable, car même le recours à une augmentation du nombre d'élément dont l'objectif est d'améliorer la qualité de la solution, nécessite un temps de calcul plus important tout en faisant accroître le risque de divergence numérique en raison des faiblesses liées aux fonctions de stabilité formulées par ce type d'approche.

I.2.2 L'imperfection initiale géométrique

La considération d'une imperfection initiale élémentaire, de nature géométrique est un des aspects importants que l'on s'est fixée comme objectif à résoudre dans ce travail de recherche. Pour ce faire, on adopte l'approche classique qui consiste à supposer une déformée initiale $y_0(x)$ de forme sinusoïdale (capable d'épouser différentes formes de courbures) devant se traduire sous forme d'un chargement nodal équivalent, fictif.

Dans ce cadre, Lui [59] a adapté la solution polynomiale cubique pour tenir compte de la présence d'une imperfection initiale, par l'intermédiaire d'une combinaison de deux nouvelles fonctions de forme destinées à représenter respectivement le premier mode de flambement symétrique et le second mode de flambement antisymétrique.

Plus tard, Chan a publié dans une série d'articles [24,28] une formulation permettant d'élargir la solution polynomiale de degré cinq, à la présence d'une imperfection géométrique initiale de forme parabolique s'annulant aux deux extrémités de l'élément et d'amplitude maximale à mi travée. Cette dernière solution, contrairement à celle relatée précédemment, ne peut pas simuler le mode de flambement antisymétrique qui caractérise la ruine par flambement latéral que l'on rencontre dans le cas des structures à nœuds déplaçables.

Enfin d'autres approches toujours par éléments finis, proposent d'intégrer cette imperfection géométrique sous une forme sinusoïdale comme proposée par les auteurs [1,2,4,18,49,50].

Dans ce contexte, il y a lieu d'indiquer que de nombreux règlements de par le monde préconisent d'introduire l'effet de l'imperfection géométrique initiale par le biais d'une déflexion initiale d'amplitude maximale fixée à environ 0.1% de la longueur totale de l'élément.

I.2.3 La non linéarité géométrique en présence d'assemblages semi-rigides

L'autre volet sur lequel s'est penchée cette étude bibliographique concerne le comportement des connexions nodales en présence d'assemblages semi-rigides. A cet égard, il est utile de rappeler quelques notions générales relatives au comportement des connexions. La figure (I.3) précédente, qui illustre la relation moment-rotation met en évidence trois familles distinctes de connexions.

Notons que la première famille qui exhibe de petites rotations pour de grandes valeurs de moments, correspond aux connexions dites quasi-rigides. La seconde famille relative aux connexions dites quasi-articulées se distingue par de grandes rotations pour de petites valeurs de moments. Enfin la troisième famille dont le spectre englobe une large bande d'application dans la pratique, procure un niveau appréciable de moment tout en permettant une quantité non négligeable de rotation, cette situation correspond aux connexions dites semi-rigides.

Partant du précédent constat, on peut classer d'une façon générale les connexions comme rigides lorsqu'elles sont capables de développer environ 90% de la valeur de moment d'encastrement d'une poutre. Celles qui offrent assez de ductilité en permettant de tenir compte des rotations d'extrémité, sans pour autant résister à plus de 20% de la valeur de moment d'encastrement d'une poutre sont désignées comme articulées. Toute autre connexion offrant une résistance en moment qui se situe entre les deux limites précédentes et permettant un niveau de rotation acceptable doit être traitée comme semi-rigide.

A titre indicatif, Il est notamment précisé dans l'Eurocode [42], que les assemblages sont classés selon trois types de modèles simplifiés :

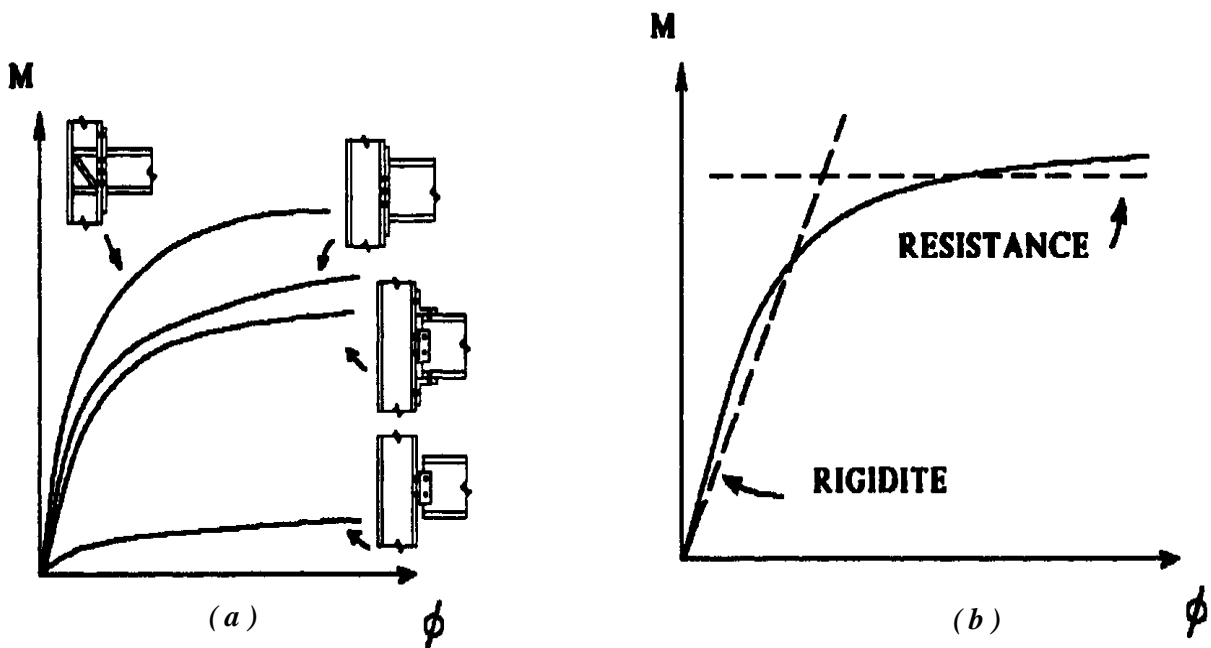
- a- **Simple** : situation où l'assemblage ne transmet aucun moment.
- b- **Continue** : situation où l'assemblage est sans effet sur l'analyse.
- c- **Semi-continu** : situation où l'assemblage doit obligatoirement être considéré comme semi-rigide dans le cas d'une analyse globale de structure, élastique ou plastique.

Dans un souci de simplification de l'analyse globale élastique, l'Eurocode (EC3) préconise une approximation du comportement non linéaire des assemblages voir figure (I.6.a), par une loi de comportement ($M - \phi$) bi linéaire caractérisée par une rigidité constante et un niveau de résistance à la manière d'une rotule plastique comme le montre la figure (I.6.b) ci- après.

Ces différents aspects, ont fait l'objet d'importants travaux de recherches expérimentales ayant contribué à une meilleure connaissance du comportement d'un grand nombre de modèle d'assemblage. A cet égard, nous citerons les travaux remarquables de Kishi et Chen [52], qui ont énormément aidé quant à la classification de ces assemblages grâce à la base de données qu'ils ont établie dans ce domaine. Ces résultats s'avèrent très utiles quant à l'identification du paramètre de rigidité caractérisant l'assemblage, permettant ainsi de définir la relation entre le moment M qui agit dans la connexion et la rotation ϕ^r induite dans cette dernière.

Cette relation peut s'écrire, partant de la relation (I.1), sous la forme linéaire suivante :

$$M = R \frac{EI}{l} \phi^r \quad (I.11)$$



Approximation du comportement non linéaire d'un assemblage par un modèle bi linéaire

Figure I.6

Dans la précédente relation, R désigne une entité adimensionnelle mesurant le degré de rigidité d'un assemblage ramené à la rigidité de rotation $(\frac{EI}{l})$ de l'élément auquel il est associé. Ainsi lorsque les extrémités (i) et (j) d'un élément sont associées respectivement à deux assemblages caractérisés par leurs degrés de rigidité R_{ri} et R_{rj} , alors les rotations d'extrémité θ_i et θ_j propres à l'élément considéré sont données par les deux relations suivantes :

$$\theta_i = \phi_i - \frac{M_i}{R_{ri}(\frac{EI}{l})} \quad (\text{I.12})$$

$$\theta_j = \phi_j - \frac{M_j}{R_{rj}(\frac{EI}{l})} \quad (\text{I.13})$$

ϕ_i et ϕ_j désignent les rotations nodales totales (Assemblage+poutre) des deux extrémités de l'élément. Sur la base de ces considérations, la relation (I.3) devient :

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_i - \frac{M_i}{R_{ri}(\frac{EI}{l})} \\ \phi_j - \frac{M_j}{R_{rj}(\frac{EI}{l})} \end{bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

En résolvant le système d'équations donné par la relation (I.14), par rapport à M_i et M_j on obtient le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ B_s & C_s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Dans la relation (I.15) on désigne par A_s , B_s et C_s les nouvelles fonctions de stabilité qui intègrent la présence des deux ressorts de rotation situés aux extrémités de l'élément (ij). Elles s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A_s = (A + f_{rj}(A^2 - B^2)) / D_s \\ B_s = B / D_s \\ C_s = (A + f_{ri}(A^2 - B^2)) / D_s \end{cases} \quad (I.16)$$

$$D_s = (1 + f_{ri}A)(1 + f_{rj}A) - f_{ri}f_{rj}B^2 \quad (I.17)$$

$$\begin{cases} f_{ri} = \frac{1}{R_{ri}} \\ f_{rj} = \frac{1}{R_{rj}} \end{cases} \quad (I.18)$$

Dans les relations (I.14) et (I.16) et (I.17), A et B désignent selon l'approche adoptée, les fonctions de stabilité précédemment formulées par le biais des relations (I.4), (I.9) et (I.10) et associées à un effort axial de compression. La relation (I.17) désigne le dénominateur D_s intervenant dans les fonctions de stabilité (I.16). Enfin, la relation (I.18) exprime les indexes de flexibilités f_{ri} et f_{rj} respectifs aux deux ressorts situés aux extrémités de l'élément considéré.

Dans la situation d'un effort axial de traction, les paramètres A et B s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A = ((ml)^2 \cosh(ml) - (ml) \sinh(ml)) / D \\ B = ((ml) \sinh(ml) - (ml)^2) / D \\ \text{Avec:} \\ D = 2 - 2 \cosh(ml) + (ml) \sinh(ml) \end{cases} \quad (I.19)$$

Avec ml donné par la relation (I.5).

Il y a lieu d'indiquer, que la relation (I.15), se ramène dans le cas d'une analyse linéaire du premier ordre (effort axial nul), à la situation $A=4$ et $B=2$.

La relation (I.15) est donc toute indiquée pour réaliser une analyse non linéaire géométrique globale d'une structure à noeuds semi-rigides. Cependant, à la lecture de

nombreux auteurs [23,70], il s'avère que l'élément cubique soit privilégié dans beaucoup de programmes commerciaux de calcul de structure. Ce choix est dicté par le fait que dans cette formulation on dispose de fonctions de forme à partir desquelles peuvent être déduites les charges nodales équivalentes pour tout chargement appliqué transversalement sur l'élément. D'autre part, et pour une meilleure prise en compte des effets du second ordre, il suffit de procéder à une subdivision de l'élément considéré.

Mageirou et al. [62], ont proposé une approche simplifiée permettant d'évaluer la charge critique de flambement d'une structure étagée à connexions semi-rigides. A cet effet, des expressions analytiques ainsi que des représentations graphiques sont proposées pour le calcul de la charge critique de flambement, tenant compte des effets (P- Δ) que l'on considère comme très pénalisant vis-à-vis du comportement de telles structures. Dans cette approche simplifiée, l'on propose de remplacer tous les éléments de la structure qui convergent vers les deux extrémités de l'élément potentiellement instable, par des ressorts de rotation et de translation équivalents.

Dans ce même ordre d'idée, Aristizabal [18,19] a proposé une solution désignée par l'auteur même, comme approximative et pratique à la fois, incluant : (1) les déformations de flexion, de cisaillement et axiale, (2) la présence d'une déclivité par rapport à l'axe longitudinale de l'élément, (3) l'excentrement des charges axiales.

Enfin, et de l'avis de beaucoup d'auteurs, le défi à réaliser dans ce domaine se résumerait à doter la solution rigoureuse, découlant de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre (I.2), des moyens dont disposent les solutions approchées par éléments finis qui pour leurs parts, sont moins rigoureuses mais très pratiques lorsqu'il s'agit de faire une analyse globale non linéaire.

I.3 Objectifs de la thèse

Le travail mené dans le cadre de cette recherche vise à contribuer par le biais d'une approche analytique rigoureuse, à la formulation d'un élément poutre-colonne destiné à l'analyse globale d'une structure vis-à-vis de l'instabilité par flambement. Par ailleurs, cette formulation est envisagée en considérant les extrémités nodales de l'élément en question comme étant semi-rigides.

Cette approche permettra de généraliser la formulation de l'élément poutre-colonne ainsi obtenu à toutes les éventualités de condition aux limites se situant entre les deux cas extrêmes parfaitement rigide et parfaitement articulé. Cet aspect sera considéré sur le double plan rotationnel et translationnel.

D'autre part, Cette formulation se fera en tenant compte de l'influence du module de cisaillement G sur les déformations élémentaires et de la présence d'une imperfection géométrique initiale.

Ce travail s'inscrit par ailleurs dans une logique de contribution numérique destinée à l'analyse globale non linéaire des structures. A cet effet, un programme de calcul numérique sera développé pour permettre de réaliser l'analyse globale vis-à-vis de l'instabilité par flambement, des structures planes à connexions semi-rigides.

A signaler que pour les besoins de ce travail, on considèrera les lois de comportements propres aux connexions semi-rigides, comme données du problème. Ces dernières peuvent êtres de nature linéaires ou non linéaires.

Pour mener à bien cette étude, il a fallu concrétiser les étapes suivantes :

-1-Généraliser l'équation différentielle d'équilibre (I.2) pour permettre de tenir compte simultanément :

- a/ des déformations de cisaillement
- b/ d'une imperfection géométrique initiale
- c/ d'un chargement transversal uniformément réparti

-2-Etablir les fonctions de forme relatives au champs de déplacement découlant de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre précédemment citée, en admettant des conditions aux limites arbitraires, de déplacement et de rotation.

-3-Déduire les fonctions de stabilité correspondant à la résolution précédente.

-4-Etendre les résultats précédents au comportement semi-rigide des connexions vis-à-vis des rotations de flexion et des déplacements suivant la direction transversale.

-5-Enfin, développer un programme de calcul numérique écrit en langage Fortran, et organisé selon une procédure incrémentale pas à pas, avec processus itératif de convergence à chaque pas de charge.

II.1 Introduction

L'analyse élastique du second ordre appliquée aux structures composées d'éléments fléchis sous charges axiales de compression, est une approche de substitution au principe de superposition des contraintes de compression et de flexion, qui suppose que l'élément reste durant ses différentes phases de chargement, dans sa position initiale.

En effet un chargement transversal quelconque lorsqu'il est appliqué à un élément poutre suffisamment élancé, provoquerait une déformée de flexion et par conséquent des contraintes de flexion en toutes sections de l'élément. Partant de cette situation, si l'élément poutre en question venait à subir l'action additionnelle d'un chargement axial de compression, il serait alors plus juste de tenir compte des moments fléchissants additionnels qui résulteraient de l'interaction entre le chargement axial appliqué et la déformée transversale déjà présente le long de l'élément poutre.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en équation les effets du second ordre traduisant l'interaction entre les charges axiales et la déformée flexionnelle de l'élément. Une telle démarche est indispensable en ce qui concerne l'analyse vis-à-vis de la stabilité des structures, notamment celles qui se distinguent par une flexibilité relativement importante.

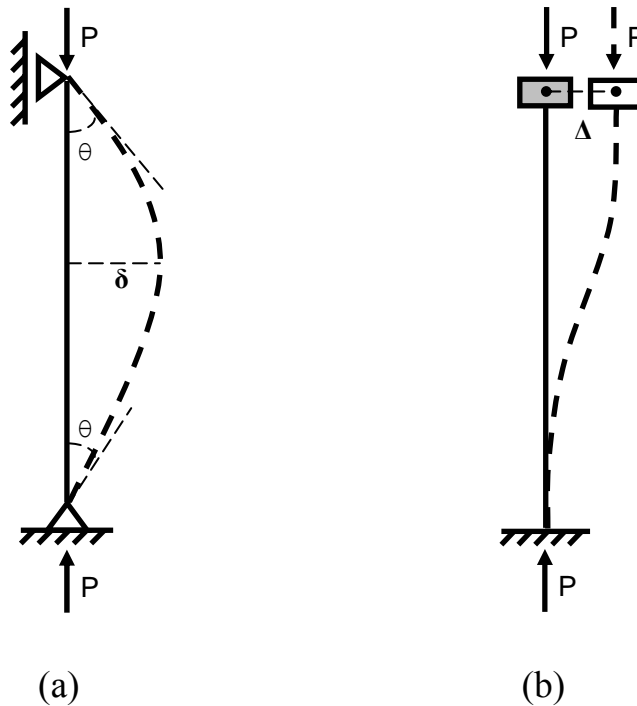
II.2 Effets du second ordre

Une analyse élastique destinée à prendre en compte les effets du second ordre nécessite comme préalable une formulation basée sur une configuration déformée de la structure. Ainsi, une telle formulation lorsqu'elle est menée de façon rigoureuse, permet de traduire l'effet d'amplification de courbure élémentaire découlant de l'interaction entre la déformation transversale et le chargement axial appliqué à l'élément.

En général, on associe ce phénomène d'amplification de courbure à la notion de stabilité que l'on caractérise dans la littérature par les effets suivants :

L'effet (P- δ) associé à l'influence du chargement axial sur la déformée de flexion liée aux rotations nodales de l'élément (figure II.1(a)).

L'effet (P- Δ) associé à l'influence du chargement axial sur la déformée de flexion liée aux déplacements transversaux nodaux de l'élément (figure II.1(b)).



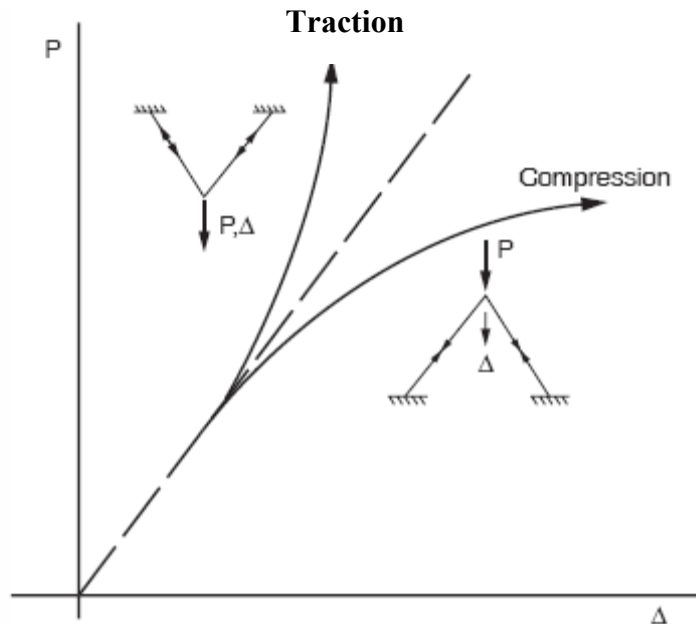
Mise en évidence des effets P- δ et P- Δ relatifs à un élément poutre-colonne

Figure II.1

Par ailleurs, il faut noter qu'une analyse non linéaire du second ordre nécessite une démarche de résolution itérative, dont la solution peut être représentée par une courbe chargement-déplacement comme le montre la figure (II.2).

Sur cette dernière, on peut observer grâce au modèle de structure illustré dessus, qu'en situation de compression, la structure subit une perte de rigidité pouvant entraîner une ruine par instabilité avant même que le matériau n'atteigne sa limite de résistance élastique.

Nous pouvons observer par ailleurs qu'en situation de traction, la déformation de la structure suit un cheminement favorable en terme de rigidité ; dans ce cas de figure c'est en général, la limite de résistance du matériau qui dicte la ruine de l'élément.



**Différents comportements non linéaires d'une structure
(courbes chargement-déplacement)**

Figure II.2

II.3 Etude de la stabilité d'un élément poutre-colonne

L'approche que nous proposons a pour objectif de généraliser l'équation différentielle d'équilibre traduisant les effets du second ordre d'un élément poutre-colonne. Le développement analytique qui sera consacré à cet effet, devra tenir compte simultanément des effets suivants :

- a/ Influence de l'effort axial compression sur la courbure.
- b/ Influence du module de cisaillement G sur les déformations.
- c/ Présence d'une imperfection géométrique initiale.
- d/ Action d'un chargement transversal $q(x)$ linéairement reparti.

II.3.1 Equations d'équilibre

Considérons un élément poutre-colonne (ij) représenté par la figure (II.3), où l'on désigne par P un chargement de compression axial appliqué aux deux extrémités de l'élément, et par $q(x)$ un chargement transversal linéairement réparti le long de l'élément de la forme :

$$q(x) = a x + b \quad (\text{II.1})$$

On suppose par ailleurs que cet élément possède une imperfection initiale de forme sinusoïdale donnée par la relation :

$$y_0(x) = v_0 \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (\text{II.2})$$

Les paramètres (n) et (v_0) sont associés respectivement à la forme de la courbure et à la valeur maximale de l'amplitude de l'imperfection initiale (à titre indicatif, lorsque $n=1$ la courbure initiale possède une amplitude maximale située à mi-travée).

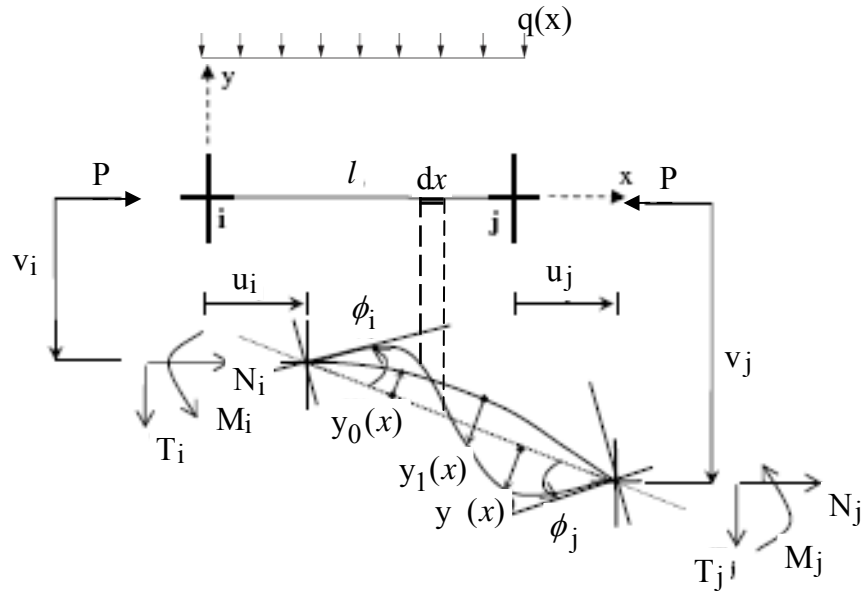
On identifie par ($N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j$) et ($u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j$) respectivement, les éléments de réductions et les déplacements nodaux associés aux extrémités nodales (i) et (j) de l'élément considéré.

On adopte pour les besoins de ce chapitre, le repère cartésien (xy) dont l'origine se trouve confondue avec l'extrémité nodale (i). L'axe longitudinal (ox) est orienté vers la droite, et l'axe (oy) perpendiculaire à (ox) et orienté vers les fibres inférieures de l'élément considéré.

D'autre part, on désigne par :

$y_1(x)$: La déformée de l'élément comptée à partir de sa position d'imperfection initiale $y_0(x)$

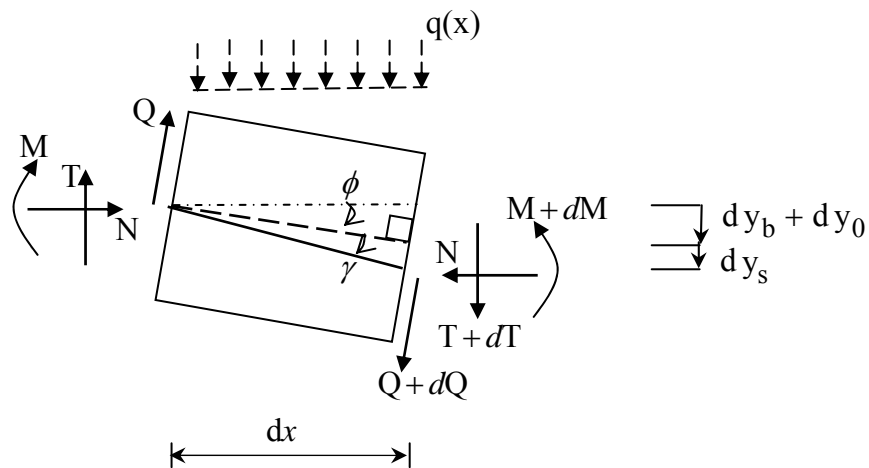
$y(x)$: La déformée finale de l'élément qui correspond à la somme algébrique ($y_1(x) + y_0(x)$)



Modélisation de l'élément poutre-colonne à étudier

Figure II.3

Considérons à présent à partir de l'élément (ij) dans sa position déformée, un tronçon infinitésimal de longueur dx (figure II.4). M , T , N représentent les éléments de réduction à l'abscisse x . dM , dT , dN constituent les variations que subissent ces éléments de réduction à l'abscisse $(x+dx)$. Les quantités dy_b , dy_s , dy_0 désignent respectivement les variations de déformées relatives à la flexion, à l'effet de cisaillement et à l'imperfection géométrique initiale. Enfin la quantité Q résulte des efforts N et T , il en est de même pour la variation dQ laquelle résulte des variations dN et dT . Q et dQ sont une conséquence du glissement que subissent les sections sous l'effet de cisaillement.



Représentation d'un tronçon (dx) de l'élément poutre-colonne considéré

Figure II.4

Partant du tronçon dx Ainsi établi, l'équilibre des moments fléchissants permet d'écrire la relation suivante :

$$M - (M + dM) + q(x) \frac{(dx)^2}{2} + N(\phi + \gamma) dx + (T + dT) dx = 0 \quad (\text{II.3.a})$$

En négligeant les termes différentiels d'ordre égal ou supérieur à deux, la relation précédente devient :

$$\frac{dM}{dx} = T + N(\phi + \gamma) \quad (\text{II.3.b})$$

Dans les relations (II.3.a,b) :

ϕ désigne la rotation due à l'effet de flexion.

γ désigne le glissement due à l'effet de cisaillement.

D'autre part, l'équilibre des forces suivant l'axe oy permet d'aboutir à la relation suivante :

$$T - (T + dT) - q(x) dx = 0 \quad (\text{II.4.a})$$

Qui devient après simplification :

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \quad (\text{II.4.b})$$

Sachant par ailleurs que l'on dispose des relations suivantes :

$$\begin{cases} y_1(x) = y_b(x) + y_s(x) & \text{(a)} \\ y(x) = y_1(x) + y_0(x) & \text{(b)} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Cela nous permet d'introduire les relations suivantes de rotation :

$$\begin{cases} \phi_b = \frac{dy_b}{dx} = y_b' & \text{(a)} \\ \phi_0 = \frac{dy_0}{dx} = y_0' & \text{(b)} \\ \phi = \phi_b + \phi_0 = y_b' + y_0' = y' - y_s' & \text{(c)} \\ \gamma = \frac{dy_s}{dx} = y_s' & \text{(d)} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

L'indice (') désigne dans les relations précédentes la première dérivée par rapport à la variable x . On désignera pour la suite de ce chapitre par : (') la seconde dérivée, (') la troisième dérivée, (') la quatrième dérivée par rapport à la variable x .

Ainsi la relation (II.3.b) précédente devient :

$$\frac{dM}{dx} = T + N(y_0' + y_b' + y_s') \quad (II.7)$$

Nous pouvons établir par ailleurs entre les efforts T, N et Q la relation suivante en raison de l'hypothèse des petites déformations :

$$Q = (T + N(y_0' + y_b')) = (T + N(y' - y_s')) \quad (II.8)$$

Finalement, en combinant les relations (II.7) et (II.8) cela permet d'aboutir à la relation suivante :

$$\frac{dM}{dx} = Q + N y_s' \quad (II.9)$$

D'autre part, en admettant que les distorsions de cisaillement sont petites, cela permet d'écrire :

$$y_s' = \frac{Q}{G A_r} \quad (II.10)$$

Introduisons pour la suite de cette démonstration, les relations de courbures propres à la flexion et au cisaillement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y_b}{dx^2} = y_b'' = -\frac{M}{EI} \quad (a) \\ \frac{d^2 y_s}{dx^2} = y_s'' = \frac{1}{G A_r} \frac{dQ}{dx} \quad (b) \end{array} \right. \quad (II.11)$$

EI représente le produit entre le module de Young E et le moment d'inertie I. $G A_r$ représente le produit entre le module de cisaillement G et l'aire réduite A_r d'une section transversale avec :

$$A_r = k_G \cdot A \quad (II.12)$$

A désigne l'aire d'une section transversale le long de l'élément. (k_G) facteur de réduction destiné à tenir compte de la distribution réelle des contraintes de cisaillement.

Tenant compte des relations (II.4.b) et (II.8), la relation (II.11.b) prend la forme suivante :

$$y_s'' = \frac{1}{G A_r} (N(y_0'' + y_b'') - q(x)) \quad (II.13.a)$$

A présent grâce aux relations (II.11.a) et (II.13.a), nous pouvons quantifier la courbure (y_1'') due à la flexion et au cisaillement et que l'on peut exprimer par la relation suivante :

$$y_1'' = y_b'' + y_s'' = -\frac{1}{EI} \left(1 + \frac{N}{G A_r} \right) M + \frac{N}{G A_r} y_0'' - \frac{q(x)}{G A_r} \quad (II.13.b)$$

La dérivée de la relation de courbure (II.13.b) par rapport à la variable x , permet d'aboutir à la relation (y_1''') suivante :

$$y_1''' = -\frac{1}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) \frac{dM}{dx} + \frac{N}{GA_r} y_0''' - \frac{q'(x)}{GA_r} \quad (\text{II.14.a})$$

En combinant (II.7) et (II.14.a) la précédente relation (y_1''') devient :

$$y_1''' = -\frac{1}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) T - \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) (y_0' + y_1') + \frac{N}{GA_r} y_0''' - \frac{q'(x)}{GA_r} \quad (\text{II.14.b})$$

En dérivant la relation (II.14.b) par rapport à x on aboutit à la relation différentielle du quatrième ordre suivante :

$$y_1'''' = \frac{1}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) q(x) - \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) (y_0'' + y_1'') + \frac{N}{GA_r} y_0'''' \quad (\text{II.15.a})$$

Tenant compte de la relation (II.2) dont on peut déduire les expressions de (y_0'') et (y_0''''), nous pouvons réarranger la relation (II.15.a) et obtenir ce qui suit :

$$y_1'''' + \frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) y_1'' = \left(\frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) + \frac{N}{GA_r} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 y_0 + \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) \frac{q(x)}{EI} \quad (\text{II.15.b})$$

La précédente relation (II.15.b) représente l'équation différentielle d'équilibre d'un élément poutre-colonne, qui se distingue par les quantités suivantes :

$$\frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) y_1'' \quad \text{relative aux effets du second ordre.}$$

$$\left(\frac{N}{EI} \left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) + \frac{N}{GA_r} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 y_0 \quad \text{relative à l'imperfection initiale } y_0(x).$$

$$\left(1 + \frac{N}{GA_r} \right) \frac{q(x)}{EI} \quad \text{relative au chargement transversal } q(x).$$

La résolution de cette équation différentielle permet d'aboutir à la solution de la déformée $y_1(x)$ comptée à partir de la position initiale $y_0(x)$. Cette dernière se compose d'une partie $y_b(x)$ relative à la déformée de flexion et d'une autre $y_s(x)$ relative à la déformée due à l'effet de cisaillement.

