

République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement supérieure et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène

Faculté de mathématique



**Thèse présentée pour l'obtention d'un diplôme de doctorat en
mathématiques**

Spécialité : Géométrie et Systèmes Dynamiques

par

Esmaa Bekkara

Intitulé de la thèse

Géométrie de lumière

Soutenue publiquement, le : 26-06-2010 ; devant le jury composé de :

Mr K. Betina. Professeur à l'USTHB	Président
Mr A. Kessi. Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mr S. Djebali Professeur à l'ENS/Kouba	Examineur
Mr N. Bensalem Professeur à l'univ Setif	Examineur
Mr M. Belkhalifa Maitre de conférence à l'univ Mascara	Examineur
Mr B. Abaci Maitre de conférence à l'USTHB	Examineur
Mr M. Deffaf Maitre de conférence à l'USTHB	Invité

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Monsieur Arezki Kessi Professeur à l'USTHB, pour son soutien et son aide le long de la préparation de cette thèse.

Je remercie également :

Monsieur K. Bétina Professeur à l'USTHB de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Monsieur S. DJEBALI Professeur USTHB, Monsieur N. BENSALÉM Professeur Univ Sétif, Monsieur M. BELKHALFA maître de conférence/A univ Mascara, Monsieur B. ABBACI maître de conférence/A USTHB et Monsieur M. DEFFAF maître de conférence/A USTHB, pour avoir accepté d'évaluer mon travail et faire partis du jury.

Je ne manquerai pas de remercier Monsieur Abdelghani ZEGHIB directeur de recherche CNRS, ENS Lyon, et Monsieur Charles FRANCES maître de conférence Univ Paris 11, pour leurs collaborations scientifiques, ainsi que toute l'équipe du laboratoire de topologie et systèmes dynamiques de l'université Paris 11.

Enfin je tiens à remercier tout les professeurs, organisateurs et enseignants, des écoles de géométrie, qui nous ont permis d'établir des liens scientifiques avec de grands chercheurs, et ont contribué grâce à ces écoles à notre formation en géométrie.

Table des matières

Introduction	5
Chapitre 1. Espaces vectoriels de Lumière	13
1. Généralités sur les formes bilinéaires symétriques	13
2. Produits pseudo-Euclidiens	14
3. Produits dégénérés	16
4. Produits de lumière	18
Chapitre 2. Variétés de lumière	21
1. Rappel sur les variétés pseudo-riemanniennes	21
2. Variétés de lumière	22
3. Objets géométriques de lumière	23
4. Isométries de lumière	26
5. Quelques exemples de groupes d'isométries de variétés de lumière	26
Chapitre 3. Espaces Homogènes de lumière	31
1. Généralités sur les espaces homogènes	31
2. Espaces homogènes pseudo-riemanniens	32
3. Espaces homogènes de lumière	33
4. Les espaces $SL(2, \mathbb{R})$ -homogènes de lumière	34
Chapitre 4. Dynamique des groupes de Lie semisimples sur les variétés de lumière	39
1. Généralités sur les algèbres de Lie semisimples	39
2. Quelques décompositions des algèbres de Lie semisimples	40
3. Décomposition KAK d'un groupe de Lie semisimple	41
4. Action isométrique d'un groupe de Lie semisimple sur une variété de lumière	41
5. Action isométrique non-propre d'un groupe de Lie semisimple	42
Chapitre 5. Preuves des théorèmes de classification	49
1. Réduction au cas d'une action transitive	49

2. Cas d'un groupe de Lie simple	50
3. Cas d'un groupe semisimple	53
4. Cas où la variété est compacte	58
5. Variétés sous-Lorentziennes	59
Chapitre 6. Actions des groupes résolubles sur les variétés compactes	63
1. Quelques exemples	64
2. Preuves des théorèmes	65
Bibliographie	69

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'introduction et l'étude d'une structure peu commune qu'on appellera structure de lumière (lightlike). Une variété lisse est dite de lumière, si elle est munie d'un tenseur symétrique g , de type $(0, 2)$ dont la signature est constante, induisant sur chaque espace tangent une forme bilinéaire positive de radical unidimensionnel (i.e. dans une base adéquate d'un quelconque espace tangent, le radical est de dimension 1 et il existe $n - 1$ vecteurs positifs).

On essaiera le long de cette thèse d'introduire des objets géométriques attachés à cette structure, mais surtout d'étudier sa rigidité dans certains cas.

On rencontre souvent ce type de variétés plongées dans des variétés pseudo-riemanniennes. En effet, une métrique pseudo-riemannienne sur une variété donnée M , peut bien dégénérer sur des sous-variétés.

Les variétés pseudo-riemanniennes, les plus confortables pour les sous-variétés de lumière, sont peut être, les variétés lorentziennes, car c'est là, aussi bien sur le plan mathématique, que sur le plan physique, l'étude des sous-variétés de lumière trouve son grand intérêt.

Sur le plan physique ; les variétés lorentziennes jouent un rôle principal en relativité générale, car elles fournissent des modèles de l'espace-temps (espace d'événements). En chaque espace tangent d'une variété lorentzienne, on définit un cône invariant, appelé cône de lumière car les trajectoires des impulsions de lumière d'un point p (les photons) sont tangentes à ce cône. Les hypersurfaces de lumière sont alors les hypersurfaces tangentes à ce champ de cône. Sur une variété lorentzienne, on peut développer une notion de causalité (relation de cause effet), c'est une sorte d'ordre chronologique entre les événements (i.e. les points de la variété lorentzienne). On peut ainsi parler du futur et du passé d'un point, qui sont représentés par une partie connexe du cône époiné (i.e. le cône privé de l'origine). Le bord du cône solide, qui est de lumière, donne lieu à des modèles d'horizons (limite de ce qu'on peut atteindre chronologiquement). Par exemple : horizons de Cauchy,

horizons d'événements, bord des trous noirs... Cette modélisation est mise au point dans les travaux de nombreux mathématiciens physiciens dont on cite particulièrement : S.Hawking, Ellis, G.F.R (The large scale structure of space time), S.Hawking et R.Penrose (The nature of spacetime). Les travaux de S.Chandrasekhar (The mathematical theory of black holes), les travaux de l'équipe C.Misner, K.Thorpe et J.A.Wheeler (Gravitation), et les travaux de P.Chrusciel (On rigidity of analytic black holes).

En électromagnétisme : Un opérateur d'onde définit une classe distinguée d'hypersurfaces appelées surfaces caractéristiques de l'opérateur. Elles coïncident exactement avec la classe des variétés de lumière. On peut trouver plus de détails sur cette modélisation dans les travaux de K.L.Duggal (Electromagnetic and plane wave solutions of 3-dimensional lightlike hypersurface 1995).

Ce grand intérêt physique a motivé et amené plusieurs mathématiciens à travailler sur la classification des sous-variétés dégénérées des variétés pseudo-riemanniennes (particulièrement lorentziennes). D.Kupeli (Singular Semi Riemannian geometry 1996) a introduit une notion de variété dégénérée et a défini quelques objets géométriques attachés (tels que le générateur nul, l'espace pseudo riemannien canonique associé à une variété dégénérée...) et sous une condition assez restrictive d'existence de formules de Koszul (existence d'une connexion induite sur la sous variété dégénérée), il est arrivé à une classification des sous variétés en un produit tordu. K.L.Duggal et A Bejancu (Lightlike Submanifolds of Semi Riemannian Manifolds and Applications 1996) se sont consacrés à la définition de connexions affines sur ce types de sous variétés, et les conséquences qui en découlent. Un problème majeur persiste cependant : ils n'ont pas pu démontrer l'indépendance de la connexion définie du choix du système de coordonnées sur la sous variété. Du coup cette connexion ne reste pas liée de manière intrinsèque à la géométrie de ces sous-variétés. Une approche différente sur la normalisation de ces sous-variétés est menée dans les travaux de M.Akivis et V.Goldberg (On some methods of construction of invariant normalisations of lightlike hypersurfaces 2000) en utilisant le fait qu'une hypersurface dégénérée est préservée par la structure conforme, ils ont utilisé ce principe pour déceler les hypersurfaces dégénérées dans l'espace de de Sitter (The geometry of lightlike hypersurfaces of the de Sitter space). Une motivation "purement mathématique" pour la classification des variétés lorentziennes à groupe d'isométries semisimple,

a amené M. Deffaf, K. Melnick et A. Zeghib (Actions of non-compact semi-simple groups on Lorentz Manifolds) à étudier les sous variétés de lumière d'une variété lorentzienne, où ils ont pu démontrer qu'une variété lorentzienne d'un groupe d'isométries semisimple admet nécessairement une orbite de lumière, qui est isométrique à un produit tordu du cône isotrope par une variété riemannienne. L'étude de cette orbite dégénérée leur a permis de cerner le groupe d'isométries de la variété ambiante et de donner une description locale de la variété.

Avec plus de recul sur l'étude de sous-variétés de lumière S d'une variété pseudo-Riemannienne M , on arrive au constat que le problème majeur dans leur étude est qu'il n'existe pas de projection canonique du fibré tangent TM sur le sous fibré TS associé à S . Ceci vient du fait qu'en tout point p de S , l'espace tangent au point p à S rencontre son orthogonal dans l'espace tangent à M en un sous-espace non-trivial, contrairement aux sous variétés pseudo-riemanniennes sur lesquelles une telle projection existe et permet donc de normaliser et de définir de manière canonique des structures héritées de la variété mère (connexion induite, opérateur de Weingarten, équations de Gauß et Codazzi).

Puisqu'une sous variété dégénérée a peu de chance d'hériter des objets géométriques de la variété mère (sauf sous des conditions fortes), libérons nous du cadre ambiant et étudions le cadre absolu de variétés de lumière.

Le challenge est de mettre au point des objets géométriques intrinsèques qui permettent de reconnaître et de classifier les variétés de lumière, mais surtout de trouver une place pour cette structure dans le dictionnaire des structures géométriques. Pour cela il faut étudier sa "rigidité". Une structure géométrique rigide en termes simplifiés est une structure préservée par un groupe d'isométries pas trop grand (compact par exemple). Ceci s'exprime en termes moins précis en disant qu'il y a une certaine rigidité dans la comparaison des objets qui vivent sur la variété (i.e. certains objets n'ont pas le même statut). Les structures riemanniennes (plus généralement pseudo-riemanniennes) donnent un exemple fondamental de structures rigides. (On remarque de ce point de vue que la structure dégénérée est proche de la structure riemannienne du moment que la métrique reste positive).

L'étude de la rigidité revient alors à l'étude et la classification des groupes d'isométries qui préservent la structure géométrique. La stratégie globale consiste à considérer une classe de groupe de Lie G agissant sur une variété M , en préservant une métrique de lumière et étudier ses orbites en décrivant

les sous groupes d'isotropie. Le problème se transforme d'un calcul sur les fibrés tangents (à l'aide des formes extérieures) à un calcul relevant de la théorie des groupes de Lie où on pourra profiter des résultats des larges travaux investis sur leur classification, particulièrement les groupes semi simples, (Travaux de W.Knapp). Après avoir cerné le groupe d'isométries G , on revient à l'étude des orbites qui ne sont autres que des espace homogènes i.e. des variétés quotients de G par des sous-groupes fermés. Enfin, on recolle les orbites, car toute variété sur laquelle un groupe d'isométries agit, n'est autre que la réunion de ses orbites, et les orbites ne sont autres que des espaces homogènes. On espère enfin conclure par une description de la variété. Cette approche est motivée par les travaux de M.Gromov (Rigid transformation groups, Partial differential relations) et les travaux de A. Zeghib (On affine actions of Lie groups 1996, On gromov's theory of rigid transformation groups : a dual approach 1998). L'idéal serait bien sûr de trouver des réponses au cas général d'un groupe de Lie quelconque sur une variété quelconque, mais cela nous est encore peu accessible. Par contre on peut se restreindre à des classes particulières comme la classe des groupes de Lie semisimples. C'est une démarche naturelle pour le traitement du cas général, car tout groupe de Lie admet une jolie décomposition dite décomposition de Levi en un produit semi-direct d'un sous-groupe résoluble par un sous-groupe semisimple. Ainsi la classe des groupes de Lie semisimples avec celle des résolubles sont les briques principales d'un groupe de Lie quelconque. Leur étude individuelles ouvre la porte à l'étude du cas général. Les résultats principaux de cette thèse concernent la classification des variétés de lumière admettant un groupe d'isométries semisimple qui agit non-proprement.

On a le théorème :

THÉORÈME DE LIOUVILLE POUR LA GÉOMÉTRIE DE LUMIÈRE. *Pour $n \geq 3$, toute isométrie de Co^n appartient à $O^+(1, n)$. Cela est vrai même localement pour $n \geq 4$: toute isométrie entre deux ouverts connexes de Co^n est la restriction d'un élément de $O^+(1, n)$.*

- *Pour $n = 3$, le groupe des isométries locales est en bijection avec le groupe des transformations conformes locales de \mathbf{S}^2 .*
- *pour $n = 2$, Il n'y a pas de rigidité, même globalement, puisque pour toute isométrie du cercle correspond une isométrie de Co^2 .*

Ce théorème montre que pour $n \geq 3$, Co^n est un espace homogène de lumière dont le groupe d'isométrie est $O^+(1, n)$.

Avant d'énoncer les résultats qui généralisent ce dernier, notons que, deux métriques de lumière h et h' sur une variété M sont dites **homothétiques** si $h = \lambda h'$ pour un réel $\lambda > 0$. Un groupe de Lie agit **localement fidèlement** sur M si le noyau de son action est un sous-groupe discret.

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe de Lie semisimple non-compact, de centre fini, agissant localement fidèlement, isométriquement **non-proprement** sur une variété de lumière (M, h) . Supposons que G n'admet aucun facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$. Alors, à revêtement fini près, on a :*

- $G = H \times H'$, où H est localement isomorphe à $O(1, n)$.
- G admet une orbite homothétique à un produit métrique $Co^n \times N$, où N est une variété riemannienne H' -homogène. L'action de $H \times H'$ sur $Co^n \times N$ est l'action par produit.

En s'inspirant de ce théorème, on a aussi traité le cas où G admet un facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, quand l'action est transitive. Le théorème suivant peut être vu comme une réciproque du théorème 2.19 :

COROLLAIRE 2 *Soit G un groupe de Lie semisimple non-compact de centre fini, agissant localement fidèlement, isométriquement, transitivement et non-proprement sur une variété de lumière (M, h) , i.e. M est un espace homogène de lumière G/I , de groupe d'isotropie non-compact I . Alors à revêtement fini près, G est isomorphe à $O(1, n) \times H'$, où $n \geq 2$ et H' est semisimple.*

- Si $n \neq 2$, à revêtement fini près, la variété M est homothétique à un produit métrique $Co^n \times N$, où N est un H' -homogène espace riemannien.
- Si $n = 2$, à revêtement fini près, M est soit homothétique à un produit métrique $Co^1 \times N$ comme ci-dessus, soit M est un produit topologique $Co^2 \times N$, et il existe une famille de dimension finie de produits G -homogènes de lumière, qui sont à homothétie près, en bijection avec l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^{\dim N}$. À homothétie près, une telle h induit sur Co^2 , la métrique de lumière standard et une métrique riemannienne H' -homogène sur N .

Dans tout les cas, l'action de G sur M est l'action du produit.

La condition de la non-propreté de l'action est essentielle dans le théorème précédent. Si on l'enlève, rien ne marchera plus. En effet on peut facilement trouver des exemples en considérant un groupe de Lie L et un produit de lumière sur son algèbre de Lie \mathfrak{l} . En translatant cette métrique le long de L par multiplication à gauche, on construit une métrique de lumière pour laquelle l'action de L est isométrique et propre.

Il n'est pas clair d'exhiber une sorte de rigidité globale pour des métriques de lumière, qui sont à priori des structures géométriques non rigides (voir §5.1.1). Ici, dans un certain sens, c'est la condition algébrique de la semi-simplicité qui donne lieu à cette rigidité. Quand la variété M est compacte, il n'y a qu'un seul groupe simple qui peut agir isométriquement comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. *Soit G un groupe simple non-compact de centre fini, agissant isométriquement sur une variété compacte de lumière (M, h) . Alors G est un revêtement fini de $PSL(2, \mathbb{R})$ et toutes les orbites de G sont fermées, de dimension 1 et de lumière.*

Cette thèse se divise en six chapitres :

- Premier chapitre : On introduit la notion linéaire d'un produit de lumière, où l'on énonce une généralisation du théorème d'existence de base orthonormée pour une forme dégénérée quelconque. On introduit aussi la notion de groupe quasi-orthonormal.

- Deuxième chapitre : On y introduit la définition d'une variété de lumière avec plein d'exemples. On définit les objets géométriques associés, et on donne aussi la preuve du théorème de Liouville qui donne les isométries du cône de lumière.

- Troisième chapitre : Il est consacré à l'étude approfondie des espaces homogènes, qui est centrale dans notre approche. On y introduit aussi des objets liés à la structure de lumière invariante, et on y démontre surtout un théorème de classification des espaces $SL(2, \mathbb{R})$ -homogènes.

- Quatrième chapitre : Il contient des rappels sur les groupes de Lie semisimples et des compléments dans le cas particulier où le groupe préserve une structure de lumière quand il agit sur une variété. Ce chapitre est axé

sur l'étude de la dynamique non-propre des groupes semisimples sur une variété de lumière.

