

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER

En **Mathématiques**
Spécialité : **Recherche Opérationnelle**
(Méthodes Stochastiques)

par
KERDALI Abida

Thème :

**ESTIMATION RECURSIVE
DES MODELES CONDITIONNELLEMENT
HETEROSCEDASTIQUES PERIODIQUES**

Soutenu le 17 mars 2005, devant le jury composé de :

M. Amar AISSANI, Professeur, USTHB.
M. Mohamed BENTARZI, Professeur, USTHB.
M. Sadek BOUROUBI, Maître de conférences, USTHB.
M. Mohamed Said MAAMRA, Chargé de cours, USTHB.
M. Abdelhakim AKNOUCHE, Maître assistant, USTHB.

Président
Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Invité

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur Mohamed Bentarzi pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir consacré beaucoup de son temps précieux. Je le remercie aussi pour m'avoir accordé son attention avec une extrême patience.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur le Professeur Amar Aissani pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse.

Je remercie également tous les membres du jury qui ont accepté d'en faire partie, messieurs Sadek Bouroubi, Mohamed Said Maamra et Abdelhakim Aknouche.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance et ma profonde gratitude.

Mes derniers mots et mes remerciements les plus profonds seront pour ma famille : ma mère et mon défunt père, qu'Allah le tout puissant puisse l'accueillir dans son vaste paradis, qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Et bien sûr pour mon mari Mourad et mon fils Mohamed El-Amine qui m'ont encouragé et soutenu tout le long de ces années. Sans oublier mes sœurs Elyakout, Houria et Salima et mes frères Abdelhafid, Ali, Mourad et Nouredine. A tous, je dédie cette thèse.

Résumé :

Nous considérons dans cette thèse un certain nombre de méthodes d'estimations adaptées aux modèles ARCH classiques et périodiques. On y trouve en particulier deux principales méthodes en ligne pour chaque modèle (classique et périodique) ; ces méthodes concernent le cas où la taille de la série des données observées n'est pas fixe, c'est à dire que les données sont disponibles progressivement dans le temps. L'introduction de ces méthodes en ligne a permis de soulever le problème de coût en temps de traitement que les méthodes d'estimation hors ligne ont connu puisqu'elles nécessitent à l'introduction de chaque nouvelle donnée le déroulement complet de toute la procédure d'estimation. Donc les méthodes présentées dans ce travail sont des méthodes en ligne dont la première permet de calculer récursivement un estimateur des paramètres d'un modèle ARCH(q) et d'un modèle PARCH_d(q). Hors l'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'inversion d'une matrice de grande taille ce qui est très coûteux en temps de traitement du programme si le nombre des paramètres à estimer est grand. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé la seconde méthode qui améliore beaucoup la première puisqu'elle ne nécessite pas l'inversion d'une matrice de grande taille ; seulement il faut prendre quelques précautions pour que l'estimateur ne s'éloigne pas trop de la vraie valeur des paramètres à estimer puisque les méthodes récurrentes sont très sensibles aux valeurs initiales.

Mots clés :

ARCH, PARCH, estimation récursive, estimation en ligne.

Table des Matières

Introduction	5
1. Classe des modèles ARMA périodiques et processus périodiquement corrélés	13
1.1. Fonction d'autocovariance d'un processus périodiquement corrélé	14
1.2. Processus multivarié stationnaire associé à un processus univarié périodiquement corrélé	14
1.3. Relation entre les autocovariances d'un processus multivarié stationnaire et celles d'un processus périodiquement corrélé	15
1.4. Processus bruit blanc périodique	15
1.5. Modèle autorégressif moyenne mobile périodique	16
1.6. Représentation linéaire des processus périodiquement corrélés	16
1.7. Représentation linéaire de Wold-Cramer	16
1.8. Processus purement indéterminable et processus déterminable du second ordre .	17
1.9. Modèle ARMA périodique (PARMA)	18
1.10. Modèle autorégressif d-périodique pur (PAR)	18
1.11. Modèles moyenne mobile d-périodique pur (PMA)	19
1.12. Méthode d'études des modèles ARMA périodiques	19
1.13. Technique « period-span lumping » et étude des modèles univariés $ARMA_d$ périodiques	20
1.14. Modèle ARMA multivarié associé à un modèle $ARMA_d(p_t, q_t)$ univarié	20
1.15. Condition de Causalité d'un modèle ARMA multivarié	21
1.16. Condition d'invisibilité d'un modèle ARMA multivarié	22
1.17. Condition d'inversibilité d'un modèle autorégressif périodique	22
1.18. Condition d'inversibilité d'un modèle moyenne mobile périodique	22
1.19. Technique « order-span lumping » et étude des modèles univariés auto-régressifs moyenne mobile périodiques $ARMA_d(p_t, q_t)$	23
1.20. Modèle multivarié moyenne mobile périodiques d'ordre 1 associé à un modèle multivarié moyenne mobile périodique d'ordre q	23
1.21. Modèle AR multivarié périodique d'ordre 1 associé à un modèle AR multivarié périodique d'ordre p	25