Introduisons pour la suite de ce développement, les paramètres suivants :

r : rayon de giration

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{II.16})$$

l_N : longueur élastique relative au flambement

$$l_N = \sqrt{\frac{EI}{|N|}} \quad (\text{II.17})$$

l_G : longueur élastique relative à l'effet de cisaillement

$$l_G = r \sqrt{\frac{E}{G \cdot k_G}} \quad (\text{II.18})$$

λ_N : paramètre de stabilité (adimensionnel)

$$\lambda_N = \frac{l_N}{l} \quad (\text{II.19})$$

λ_G : paramètre cisaillement (adimensionnel)

$$\lambda_G = \frac{l_G}{l} \quad (\text{II.20})$$

m : coefficient de courbure additionnelle

$$m = \frac{1}{l} \frac{1}{\lambda_N} \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_G^2}{\lambda_N^2}\right)} \quad (\text{II.21})$$

ml : module de stabilité (adimensionnel)

$$ml = \frac{1}{\lambda_N} \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_G^2}{\lambda_N^2}\right)} \quad (\text{II.22})$$

A_0 : coefficient d'imperfection géométrique

$$A_0 = ml^2 \left(1 + \lambda_G^2 (n\pi)^2\right) (n\pi)^2 \frac{1}{l^4} \quad (\text{II.23})$$

A_q : coefficient de charge

$$A_q = \left(ml^2 \lambda_N^2\right) \frac{1}{EI} \quad (\text{II.24})$$

Cela permet de réécrire la relation (II.15.b) sous la forme simplifiée ci-après :

$$y_1'''' + m^2 y_1'' = A_0 y_0 + A_q q(x) \quad (\text{II.25})$$

Enfin, tenant compte de la relation (II.1), la solution générale découlant de la résolution de la précédente équation différentielle d'équilibre, est donnée sous la forme trigonométrique suivante :

$$y_1(x) = C_1 \cos(mx) + C_2 \sin(mx) + C_3 x + C_4 + C_0 y_0 + C_q \left((ax+b) - \frac{m^2}{6} (ax+3b)x^2 \right) \quad (\text{II.26})$$

La solution $y_1(x)$ qui décrit la déformée d'un élément poutre-colonne, se distingue par la présence en son sein des coefficients suivants :

C_1, C_2, C_3 et C_4 : constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites propres à l'élément poutre-colonne considéré.

C_0 : constante d'intégration relative à l'imperfection géométrique initiale, que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$C_0 = - \frac{A_0 l^4}{\left((ml)^2 - (n\pi)^2 \right) (n\pi)^2} \quad (\text{II.27})$$

C_q : constante d'intégration relative au chargement transversal.

$$C_q = - \frac{A_q l^4}{(ml)^4} \quad (\text{II.28})$$

II.3.2 Eléments de réduction

Les éléments de réductions relatifs à la flexion et à l'effort tranchant de l'élément poutre-colonne précédemment étudié, se déduisent à partir des relations d'équilibre précédemment établies. Ainsi, nous pouvons aisément établir l'expression du moment fléchissant à partir de la relation (II.13.b), que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \mathbf{a}_m y_1'' + \mathbf{c}_m y_0(x) + \mathbf{d}_m q(x) \quad (\text{II.29})$$

Dans laquelle les paramètres \mathbf{a}_m , \mathbf{c}_m , \mathbf{d}_m sont exprimés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_m = - \left(\frac{1}{(\mathbf{m}l)^2 \lambda_N^2} \right) \mathbf{EI} \quad (\text{a}) \\ \mathbf{c}_m = - \left(\frac{\lambda_G^2}{(\mathbf{m}l)^2 \lambda_N^4} (\mathbf{n}\pi)^2 \right) \frac{\mathbf{EI}}{l^2} \quad (\text{b}) \\ \mathbf{d}_m = - \left(\frac{\lambda_G^2}{(\mathbf{m}l)^2 \lambda_N^2} \right) l^2 \quad (\text{c}) \end{array} \right. \quad (\text{II.30})$$

Dans l'expression du moment fléchissant précédente (II.29) nous pouvons distinguer la quantité de moment fléchissant ($\mathbf{a}_m y_1''$) relative à la courbure propre aux déplacements et rotations nodaux de l'élément considéré. Notons que la quantité $\left(\frac{1}{(\mathbf{m}l)^2 \lambda_N^2} \right)$ du paramètre \mathbf{a}_m , traduit l'influence simultanée du module de cisaillement G et de l'effort axial de compression N sur le moment fléchissant par le biais des paramètres λ_N et λ_G .

Par ailleurs, $\mathbf{c}_m y_0(x)$ et $\mathbf{d}_m q(x)$ désignent des quantités de moments fléchissants relatives à l'imperfection géométrique initiale et au chargement transversal qui affectent l'élément considéré.

Une démarche analogue à celle qui précède permet d'exprimer l'effort tranchant à partir de la relation (II.14.b), permettant d'aboutir à la forme suivante :

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_t y_1''' + \mathbf{b}_t y_1' + \mathbf{c}_t y_0'(x) + \mathbf{d}_t q'(x) \quad (\text{II.31})$$

Les paramètres \mathbf{a}_t , \mathbf{b}_t , \mathbf{c}_t , \mathbf{d}_t sont exprimés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{a}_t = -\left(\frac{1}{(ml)^2 \lambda_N^2}\right) \mathbf{EI} \quad (\text{a}) \\
 \mathbf{b}_t = -\left(\frac{1}{\lambda_N^2}\right) \frac{\mathbf{EI}}{l^2} \quad (\text{b}) \\
 \mathbf{c}_t = -\left(\frac{1}{\lambda_N^2} + \frac{\lambda_G^2}{(ml)^2 \lambda_N^4} (n\pi)^2\right) \frac{\mathbf{EI}}{l^2} \quad (\text{c}) \\
 \mathbf{d}_t = -\left(\frac{\lambda_G^2}{(ml)^2 \lambda_N^2}\right) l^2 \quad (\text{d})
 \end{array} \right. \quad (\text{II.32})$$

Dans l'expression d'effort tranchant précédente (II.31) nous pouvons distinguer les quantités $(a_t y_1''')$ $(b_t y_1')$ relatives à la courbure propre aux déplacements et rotations nodaux de l'élément considéré. Notons que la quantité $\left(\frac{1}{(ml)^2 \lambda_N^2}\right)$ du paramètre a_t et le paramètre b_t traduisent ensemble l'influence simultanée du module de cisaillement G et de l'effort axial de compression N sur l'effort tranchant, par le biais des paramètres λ_N et λ_G . Par ailleurs, $c_t y_0(x)$ et $d_t q(x)$ désignent des quantités d'efforts tranchants relatives à l'imperfection géométrique initiale et au chargement transversal qui affectent l'élément considéré.

II.3.3 Expression de la rotation de flexion

Tenant compte de la relation (II.10) qui décrit la variation des rotations propres à l'effet de cisaillement, nous pouvons exprimer la variation des rotations de flexion par le biais de la relation suivante :

$$y' - y_s' = y' - \frac{Q}{G A_r} \quad (\text{II.33.a})$$

En faisant intervenir l'expression (II.8) dans la relation précédente, nous obtenons :

$$y' - y_s' = y' - \frac{T + N(y' - y_s')}{G A_r} \quad (\text{II.33.b})$$

Tenant compte des relations (II.5.b) et (II.6.c), la relation (II.33.b) devient :

$$\left(1 + \frac{N}{GA_r}\right)(y' - y_s') = y'_1 + y'_0 - \frac{T}{GA_r} \quad (\text{II.33.c})$$

Ainsi, en remplaçant T par son expression (II.31) et en tenant compte des relations (II.32.a,b,c,d), on aboutit enfin, après simplifications au résultat suivant :

$$y' - y_s' = a_r y_1' + b_r y_1''' + c_r y_0'(x) + d_r q'(x) \quad (\text{II.33.d})$$

Les paramètres a_r , b_r , c_r , d_r sont exprimés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_r = 1 & \text{(a)} \\ b_r = \left(\frac{\lambda_G^2}{(ml)^4 \lambda_N^4} \right) I^2 & \text{(b)} \\ c_r = \left(1 + \frac{\lambda_G^4}{(ml)^4 \lambda_N^6} (n\pi)^2 \right) & \text{(c)} \\ d_r = \left(\frac{\lambda_G^4}{(ml)^4 \lambda_N^4} \right) \frac{I^4}{EI} & \text{(d)} \end{array} \right. \quad (\text{II.34})$$

Dans la relation (II.33.d) qui exprime les rotations de flexion, nous pouvons distinguer les quantités ($a_r y_1'$) ($b_r y_1'''$) relatives à la courbure propre aux déplacements et rotations nodaux de l'élément considéré. Notons d'autre part, le rôle du paramètre b_r qui traduit à lui seul l'influence simultanée du module de cisaillement G et de l'effort axial de compression N par le biais des paramètres λ_N et λ_G . Par ailleurs, $c_r y_0'(x)$ et $d_r q'(x)$ désignent des quantités de rotation relatives à l'imperfection géométrique initiale et au chargement transversal qui affectent l'élément considéré.

III.1 Introduction

En analyse des structures, la formulation matricielle constitue une approche systématique destinée à décrire simultanément par le biais d'un ensemble d'équations, la relation chargement-déplacement d'une structure donnée. A la base, ces équations sont établies algébriquement par rapport à un modèle élémentaire constituant une subdivision de la structure à étudier. Parmi les méthodes matricielles les plus connues, nous pouvons citer :

a/-La méthode matricielle des forces basée sur une approche par flexibilité et qui désigne les forces comme variables indépendantes.

b/-La méthode matricielle des déplacements basée sur une approche par rigidité et qui désigne pour sa part les déformations, comme variables indépendantes.

Dans ce chapitre, Nous allons adopter la formulation matricielle basée sur la méthode des déplacements, en considérant les rotations et déplacements nodaux ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$), comme variables indépendantes du modèle, auxquelles seront associés les éléments de réductions nodaux (T_i, M_i, T_j, M_j).

L'objectif final de cette approche consiste alors à établir une relation matricielle générale associant directement les éléments de réductions nodaux aux rotations et déplacements nodaux de l'élément (ij) considéré.

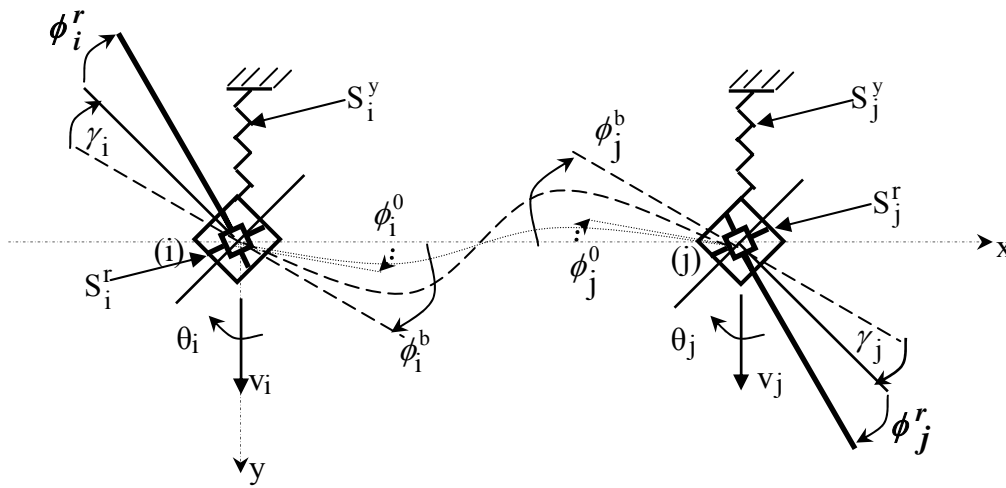
Pour entreprendre cette tâche, il est donc primordial que l'on s'intéresse à la nature des conditions aux limites concernant les extrémités nodales de l'élément. En effet, les rotations et déplacements nodaux désignés par les variables ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$), dépendent directement des conditions de fixation des extrémités (i) et (j) de l'élément. A cet égard, nous allons adopter le modèle physique illustré sur la figure (III.1), qui se distingue par un comportement non conventionnel de ses extrémités nodales.

Le modèle ainsi choisi constitue en lui même un élément structurel qui englobe à la fois, le comportement de l'élément poutre-colonne objet de cette étude, et les conditions aux limites non conventionnelles qui lui sont associées. En effet, un élément poutre-colonne dont les extrémités nodales ne sont ni parfaitement rigides ni parfaitement articulées doit être formulé, de façon à permettre la prise en compte du potentiel de flexibilité réel lié à la nature de ce type d'extrémité. Cette situation découle généralement de la présence aux droits des connexions nodales, d'assemblages semi-continus que l'on doit obligatoirement considérer dans une analyse globale de structure, notamment lorsque le comportement de ces derniers nécessite de les assimiler à des connexions semi-rigides.

Pour atteindre cet objectif, on considère des ressorts de translation et de rotation aux deux extrémités (i) et (j) de l'élément, que l'on caractérise respectivement par les paramètres :

S_i^y et S_j^y , désignent des flexibilités de translation associées à des ressorts dont le rôle consiste à prévoir tout déplacement transversal par glissement, des assemblages situés aux deux extrémités nodales (i) et (j) de l'élément.

S_i^r et S_j^r , désignent des flexibilités de rotation associées à des ressorts dont le rôle consiste à prévoir toute rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan oxy , des assemblages situés aux deux extrémités nodales (i) et (j) de l'élément.



Modèle élémentaire associant la présence de connexions semi-rigides de rotation et de translation

Figure III.1

III.2 Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité découlent des relations générales décrivant les champs de déplacement et de rotation de l'élément poutre-colonne considéré dans sa position déformée. En effet, les conditions aux limites relatives aux extrémités (i) et (j) de l'élément doivent être formalisées afin de traduire le comportement global de ce dernier, lequel se trouve tributaire en terme de rigidité des conditions d'extrémité qui leurs sont associées.

Ainsi, grâce aux relations (II.26) et (II.33.d) décrivant respectivement les champs de déplacement et de rotation de l'élément ainsi étudié, nous sommes en

mesure de formaliser les conditions aux limites $(v_i, \theta_i, v_j, \theta_j)$, du modèle physique adopté à cet effet.

Ainsi, tenant compte de la présence des ressorts de rotation et de translation aux extrémités nodales de l'élément, cela se traduit par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}_i = y_1(\mathbf{0}) + \mathbf{v}_i^y & \text{(a)} \\ \boldsymbol{\theta}_i = \phi_i^b + \phi_i^r & \text{(b)} \\ \mathbf{v}_j = y_1(\mathbf{l}) + \mathbf{v}_j^y & \text{(c)} \\ \boldsymbol{\theta}_j = \phi_j^b + \phi_j^r & \text{(d)} \end{array} \right. \quad \text{(III.1)}$$

$(\phi_i^r, \phi_j^r, v_i^y, v_j^y)$, désignent dans les relations (III.1.a,b,c,d), les rotations et les déplacements associés respectivement aux ressorts de rotation et de translation situés aux nœuds (i) et (j) de l'élément. Ces derniers sont exprimés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}_i^y = \mathbf{S}_i^y \mathbf{T}_i & \text{(a)} \\ \phi_i^r = \mathbf{S}_i^r \mathbf{M}_i & \text{(b)} \\ \mathbf{v}_j^y = \mathbf{S}_j^y \mathbf{T}_j & \text{(c)} \\ \phi_j^r = \mathbf{S}_j^r \mathbf{M}_j & \text{(d)} \end{array} \right. \quad \text{(III.2)}$$

Les moments fléchissants et les efforts tranchants (T_i, M_i, T_j, M_j) , relatifs aux nœuds (i) et (j) de l'élément, se déduisent respectivement des relations générales (II.29) et (II.31) obtenues à partir de l'équilibre d'un tronçon élémentaire infinitésimal. Cependant, étant donné que ces efforts avaient été préalablement orientés selon la convention de signe de la résistance des matériaux (voir figure II.4), et tenant compte de l'orientation adoptée sur la (figure III.1) il s'avère nécessaire d'opérer les changements de signes qui s'imposent en prévision de la formulation matricielle qui se distingue par :

- des moments fléchissants orientés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre,
- des efforts tranchants orientés positivement selon la direction de l'axe (oy) du repère cartésien associé à l'élément (ij).

Ces considérations nous amènent à exprimer les efforts nodaux selon les relations (III.3) ci-après :

$$\begin{cases} T_i = -(a_t y_1'''(0) + b_t y_1'(0) + c_t y_0'(0) + d_t q'(0)) \\ M_i = +(a_m y_1''(0) + c_m y_0(0) + d_m q(0)) \\ T_j = +(a_t y_1'''(l) + b_t y_1'(l) + c_t y_0'(l) + d_t q'(l)) \\ M_j = -(a_m y_1''(l) + c_m y_0(l) + d_m q(l)) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

D'autre part, les rotations nodales dues à la flexion seule se déduisent de la relation (II.6.c) et s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_i^b = y'(0) - y_s'(0) - y_0'(0) \\ \phi_j^b = y'(l) - y_s'(l) - y_0'(l) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Tenant compte des relations (III.2), (III.3) et (III.4), nous pouvons déduire à partir de la relation (III.1) précédente, les relations de compatibilités générales suivantes :

$$\begin{cases} v_i = y_1(0) - S_i^y (a_t y_1'''(0) + b_t y_1'(0) + c_t y_0'(0) + d_t q'(0)) \\ \theta_i = a_r y_1'(0) + b_r y_1'''(0) + (c_r - 1) y_0'(0) + d_r q'(l) + S_i^r (a_m y_1''(0) + c_m y_0(0) + d_m q(0)) \\ v_j = y_1(l) + S_j^y (a_t y_1'''(l) + b_t y_1'(l) + c_t y_0'(l) + d_t q'(l)) \\ \theta_j = a_r y_1'(l) + b_r y_1'''(l) + (c_r - 1) y_0'(l) + d_r q'(l) - S_j^r (a_m y_1''(l) + c_m y_0(l) + d_m q(l)) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

III.3 Identification des constantes d'intégration

A ce stade du développement, nous disposons des relations de compatibilités (III.5) déjà établies au paragraphe précédent. Ces dernières sont écrites à partir de la solution générale $y_1(x)$ (II.26), découlant de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre (II.25). Cette solution, pour rappel, dépend des constantes (C_1, C_2, C_3, C_4) liées aux conditions aux limites à attribuer aux extrémités nodales de l'élément considéré.

Ainsi tenant compte de ce qui précède, et des relations (II.29), (II.31) et (II.33.d), nous pouvons mettre la relation (III.5) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \left(\frac{S_i^y}{S_b^y} \frac{1}{\lambda_N^2}\right) l & 1 \\
 \left(\frac{S_i^r}{S_b^r} \frac{1}{\lambda_N^2}\right) l & g_1 m l \frac{1}{l} & 1 & 0 \\
 \cos(ml) & \sin(ml) & \left(1 - \frac{S_j^y}{S_b^y} \frac{1}{\lambda_N^2}\right) l & 1 \\
 -\left(g_1 m l \sin(ml) + \left(\frac{S_j^r}{S_b^r} \frac{1}{\lambda_N^2}\right) \cos(ml)\right) \frac{1}{l} & \left(g_1 m l \cos(ml) - \left(\frac{S_j^r}{S_b^r} \frac{1}{\lambda_N^2}\right) \sin(ml)\right) \frac{1}{l} & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \bar{V}_i \\
 \bar{\theta}_i \\
 \bar{V}_j \\
 \bar{\theta}_j
 \end{Bmatrix}
 \quad \text{(III.6)}$$

λ_N, λ_G et ml désignent des paramètres adimensionnels, déjà présentés au chapitre (II) précédent.

$(s_i^r, s_j^r, s_i^y$ et $s_j^y)$, désignent les flexibilités de rotation et de translation des ressorts liés aux nœuds (i) et (j) comme indiqué par la figure (III.1).

On désigne aussi par (s_b^r, s_b^y) , des flexibilités caractérisant la poutre par analogie aux ressorts de rotation et de translation situés à ses deux extrémités nodales. Ces dernières sont exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{cases}
 s_b^r = \frac{l}{EI} & (a) \\
 s_b^y = \frac{l^3}{EI} & (b)
 \end{cases}
 \quad \text{(III.7)}$$

Enfin, le paramètre adimensionnel g_1 qui traduit le couplage entre l'effet de cisaillement et celui relatif au 2nd ordre est exprimé par la relation suivante :

$$g_1 = \left(1 - \frac{\lambda_G^2}{\lambda_N^2} \right) \quad (III.8)$$

Le vecteur second membre de la relation matricielle (III.6) est constitué de trois parties distinctes :

- celle relative aux déplacements et rotations nodales ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$),.
- celle relative à l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$.
- celle relative au chargement transversal $q(x)$.

Ce vecteur peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \overline{V_i} \\ \overline{\theta_i} \\ \overline{V_j} \\ \overline{\theta_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} v_{i0} \\ \theta_{i0} \\ v_{j0} \\ \theta_{j0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{iq} \\ \theta_{iq} \\ v_{jq} \\ \theta_{jq} \end{Bmatrix} \quad (III.9)$$

Dans la relation (III.9), nous pouvons distinguer la contribution nodale ($v_{i0}, \theta_{i0}, v_{j0}, \theta_{j0}$), équivalente à l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$ présente le long de l'élément, que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} v_{i0} \\ \theta_{i0} \\ v_{j0} \\ \theta_{j0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (h_1 r_2 (1 - g_1) - h_2 r_1) \frac{v_0}{l} \\ \left(-h_2 r_1 \sin(n\pi) + \frac{S_j^y}{S_b^y} h_2 (1 + r_2 - r_1) \frac{(n\pi)}{\lambda_N^2} \cos(n\pi) \right) v_0 \\ \left((h_1 r_2 (1 - g_1) - h_2 r_1) \cos(n\pi) - \frac{S_j^r}{S_b^r} (1 - h_2 (1 + r_2)) \frac{1}{\lambda_N^2} \sin(n\pi) \right) \frac{v_0}{l} \end{Bmatrix} \quad (III.10)$$

Avec, (h_1, h_2, r_1, r_2), paramètres adimensionnels exprimés respectivement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} h_1 = (1 + \lambda_G^2 m l^2) & (a) \\ h_2 = (1 + \lambda_G^2 (n\pi)^2) & (b) \\ r_1 = m l^2 (m l^2 - (n\pi)^2) & (c) \\ r_2 = (n\pi)^2 (m l^2 - (n\pi)^2) & (d) \end{cases} \quad (III.11)$$

Nous pouvons distinguer aussi la contribution nodale $(v_{iq}, \theta_{iq}, v_{jq}, \theta_{jq})$, équivalente au chargement transversal $q(x)$ linéairement réparti le long de l'élément, que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{iq} \\ \theta_{iq} \\ v_{jq} \\ \theta_{jq} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left(-S_b^y \frac{\lambda_N^2}{ml^2} b_q l + S_i^y \lambda_G^2 a_q l^2 \right) \\ \left(S_b^r \frac{(h_1 \lambda_G^2 - \lambda_N^2)}{ml^2} a_q l^3 - S_i^r \frac{h_1}{ml^2} b_q l^2 \right) \\ -S_b^y \frac{\lambda_N^2}{ml^2} \left(\left(1 - \frac{ml^2}{6} \right) a_q l^2 + \left(1 - \frac{ml^2}{2} \right) b_q l \right) - S_j^y \left(\left(\lambda_G^2 + \frac{1}{2} \right) a_q l^2 + b_q l \right) \\ \left(S_b^r \left(- \left(g_1 \frac{\lambda_N^2}{ml^2} - \frac{\lambda_N^2}{2} - \lambda_G^4 \right) a_q l^3 + \lambda_N^2 b_q l^2 \right) + S_j^r \frac{h_1}{ml^2} (a_q l^3 + b_q l^2) \right) \end{array} \right\} \quad \text{(III.12)}$$

Les paramètres a_q et b_q des relations (III.12.a,b,c,d) définissent le chargement transversal $q(x)$ (voir relation (II.1) du chapitre précédent).

Enfin, le vecteur $(v_i, \theta_i, v_j, \theta_j)$, représente les déplacements et rotations nodaux, tributaires des conditions aux limites auxquelles l'élément considéré est assujéti.

Sur la base de ce qui précède, nous sommes en mesure de déterminer les constantes (C_1, C_2, C_3, C_4) à partir de la résolution du système d'équations donné par la relation matricielle (III.6). Ceci nous permet d'obtenir les résultats suivants :

$$C_{11} = -g_1 ml (1 - \cos(ml)) - f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^2} \quad \text{(a)}$$

$$C_{12} = g_1 ml \cos(ml) - \sin(ml) - f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^2} - \left(f_i^y + f_j^y \right) \left(\frac{g_1 ml \cos(ml)}{\lambda_N^2} - f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^4} \right) \quad \text{(b)}$$

$$C_{13} = g_1 ml (1 - \cos(ml)) + f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^2} \quad \text{(c)}$$

$$C_{14} = -g_1 ml + \sin(ml) + \left(f_i^y + f_j^y \right) \frac{g_1 ml}{\lambda_N^2} \quad \text{(d)}$$

\Rightarrow

$$C_i = \left(C_{11} \bar{v}_i + C_{12} \bar{\theta}_i l + C_{13} \bar{v}_j + C_{14} \bar{\theta}_j l \right) \frac{1}{dl} \quad \text{(f)}$$

(III.13)

$$C_{21} = g_1 m l \sin(ml) + (f_i^r + f_j^r \cos(ml)) \frac{1}{\lambda_N^2} \quad (\text{a})$$

$$C_{22} = g_1 m l \sin(ml) - 1 + \cos(ml) + f_j^r \frac{\cos(ml)}{\lambda_N^2} - (f_i^y + f_j^y) \left(\frac{g_1 m l \sin(ml)}{\lambda_N^2} + f_j^r \frac{\cos(ml)}{\lambda_N^4} \right) \quad (\text{b})$$

$$C_{23} = -g_1 m l \sin(ml) - (f_i^r + f_j^r \cos(ml)) \frac{1}{\lambda_N^2} \quad (\text{c})$$

$$C_{24} = 1 - \cos(ml) + f_i^r \frac{1}{\lambda_N^2} - (f_i^y + f_j^y) f_i^r \frac{1}{\lambda_N^4} \quad (\text{d})$$

⇒

$$C_2 = (C_{21} \bar{V}_i + C_{22} \bar{\theta}_i l + C_{23} \bar{V}_j + C_{24} \bar{\theta}_j l) \frac{1}{d_L} \quad (\text{f})$$

(III.14)

$$C_{31} = -g_1^2 m l^2 \sin(ml) - (f_i^r + f_j^r) g_1 m l \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} + f_i^r f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} \quad (\text{a})$$

$$C_{32} = -g_1 m l (1 - \cos(ml)) - f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} \quad (\text{b})$$

$$C_{33} = g_1^2 m l^2 \sin(ml) + (f_i^r + f_j^r) g_1 m l \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} + f_i^r f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} \quad (\text{c})$$

$$C_{34} = -g_1 m l (1 - \cos(ml)) - f_i^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} \quad (\text{d})$$

⇒

$$C_3 = (C_{31} \bar{V}_i + C_{32} \bar{\theta}_i l + C_{33} \bar{V}_j + C_{34} \bar{\theta}_j l) \frac{1}{l} \frac{1}{d_L} \quad (\text{f})$$

(III.15)

$$\begin{aligned}
C_{41} = & g_1 ml (g_1 ml \sin(ml) - 1 + \cos(ml)) \\
& - f_i^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^2} + (f_i^r + f_j^r) g_1 ml \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} - f_i^r f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} \\
& - f_j^y \left(g_1^2 ml^2 \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} + (f_i^r + f_j^r) g_1 ml \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} - f_i^r f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^6} \right) \quad (a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{42} = & -g_1 ml \cos(ml) + \sin(ml) + f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^2} \\
& + f_i^y g_1 ml \frac{1}{\lambda_N^2} + f_j^y g_1 ml \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} - f_j^y f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} \quad (b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{43} = & -g_1 ml (1 - \cos(ml)) - f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} \\
& - f_i^y \left(g_1^2 ml^2 \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} + (f_i^r + f_j^r) g_1 ml \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} - f_i^r f_j^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^6} \right) \quad (c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{44} = & g_1 ml - \sin(ml) \\
& - f_i^y g_1 ml \cos(ml) \frac{1}{\lambda_N^2} - f_j^y g_1 ml \frac{1}{\lambda_N^2} + f_i^y f_i^r \sin(ml) \frac{1}{\lambda_N^4} \quad (d)
\end{aligned}$$

⇒

$$C_4 = (C_{41} \bar{v}_i + C_{42} \bar{\theta}_i l + C_{43} \bar{v}_j + C_{44} \bar{\theta}_j l) \frac{1}{d_L} \quad (f)$$

(III.16)

d_L (adimensionnel) désigne dans les précédentes relations, le produit entre le déterminant du système d'équations (III.6) par la longueur l de l'élément considéré. Il est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
d_L = & g_1 ml (-2 + 2 \cos(ml) + g_1 ml \sin(ml)) \\
& - (f_i^r + f_j^r) \frac{(\sin(ml) - g_1 ml \cos(ml))}{\lambda_N^2} - f_i^r f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^4} \\
& - (f_i^y + f_j^y) \left(\frac{g_1^2 ml^2 \sin(ml)}{\lambda_N^2} + (f_i^r + f_j^r) \frac{g_1 ml \cos(ml)}{\lambda_N^4} - f_i^r f_j^r \frac{\sin(ml)}{\lambda_N^6} \right) \quad (III.17)
\end{aligned}$$

$(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$, désignent les indexes de flexibilités relatifs aux différents ressorts d'extrémité associés à l'élément(ij). Ces derniers sont exprimés par les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i^r = \frac{S_i^r}{S_b^r} \quad (a) \\ f_j^r = \frac{S_j^r}{S_b^r} \quad (b) \\ f_i^y = \frac{S_i^y}{S_b^y} \quad (c) \\ f_j^y = \frac{S_j^y}{S_b^y} \quad (d) \end{array} \right. \quad (III.18)$$

On peut considérer à ce stade du développement, la solution générale $y_1(x)$ de l'élément poutre-colonne objet de cette étude comme étant totalement identifiée grâce aux constantes d'intégration ($C_1, C_2, C_3, C_4,$) précédemment évaluées.

III.4 Formulation des fonctions de forme

L'objectif de cette étape est de reformuler la solution générale $y_1(x)$ précédemment obtenue, pour la rendre de par la forme, similaire à celles obtenues par approche éléments finis. Cette reformulation consiste à réécrire la solution générale $y_1(x)$ sous la forme suivante :

$$y_1(x) = N_{vi}(x) \bar{V}_i + N_{\theta i}(x) \bar{\theta}_i l + N_{vj}(x) \bar{V}_j + N_{\theta j}(x) \bar{\theta}_j l \quad (III.19)$$

Avec ($N_{vi}(x), N_{\theta i}(x), N_{vj}(x), N_{\theta j}(x)$), qui désignent respectivement les fonctions de forme associées aux déplacements et rotations des nœuds (i) et (j) de l'élément considéré. Ces dernières s'expriment sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{vi}(x) = (C_{11} \cos(mx) + C_{21} \sin(mx) + C_{31} (x/l) + C_{41}) / d_L \quad (a) \\ N_{\theta i}(x) = (C_{12} \cos(mx) + C_{22} \sin(mx) + C_{32} (x/l) + C_{42}) / d_L \quad (b) \\ N_{vj}(x) = (C_{13} \cos(mx) + C_{23} \sin(mx) + C_{33} (x/l) + C_{43}) / d_L \quad (c) \\ N_{\theta j}(x) = (C_{14} \cos(mx) + C_{24} \sin(mx) + C_{34} (x/l) + C_{44}) / d_L \quad (d) \end{array} \right. \quad (III.20)$$

Dans la relation (III.20), le troisième terme en x est divisé par l en raison de l'expression de C_3 telle que formulée dans la relation (III.15.f). L'expression $y_1(x)$ de la relation (III.19) reste de ce fait parfaitement équivalente à celle donnée par la relation (II.26) du précédent chapitre.

La solution générale de la déformée $y_1(x)$ ainsi formulée, d'allure semblable à celle développée par approche élément fini, offre d'un point de vue qualitatif plus de rigueur en raison de l'approche mathématique exacte ayant permis son obtention. Cette même solution se distingue aussi par la présence en son sein, d'un certain nombre de paramètres associés aux différents aspects qu'a englobés cette étude. Cela permet ainsi de mesurer directement grâce à cette formulation, les effets de couplages qui en résulteraient vis-à-vis du phénomène d'instabilité par flambement.

Ainsi chacune des fonctions de forme précédemment déterminées possède de façon explicite l'information relatant à la fois :

- l'influence de l'effort normal N , par le biais du paramètre λ_N .
- l'influence du module de cisaillement G par le biais du paramètre λ_G .
- l'influence des conditions aux limites non conventionnelles par le biais des indexes de flexibilité $(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$, qui traduisent la présence de ressorts de rotation et de déplacement au droit des extrémités nodales de l'élément considéré.