- Cinquième chapitre : Il constitue l'aboutissement de toutes les constructions le long de la thèse, on y trouvera les démonstrations des théorèmes de classification dans le cas d'un groupe semisimple.

- Sixième chapitre : C'est une introduction à la classification des variétés de lumière compactes, sous l'action d'un groupe résoluble. On y trouvera des exemples de variétés de lumière compactes, et la démonstration d'un théorème de classification dans le cas d'un groupe d'isométries nilpotent.

Les résultats de cette thèse ont fait l'objet de deux publications (en collaboration avec C. Frances et A. Zeghib) :

- "On lightlike geometry : isometric actions, and rigidity aspects", Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Ser. I 343 (2006) 317321

- "Actions of semisimple Lie groups preserving a degenerate Riemannian metric", American Mathematical society, Volume 362, Number 5, Pages 24152434.

Espaces vectoriels de Lumière

Dans l'étude des structures géométriques sur une variété M , il est essentiel de commencer par manipuler le cas linéaire, i.e. les structures induites sur les espaces tangents de la variétés. En effet, ce cas contient l'essentiel des renseignements infinitésimaux géométriques et dynamiques sur la structure étudiée. Il constitue aussi un cadre de tests synthétiques des résultats géométriques prétendus, des tests qui restent souvent généralisables sur la variété. Pour cela on a jugé utile de présenter un chapitre assez élémentaire portant sur les notions de base sur les produits dégénérés et particulièrement les produits de lumière. Ce chapitre sert aussi à fixer quelques notations qui seront souvent utilisées le long de cette thèse.

Dans tout ce qui suit E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n .

1. Généralités sur les formes bilinéaires symétriques

Une forme bilinéaire symétrique Φ est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , linéaire par rapport à chacune de ses variables et vérifie pour tout $v, w \in E$, $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$.

Sa forme quadratique associée est la fonction q_Φ sur E , définie par $q_\Phi(v) = \Phi(v, v)$. Elle est reliée à Φ par l'identité de polarisation : $\Phi(v, w) = \frac{1}{4} [q_\Phi(v+w) - q_\Phi(v-w)]$. La donnée d'une forme bilinéaire symétrique est équivalente à la donnée de sa forme quadratique associée.

Par abus de langage on appellera norme associée à Φ , la quantité $\|v\|_\Phi = \sqrt{|q_\Phi(v)|}$.

Si on se fixe une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E , alors on associe à Φ la matrice symétrique $M_\Phi^B = (\Phi_{ij}) = (\Phi(v_i, v_j))$. Si $v = \sum v_i e_i$ et $w = \sum w_i e_i$, cette matrice détermine entièrement la forme bilinéaire via l'égalité.

$$\Phi(v, w) = {}^t v M_\Phi^B w = \sum \Phi_{i,j} v_i w_j$$

Deux vecteurs v, w sont dit orthogonaux ssi $\Phi(v, w) = 0$, le radical (appelé aussi noyau) de la forme, noté Rad_Φ est le sous espace vectoriel des vecteurs

orthogonaux à tous les éléments de E , i.e.

$$\text{Rad}_\Phi = \{v \in E, \Phi(v, w) = 0, \forall w \in E\}$$

Une forme bilinéaire symétrique est dite non-dégénérée ssi son radical est nul, elle est dite dégénérée si son radical est non-trivial.

Une forme bilinéaire symétrique est dite positive (resp. négative) ssi $\forall v \in E, \Phi(v, v) > 0$.

DÉFINITION 1.1. *Soit $v \in E$, on dit que :*

1- v est positif (on dit aussi de type espace) ssi $\Phi(v, v) > 0$

2- v est négatif (on dit aussi de type temps) ssi $\Phi(v, v) < 0$

3- v est isotrope (on dit aussi de type lumière) ssi $\Phi(v, v) = 0$

DÉFINITION 1.2 (Isométrie). *Soit E (resp. F) un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique Φ (resp. Ψ). Une bijection f de E vers F est dite une isométrie si elle vérifie pour tout $v, w \in E$*

$$\Phi(v, w) = \Psi(f(v), f(w))$$

Dans ce cas on dit que (E, Φ) et (F, Ψ) sont isométriques. Une isométrie de (E, Φ) sur lui même est dite isométrie de (E, Φ) (parfois par abus de E tout court).

Il est clair que l'ensemble de toutes les isométries muni de la loi de composition est un groupe, il est appelé groupe d'isométrie et noté $Isom(E, \Phi)$

2. Produits pseudo-Euclidiens

DÉFINITION 1.3 (Produit pseudo-Euclidien). *On appelle produit pseudo-Euclidien toute forme bilinéaire non-dégénérée.*

EXEMPLE 1.4 (Produit euclidien). *Sur \mathbb{R}^n on définit le produit $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, ce produit est appelé produit scalaire euclidien canonique sur \mathbb{R}^n . Plus généralement tout produit positif sur espace vectoriel E est appelé produit scalaire Euclidien.*

EXEMPLE 1.5 (Produit lorentzien sur \mathbb{R}^n). *Sur \mathbb{R}^n on définit le produit $q(x) = -x_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2$. Ce produit est appelé produit scalaire lorentzien. \mathbb{R}^4 muni d'un tel produit est appelé espace de Minkowski.*

produit scalaire pseudo-euclidiens de même signature. Il suffit de prendre n'importe quelle application linéaire qui envoie une base orthonormée du premier produit vers une base orthonormée du second produit.

Ainsi les groupes d'isométrie des produits pseudo-Euclidiens de même signature sont conjugués, ce qui explique l'intérêt à étudier les produits sous leur forme normale.

DÉFINITION 1.10 (Groupe (semi-)orthogonal). *Le groupe orthogonal $O(p, q)$ (avec $p + q = n$) est le groupe des isométries linéaires (groupe des matrices) du produit pseudo-euclidien $q_{\Phi}(v) = \sum_{i=1}^p v_i^2 - \sum_{j=p+1}^n v_j^2$ (produit pseudo euclidien normale) sur \mathbb{R}^n .*

PROPOSITION 1.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

- 1- $A \in O(p, q)$.
- 2- Les vecteurs colonnes de A sont orthonormés.
- 3- Les vecteurs lignes de A sont orthonormés.
- 4- ${}^t A I_{p,q} A = I_{p,q}$

3. Produits dégénérés

On verra dans cette section que tous les résultats concernant les produits pseudo-Euclidiens, se généralisent de façon naturelle, aux produits dégénérés (formes bilinéaires symétriques dégénérées).

EXEMPLE 1.12. *Sur \mathbb{R}^4 muni de sa base canonique, les produits suivants sont dégénérés :*

$$q_1(x) = \sum_{i=1}^3 x_i^2,$$

$$q_2(x) = \sum_{i=1}^2 x_i^2,$$

$$q_3(x) = x_1^2,$$

$$q_4(x) = x_1^2 - x_2^2,$$

Les dimensions de leurs radicales sont respectivement 1, 2, 3 et 2.

DÉFINITION 1.13 (Cône isotrope). *L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé cône isotrope du produit dégénéré.*

DÉFINITION 1.14 (Famille (quasi-)orthonormée). *Soient Φ un produit dégénéré sur E , $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_m)$ une famille de vecteurs de E . On dit que la*

famille \mathcal{F} est orthonormée ssi

$$\begin{aligned}\Phi(e_i, e_i) &= \pm 1 \text{ où } \Phi(e_i, e_i) = 0 \\ \Phi(e_i, e_j) &= 0 \quad i \neq j\end{aligned}$$

THÉORÈME 1.15 (Existence de base orthonormée). *Tout produit dégénéré admet une base orthonormée.*

DÉMONSTRATION. Soit Φ un produit dégénéré, Rad_Φ son noyau, $l = \dim Rad_\Phi$, r_1, \dots, r_l une base de Rad_Φ , et F un supplémentaire de Rad_Φ alors

$$E = Rad_\Phi \oplus F$$

La forme bilinéaire Φ restreinte à F est nécessairement non dégénérée, sinon F rencontre Rad_Φ . Ainsi F muni de la restriction du produit est un espace pseudo-Euclidien, et il a été établi avant qu'un tel espace admet une base orthonormée, $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$. Ainsi la base $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q, r_1, \dots, r_l\}$ est une base orthonormée de Φ . ■

PROPOSITION 1.16 (Signature d'un produit dégénéré). *Soit Φ un produit dégénéré sur E , toutes les bases orthonormées de Φ ont le même nombre p (resp. q, l) de vecteurs positifs (resp. isotropes, négatifs). Le triplet (p, q, l) est appelé signature du produit dégénéré. l est exactement la dimension du noyau du produit.*

REMARQUE 1.17. 1-La matrice associée à un produit dégénéré par rapport à une base orthonormée notée $I_{p,q,l}$ est de la forme :

$$I_{p,q,l} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{p \times p} & & & & & \\ & 0 \cdots 0 & & & & 0 \\ & & \overbrace{\begin{matrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix}}^{q \times q} & & & \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2- Soit B une base orthonormée pour un produit dégénéré Φ , dont les premiers p vecteurs sont positifs et les q seconds vecteurs sont négatifs et les l derniers vecteurs sont isotrope. Soit $v = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q, l_1, \dots, l_l)$

dans cette base alors

$$q_{\Phi}(v) = \sum_{i=1}^p v_i^2 - \sum_{j=1}^q w_j^2$$

cette forme s'appelle : écriture normale du produit dégénéré.

3- Un produit pseudo-Euclidien est de signature $(p, q, 0)$.

4- Une isométrie d'un produit dégénéré Φ sur E , envoie base orthonormée sur base orthonormée.

Comme c'était le cas des produits pseudo-Euclidiens, cette remarque montre que les produits dégénérés de même signature sont équivalents du moment où ils ont une écriture identique dans des bases orthonormées, on peut aisément définir une isométrie entre deux produits dégénérés de même signature. Il suffit de prendre n'importe qu'elle application linéaire qui envoie une base orthonormale du premier produit vers une base orthonormale du second produit.

Ainsi les groupes d'isométries des produits dégénérés de même signature sont conjugués, ce qui explique encore une fois, l'intérêt à étudier les produits dégénérés sous leur forme normale.

DÉFINITION 1.18 (Groupe (quasi-)orthogonal). *Le groupe orthogonal $O(p, q, l)$ (avec $p+q+l = n$) est le groupe des isométries linéaires (groupe des matrices) du produit dégénéré : $q_{\Phi}(v) = \sum_{i=l}^{l+p} v_i^2 - \sum_{j=l+p+1}^{p+q} v_j^2$ (produit dégénéré normal) sur \mathbb{R}^n .*

PROPOSITION 1.19. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1- $A \in O(p, q, l)$.
- 2- Les vecteurs colonnes de A sont orthonormés.

4. Produits de lumière

4.1. Définitions.

DÉFINITION 1.20. *Un produit de lumière est une forme bilinéaire symétrique, positive, dont le radical est de dimension 1.*

EXEMPLE 1.21. *Sur \mathbb{R} le seul produit de lumière est le produit nul.*

EXEMPLE 1.22. Sur \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique, le produit $q(x, y) = x^2$ est de lumière

EXEMPLE 1.23. Sur \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique, le produit $q(x, y, z) = x^2 + z^2$ est de lumière (le radical étant l'axe des y)

EXEMPLE 1.24. Plus généralement, Sur \mathbb{R}^n muni de sa base canonique, le produit $\sum_{i=2}^n x_i^2$ est de lumière (le radical étant l'axe engendré par e_1)

Ce type de produits est assez proche des produits Euclidiens, du moment où il reste positif. Comme application des résultats précédents portant sur les produits dégénérés, il est établi qu'un tel produit admet une base quasi orthonormée, contenant un vecteur isotrope engendrant le radical, et le reste des vecteurs est de norme 1. La signature d'un tel produit est $(p, 0, 1)$. Pour ne pas encombrer la notation on note cette signature simplement par $(p_+, 0)$ (où $p = n - 1$), le groupe quasi orthogonal d'un produit de lumière sera à son tour, noté $O(p_+, 0)$.

Un produit de lumière jouit de propriétés particulières par rapport aux autres produits dégénérés. Ces propriétés permettent de l'appivoiser, afin d'en faire une structure géométrique. On en trouvera dans la proposition suivante quelques propriétés importantes.

PROPOSITION 1.25. Soit Φ un produit de lumière sur E alors

- 1- $\forall v \in E, q_\Phi(v) \geq 0$
- 2- $\dim \text{Rad}_\Phi = 1$
- 3- v isotrope ssi $v \in \text{Rad}_\Phi$

4.2. Groupe d'isométries d'un produit de lumière. Le calcul explicite du groupe d'isométries des produits de lumière est fondamental dans notre étude. Notamment, le groupe linéaire, sa forme matricielle ainsi que ses propriétés servent énormément dans le calcul infinitésimal sur une variété.

4.2.1. *Groupe quasi-orthonormal* $O(p_+, 0)$. Calculons explicitement le groupe des isométries linéaires du produit de lumière $\sum_{i=2}^n x_i^2$

Soit $A = (a_{ij}) \in O(p_+, 0)$. Les vecteurs colonnes de A sont orthonormés, ce qui implique que le vecteur (a_{i1}) est isotrope donc

$$(a_{i1}) = \lambda e_1 = (\lambda, 0, \dots, 0) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

De plus, pour tout $j, j' \in \{2, \dots, n\}$

$$\sum_{i=2}^n a_{ij}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^n a_{ij} a_{ij'} = 0$$

ceci implique que la matrice carrée $(a_{ij})_{i,j>1}$ est une matrice orthogonale par rapport au produit euclidien de \mathbb{R}^n , ainsi $(a_{ij})_{i,j>1} \in O(n-1)$. Alors

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{avec } B \in O(n-1)$$

Il est facile de montrer que toute matrice de cette forme est une isométrie (il suffit de remarquer que ses vecteurs colonnes sont orthogonaux). Ainsi on a

$$O(n-1_+, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \\ 0 & B \end{pmatrix}, \text{ avec } B \in O(n-1) \right\}$$

Ce groupe s'identifie à $\mathbb{R}^n \times O(n-1)$.

Il est bien clair que la direction isotrope est une valeur propre de toutes les matrices de $O(n-1_+, 0)$, réciproquement on a :

PROPOSITION 1.26. *Soit β une valeur propre de $A \in O(p_+, 0)$ différente de ± 1 , alors tout vecteur propre associé à β est isotrope.*

DÉMONSTRATION. Soit β une valeur propre réelle de $A \in O(p_+, 0)$, soit x une valeur propre non nulle associée, alors

$$\Phi(A(x), A(x)) = \Phi(x, x)$$

ce qui implique que

$$\Phi(\beta x, \beta x) = \beta^2 \Phi(x, x) = \Phi(x, x)$$

donc

$$(1 - \beta^2) \Phi(x, x) = 0$$

alors soit $\beta = \pm 1$, sinon $\Phi(x, x) = 0$, ce qui donne le résultat. ■

CHAPITRE 2

Variétés de lumière

Avant d'introduire la notion de variété de lumière, mettons de la lumière sur quelques structures géométriques, qui l'ont précédé et qui justifient "dans un sens" son existence. D'abord la géométrie riemannienne, celle-ci a trouvé son grand intérêt dans les travaux du prince Gauß (1827) sur les surfaces de \mathbb{R}^3 . Ce dernier a pu démontrer que la géométrie intrinsèque de telles surfaces est entièrement codée par la donnée du produit scalaire sur l'espace tangent en tout point de M . Riemann (1854) lui ne voyait aucun inconvénient de généraliser les résultats (et les concepts) de Gauß à des dimensions supérieures. Un peu plus tard, la théorie de la relativité s'impose. Un joli modèle mathématique de l'espace temps est l'espace de Minkowski. Un nouveau type de structure est né, où une longueur peut être négative (géométrie lorentzienne). Plus généralement, on étudie la donnée de champs de produits pseudo-Euclidiens de signature quelconque où on est amené à la géométrie pseudo-riemannienne en toute sa généralité. Le nouveau phénomène, est que, contrairement, au cas riemannien, une sous-variété d'une variété pseudo-riemannienne n'hérite pas d'une structure pseudo-riemannienne. La métrique induite sur une telle sous-variété peut dégénérer. Il est temps d'étudier intrinsèquement ces variétés! Et pour commencer, considérons les plus apprivoisables, des variétés qu'on appellera *de lumière*!

1. Rappel sur les variétés pseudo-riemanniennes

DÉFINITION 2.1 (Variété pseudo-riemannienne). *Une variété pseudo-riemannienne M est une variété munie d'un $(0, 2)$ tenseur non-dégénéré, induisant sur chaque espace tangent de M , un produit pseudo-Euclidien de signature constante (p, q) . Cette signature s'appelle l'index. Ce champ de tenseur est appelé métrique pseudo-riemannienne.*

DÉFINITION 2.2 (Variété riemannienne). *C'est un cas particulier des variétés pseudo-riemanniennes, où l'index du tenseur est $(p, 0)$. En d'autres termes c'est une variété munie d'un champ de produits scalaires Euclidiens.*

EXEMPLE 2.3. \mathbb{R}^n muni de la métrique $\sum_{i=1}^n dx_i^2$

EXEMPLE 2.4. *Toute sous variété de \mathbb{R}^n munie de la métrique induite de $\sum_{i=1}^n dx_i^2$*

DÉFINITION 2.5 (Variété lorentzienne). *C'est un cas particulier des variétés pseudo-riemanniennes, où l'index du tenseur est $(p, 1)$. En d'autres termes c'est une variété munie d'un champ de produits scalaires lorentziens.*

EXEMPLE 2.6 (Espace de Minkowski). \mathbb{R}^4 muni de la métrique $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$

EXEMPLE 2.7 (Espace de Sitter dS_3). *La sous variété de l'espace de Minkowski \mathbb{R}^4 définie par*

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1\}$$

dS est muni de la métrique induite de $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$

Les Variétés pseudo-riemanniennes jouissent d'une structure sous-jacente, un outil fondamental et majeur, qui est leur connexion. C'est une sorte de dérivation sur les espaces tangents compatible avec la structure métrique et indépendante de la paramétrisation. La connexion donne lieu à la plupart des invariants géométriques tels que les courbures, les géodésiques...Mais sont existence est conditionnée par la non-dégénérescence de la métrique!