2.	Classe des modèles ARCH	26
2.1	Modèles ARCH classiques	28
2.2	Modèles GARCH(p,q)	32
2.3	Modèles de régression à erreur GARCH	33
2.4	Modèles ARCH-M	33
2.5	Modèles EGARCH	34
2.6	Propriétés des modèles AR(p) avec erreur ARCH(1)	34
2.7	Estimation du modèle AR-ARCH	35
2.7.1	Méthode du Pseudo-maximum de vraisemblance	35
2.7.2	Méthode en deux étapes	36
3.	Les modèles ARCH périodiques	38
3.1	Modèles PARCH	39
3.2	Modèles PGARCH	41
3.3	Modèles PAR-PGARCH	42
3.4	Stationnarité périodique des modèles PARCH	42
3.5	Estimation des modèles PAR-PARCH	44
3.5.1	Gradient	45
3.5.2	Hessienne	46
3.5.3	Matrice d'information	46
4.	Estimation récursive des paramètres d'un Modèle ARCH(q)	49
4.1	Méthode	49
4.2	Méthode en ligne	54
4.3	Choix des valeurs initiales	54
4.3.1	Choix de $\hat{\theta}_q$	55
4.3.2	Choix de P_q	57
4.4	Facteur d'oubli	60
4.5	Admissibilité de la valeur courante	60
4.6	Simulation	61
4.7	Comparaison	70
4.8	Conclusion	73

5. Estimation récursive des paramètres d'un Modèle PARCH _d (q)	74
5.1 Méthode	74
5.2 Méthode en ligne	79
5.3 Choix des valeurs initiales	79
5.3.1 Choix de $\hat{\theta}_q$	80
5.3.2 Choix de P_q	83
5.4 Facteur d'oubli	88
5.5 Admissibilité de la valeur courante	88
5.6 Simulation	89
5.7 Comparaison	114
5.8 Conclusion	121
Conclusion	122
Annexe 1	123
Annexe 2	124
Annexe 3	126
Bibliographie	128

Introduction

L'analyse des séries chronologiques est un champ d'étude fascinant et les énormes progrès de son utilisation depuis quelques années démontrent amplement son importance considérable en tant qu'outil scientifique.

Comme la majorité des données dans les différents domaines parviennent sous forme de séries temporelles, les modèles de séries chronologiques ont été historiquement développés dans le but de description, de prévision ou de contrôle de systèmes. Ainsi l'analyse des séries chronologiques représentait une très grande importance dans les phénomènes aléatoires tels que l'économie, l'hydrologie, l'environnement et autres. Cette analyse permet de construire des modèles stochastiques à travers des séries de données indexées dans le temps en utilisant un ensemble de procédures et de techniques mathématiques, selon les trois étapes suivantes : identification, estimation et validation.

Cependant la plupart des résultats utilisés dans cette analyse, suppose la stationnarité faible du modèle stochastique qui génère la série temporelle sous étude. Donc, les résultats théoriques et pratiques ne sont valables que si le processus est stationnaire ou peut être stationnarisé par une transformation adéquate : différence ordinaire, différence saisonnière, différence mixte ou transformation de Box-Cox qui sont appliquées aux processus non stationnaires pour assurer la stationnarité du second ordre.

Dans divers domaines d'application, la majorité des séries temporelles rencontrées révèlent un comportement saisonnier, bien que, les modèles stationnaires (ou ceux qui peuvent être rendus stationnaires) tels que ARIMA, SARIMA, etc. ne représentent qu'une approximation de la réalité. Ces modèles ont connu une très grande importance dans l'analyse des séries temporelles et suite à la parution du livre de G.E.P Box et G.M Jenkins en 1970, qui est devenu par la suite une référence bibliographique, et grâce à leur méthodologie proposée, ces modèles fut popularisés et font l'objet d'une littérature surabondante.

L'argument conduisant les deux auteurs à introduire les modèles saisonniers est que l'application de la transformation de désaisonnalisation sur la série saisonnière suffit à obtenir une série transformée qui n'est plus saisonnière. Ceci permet d'appliquer par la suite leur méthodologie consistant en trois étapes déjà citées en dessus. Néanmoins, ces transformations ne peuvent faire face qu'à certains types particuliers de non-stationnarité et face à ce problème les analystes des séries chronologiques ont donc besoin d'introduire une nouvelle classe de modèles linéaires généralisant la classe des modèles ARIMA classiques.