Déjà, on peut vérifier, que ces quatre fonctions de forme se réduisent aux formes cubiques classiques (III.21), caractérisant le comportement flexionnel d'une poutre. En effet il suffit pour cela :

- d'éliminer les ressorts de rotation et de translation, incorporés aux extrémités du modèle élémentaire en adoptant dans ce cas de figure des indexes de flexibilité nuls pour l'ensemble de ces ressorts.
- de considérer $\lambda_G=0$ afin d'éliminer les effets dus au cisaillement.
- de faire tendre le paramètre m/l vers zéro afin d'éliminer l'effet d'interaction entre l'effort axial de compression et la déformée flexionnelle de l'élément.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N_{vi}(x) = 1 - 3 X^2 + 2 X^3 \quad (a) \\
 N_{\theta i}(x) = X - 2 X^2 + X^3 \quad (b) \\
 N_{vj}(x) = 3 X^2 - 2 X^3 \quad (c) \\
 N_{\theta j}(x) = -X^2 + X^3 \quad (d)
 \end{array} \right. \quad (III.21)$$

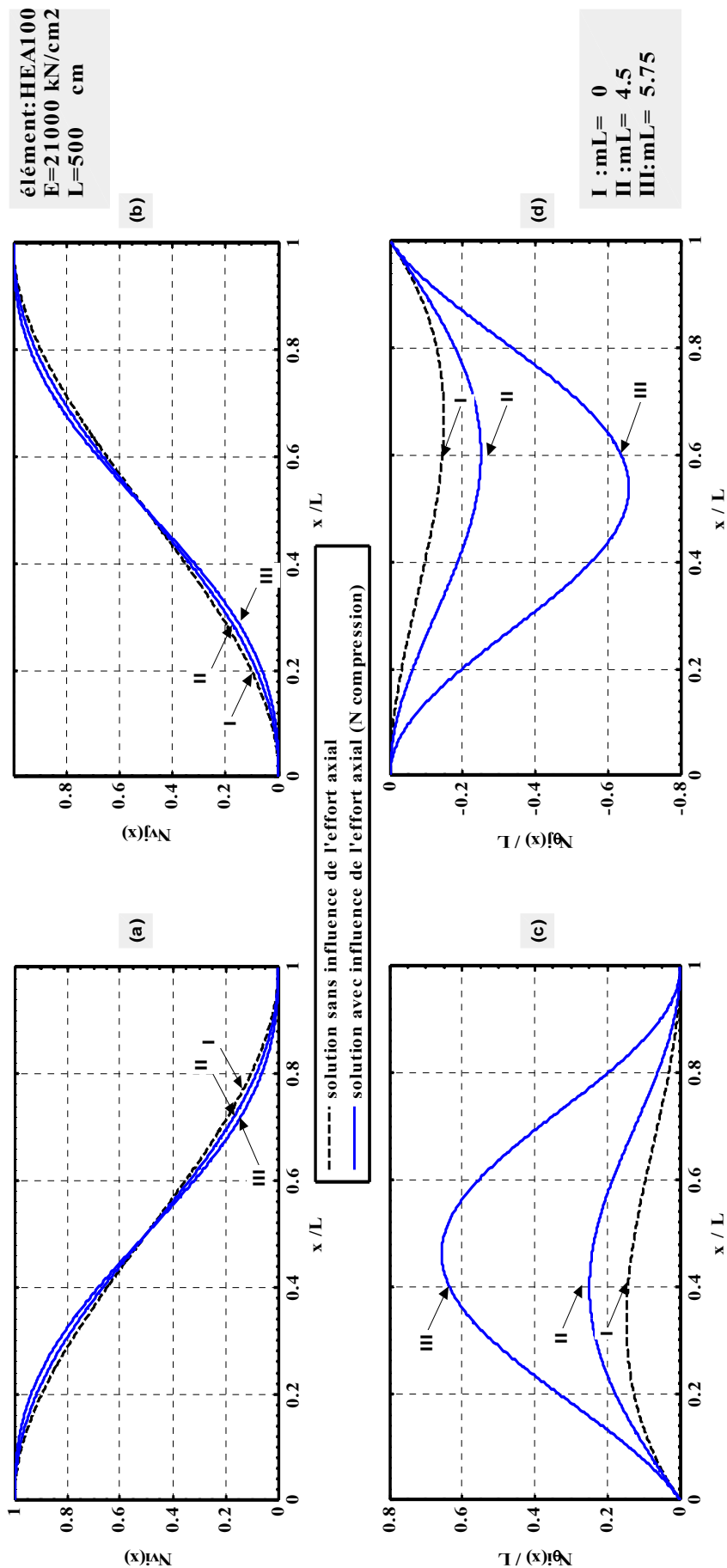
Ce résultat constitue en lui-même une validation partielle de la formulation exprimée par les relations (III.20.a,b,c,d).

III.5 validation numérique des fonctions de forme

Nous proposons dans cette étape une série de graphes relatifs aux variations des amplitudes de ces fonctions de forme par rapport au paramètre ml . Ainsi nous pouvons observer sur la figure (III.2) à partir des graphes (a) et (b) que les fonctions de forme $N_{vi}(x)$ et $N_{vj}(x)$ sont peu affectées par la variation du paramètre ml . Cela se constate par la faiblesse des écarts en amplitude entre les courbes indiquées par (I) qui correspondent à la situation $ml=0$ (effort axial de compression nul), tracées à partir des expressions (III.21.a,c) et les courbes indiquées par (II) et (III), tracées à partir des expressions (III.20.a,c), et obtenues respectivement avec les valeurs $ml=4.5$ et $ml=5.75$, qui correspondent pourtant à un niveau de compression axial très élevé.

Cependant, on peut aisément distinguer sur cette même figure (III.2), que pour $ml=5.75$, l'écart d'amplitude devient très important entre les fonctions de forme $N_{\theta i}(x)$ et $N_{\theta j}(x)$ exprimées par les relations (III.20.b,d) et leurs jumelles exprimées par les relations (III.21.b,d) qui correspondent à la situation $ml=0$. Cette première observation indique que les fonctions de forme associées aux rotations nodales sont beaucoup plus sensibles à l'influence de l'effort axial de compression que celles associées aux déplacements transversaux nodaux.

Dans un même ordre d'idées, nous pouvons observer à partir de la figure (III.3) l'influence du module de cisaillement G sur les fonctions de forme précédentes. A cet effet deux situations ont été examinées, l'une correspondant au cas $ml=0$ et l'autre au cas $ml=4.5$, il en ressort que le module de cisaillement G affecte substantiellement les amplitudes de ces fonctions de forme, notamment celles relatives aux rotations nodales, où l'incidence sur l'amplitude maximale avoisine les 20% dans la situation $ml=4.5$.



Mise en évidence de l'influence de l'effort axial sur les fonctions de forme
 (a): fonction de forme relative au déplacement transversal v_j
 (b): fonction de forme relative au déplacement transversal v_j
 (c): fonction de forme relative à la rotation θ_j
 (d): fonction de forme relative à la rotation θ_j

Figure III.2

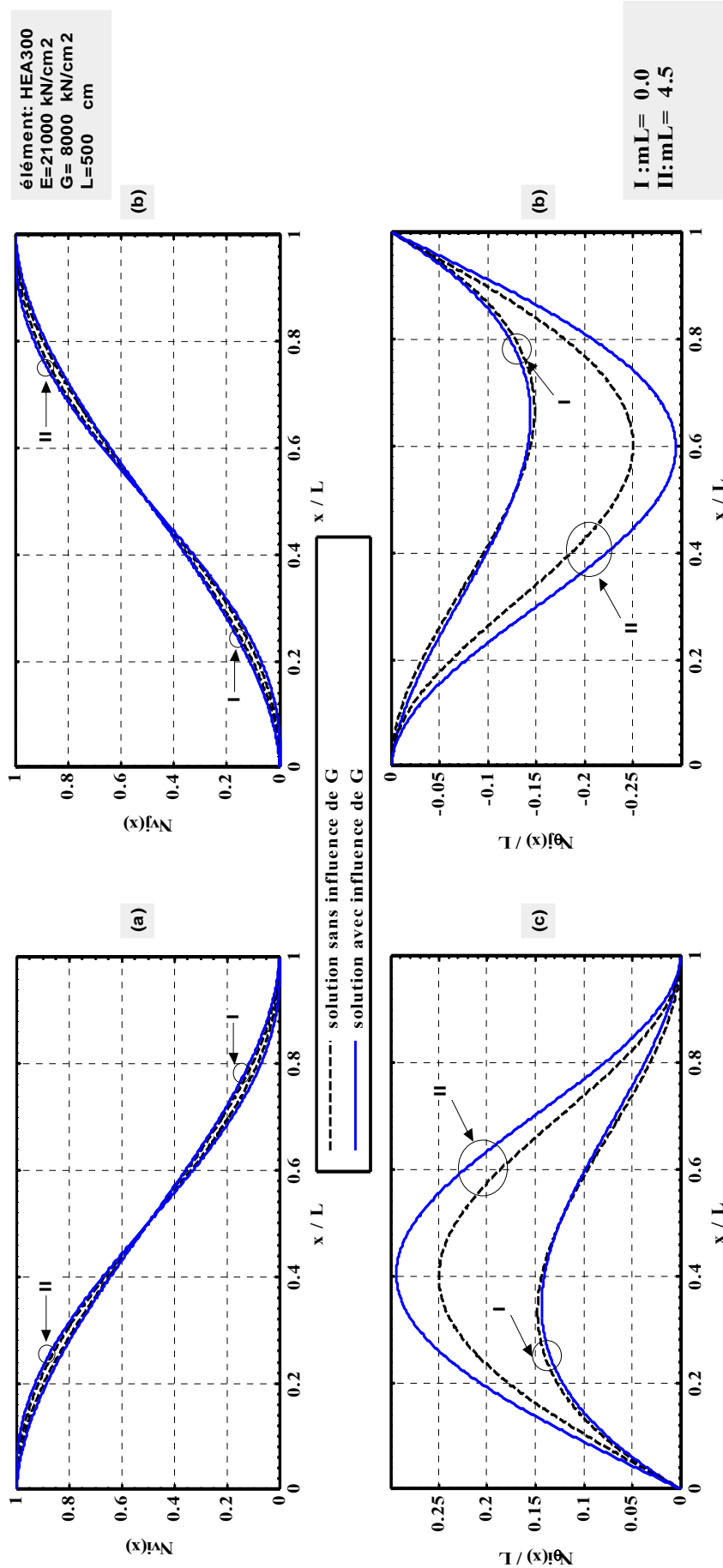


Figure III.3

La figure (III.4) ci-après, présente une comparaison entre les fonctions de forme de rotation $N_{\theta_i}(x)$ et $N_{\theta_j}(x)$ exprimées par les relations (III.20.b,d) et celles proposées par Chan et Zhou [22] qui traitent le même phénomène (effet du second ordre) à partir d'une approche élément fini basée sur une approximation polynomiale du cinquième degré, formulée comme suit :

En adoptant les relations suivantes :

$$H_1 = (ml^2 + 80) \quad (a)$$

$$H_2 = (ml^2 + 48) \quad (b)$$

$$A = 20\left(X - \frac{1}{2}\right) + (80 - ml^2)\left(X - \frac{1}{2}\right)^3 + 4ml^2\left(X - \frac{1}{2}\right)^5 \quad (c) \quad (III.22)$$

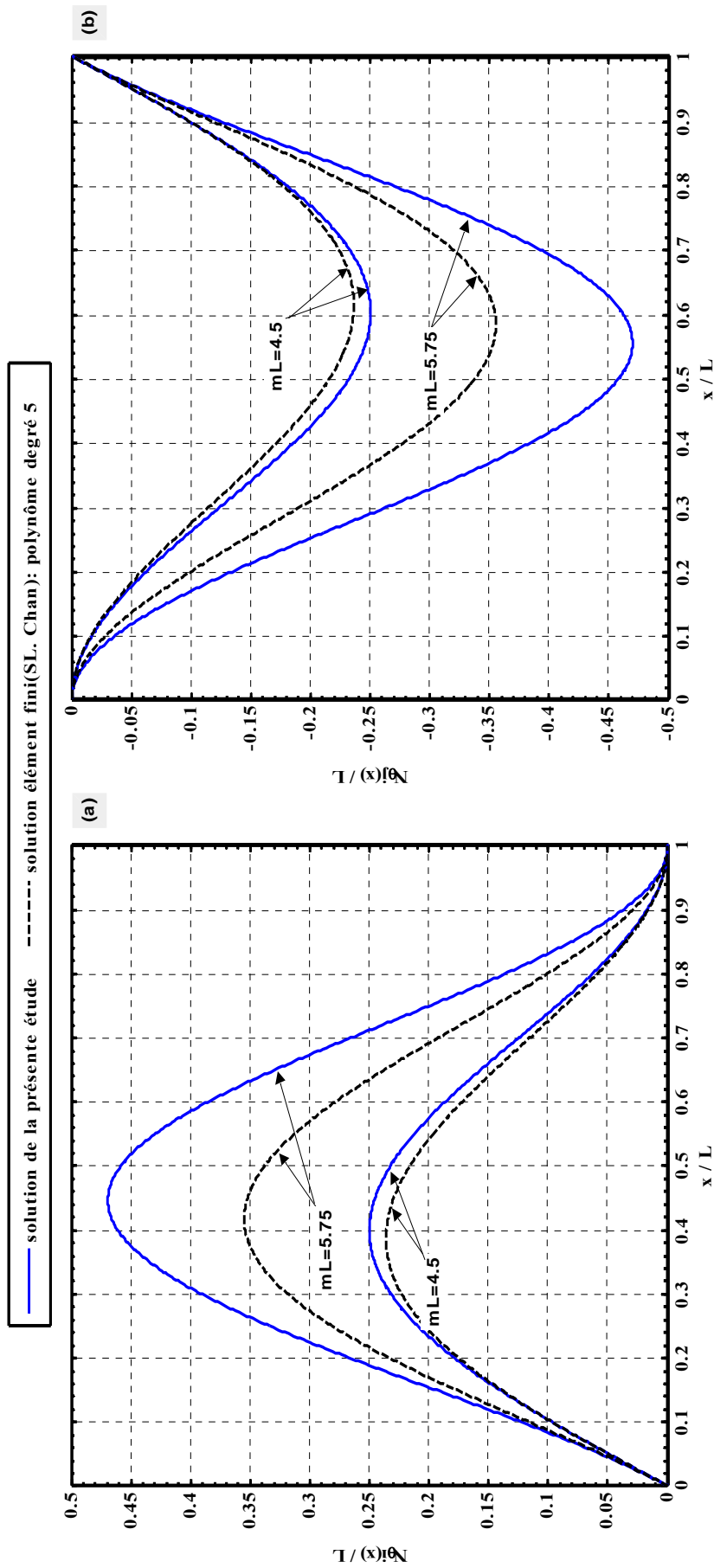
$$B = 6 - \frac{(48 - ml^2)}{2}\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - 2ml^2\left(X - \frac{1}{2}\right)^4 \quad (d)$$

On obtient selon Chan et Zhou :

$$\begin{cases} N_{\theta_i}(x) = \frac{A}{H_1} + \frac{B}{H_2} & (a) \\ N_{\theta_j}(x) = \frac{A}{H_1} - \frac{B}{H_2} & (b) \end{cases} \quad (III.23)$$

Ainsi, nous pouvons apprécier à partir des graphes (a) et (b), que la solution élément fini, sous estime l'amplitude de la déformée en comparaison avec la solution exacte obtenue à partir de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre. En effet nous pouvons mesurer entre ces deux approches un écart qui avoisine sensiblement 10% pour $\pi \leq ml \leq 1.5\pi$, pour devenir très important (de l'ordre de 30%) dès lors que $1.5\pi < ml \leq 2\pi$.

Cette comparaison, consolide tout au moins le point de vue de nombreux auteurs [6,7,8,21,26,34] quant à la nécessité d'investir plus d'effort en termes de formulation analytique, en vue de compléter la solution exacte découlant de la résolution de l'équation différentielle d'équilibre, et lui permettre de s'approprier la souplesse et l'efficacité que procure la solution formulée à partir d'une approche élément fini.



Comparaison avec la solution élément fini (SL. Chan): polynôme de degré 5
 (a): fonction de forme relative à la rotation θ_i

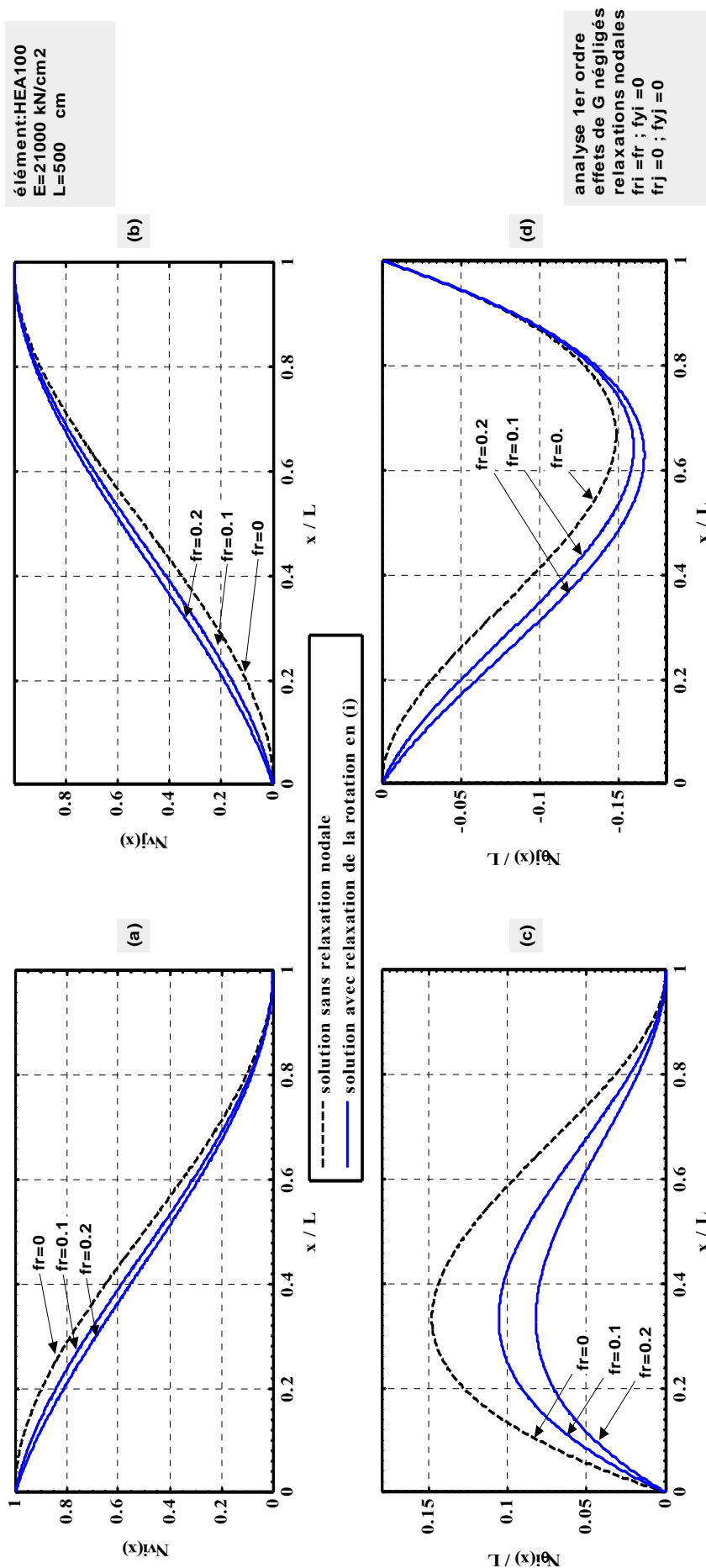
Figure III.4

Nous abordons dans ce qui suit l'analyse des fonctions de forme précédentes vis-à-vis de l'influence des conditions aux limites que l'on peut entreprendre par le biais des indexes de flexibilité $(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$, relatifs aux ressorts de rotation et de déplacement transversal introduits aux deux extrémités de l'élément. Cette modélisation présente l'avantage de simuler n'importe quelle situation de condition aux limites, juste en attribuant aux différents indexes de flexibilité des valeurs qui correspondent à la situation souhaitée.

Afin de mettre en évidence l'effet de semi-rigidité, nous allons considérer dans ce qui suit les effets dus à la compression et au module de cisaillement G comme négligeables ($\lambda_N=0$ et $\lambda_G=0$). Supposons aussi, le nœud (j) totalement rigide ($f_j^r = 0, f_j^y = 0$) et le nœud (i) semi-rigide vis-à-vis de la rotation en lui attribuant successivement des valeurs d'indexes de flexibilités correspondant à ($f_r=0, f_r=0.1, f_r=0.2$), on adoptera par ailleurs pour ce dernier ($f_i^y = 0$). Ainsi nous pouvons observer sur la figure (III.5) les courbes de variations relatives aux fonctions de forme décrites par les expressions (III.20.a,b,c,d) pour ce qui est de la situation ($f_r=0.1, f_r=0.2$) et celles décrites par les expressions (III.21.a,b,c,d) en ce qui concerne la situation correspondant à $f_r=0$. Ainsi nous pouvons observer qu'une augmentation de flexibilité ($f_r=0.1, f_r=0.2$) relative au ressort de rotation situé à l'extrémité (i) entraîne une diminution des amplitudes relatives aux fonctions de forme $N_{vi}(x)$ et $N_{\theta i}(x)$ en même temps cela provoque une augmentation des amplitudes relatives aux fonctions de forme $N_{vj}(x)$ et $N_{\theta j}(x)$.

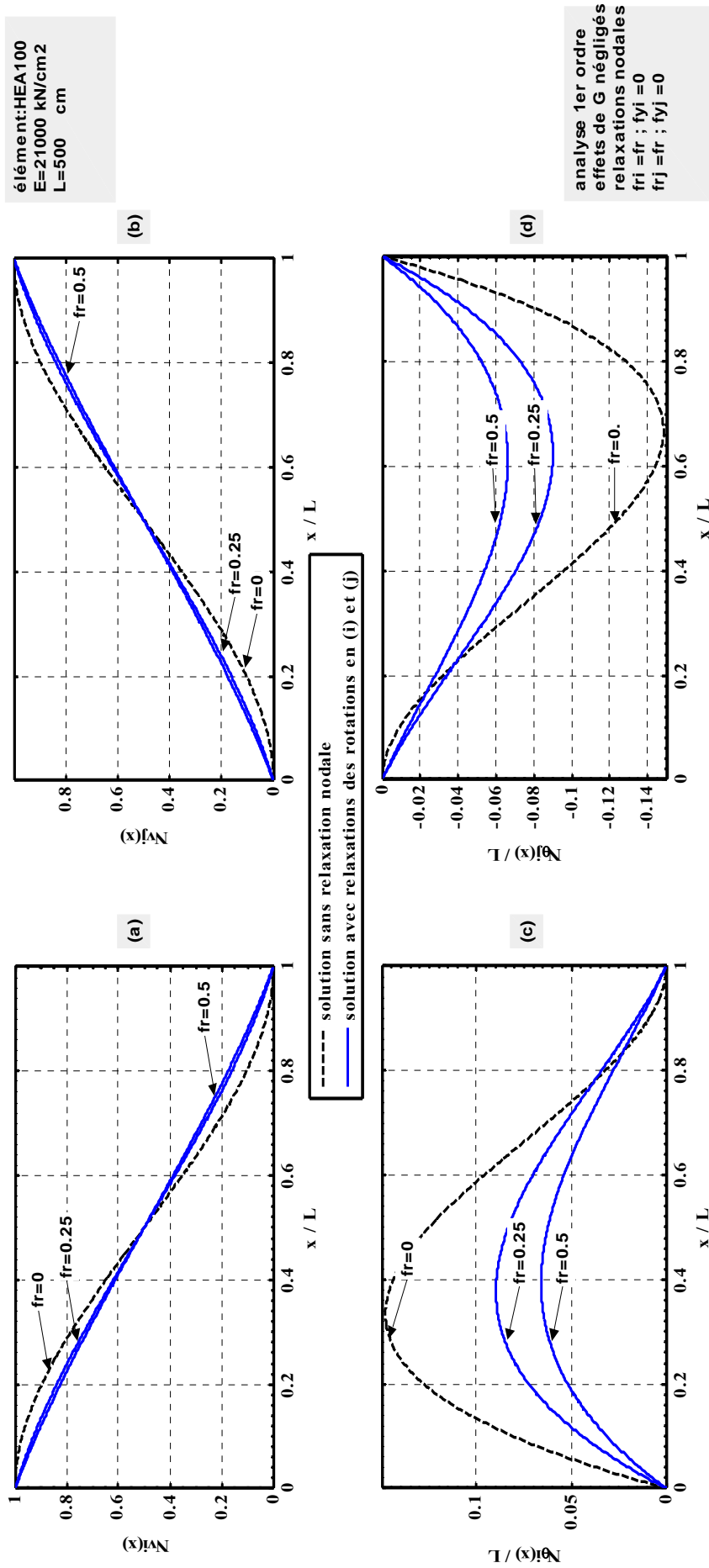
La figure (III.6) met en évidence l'effet de semi-rigidité sur les précédentes fonctions de forme en considérant une relaxation simultanée des rotations nodales en (i) et (j) en attribuant successivement des valeurs d'indexes de flexibilités correspondant à ($f_r=0, f_r=0.25, f_r=0.5$), on supposera par ailleurs ($f_i^y = 0, f_j^y = 0$). Ainsi Les graphes (a), (b), (c), (d), relatifs à cette situation montrent que l'augmentation de la souplesse ($f_r=0.25, f_r=0.50$) entraîne une diminution des amplitudes pour toutes les fonctions de forme étudiées.

La dernière situation envisagée suppose l'extrémité (i) de l'élément comme étant semi-rigide vis-à-vis du déplacement transversal, et l'on adopte à cet effet les valeurs d'indexes de flexibilités suivantes ($f_y=0, f_y=0.25, f_y=0.5$). On supposera par ailleurs ($f_i^r = 0, f_j^y = 0, f_j^r = 0$). Dans cette situation, nous pouvons mesurer l'effet d'amplification des amplitudes que subissent les fonctions de forme $N_{\theta j}(x)$ et $N_{\theta j}(x)$, alors que les fonctions de forme $N_{vj}(x)$ et $N_{vj}(x)$ présentent une diminution d'amplitude. Ces résultats sont schématisés par les graphes (a), (b), (c), (d), de la figure (III.7).



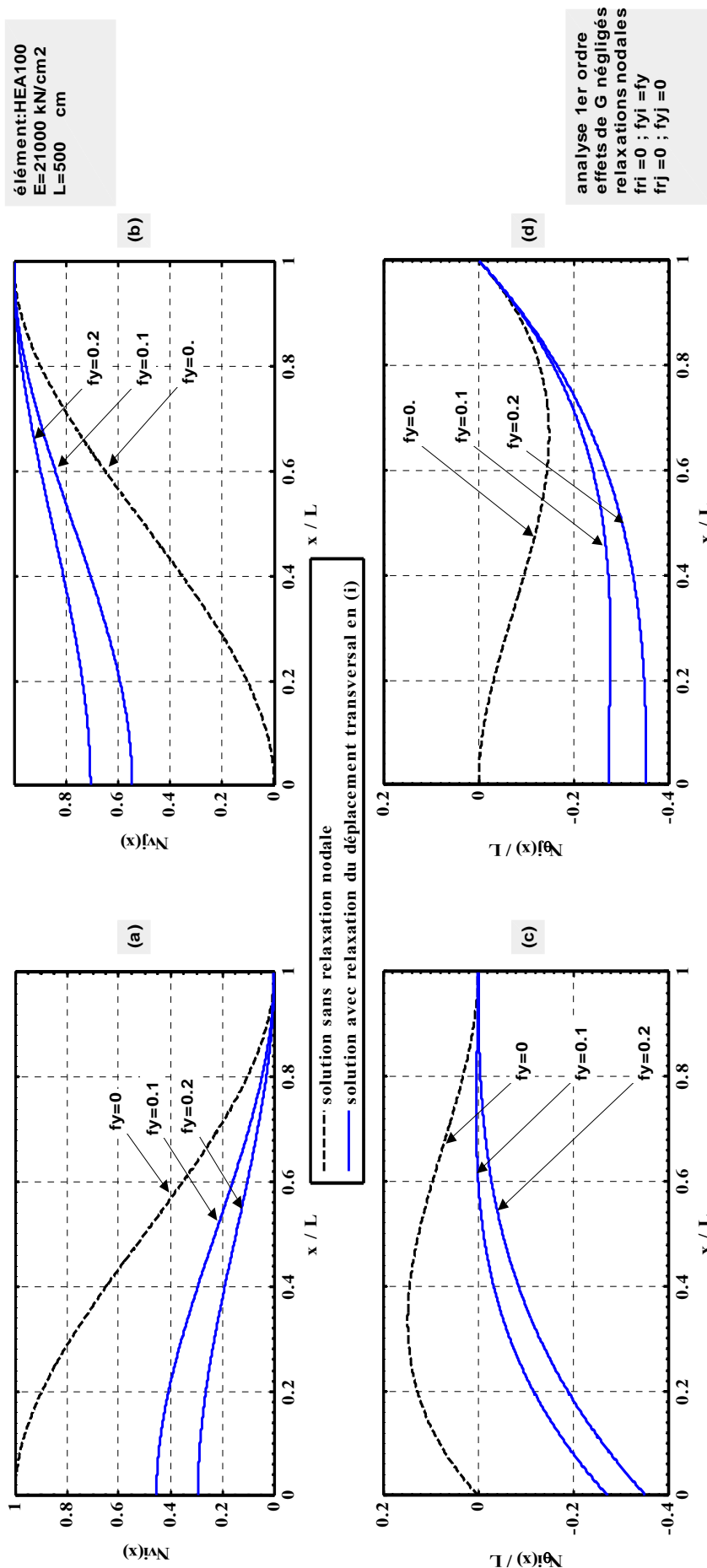
Mise en évidence de l'effet de relaxation de la rotation nodale sur les fonctions de forme
 (a): fonction de forme relative au déplacement transversal v_j
 (c): fonction de forme relative à la rotation θ_i (d): fonction de forme relative à la rotation θ_j

Figure III.5



Mise en évidence de l'effet de relaxation des rotations nodales sur les fonctions de forme
 (a): fonction de forme relative au déplacement transversal v_i
 (c): fonction de forme relative à la rotation θ_i
 (b): fonction de forme relative au déplacement transversal v_j
 (d): fonction de forme relative à la rotation θ_j

Figure III.6



Mise en évidence de l'effet de relaxation du déplacement transversal du noeud (i) sur les fonctions de forme
 (a): fonction de forme relative au déplacement transversal v_i
 (c): fonction de forme relative à la rotation θ_i
 (b): fonction de forme relative au déplacement transversal v_j
 (d): fonction de forme relative à la rotation θ_j

Figure III.7

III.6 Formulation élémentaire

La solution $y_1(x)$ précédemment exprimée par la relation (III.19) en fonction du vecteur $(\bar{v}_i, \bar{\theta}_i, \bar{v}_j, \bar{\theta}_j)$, nous permet d'établir à partir de la relation (III.3) le vecteur élémentaire des sollicitations nodales, constitué de (T_i, M_i, T_j, T_j) , que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = [k^*] \times \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_i^q \\ M_i^q \\ T_j^q \\ M_j^q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_i^0 \\ M_i^0 \\ T_j^0 \\ M_j^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Nous pouvons distinguer dans la relation (III.24) précédente :

1/ La matrice de rigidité k^* élargie à la prise en compte simultanée :

a/ des effets du second ordre.

b/ du module de cisaillement G .

c/ des souplesses nodales traduites par les indexes $(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$.

2/ Les quantités $(T_i^q, M_i^q, T_j^q, T_j^q)$ qui traduisent les charges nodales équivalentes au chargement transversal $q(x)$ appliqué sur l'élément (ij).

3/ Les quantités $(T_i^0, M_i^0, T_j^0, T_j^0)$ qui traduisent les charges nodales équivalentes à l'imperfection géométrique initiale $y_0(x)$ appliqué sur l'élément (ij).

Notons par ailleurs, que le produit entre la matrice de rigidité k^* et le vecteur déplacement $(v_i, \theta_i, v_j, \theta_j)$, permet d'obtenir les éléments de réductions associés exclusivement aux rotations et déplacements nodaux.

III.6.1 Formulation de la matrice de rigidité élémentaire

La matrice de rigidité k^* peut être exprimée sous la forme suivante :

$$k^* = \begin{bmatrix} B_1 \frac{EI}{L^3} & B_2 \frac{EI}{L^2} & -B_1 \frac{EI}{L^3} & B_3 \frac{EI}{L^2} \\ B_2 \frac{EI}{L^2} & A_1 \frac{EI}{L} & -B_2 \frac{EI}{L^2} & A_3 \frac{EI}{L} \\ -B_1 \frac{EI}{L^3} & -B_2 \frac{EI}{L^2} & B_1 \frac{EI}{L^3} & -B_3 \frac{EI}{L^2} \\ B_3 \frac{EI}{L^2} & A_3 \frac{EI}{L} & -B_3 \frac{EI}{L^2} & A_2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où les termes $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, désignent des paramètres adimensionnels traduisant à la fois :

- Le couplage entre l'effort de compression et la déformée de l'élément. Cet aspect est introduit par le biais du paramètre λ_N .

- l'influence du module de cisaillement G sur la déformée. Cet aspect est introduit par le biais du paramètre λ_G .

- l'influence de la souplesse des extrémités nodales. Cet aspect est introduit par le biais des indexes $(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$.