2. Variétés de lumière

DÉFINITION 2.8 (Métrique de lumière). *Une métrique de lumière sur une variété M est un $(0, 2)$ tenseur sur M , induisant sur chaque espace tangent, un produit de lumière.*

Une variété de lumière est un couple (M, q) , où q est une métrique de lumière.

EXEMPLE 2.9. \mathbb{R}^3 , muni du champ de produits $q_{(x,y,z)} = dx^2 + dy^2$

EXEMPLE 2.10. \mathbb{R}^4 , muni du champ de produits $q_{(x,y,z,t)} = (z^2 + 1) dx^2 + (t^2 + 4) dy^2 + e^{t-x} dt^2$

EXEMPLE 2.11 (Cône de lumière). Soit l'espace de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , i.e. \mathbb{R}^4 muni de la métrique lorentzienne $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$. Le cône de lumière est l'ensemble :

$$C_O = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \text{ et } (x, y, z, t) \neq 0\}$$

Ce cône est une sous-variété de dimension 3 de l'espace de Minkowski, qui se paramétrise visiblement avec les coordonnées polaires (r, θ) . La métrique induite sur le cône exprimé dans les coordonnées polaires est de la forme $r d\theta^2$. Elle est évidemment de lumière.

Cet exemple se généralise naturellement en dimension supérieure.

3. Objets géométriques de lumière

La dégénérescence de la métrique rend impossible de définir les objets géométrique qu'on a coutume de définir pour les variétés pseudo-riemanniennes, tels que la connexion, équation de Godazi... Mais une variété de lumière n'est pas si sauvage qu'elle en a l'air. L'unicité de la direction isotrope ainsi que la positivité donne lieu à des objets géométrique assez intéressants.

Dans tout ce qui suit M désigne une variété différentielle de dimension n , munie d'une métrique de lumière q .

3.1. Feuilletage de lumière. Il existe sur toute variété de lumière un champ de directions particulier, c'est le champ des directions isotropes. En effet, le fait que la métrique q soit C^∞ implique que l'application

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, v) \in \{x\} \times T_x M & \longmapsto & q_x(v) \end{array}$$

est une application C^∞ , alors son noyau (qui coïncide exactement avec le champ des directions isotropes) est nécessairement un champ C^∞ .

Les courbes intégrales de ce champ sont appelées courbes (feuilles) nulles (appelés aussi : de lumière ou caractéristiques) forment un feuilletage de M , appelé feuilletage nul (caractéristique ou de lumière).

EXEMPLE 2.12. Dans l'exemple de \mathbb{R}^3 , muni de la métrique $q_{(x,y,z)} = dx^2 + dy^2$, les courbes nulles sont les droites parallèles à l'axe des z . Plus généralement pour \mathbb{R}^n , muni de la métrique de lumière $q_{(x)} = \sum_{i=2}^n dx_i^2$, le feuilletage isotrope est donné par les droites parallèles à l'axe engendré par e_1 .

EXEMPLE 2.13. *Dans le cône isotrope les droites radiales sur le cône forment le feuilletage isotrope.*

Cette notion de feuilletage caractéristique est fondamentale dans l'étude des variétés de lumière. Formellement, le quotient de la variété (quand il est défini) par la feuille nulle donne lieu à des objets Riemanniens (métrique, distance...); de plus elle fournit une condition nécessaire et suffisante pour munir une variété d'une structure de lumière, on a

PROPOSITION 2.14. *Une variété M peut être munie d'une métrique de lumière, ssi il existe sur M un champ de directions qui ne s'annule nul part sur M .*

DÉMONSTRATION. Si M est munie d'une structure de lumière alors la direction du feuilletage nul donne un champ qui ne s'annule pas sur M . Réciproquement, soit M une variété qui admet un champ de directions X qui ne s'annule nul part. Il est bien connu qu'on peut toujours munir M d'une métrique riemannienne g . On définit une métrique de lumière q en décrétant que X est isotrope, et que tous les autres produits se calculent à partir de g . ■

EXEMPLE 2.15. *Tout champ de vecteurs sur la sphère S^n (pour n pair), s'annule quelque part. Donc S^n ne peut pas être munie d'une structure de lumière.*

3.2. Longueur de lumière et semi distance associée. En géométrie riemannienne, on définit de manière naturelle une notion de longueur d'arc, pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 , cette notion coïncide exactement avec la notion conceptuelle des longueurs (mesure de distance), on peut même dire que le concept de métrique Riemannienne a été mis au point pour donner un sens aux longueurs. Cette longueur donne lieu à une distance (au sens topologique) appelée distance riemannienne. Plein de notions naissent autour de ce concept tel que les géodésiques. Cette notion de longueur d'arc s'étend naturellement et d'une façon identique au cas des variétés pseudo-riemanniennes, mais ces longueurs modélisent d'autres concepts.

On pourrait aussi dans le cas de lumière, reprendre cette notion. Cela donnera lieu à un concept moins rigide que le cas pseudo-riemannien, mais qui pourrait être dans certains cas très utile.

3.2.1. *Longueur de lumière.* Soit M une variété munie d'une métrique de lumière q , $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un chemin de classe C^1 . La longueur de la

courbe γ est la quantité notée $Long(\gamma)$ définie par :

$$Long(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{y(t)} dt = \int_a^b \sqrt{q_{y(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

La dépendance continue par rapport à la variable t , de la norme de lumière et de la vitesse γ' permet de montrer que cette intégrale sur le compact $[a, b]$ est bien définie.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est C^1 par morceaux, alors γ est la juxtaposition de chemins de classe $C^1 : \gamma_1, \dots, \gamma_n$, ainsi on peut définir sa longueur comme étant la somme des longueurs $Long(\gamma_i)$ ie

$$Long(\gamma) = \sum_{i=1}^n Long(\gamma_i)$$

Les propriétés de l'intégrale permettent de montrer que la longueur de la juxtaposition de deux chemins est la somme des longueurs de ces chemins.

3.2.2. *Semi-distance sur une variété de lumière.* Dans ce qui suit M est une variété de lumière connexe.

DÉFINITION 2.16. *On définit l'application suivante :*

$$d_0 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (p, q) \mapsto \inf \left\{ \begin{array}{l} Long(\gamma) \\ \text{courbe } C^1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \text{ est une} \\ \text{courbe } C^1 \text{ par morceaux reliant } p \text{ à } q \end{array} \right\}$$

PROPOSITION 2.17. *L'application d_0 est une semi-distance, i.e. d_0 est bien définie symétrique et vérifie l'identité triangulaire. De plus, pour tous $x, y \in M$, $d_0(x, y) = 0$ ssi x et y sont sur la même courbe de lumière.*

DÉMONSTRATION. Le fait que d_0 soit bien définie est un fait général relevant de la structure différentiable connexe de la variété M , qui confirme l'existence pour tout couple de points p, q , de courbes C^1 par morceaux reliant p à q . L'ensemble des longueurs de telles courbes est borné inférieurement par 0 (car la métrique est positive). Ainsi la borne inférieure existe.

- Pour la symétrie, elle est directement issue du fait que le changement de paramétrisation de la courbe ne change pas sa longueur, alors au lieu de considérer les chemins reliant p à q , on considère leurs chemins inverses reliant q à p .

- Pour l'identité triangulaire : encore une fois cela relève d'un fait standard : soient $p, q, r \in M$ alors pour tout chemin γ_1 (resp γ_2) reliant p à q (resp q à r), la juxtaposition de γ_1 avec γ_2 est un chemin reliant p à r ainsi en passant

à la borne inférieure on a

$$d_0(p, r) \leq \text{long}(\gamma_1) + \text{long}(\gamma_2)$$

En passant à la borne inférieure sur γ_1 et γ_2 on obtient

$$d_0(p, r) \leq d_0(p, q) + d_0(q, r)$$

■

4. Isométries de lumière

DÉFINITION 2.18. Soit $(M, q), (N, g)$ deux variétés de lumière, un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ est une isométrie ssi pour tout $x \in M$, df_x est une isométrie linéaire de $(T_x M, q_x)$ vers $(T_{f(x)} N, g_{f(x)})$.

Une isométrie de (M, q) vers (M, q) est dite une isométrie sur M .

5. Quelques exemples de groupes d'isométries de variétés de lumière

Dans cette section, on reprend quelques exemples de variétés de lumière pour lesquels on explicite le groupe des isométries. On verra bien que contrairement à ce qu'on peut croire, il existe bien des exemples de variétés de lumière dont le groupe d'isométrie est décidable.

5.1. Les exemples les moins rigides : Flot transversalement riemannien. Ce type de variétés de lumière jouit d'un groupe d'isométries de dimension infinie.

5.1.1. *Exemple de base.*

• Soit la variété \mathbb{R}^{1+n} munie du système de coordonnées canoniques (x^0, x^1, \dots, x^n) . \mathbb{R}^{1+n} muni du champ des formes de lumière $q = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$ est une variété de lumière qu'on notera désormais $\mathbb{R}^{0,n}$. Calculons son groupe d'isométries. Un difféomorphisme f est une isométrie ssi sa différentielle df_p en tout point p est une isométrie linéaire, donc pour tout point $p \in \mathbb{R}^{1+n}$ on a : $df_p \in O(n, 0)$. i.e. le groupe de matrices de la forme :

$$O(0, n) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \lambda & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & & & \\ \cdot & & A & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in GL(1+n, \mathbb{R}), A \in O(n), \lambda, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

5. QUELQUES EXEMPLES DE GROUPES D'ISOMÉTRIES DE VARIÉTÉS DE LUMIÈRE

Comme on l'a vu ce groupe est naturellement isomorphe au groupe des similarités affines $\mathbb{R} \times Euc_n = \mathbb{R}.O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ (où $Euc_n = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ dénote le groupe des déplacements rigides de l'espace euclidien de dimension n) Ainsi le groupe des transformations affines de \mathbb{R}^{1+n} est $O(0, n) \ltimes \mathbb{R}^{1+n}$. Mais contrairement au cas non-dégénéré, le groupe de toutes les isométries est beaucoup plus grand, *de dimension infinie*. C'est exactement le groupe des applications :

$$\psi : (x^0, x^1, \dots, x^n) \mapsto (\psi_1(x^0, x^1, \dots, x^n), \psi_2(x^1, \dots, x^n)),$$

où $\psi_2 \in Euc_n$, et $\psi_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse tel que $\frac{\partial \psi_1}{\partial x^0} \neq 0$.

5.1.2. Généralisation de l'exemple de base.

- Soit (L, g) une variété riemannienne, et $M = \mathbb{R} \times L$ munie de la métrique de lumière $0 \oplus g$. Le feuilletage nul est donné par le facteur \mathbb{R} et la métrique ne dépend pas des coordonnées sur ce facteur. Dans ce cas aussi, on obtient un groupe d'isométries de dimension infinie donné par : $\psi : (t, l) \in \mathbb{R} \times L \mapsto (\psi_1(t, l), \psi_2(l))$, où ψ_2 est une isométrie de L , exemple : ψ_2 est l'application identité et $\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \neq 0$.

Réciproquement, supposons que la métrique de lumière (M, h) est telle qu'il existe un champ de vecteurs non-singulier X tangent au feuilletage caractéristique et satisfait $L_X h = 0$. Alors localement, il existe une décomposition de la métrique $M = \mathbb{R} \times L$ comme ci dessus. Observons que tout champ de vecteurs colinéaire à X préserve h . En d'autres termes tout champ de vecteurs paramétrisant le feuilletage caractéristique \mathcal{N} préserve h . On appellera dans ce cas, la **métrique basique**. Cette terminologie se justifie par le fait que h est le pull-back par l'application projection $M \rightarrow L$ de la métrique riemannienne sur la base L .

- Un feuilletage 1-dimensionnel \mathcal{N} sur une variété M est transversalement riemannien (on dira que \mathcal{N} est un flot transversalement riemannien) si c'est le feuilletage caractéristique d'une métrique de lumière h sur M . Cette métrique est donc préservée par le champ de vecteurs tangent à \mathcal{N} . Ce type de métriques est exactement ce qu'on a appelé une métrique de lumière basique sur M . Mais on a préféré présenter ce concept indépendamment, car il existe déjà dans la littérature, mais sans invoquer la structure de lumière. On trouvera dans [7, 19] une introduction sur la théorie des feuilletages transversalement riemanniens.

Le groupe d'isométries d'une métrique de lumière basique, contient au moins tous les flots tangents à \mathcal{N} , il est donc nécessairement de dimension

infinie. On peut quand-même apprivoiser ces métriques au moins localement, du moment où une structure riemannienne est souvent associée à cette structure et qui impose une sorte de rigidité. Les travaux de D. Kupeli [17] (reproduits par d'autres) montrent qu'une sorte de connexion de Levi-Civita existe dans le cas de métrique basique de lumière, mais elle n'est pas unique. Ceci a amené Kupelli à considérer des structures additionnelles sur la variété, chose qui est assez restrictive.

5.2. L'exemple du cône de lumière dans l'espace de Minkowski.

On considère maintenant une situation opposée au cas des métriques transversalement riemanniennes, où le groupe d'isométries est de dimension fini. Soit $Min_{1,n}$ l'espace de Minkowski de dimension $1+n$, i.e. \mathbb{R}^{1+n} muni de la forme $q = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. on rappelle que le **cône** isotrope positif Co^n est l'ensemble $\{q(x) = 0, x_0 > 0\}$. La métrique induite par q sur Co^n est de lumière. Le sous groupe $O^+(1, n) \subset O(1, n)$ préserve le cône Co^n et agit isométriquement sur ce dernier. L'action est transitive et $Co^n = O^+(1, n)/Euc_{n-1}$ est un espace homogène de lumière à groupe d'isotropie $Euc_{n-1} = O(n-1) \times \mathbb{R}^{n-1}$, qui n'est autre que le groupe des déplacements d'un espace Euclidien de dimension $n-1$.

On a le théorème :

THÉORÈME 2.19. (*Théorème de Liouville pour la géométrie de lumière*)

Pour $n \geq 3$, toute isométrie de Co^n appartient à $O^+(1, n)$. Ceci est vrai même localement pour $n \geq 4$: toute isométrie entre deux ouverts connexes de Co^n est la restriction d'un élément de $O^+(1, n)$.

- *Pour $n = 3$, le groupe des isométries locales est en bijection avec le groupe des transformations conformes locales de \mathbf{S}^2 .*
- *pour $n = 2$, il n'y a pas de rigidité, même globalement, puisque pour toute isométrie du cercle correspond une isométrie de Co^2 .*

DÉMONSTRATION. La métrique sur Co^n est $0 \oplus e^{2t}g_{\mathbf{S}^{n-1}}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Une isométrie f de Co^n est de la forme $(t, x) \mapsto (\lambda(t, x), \phi(x))$. Un simple calcul montre que f est une isométrie ssi en tout point $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$:

$$\phi^*g_{\mathbf{S}^{n-1}} = e^{2(t-\lambda(t,x))}g_{\mathbf{S}^{n-1}}$$

Ainsi toute isométrie locale de Co^n est de la forme $(t, x) \mapsto (t-\mu(x), \phi(x))$, avec ϕ une transformation conforme local de la sphère satisfaisant $\phi^*g_{\mathbf{S}^{n-1}} = e^{2\mu}g_{\mathbf{S}^{n-1}}$. Donc, les différents phénomènes de rigidité sont des conséquences du théorème classique pour les transformations conformes sur la sphère. ■

5. QUELQUES EXEMPLES DE GROUPES D'ISOMÉTRIES DE VARIÉTÉS DE LUMIÈRE

Ce théorème montre que pour $n \geq 3$, Co^n est un espace homogène de lumière dont le groupe d'isométries est $O^+(1, n)$. Précisons aussi que pour un souci de simplicité, on notera abusivement, souvent par $O(1, n)$ tout sous groupe d'index fini du groupe $O(1, n)$. En gros, toutes nos descriptions géométriques sont à *revêtement fini* près.

CHAPITRE 3

Espaces Homogènes de lumière

1. Généralités sur les espaces homogènes

Soit G un groupe de Lie. On dit que G agit sur une variété M ssi il existe un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$. L'action de G est dite transitive sur M ssi pour tous points $p, q \in M$, il existe $g \in G$ tel que $\varphi(g)p = q$. On note souvent, par abus, $\varphi(g)$ par g , pour tout $g \in G$.