L'existence et l'unicité de la décomposition linéaire du processus faiblement stationnaire due à Wold en 1938 sont à la base du développement considérable qu'a connu la classe des modèles linéaires à coefficients constants "ARMA" (autorégressifs moyennes mobiles) et en particulier après l'apparition du fameux ouvrage de Box et Jenkins. Cramer en 1961 a généralisé la décomposition de Wold aux processus non-stationnaires en suggérant par

analogie d'élargir la classe des modèles ARMA à la classe des modèles linéaires autorégressifs moyennes mobiles à coefficients évolutifs dans le temps $ARMA_t(p_t, q_t)$.

En pratique, de nombreuses séries présentent un caractère non régulier qui ne peut être remédié par des transformations tendanciennes, saisonnières ou mixtes, ceci est dû à l'aspect périodique de la fonction d'autocovariance. L'utilisation d'un modèle classique pour traiter ce genre de série serait donc insuffisante et inefficace, le fait que l'analyse classique ne tienne pas compte de la périodicité cachée. Des résultats sur l'effet de négliger la périodicité sont donnés dans Tiao et Grupe (1980) et Osborn (1991), ces études ont montré que le fait de modéliser un processus périodiquement corrélé non stationnaire par un modèle stationnaire mène entre autres à la surévaluation des ordres, à l'inconsistance des estimateurs des paramètres et à l'inefficacité de la prévision (prévision biaisée).

Bien qu'elle soit délicate, l'utilisation d'un modèle non stationnaire serait très intéressante puisqu'il existe des phénomènes aléatoires ne pouvant être représentés de manières adéquates par les modèles ARIMA classiques de Box et Jenkins (1976) mais plutôt par des modèles linéaires à coefficient évolutif dans le temps. En effet, l'introduction de la classe des modèles linéaires autorégressifs moyenne mobile à coefficient et ordre tous les deux périodiques a été une alternative attrayante à la modélisation saisonnière habituelle. De tels modèles sont notés $PARMA_t(p_t, q_t)$ et sont une généralisation des modèles $ARMA(p, q)$ classique.

L'analyse des modèles PARMA avec ses trois volets : identification, estimation et vérification a été explorée par plusieurs chercheurs : Anderson et Vecchia (1993), Bentarzi (1995), Bentarzi et Hallin (1998), Ghysel et al. (1996) et beaucoup d'autres.

Dans les études des propriétés théoriques de ces modèles, l'outil de base qui a été exploité est le théorème de Gladyshev (1961). Ce dernier a créé une dualité entre les processus périodiquement corrélés et les processus stationnaires multivariés du second ordre. Pour la dualité entre modèles : Voir Tiao et Grupe (1980).

En effet, Gladyshev (1961) a donné une définition formelle de la stationnarité périodique des processus périodiques, et a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour une telle stationnarité est la stationnarité du vecteur contenant toutes les variables périodiques.

Connue sous l'appellation de "Period Span Lumping", le principe de cette technique est de ramener l'étude des propriétés d'un modèle périodique univarié à celle du modèle d-varié autorégressif moyenne mobile qui lui correspond, cette approche a fait l'objet de nombreux travaux : Ula et Smadi (1997), Bentarzi (1995), Bentarzi et Hallin (1994), Tiao et Grupe (1980), Cleveland et Tiao (1979), ces deux dernières publications ont donné les formules relatives aux paramètres et à l'ordre du modèle $PARMA_d$ à ceux du processus ARMA d-variés correspondant.

Certains aspects de l'étude des modèles de séries chronologiques restent difficiles à analyser par le biais de cette approche. Citons comme exemple, le problème de la factorisation spectrale d'un processus périodiquement corrélé q dépendant, univarié et multivarié, et les tests de validation (Bentarzi (1995)).

A cet effet une autre approche fut introduite par Bentarzi et Hallin (1994) afin d'y remédier. Appelée par Ula et Smadi (1997) "order span lumping" elle ramène l'étude des propriétés d'un modèle m varié, d périodique, d'ordre q , à l'étude de ces propriétés pour un modèle m_q varié S périodique d'ordre un. Ula et Smadi(1997) ont exploité la nouvelle approche de Bentarzi afin de déterminer les conditions de stationarité périodique d'un processus autoregressif, m varié, d périodique d'ordre p . Bentarzi et Hallin (1994) ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un modèle $MA(q)$ d - périodique soit inversible.

On signale cependant qu'il y a eu plusieurs recherches élaborées par de nombreux chercheurs afin de concevoir des méthodes d'identification de l'ordre, d'estimation des paramètres et l'élaboration des tests de validation des modèles trouvés. Citons les travaux de Aikake (1974), Pagano (1978), Bentarzi et Hallin (1994) et beaucoup d'autres.

Le problème d'identification a été traité par Cleveland et Tiao (1979) ; Bentarzi (2001) a généralisé le critère PDC aux cas des modèles autorégressifs périodiques.