Ces termes sont exprimés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} A_1 = k_{n1} + k_{r2} + k_{y2} & \text{(a)} \\ A_2 = k_{n1} + k_{r1} + k_{y1} & \text{(b)} \\ A_3 = k_{n2} + k_{y3} & \text{(c)} \end{cases} \quad \text{(III.26)}$$

$$\begin{cases} B_1 = k_{n4} + k_{r3} + k_{r4} & \text{(a)} \\ B_2 = k_{n3} + k_{r2} & \text{(b)} \\ B_3 = k_{n3} + k_{r1} & \text{(c)} \end{cases} \quad \text{(III.27)}$$

Avec:

$$\begin{cases} k_{n1} = (g_1 ml \cos(ml) - \sin(ml)) / \lambda_N^2 / d_L & \text{(a)} \\ k_{n2} = (g_1 ml - \sin(ml)) / \lambda_N^2 / d_L & \text{(b)} \\ k_{n3} = g_1 ml (1 - \cos(ml)) / \lambda_N^2 / d_L & \text{(c)} \\ k_{n4} = g_1^2 ml^2 \sin(ml) / \lambda_N^2 / d_L & \text{(d)} \end{cases} \quad \text{(III.28)}$$

$$\begin{cases} k_{r1} = (f_i^r \sin(ml)) / \lambda_N^4 / d_L & \text{(a)} \\ k_{r2} = (f_j^r \sin(ml)) / \lambda_N^4 / d_L & \text{(b)} \\ k_{r3} = ((f_i^r + f_j^r) g_1 ml \cos(ml)) / \lambda_N^4 / d_L & \text{(c)} \\ k_{r4} = ((f_i^r f_j^r) \sin(ml)) / \lambda_N^6 / d_L & \text{(d)} \end{cases} \quad \text{(III.29)}$$

$$\begin{cases} k_{y1} = (f_i^y + f_j^y) (g_1 ml \cos(ml) / \lambda_N^4 / d_L + k_{r1} / \lambda_N^2) & \text{(a)} \\ k_{y2} = (f_i^y + f_j^y) (g_1 ml \cos(ml) / \lambda_N^4 / d_L + k_{r2} / \lambda_N^2) & \text{(b)} \\ k_{y3} = (f_i^y + f_j^y) g_1 ml / \lambda_N^4 / d_L & \text{(c)} \end{cases} \quad \text{(III.30)}$$

d_L ayant été exprimé précédemment voir relation (III.17).

III.6.2 Charges nodales équivalentes

Les quantités $(T_i^q, M_i^q, T_j^q, T_j^q)$ et $(T_i^0, M_i^0, T_j^0, T_j^0)$, de la relation (III.24) désignent les charges nodales équivalentes associées respectivement au chargement transversal $q(x)$ et à l'action de la déformée géométrique initiale $y_0(x)$. Ces quantités découlent en partie des contributions nodales $(v_{iq}, \theta_{iq}, v_{jq}, \theta_{jq})$ et $(v_{i0}, \theta_{i0}, v_{j0}, \theta_{j0})$, par le biais :

- des constantes d'intégration (C_1, C_2, C_3, C_4) .

- des quantités associées aux constantes (C_q, C_0) venant de la relation (II.26).

- des quantités associées aux constantes (c_t, d_t, c_m, d_m) venant respectivement des expressions de moment fléchissant et d'effort tranchant exprimées par les relations (II.29) et (II.31).

III.6.2.1 Cas d'un chargement linéairement réparti

Ainsi, nous obtenons dans le cas d'un chargement linéairement réparti :

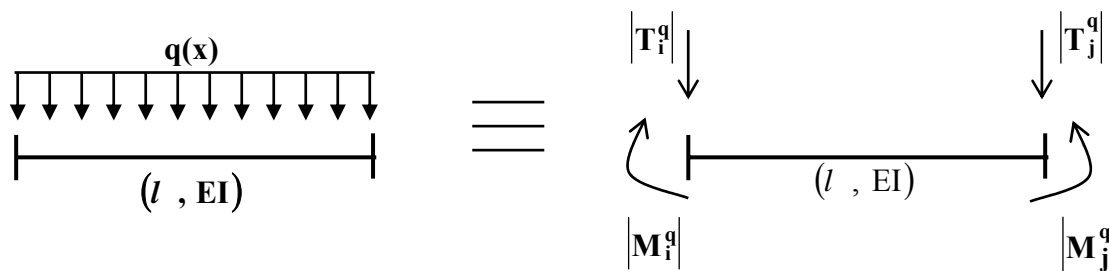
$$\begin{Bmatrix} T_i^q \\ M_i^q \\ T_j^q \\ M_j^q \end{Bmatrix} = [k^*] \times \begin{Bmatrix} v_{iq} \\ \theta_{iq} \\ v_{jq} \\ \theta_{jq} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_i^q \\ m_i^q \\ t_j^q \\ m_j^q \end{Bmatrix} \quad \text{(III.31)}$$

Avec :

$$\begin{cases} t_i^q = \frac{1}{\lambda_G^2} a_q l^2 \\ m_i^q = -\left(\frac{1}{m l^2} + \lambda_G^2\right) b_q l^2 \\ t_j^q = -\left(\lambda_G^2 + \frac{1}{2}\right) a_q l^2 - b_q l \\ m_j^q = \left(\frac{1}{m l^2} + \lambda_G^2\right) (a_q l + b_q) l^2 \end{cases} \quad \text{(III.32)}$$

$(v_{iq}, \theta_{iq}, v_{jq}, \theta_{jq})$ sont donnés par les relations (III.12) précédentes.

Les charges nodales équivalentes $(T_i^q, M_i^q, T_j^q, M_j^q)$ de la relation (III.31), obéissent à la convention de signe des efforts comme établie au paragraphe (III.2). Ces charges nodales doivent être multipliées par (-1) avant de les transférer vers le vecteur charge global, ceci correspond schématiquement à l'orientation des efforts comme le montre la figure (III.8) suivante :

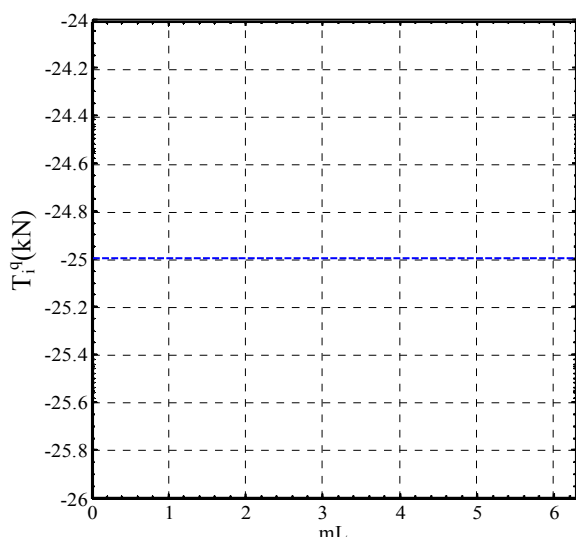


Orientation des charges nodales équivalentes $(M_i^q, M_j^q, T_i^q, T_j^q)$

Figure III.8

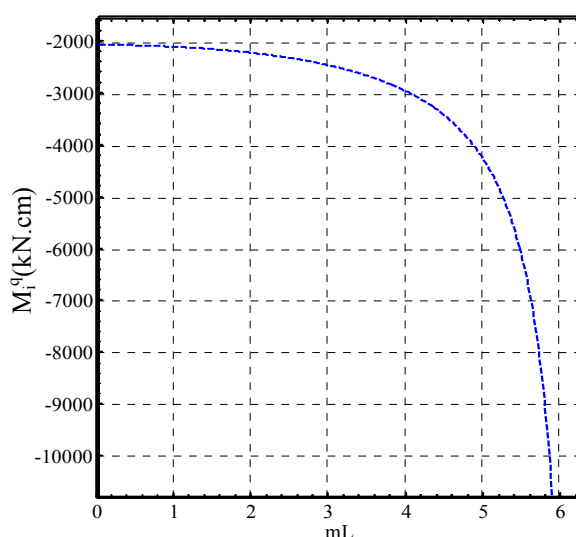
Afin d'observer la variation des charges nodales équivalentes situées à l'extrémité (i), considérons les données suivantes : longueur de l'élément $l=500\text{cm}$, chargement uniformément réparti d'intensité $q=0.1\text{kN.}$, module de Young du matériau $E=21000\text{kN./cm}^2$, inertie de l'élément $I=18260\text{cm}^4$. Dans cette analyse on négligera l'influence du module de cisaillement G .

Ainsi, nous obtenons les figures (III.9) et (III.10) qui montrent respectivement, les variations des charges nodales équivalentes relatives à l'extrémité (i). Nous remarquons déjà, l'influence des effets du second ordre par l'intermédiaire du paramètre m/l qui se traduit par une augmentation importante du moment (M_i^q) , dont la valeur augmente d'environ 2000kN.cm à plus de 10000 kN.cm pour respectivement $m/l=0$ qui correspond à la situation sans effet du second ordre, et $m/l \approx 2\pi$ proche de la situation de flambement élastique de l'élément avec conditions aux limites totalement rigides. On notera par ailleurs que les effets du second ordre n'ont aucune incidence sur la charge nodale équivalente (T_i^q) .



variation de l'effort tranchant à l'extrémité (i) équivalent nodal d'un chargement uniformément réparti $q(x)$

Figure III.9



variation du moment fléchissant à l'extrémité (i) équivalent nodal d'un chargement uniformément réparti $q(x)$

Figure III.10

III.6.2.2 Cas d'une imperfection géométrique initiale

Concernant l'imperfection géométrique initiale, cette dernière est traduite sous la forme d'un chargement nodale équivalent que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

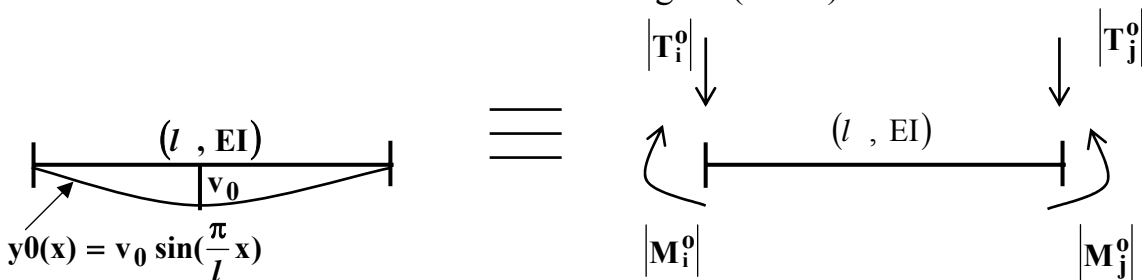
$$\begin{Bmatrix} T_i^0 \\ M_i^0 \\ T_j^0 \\ M_j^0 \end{Bmatrix} = [k^*] \times \begin{Bmatrix} v_{i0} \\ \theta_{i0} \\ v_{j0} \\ \theta_{j0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_i^0 \\ m_i^0 \\ t_j^0 \\ m_j^0 \end{Bmatrix} \quad \text{(III.33)}$$

Avec :

$$\begin{cases} t_i^0 = \left(1 - h_2 r_1 \left(1 - \left(\frac{n\pi}{ml} \right)^2 \right) + (n\pi)^2 \lambda_G^2 \right) \frac{(n\pi)}{\lambda_N^2} \left(\frac{EI}{l^3} v_0 \right) & \text{(a)} \\ m_i^0 = 0 & \text{(b)} \\ t_j^0 = - \left(1 - h_2 r_1 \left(1 - \left(\frac{n\pi}{ml} \right)^2 \right) + (n\pi)^2 \lambda_G^2 \right) \frac{(n\pi)}{\lambda_N^2} \cos(n\pi) \left(\frac{EI}{l^3} v_0 \right) & \text{(c)} \\ m_j^0 = \left(\frac{h_2 r_1}{ml^2} + \lambda_G^2 \right) \frac{(n\pi)^2}{\lambda_N^2} \sin(n\pi) \left(\frac{EI}{l^2} v_0 \right) & \text{(d)} \end{cases} \quad \text{(III.34)}$$

($v_{i0}, \theta_{i0}, v_{j0}, \theta_{j0}$) sont donnés par les relations (III.10) précédentes.

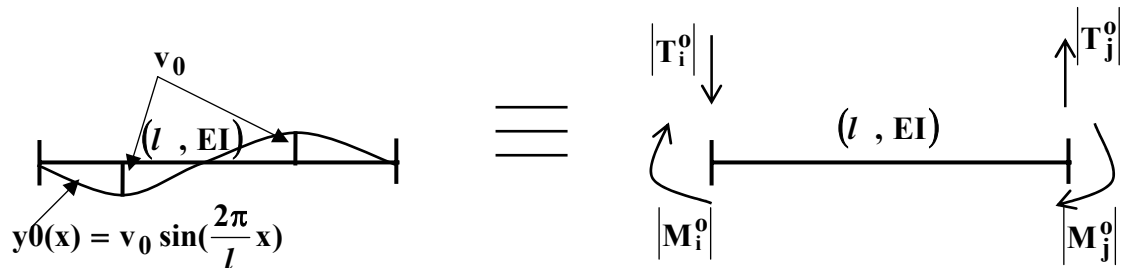
Les charges nodales équivalentes ($T_i^0, M_i^0, T_j^0, M_j^0$) de la relation (III.33), obéissent à la convention de signe des efforts comme établie au paragraphe (III.2). Ces charges nodales doivent être multipliées par (-1) avant de les transférer vers le vecteur charge global, ce qui correspond schématiquement dans le cas $n=1$ à l'orientation des efforts comme le montre la figure (III.11) suivante :



**Orientation des charges nodales équivalentes ($M_i^0, M_j^0, T_i^0, T_j^0$)
(cas : $n=1$)**

Figure III.11

Dans le cas d'une imperfection géométrique initiale avec $n=2$, l'orientation des efforts devra correspondre à celle de la figure (III.12) ci-après.



Orientation des charges nodales équivalentes $(M_i^0, M_j^0, T_i^0, T_j^0)$
(cas $n=2$)

Figure III.12

Afin d'observer la variation des charges nodales équivalentes situées à l'extrémité (i), considérons les données suivantes : longueur de l'élément $l=500\text{cm}$, imperfection initiale caractérisée par $n=1$, $v_0=l/1000$, module de Young du matériau $E=21000\text{kN./cm}^2$, inertie de l'élément $I=18260\text{cm}^4$. Dans cette analyse on négligera l'influence du module de cisaillement G .

Ainsi, les figures (III.13) et (III.14) relatives au cas d'une imperfection de forme ($n=1$), montrent respectivement, les variations des charges nodales équivalentes associées à l'extrémité (i).

Nous remarquons comme auparavant, l'influence des effets du second ordre par l'intermédiaire du paramètre m/l qui se traduit par une augmentation importante du moment (M_i^0) , dont la valeur augmente de zéro à environ de 10000 kN.cm pour respectivement $m/l=0$ qui correspond à la situation sans effet du second ordre, et $m/l \approx 2\pi$ proche de la situation de flambement élastique de l'élément avec conditions aux limites totalement rigides. On notera par ailleurs que les effets du second ordre n'ont aucune incidence sur la charge nodale équivalente (T_i^0) , qui reste par ailleurs nulle quelque soit la valeur de m/l .

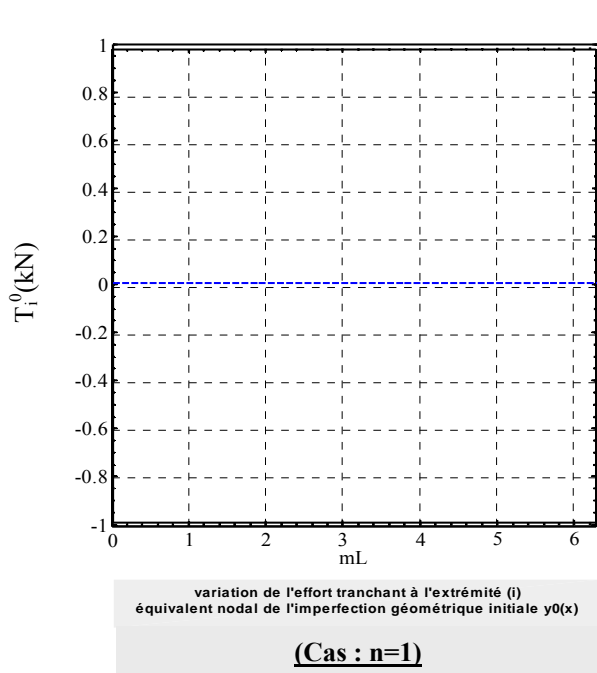


Figure III.13

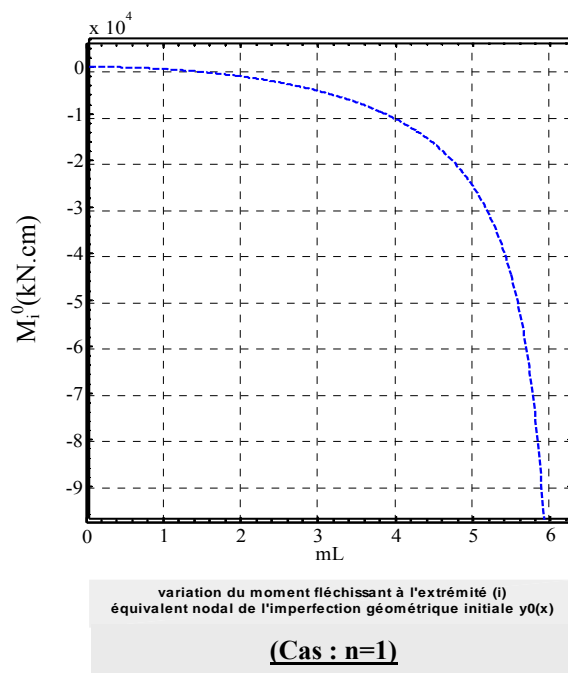


Figure III.14

Enfin nous pouvons observer sur les figures (III.15) et (III.16) relatives au cas d'une imperfection de forme ($n=2$), les variations de ces mêmes charges nodales équivalentes. L'on constate dans ce cas une augmentation qui touche aussi bien (M_i^0) que (T_i^0). Ce résultat s'explique par la forme asymétrique de l'imperfection géométrique choisie dans ce cas d'analyse [3].

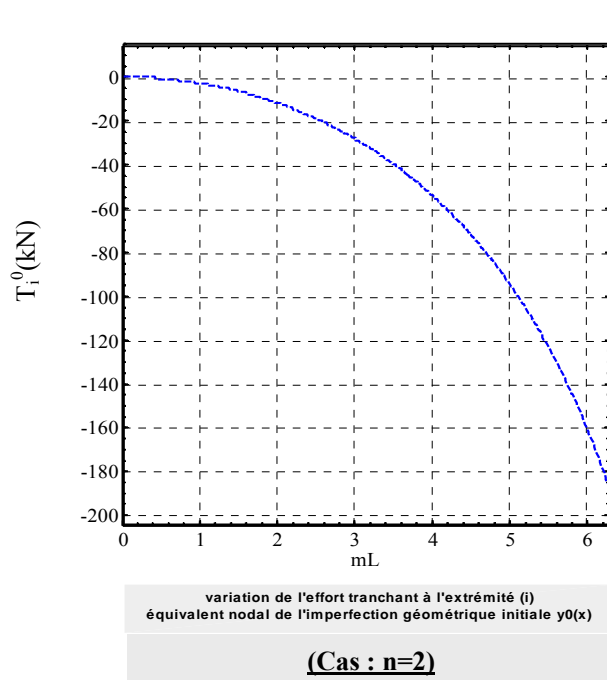


Figure III.15

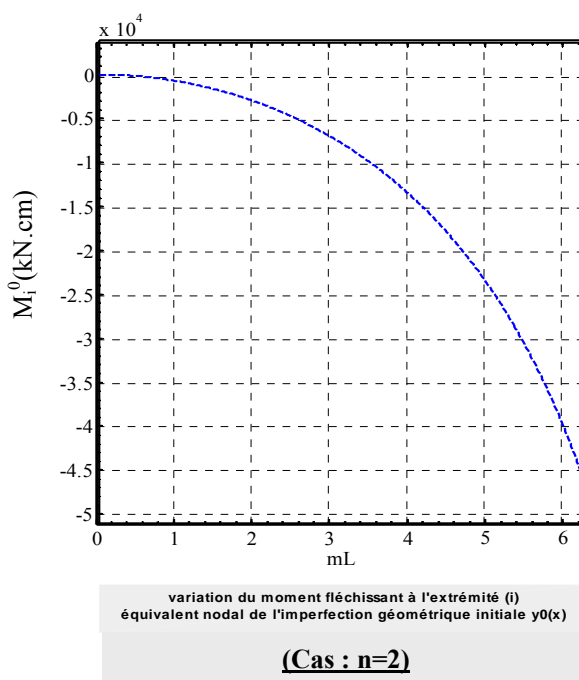


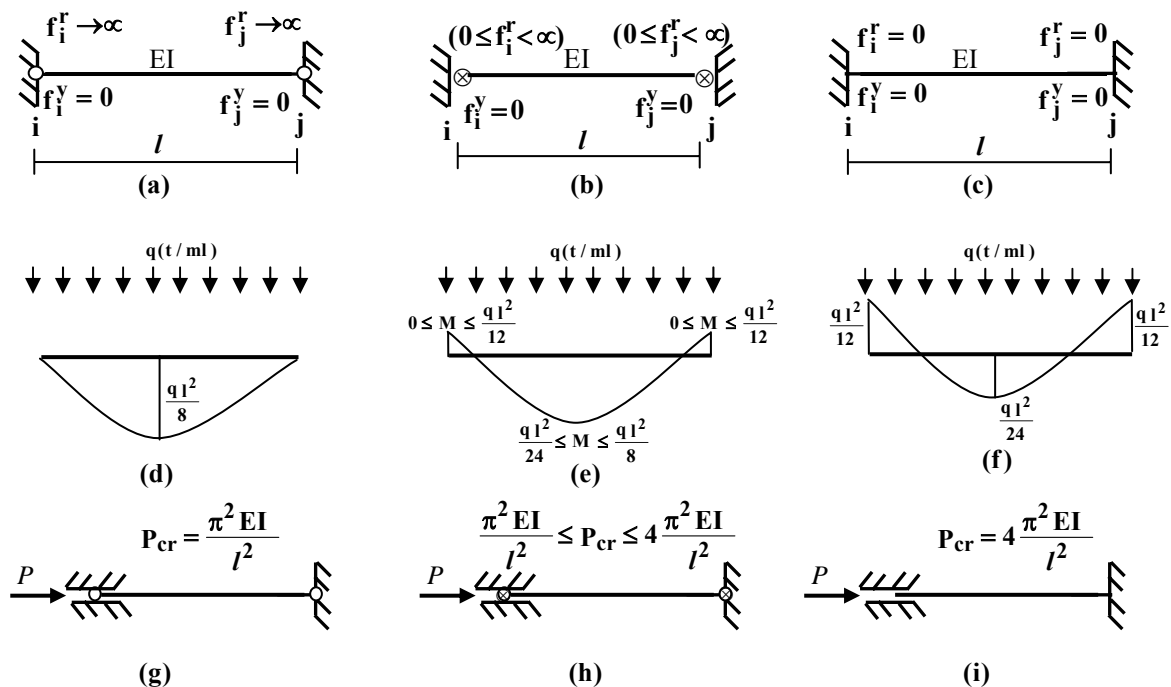
Figure III.16

IV.1 Introduction

Les structures sont en général analysées, en considérant les connexions comme parfaitement rigides ou articulées, ce qui se traduit d'une situation à l'autre, par une variation importante dans la distribution des efforts internes. Par conséquent, il devient légitime de chercher à connaître avec précision l'ampleur de ces variations dans la réponse globale d'une structure lorsque cette dernière abrite en son sein des connexions semi-rigides. Qu'en serait-il alors, si en plus il fallait tenir compte des effets du second ordre et de ceux relatifs au module de cisaillement G ? C'est à ces questions que nous essaierons de répondre dans ce chapitre à travers une interprétation des résultats analytiques obtenus au chapitre précédent.

IV.2 Effets des connexions semi-rigides : analyse au premier ordre

Il est évident, que toute analyse de structure composée par de telles connexions, doit être menée en tenant compte de leurs comportements réels qui risquent d'affecter substantiellement la réponse globale de la structure [36,48,64,66].



Aperçu des conséquences liées à la nature des conditions aux limites :
 -(a), (b), (c) : différentes situations de condition aux limites
 -(d), (e), (f) : variation de la distribution des moments fléchissants
 -(g), (h), (i) : variation de la charge critique de flambement

Figure IV.1

C'est le cas par exemple de l'importante variation que l'on peut observer dans la distribution des moments fléchissants (figures (IV.1.d,e,f)), ou encore par le niveau de la charge de ruine de flambement P_{cr} (figures (IV.1.g,h,i)), lorsque les extrémités de la poutre sont soit articulées, rigides ou alors semi-rigides par rapport aux rotations, comme nous pouvons l'observer sur les figures (IV.1.a,b,c) ci-dessus.

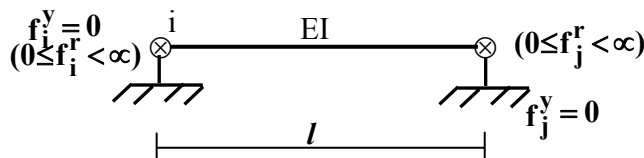
Commençons d'abord, par introduire la notion de degré de fixation, abondamment repris dans la littérature [83], que l'on exprime par les relations (V.1.a,b) pour décrire le degré de fixation (taux de rigidité) des extrémités nodales d'un l'élément(ij).

$$\begin{cases} r_i = \frac{1}{1 + 3f_i^r} & \text{(a)} \\ r_j = \frac{1}{1 + 3f_j^r} & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{(IV.1)}$$

Ainsi formulés, les degrés de fixations r_i et r_j sont destinés à traduire les conditions de fixation des extrémités nodales de l'élément (ij) dont la variation peut s'étaler de ($r_i = r_j = 0$) qui correspond à la situation d'une articulation parfaite, jusqu'à ($r_i = r_j = 1$) relative au cas d'un nœud parfaitement rigide. Le domaine ($0 < r_{i,j} < 1$) concernerait alors la situation relative à un nœud semi rigide.

IV.2.1 Effets de la semi-rigidité de rotation

Nous allons nous consacrer tout d'abord, à l'étude d'un élément poutre (ij) de rigidité (EI) et de longueur l , considéré dans la situation $m/l=0$ (effets du second ordre nuls) et $g_1=0$ (couplage des effets de cisaillement et du 2nd ordre). On adopte aux extrémités de l'élément, deux ressorts de rotation dont les valeurs d'index de flexibilité appartiennent au domaine suivant : ($0 \leq f_i^r < \infty$, et $0 \leq f_j^r < \infty$). D'autre part, on suppose les déplacements transversaux des deux extrémités de l'élément bloqués, ce qui correspond à des indexes de flexibilité (f_i^y , et f_j^y) nuls, comme indiqué sur la figure (IV.2) ci-après.



Élément poutre à extrémités rigides vis-à-vis des déplacements transversaux et semi-rigides vis-à-vis des rotations de flexion

Figure IV.2

Ainsi grâce aux résultats obtenus au chapitres (III) précédent, on peut aisément déduire à partir de la relation (III.26.a,b,c), les facteurs de rigidité (R_i, R_j) relatifs aux extrémités nodales de l'élément (ij), exprimés par les relations (IV.2.a,b) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i = \frac{4(1 + 3f_j^r)}{1 + 4(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r} \quad (a) \\ R_j = \frac{4(1 + 3f_i^r)}{1 + 4(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r} \quad (b) \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

Ces facteurs de rigidité (R_i, R_j) correspondent aux quantités de moments développées par les ressorts d'extrémité, lorsque ces derniers sont soumis respectivement à l'action d'une rotation unitaire.

L'on peut déjà relever un effet de couplage entre les indexes de flexibilité f_i^r et f_j^r dans les relations de rigidité (R_i, R_j) ainsi obtenues. Nous pouvons observer par ailleurs, que les degrés de fixation tels que formulés en (IV.1.a,b) correspondent selon la formulation (IV.2.a,b) au cas particulier d'un élément situé entre une extrémité semi rigide et une autre parfaitement articulée.

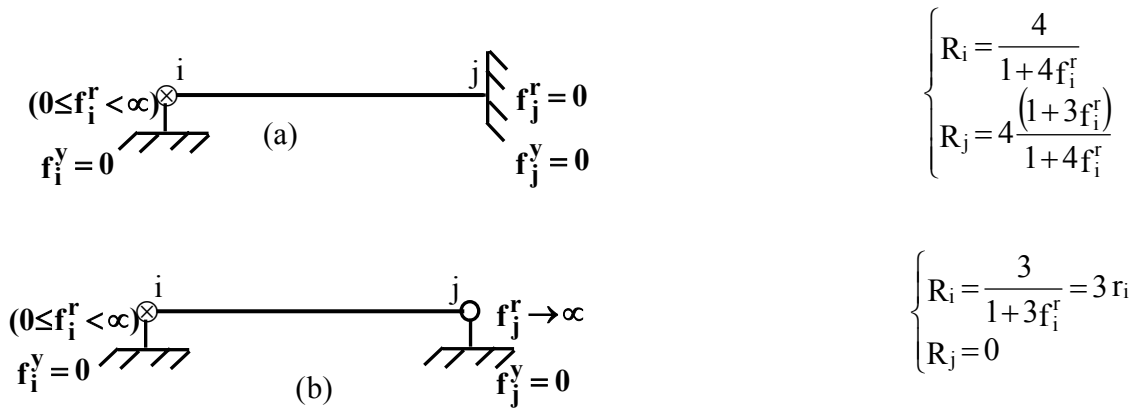
En effet, lorsque l'indexe de flexibilité f_j^r tend vers l'infini (cas d'une articulation parfaite en j) nous obtenons à partir de (IV.2.a) le résultat $R_i = 3R_i$, réciproquement lorsque f_i^r tend vers l'infini (cas d'une articulation parfaite en i) nous aboutissons à partir de (IV.2.b) au résultat $R_j = 3R_j$.

Ceci indique que les degrés de fixations tels que formulés en (IV.1) correspondent à une situation particulière de condition aux limites. Cela nous amène à affirmer que les relations (IV.2), s'avèrent de portée plus large en raison de leurs formulations générales.

La figure (IV.3) ci-après, montre une simulation relative à deux situations différentes de condition aux limites. Ainsi en faisant simplement varier les indexes de flexibilité f_i^r et f_j^r comme indiqué sur les figures (IV.3.a,b) nous pouvons déduire

à partir des relations (IV.2.a,b), les facteurs de rigidité $R_i = \frac{4}{1 + 4f_i^r}$ et $R_j = 4 \frac{(1 + 3f_i^r)}{1 + 4f_i^r}$ qui

traduisent les quantités de moment relatives à l'action d'une rotation unitaire appliqué respectivement aux extrémités nodales (i) et (j) de l'élément considéré.



Mise en évidence des facteurs de rigidité associés aux moments de flexions d'un élément poutre avec conditions aux limites en rotation : (a) semi-rigide en (i), parfaitement rigide en (j), (b) semi-rigide en (i), parfaitement articulé en (j)

Figure IV.3

Nous proposons dans ce qui suit, quelques résultats traduisant l'influence de la semi-rigidité de rotation sur différentes réponses (déformée, moment fléchissant et effort tranchant) d'une poutre soumise à l'action d'un chargement uniformément réparti. A cet effet, trois situations de condition aux limites sont traitées.

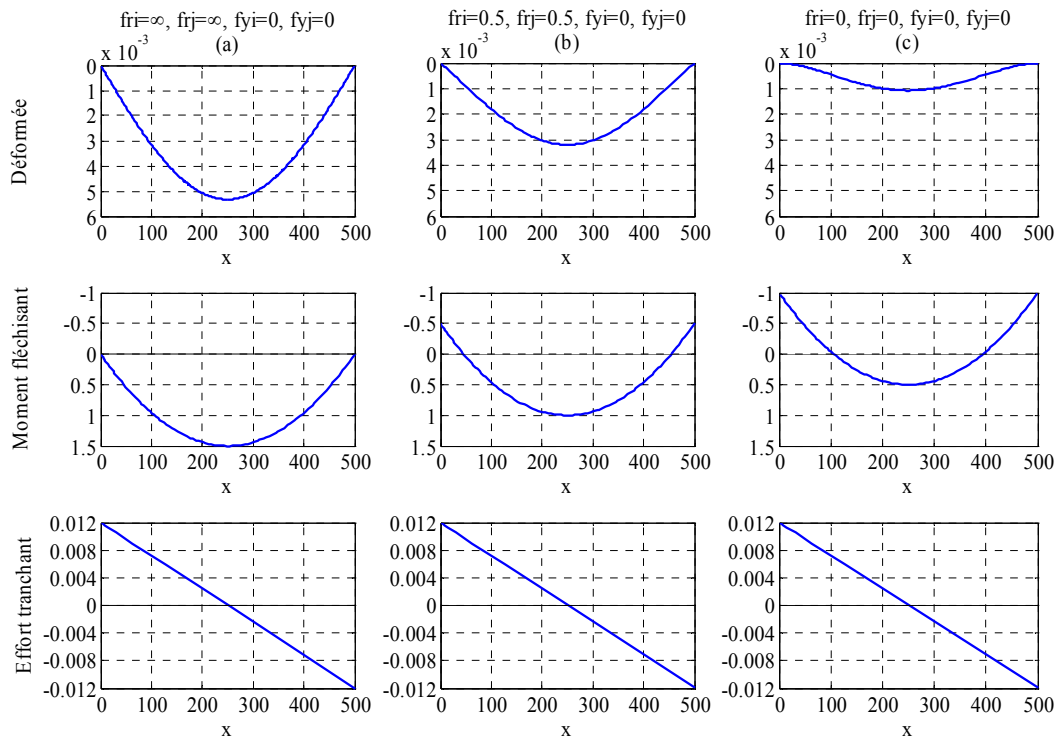
- (a) situation avec extrémités parfaitement articulées.
- (b) situation avec extrémités semi-rigides identiques.
- (c) situation avec extrémités parfaitement encastées.

Les données suivantes sont considérées pour les besoins de cette analyse.

- Poutre : HEA 100 (ht=9.6cm, b=10cm, $I_x=349\text{cm}^4$)
 $l=500\text{cm}$
 $E=21000 \text{ kN/cm}^2$
- Chargement: $q=4.8\text{e-}5 \text{ kN/cm}$
- Effets du second ordre et de cisaillement non considérés.