Un espace homogène M est une variété sur laquelle un groupe de Lie G agit transitivement. Dans un tel espace tous les points jouent le même rôle. Pour étudier un phénomène donné, il suffit de l'étudier localement (à savoir infinitésimalement i.e. sur un espace tangent) et le translater avec le groupe G . Un outil fondamental consacrant ce grand avantage des espaces homogènes est la représentation d'isotropie définie par

$$\begin{aligned} \rho : G_p &\longrightarrow GL(T_{P_0}M) \\ h &\longmapsto dh_{p_0} \end{aligned}$$

où G_p appelé stabilisateur (groupe d'isotropie), désigne le sous groupe de G constitué des éléments qui fixent p . En effet la dérivée de tout élément h de G stabilisant un point p de M , définit un isomorphisme de T_pM . Ces isomorphismes comportent l'essentiel des informations sur l'action du groupe G , et surtout importent l'étude de l'action différentielle sur la variété à une action de matrices sur l'espace tangent.

Un espace homogène est naturellement identifié au quotient G/G_p , du groupe G par le stabilisateur G_p d'un point quelconque p de M (l'action de G sur G/G_p par translation à gauche). Cette identification permet dans un sens d'algébriser (donc de simplifier) le calcul différentiel (espace tangent, représentation d'isotropie, courbure).

Soit \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{g}_p) l'algèbre de Lie de G (resp. G_p), \exp désigne l'application exponentielle sur G . Tout vecteur $X \in \mathfrak{g}$, définit un champ de vecteurs sur M , qu'on notera, par abus, X , tel que en tout point $p \in M$, $X_p = \frac{d}{dt}_{t=0} \varphi(\exp tX) \cdot p$. le vecteur $X_p \in T_pM$ est appelé évaluation de X

au point p . On note souvent $\varphi(\exp tX)$ par ϕ_X^t le flot engendré par X : $\phi_X^t p = \exp tX.p$.

Pour tout point p de M , l'homomorphisme

$$\lambda_p : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & T_p M \\ X & \longmapsto & X_p \end{array}$$

est appelé application de Gauß. Il est établi que : ϕ_X^t stabilise p ssi $X_p = 0$. Ainsi le noyau de cet homomorphisme est exactement l'algèbre du stabilisateur \mathfrak{h} , ce qui permet d'identifier l'espace tangent au point p de M , au quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. La représentation d'isotropie à son tour est identifiée à la représentation adjointe Ad de H sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Depuis les travaux de Klein, l'étude des structures géométriques est axée sur l'étude de leurs groupes d'isométries. Les espaces homogènes occupent une place centrale dans cette approche, car même si l'action n'est pas transitive, les orbites, qui sont naturellement des espaces homogènes, forment un feuilletage de la variété. Ainsi comprendre ces orbites, aide à recoller la variété.

2. Espaces homogènes pseudo-riemanniens

DÉFINITION 3.1 (Espace homogène pseudo-riemannien). *Un espace homogène G/H , muni d'une métrique pseudo-riemannienne invariante par G (i.e. les translations à gauche sont des isométries de la métrique) est appelé espace homogène pseudo-riemannien. On dit aussi que G préserve la métrique pseudo-riemannienne.*

Il est facile de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. *Il y a une correspondance bi-univoque entre les métriques pseudo-riemanniennes sur l'espace G/H invariantes par l'action de G et, les produits pseudo-Euclidiens invariants par l'action de $\rho_H(H)$ sur l'espace tangent $T_p M$ en un point $p \in M$. H désigne le stabilisateur de p dans G .*

Cette proposition montre que la donnée d'une métrique invariante sur un espace homogène est entièrement déterminée par la donnée d'un produit induit sur un espace tangent. Elle montre aussi que l'image d'un stabilisateur par la représentation d'isotropie est nécessairement conjuguée à un sous groupe du groupe orthogonal du produit pseudo-Euclidien induit. Plus encore, cette proposition fournit une méthode de construction de variétés pseudo-riemannienne, par exemple si on prend un groupe de Lie quelconque, et on définit un produit pseudo-Euclidien quelconque sur son algèbre de Lie,

en translatant ce produit le long du groupe de Lie , on obtient une variété pseudo-riemannienne.

3. Espaces homogènes de lumière

DÉFINITION 3.3. *Un espace homogène G/H , muni d'une métrique de lumière invariante par G (i.e. les translations à gauche sont des isométries de la métrique de lumière) est appelé espace homogène de lumière. On dit aussi que G préserve la métrique de lumière.*

EXEMPLE 3.4. \mathbb{R}^n muni de la métrique de lumière $\sum_{i=2}^n dx_i^2$ est un espace homogène sous sa propre action par translation.

EXEMPLE 3.5. Le cône de lumière de dimension n , est un espace homogène sous l'action de $O(1, n)$.

De même pour les métriques pseudo-riemanniennes, la proposition suivante reste vraie :

PROPOSITION 3.6. *Il y a une correspondance bi-univoque entre les métriques de lumière sur l'espace G/H , invariantes par l'action de G et, les produits de lumière invariants par l'action de $\rho_H(H)$ sur l'espace tangent T_pM en un point $p \in M$. (H désigne le stabilisateur de p dans G).*

Encore une fois, cette proposition montre que la donnée d'une métrique de lumière invariante sur un espace homogène est entièrement déterminée par la donnée d'un produit de lumière sur l'espace tangent en un point p , invariant par l'action adjointe du stabilisateur du point p . Elle montre aussi que l'image d'un stabilisateur par la représentation d'isotropie est nécessairement conjuguée à un sous groupe de $O(n_+, 0)$. Plus encore, cette proposition fournit encore une fois, une méthode de construction de variétés de lumière, par exemple si on prend un groupe de Lie quelconque, et on définit un produit de lumière quelconque sur son algèbre de Lie, en translatant ce produit sur le groupe de Lie, on obtient une variété de lumière. Ainsi le groupe de Lie donne lieu à des exemples de variétés de lumière homogène.

3.1. Produit dégénéré rapatrié d'un espace tangent sur l'algèbre de Lie. Pour tout $p \in M$, on définit sur \mathfrak{g} , la forme bilinéaire symétrique q_* définie comme suit :

$$q_*(X, Y) = q_p(X_p, Y_p) = q_p \left(\frac{d}{dt}_{t=0} \exp tX.p, \frac{d}{dt}_{t=0} \exp tY.p \right)$$

Ce produit est appelée produit dégénéré rapatrié du point p , et sera noté par abus q .

Ainsi un vecteur $X \in \mathfrak{g}$ est dit de type lumière (ou isotrope) (resp. de type espace) ssi $q_p(X_p, X_p) > 0$ (resp. $q_p(X_p, X_p) = 0$). On note par \mathfrak{s}_p l'ensemble des vecteurs isotropes dans \mathfrak{g} . Cet espace est visiblement un espace vectoriel, c'est même une sous algèbre de Lie comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 3.7. *Pour tout $p \in M$, le sous espace des vecteurs isotropes \mathfrak{s}_p est une sous algèbre de \mathfrak{g} .*

DÉMONSTRATION. Soit $X, Y \in \mathfrak{s}_p$, et soit ϕ_X^t le flot isométrique engendré par X sur M , alors :

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\phi_X^{-t}(Y_{\phi_X^t(p)}) - Y_p]$$

Puisque X, Y sont isotropes au point p , leurs courbes intégrales passant par le point p sont supportées par la même courbe nulle \mathcal{N}_p , ainsi $Y_{\phi_X^t(p)}$ est isotrope. Puisque ϕ_X^{-t} est une isométrie, $d\phi_X^{-t}(Y_{\phi_X^t(p)})$ est aussi isotrope. Ainsi Y_p et $d\phi_X^{-t}(Y_{\phi_X^t(p)})$ sont colinéaires et coïncident sur la direction isotrope, il en va donc de même pour $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\phi_X^{-t}(Y_{\phi_X^t(p)}) - Y_p]$ ■

4. Les espaces $SL(2, \mathbb{R})$ -homogènes de lumière

La compréhension de ces espaces est fondamentale dans notre travail puisqu'on peut toujours restreindre notre action du groupe de Lie semisimple G à un sous groupe de la forme $SL(2, \mathbb{R})$ (ou un revêtement fini de ce dernier qui existe toujours dans un groupe semisimple).

4.0.1. *Notations.* Soit $SL(2, \mathbb{R})$ le groupe de Lie des 2×2 -matrices à déterminant égale à 1. Il est connu que les sous-groupes à un paramètre de $SL(2, \mathbb{R})$ sont conjugués à un des trois sous-groupes suivants :

$$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ou } K^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les dérivées de A^+ et de N à l'identité sont respectivement :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux derniers, avec $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et satisfont les relations de crochet :

$$[X, Y] = 2Y, \quad [X, Z] = -2Z \text{ et } [Y, Z] = X.$$

On note par A (resp. K) le sous groupe engendré par $A^+, -A^+$ (resp. $K^+, -K^+$).

Soit $Aff(\mathbb{R})$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures :

$$Aff(\mathbb{R}) = A.N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

et $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie.

Les sous-groupes non-connexes de dimension 1 de $Aff(\mathbb{R})$ peuvent être construits comme suit. Soit Γ_0 un groupe cyclique de A engendré par un élément $\gamma \in A$. Le produit semidirect $\Gamma_0 \ltimes N$ est un sous groupe fermé de dimension 1, non-connexe de $Aff(\mathbb{R})$. Inversement, tout sous-groupe fermé non connexe de dimension 1 de $Aff(\mathbb{R})$ est obtenu de cette façon.

La proposition suivante donne la classification standard, bien connue des $SL(2, \mathbb{R})$ espaces homogènes.

PROPOSITION 3.8. (*Classification des espaces $SL(2, \mathbb{R})$ -homogènes*) *Tout espace $SL(2, \mathbb{R})$ -homogène est isomorphe à un des espaces suivants :*

- (1) *Le cercle $S^1 = SL(2, \mathbb{R})/Aff(\mathbb{R})$ muni de sa structure projective naturelle.*
- (2) *Le plan hyperbolique $= SL(2, \mathbb{R})/K$ muni de sa métrique riemannienne à courbure constante négative.*
- (3) *Le plan pointé affine $:\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = SL(2, \mathbb{R})/N$ muni d'une connexion plate, et aussi d'une métrique de lumière.*
- (4) *Le tore affine $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\{x \sim ax\} = SL(2, \mathbb{R})/\Gamma_0.N$ muni de sa connexion plate.*
- (5) *L'espace $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$, où Γ est un sous groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$. C'est localement l'espace anti de Sitter, i.e. une variété lorentzienne à courbure constante négative.*

DÉMONSTRATION. D'abord, il est bien connu que les sous-groupes connexes de $SL_2(\mathbb{R})$ sont :

- (1) Les sous groupes à un paramètre : elliptique, parabolique, ou hyperbolique
- (2) Les sous groupes de dimension 2 : isomorphes au groupe affine.

Soit H un sous-groupe fermé de $SL_2(\mathbb{R})$, et H^0 sa composante neutre. le Lemme 3.9 conclut la classification. ■

LEMME 3.9. *Supposons H non discret et non-connexe ($H^0 \neq 1$, et $H^0 \neq H$), alors H^0 est un groupe à un paramètre parabolique, et H/H^0 est isomorphe à \mathbb{Z} . A conjugaison près, H est contenu dans le groupe affine (i.e. le groupe de matrices triangulaires supérieures de $SL_2(\mathbb{R})$). Identifié au groupe des transformations affines de la droite, il existe une constante a_0 tel que H consiste en toutes les transformations de la forme $x \rightarrow a_0^n x + b$, $b \in \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. La composante neutre d'un groupe est un sous-groupe normal. Donc, par hypothèse, H^0 est normalisé par un élément extérieur non-trivial (i.e. il existe $g \in H^0$, tel que $gH^0g^{-1} = H^0$. Il est connu que parmi tous les sous-groupes connexes (de dimension 1 ou 2), seul un groupe à un paramètre parabolique P admet un normalisateur non-trivial. Ce normalisateur $Nor(P)$ est en fait exactement le sous-groupe conjugué au groupe affine qui contient P . Donc à conjugaison près H est contenu dans le groupe affine A . Le quotient H/P est un sous-groupe fermé de $A/P \cong \mathbb{R}$. Mais un sous-groupe fermé de \mathbb{R} est soit tout, soit engendré par un seul élément. Dans notre cas, A/P consiste en les puissances d'une homothétie $x \rightarrow a_0 x$. Comme H contient toutes les translations, il admet la description ci-dessus. ■

La proposition suivante, utilise la classification ci dessus, pour trier les espaces $SL(2, \mathbb{R})$ -homogènes de lumière.

PROPOSITION 3.10. *A homothétie près, Les espaces $SL(2, \mathbb{R})$ -homogènes admettant un groupe d'isotropie non-compact sont :*

- (1) *Le cône Co^1 , i.e. le cercle S^1 muni de la métrique nulle.*
- (2) *Le cône de lumière Co^2 , i.e. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ muni de la métrique de lumière $d\theta^2$, où il est paramétrisé par les coordonnées polaires (r, θ) .*

DÉMONSTRATION. Soit Σ un $SL(2, \mathbb{R})$ -espace homogène de dimension ≥ 2 , i.e. $\Sigma \cong SL(2, \mathbb{R})/H$, où H est le stabilisateur d'un point $p \in \Sigma$ qui est conjugué, comme montré en haut, à un des sous groupes : $K, N, \Gamma_0 N$ et Γ . Soit \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H . Considérons la représentation d'isotropie

$$\rho_H : H \longrightarrow GL(T_p(\Sigma)) = GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

On observe que $H = K$ ou $\Gamma_0 N$ (avec $\Gamma_0 \neq 1$), $\rho_H(H)$ n'est pas conjugué à un sous groupe de $O(0, 1)$.

Maintenant si $H = \Gamma$, alors $\rho_H(\Gamma)$ est conjugué à un sous groupe de $O(1, 2)$. Cela est dû au fait que la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a une signature lorentzienne. Si de plus $\rho_H(\Gamma)$ est conjugué à un sous groupe de $O(0, 2)$, alors $\rho_H(\Gamma)$ devrait être fini. Puisque le noyau de la représentation d'isotropie de $SL(2, \mathbb{R})$ est fini, on obtient que Γ est fini.

Ainsi l'unique espace $SL(2, \mathbb{R})$ -homogène de lumière, de dimension ≥ 2 à isotropie non-compact est isomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Pour montrer que la métrique de lumière est de la forme $\alpha d\theta^2$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on raisonne comme suit. On considère la base X, Y, Z de $SL(2, \mathbb{R})$ introduite antérieurement. Par abus de langage, ils désigneront aussi les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ induits par l'action de $SL(2, \mathbb{R})$. En un point $p = (1, 0)$, le vecteur X est l'unique valeur propre non-triviale ρ_N , et donc l'orbite de p par le flot ϕ_X^t devra coïncider avec la feuille nulle $\mathcal{N}_{(1,0)}$, qui n'est autre qu'une demi droite radiale. Les autres feuilles nulles sont aussi radiales, car elles sont l'image de $\mathcal{N}_{(1,0)}$ par l'action de $SL(2, \mathbb{R})$. Par homogénéité, la métrique doit avoir la forme $\alpha d\theta^2$. ■

REMARQUE 3.11. *la proposition 3.10 est un cas particulier du théorème 5.6 où $G = O(1, 2)$.*

Pour un usage ultérieur, remarquons le fait suivant qui découle directement de la dernière description de la variété de lumière $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (ici, X, Y, Z est la base de $SL(2, \mathbb{R})$ introduite ci-dessus).

FAIT 3.12. *Si Y est isotrope en un point $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors Y s'annule en p et X est isotrope en p .*

Dynamique des groupes de Lie semisimples sur les variétés de lumière

1. Généralités sur les algèbres de Lie semisimples

Une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur \mathbb{R} est dite **simple** ssi elle n'est pas abélienne et ne contient aucun idéal propre. Elle est dite semi simple si elle n'admet aucun idéal abélien non-triviale.

Une algèbre de Lie simple jouit de la propriété suivante

PROPOSITION 4.1. *Si \mathfrak{g} est simple alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Cette propriété permet de cerner les algèbres de Lie simples de dimension inférieure à 3, qui sont essentiellement $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.

Un outil fondamental de la théorie des groupes de Lie est la forme bilinéaire symétrique dite forme de Killing sur \mathfrak{g} définie par :

$$\begin{aligned} k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \text{Tr}(adXadY) \end{aligned}$$

où ad désigne la représentation adjointe tangente.

Cette forme donne lieu à des décompositions sur l'algèbre de Lie et fournit particulièrement le fameux critère de semisimplicité de Cartan dont l'énoncé suit :

PROPOSITION 4.2 (Critère de semisimplicité de Cartan). *Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est semisimple ssi sa forme de Killing sur \mathfrak{g} est non-dégénéré.*

La non-dégénérescence de la forme de Killing k sur une algèbre de Lie semisimple donne lieu à la jolie réduction suivante.

PROPOSITION 4.3. *Toute algèbre de Lie semisimple \mathfrak{g} est une somme direct k -orthogonale d'idéaux simples $\{\mathfrak{g}_i\}$. Cette décomposition est unique.*

Cette proposition est d'un grand intérêt pratique car elle permet de réduire l'étude des groupes de Lie semisimples aux groupes de Lie simples. Ces derniers sont souvent plus faciles à manipuler et à classifier.

2. Quelques décompositions des algèbres de Lie semisimples

2.1. Décomposition de Cartan.

DÉFINITION 4.4. *Une décomposition de Cartan sur une algèbre de Lie \mathfrak{g} , est une décomposition de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ où*

1- $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, $[\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{l}$

2- *La forme de Killing k sur \mathfrak{g} est définie négative sur \mathfrak{l} et définie positive sur \mathfrak{p} .*

Les groupes de Lie semisimples admettent une décomposition de Cartan qui est assuré par l'existence d'une involution (automorphisme de \mathfrak{g} , de carré triviale) de Cartan définie ci dessous.

DÉFINITION 4.5 (Involution de Cartan). *Soit θ une involution sur \mathfrak{g} , On dit que θ est une involution de Cartan de \mathfrak{G} ssi la forme bilinéaire symétrique :*

$$k_\theta(X, Y) = -k(X, \theta(Y)),$$

(où k désigne la forme de Killing sur \mathfrak{g}) est définie positive.

Comme les valeurs propres de l'involution de Cartan sont 1 ou -1 . La décomposition en espaces propres donne lieu à une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$, où : $\mathfrak{l} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta(X) = X\}$ (espace propre associé à 1) et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta(X) = -X\}$ (espace propre associé à -1). On remarque que cette décomposition est orthogonale par rapport à la forme de Killing.

Le théorème suivant affirme l'existence d'une involution de Cartan sur une algèbre de Lie semisimple.

PROPOSITION 4.6. *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle semisimple, alors \mathfrak{g} admet une involution de Cartan θ . Toute autre involution de Cartan est conjuguée à θ via un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} .*

2.2. Décomposition en espace de racines. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semisimple et $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan. Soit \mathfrak{a} une sous algèbre abélienne maximale de \mathfrak{p} appelée algèbre de Cartan. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ (dual de \mathfrak{a}) on pose

$$g_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} / [H, X] = \lambda(H)X \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Si g_λ est non-trivial et $\lambda \neq 0$, on appelle λ racine restreinte de \mathfrak{g} et g_λ est appelé l'espace des racines. L'ensemble des racines restreintes de \mathfrak{g} est noté Δ .

L'espace des racines jouit des propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.7. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semisimple et $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan par rapport à une involution de Cartan θ . Soit \mathfrak{a} une algèbre de Cartan. Alors, on a :*

- a) $\mathcal{G} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda$ (somme orthogonale directe),
 b) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\gamma] = \mathfrak{g}_{\lambda+\gamma}$ et $\theta(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda}$.

La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda$ est appelé décomposition en espaces de racines de \mathfrak{g} .

Les propriétés de la décomposition en espaces de racines montrent qu'une algèbre de Lie semisimple est un "embriquement" de \mathfrak{sl}_2 -triplets!

3. Décomposition KAK d'un groupe de Lie semisimple

Un groupe de Lie est dit semisimple (resp. simple) ssi son algèbre de Lie est semisimple (resp. simple). Un groupe de Lie semisimple admet une décomposition privilégiée dite décomposition *KAK*.

THÉORÈME 4.8. *Soit G un groupe de Lie semisimple, \mathfrak{g} son algèbre de Lie, \mathfrak{a} une algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et $A = \exp \mathfrak{a}$ (resp. $K = \exp \mathfrak{l}$) le groupe associé à \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{l}) dans G , alors*

$$G = KAK$$

4. Action isométrique d'un groupe de Lie semisimple sur une variété de lumière

4.1. Action infinitésimale des espaces stables et instables. En se fixant une fois pour toute une involution de Cartan Θ sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , cela donne une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. On choisit \mathfrak{a} une sous algèbre maximale abélienne de \mathfrak{p} et notons par \mathfrak{m} le centralisateur de \mathfrak{a} dans \mathfrak{k} . Ce choix donne lieu à une décomposition en espaces de racines de \mathfrak{g} . Particulièrement il existe une famille finie $\Sigma^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ d'éléments non nuls de \mathfrak{a}^* tel que $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Pour tout $X \in \mathfrak{a}$, $ad_X(Y) = \alpha(X)Y$ pour $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$. La sous algèbre \mathfrak{g}_0 est le noyau de ad_X pour $X \in \mathfrak{a}$, on a ainsi la décomposition : $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$.

La chambre positive de Weyl $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ contient les $X \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha(X) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma^+$. Son image par l'application exponentielle est notée par A^+ .

Soit $\Sigma^- = \{-\alpha_1, \dots, -\alpha_s\}$. La sous algèbre stable (pour \mathfrak{a}) est $W^s = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^-} \mathfrak{g}_\alpha$. La sous-algèbre instable est $W^u = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$, ces deux sous-algèbres sont nilpotentes dans \mathfrak{g} , elles sont envoyées difféomorphiquement par l'application exponentielle de \mathfrak{g} sur les deux sous groupes $N^+ \subset G$ et $N^- \subset G$.

Soit $X \in \mathfrak{a}$, son algèbre **stable** est $W_X^s = \bigoplus_{\alpha(X) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$, et son algèbre **instable** est $W_X^u = \bigoplus_{\alpha(X) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$.

Dans ce qui suit G est un groupe de Lie semisimple, agissant transitivement sur une variété en préservant une métrique de lumière.

Le lemme suivant décrit l'action adjointe infinitésimale des espaces stables et instables :

LEMME 4.9. *La sous algèbre W_X^s satisfait les propriétés suivantes :*

- (1) $[\mathfrak{g}, W_X^s \cap \mathfrak{g}_p] \subset \mathfrak{s}_p$
- (2) $[\mathfrak{s}_p, W_X^s \cap \mathfrak{g}_p] \subset \mathfrak{g}_p$

DÉMONSTRATION. Soit $Y \in W_X^s \cap \mathfrak{g}_p$

- (1) Puisque $Y \in \mathfrak{g}_p$, ad_Y agit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}_p$ par des endomorphismes symétriques, et qui sont en même temps nilpotents, puisque $Y \in W_X^s$, alors ad_Y agit par des endomorphismes nuls $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}_p$, ce qui veut dire que ad_Y envoie \mathfrak{g} à \mathfrak{s}_p .
- (2) ad_Y agit par un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$ (identifié à l'espace tangent), et admet $\mathfrak{s}_p/\mathfrak{g}_p$ (identifié à la direction isotrope) comme espace propre de dimension 1. Par nilpotance l'action sur ce dernier est triviale, i.e. ad_Y envoie \mathfrak{s}_p dans \mathfrak{g}_p .

■

5. Action isométrique non-propre d'un groupe de Lie semisimple

5.1. Action non-propre. (voir [15] pour plus de précisions sur cette notion).

DÉFINITION 4.10. *Soit G un groupe agissant sur M . Une suite (p_k) est dite **non-fuyante** s'il existe une suite de transformations $g_k \in G$, telles que, les suites (p_k) et $(q_k) = (g_k(p_k))$ soient contenues dans un sous-ensemble compact de M , alors que la suite (g_k) tend vers ∞ dans G , (i.e. (g_k) quitte tout ensemble compact de G).*

– La suite (g_k) est appelée **suite de retour** de (p_k) .

On supposera sans restreindre la généralité que les suites (p_k) et (q_k) convergent vers p et q dans M (quitte à passer à des sous-suites).

DÉFINITION 4.11. *On dit que le groupe G agit non-proprement sur M , s'il admet une suite non-fuyante.*

Ci dessous un critère important sur les actions non-propres, qui découle du fait que le groupe est de centre fini et qui permet de transporter l'action non-propre du groupe en une action non-propre d'un sous groupe de Cartan :

LEMME 4.12. *Soit G un groupe noncompact semisimple de centre fini. Alors G agit non-proprement sur M ssi tout sous groupe de Cartan A agit non proprement.*

DÉMONSTRATION. G admet une décomposition de Cartan KAK , où K est compact. Soit (p_k) une suite non-fuyante de l'action de G , et (g_k) sa suite de retour. Soit $g_k = l_k a_k r_k \in KAK$. Alors, $p'_k = r_k(p_k)$ est une suite non-fuyante pour l'action de A , où (a_k) est sa suite de retour. Il est bien claire que (a_k) tend vers l'infini dans A car (g_k) tend vers l'infini dans G . ■

5.2. Action isométrique non-propre.

5.2.1. *Causalité de l'espace stable.* Dans cette section, on donne l'ingrédient principal des preuves de tous nos théorèmes de classification. Ce résultat repose essentiellement sur la nature non-propre de l'action du groupe semi-simple. On suppose que G est non-compact semisimple, de centre fini agissant localement fidèlement et non-proprement sur une variété de lumière (M, h) . Le résultat qu'on se propose de montrer dans cette section est :

PROPOSITION 4.13. *Si aucun facteur de G n'est localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, alors il existe une sous algèbre de Cartan \mathfrak{a}_0 telle que pour $X_0 \in \mathfrak{a}_0$ et $p_0 \in M$, on a que X_0 et son algèbre stable $W_{X_0}^s$ sont isotropes au point p_0 .*

5.2.2. *Des résultats préliminaires.* La non-propreté de l'action de G entraîne un fait fondamental, déjà remarqué dans [16] pour les métriques lorentziennes, qui est l'existence d'un point $p \in M$ et d'un $X \in \mathfrak{a}$ tels que son espace stable W_X^s soit isotrope en p . Rappelons la preuve qui s'adapte au cas de lumière.

PROPOSITION 4.14. [16] *Soit \mathfrak{a} une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .*

- (1) Si le flot de $X \in \mathfrak{a}$ agit non-proprement, alors pour toute suite $p_k \rightarrow p$ non-fuyante pour l'action de ϕ_X^t , l'espace stable W_X^s est isotrope en p .
- (2) Plus généralement, si $p_k \rightarrow p$ est une suite non-fuyante pour l'action de A , alors il existe $X \in \mathfrak{a}$ tel que W_X^s soit isotrope au point $p \in M$.

DÉMONSTRATION.

- (1) Soit $\phi_X^t = \exp(tX)$ le flot de X , et soit (t_k) la suite de temps de retour de (p_k) , i.e. $\phi_X^{t_k}$ est la suite de retour de p_k , ce qui veut dire que $q_k = \phi_X^{t_k}(p_k)$ reste dans un sous ensemble compact de M .

Soit $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$, alors $[X, Y] = \alpha(X)Y$, donc pour tout $x \in M$, $D_x \phi_X^t Y_x = e^{t\alpha(X)} Y_{\phi_X^t(x)}$. Supposons que $\alpha(X) < 0$, alors :

$$h_{p_k}(Y_{p_k}, Y_{p_k}) = h_{q_k}(D_{p_k} \phi_X^{t_k}(Y_{p_k}), D_{p_k} \phi_X^{t_k}(Y_{p_k})) = e^{2t_k \alpha(X)} h_{q_k}(Y_{q_k}, Y_{q_k})$$

En passant à la limite, le membre gauche de l'égalité tend vers $h_p(Y_p, Y_p)$.

Pour le membre de droite, puisque (q_k) reste dans un compact, $h_{q_k}(Y_{q_k}, Y_{q_k})$ est bornée. Par conséquent, $\alpha(X) < 0$, donne que ce membre tend vers 0, ce qui implique que $h_p(Y_p, Y_p) = 0$. Cela montre que W_X^s est isotrope au point p .

- (2) Soit (X_k) une suite dans \mathfrak{a} tel que $\exp(X_k)$ est une suite de retour pour (p_k) . Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur \mathfrak{a} et considérons si nécessaire que, $(\frac{X_k}{\|X_k\|})$ converge vers $X \in \mathfrak{a}$. Comme ci dessus, on montre que W_X^s est isotrope au point p .

■

REMARQUE 4.15. *Ce résultat n'est autre qu'une généralisation du fait linéaire : Si une matrice A préserve un produit de lumière, alors les espaces stables et instables associés sont isotropes. En particulier, dans notre cas, si $X \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_p$, i.e. X stabilise p , alors W_X^s et W_X^u sont isotropes au point p .*

5.2.3. *Preuve de la proposition 4.13.* La preuve repose sur plusieurs remarques. La plus importante est que l'algèbre du stabilisateur d'un point $p \in M$ est de codimension 1 dans l'espace des vecteurs isotropes en ce point. L'hypothèse dans la Proposition 4.13 que G n'admet pas de facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$ sera utilisée dans le lemme 4.18.

LEMME 4.16. *G ne stabilise aucun point $p \in M$.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que G stabilise $p \in M$, alors G agit sur T_pM par $\rho : g \mapsto d_p g \in GL(T_pM)$. Puisque G préserve le produit de lumière h_p , il est envoyé par ρ sur un sous groupe de $O(0, n)$. Ainsi au niveau des algèbres de Lie on a un homomorphisme $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{o}(0, n)$. Or on a :

SOUS-LEMME 4.17. *Tout homomorphisme de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{o}(0, n)$ est trivial.*

DÉMONSTRATION. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que, \mathfrak{g} est simple. Soit λ un homomorphisme de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{o}(0, n)$, et π la projection de $\mathfrak{o}(0, n)$ sur $\mathfrak{o}(n)$. On considère l'homomorphisme $\lambda \circ \pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{o}(n)$. Puisque \mathfrak{g} est simple et noncompact, il n'admet aucun homomorphisme non-trivial dans l'algèbre de Lie d'un groupe compact. Ceci implique que $\lambda \circ \pi$ est trivial. Donc, \mathfrak{g} est envoyé par λ dans le noyau \mathfrak{g}_0 de π , c'est l'algèbre

des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \mu & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & & & \\ \cdot & & 0 & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Puisque \mathfrak{g}_0 est résoluble

et \mathfrak{g} simple, on déduit que λ est trivial. ■

Comme corrolaire de cela, l'image par ρ de tout sous groupe $K \subset G$ connexe et compact est trivial. De plus un tel K préserve une métrique riemannienne. D'autre part, on sait bien, que sur une variété riemannienne connexe M , une isométrie qui préserve la métrique en fixant un point et dont la dérivée en ce point est triviale, est égale à l'identité. Ainsi K agit trivialement sur M , ce qui implique que G n'agit pas fidèlement, chose qui contredit nos hypothèses et achève la preuve. ■

LEMME 4.18. *Si G n'admet aucun facteur local isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, alors toute sous algèbre de Cartan \mathfrak{a} rencontre trivialement l'algèbre de Lie du stabilisateur : $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_p = \{0\}$ pour tout $p \in M$.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_p \neq \{0\}$, et soit $X \neq 0$ dans cette intersection. Appliquons la remarque 4.15 à X , on obtient alors que W_X^s et W_X^u sont isotropes au point p . Un fait bien connu de la théorie des groupe de Lie, assure que l'espace \mathfrak{n} engendré par W_X^s et W_X^u est un idéal de \mathfrak{g} (voir [16]). Ainsi \mathfrak{n} est un facteur de \mathfrak{g} . Du fait qu'il est isotrope, il agit sur la courbe nulle \mathcal{N}_p , qui est un espace de dimension 1. De plus cette action est nécessairement fidèle, sinon son noyau \mathfrak{s} serait l'algèbre de Lie d'un groupe semisimple $S \subset G$ admettant un point fixe sur M , ce qui contredit le lemme 4.16. Maintenant, l'unique algèbre de Lie

semisimple, agissant fidèlement sur une variété de dimension 1 est $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Ce qui contredit l'hypothèse de la non existence d'un tel facteur dans \mathfrak{g} . ■

LEMME 4.19. *Soit H un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.*

- (1) *Si H est linéaire alors, il est isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$ ou $PSL(2, \mathbb{R})$.*
- (2) *Si H est un sous groupe de Lie de G de centre fini alors, H est un revêtement fini de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. Toutes les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ s'intègrent en des actions du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ lui même, et non pas son revêtement universel. En effet toutes les représentations irréductibles sont isomorphes à une puissance symétrique de la représentation standard, ou de façon équivalente, à des représentations sur les espaces des polynômes homogènes d'un degré donné, à deux variables x et y (voir [14], section I.9). On a évidemment, $SL(2, \mathbb{R})$ agit sur ces polynômes, et $PSL(2, \mathbb{R})$ agit aussi sur eux, ssi le degré est pair.

Pour le dernier point, observons que la représentation adjointe de G admet un noyau fini. ■

Fin de la preuve de la Proposition 4.13. La Proposition 4.14 affirme qu'il existe $X \in \mathfrak{a}$ et $p \in M$ tel que W_X^s est isotrope au point p . Puisque \mathfrak{g} n'admet aucun facteur isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, on a $\dim W_X^s > 1$ (sinon la sous algèbre $\mathfrak{a} \oplus \Sigma_{\alpha(X) \geq 0} \mathfrak{g}_\alpha$ est un supplémentaire de W_X^s de codimension 1, ce qui donne lieu à une action de \mathfrak{g} sur une variété de dimension 1).

Pour une métrique de lumière, un espace isotrope est de dimension au plus 1, ceci implique que l'évaluation de W_X^s au point p est au plus de dimension 1, donc W_X^s contient un vecteur non nul Y_0 s'annulant au point p .

Le théorème de Jacobson-Morozov (voir [14], Théorème 10.3), assure que l'élément nilpotent Y_0 appartient à une certaine sous-algèbre \mathfrak{h} isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, i.e. engendrée par un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{X_0, Y_0, Z_0\}$, tel que $[X_0, Y_0] = 2Y_0$, $[X_0, Z_0] = -2Z_0$, et $[Y_0, Z_0] = X_0$.