Ainsi la figure (IV.4), nous permet d'observer une relaxation significative de la poutre en terme de flexion dans la situation semi-rigide correspondant au cas (b). Cette relaxation se traduit par un recentrage du diagramme des moments fléchissants comparativement à ceux relatifs aux deux autres cas extrêmes, bi-articulées (a) et bi-encastées (c).

Il est tout aussi important de noter que la déformée relative à la situation semi-rigide (b), subit quantitativement une variation d'environ 200% par rapport aux deux situations (a) et (c), alors qu'en terme de moment fléchissant, cette variation est d'environ 100%.

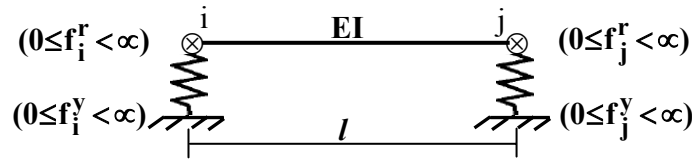


Analyse de la déformée, du moment de flexion et de l'effort tranchant d'une poutre avec : (a) extrémités (i) et (j) parfaitement articulées, (b) extrémités (i) et (j) semi-rigides en rotations, (c) extrémités (i) et (j) parfaitement rigides

Figure IV.4

IV.2.2 Effets de couplage des semi-rigidités de rotation et de translation

A présent, on associe à l'élément (ij) précédemment étudié, deux ressorts de translations additionnelles, caractérisés par leurs indexes de flexibilités f_i^y et f_j^y , comme indiqué sur la figure (IV.5) ci-après.



Elément poutre à extrémités semi-rigides vis-à-vis des déplacements transversaux et des rotations de flexion

Figure IV.5

En supposant comme à l'étape précédente $ml=0$ et $g_1=0$, nous pouvons établir à partir de la même relation (III.26.a,b,c), une formulation plus large des précédents facteurs de rigidité (R_i, R_j), que l'on peut exprimer par les relations (IV.3.a,b) ci-après.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i = \frac{4(1 + 3(f_j^r + f_i^y + f_j^y))}{1 + 4(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad (a) \\ R_j = \frac{4(1 + 3(f_i^r + f_i^y + f_j^y))}{1 + 4(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad (b) \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

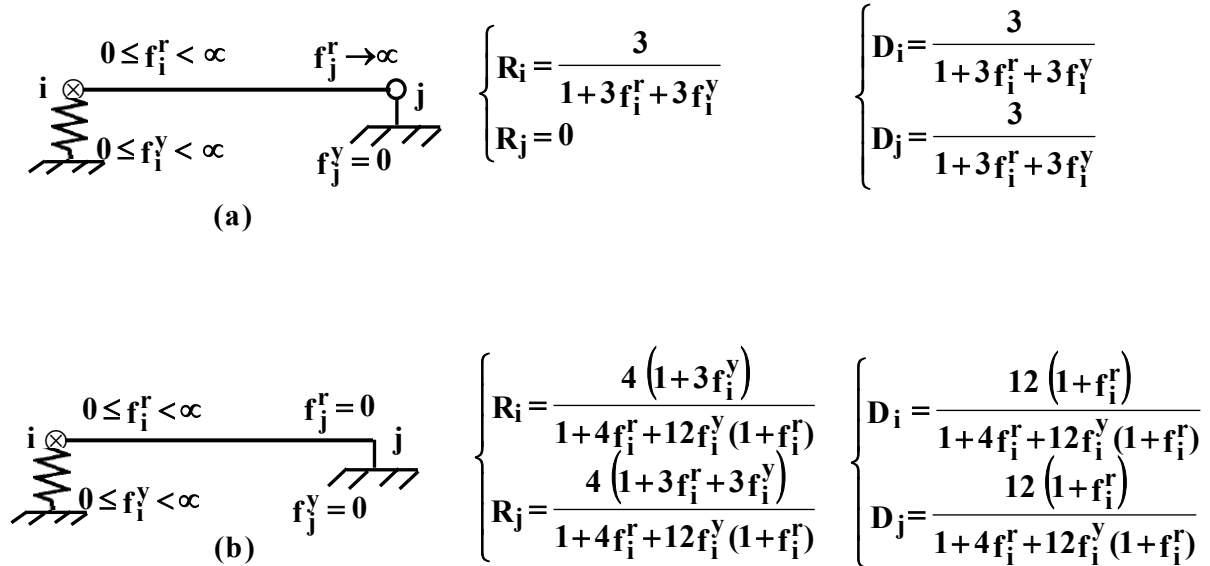
Il en sera de même en ce qui concerne les facteurs de rigidité relatifs aux ressorts de translation notés (D_i, D_j), exprimés par les relations (IV.4.a,b) ci-après.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i = \frac{12(1 + f_i^r + f_j^r)}{1 + 4(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad (a) \\ D_j = \frac{12(1 + f_i^r + f_j^r)}{1 + 4(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad (b) \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

Les facteurs de rigidité (D_i, D_j) correspondent respectivement aux valeurs des forces agissantes dans les ressorts de translations situés aux extrémités de l'élément (i,j) lorsque ces derniers subissent un allongement ou raccourcissement unitaire. Il est intéressant de noter que les relations (IV.2.a,b) se réduisent des relations (IV.3.a,b) lorsque ($f_i^y \rightarrow 0$ et $f_j^y \rightarrow 0$).

La figure (IV.6) ci-après, montre une simulation relative à deux nouvelles situations de condition aux limites. Ainsi en faisant simplement varier les indexes de

flexibilité f_i^r , f_j^r , f_i^y et f_j^y comme indiqué sur les figures (IV.6.a,b) nous pouvons déduire à partir des relations (IV.3.a,b) et (IV.4.a,b), les facteurs de rigidité (R_i , R_j , D_i , D_j) traduisant les efforts relatifs aux extrémités nodales (i) et (j) de l'élément considéré.



Mise en évidence des facteurs de rigidité associés aux moments de flexions et efforts tranchants d'un élément poutre avec les conditions aux limites suivantes : (a) rotation et déplacement semi-rigide en (i), rotation libre, déplacement nul en (j), (b) rotation et déplacement semi-rigide en (i), rotation et déplacement nuls (j)

Figure IV.6

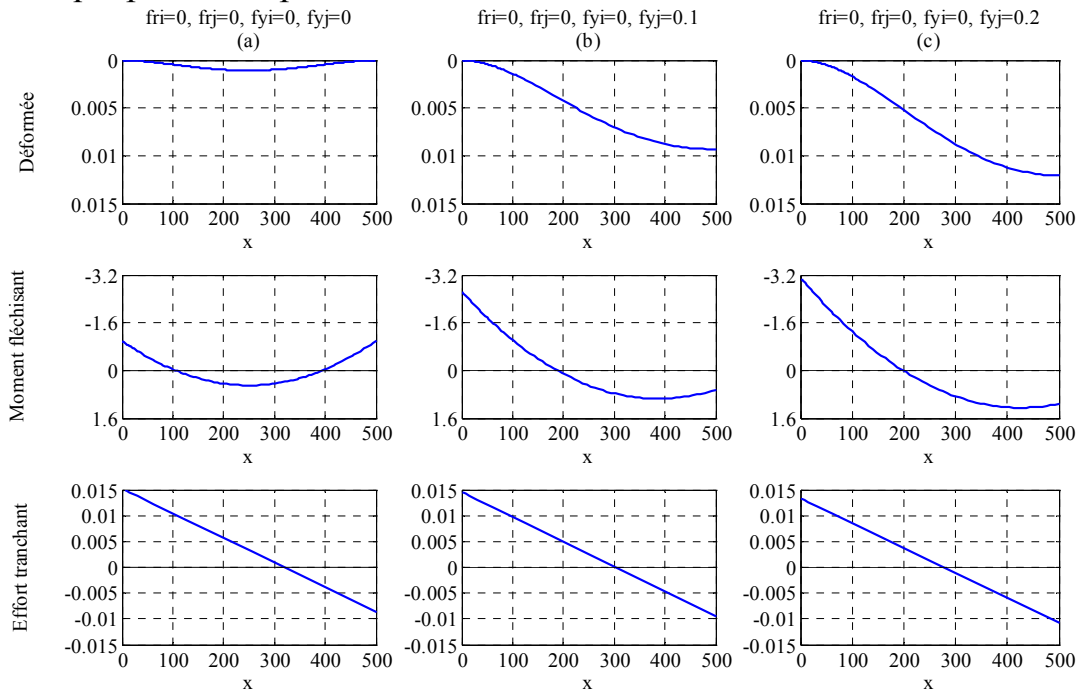
Nous proposons dans ce qui suit, quelques résultats traduisant l'influence de la semi-rigidité de translation sur différentes réponses (déformée, moment fléchissant et effort tranchant) d'une poutre soumise à l'action d'un chargement uniformément réparti. A cet effet, trois situations de condition aux limites sont traitées.

- (a) situation avec extrémités parfaitement encastées
- (b) situation (a) avec à l'extrémité (j) : $f_{yj}=0.1$
- (c) situation (a) avec à l'extrémité (j) : $f_{yj}=0.2$

Les données suivantes sont considérées pour les besoins de cette analyse.

- Poutre: HEA 100 (ht=9.6cm, b=10cm, $I_x=349\text{cm}^4$)
 $l=500\text{cm}$
 $E=21000 \text{ kN/cm}^2$
- Chargement : $q=4.8\text{e-}5 \text{ kN/cm}$
- Effets du second ordre et de cisaillement non considérés.

La figure (IV.7) ci-dessous, révèle différentes réponses de l'élément, mettant en évidence d'importantes variations dans les réponses de la structure autant par la forme que par les amplitudes.



Analyse de la déformée, du moment de flexion et de l'effort tranchant d'une poutre avec : (a) rotations et déplacements nuls en (i) et (j), (b, c) rotation et déplacement nuls en (i), rotation nulle (j) et déplacement semi-rigide en (j)

Figure IV.7

Les résultats obtenus à partir des exemples précédents, ont le mérite de mettre en évidence l'influence des semi-rigidités nodales sur les réponses globales d'un élément poutre. A ce stade, il est important de rappeler que les différentes souplesses de connexions sont respectivement mesurées par le biais des différents indexes de flexibilité traduisant des rapports entre les flexibilités de ressorts et celles équivalentes à l'élément auquel ces ressorts sont associés.

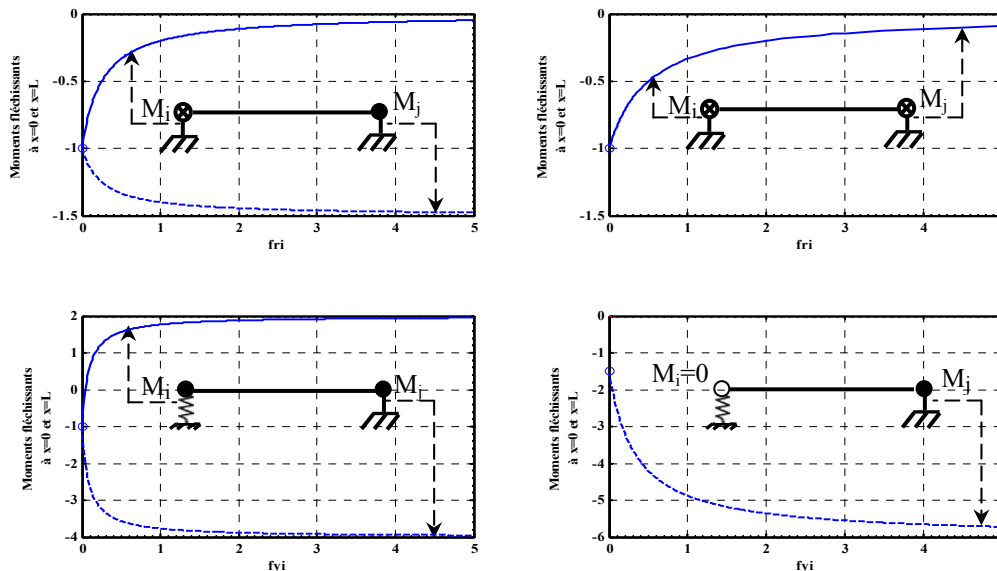
Considérons à présent, l'élément précédent et son chargement uniformément réparti, dans les quatre situations de condition aux limites que montre la figure (V.8) ci-après. Ainsi nous observons ce qui suit :

Situations (a) : cette situation qui correspond à la présence d'une connexion semi-rigide de rotation à l'extrémité (i), montre que le moment fléchissant M_i tend à s'annuler lorsque f_i^r se rapproche de la valeur 5, alors que le moment fléchissant M_j tend à plafonner avec une augmentation de 50% comparativement à la valeur correspondant à $f_i^r = 0$.

Situations (b) : cette situation correspond à la présence aux extrémités (i) et (j) de l'élément, de deux connexions semi-rigides de rotation à comportement identique. Nous pouvons observer dans ce cas que les moments d'extrémité M_i et M_j tendent simultanément vers zéro (quasiment articulé) lorsque f_i^r avoisine la valeur 5.

Situations (c) : dans cette situation on adopte seulement une connexion semi-rigide de translation à l'extrémité (i). Nous relèverons dans ce cas qu'en terme de variation, le moment M_i subit un changement de signe avant de plafonner au voisinage de $f_i^y = 5$, au même titre que le moment M_j , à environ trois fois la valeur correspondant à $f_i^y = 0$.

Situations (d) : cette situation découle du cas (c) précédent auquel on associe la présence d'une articulation parfaite à l'extrémité (i). Nous observons encore une fois cette tendance asymptotique du moment M_j , au voisinage de $f_i^y = 5$.

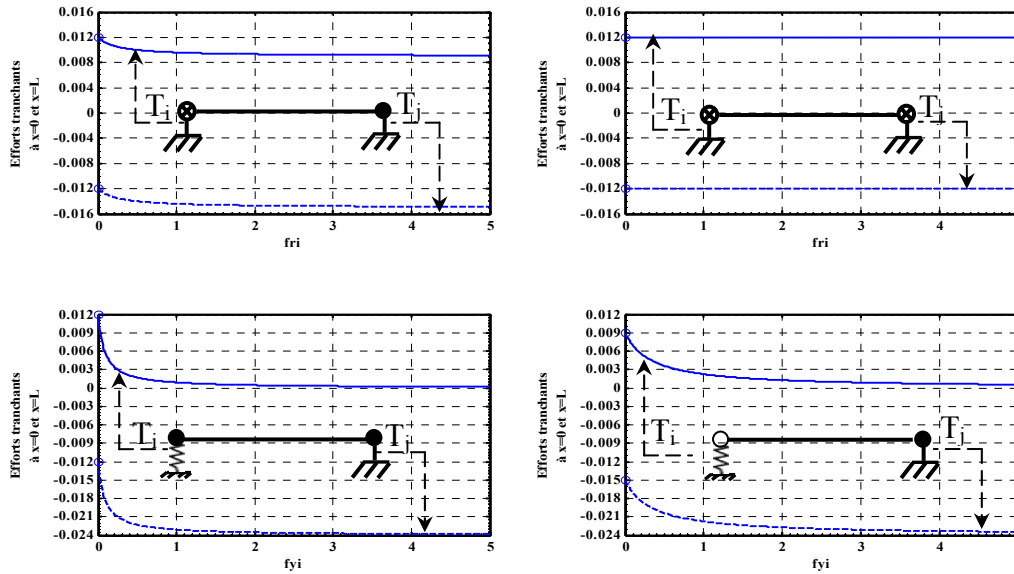


Variation des moments fléchissants d'extrémité d'une poutre en présence :
(a) d'un ressort de rotation à rigidité variable en (i), (b) de deux ressorts identiques de rotation à rigidités variables en (i) et (j), (c) d'un ressort de translation à rigidité variable en (i), (d) d'un ressort de translation à rigidité variable et d'une articulation parfaite en (i)

Figure IV.8

Grâce à cette dernière analyse, nous pouvons établir que les indexes de flexibilités f_i^r , f_j^r , f_i^y , f_j^y , suffisent à être considérés dans le domaine allant de la valeur zéro à la valeur cinq, pour permettre ainsi de décrire n'importe quelle situation de condition aux limites d'une poutre, allant du cas parfaitement rigide (index nul) au cas quasiment articulé (index ≈ 5).

La constatation précédente reste d'autre part vérifiée en ce qui concerne la variation des efforts tranchants. La figure (IV.9) révèle tout de même, qu'une grande partie de variation d'amplitude est obtenue lorsque l'indice de flexibilité qui caractérise la souplesse de la connexion se situe entre les valeurs zéro et deux.



Variation des efforts tranchants d'extrémité d'une poutre en présence :
 (a) d'un ressort de rotation à rigidité variable en (i), (b) de deux ressorts identiques de rotation à rigidités variables en (i) et (j), (c) d'un ressort de translation à rigidité variable en (i), (d) d'un ressort de translation à rigidité variable et d'une articulation parfaite en (i)

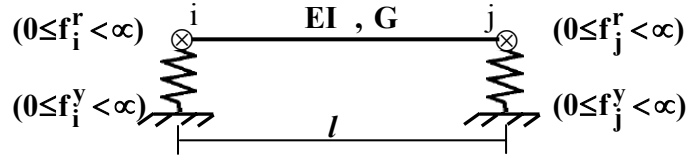
Figure IV.9

Ces différents exemples nous montrent que la souplesse d'un assemblage peut être interprétée vis-à-vis d'une connexion nodale comme semi-rigide dès lors que l'indice de flexibilité qui la caractérise se situe entre les valeurs zéro et cinq (la valeur zéro correspond à la situation d'un nœud parfaitement encastré, les valeurs égales ou supérieures à cinq, correspondent à la situation d'un nœud quasiment articulés).

IV.2.3 Mise en évidence de l'effet de cisaillement

On se propose de mettre en évidence dans ce qui suit l'influence des effets de cisaillements sur les facteurs de rigidité. En effet, dans certaines situations cet aspect peut devenir un facteur aggravant en terme de perte de rigidité de la structure, ce qui exige vis-à-vis de ce phénomène une formulation rigoureuse.

A cet effet, nous pouvons déduire à partir des résultats obtenus aux chapitres précédents, les relations de rigidité prenant en compte cet aspect et dont le modèle élémentaire est présenté par la figure (IV.10) ci-après.



Élément poutre à extrémités semi-rigides vis-à-vis des déplacements transversaux et des rotations de flexion et tenant compte de l'influence du module de cisaillement G sur les rotations de flexion

Figure IV.10

Ainsi nous pouvons établir les relations (IV.5) et (IV.6) suivantes dans lesquelles on retrouve le paramètre adimensionnel g_1 qui traduit le couplage entre les effets de cisaillement et du 2nd ordre. g_1 est exprimé par la relation (III.8) du précédent chapitre. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_i = \frac{4 \left(1 + 3(f_j^r + f_i^y + f_j^y + g_1^2) \right)}{1 + 12g_1^2 + 4(1 + 3g_1^2)(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad \text{(a)} \\ \mathbf{R}_j = \frac{4 \left(1 + 3(f_i^r + f_i^y + f_j^y + g_1^2) \right)}{1 + 12g_1^2 + 4(1 + 3g_1^2)(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad \text{(b)} \end{array} \right. \quad \text{(IV.5)}$$

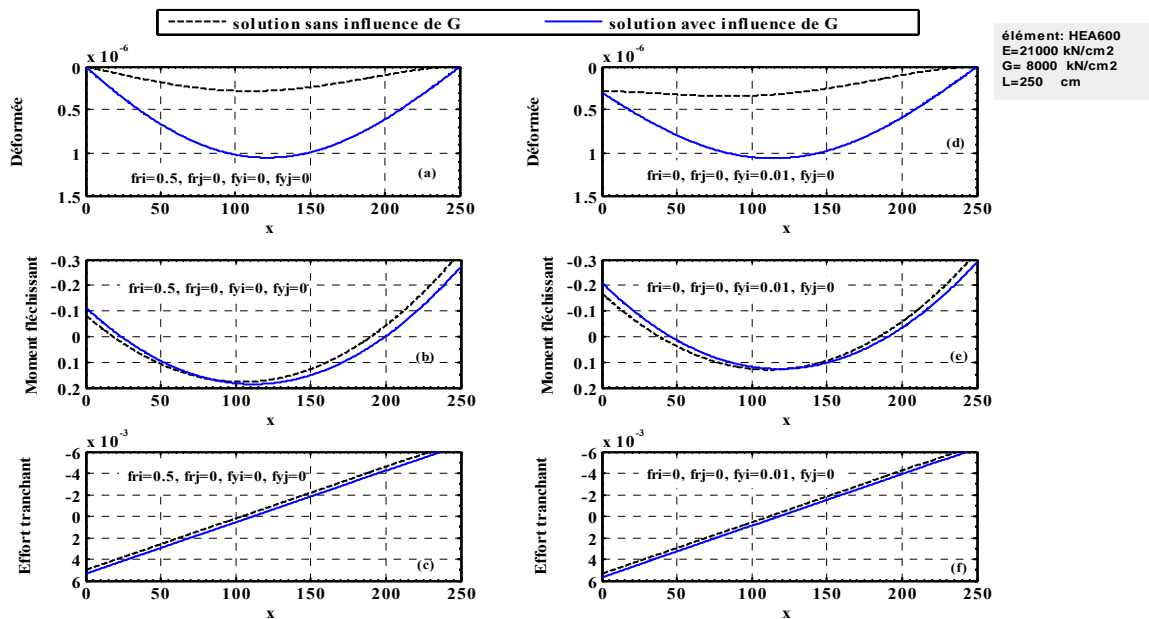
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_i = \frac{12 (1 + f_i^r + f_j^r)}{1 + 12g_1^2 + 4(1 + 3g_1^2)(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad \text{(a)} \\ \mathbf{D}_j = \frac{12 (1 + f_i^r + f_j^r)}{1 + 12g_1^2 + 4(1 + 3g_1^2)(f_i^r + f_j^r) + 12f_i^r f_j^r + 12(f_i^y + f_j^y)(1 + f_i^r + f_j^r)} \quad \text{(b)} \end{array} \right. \quad \text{(IV.6)}$$

Ainsi grâce aux différents facteurs de rigidité exprimés par les relations ci-dessus, nous disposons de l'information complète relative à la réponse d'un élément poutre tenant compte des effets de cisaillement et de la présence de connexions semi-rigides de rotation et de déplacement à ses deux extrémités nodales.

Pour mettre en évidence l'effet de cisaillement, on a choisi d'étudier la poutre suivante :

- Poutre: HEA 600 (ht=9.6cm, b=10cm, $I_x=349\text{cm}^4$)
 $l=250\text{cm}$
 $E=21000\text{ kN/cm}^2$,
 $G=8000\text{ kN/cm}^2$
- Chargement : $q=4.8\text{e-}5\text{ kN/cm}$
- Effets du second ordre non considérés

La figure (IV.11) montre les réponses relatives à la déformée, au moment fléchissant et à l'effort tranchant, associées à deux situations de condition aux limites. La première situation est obtenue avec $f_i^r = 0.5, f_j^r = 0, f_i^y = 0, f_j^y = 0$, dont les résultats correspondent aux graphes (a,b,c) de la figure (IV.11), la deuxième situation dont les résultats sont obtenus avec $f_i^r = 0, f_j^r = 0, f_i^y = 0.01, f_j^y = 0$, est décrite par les graphes (d,e,f) de la figure (IV.11). Nous constatons que l'effet de G se traduit par une augmentation d'amplitude pour l'ensemble des réponses obtenues.



Mise en évidence de l'influence du module de cisaillement G sur les variations de la déformée, du moment de flexion et de l'effort tranchant d'une poutre en présence : (a,b,c) d'un ressort de rotation à rigidité relative ($f_{ri}=0.5$) à l'extrémité (i), (d,e,f) d'un ressort de translation à rigidité relative ($f_{yi}=0.01$) à l'extrémité (i)

Figure IV.11

IV.3 Analyse des effets du second ordre

L'étape suivante est destinée à mettre en évidence les effets du second ordre associés au phénomène d'instabilité par flambement. Dans cette perspective, nous introduirons la notion de facteur de longueur effective de flambement que l'on désigne par $K = \frac{l_f}{l}$ et qui représente le rapport entre la longueur de flambement l_f et la longueur réelle l de l'élément considéré.

D'un point de vue physique, la longueur effective de flambement d'un élément associé à des conditions aux limites arbitraires, correspond à la longueur que l'on pourrait associer à un élément fictif bi articulé, par ailleurs similaire et qui posséderait la même charge critique de flambement que l'élément considéré.

Le facteur K qui représente un paramètre important vis-à-vis de l'analyse au flambement permet de traduire la charge critique de flambement par le biais d'une formule unique couvrant toutes les situations de condition aux limites. Cette charge critique de flambement est exprimée par la relation suivante :

$$N = \pi^2 \frac{EI}{(Kl)^2} \quad (\text{IV.7})$$

Tenant compte des relations (II.17) et (II.19), nous pouvons déduire par analogie avec (IV.7) la relation suivante :

$$K = \pi \lambda_N \quad (\text{IV.8})$$

En substituant dans la relation précédente l'expression de λ_N déduite à partir de (II.22), nous aboutissons à la relation de K suivante :

$$K = \frac{\pi}{ml} \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_G^2}{\lambda_N^2}\right)} \quad (\text{IV.9})$$

La quantité $\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_G^2}{\lambda_N^2}\right)}$ traduit l'influence du module de cisaillement G sur le facteur de longueur effective de flambement K . Nous relèverons que cette quantité prend la valeur unitaire dès lors que l'effet de G est négligé ($\lambda_G = 0$). Les paramètres λ_N et λ_G sont définis au chapitre (II) précédent.

Nous rappelons à cet effet que la considération des effets du second ordre s'est soldé par la formulation de la solution de la déformée $y_1(x)$ donnée par la relation (II,26) du chapitre (II) précédent.

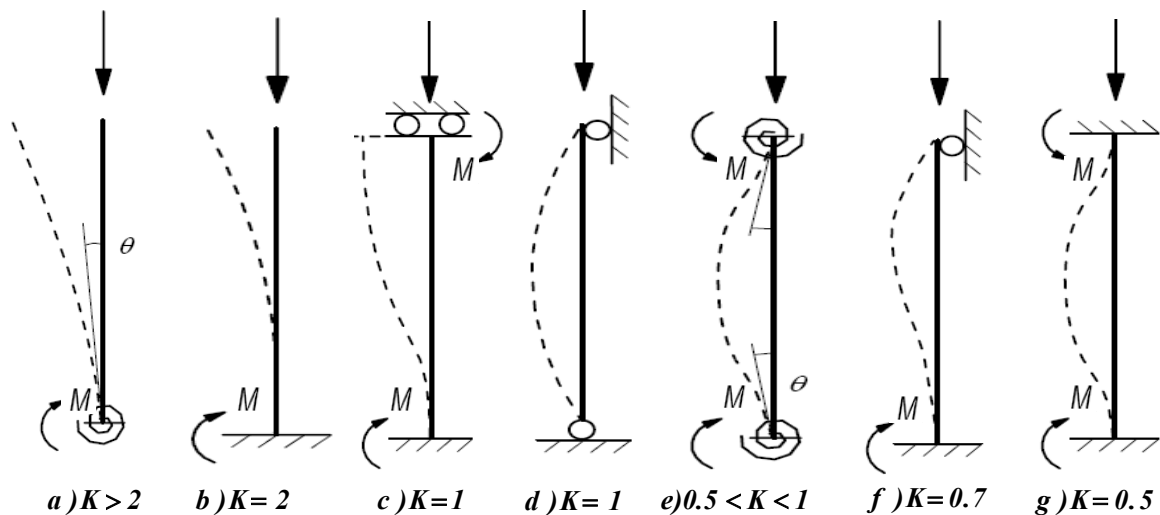
Cette déformée est par ailleurs formulée en fonction des constantes d'intégration C_1, C_2, C_3, C_4 , exprimées pour leur part au chapitre (III) respectivement par les relations (III.13.f),(III.14.f),(III.15.f) et (III.16.f).

On peut aisément constater qu'ainsi formulée, la solution $y_1(x)$ est tributaire de la variation de la quantité d_L située au dénominateur des précédentes constantes C_1, C_2, C_3, C_4 . Aussi faut-il le souligner, nous observons que d_L au même titre que K , dépend exclusivement de la variation du paramètre ml .

Notons aussi, que la déformée $y_1(x)$ peut être amenée à croître indéfiniment lorsque la quantité d_L approche la valeur zéro, ce qui dénote d'une situation d'instabilité par flambement, qui correspond à un niveau de chargement axial de compression que l'on désigne par niveau de chargement critique.

A présent, on se propose de substituer dans la relation d_L , le paramètre ml par son expression déduite à partir (IV.9) en négligeant l'effet de G ($\lambda_G = 0$), cela permet de reformuler d_L en fonction du facteur de longueur effective (K). Par la suite, nous chercherons à évaluer numériquement les valeurs de K qui rendent $d_L=0$, en adoptant différentes situations de condition aux limites par le biais des indexes de flexibilités ($f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y$).

Par ailleurs, nous connaissons les valeurs de ce facteur K relatives à certaines situations classiques de condition aux limites. La figure (IV.12) ci-dessous donne un aperçu en ce qui concerne ces valeurs de K ainsi que les modes de flambement qui leurs sont respectifs.



Différents exemples de modes de flambement et facteurs K respectifs

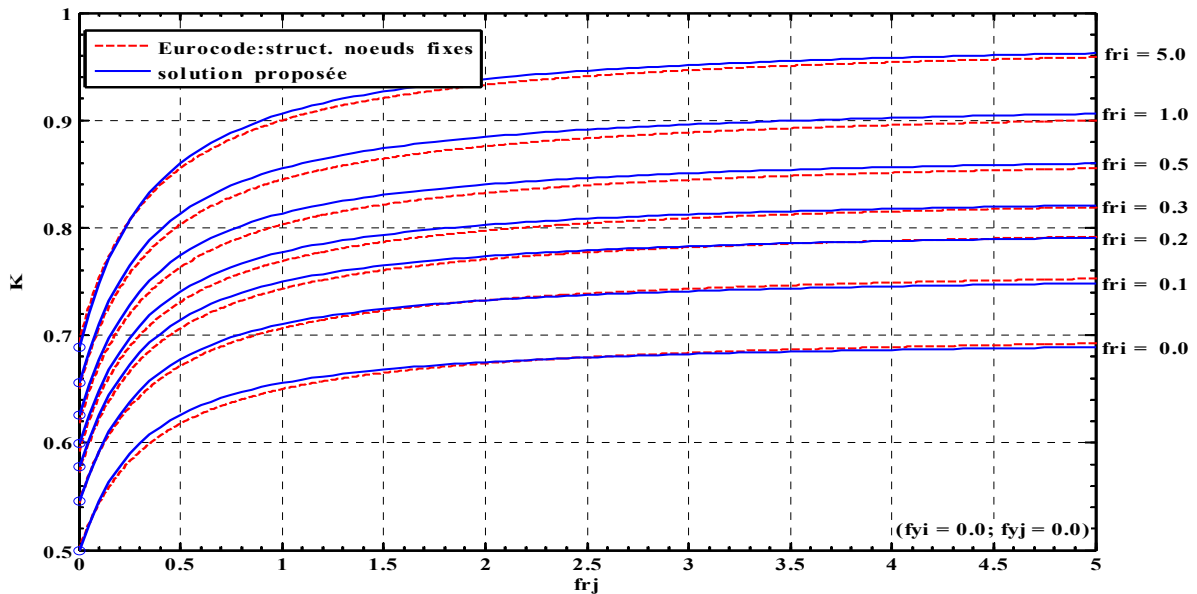
Figure IV.12

Nous procédons dans cette perspective à une étude comparative entre les valeurs de K qui annulent la relation d_L , et celles obtenues à partir des relations proposées dans l'Eurocode2 [40], relatif au calcul des structures en béton. Ce dernier propose concernant les éléments à nœuds non déplaçables, l'expression de K donnée par la relation (IV.10) ci-après.

$$K = 0.5 \sqrt{\left(1 + \frac{f_i^r}{0.45 + f_i^r}\right) \left(1 + \frac{f_j^r}{0.45 + f_j^r}\right)} \quad (IV.10)$$

Bien évidemment, dans le cas des éléments à nœuds non déplaçables, il y a lieu de considérer $(f_i^y = 0, f_j^y = 0)$ dans l'expression de d_L . Ainsi nous pouvons observer grâce à la figure (IV.13) une similitude quasi parfaite entre les résultats de la présente étude et celle proposée par l'Eurocode2. Nous retrouvons par ailleurs avec les deux approches les résultats classiques de $K=0.5$ lorsque $(f_i^r = 0, f_j^r = 0)$ et K se rapprochant de l'unité lorsque $(f_i^r = 5, f_j^r = 5)$

Ces résultats constituent une preuve s'il en faut, quant à la qualité de la solution obtenue par cette approche.



Courbes de variation du facteur de longueur effective de flambement: K
(élément poutre-colonne à nœuds (i et j) semi rigides en rotation, fixes en translation)

Figure IV.13

Concernant les éléments à nœuds déplaçables, nous relèverons la difficulté à mettre en expression le facteur K qui devient dans ce cas de figure, tributaire des nombreux paramètres liés aux conditions aux limites que sont $(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$.