Soit $H \subset G$ le groupe associé à \mathfrak{h} . Le lemme ci dessus et le fait que G a un centre fini, assurent que H est un revêtement fini de $PSL(2, \mathbb{R})$. On appelle Σ la H -orbite de p . Puisque pour toute représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dans un espace de dimension finie, envoie tout élément \mathbb{R} -diagonalisable (i.e diagonalisable à valeur propre réelle) vers un élément \mathbb{R} -diagonalisable, alors l'algèbre de Cartan $\mathbb{R}X_0$ est contenue dans une algèbre de Cartan \mathfrak{a}_0 de l'algèbre ambiante \mathfrak{g} . Par le lemme 4.18, on sait que X_0 ne s'annule

pas au point p . D'autre part, Y_0 s'annule au point p , ce qui implique que $\mathbb{R}Y_0 = \mathfrak{g}_p$. En particulier, Σ est un espace de dimension 2 et ne peut pas être riemannienne car $Y_0 \in \mathfrak{g}_p$ implique que l'action de H sur Σ est non-propre.

On obtient donc que Σ est une surface de lumière homothétique, à revêtement fini près à $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d\theta^2)$. On a déjà observé que H agit non-proprement sur Σ . Le groupe $\exp(\mathbb{R}X_0)$ est un sous-groupe de Cartan de H , par le lemme 4.12, $\exp(\mathbb{R}X_0)$ agit aussi non-proprement sur Σ . Ainsi on peut trouver une suite (q_k) de Σ qui converge vers $p_0 \in \Sigma$, et une suite de temps de retour (t_k) , telles que $h_k \cdot q_k$ converge dans Σ , où $h_k = \exp(t_k X_0)$. Maintenant on applique la première partie de la Proposition 4.14 à X_0 et \mathfrak{a}_0 , et on en déduit que $W_{X_0}^s$ est isotrope au point p_0 (où $W_{X_0}^s$ est définie par rapport à \mathfrak{a}_0). En particulier Y_0 est isotrope au point p_0 et 3.12 assure que X_0 est aussi isotrope au point p_0 . \square

CHAPITRE 5

Preuves des théorèmes de classification

Dans le second chapitre de cette thèse, on avait montré que le groupe d'isométries du cône de lumière (de l'espace de Minkowski) était $O(1, n)$. C'est en particulier un groupe de Lie simple. On se pose maintenant la question réciproque : que serait une variété de lumière M supportant l'action d'un groupe de Lie simple agissant isométriquement non-proprement ? La réponse est un phénomène de rigidité qui stipule qu'essentiellement M est le cône de lumière. On étudiera ensuite le cas général des groupes de Lie semisimples.

1. Réduction au cas d'une action transitive

Le lemme suivant ainsi que la Proposition 4.13 réduisent l'étude des actions non-propres non-transitives d'un groupe de Lie semisimple sur une variété de lumière, au cas où l'action non-propre est *transitive*.

LEMME 5.1. (Reduction au cas transitif) *Soit G un groupe semisimple de centre fini, n'admettant aucun facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, agissant fidèlement, non-proprement, isométriquement sur une variété de lumière M . En tout $p \in M$ pour lequel il existe $X \in \mathfrak{a}$ tel que W_X^s est isotrope en p , l'orbite $G.p$ est de lumière et G agit non-propement sur cette orbite. De plus l'algèbre du stabilisateur \mathfrak{g}_p contient des éléments nilpotents.*

DÉMONSTRATION. Soit $p \in M$ et X tel que W_X^s est isotrope au point p . On a vu à la fin de la proposition 4.13 que W_X^s est de dimension > 1 . S'il est isotrope au point p , alors il contient nécessairement un élément non trivial $Y_0 \in W_X^s \cap \mathfrak{g}_p$ qui s'annule au point p , mais Y_0 est un élément nilpotent dans \mathfrak{g} . Il engendre donc un groupe à un paramètre non-compact. Ainsi, le stabilisateur de p est non-compact. Par conséquent, l'action de G sur la G -orbite $G.p$ est non-propre, et \mathfrak{g}_p contient des éléments nilpotents.

Montrons que $G.p$ est de lumière. Le lemme 4.16 montre que $G.p$ ne peut être réduite à p . Supposons par l'absurde que $G.p$ est riemannienne. Alors tout vecteur isotrope en p devrait être nul, en particulier $W_X^s \subset \mathfrak{g}_p$.

Considérons l'action infinitésimale de Y_0 sur l'espace tangent de l'orbite de p . Cette action n'est autre que $ad_{Y_0} : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$. Si $G.p$ est riemannienne, alors cette action sera à la fois anti-symétrique et nilpotente, donc triviale sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$, ce qui veut dire que : $ad_{Y_0}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_p$. Maintenant, utilisant le théorème de Jacobson-Morozov ; on peut trouver un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -triplet $\{Z_0, X_0, Y_0\}$. Ainsi $ad_{Y_0}(Z_0) = X_0$, donc $X_0 \in \mathfrak{g}_p$. Mais X_0 est dans une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , ce qui contredit le lemme 4.18.

■

2. Cas d'un groupe de Lie simple

Le traitement du cas simple est motivé par le théorème 1.6 de [9] qui s'énonce :

THÉORÈME 5.2 ([9]). *Soit G un groupe de Lie connexe de centre fini, localement isomorphe à $O(1, n)$ ou $O(2, n)$, $n \geq 3$.*

Si G agit isométriquement sur une variété lorentzienne, et admet une orbite dégénérée où le stabilisateur est non-compact, alors G est localement isomorphe à $O(1, n)$, et l'orbite est homothétique au cône de lumière Co^n .

Ici, on montre une version intrinsèque de ce théorème :

Rappelons que, deux métriques de lumière h et h' sur une variété M sont dites **homothétiques** si $h = \lambda h'$ pour un réel $\lambda > 0$. Un groupe de Lie agit **localement fidèlement** sur M si le noyau de son action est un sous-groupe discret.

THÉORÈME 5.3. *Soit G un groupe de Lie simple non-compact de centre fini, agissant localement fidèlement, isométriquement **non-proprement** sur une variété de lumière (M, h) . Supposons que G n'est pas isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$. Alors, à revêtement fini près :*

- G est localement isomorphe à $O(1, n)$.
- G admet une orbite homothétique au cône Co^n .

Le théorème 5.1 réduit la preuve au cas transitive. On peut donc supposer que l'action est transitive. Soit G un groupe de Lie simple de centre fini, n'admettant aucun facteur local isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, agissant transitivement, non-proprement sur M . Le cas général des groupes semisimples sera traité dans la prochaine section.

La preuve comprend plusieurs étapes.

Étape 1 : Il existe $p \in M$ et X dans une certaine sous algèbre de Cartan \mathfrak{a} tels que $W_X^s \subset \mathfrak{g}_p$.

DÉMONSTRATION. La proposition 4.13 dit que pour un point $p \in M$, il existe X dans une algèbre de Cartan de \mathfrak{g} tel que X et W_X^s sont isotropes au point p . Pour tout Y dans W_X^s , la sous algèbre engendrée par X et Y est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ et agit sur la courbe nulle \mathcal{N}_p .

À isomorphisme près, il existe exactement deux actions de $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ sur un espace connexe de dimension 1 :

- (1) L'action usuelle de $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R} . Pour cette action, un conjugué de X s'annule quelque part sur la ligne.
- (2) L'action non-fidèle, pour laquelle Y agit trivialement.

On ne peut pas être dans le premier cas sans contredire le lemme 4.18. Donc le seul cas possible est (2) et ainsi $W_X^s \subset \mathfrak{g}_p$. ■

Étape 2 : Le \mathbb{R} -rang de \mathfrak{g} est égal à 1.

DÉMONSTRATION. Supposons le \mathbb{R} -rang de $\mathfrak{g} > 1$. Soit α une racine telle que $\alpha(X) > 0$ et β une racine adjacente dans le diagramme de Dynkin, en se fixant un choix de base Φ de racines positives simples (i.e $\gamma \in \Phi \implies \gamma(X) \geq 0$). (Voir [14], p 160). Par définition, $\alpha + \beta$ est aussi une racine et $(\alpha + \beta)(X) > 0$, ce qui veut dire que $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\mathfrak{g}_{-(\alpha+\beta)}$ sont différentes et contenues dans W_X^s .

Soit T_α et $T_{\alpha+\beta}$ les vecteurs de \mathfrak{a} duaux de α et $\alpha + \beta$ respectivement. Ils sont linéairement indépendants. De plus, $T_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{ad}_{\mathfrak{g}}(W_X^s)(\mathfrak{g})$. Il en va de même pour $T_{\alpha+\beta}$,

Par l'étape 1 et le lemme 4.9, T_α et $T_{\alpha+\beta}$ sont isotropes au point p . Donc il y a une combinaison linéaire non-triviale de ces racines qui s'annule en p . Ce qui contredit la proposition 4.18 affirmant que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_p = 0$. Donc \mathfrak{g} est de rang 1. ■

REMARQUE 5.4. *C'est exactement en ce point qu'on a utilisé le fait que G est simple !*

Étape 3 : L'algèbre de \mathfrak{g} est isomorphe à $\mathfrak{o}(1, n)$.

DÉMONSTRATION. Supposons que \mathfrak{g} n'est pas isomorphe à $\mathfrak{o}(1, n)$, alors, on a deux racines α et 2α telles que $\alpha(X) > 0$,

FAIT 5.5. *Le crochet $[\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$.*

Continuons la preuve, en admettant ce fait (On reviendra sur sa preuve juste après). Soit $Y \in [\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_\alpha$. Par le lemme 4.9, Y est isotrope au

point p . Soit Θ l'involution de Cartan (voir [14] p 355), alors $\Theta Y \in W_X^s$, et donc appartient à \mathfrak{g}_p , par l'étape 1. Le lemme 4.9 implique $[Y, \Theta Y] \in \mathfrak{g}_p$, en particulier $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_p \neq 0$, ce qui contredit le lemme 4.18. ■

Preuve du fait. Il est connu que Les groupes de Lie simples de rang 1 (de type non-compact) sont les groupes d'isométries des espaces symétriques à courbure négative, à savoir les espaces hyperboliques réel, complexe et quaternionique, ainsi que le plan hyperbolique de Cayley.

Un calcul direct permet de démontrer le fait. On peut aussi donner une preuve synthétique. Par contradiction si $[\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 0$, la somme $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{g}_{-2\alpha} + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ est une sous algèbre de \mathfrak{g} . Pour plus de simplicité, on raisonne avec les groupes au lieu de leurs algèbres. Soit L le groupe associé à l'algèbre \mathfrak{l} . Évidemment L est non-compact. Le point est qu'il y a une dichotomie pour les sous-groupes connexes, non-compacts des isométries d'espaces symétriques à courbure négative. S'ils admettent un radical non trivial, alors ils fixent un point à l'infini, et donc ils sont contenus dans un groupe parabolique. En particulier, ils ont leur facteur (de Levi) semi-simple compact (voir [11]) où le groupe est semisimple. Il est évident que L contient un groupe semisimple non-compact, donc par la dichotomie, il est nécessairement semisimple. Mais dans ce cas L admet une décomposition en un espace de racines symétriques, i.e. si Y est une racine, il en est de même pour $-Y$. Donc il existe nécessairement un espace non-trivial de racines associées à α , ce qui contredit la définition de \mathfrak{l} . □

Étape 4 : l'algèbre des vecteurs isotropes est $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$

DÉMONSTRATION. Rappelons que \mathfrak{m} est l'algèbre du centraliseur de \mathfrak{a} dans le compact maximal K . Puisque $\mathfrak{m} \subset [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, le lemme 4.9 implique qu'elle est isotrope au point p .

D'autre part, si $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ est isotrope en p , le lemme 4.9 implique que l'élément semisimple $[Y, \Theta Y] \in [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset [\mathfrak{s}_p, W_p^s \cap \mathfrak{g}_p]$ est dans la sous-algèbre de Lie du stabilisateur de p , ce qui contredit le lemme 4.18. Ainsi, La sous algèbre des vecteurs isotropes est exactement $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. ■

Étape 5 : L'algèbre du stabilisateur du point p est $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

DÉMONSTRATION. On sait que tout $Z \in \mathfrak{m}$ est isotrope au point p . Supposons par contradiction que $Z \notin \mathfrak{g}_p$. Alors il existe un élément $Z + \lambda X \in \mathfrak{g}_p$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Ce dernier agit sur l'espace normal à la courbe nulle.

L'action de X sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}_p$ est identifiée à son action sur \mathfrak{g}_α , par l'Etape 4. En particulier l'action de X admet des valeurs propres réelles différentes de 0.

L'action de \mathfrak{m} sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}_p$ admet des valeurs propres purement imaginaires, puisque \mathfrak{m} est contenue dans l'algèbre de Lie du groupe compact maximal. Ceci est vrai en particulier pour l'action adjointe de Z .

D'une part, puisque X et Z commutent (par définition de \mathfrak{m}), l'action de $Z + \lambda X$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}_p$ doit avoir des valeurs propres de partie réelle non-triviale.

D'autre part, $Z + \lambda X \in \mathfrak{g}_p$ agit par des endomorphismes anti-symétriques sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}_p$, donc il a des valeurs propres purement imaginaires. Ceci donne une contradiction. Cela montre que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_p$, puisque $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_p = 0$, et $\mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{s}_p$. On en déduit que $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. ■

Fin. Puisque \mathfrak{g} est isomorphe à $\mathfrak{o}(1, n)$ et l'algèbre du stabilisateur \mathfrak{g}_p est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des déplacements affines Euc_n , on en déduit que M est revêtue par $O(1, n)/Euc_n$ muni d'une métrique de lumière invariante à gauche. Toutes ces métriques sont homothétiques à celle du cône de lumière (de l'espace de Minkowski). Finalement, puisque $n \geq 3$, le revêtement de $O(1, n)/Euc_n \rightarrow M$ devrait être fini, ce qui achève la preuve du théorème 5.6 lorsque G est simple.

3. Cas d'un groupe semisimple

On généralise le théorème du cas simple au cas semisimple, on obtient l'énoncé de classification suivant :

THÉORÈME 5.6. *Soit G un groupe de Lie semisimple non-compact de centre fini, agissant localement fidèlement, isométriquement **non-proprement** sur une variété de lumière (M, h) . Supposons que G n'admet aucun facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$. Alors, à revêtement fini près :*

- $G = H \times H'$, où H est localement isomorphe à $O(1, n)$.
- G admet une orbite homothétique (à revêtement fini près) à un produit métrique $Co^n \times N$, où N est une variété riemannienne H' -homogène. L'action de $H \times H'$ sur $Co^n \times N$ est l'action produit.

Le lemme 5.1 et la proposition 4.13 ont permis de réduire la preuve du théorème 5.6 à l'étude des actions non-propres transitives d'un groupe semisimple n'admettant aucun facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$. Le lemme suivant réduit la situation au cas simple :

LEMME 5.7. (Réduction au cas simple) *Soit X un élément d'une algèbre de Cartan \mathfrak{g} tel que W_X^s est isotrope au point p . Considérons la décomposition de \mathfrak{g} en facteurs simples. Soit \mathfrak{h} un tel facteur simple, et $H \subset G$ le groupe associé. Supposons que X admet une projection non-triviale sur \mathfrak{h} . Alors l'orbite de H est non-propre et de lumière.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_s$, où \mathfrak{h}_i sont les facteurs simples de \mathfrak{g} , et soit X_i la projection de X sur \mathfrak{h}_i . Si $W_{X_i, \mathfrak{h}_i}^s$ est l'espace stable de X_i associé au \mathfrak{h}_i , il est facile de voir que $W_X^s = W_{X_1, \mathfrak{h}_1}^s \oplus \dots \oplus W_{X_s, \mathfrak{h}_s}^s$. En particulier, si W_X^s est isotrope au point p et \mathfrak{h} est un facteur simple sur lequel X a une projection non triviale X' , alors $W_{X', \mathfrak{h}}^s$ est non-trivial et isotrope au point p . On déduit alors du lemme 5.1 que la H -orbite de p est de lumière et l'action de H est non-propre. ■

Ce lemme montre qu'il existe un facteur H de G admettant une orbite $H.p$ non-propre et de lumière. Ainsi en appliquant le résultat de la section précédente, on déduit que H est localement isomorphe à $O(1, n)$, $n \geq 3$, et $H.p$ est homothétique à revêtement fini près au cône Co^n . Il existe un groupe semisimple H' tel que G est un quotient fini de $H \times H'$. Ce produit agit localement fidèlement sur M , on peut donc admettre (pour simplifier les notations) que $G = H \times H'$ dans ce qui suit.

Considérons $O = G.p$ la G -orbite contenant $H.p$. Ce qui reste à prouver du théorème 5.6 se déduira de la description de O : à revêtement fini près, c'est un produit métrique directe $H.p \times H'.p$. Ceci sera montré dans la proposition suivante, qui sera aussi utile dans le cas des groupes simples admettant un facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 5.8. *Soit G un groupe semisimple agissant localement fidèlement, transitivement et non-proprement sur une variété de lumière (M, h) . Supposons $G = H \times H'$, où H est isomorphe à $O(1, n)$, $n \geq 2$, et H' est semisimple.*

- Supposons $n \geq 3$. Si pour un certain $p \in M$, l'orbite $H.p$ est homothétique à Co^n , alors M est homothétique au produit métrique $M = Co^n \times N$, où N est une variété H' -homogène riemannienne.
- Supposons $n = 2$. Si pour $p \in M$, l'orbite $H.p$ est homothétique à Co^1 , alors M est homothétique au produit métrique $Co^1 \times N$. Si $H.p$ est homothétique à Co^2 , alors M est un produit topologique $Co^2 \times N$. De plus, il existe une famille de dimension finie de métriques de lumière G -homogènes, qui est, à homothétie près, en bijection avec l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^{\dim N}$. À homothétie près, une telle h induit

la métrique standard sur le cône Co^2 et une métrique H' -homogène riemannienne sur N .

Dans tous les cas, l'action de G est l'action produit.

DÉMONSTRATION. M est naturellement feuilletée par des cônes de lumière $\mathcal{H}_x = H.x$. Ce feuilletage est G -invariant : si $g \in G$, alors, $g\mathcal{H}_x = gH.x = Hg.x = \mathcal{H}_{g.x}$, puisque H est normal dans G .

1) On démontre d'abord que M est un produit topologique. Par homogénéité, il suffit de montrer que pour $p \in M$, l'intersection $H.p \cap H'.p$ est réduite à $\{p\}$. Si ce n'est pas le cas, on aurait que $h' \in H'$ avec $h'.p \in H.p$ et $h'.p \neq p$. Ceci implique que $h'.H.p = H.h'.p = H.p$. Donc h' préserve l'orbite $H.p$ et agit sur elle en commutant avec H . On achève ainsi la preuve à l'aide du lemme suivant, qui affirme que h' agit trivialement sur $H.p$, contredisant le fait que $h'.p \neq p$.

LEMME 5.9. *Soit h' une isométrie du cône Co^n , $n \geq 2$ (resp. de Co^1), qui commute avec l'action de $O(1, n)$ (resp. $O(1, 2)$). alors h' est l'application identité sur Co^n (resp. Co^1).*

DÉMONSTRATION. On commence d'abord par le cas du cône Co^1 . Une isométrie de Co^1 est un difféomorphisme de \mathbf{S}^1 . Si ce dernier commute avec l'action projective de $O(1, 2)$ sur \mathbf{S}^1 , il doit fixer tous les points fixes des matrices paraboliques de $O(1, 2)$. Mais l'ensemble de ces points fixes est exactement \mathbf{S}^1 , ce qui donne le résultat.

En dimension supérieure, Si on voit le cône Co^n comme $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ muni de la métrique $0 \oplus g_{\mathbf{S}^{n-1}}$, l'isométrie h' est de la forme : $(t, x) \mapsto (t - \mu(x), \phi(x))$. Ici ϕ est une transformation conforme de \mathbf{S}^{n-1} qui satisfait $\phi^*g_{\mathbf{S}^{n-1}} = e^{2\mu}g_{\mathbf{S}^{n-1}}$. Si h' commute avec l'action de $O(1, n)$, elle doit laisser invariante toute droite de points fixes des matrices paraboliques de $O(1, n)$. Cela implique que $\phi(x) = x$ pour tout x , ainsi $\mu(x) = 0$. ■

2) Observons maintenant que $H'.p$ est riemannienne, sinon elle contiendrait la courbe nulle \mathcal{N}_p , et on aurait $\mathcal{N}_p \subset H.p \cap H'.p$, ce qui contredit le fait : $H.p \cap H'.p = \{p\}$.

On traite d'abord le cas $H = O(1, n)$, $n \geq 3$. Supposons que $H.p$ est homothétique à Co^n , et soit S un sous-groupe compact maximal dans le groupe du stabilisateur de p dans H . Puisque H et H' commutent, S agit trivialement sur $H'.p$: $sh'.p = h's.p = h'.p$. Par le premier point de la

preuve, on sait que $T_p(H.p)$ est transverse à $T_p(H'.p)$. De plus il existe une décomposition S -invariant : $T_pM = T_p(H'.p) \oplus T_p(\mathcal{N}_p) \oplus E$, où E est un sous-espace riemannien de $T_p(H.p)$, sur lequel S agit irréductiblement par l'action standard de $O(n-1)$ sur \mathbb{R}^{n-1} .

Soit F l'orthogonal de $T_p(H.p)$ dans T_pM . Cet espace est transverse à E , donc F est le graphe d'une application linéaire $A : T_p(H'.p) \oplus T_p(\mathcal{N}_p) \rightarrow E$. Cette application A entrelace l'action triviale de S sur $T_p(H'.p) \oplus T_p(\mathcal{N}_p)$ et l'action irréductible sur E , donc $A = 0$, et $F = T_p(H'.p) \oplus T_p(\mathcal{N}_p)$. Comme conséquence, la somme $T_p(H'.p) \oplus T_p(H.p)$ est orthogonale pour la métrique h_p , et par homogénéité de M , cela reste vrai en tout point M . La variété M est un produit métrique, $Co^n \times N$, où N est riemannienne et H' -homogène.

Il reste à traiter le cas de $H = O(1,2)$. Si pour $p \in M$, $H.p$ est homothétique à Co^1 , i.e. elle est 1-dimensionnelle et de lumière, alors M est un produit métrique $Co^1 \times N$, avec N riemannienne et H' -homogène.

Maintenant, supposons que $H.p$ est homothétique à Co^2 . On fixe une base (e_1, e_2) de $T_p(H.p)$, avec e_1 isotrope, et (e_3, \dots, e_s) une base de $T_p(H'.p)$. Soit H_p (resp. H'_p) le stabilisateur de p dans H (resp. dans H'). Les éléments de H_p induisent des transformations de $T_p(H.p)$ avec des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, dans la base (e_1, e_2) . En particulier, si $\langle \cdot \rangle$ est un produit scalaire riemannien H'_p -invariant sur $T_p(H'.p)$, et l est une forme linéaire sur $T_p(H'.p)$, alors h'_p défini par $h'_p(e_1, e_i) = 0$ pour tous $i = \{1, \dots, s\}$, $h'_p(e_2, e_2) = 1$, $h'_p(e_2, e_j) = l(e_j)$, $j \in \{3, \dots, s\}$, et $h'_p(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle$ pour tous $i, j \in \{3, \dots, s\}$; est un produit de lumière sur T_pM qui s'étend en une métrique de lumière G -homogène sur M .

Réciproquement, toute métrique de lumière G -homogène est homothétique à une des formes précédentes. Ainsi, il existe une famille de dimension finie de métriques de lumière G -homogène sur M , paramétrisées à homothétie près par les formes linéaires sur $\mathbb{R}^{\dim M - 2}$.

COROLLAIRE 5.10. *Soit G un groupe de Lie semisimple non-compact de centre fini, agissant localement fidèlement, isométriquement, transitivement et non-proprement sur une variété de lumière (M, h) , i.e. M est un espace homogène de lumière G/I , de groupe d'isotropie non-compact I . Alors à revêtement fini près, G est isomorphe à $O(1, n) \times H'$, où $n \geq 2$ et H' est semisimple.*

- Si $n \neq 2$, à revêtement fini près, la variété M est homothétique à un produit métrique $Co^n \times N$, où N est un H' -homogène espace riemannien.
- Si $n = 2$, à revêtement fini près, M est soit homothétique à un produit métrique $Co^1 \times N$ comme ci-dessus, soit M est un produit topologique $Co^2 \times N$, et il existe une famille de dimension finie de produits G -homogènes de lumière, qui sont à homothétie près, en bijection avec les formes linéaires sur $\mathbb{R}^{\dim N}$. À homothétie près, une telle h induit sur Co^2 , la métrique de lumière standard et une métrique riemannienne H' -homogène sur N .

Dans tous les cas, l'action de G sur M est l'action du produit.

DÉMONSTRATION. On suppose que G est semisimple, non-compact, de centre fini. Le groupe G agit transitivement et non-proprement sur une variété de lumière (M, h) . En passant à un revêtement fini de G si nécessaire, on peut supposer que $G = H_1 \times \dots \times H_s$, où chaque H_i est un groupe simple de centre fini. Pour $p \in M$, et $i = 1, \dots, s$ on appelle G_p^i la projection du groupe d'isotropie G_p sur H_i , et H_p^i l'intersection $G_p \cap H_i$. Chaque H_p^i est un sous-groupe normal de G_p .

Puisque G_p est non-compact, G_p^i a nécessairement une adhérence non-compacte. Traitons par exemple le cas $i = 1$. Soit (g_k) une suite qui tend vers l'infini dans G_p , tel que la projection de (g_k) sur H_1 tend aussi vers l'infini. À l'aide de (la preuve de) la Proposition 4.14, on obtient un X dans la sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et $p' \in M$ tels que W_X^s est isotrope au point p' . Maintenant, la projection de (g_k) sur H_1 tend vers l'infini, et la décomposition de Cartan dans G étant obtenue comme produit de décompositions de Cartan dans les H_i , on obtient que la projection X_1 de X sur \mathfrak{h}_1 est non-triviale. Ainsi, comme on l'avait déjà remarqué $W_{X_1, \mathfrak{h}_1}^s$ est isotrope en p' . Si H_1 n'est pas localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, on obtient que $W_{X_1, \mathfrak{h}_1}^s$ a une dimension > 1 , et donc $H_1.p'$ est de lumière, sur lequel l'action de H_1 est non-propre. Par ce qui a été fait précédemment, H_1 est isomorphe à $O(1, n)$, $n \geq 3$, et $H_1.p'$ est homothétique à Co^n . On peut donc appliquer la Proposition 5.8 pour conclure.

Le cas restant est lorsque H_1 est un revêtement fini de $PSL(2, \mathbb{R})$, et G_p^1 n'admet pas une adhérence compacte. Observons que l'orbite $H_1.p$ ne peut pas être de dimension 3. En effet, soit $\langle \rangle_p$ le pull-back de h_p dans l'algèbre de Lie \mathfrak{h}_1 . Soit $g \in G_p$, et g_j la projection de g sur H_j . Puisque $D_p g$ laisse invariant h_p , on obtient que $\langle \rangle_p$ est $Ad(g_1)$ -invariante. Mais $\langle \rangle_p$ est soit

riemannienne, soit de lumière. Dans les deux cas, on a vu dans la preuve de la proposition 3.10 que le sous-groupe $S \subset H_1$ tel que $Ad(S)$ préserve $\langle \cdot \rangle_p$, est compact, ce qui contredit le fait que G_p^1 n'a pas d'adhérence compacte.

Si $H_1.p$ est de dimension 2 et riemannien, H_p^1 est le sous-groupe maximal compact $K \subset H_1$. Puisque H_p^1 est normal dans G_p , on obtient que K est normal dans G_p^1 , ce qui donne $G_p^1 = K$, contradiction !

On conclut que $H_1.p$ est soit de dimension 1 et de lumière, soit de dimension 2 et de lumière. Il suit de la Proposition 3.10 que $H_1.p$ est homothétique à Co^1 ou Co^2 . On aboutit au résultat en utilisant la Proposition 5.8. ■

4. Cas où la variété est compacte

Si la variété M est compacte, il n'y a qu'un seul groupe simple qui peut agir isométriquement comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 5.11. *Soit G un groupe simple non-compact de centre fini, agissant isométriquement sur une variété compact de lumière (M, h) . Alors G est un revêtement fini de $PSL(2, \mathbb{R})$, et toutes les orbites de G sont fermées, de dimension 1, et de lumière.*

DÉMONSTRATION. On suppose que G est simple de centre fini, et agit localement fidèlement par des isométries sur une variété compacte de lumière (M, h) .

On suppose d'abord par l'absurde que G n'est pas isomorphe à $PSL(2, \mathbb{R})$. Par compacité toute suite de M est une suite non-fuyante. Il suit du premier point de la Proposition 4.14 que pour tout X dans une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , W_X^s est isotrope en tout $p \in M$. Donc, en utilisant le dernier point du lemme 5.1, et la conclusion du corollaire 5.10, on obtient que G est localement isomorphe à $O(1, n)$, et tout G -orbite est homothétique à Co^n , $n \geq 3$. Rappelons que K est un sous groupe compact maximal de G . Soit K_0 le stabilisateur dans K d'un point donné $p_0 \in M$. Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 4.16, le groupe compact K_0 préserve une métrique riemannienne sur M . Puisque toute isométrie peut être linéarisée autour de chaque point fixe (via l'application exponentielle), il est facile de voir que l'ensemble des K_0 -points fixes est une sous variété fermée de M , qu'on appellera M_0 . On connaît explicitement l'action de K sur Co^n , et on remarque que toute orbite de K est de type riemannien. Soit $S(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0)$ l'ensemble des produits scalaires euclidiens sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0$. Il existe une application continue $\mu : M_0 \rightarrow S(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0)$ définie comme suit : si X et Y sont deux vecteurs de \mathfrak{k} , et \bar{X} et \bar{Y} sont leurs

projections sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0$, alors $\mu(p)(\overline{X}, \overline{Y}) = h_p(X(p), Y(p))$. Maintenant, toute transformation homothétique, linéaire de l'espace de Minkowski préserve Co^n , et agit sur lui par une transformation homothétique pour la métrique de lumière, et commute avec toute isométrie de Co^n . Comme conséquence, sur $G.p_0$, il existe un flot à 1 paramètre d'homothéties h^t , qui transforme $h|_{G.p_0}$ à $e^{2t}h|_{G.p_0}$, et commute avec l'action de K (en particulier, il laisse invariant $M_0 \cap G.p_0$). Il s'en suit que $\mu(h^t.p_0) = e^{2t}\mu(p_0)$. Maintenant, par compacité de M_0 , il existe une suite (t_k) qui tend vers $+\infty$ telle que $h^{t_k}.p_0$ tend vers $p_\infty \in M_0$. On obtient alors par continuité de $\mu : \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{2t_k}\mu(p_0) = \mu(p_\infty)$, ce qui est contradictoire.

Il reste à comprendre ce qui se passe si G a un centre fini, et localement isomorphe à $PSL(2, \mathbb{R})$. Fixons X, Y, Z la base standard de $\mathfrak{g} : [Y, Z] = X$, $[X, Y] = 2Y$, and $[X, Z] = -2Z$. Il découle de la proposition 4.14 que Y et Z sont isotropes en tout point $p \in M$. Comme conséquence, en tout point $p \in M$, une combinaison non-triviale linéaire de Y et Z s'annule, ainsi toutes les orbites de G sont au plus de dimension 2, et elles sont de lumière du moment que les stabilisateurs des points sont compacts. S'il existe une orbite $G.p_0$ de dimension 2, la Proposition 3.10 assure qu'elle est homothétique à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ munie de la métrique $d\theta^2$ (particulièrement Co^2). On obtient une contradiction comme ci-dessus, en utilisant l'action du compact maximal et le flot homothétique sur Co^2 (ici $\mathfrak{k}_0 = 0$).

On conclut que toute G -orbite est 1-dimensionnelle et de lumière. Puisque G a un centre fini, ces orbites sont des revêtements finis du cercle, et sont donc fermées. ■

5. Variétés sous-Lorentziennes

Cette notion modélise le cas naturel des sous variétés de variétés Lorentziennes.

Une *métrique sous-lorentzienne* g sur une variété M est un 2-tenseur covariant symétrique, qui est en tout point, soit un produit scalaire euclidien, soit lorentzien, soit un produit de lumière. Sa nature peut changer d'un point à un autre. Alors si (L, h) est un variété Lorentzienne et M est une sous variété de L , la restriction de h sur M est une métrique sous-lorentzienne.

Il est intéressant d'étudier la géométrie de ces structures naturelles et riches (voir [18] pour une étude sur la forme normale de ces métriques en dimension 2).

On restreint notre étude ici à l'adaptation de nos résultats sur le cas de lumière, à la situation sous-lorentzienne.

5.0.4. *Dynamique lorentzienne.* Rappelons les trois exemples fondamentaux des variétés lorentziennes admettant un groupe d'isométries agissant non-proprement. Ce sont les espaces à courbure constante :

- (1) L'espace de Minkowski : $Min_{1,n-1} = O(1, n-1) \times \mathbb{R}^n / O(1, n-1)$
- (2) L'espace de Sitter $dS_n = O(1, n) / O(1, n-1)$
- (3) l'espace anti de Sitter $AdS_n = O(2, n-1) / O(1, n-1)$

Dans le cas de l'espace Minkowski, le groupe d'isométrie n'est pas semi-simple.

La dynamique lorentzienne et de lumière sont unifiées dans le théorème suivant, qui est essentiellement un corollaire du théorème 5.6 et des résultats de [4] :

THÉORÈME 5.12. *Soit G un groupe semisimple de centre fini, n'admettant aucun facteur local, et n'admettant aucun facteur isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, agissant isométriquement, non-proprement sur une variété sous lorentzienne M . Alors à revêtement fini près, G admet un facteur G' isomorphe à $O(1, n)$ ou $O(2, n)$ et admet une orbite homothétique à dS_n , AdS_n ou Co^n .*

PREUVE DU THÉORÈME. Résumons d'abord dans ce qui suit, les résultats sur la dynamique Lorentzienne prouvés dans [9], et dont les démonstrations sont initiées dans [1, 2, 4, 16].

THÉORÈME 5.13. *Soit G un groupe semisimple de centre fini, n'admettant aucun facteur compact et dont aucun facteur local n'est isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$, agissant isométriquement sur une variété lorentzienne M . Alors à revêtement fini près, G admet un facteur G' isomorphe à $O(1, n)$ ou $O(2, n)$ et une orbite homothétique à dS_n ou AdS_n .*

Observons maintenant que le développement le long de ce mémoire, en particulier la Proposition 4.14, n'invoque pas explicitement la nature de Lumière de la métrique ambiante, ainsi elle s'applique au cas lorentzien, et en général au cas sous-lorentzien. Cela permet de trouver une G -orbite O non-propre, i.e. l'algèbre du stabilisateur contient des éléments nilpotents (voir la fin de la preuve de la Proposition 4.13). Soit $x_0 \in O$ un point de cette orbite.