Dans ce contexte, la même référence [40] propose une expression de K constituée de deux bornes (a) et (b) comme indiqué par la relation (IV.11) ci-après. On notera dans cette formulation, l'absence de paramètres traduisant les déplacements nodaux.

$$K = \max \left\{ \text{(a): } \sqrt{\left(1 + 10 \frac{f_i^r f_j^r}{f_i^r + f_j^r}\right)}; \text{(b): } \left(1 + \frac{f_i^r}{1 + f_i^r}\right) \left(1 + \frac{f_j^r}{1 + f_j^r}\right) \right\} \quad \text{(IV.11)}$$

Nous proposons dans cette étape de procéder comme précédemment, à la comparaison des valeurs de K dans les deux situations de condition aux limites suivantes :

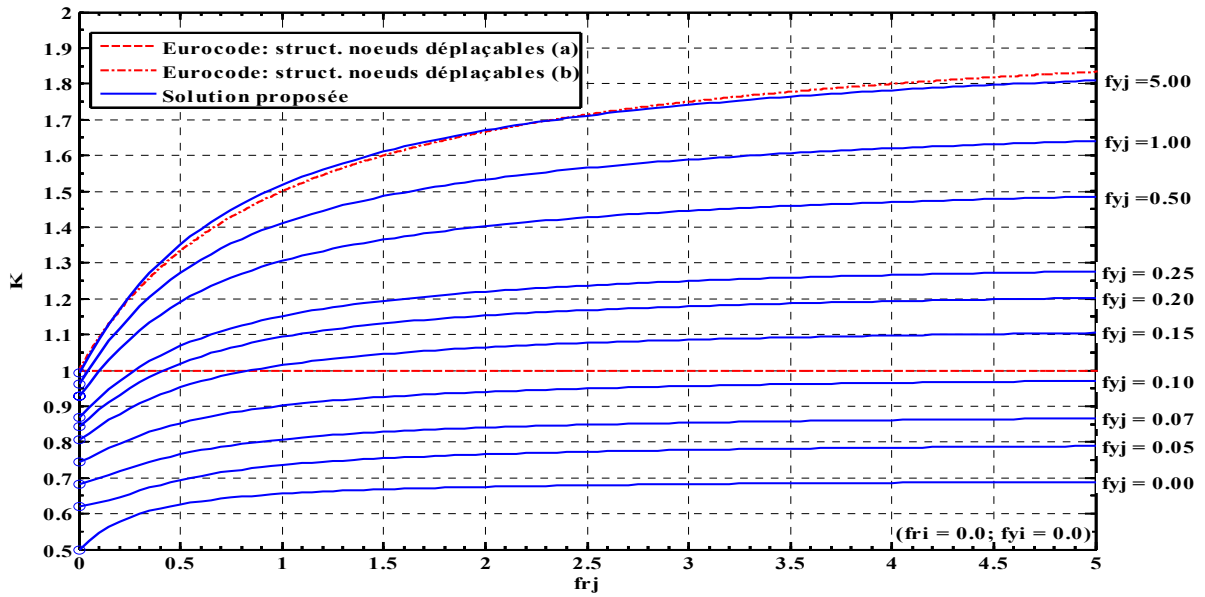
I_ / on adopte à l'extrémité (i) un encastrement parfait ($f_i^r = 0, f_i^y = 0$), tout en faisant varier simultanément la rotation de flexion et le déplacement transversal de l'extrémité (j), d'une situation parfaitement encastree ($f_j^r = 0, f_j^y = 0$) à une situation quasi libre ($f_j^r = 5, f_j^y = 5$).

II_ / on adopte à l'extrémité (i) une articulation quasi parfaite ($f_i^r = 5, f_i^y = 0$), tout en faisant varier simultanément la rotation de flexion et le déplacement transversal de l'extrémité (j), d'une situation parfaitement encastree ($f_j^r = 0, f_j^y = 0$) à une situation quasi libre.

Ainsi, on peut aisément constater sur les figures (IV.14) et (IV.15) correspondant respectivement aux situations (I) et (II), des écarts importants entre les résultats de la formulation proposée par l'Eurocode2, et ceux découlant de la présente étude.

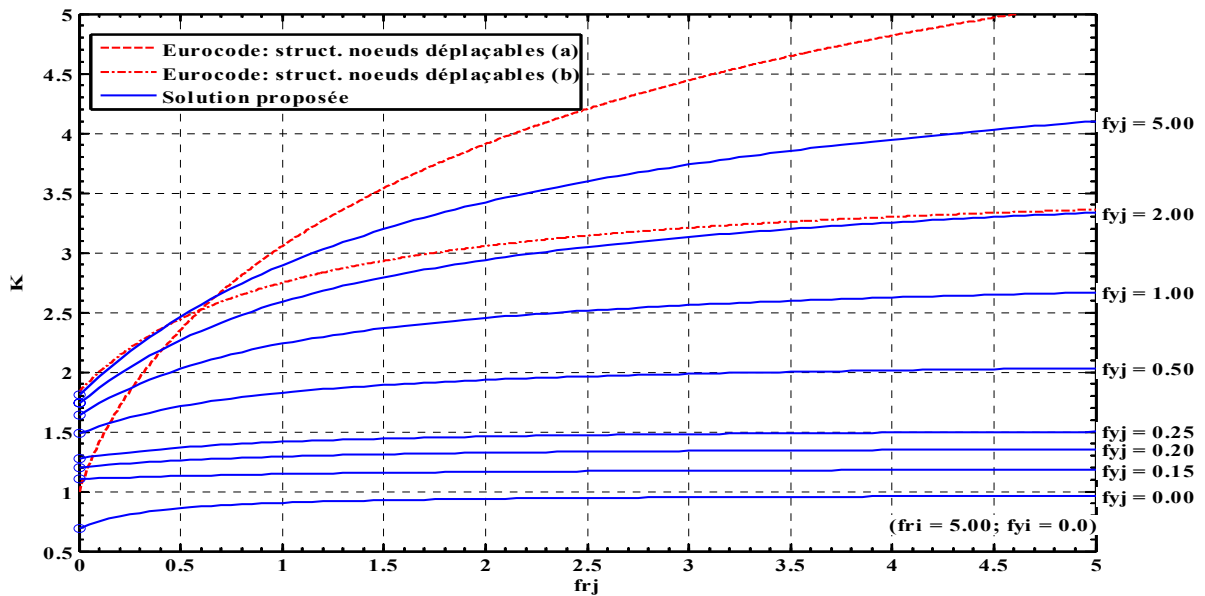
A titre indicatif, nous relevons à partir de la figure (IV.14) une valeur ($K \approx 1.8$) selon l'Eurocode2 lorsque ($f_j^r = 5$) Alors que les résultats de la présente étude mettent en évidence une multitude de possibilités concernant la valeur de K allant de ($K \approx 0.7$) lorsque ($f_j^y = 0$), jusqu'à ($K \approx 1.8$) lorsque ($f_j^y = 5.0$).

Ces écarts sont par ailleurs plus importants sur la figure (IV.15) qui correspond à la situation (II), où nous observons que le facteur K est supérieur à 5 lorsque ($f_j^r = 5$) en ce qui concerne l'Eurocode2, alors que la présente étude propose selon le degré de flexibilité (f_j^y) des valeurs de K comprises approximativement entre 1 et 4.



Courbes de variation du facteur de longueur effective de flambement: K
(élément poutre-colonne à nœuds : (i) encastré et (j) complètement semi-rigide)

Figure IV.14



Courbes de variation du facteur de longueur effective de flambement: K
(élément poutre-colonne à nœuds : (i) quasi articulé et (j) complètement semi-rigide)

Figure IV.15

Partant des précédentes constatations, nous avons jugé intéressant d'établir des abaques concernant le facteur K de longueur effective relatif à un élément poutre-colonne. Ces abaques permettront ainsi de déduire directement la valeur du facteur K d'un élément pris isolément d'une structure, partant des indexes de flexibilité qui traduisent son environnement originel. Dans une structure plane, ces indexes de flexibilités peuvent être évalués pour chacune des extrémités de l'élément considéré par le biais des relations suivantes :

L'index de flexibilité, relatif à la rotation de flexion d'une extrémité s'écrit :

$$f_r = \frac{\theta}{M} \cdot \frac{EI}{l} \quad (\text{IV.12})$$

L'index de flexibilité, relatif au déplacement transversal d'une extrémité s'écrit :

$$f_r = \frac{\Delta}{T} \cdot \frac{EI}{l^3} \quad (\text{IV.13})$$

f_r : Indexe de flexibilité de rotation des extrémités nodales (i), (j).

f_y : Indexe de flexibilité de translation des extrémités nodales (i) (j).

θ : Rotation de flexion des extrémités nodales (i), (j).

Δ : Rotation de flexion des extrémités nodales (i), (j).

M : Moment de flexion des extrémités nodales (i), (j).

T : Moment de flexion des extrémités nodales (i), (j).

EI : Rigidité de l'élément (ij)

l : Longueur de l'élément (ij)

Notons par ailleurs que l'Eurocode3 [41] relatif au calcul des structures en aciers, propose dans son annexe (E) des abaques de K , basés sur la notion de facteurs de distribution, destinés à traduire les degrés de flexibilité associés aux rotations nodales d'un élément. Ces abaques sont établis aussi bien pour des éléments à nœuds déplaçables que ceux à nœuds non déplaçables, dont la lecture se fait par le biais de facteurs de distribution de rigidité ne faisant intervenir que les rigidités effectives de rotation des poutres et poteaux adjacents aux extrémités de l'élément considéré.

Aussi s'impose la question de savoir s'il est possible de substituer la flexibilité associée aux déplacements nodaux pour n'en tenir compte que par le biais des seuls facteurs de distribution associés aux rotations nodales ?

Nous proposons à titre indicatif deux abaques de K relatifs à un élément poutre-colonne à nœuds non déplaçables. Le premier abaque limité au domaine ($0.5 \leq K \leq 0.6$) donné par la figure (IV.16), traite des situations de condition aux limites

traduites par les indexes de flexibilités appartenant aux domaines suivants ;
 $(0 \leq f_i^r \leq 0.3 ; f_i^y = 0 ; 0 \leq f_j^r \leq 0.3 ; f_j^y = 0)$

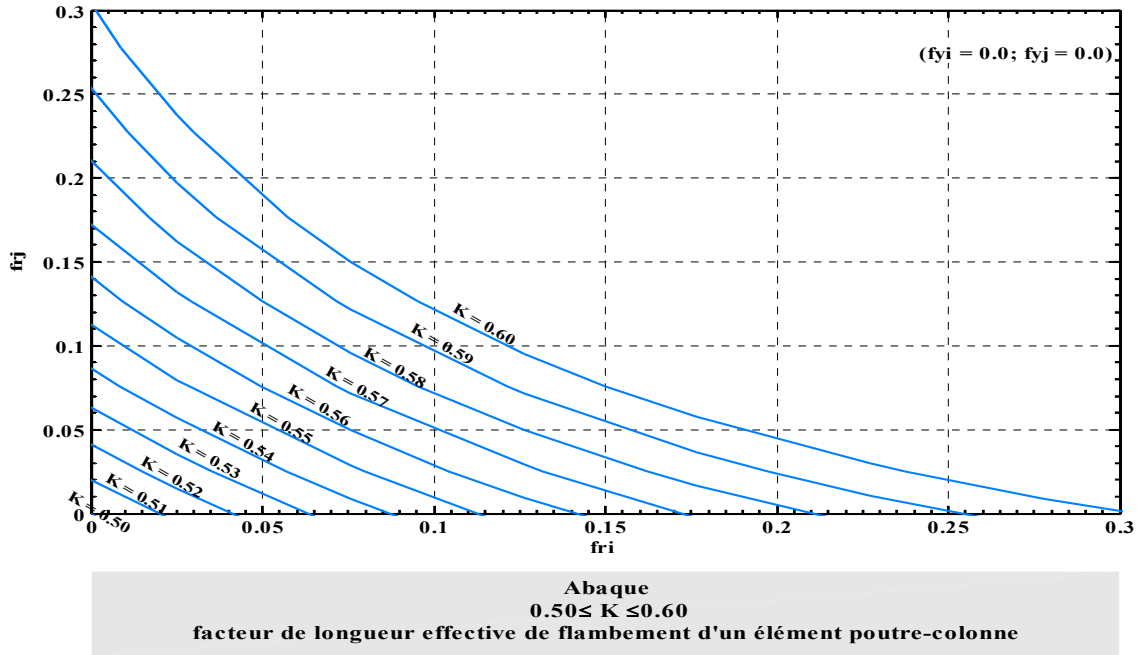


Figure IV.16

Le deuxième abaque limité au domaine $(0.95 \leq K \leq 0.96)$, donné par la figure (IV.17), traite pour sa part des situations de condition aux limites traduites par des indexes de flexibilités appartenant aux domaines suivants :
 $(2 \leq f_i^r \leq 6.28 ; f_i^y = 0 ; 2 \leq f_j^r \leq 6.28 ; f_j^y = 0)$

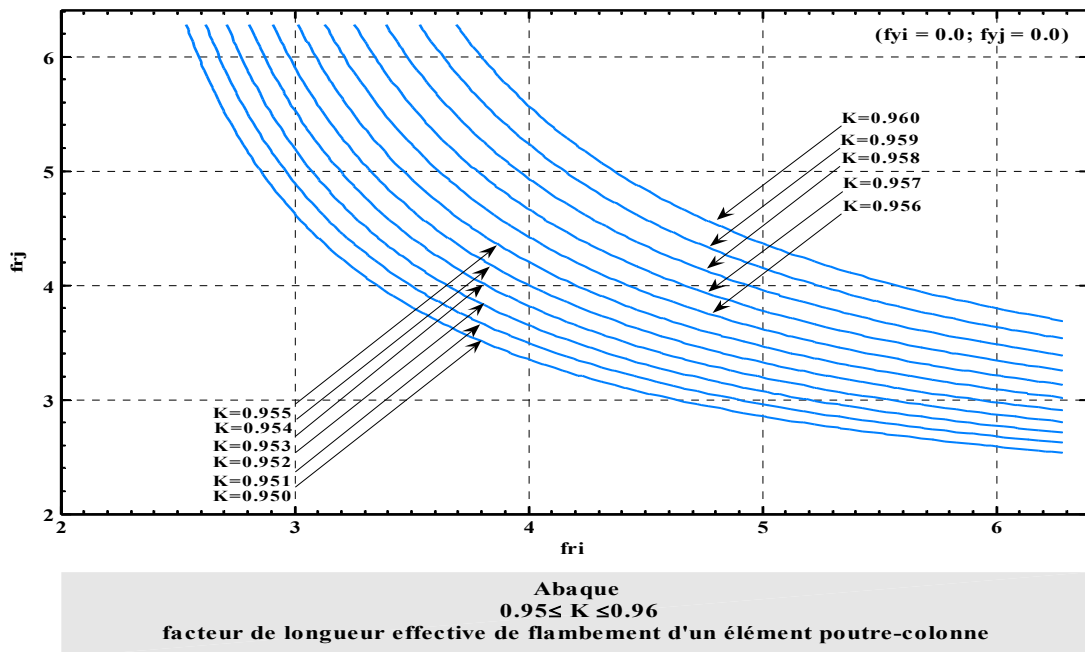


Figure IV.17

Nous proposons d'autre part, deux autres abaques correspondant à des éléments à nœuds déplaçables. Le premier représenté par la figure (IV.18) montre le cas d'un élément parfaitement encasté à l'extrémité (i) ($f_i^r = 0; f_i^y = 0$) ; le deuxième représenté par la figure (IV.19) montre le cas d'un élément quasiment articulé en (i) ($f_i^r = 5; f_i^y = 0$). Nous pouvons observer à partir de ces deux situations l'étendu du domaine de K, lorsque nous faisons varier la capacité de déplacement latéral du nœud (j) par le biais de l'index de flexibilité f_j^y .

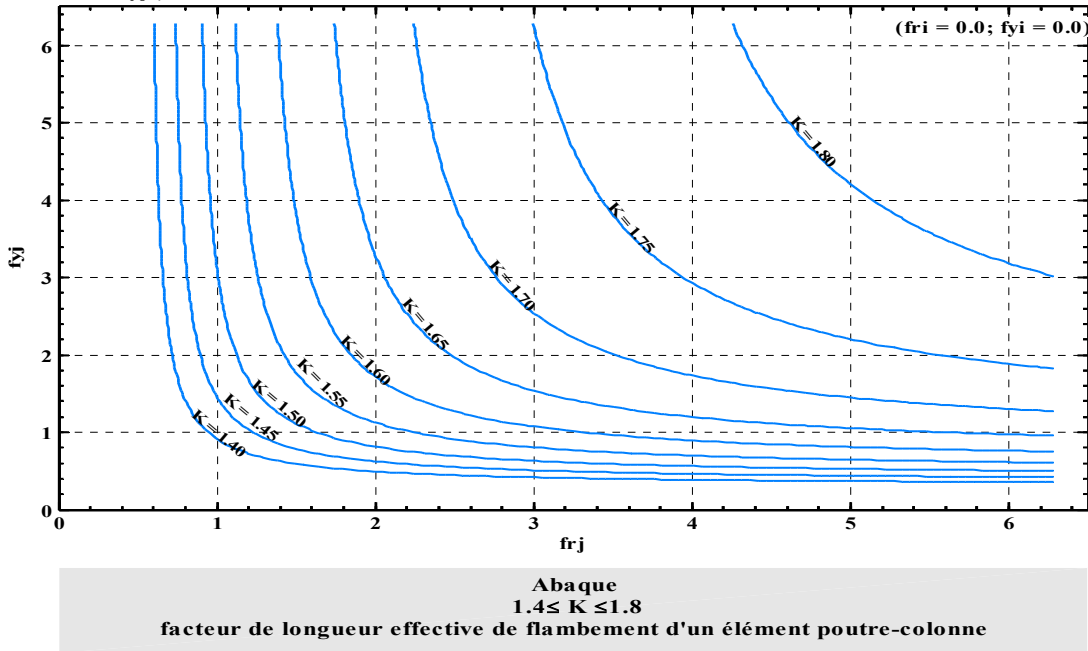


Figure IV.18

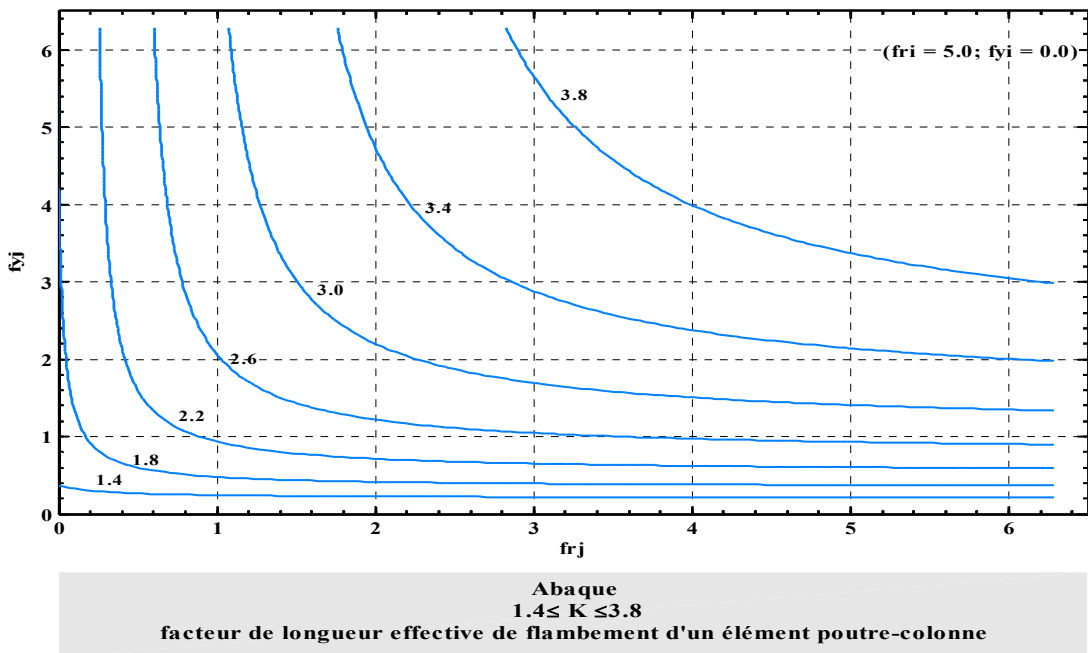
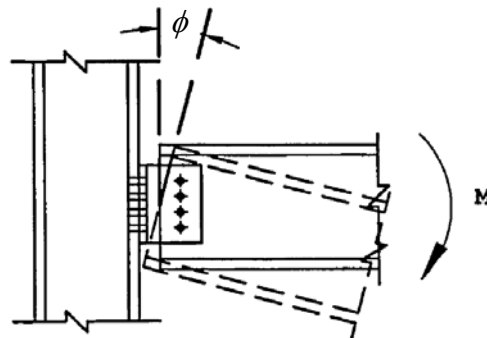


Figure IV.19

V.1 Introduction

L'analyse non linéaire des ossatures est destinée principalement, à tenir compte d'un ensemble de facteurs liés à des comportements complexes, dont l'influence vis-à-vis de la réponse de la structure peut s'avérer critique. Ces facteurs peuvent être associés à différents aspects de comportements de la structure, tels que :

- Aspect structurel, relatif à la qualité des nœuds de connexions reliant les différents éléments de la structure voir figure (V.1).
- Aspect géométrique relatif aux effets du second ordre, associés au comportement des éléments qui constituent la structure.
- Aspect mécanique relatif au comportement anélastique du matériau.



Modèle d'assemblage poutre-poteau

Figure V.1

L'approche classique, qui consiste à mener ces types d'analyses, est organisée selon deux phases distinctes de calculs, qui se résument à :

- Faire en premier lieu une analyse linéaire globale de la structure, afin de déterminer la distribution des efforts internes correspondant à la structure dans son état déformée.
- Faire ensuite à un niveau local, l'analyse des éléments constituant la structure, par le biais d'une ou plusieurs relations d'interactions traduisant l'aspect non linéaire à étudier.

Il est évident que la séparation de ces deux phases d'opérations représente un inconvénient majeur lié à la lourdeur de la procédure elle-même, mais aussi pour des considérations de rigueur, vu que cette approche affecte la qualité de la solution en

raison du découplage que l'on opère entre les opérations de calculs liées au comportement global de la structure et celles associées aux différents comportements élémentaires tels que les assemblages, les effets du second ordre, le comportement du matériau...

De nos jours, le développement sans cesse croissant des moyens de calculs, encourage de plus en plus, l'option de mener ces deux phases de calculs en une seule opération d'analyse communément désignée par 'analyse globale'.

V.2 Modélisation des connexions semi-rigides

Les connexions semi-rigides résultent de la présence de certains types d'assemblages que l'on rencontre dans les ossatures de génie civil, particulièrement celles relatives à la construction métallique. Le rôle principal de ces connexions consiste à transmettre les charges de planchers vers les éléments poteaux, par le biais des éléments poutres. Les forces transmises par ces connexions, peuvent être en général, axiale, d'effort tranchant, de moment fléchissant ou encore de torsion.

La présente étude a été réalisée en considération des déformations de rotation et de cisaillement (glissement) pouvant avoir lieu au niveau des assemblages qui constituent les zones de connexions nodales. Ces déformations qui affectent substantiellement la distribution des efforts internes de la structure, doivent par conséquent être considérées vis-à-vis du dimensionnement des éléments qui composent cette dernière.

Pour rappel, la formulation matricielle à laquelle on a abouti au chapitre (III) précédent, a permis d'établir la matrice de rigidité d'un élément poutre-colonne à extrémités nodales semi-rigides. Le modèle d'élément mixte ainsi formulé (poutre-colonne + connexion semi-rigides) développé dans le cadre de cette étude, se distingue par sa qualité à traduire à la fois :

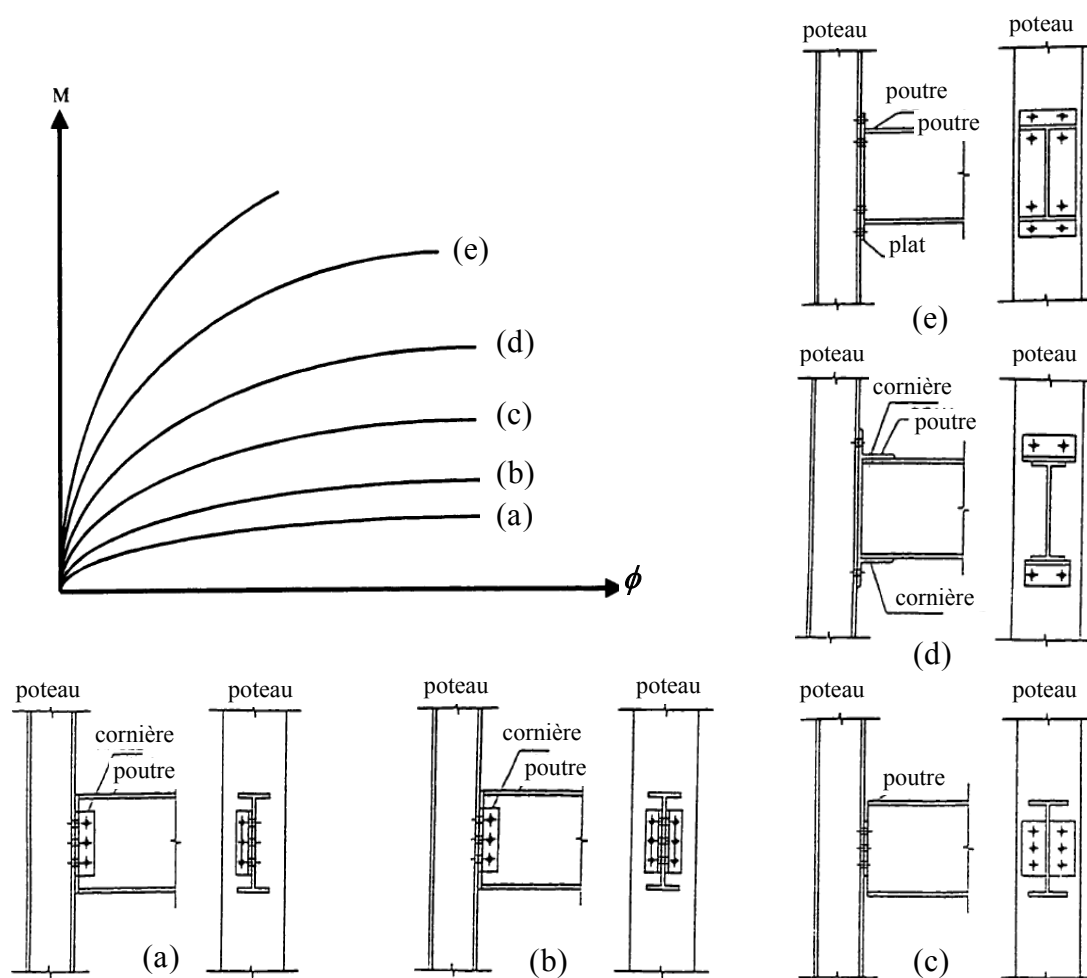
- L'influence de l'effort axial sur le comportement de flexion de la poutre.
- L'influence de la rotation et du cisaillement des systèmes d'assemblages, par le biais des connexions semi-rigides, sur le comportement de flexion de la poutre.

A cet effet, l'élément sera identifié par sa rigidité EI , sa longueur l et par la nature de ses connexions nodales semi-rigides. Ces connexions seront caractérisées par leurs indexes de flexibilités (f_i^r , f_j^r , f_i^y , f_j^y), exprimés en fonction des flexibilités s_i^r , s_j^r , s_i^y , s_j^y caractérisant chacun des ressorts d'extrémité que l'on destine à la modélisation des assemblages situés aux deux extrémités de l'élément.

Ces flexibilités sont par ailleurs déduites à partir de la loi de comportement ($M - \phi$) en ce qui concerne les ressorts de rotation et de la loi ($T - \Delta$) pour les ressorts de translation.

Ces lois de comportements, que de nombreuses études expérimentales ont permis d'établir depuis les années 1930, sont en général de forme non linéaire. La figure (V.2) ci-après montre différents modèles d'assemblages et lois moment-rotation, respectives [38].

Ainsi nous pouvons observer l'étendue des lois de comportements ($M - \phi$) relatives à des assemblages, allant de la situation quasi articulée correspondant au modèle d'assemblage (a) jusqu'à la situation quasi rigide du modèle (e).



Exemples de lois de comportements ($M-\phi$) et modèles d'assemblages

Figure V.2

De nos jours, il est bien établi que le comportement des connexions doit être pris en considération lors d'une analyse globale de structure afin d'aboutir à une distribution des efforts internes compatibles avec les types de connexions adoptés aux extrémités des éléments.

Par conséquent, les lois de comportements ($M-\phi$) et ($T-\Delta$) qui caractérisent ces assemblages, constituent à l'évidence, une donnée importante que l'ingénieur de structure doit avoir à sa disposition au moment d'entreprendre le calcul d'une ossature, surtout lorsqu'il s'avère nécessaire de tenir compte de l'influence de la flexibilité de ces derniers sur le comportement global de la structure.

V.3 Concept de la longueur effective de flambement

Le concept de facteur de longueur effective (K), représente à ce jour le moyen le plus usuel dans la détermination de la charge critique de flambement. On soulignera au passage, que la majorité des codes et règlements relatifs aux calculs des ossatures, associent l'analyse vis-à-vis du flambement au facteur K de longueur effective.

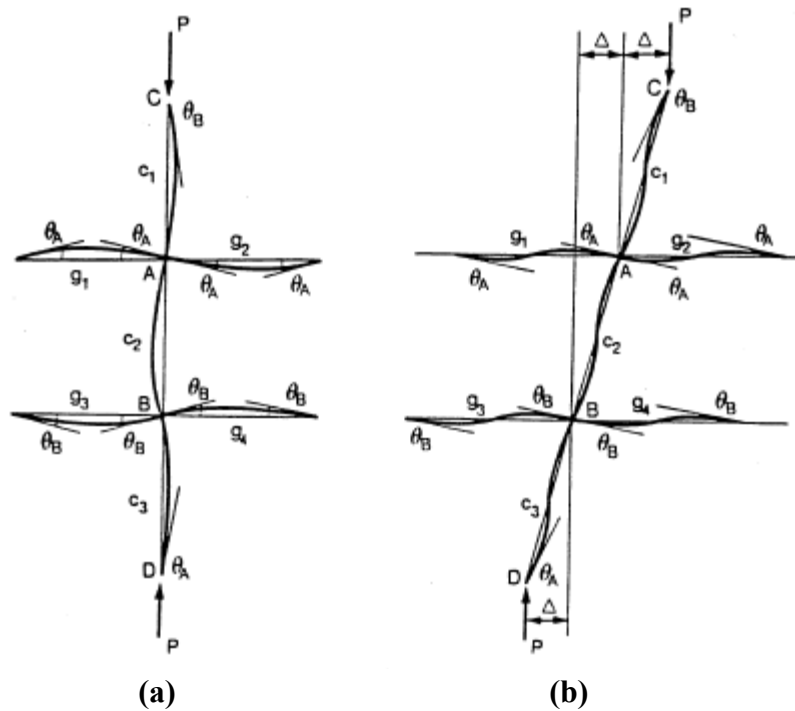
Mathématiquement, le facteur K est défini par la relation suivante :

$$K = \sqrt{\frac{P_E}{P_{cr}}} = \sqrt{\frac{I}{P_{cr}} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (\text{V.1})$$

Où P_E désigne la charge critique d'Euler, correspondant à la charge de flambement élastique d'une poutre bi articulée sous l'action d'un chargement axial de compression. P_{cr} désigne la charge critique de flambement élastique d'une poutre en compression dont les extrémités sont en situation de condition aux limites arbitraires. (E : module de Young, I : inertie de la section de la poutre, l : longueur réelle de la poutre).

D'un point de vue physique, le produit (Kl) relatif à un élément poutre avec conditions aux limites arbitraires, correspond à la longueur d'un élément équivalent avec extrémités bi articulées dont la charge critique de flambement est égale à celle de l'élément dans sa configuration réelle.

Théoriquement, le facteur K peut être déterminé à partir d'une analyse élastique aux valeurs propres. Cette approche a par ailleurs permis d'établir les abaques de K , d'un élément poutre appartenant à un sous ensemble de structure, comme le montre la figure (V.3) ci-après :

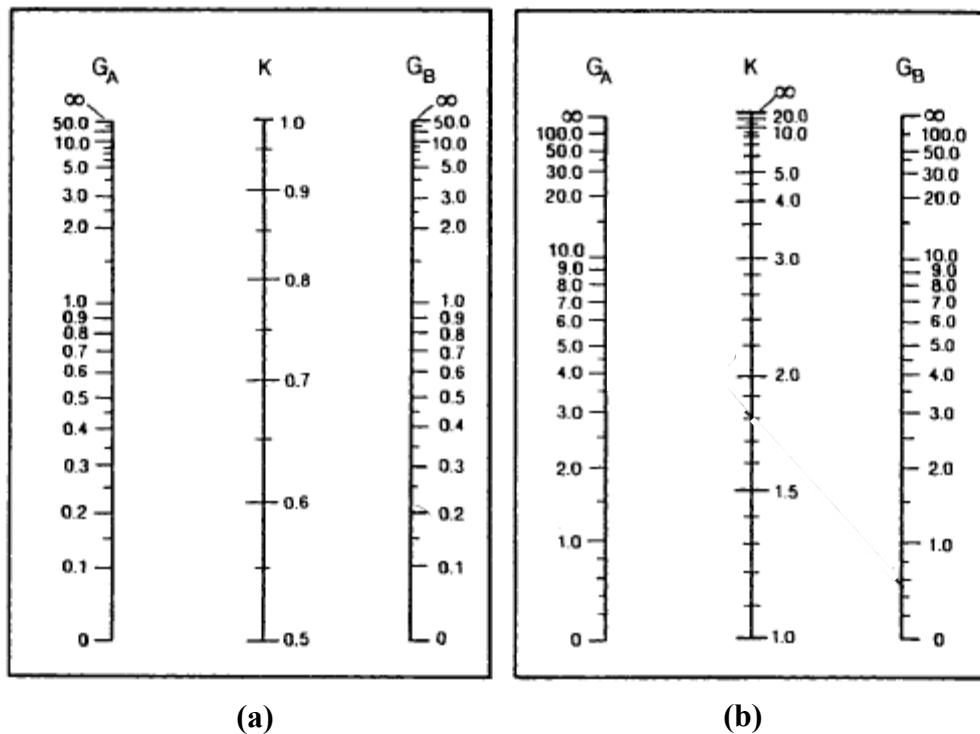


Modèle sous ensemble de structure pour l'évaluation du facteur K

Figure V.3

Les abaques (figure V.4) obtenus pour l'élément (c_2) du précédent modèle de structure, sont établis en considérant les hypothèses suivantes :

- Les éléments sont considérés dans le domaine élastique.
- Les sections des éléments sont considérées constantes.
- Les nœuds de jonction entre éléments sont rigides.
- Les rotations d'extrémité des éléments sont égales et de directions opposées dans la situation à nœuds fixes figure (V.3.a).
- Les rotations d'extrémité des éléments sont égales et de mêmes directions dans la situation à nœuds déplaçables (figure (V.3.b)).
- Le paramètre $l\sqrt{P/EI}$, doit être le même pour l'ensemble des éléments verticaux (c_1, c_2, c_3).
- Les éléments verticaux (c_1, c_2, c_3) doivent atteindre le seuil critique de flambement simultanément.



Abaques d'évaluation du facteur K de longueur effective d'un élément poutre-colonne

Figure V.4

Les deux abaques de K de la figure (V.4) ci-dessus, correspondent respectivement aux deux modèles de structure (a) à nœuds fixes et (b) à nœuds déplaçables, présentés par la figure (V.3) précédente. Ces abaques sont établis en fonction des paramètres G_A et G_B destinés à traduire le rapport de flexibilité de l'élément (c_2) par rapport à ses deux extrémités A et B. Les paramètres G_A et G_B sont définis par les relations suivantes :

$$G_A = \frac{\sum_A^{élé.m. vert.} (EI/l)}{\sum_A^{élé.m. horiz.} (EI/l)} \tag{V.2}$$

$$G_B = \frac{\sum_B^{élé.m. vert.} (EI/l)}{\sum_B^{élé.m. horiz.} (EI/l)} \tag{V.3}$$

G_A et G_B traduisent en chaque extrémité A et B de l'élément (c_2), le rapport entre la sommation des rigidités (EI/l) des éléments verticaux et la sommation des rigidités (EI/l) des éléments horizontaux.

Il est important de noter que les abaques ainsi obtenus sont intimement liés aux hypothèses associées au modèle de structure de la figure (V.3). Par conséquent lorsque l'une de ces conditions n'est pas assurée il y a un risque évident d'obtenir des résultats erronés à partir de ces abaques. A cet égard, des précautions doivent être observées devant certaines situations particulières (articulation associée à un élément, structure non symétrique...) en introduisant des correctifs en ce qui concerne la formulation des paramètres G_A et G_B .

A titre indicatif, il y a lieu de modifier les relations (V.2) et (V.3) en multipliant par un facteur de correction α_k les rigidités (EI/l) de l'ensemble des éléments horizontaux lorsque les conditions de fixation d'un élément horizontal ne sont pas rigides. Cela se traduit par la relation suivante :

$$G = \frac{\sum^{élé.m. vert.} (EI/l)}{\sum^{élé.m. horiz.} (\alpha_k (EI/l))} \tag{V.4}$$

Le facteur α_k est donné par les relations du tableau (V.1) ci-après.

Conditions d'extrémité nodales d'un élément horizontal (ij)		Nœuds fixes	Nœuds déplaçables
(i)	(j)	α_k	α_k
Rigide	Rigide	1.0	1.0
Rigide	Articulée	1.5	0.5
Rigide	Semi rigide	$\frac{(1+6frj)}{(1+4frj)}$	$\frac{(1+2frj)}{(1+4frj)}$
Semi rigide	Rigide	$1/(1+4fri)$	$1/(1+4fri)$
Semi rigide	Articulée	$1.5/(1+3fri)$	$0.5/(1+3fri)$
Semi rigide	Semi rigide	$(1+6frj)/R^*$	$(1+2frj)/R^*$

Expressions du facteur de correction α_k en présence d'une extrémité non rigide

Tableau V.1

On désigne pour tout élément horizontal (ij) concerné par ce facteur α_k :

- (i) : extrémité de l'élément horizontal adjacente à l'élément vertical
- (j) : extrémité de l'élément horizontal éloignée de l'élément vertical

$fri = (EI/L)/Kri$, (Kri rigidité du ressort de rotation de l'extrémité nodale (i))
 $frj = (EI/L)/Krij$, ($Krij$ rigidité du ressort de rotation de l'extrémité nodale (j))

Avec : (EI/L) rigidité de rotation de l'élément horizontal (ij) ciblé.

$$R^* = (1+4fri)(1+4frj) - 4frifrj$$

Ces facteurs α_k ont été développés par Duan et Lu [39] pour les structures à nœuds fixes et par Kishi, Chen et Goto [54] pour les structures à nœuds déplaçables.

Une autre approche proposée par LeMessurier [58] permet de calculer directement le facteur de longueur effective K_i d'un élément à partir de la relation suivante. Cette relation est valable pour tout élément vertical appartenant à une ossature à nœuds déplaçables :

$$K_i = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_i}{P_i l_i^2}\right) \left(\frac{\Sigma P + \Sigma(C_L P)}{\Sigma P_L}\right)} \quad (V.5)$$

P_i désigne la charge axiale de l'élément (i), l'indice i désigne le ième élément, ΣP désigne la somme des charges axiales de l'étage auquel appartient l'élément (i), l_i désigne la longueur de l'élément (i) considéré. Les paramètres P_L , β et C_L sont par ailleurs exprimés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_L = \frac{\beta EI}{l^2} & (a) \\ \beta = \frac{6(G_A + G_B) + 36}{2(G_A + G_B) + G_A G_B + 3} & (b) \\ C_L = \left(\beta \frac{K_0^2}{\pi^2} - 1\right) & (c) \end{cases} \quad (V.6)$$

Comme autre alternative, nous citerons l'approche proposée par Lui [60] permettant de calculer le facteur de longueur effective K_i par le biais de la relation (V.7) ci-après, qui traduit explicitement les effets d'instabilités relatifs au comportement global de l'ossature.

$$K_i = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_i}{P_i l_i^2}\right) \left(\Sigma \frac{P}{l}\right) \left(\frac{1}{5\Sigma\eta} + \frac{\Delta l}{\Sigma H}\right)} \quad (V.7)$$

Dans cette relation, P_i désigne la charge axiale de l'élément (i), l'indice i désigne le ième élément, ΣP désigne la somme des charges axiales de l'étage auquel appartient l'élément (i), l_i désigne la longueur de l'élément (i). $\left(\Sigma \frac{P}{l}\right)$, représente la somme des rapports entre les charges axiales et longueurs des éléments se trouvant à l'étage auquel est associé l'élément (i) considéré. (ΣH) , représente le chargement latéral d'étage qui provoque le déplacement latéral relatif (inter étage) Δl , évalué par l'intermédiaire d'une résolution linéaire du premier ordre. Enfin, η désigne un paramètre de rigidité évalué à partir de la relation (V.8) suivante :

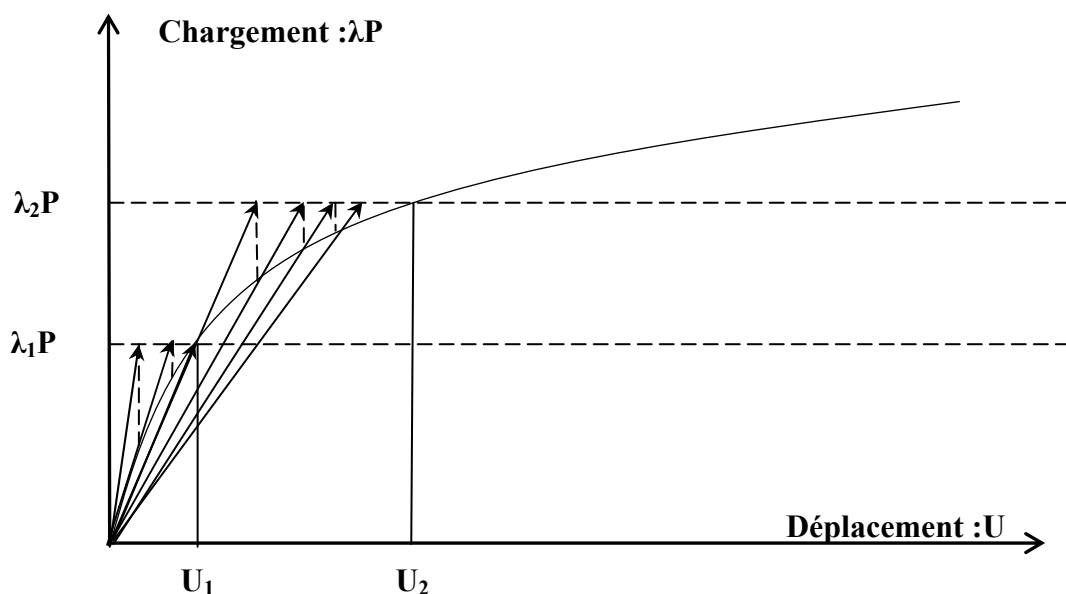
$$\eta = \left(3 + 4.8m + 4.2m^2\right) \frac{EI}{l^3} \quad (\text{V.8})$$

Avec m qui désigne le rapport entre la plus petite et la plus grande valeur de moment fléchissant de l'élément (i) considéré. m doit être considéré positivement si l'élément fléchit selon une double courbure et négatif dans le cas d'une simple courbure.

V.4 Mise en œuvre de la résolution numérique

Cette présente étape est consacrée à la présentation de la stratégie de mise en œuvre numérique développée à l'effet de mettre en évidence les potentialités des différents résultats analytiques obtenus aux chapitres (III et IV) précédents.

Le programme de calcul élaboré à cet effet, est articulé autour d'un algorithme de calcul par rigidité sécante, destiné à la résolution d'un système d'équations non linéaires dont la matrice de rigidité globale est formulée en variables entières. Cette approche, est développée selon une procédure de chargement pas à pas, elle-même articulée autour d'un processus itératif de substitution comme le montre la figure (V.5) suivante.



Procédure de chargement pas à pas avec processus itératif de substitution

Figure V.5

L'algorithme lié à ce type de résolution est globalement établi selon les étapes suivantes :

Lecture des données principales :

- Géométrie de la structure et caractéristiques mécaniques des matériaux
- Assemblages semi-rigides : positions, types, lois de comportements
- Chargement extérieur (P) appliqué à la structure

Boucle (i) des pas de charges :

- Etablir à chaque pas (i) la proportion de chargement nécessaire ($\lambda_i P$)

Boucle itérative (j) de convergence par substitution :

- Evaluer l'énergie potentielle emmagasinée par la structure à l'issue de l'itération (j-1).
- Evaluer les déformations axiales des éléments de la structure à l'issue de l'itération (j-1).

-Réévaluer l'ensemble des matrices de rigidité et vecteurs charges des éléments en attribuant aux déformations axiales les valeurs obtenues à l'itération (j-1). La présence des connexions semi rigide devra être prise en considération lors de cette phase de calcul.

-Résoudre le système d'équations corrigé $KU=F$ de cette étape (i).

-Réévaluer les déformations axiales des éléments de la structure à l'issue de cette itération (j).

-Réévaluer l'énergie potentielle emmagasinée par la structure à l'issue de l'itération (j).

-Vérifier la norme sur l'énergie potentielle pour décider s'il est nécessaire de faire une itération (j+1).

-En cas de convergence prévoir un pas de charge (i+1) supplémentaire.

Cet algorithme représente les grandes lignes du programme de calcul développé à l'effet de mener cette étape de validation numérique. Le programme de calcul établi à cet effet est réalisé à partir de la plateforme de programmation '**Compaq Visual Fortran**' dans sa version 6.5, qui supporte l'ensemble des versions relatives au langage Fortran (Fortran 77 standard, Fortran 90 et Fortran 95).

La conception de ce programme à été faite selon une approche modulaire, dans laquelle chaque unité de module est compilée séparément. Une fois toutes les unités de modules auront satisfait à l'opération de compilation, on procède dans une étape suivante à la mise en relation de ces dernières pour construire le fichier exécutable. Cette dernière opération, est réalisée par l'intermédiaire d'un fichier principal dénommé 'PROGRAM MAIN' organisé de la façon suivante :

```
PROGRAM MAIN

USE  INIT
USE  OPEN
USE  SCAN
USE  DATA
USE  SOLL
USE  VFGC
USE  MGKG
USE  RESO
USE  REAC
USE  NLIN

CALL STARTINIT()
CALL STARTOPEN()
CALL STARTSCAN()
CALL STARTDATA()
CALL STARTSOLL()
CALL STARTVFGC()
CALL STARTMGKG()
CALL STARTRESO()
CALL STARTREAC()
CALL STARTNLIN()

STOP
END PROGRAM
```

Les dix premières instructions (USE) sont destinées à créer une interdépendance entre les variables des différents modules :

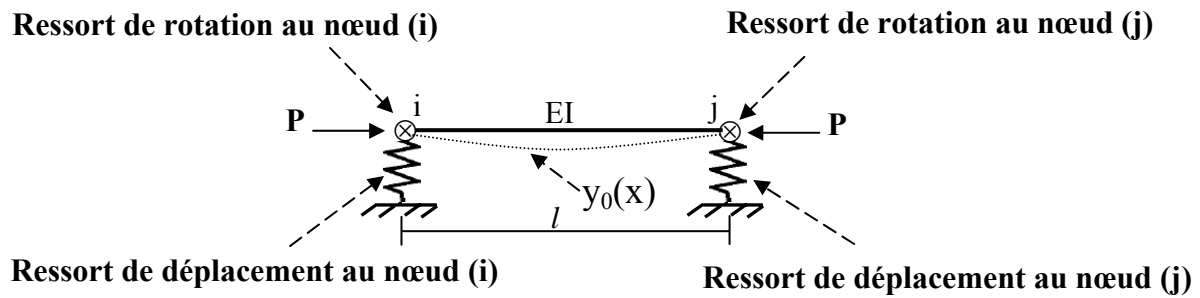
- INIT : module d'initialisation de certains paramètres, vecteurs et matrices.
- SCAN : module d'affichage à l'écran des données introduites.
- DATA : module de lecture des données globales de la structure.
- SOLL : module de lecture des charges extérieures appliquées à la structure.
- VFGC : module d'évaluation du vecteur charge global F.
- MGKG : module d'évaluation de la matrice de rigidité globale K.
- RESO : module de résolution du système d'équations $KU=F$
- REAC : module de calcul des sollicitations internes élémentaires et réactions d'appuis.
- NLIN : module de traitement non linéaire des effets du second ordre, basé sur la procédure de chargement pas à pas avec processus itératif de substitution.

Les dix instructions (CALL) suivantes, sont destinées à mettre en exécution séquentiellement, les différents modules cités précédemment. A titre indicatif, il y a lieu de souligner que les neuf premières instructions (CALL) correspondent à une phase complète de résolution linéaire dont les résultats feront office de solution initiale au lancement du module NLIN.

V.5 Expérimentation numérique

L'expérimentation numérique qui va suivre servira à valider la solution analytique obtenue dans le cadre de cette étude. Pour ce faire nous avons choisi de proposer un certain nombre d'exemples sélectionnés comme suit :

Exemple N°1 : Ce premier exemple concerne l'analyse d'une poutre axialement comprimée, dont les conditions aux limites sont matérialisées par des ressorts de rotation et de déplacement placés aux deux extrémités nodales de la poutre, comme le montre la figure (V.6) ci-après :



Élément poutre à extrémités nodales semi-rigides, soumis à l'action d'un chargement axial en présence d'une imperfection géométrique initiale $y_0(x)$

Figure I.6

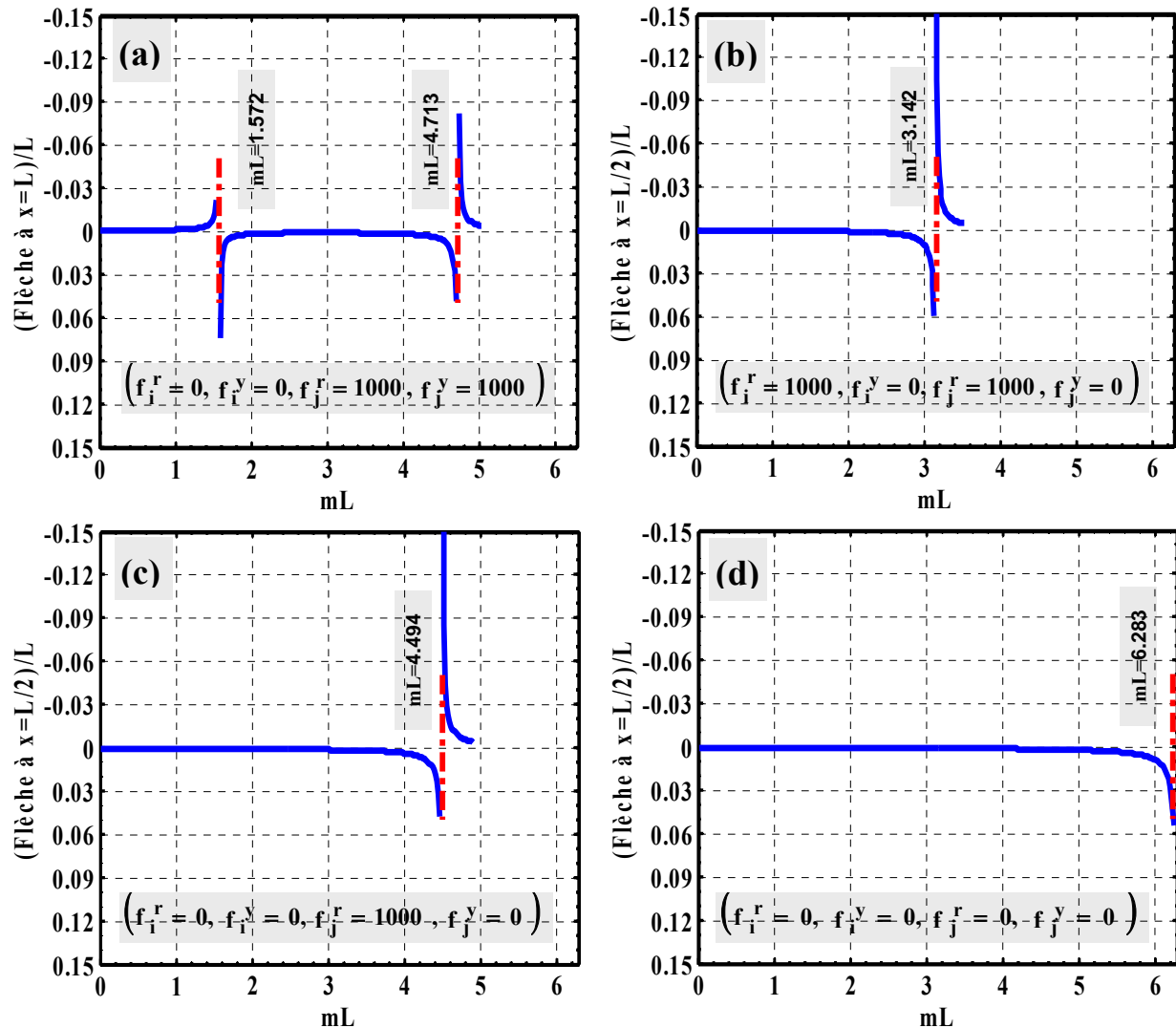
Pour cet exemple, nous avons adopté les données suivantes :

- Poutre : HEA 100 (ht=9.6cm, b=10cm, $I_x=349\text{cm}^4$)
 $L=300\text{cm}$
 $E=21000 \text{ kN/cm}^2$
- Chargement : Imperfection initiale $y_0(x) = 0.001l \cdot \sin(\pi x/l)$
- conditions aux limites :

Dans le but de simuler différentes situations de condition aux limites, nous adoptons en ce qui concerne les ressorts de rotation et de translation ce qui suit :

- a) encastree en (i) ($f_i^r = 0, f_i^y = 0$), libre en (j) ($f_j^r = 1000, f_j^y = 1000$).
- b) articulée en (i) ($f_i^r = 1000, f_i^y = 0$), articulée en (j) ($f_j^r = 1000, f_j^y = 0$).
- c) encastree en (i) ($f_i^r = 0, f_i^y = 0$), articulée en (j) ($f_j^r = 1000, f_j^y = 0$).
- d) encastree en (i) ($f_i^r = 0, f_i^y = 0$), encastree en (j) ($f_j^r = 0, f_j^y = 0$).

Ainsi, nous pouvons aisément observer sur les figures (V.7.a,b,c,d), des seuils critiques par rapport au paramètre mL , se distinguant par des flèches de très grandes amplitudes. En fait, ces seuils critiques correspondent aux différents modes de flambement de la poutre, lorsque cette dernière est considérée dans les situations de condition aux limites (a), (b), (c) et (d) choisies.



Courbes de variation : flèches par mL , correspondant aux situations (a), (b), (c) et (d) de l'exemple proposé

Figure I.7

Enfin, nous pouvons déduire à partir des relations (IV.7) et (IV.9) du chapitre (IV) précédent, les valeurs du facteur (K) de longueur effective de flambement ainsi que celles relatives aux charges critiques P_{cr} correspondantes, comme indiqué sur le tableau (V.2) suivant :

	ml	$K=\pi/ml$	$P_{cr}=(\pi^2 \cdot EI)/(K \cdot l)^2$
(a)	1.572	2	200.928
(b)	3.141	1	803.714
(c)	4.494	0.699	1644.630
(d)	6.283	0.5	3214.669

Valeurs des paramètres ml , K et P correspondant aux situations (a), (b), (c) et (d) de l'exemple N°1

Tableau V.2

Ces résultats constituent de notre point de vue, un test de validation positif, étant donné qu'ils correspondent à ceux découlant de la charge critique d'Euler classique. Il y a lieu de souligner par ailleurs, que ces seuils critiques de flambement sont déterminés à partir de l'histoire de chargement de la structure, en adoptant un seul élément dans la discrétisation de la poutre étudiée.

Enfin, nous indiquerons que pour simuler la situation d'un ressort parfaitement rigide il suffit d'adopter pour l'index de flexibilité correspondant la valeur zéro, dans le cas d'un ressort totalement libre une très grande valeur s'impose (à cet effet la valeur 1000 serait convenable).

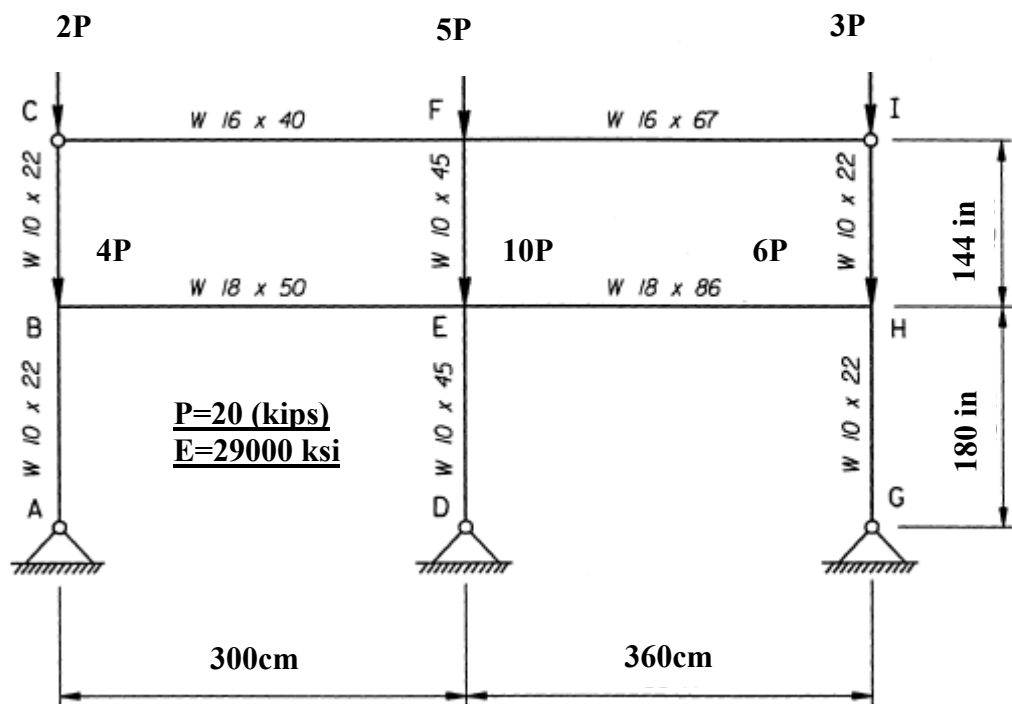
Exemple N°2 : Ce deuxième exemple est consacré au traitement d'une structure à deux étages, comme le montre la figure (V.8). Nous souhaitons comparer les résultats des facteurs K de longueur effective des éléments DE et EF obtenus à partir des abaques présentés par la figure (V.4) et ceux obtenus par le biais de la formulation analytique objet de cette présente étude. Les données géométriques relatives à cet exemple, sont indiquées sur le tableau (V.3) suivant :

Eléments	Types Sections de	Inertie (mm ⁴ x10 ⁸) in ⁴	Longueur <i>l</i> in (mm)	Rapport <i>I/l</i> in ³ (mm ³)
AB,GH	W10x22	118 (0.49)	180 (4572)	0.656 (10750)
BC, HI	W10x22	118 (0.49)	144 (3658)	0.819 (13412)
DE	W10x45	248 (1.03)	180 (4572)	1.378 (22581)
EF	W10x45	248 (1.03)	144 (3658)	1.722 (28219)
BE	W18x50	800 (3.33)	300 (7620)	2.667 (43704)
EH	W18X86	1530 (6.37)	360 (9144)	4.250 (69645)
CF	W16x40	518 (2.16)	300 (7620)	1.727 (28300)
FI	W16x67	954 (3.97)	360 (9144)	2.650 (43426)

Données géométriques relatives à la structure de l'exemple N°2

Tableau V.3

Rappel concernant les unités de mesures : 1ft. =12 in. ; 1in.= 25.4 mm. ; 1kip=4.448kN.



Structure correspondant à l'exemple N°2

Figure V.8

Elément DE : Concernant l'extrémité articulée de l'élément (DE), on attribue au facteur G_D la valeur 10, bien que théoriquement cette situation doit correspondre à la limite infinie. Ce choix serait acceptable d'après la référence [39] en raison des frottements éventuels qui peuvent avoir lieu au droit des articulations.

$$G_E = \frac{\sum_E^{\text{élém. vert.}} (EI/l)}{\sum_E^{\text{élém. horiz.}} (EI/l)} = \frac{1.378 + 1.722}{2.667 + 4.250} = 0.448$$

$$G_D = 10 \quad (\text{AISC_LRFD, 1993})$$

Ainsi, est déduite pour l'élément DE, la valeur $K_{ED} \approx 1.8$ à partir de l'abaque de la figure (V.4.b).

Elément EF : En ce qui concerne cet élément, nous devons tenir compte de la présence de l'articulation située à l'extrémité (I) de l'élément (FI). A cet effet, on appliquera la relation (V.4) pour le calcul de G_F en adoptant d'après le tableau (V.1), $\alpha_k = 0.5$ déduit de la colonne relative aux nœuds déplaçables. Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

$$G_F = \frac{\sum_F^{\text{élém. vert.}} (EI/l)}{\sum_F^{\text{élém. horiz.}} \alpha_k (EI/l)} = \frac{1.722}{0.5(1.722) + 0.5(2.650)} = 0.787$$

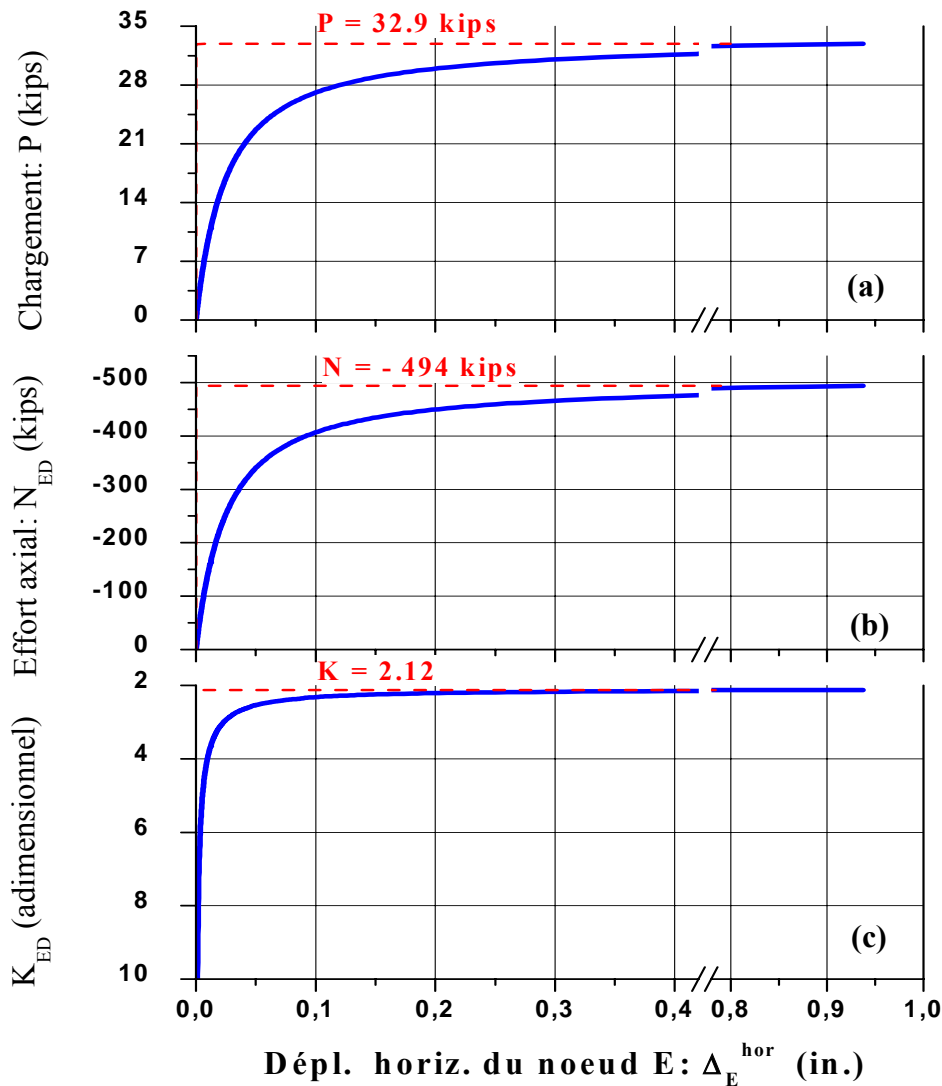
$$G_E = 0.448$$

Ceci permet de déduire concernant l'élément EF, la valeur $K_{EF} \approx 1.22$ à partir de l'abaque de la figure (V.4.b).

Les données géométriques relatives à cet exemple, ainsi que les résultats précédents concernant le facteur K, sont puisés de la référence [39].