Si la métrique ambiante en x_0 est lorentzienne, alors on applique le théorème 5.13 à la variété Lorentzienne M' qui est un ouvert de M comprenant les points où la métrique est lorentzienne.

Si la métrique en x_0 est riemannienne ou de lumière, on observe que l'action de G sur O est localement fidèle. La preuve dans le cas mixte se fait exactement comme dans le lemme 4.16 dans le cas de lumière. Par l'absurde, Si un facteur H de G fixe O , alors l'isotropie infinitésimale x_0 est triviale (car la métrique en x_0 est riemannienne ou de lumière), Ainsi l'action de tout sous-groupe connexe compact de H est triviale, ce qui contredit le fait que G agit fidèlement (voir la preuve du lemme 4.16). Maintenant, puisque l'algèbre du stabilisateur en x_0 contient des éléments nilpotents, et puisque l'action sur O est localement fidèle, on obtient que O ne peut être riemannienne, et donc elle est nécessairement de lumière. On applique alors le théorème 5.6 pour en déduire que O est homothétique au cône de lumière Co^n (à revêtement fini près). \square

5.0.5. *Quelques questions restantes.* Les résultats de [9] sont plus forts que les affirmations du théorème 5.13, puisqu'ils contiennent une description géométrique détaillée de la variété lorentzienne M . C'est la partie qui manque au théorème 5.6 dans le cas de lumière non-homogène et le théorème 5.12 dans le cas sous-lorentzien. En particulier, dans le cas sous-lorentzien, il reste à étudier les cas pour lesquels la variété est purement lorentzienne et les cas où les structures de lumière et lorentziennes cohabitent!?

CHAPITRE 6

Actions des groupes résolubles sur les variétés compactes

Les chapitres précédents étaient consacrés à la classification des actions de groupes de Lie semisimples agissant isométriquement non-proprement sur des variétés de lumière. Le présent chapitre traite les actions de l'autre classe des groupes de Lie qui est celle des résolubles. En fait, on restreint notre investissement ici aux groupes nilpotents. L'hypothèse de non-propreté est renforcée, en supposant que la variété ambiante est compacte. Nous supposons de plus que l'action est transitive.

Nous démontrons les résultats de classification suivants :

THÉORÈME 6.1 (Description de la variété). *Soit G un groupe de Lie nilpotent non-compact, agissant transitivement, fidèlement sur une variété compacte M , alors M est le quotient G/Γ , où Γ est un réseau de G .*

On remarquera que ce résultat n'exige pas que l'action préserve une structure géométrique. En munissant la variété M d'une métrique de lumière préservée par G , on obtient une description de G .

THÉORÈME 6.2 (Description du groupe). *Soit G un groupe de Lie nilpotent non-compact agissant isométriquement transitivement sur une variété de lumière compacte M , alors l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est une somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$, où \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie de Heisenberg, et \mathfrak{a} est une algèbre de Lie abélienne.*

La classification des variétés compactes munies de structures géométriques est investie dans beaucoup de travaux. Comme c'était le cas pour les groupes de Lie semisimples, il serait intéressant de voir ce qui se passe dans le cas lorentzien, car il constitue l'espace ambiant naturel de la structure de lumière, de plus il est proche d'un point de vue structurel. Le travail de A.Zeghib (Sur les espaces temps homogènes) donne des détails sur la classification des variétés lorentziennes compactes.

Une des propriétés importantes d'une action de groupe sur une variété compacte est le fait de préserver une mesure finie. C'est le cas du groupe d'isométries d'une variété lorentzienne et plus généralement une variété pseudo-riemannienne. Cela construit de jolis ponts entre la théorie des groupes de Lie et la théorie ergodique, et justifie l'usage de théorèmes "mixtes" comme les théorèmes de Borel, qui décrivent les actions algébriques de groupes préservant une mesure. Dans ce sens une question naturelle se pose, quels sont les groupes de Lie qui présevent une mesure chaque fois qu'ils agissent sur une variété compacte ? la réponse est bien connue, c'est la classe des groupes de Lie moyennables, et il est établi que les groupes nilpotents en font partie.

1. Quelques exemples

EXEMPLE 6.3 (Variété Nil). *Soit H le groupe d'Heisenberg. Il peut être muni d'une métrique de lumière bi-invariante. Cette métrique de lumière passe au quotient de H par un réseau Γ . Ainsi sur la variété compacte $M = H/\Gamma$ (appelée variété Nil), on définit une métrique de lumière invariante par H .*

EXEMPLE 6.4 (Tore \mathbb{T}^2). *Le tore agit sur lui même par translations en préservant une métrique de lumière.*

EXEMPLE 6.5 (Autres actions sur le tore \mathbb{T}^2). *Soit $M \simeq \mathbb{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$ (paramétré par les angles α, β) muni de la métrique de lumière $d\alpha^2$, et soit $G \simeq SO(2) \times \mathbb{R}^2 \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2$. Le groupe G agit sur M par*

$$\begin{aligned} (S^1 \times \mathbb{R}^2) \times (S^1 \times S^1) &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ ([e^{i\theta}, (a, b)], [e^{i\alpha}, e^{i\beta}]) &\longmapsto (e^{i(\alpha+\theta)}, e^{i(\beta+a \sin \alpha + b \cos \alpha)}) \end{aligned}$$

G préseve bien $d\alpha^2$.

On peut même définir une action de $S^1 \times \mathbb{R}^4$ sur \mathbb{T}^2 par

$$\begin{aligned} (S^1 \times \mathbb{R}^4) \times (S^1 \times S^1) &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ ([e^{i\theta}, (a, b, c, d)], [e^{i\alpha}, e^{i\beta}]) &\longmapsto (e^{i(\alpha+\theta)}, e^{i(\beta+a \sin \alpha + b \cos \alpha + c \sin 2\alpha + d \cos 2\alpha)}) \end{aligned}$$

et cette action préserve toujours $d\alpha^2$.

Ce dernier exemple ne rentre pas dans le cadre de notre classification, mais on le mentionne pour souligner qu'un changement de structure de lumière sur un même objet compact, change la nature du groupe structurel.

2. Preuves des théorèmes

NOTATION 6.6. M désigne une variété compacte de dimension n et G un groupe de Lie non-compact, nilpotent de dimension m agissant transitivement et fidèlement sur M .

M est identifiée au quotient G/G_p où G_p est le stabilisateur d'un point $p \in M$.

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , \mathfrak{g}_p l'algèbre de Lie du stabilisateur G_p .

Soit $Gr_p(\mathfrak{g})$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels p -dimensionnels de \mathfrak{g} .

2.1. Théorème de Borel-Tits. Le théorème de Borel-Tits (rappelé ci dessous) décrit quelques aspects de rigidité des actions algébriques possédant de la récurrence (e.g. préservant une mesure) sur les variétés algébriques.

THÉORÈME 6.7 (Borel-Tits). *Soit G un groupe algébrique, agissant algébriquement sur une variété algébrique lisse V , en préservant une mesure $\mu \in M^1(V)$. On appelle W la clôture de Zariski du support de M dans V . Alors le sous groupe $G_0 \subset G$ constitué des éléments de G qui agissent trivialement sur W , est un sous groupe algébrique, normal et co-compact de G . En particulier, les G orbites des points W sont toutes compactes.*

Dans le cas général où l'action (resp. le groupe G) n'est pas nécessairement algébrique, une application équivariante (quand elle existe) peut conjuguer l'action récurrente de G avec une action d'un groupe algébrique sur une variété algébrique préservant le poussé en avant de la mesure.

PROPOSITION 6.8. *Soit G (resp. G') un groupe de Lie, agissant transitivement sur une variété M (resp. M'). Soit f une application équivariante de (G, M) à (G', M') si l'action de G préserve une mesure μ sur M alors l'action de G' préserve la mesure $f^*(\mu)$ sur M' .*

2.2. Description de la variété. Ici on donne la preuve du théorème 6.1.

G étant nilpotent et M compacte, il existe donc sur M une mesure μ préservé par G .

Considérons l'application lisse :

$$\begin{array}{ccc} f : M & \longrightarrow & Gr_p(\mathfrak{g}) \\ & & p \longmapsto \mathfrak{g}_p \end{array}$$

où \mathfrak{g}_p est l'algèbre de Lie du stabilisateur de p .

Soit l'action de Ad_G sur $Gr_p(\mathfrak{g})$ définie pour tout $g \in Ad_G$

$$\begin{aligned} Ad_g : Gr_p(\mathfrak{g}) &\longrightarrow Gr_p(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{e} &\longmapsto Ad_g(\mathfrak{e}) \end{aligned}$$

Soit la mesure $f^*(\mu)$ sur $f(M)$, poussé en avant de μ définie pour tout $B = f(A) \subset f(M)$, (où $A \subset M$) par $f^*(\mu)(B) = f^*(\mu)(f(A)) = \mu(A)$. (Cette mesure peut naturellement s'étendre à une mesure μ^* sur $Gr_p(\mathfrak{g})$, en admettant que $\mu^* = f^*(\mu)$ sur $f(M)$, et $Supp(\mu^*) \subset f(M)$ i.e. pour tout $B \subset Gr_p(\mathfrak{g})$, $\mu^*(B) = f^*(\mu)(B \cap f(M))$).

Puisque

$$\mathfrak{g}_{g(p)} = Ad_g(\mathfrak{g}_p)$$

f est équivariante et conjugue l'action de G sur M préservant μ , à l'action de Ad_G sur $Gr_p(\mathfrak{g})$ préservant μ^* .

D'autre part, l'action de Ad_G sur $Gr_p(\mathfrak{g})$ s'étend naturellement en une action de son adhérence de Zariski $\overline{Ad_G}^Z$ sur $Gr_p(\mathfrak{g})$ (action de matrices) qui préserve μ^* . On est alors en position d'appliquer le théorème de Borel Tits.

On sait que $\overline{Ad_G}^Z$ est algébrique, et préserve une mesure μ^* sur la variété algébrique $Gr_p(\mathfrak{g})$. Donc le stabilisateur W de $Supp_{\mu^*}$ est co-compact. Puisque G est nilpotent, alors $\overline{Ad_G}^Z$ est sans facteur compact. Ceci implique que $W = \overline{Ad_G}^Z$, ce qui veut dire que tous les points de M ont la même algèbre de stabilisateur. En particulier, cette algèbre est un idéal. Or l'action est fidèle, donc l'algèbre du stabilisateur est l'idéal trivial, ce qui prouve le théorème.

2.3. Description du groupe, Preuve du théorème 6.2. On suppose maintenant que le groupe G préserve une métrique de lumière sur M , on démontre à l'aide du théorème de Borel-Tits que ce groupe est muni d'une métrique positive définie bi-invariante.

Soit $S^2(\mathfrak{g})$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur \mathfrak{g} . Puisque G préserve une métrique de lumière h sur M , on peut définir l'application f qui associe à tout point $p \in M$, la métrique rapatriée de $T_p M$ vers \mathfrak{g}

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow S^2(\mathfrak{g}) \\ p &\longmapsto q_p \end{aligned}$$

tel que

$$q_p \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (X, Y) \longmapsto q_p(X, Y) = q_p(X_p, Y_p) = q_p \left(\frac{d}{dt} \exp tX.p, \frac{d}{dt} \exp tY.p \right)$$

Montrons que pour tout $p \in \mathfrak{g}$, la métrique q_p est de lumière. Il suffit de montrer que l'algèbre des isotropes \mathfrak{s}_p est de dimension 1.

En effet le théorème 6.1 montre que l'algèbre du stabilisateur \mathfrak{g}_p est de dimension 0. Or \mathfrak{g}_p est de codimension 1 dans \mathfrak{s}_p , ce qui prouve que \mathfrak{s}_p est de dimension 1.

D'autre part, Ad_G (vue comme groupe matriciel sur \mathfrak{g}) agit sur $S^2(\mathfrak{g})$ par conjugaison :

$$\begin{aligned} Ad_G \times S^2(\mathfrak{g}) &\longrightarrow S^2(\mathfrak{g}) \\ (g, q_1) &\longmapsto g \cdot q_1 = {}^t g q_1 g \end{aligned}$$

f est une application équivariante conjugant l'action de G sur M préservant la mesure μ , en une action de Ad_G sur $S^2(\mathfrak{g})$ qui préserve la poussée en avant μ^* de μ par f .

Encore une fois l'action de Ad_G sur $S^2(\mathfrak{g})$ s'étend en une action de son adhérence de Zariski $\overline{Ad_G}$ sur $S^2(\mathfrak{g})$ et qui préserve la mesure μ^* . On est alors en position d'appliquer le théorème de Borel-Tits.

$\overline{Ad_G}^Z$ est algébrique, et préserve une mesure μ^* sur la variété algébrique $S^2(\mathfrak{g})$. Donc le stabilisateur W de $Supp_{\mu^*}$ est co-compact, puisque G est nilpotent, $\overline{Ad_G}^Z$ est sans facteur compact. Il s'en suit que $W = \overline{Ad_G}^Z$, ce qui veut dire que pour une métrique de lumière $q_p = f(p)$, on a pour tout $g \in Ad_G$, $q_P = {}^t g q_p g$. Donc cette métrique est une métrique de lumière Ad_G invariante (i.e. bi-invariante). Le théorème suivant montre que dans ce cas, \mathfrak{g} est nécessairement isomorphe à l'algèbre de Heisenberg.

THÉORÈME 6.9. *Soit G un groupe de Lie noncompact, dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est munit d'une forme bi-invariante k de lumière alors : \mathfrak{g} est une somme directe k -orthogonale $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ où \mathfrak{k} (resp. \mathfrak{a}) est une algèbre semisimple compacte (resp. abélienne) et \mathfrak{h} est soit l'algèbre de Heisenberg, soit l'algèbre $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.*

Pour conclure la preuve du théorème (description du groupe) il suffit d'exclure le cas où \mathfrak{h} est $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$. C'est évident, car \mathfrak{g} est nilpotente, et ne peut donc contenir un facteur isomorphe à $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ (qui n'est pas nilpotente).

Bibliographie

- [1] S. Adams : Orbit nonproper actions on Lorentz manifolds, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), no. 2, 201-243.
- [2] S. Adams : Dynamics of semisimple Lie groups on Lorentz manifolds, *Geom. Ded.* **105** (2004), 1-12.
- [3] M. Akivis, V. Goldberg, On some methods of construction of invariant normalizations of lightlike hypersurfaces. *Differential Geom. Appl.* 12 (2000), no. 2, 121-143.
- [4] A. Arouche, M. Deffaf, A. Zeghib , On Lorentz dynamics : From group actions to warped products via homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007) 1253–1263
- [5] E. Bekkara, C. Frances, A. Zeghib, On lightlike geometry : isometric actions, and rigidity aspects. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343 (2006), no. 5, 317–321.
- [6] F. Bonsante, Flat spacetimes with compact hyperbolic Cauchy surfaces. *J. Differential Geom.* 69 (2005) 441–521.
- [7] Y. Carrière, Flots riemanniens. *Astérisque* No. 116 (1984), 31–52.
- [8] G. D’Ambra, M. Gromov, Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in differential geometry* (Cambridge, MA, 1990), 19–111, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 199.
- [9] M. Deffaf, K. Melnick, A. Zeghib, Actions of noncompact semisimple groups on Lorentz manifolds, to appear in *GAFA*. ArXiv math.DS/0601165.
- [10] K. Duggal, A. Bejancu, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications. *Mathematics and its Applications*, 364. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [11] P Eberlein : *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, University of Chicago Press, Chicago, 1996.
- [12] F. Friedlander, The wave equation on a curved space-time. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, No. 2. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1975.
- [13] S. Hawking, G. Ellis, The large scale structure of space-time. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, No. 1. Cambridge University Press, London-New York, 1973.
- [14] A. Knapp, Lie groups beyond an introduction. Second edition. *Progress in Mathematics*, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002
- [15] T. Kobayashi, T. Yoshino, Compact Clifford-Klein form of symmetric spaces - revisited, *Pure Appl. Math. Q.*, **1(3)**, (2005) 591-663.
- [16] N. Kowalsky, Noncompact simple automorphism groups of Lorentz manifolds. *Ann. Math.* 144 (1997), 611-640.
- [17] D. Kupeli, Singular semi-Riemannian geometry. With the collaboration of Eduardo Garca-Ro on Part III. *Mathematics and its Applications*, 366. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

- [18] T. Miernowski, Thesis, école normale supérieure de Lyon, 2005.
- [19] P. Molino, Riemannian foliations. Progress in Mathematics, 73. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988
- [20] P. Chruściel, On rigidity of analytic black holes. *Comm. Math. Phys.* 189 (1997) 1-7.
- [21] I. Robinson, A. Trautman, Integrable optical geometry, *Lett. Math. Phys.* **10**, 179–182 (1985).
- [22] K. Scannell, Flat conformal structures and the classification of de Sitter manifolds, *Comm. Anal. Geom.*, 7 (1999), no. 2, 325–345.
- [23] A. Zeghib, Geodesic foliations in Lorentz 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.* 74 (1999) 1–21.
- [24] A. Zeghib, Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. II. Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups. *Geom. Funct. Anal.* 9 (1999), 823–854.