Ce même exemple a fait l'objet d'une analyse globale au second ordre, réalisée sur la base des formulations obtenues dans le cadre de cette étude. Ainsi, nous obtenons les résultats répertoriés sur les graphes de la figure (V.9) ci-après, qui relatent diversement l'histoire de chargement jusqu'à la ruine par flambement de la structure proposée. Ces différents graphes (a, b et c) montrent la variation du déplacement horizontal du nœud E ($\Delta_E^{\text{hor.}}$), par rapport respectivement, au chargement extérieur P appliqué à la structure, à l'effort axial de compression (N_{ED}), et au facteur de longueur effective (K_{ED}) de l'élément ED. Nous pouvons vérifier à partir de ces mêmes graphes la corrélation qui existe entre ces différents paramètres,

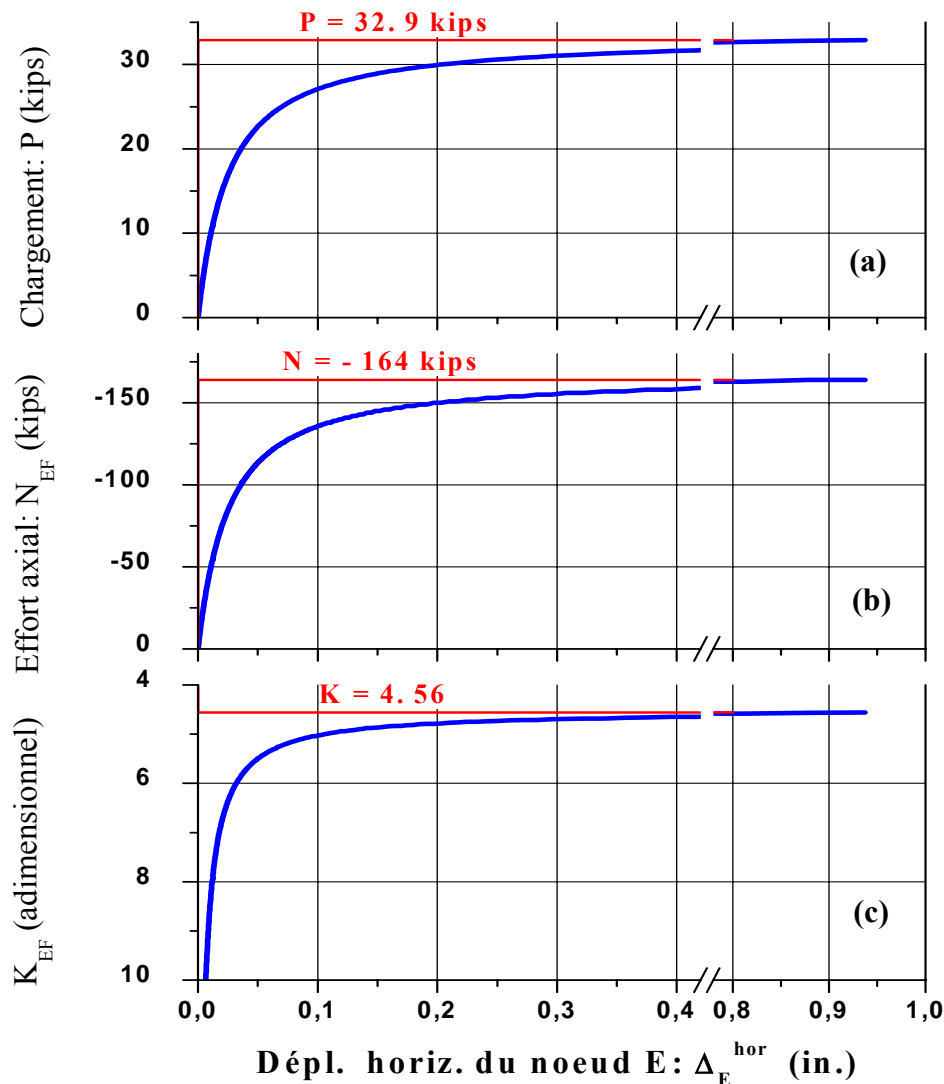
particulièrement dans la zone où le déplacement horizontal (Δ_E^{hor}) se caractérise par une tendance asymptotique. Ainsi nous observons qu'au chargement extérieur critique ($P = 32.9$ kips), correspondent les valeurs ($N_{ED} = 490$ kips) et ($K_{ED} = 2.12$) qui vérifient par ailleurs les relations (IV.7) et (IV.8) les concernant, données au précédent chapitre. Nous pouvons apprécier d'autre part la dégradation de la rigidité de l'ensemble de la structure comme le suggère l'allure de ces mêmes graphes.



(a)

Figure V.9

Cette même analyse, montre d'après les graphes de la figure (V.10), qu'à la même charge critique de flambement ($P = 32.9$ kips) correspondent les valeurs ($N_{EF} = 164$ kips) et ($K_{EF} = 4.56$) en ce qui concerne l'élément (EF).



Analyse au second ordre de l'exemple N° 2
 (a) : comportement global (P Vs. Δ_E^{hor}).
 (b), (c) : comportement local de l'élément (EF), (P Vs. N_{EF}) et (P Vs. K_{EF}).

Figure V.10

Finalement, nous constatons que les résultats suggérés par l'Eurocode s'avèrent en totale contradiction avec ceux trouvés par la présente analyse, comme le montre les résultats du facteur K concernant les éléments (ED) et (EF) répertoriés sur le tableau (V.4) ci-après.

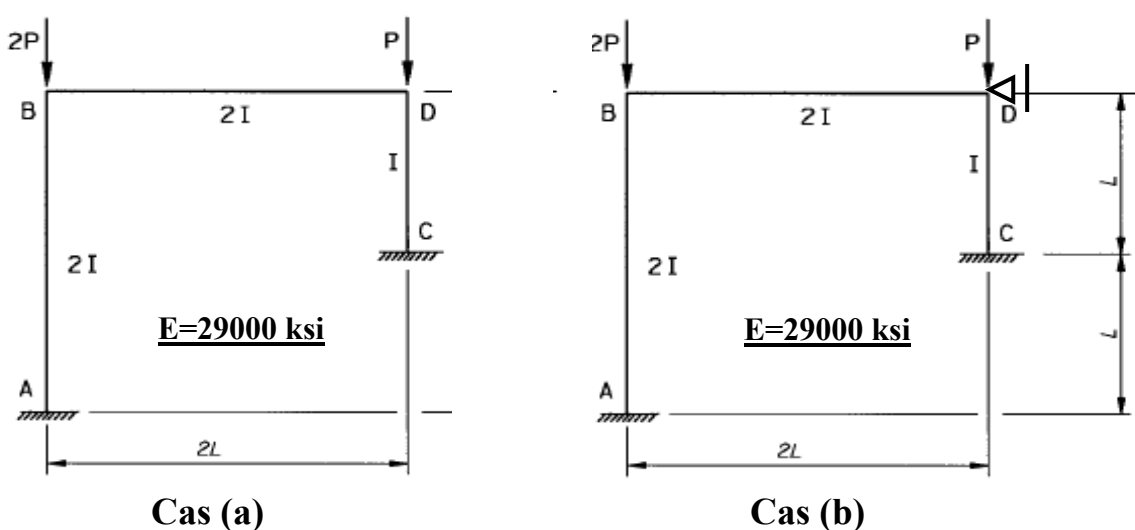
Eléments	Abaques : Figure (V.4.b)	Présente étude
(EF)	1.22	4.56
(ED)	1.80	2.12

Comparaison des valeurs du facteur K de l'exemple N°2

Tableau V.4

L'ampleur de la valeur prise par le facteur (K_{EF}) peut se justifier par la formulation rigoureuse de la matrice de rigidité de l'élément poutre développé dans le cadre de cette recherche, permettant de tenir compte simultanément des effets (P- δ) et (P- Δ) à l'échelle élémentaire. Le comportement élémentaire (P- Δ) s'avère très pénalisant pour l'élément (EF) notamment lorsque ce dernier subit des déplacements horizontaux à ses deux extrémités contrairement à l'élément (ED) qui possède une extrémité fixe. Il est évident que ces déplacements horizontaux caractérisent les conditions aux limites dont est directement tributaire la charge critique de flambement et donc le facteur K.

Exemple N°3 : Cet exemple est relatif au cas d'une structure irrégulière à 1 étage, comme le montre la figure (V.11). Cette dernière fera l'objet d'une étude comparative entre différentes approches de calcul du facteur de longueur effective K concernant les éléments AB et CD.



Structure correspondant à l'exemple N°3

Figure V.11

Les données géométriques concernant la structure proposée à l'exemple (N°.3) sont répertoriées sur le tableau (V.5) ci-après :

Eléments	Inertie (mm ⁴ x10 ⁸)	sections (mm ² x10 ⁴)	Longueur <i>l</i> in (mmx10 ²)
AB	620 (2.58)	21.5 (1.3870)	240 (60.96)
CD	310 (1.29)	7.65 (0.4935)	120 (30.48)
BD	620 (2.58)	21.5 (1.3870)	240 (60.96)

Données géométriques relatives à la structure de l'exemple N°3

Tableau V.5

Nous étudierons dans un premier temps le cas (a) correspondant à la situation d'une structure à nœud déplaçables. Pour ce faire, nous avons choisis de développer les méthodes de LeMessurier et de Lui, destinées à l'analyse de ce type de structure en particulier. Ces méthodes sont considérées comme alternative à l'approche classique basée sur les abaques.

L'approche de LeMessurier concernant l'évaluation du facteur de longueur effective K repose sur les calculs intermédiaires données par le tableau (V.6) suivant :

Eléments :	Inertie (in. ⁴)	Long. (in.)	Facteurs de Distribution		β	K ₀	C _L	P _L	P	C _L P
			G _A =0	G _B =1						
AB	620	240	G _A =0	G _B =1	8.4	1.17	0.165	0.09E	2P	0.330P
CD	310	120	G _C =0	G _D =1	8.4	1.17	0.165	0.181E	P	0.165P
			Rel. (V.2)	Rel. (V.3)	Rel. (V.6.b)	Fig. (V.4.a)	Rel. (V.6.c)	Rel. (V.6.a)		

Détails de calcul de l'exemple N°3 selon la méthode de LeMessurier

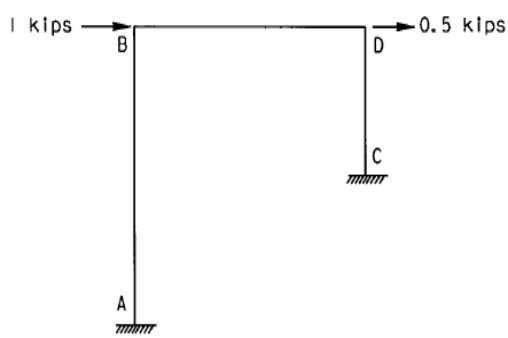
Tableau V.6

Ainsi grâce à la relation (V.5), nous sommes en mesure d'évaluer les facteurs K_{AB} et K_{CD} relatifs aux deux éléments AB et CD.

$$K_{AB} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_{AB}}{P_{AB} L_{AB}^2}\right) \left(\frac{\sum P + \sum(C_L P)}{\sum P_L}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 E(620)}{(2P)(240)^2}\right) \left(\frac{3P + 0.495P}{0.271E}\right)} = 0.80$$

$$K_{CD} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_{CD}}{P_{CD} L_{CD}^2}\right) \left(\frac{\sum P + \sum(C_L P)}{\sum P_L}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 E(310)}{(P)(120)^2}\right) \left(\frac{3P + 0.495P}{0.271E}\right)} = 1.66$$

Une autre approche proposée par Lui, permet d'évaluer le facteur de longueur effective K. Cette approche repose sur les calculs intermédiaires données par le tableau (V.7) suivant :

Eléments :	Inertie (in. ⁴)	Long. (in.)	H (kips)	Δ_1 (in.)	Moments Fléchis. (kN-in)	m	η (kips/in)	P/L
AB	620	240	1	0.0286	$M_A = -46.2$ $M_B = -38.8$	$M_B / M_A = 0.84$	13.0	P/120
CD	310	120	0.5	0.0283	$M_C = 81.18$ $M_D = 56.53$	$M_D / M_C = 0.69$	43.24	P/120
Chargement horizontal H ayant permis de calculer le déplacement horizontal Δ_1 des nœuds B et D, ainsi que les moments nodaux des éléments AB et CD de la structure proposée.						Rapport du plus petit moment sur le plus grand moment de l'élément considéré.	Rel. (V.8)	
								

Détails de calcul de l'exemple N°3 selon la méthode de Lui

Tableau V.7

La relation (V.7), permet finalement d'évaluer les facteurs K_{AB} et K_{CD} relatifs aux deux éléments AB et CD.

$$K_{AB} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_{AB}}{P_{AB} L_{AB}}\right) \left(\sum \frac{P}{L}\right) \left(\frac{1}{5 \sum \eta} + \frac{\Delta_1}{\sum H}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 (29000)(620)}{(2P)(240)^2}\right) \left(\frac{P}{60}\right) \left(\frac{1}{5(56.24)} + \frac{(0.0286)}{1.5}\right)} = 0.76$$

$$K_{CD} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_{CD}}{P_{CD} L_{CD}^2}\right) \left(\sum \frac{P}{L}\right) \left(\frac{1}{5 \sum \eta} + \frac{\Delta_1}{\sum H}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 (29000)(310)}{(P)(120)^2}\right) \left(\frac{P}{60}\right) \left(\frac{1}{5(56.24)} + \frac{(0.0283)}{1.5}\right)} = 1.52$$

Notons par ailleurs que les facteurs de distributions précédemment évalués dans la formulation de LeMessurier, permettent par ailleurs de déduire à partir de l'abaque donné par la figure (V.4.b) les valeurs de K suivantes :

$$K_{AB} = K_{CD} = 1.17$$

Enfin, cet exemple à été traité dans les deux situations (cas(a) : nœuds déplaçables et cas(b) : nœuds fixes) selon une analyse globale au second ordre basée sur la formulation de la présente étude. Ces résultats ainsi que ceux relatifs aux différentes approches précédemment citées, sont répertoriés dans le tableau comparatif (V.8) présenté ci-après :

Éléments	Théorie	Abaques : Fig.(V.4.b)	LeMessurier Rel. (V.5)	Lui Rel. (V.7)	Présente étude		
AB	0.70	1.17	0.83	0.76	0.76	0.75	
CD	1.40	1.17	1.67	1.52	1.55	1.50	
Cas :	(a)					(b)	

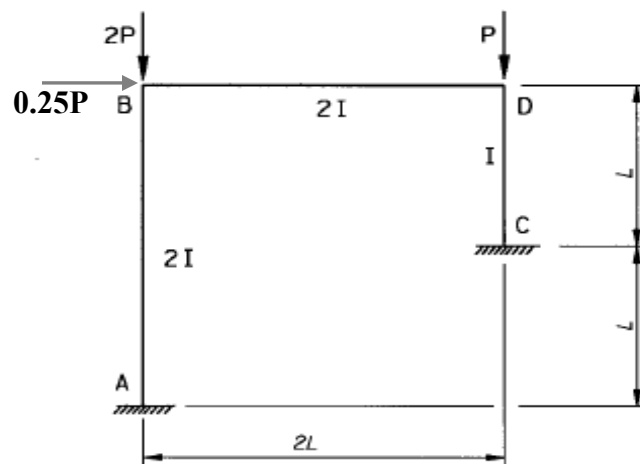
Comparaison des valeurs du facteur K, cas(a) et cas(b) de l'exemple N°3

Tableau V.8

En première lecture nous constatons que les résultats obtenus par la présente étude et par la méthode de Lui, sont relativement proches des résultats théoriques en ce qui concerne le cas (a).

Cependant les résultats obtenus par l'analyse globale appliquée au cas (b), montre une similitude avec ceux obtenus par la même approche dans la situation à nœuds déplaçables, ce qui nous amène à conclure concernant le cas (a), que le chargement proposé ne favorise pas le mode de flambement latéral qui doit être prédominant dans ce cas de figure.

Afin de mettre en évidence cet aspect, on a choisi d'appliquer au nœud B une charge horizontale égale à $(0.25P)$ destinée à favoriser le mode de flambement latéral qui doit prédominer pour ce type de structure. Voir figure (V.12) ci-dessous.



Cas (c)

Structure correspondant à l'exemple N°3 avec chargement horizontal en B

Figure V.12

Ainsi nous obtenons concernant les éléments AB et CD les facteurs K correspondant à la colonne de (c1) du tableau (V.9) suivant. Les valeurs de K obtenus dans ce cas de figure s'avèrent nettement plus grands en amplitude, particulièrement en ce qui concerne l'élément CD dont la valeur $K_{CD}=2.97$ est supérieur à 2 (cas d'une console).

Ce résultat qui dénote pour l'élément CD une vulnérabilité très importante, s'explique par le fait que dans cette analyse globale tous les éléments de la structure sont traités avec la même matrice de rigidité formulée à partir d'une approche du second ordre.

Par ailleurs, lorsqu'on réalise l'analyse de cette même structure en ne considérant les effets du second ordre que dans l'élément CD (cas (c2) du tableau (V.9)), nous obtenons $K_{CD}=1.94$ proche de la valeur 2 (cas d'une console) et $K_{AB}=0.7$ que l'on peut associer au cas d'un élément situé entre un encastrement et un appui double.

Éléments	Facteurs K obtenus par la présente étude			
	Cas (a)	Cas (b)	Cas(c)	
			(c1) 2 nd ordre Éléments : AB, CD, BD	(c2) 2 nd ordre Éléments : CD
AB	0.76	0.75	1.13	0.7
CD	1.55	1.50	2.97	1.94

Comparaison des valeurs du facteur K,
cas(a), cas(b) et cas(c) de l'exemple N°3

Tableau V.9

VI Conclusions

En conclusion, nous pouvons affirmer que le principal objectif de cette recherche a été de contribuer par le biais d'une approche analytique rigoureuse à la formulation d'un élément poutre-colonne à extrémités nodales semi-rigides.

Cette approche est réalisée en considérant **la semi-rigidité nodale de l'élément en question sur le double plan rotationnel et translationnel**, ce qui a permis de généraliser la formulation de l'élément poutre-colonne ainsi obtenu à toutes les éventualités de condition aux limites se situant entre les cas parfaitement rigides et parfaitement articulés ou libres.

En outre cette formulation est établie en tenant compte simultanément de :

- L'influence de l'effort de compression sur les déformations élémentaires.*
- L'influence du module de cisaillement G sur les déformations élémentaires.*
- La présence le long de l'élément d'une imperfection géométrique initiale.*
- La présence le long de l'élément d'un chargement linéairement réparti.*

La formulation ainsi obtenue, est traduite par des résultats pouvant être exploité de façon très souple à la manière des formulations obtenues par approche élément fini. Ainsi, sont proposés dans le contexte de cette recherche les résultats suivants :

- Fonctions de forme de déplacement et de rotation.*
- Matrice de rigidité.*
- Vecteur charges nodales équivalent à une charge élémentaire linéairement répartie.*
- Vecteur charges nodales équivalent à une imperfection géométrique initiale.*

Ces résultats traduisent les phénomènes précédemment étudiés, par le biais des paramètres distinctifs suivant :

Le paramètre de stabilité λ_N , relatif à l'influence de l'effort de compression sur les déformations élémentaires.

Le paramètre de cisaillement λ_G , relatif à l'influence du module de cisaillement G sur les déformations élémentaires.

Les indexes de flexibilité $(f_i^r, f_i^y, f_j^r, f_j^y)$, relatif aux différents ressorts de rotation et de translation en rapport avec le comportement semi-rigide des extrémités nodales de l'élément poutre-colonne considéré.

La forme de cette solution permet par ailleurs de fournir des abaques de lecture du facteur de longueur effective de flambement K , pour les éléments poutre-colonne appartenant à des structures à nœuds déplaçables. Ce résultat constitue en lui-même un volet important de la solution, étant donné les approches empiriques qui à ce jour traitent de cette problématique.

En perspective d'un développement futur, il serait intéressant de compléter cette formulation, en considérant aux extrémités de l'élément poutre-colonne considéré, la présence de ressorts de rotation en torsion. Cela permettrait de généraliser cette formulation à l'analyse des structures tridimensionnelles.

Bibliographie

1. Adman R. and Afra H., “Exact Shape Functions of Beam Element for Elastic Stability Analysis”, Proceedings of The 17th ASCE Engineering Mechanics Conference, University of Delaware, Newark, DE, EM 2004, paper 39.
2. Adman R. and Afra H., “Analytical Solution of a Beam Element for Elastic Buckling Analysis”, Proceedings of The Seventh International Conference on Computational Structures Technology, Civil-Comp Press, UK, 2004, paper 249.
3. Adman R. and Afra H., “Imperfection’s Effect of Beam Element for Elastic Buckling Analysis”, Proceedings of the International Conference on Computational & Experimental Engineering & Science, Advances in Computational & Experimental Engineering & Science, Tech Science Press, Madeira, Portugal, 2004, pp. 1971-1976.
4. Adman R. and Afra H., “Exact shape functions of imperfect beam element for stability analysis”, Advances in engineering Software, Vol. 38, N°. 8-9, 2007, pp. 576-585.
5. Agbayani N. , Jayachandran P.and Sriram D., “Novel Design Algorithms for K Factor Calculation and Beam-Column Selection”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 119, No. 12, 1993, pp. 3630-3648.
6. Areiza-Hurtado M., Vega-Posada C., and Aristizábal-Ochoa J.D., “Second-Order Stiffness Matrix and Loading Vector of a Beam-Column with Semirigid Connections on an Elastic Foundation”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 131, No. 7, 2005, pp. 752-762.
7. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “K-Factor for Columns in any Type of Construction: Nonparadoxical Approach”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 4, 1994, pp. 1272-1290.
8. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Slenderness K Factor for Leaning Columns”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 10, 1994, pp. 2977-2991.
9. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Slenderness K Factor for Leaning Columns”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Discussion by Yura J.A., and LeMessurier W.J., 1997.
10. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Stability of Columns under Uniform Axial Load with Semirigid Connections”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 11, 1994, pp. 3212-3222.

Bibliographie

11. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Braced, partially braced and unbraced columns : complete set of classical stability equations”, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 4, No. 4, 1996, pp. 365-381.
12. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Story Stability of Braced, Partially Braced, and Unbraced Frames : Classical Approach”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 123, No. 6, 1997, pp. 799-807.
13. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Stability and Second-order Analyses of Frames with Semirigid Connections under Distributed Axial Loads”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 127, No. 11, 2001, pp. 1306-1315.
14. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Classical Buckling of Three-dimensional Multicolumn Systems under Gravity Loads”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 128, No. 6, 2002, pp. 613-624.
15. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Elastic Stability and Second-order Analysis of Three-Dimensional Frames : Effects of Column Orientation”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 129, No. 11, 2003, pp. 1254-1267.
16. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Large Deflection Stability of Slender Beam-Columns with Semirigid Connections: Elastica Approach”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 130, No. 3, 2004, pp. 274-282.
17. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Column Stability and Minimum Lateral Bracing: Effects of Shear Deformation”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 130, No. 10, 2004, pp. 1223-1232.
18. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Second-order axial force and midspan deflection in a simple supported beam axially restrained”, Engineering Structures, 2007, doi:10.1016/j.engstruct.2007.03.011.
19. Aristizabal-Ochoa J. Dario, “Large deflection and postbuckling behavior of Timoshenko beam–columns with semi-rigid connections including shear and axial effects”, Engineering Structures, Vol. 29, No. 6, 2007, pp. 991-1003.
20. Batoz J.L. and Dhatt G., “Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems”, Short communications, John Wiley, (1979) 0029-598 1/79/O814-1262.

Bibliographie

21. Chan S.L., “Geometric And Material Non-Linear Analysis of Beam-Columns And Frames Using The minimum Residual Displacement Method”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 26, 1988, pp.2657-2669.
22. Chan S.L., and Zhou Z.H., “Pointwise Equilibrating Polynomial Element for Nonlinear Analysis of Frames”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 6, 1994, pp. 1703-1717.
23. Chan S.L., and Zhou Z.H., “Stability analysis of semirigid steel scaffolding”, Engineering Structures, Vol. 17, No. 8, 1995, pp. 568-574.
24. Chan S.L., and Zhou Z.H., “Second-Order Elastic Analysis of Frames Using Single Imperfect Element per Member”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 121, No. 6, 1995, pp. 939-945.
25. Chan S.L., and Chui P.P., “A generalized design-based elastoplastic analysis of steel flames by section assemblage concept”, Engineering Structures, Vol. 19, No. 8, 1997, pp. 628-636.
26. Chan S.L., and Zhou Z.H., “On the development of a robust element for second-order ‘non-linear integrated design and analysis (NIDA)’ ”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 47, 1998, pp. 169-190.
27. Chan S.L., and Zhou Z.H., “Non-linear integrated design and analysis of skeletal structures by 1 element per member”, Engineering Structures, Vol. 22, 2000, pp. 246-257.
28. Chan S.L., and Gu J.X., “Exact Tangent Stiffness for Imperfect Beam-Column Members”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 9, 2000, pp. 1094-1101.
29. Chan S.L., and Gu J.X., “Exact Tangent Stiffness for Imperfect Beam-Column Members”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Discussion by Teh L.H., Hsiao K.M., White D.W., and Ziemian R.D., 2001.
30. Chan S.L., “Non-linear behaviour and design of steel structures”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 57, 2001, pp. 1217-1231.
31. Chan S.L., Shu G. , and Lü Z., “Stability analysis and parametric study of pre-stressed stayed columns”, Engineering Structures, Vol. 24, No. 1, 2002, pp. 115-124.

Bibliographie

32. Chan S.L., and Liu Y.P., “Limitation of effective length method and codified second-order analysis and design”, Steel and composite Structures, Vol. 5, No. 2-3, 2005, pp. 181-192.
33. Chan S.L., and Cho S.H., “Second-order analysis and design of angle trusses part I : Elastic analysis and design ”, Engineering Structures, Vol. 30, 2008, pp. 616-625.
34. Chen W.F., “Structural stability: from theory to practice”, Engineering Structures, Vol. 22, 2000, pp. 116-122.
35. Clarke M.J., and Hancock G.J., “A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analyses”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 29, 1990, pp.1365-1391.
36. Degertekin S.O., and Hayalioglu M.S., “Design of non-linear semi-rigid steel frames with semi-rigid column bases”, Electronic Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 4, 2004, pp. 1-16.
37. Demonceau J.F., Jaspart J.P., and Maquoi R., “Design of Composite Sway Building Frames for Global Instability”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 131, No. 6, 2005, pp. 641-653.
38. Demirtrass , “Classification of steel semirigid connections”, thesis Ph.d., Illinois Institute of Tecnology 2003.
39. Duan, L., and Chen W.F., “Effective Length Factors of Compression Members”, Structural Engineering Handbook, Ed. Chen Wai-Fah, 1999.
40. Eurocode.2, “Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings”, EN 1992-1-1:2004 (E).
41. Eurocode.3, “Design of steel structures- Part 1-1: General rules and rules for buildings”, DD ENV 1993-1-1:1992.
42. Eurocode.3, “Design of steel structures- Part 1-8: Design of joints”, BS EN 1993-1-8:2005.
43. Gantes C.J. , Mageirou G.E., “Improved stiffness distribution factors for evaluation of effective buckling lengths in multi-story sway frames”, Engineering Structures, Vol. 22, 2005, pp. 1113-1124.

Bibliographie

44. Geschwindner L.F. , “A Simplified Look at Partially Beams”, Engineering Journal, AISC, Second Quarter, 1991.
45. Geschwindner L.F. , and Disque R.O., “Flexible Moment Connections for Unbraced Frames Subject to Lateral Forces—A Return to Simplicity”, Engineering Journal, AISC, Second Quarter, 2005.
46. Girgin K., Ozmen G., and Orakdogan E., “Buckling lengths of irregular frame columns”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 62, 2006, pp. 605-613.
47. Hasan R., Kishi N., and Chen W.F., “A new nonlinear connection classification system”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 47, 1998, pp. 119-140.
48. Hayalioglu M.S., and Degertekin S.O., “Minimum cost design of steel frames with semi-rigid connections and column bases via genetic optimization”, Computers & Structures, Vol. 83, 2005, pp. 1849-1863.
49. Ioannidis G.I., and Raftoyiannis I.G., “A simplified nonlinear stability analysis of an imperfect rectangular two-bar frame”, Computational Mechanics, Vol. 35, 2005, pp. 127-133.
50. Ioannidis G.I., Raftoyiannis I.G., and Kounadis A.N., “A method for the direct evaluation of buckling loads of an imperfect two-bar frame”, Archive of Applied Mechanics, Vol. 74, 2005, pp. 299-308.
51. Kalaga S., and Adluri S.M.R. “Beam-columns with Finite Deflection”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 2, 2000, pp. 266-269.
52. Kishi N., and Chen W. F., “Data-base of steel beam-to-column connections”, Volume 1, Struct. Engrg. Report, CE-STR-86-26, Purdue University, West Lafayette, IN, 1986.
53. Kishi N., Hassan R., Chen W. F., and Goto Y., “Study of Eurocode 3 steel connection classification”, Engineering Structures, Vol. 19, No. 9, 1997, pp. 772-779.
54. Kishi N., Chen W. F., and Goto Y., “Effective Length Factor of Columns in Semirigid and Unbraced Frames”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 123, No. 3, 1997, pp. 313-320.
55. Kishi N., Chen W.F., Goto Y., and Komuro M., “Effective length factor of columns in flexibly jointed and braced frames”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 47, 1998, pp. 93-118.

Bibliographie

56. Kishi N., Chen W.F., Goto Y., and Komuro M., “Effective length factor of columns in flexibly jointed and braced frames”, Discussion by Essa H.S., Journal of Constructional Steel Research, 1998.
57. Kishi N., Ahmed A., Yabuki N., and Chen W.F. “Nonlinear finite element analysis of top- and seat-angle with double web-angle connections”, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 12, No. 2, 2001, pp. 201-214.
58. LeMessurier W.J., “A Practical Method of Second Order Analysis., Part 2-Rigid Frames”, Eng. J., AISC, Vol. 14, No. 2, 1977, pp. 49-67.
59. Lui E.M., and Chen W. F., “Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames”, Engineering Structures, Vol. 8, 1986, pp. 106-118.
60. Lui, E.M., “A Novel Approach for *K*-Factor Determination.”, Eng. J., AISC, Vol. 29, N°. 4, 1992, pp. 150-159.
61. Livesley R.K., and Chandler D.B., “Stability Functions for Structural Frameworks”, Manchester University Press, 1956.
62. Mageirou G.E, and Gantes C.J., “Buckling strength of multi-story sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 62, 2006, pp. 893-905.
63. Nethercot D.A., “Frame structures: global performance, static and stability behaviour General Report”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 55, 2000, pp. 109-124.
64. Nethercot D.A., “Connection research and its impact on practice during the Dowling era”, Journal of Constructional Steel Research, 2006, doi:10.1016/j.jcsr.2006.06.008.
65. Özmen G., and Girgin K., “Buckling lengths of unbraced multi-storey frame columns”, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 19, No. 1, 2005, pp. 55-71.
66. Raftoyiannis I.G., “The effect of semi-rigid joints and an elastic bracing system on the buckling load of simple rectangular steel frames”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 61, 2005, pp. 1205-1225.
67. Silvestre N., and Camotim D., “Elastic buckling and second-order behaviour of pitched-roof steel frames”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 63, 2007, pp. 804-818.

Bibliographie

68. Saffari H., Rahgozar R., and Jahanshahi R. “An efficient method for computation of effective length factor of columns in steel gabled frame with tapered members”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 64, 2008, pp. 400-406.
69. Smyrell G., “Approximate Formulas for Effective Length of Steel Columns”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 9, 1994, pp. 2793-2801.
70. Teh L.H., “Cubic beam elements in practical analysis and design of steel frames”, Engineering Structures, Vol. 23, 2001, pp. 1243-1255.
71. Tong G.S., Xing G.R., “Determination of buckling mode for braced elastic-plastic frames”, Engineering Structures, Vol. 29, 2007, pp. 2487-2496.
72. Tong G.S., Wang J.P., “Column effective lengths considering inter-story and inter-column interactions in sway-permitted frames”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 62, 2006, pp. 413-423.
73. Trahair N.S., and Chan S.L., “Out-of-plane advanced analysis of steel structures”, Engineering Structures, Vol. 25, 2003, pp. 1627-1637.
74. Surovek-Maleck E. and White D.W., “Alternative Approaches for Elastic Analysis and Design of Steel Frames. I: Overview”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 130, 2004, pp. 1186-1196.
75. Timoshenko S.P., “Théorie de la stabilité élastique”, édition Dunod, 2nd édition, 1966.
76. van Keulen D.C., Nethercot D.A., Snijder H.H., and Bakker M.C.M., “Frame analysis incorporating semi-rigid joint action: Applicability of the half initial Secant stiffness approach”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59, 2003, pp. 1083-1100.
77. Williams F.W., “Simple design procedures for unbraced multi-storey frames”, Proceedings Instn Ciu. Engrs, Part 2, Vol. 63, 1977, pp. 475-479.
78. Williams F.W., “Simple elastic critical load and effective length calculations for multistorey rigid sway frames”, Proceedings Instn Ciu. Engrs, Part 2, Vol. 89, 1990, pp. 279-287.

Bibliographie

79. Wood R.H., “Effective lengths of columns in multi-storey buildings. Part 1: Effective lengths of single columns and allowances for continuity, The Structural Engineer, Vol. 52, No. 7, 1974. pp. 235-244.
80. Wood R.H., “Effective lengths of columns in multi-storey buildings. Part 2: Effective lengths of multiple columns in tall buildings with sidesway, The Structural Engineer, Vol. 52, No. 7, 1974. pp. 295-302.
81. Wood R.H., “Effective lengths of columns in multi-storey buildings. Part 3: Features which increase the stiffness of tall frames against sway collapse, and recommendations for designers, The Structural Engineer, Vol. 52, No. 7, 1974. pp. 341-346.
82. Wood R.H., “Effective lengths of columns in multi-storey buildings, Discussion, The Structural Engineer, Vol. 53, No. 6, 1975. pp. 235-241.
83. Xu L., “The buckling loads of unbraced PR frames under non-proportional loading”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 58, 2002, pp. 443-465.
84. Yau C.Y., and Chan S.L., “Inelastic and Stability Analysis of Flexibly Connected Steel Frames by Springs-in-series Model”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 10, 1994, pp. 2803-2819.