Donc une fois le modèle identifié, l'estimation de ses paramètres est sûrement une étape très importante dans la construction de celui-ci, elle a constitué jusqu'à alors le centre d'intérêt des chercheurs et s'est soldé par de nombreux résultats intéressants. Dans la littérature, on trouve beaucoup de méthodes d'estimation pour les modèles ARMA qui utilisent des techniques classiques de statistiques ; les méthodes les plus courantes sont : le maximum de vraisemblance (MV), Les moindres carrés (MC) et la méthode des moments (Yule-Walker) qui sont programmées dans les logiciels actuels (exemples : SPSS, Maple, Statgraph et Matlab) sans oublier l'approche bayésienne.

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur l'estimation des paramètres des modèles périodiques en utilisant les diverses approches citées ci-dessus. Les modèles $AR(p)$ d -périodiques ont été estimés par Andel (1983), Pagano (1978) et Gipra (1984) en se basant sur la méthode de Durbin (1959) et les résultats de Pagano.

La classe des modèles PARMA de période $d \geq 2$, a trouvé un grand succès lors de son application sur des séries réelles, en particulier : l'économie, l'environnement et la météorologie. Toutefois, elle présente plusieurs inconvénients à cause de sa linéarité, ce qui implique des restrictions sur le type de dynamiques. Ainsi cette modélisation des processus n'est pas certainement adaptée et néglige une partie de l'information contenue dans les séries financières. On a pris des processus à volatilité constante, alors que l'historique des séries temporelles et des volatilités implicites, montrent le contraire, de plus, les queues de distributions des probabilités empiriques des séries financières sont plus épaisses que celle d'une loi normale, c'est-à-dire la probabilité d'un fort mouvement à la hausse ou à la baisse (krashs ou mini-krashs) est dans la réalité trop importante pour pouvoir être modélisée par une loi normale.(cf. Boukerdenna (2002))

Depuis le début des années 1970 suite à la parution du livre de Box et Jenkins (1970 ; édition révisée en 1976) l'accent a été mis sur les modèles linéaires, or devant les problèmes de la modélisation rencontrés pour certaines séries (les nombres de tache solaires, des séries biologiques, des séries financières et monétaires) les modèles non linéaires ont été envisagés et plusieurs modèles ont été abordés : les modèles bilinéaires, les modèles à seuil et les modèles hétéroscédastiques. C'est à cette dernière catégorie de modèle qu'on s'intéresse dans notre travail.

Des formalisations plus ou moins simple à utiliser dans l'analyse des séries financières ont été introduites dans la littérature pour prendre en compte les phénomènes de l'hétéroscédasticité conditionnelles. Les premiers modèles proposés cherchaient essentiellement à introduire des bruits blancs conditionnels hétéroscédastiques, cette démarche s'explique par l'importance de l'hypothèse de marche aléatoire en finance "Hypothèse qui conduit à modéliser directement les rendements c'est-à-dire les accroissements relatifs de prix sous forme de bruit blanc".

Donc il faudra attendre les chocs pétroliers des années 1970, la récession de l'économie mondiale du début des années 1980 et la déréglementation financière qui en suivirent pour que soient revues ou écartées plusieurs hypothèses de la modélisation classique, à laquelle il est désormais reproché une exploitation incomplète de l'information contenue dans la série économique. Ainsi la modélisation classique se retrouve limitative dans ses représentations, et parmi les domaines d'application où la modélisation ARMA se révèle insuffisante, figurent certains problèmes financiers et monétaires. Les séries disponibles dans ce secteur présentent en effet souvent des caractéristiques de dynamique non linéaire dont la plus significative est le fait que la variabilité instantanée de la série (appelée volatilité) dépende de façon importante du passé.

Pour prendre en compte ces remarques, plusieurs approches ont été abordées l'hypothèse. Celle retenue est la modélisation ARCH, qui présente l'intérêt de conserver les propriétés de régularité du processus, enrichissant ainsi la technique de prévision et autorisant l'étude du prix options par des techniques adéquates.

Cette classe de modèle a été introduite par Engle (1982) dans le cadre d'études sur les données macro-économiques, en particulier sur l'inflation au Royaume-Uni. Engle (1982) est parti de la constatation suivante : les travaux économiques usuels effectués sur ces séries qui supposent une volatilité constante laissent certaines données mal expliquées et celles-ci sont souvent regroupées. Elles correspondent à des périodes où les variations deviennent plus forte que celle constatées sur l'ensemble de la série, et sont donc considérées comme aberrantes par un modèle usuel. D'un point de vue statistique, les modèles ARCH constituent une classe spécifique de modèles non linéaires. Dans son article l'auteur ne suppose plus que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc mais envisage plutôt que ce processus est de la forme $\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}$ où η_t sont

$$i.i.d N(0,1) \text{ et } h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \text{ (on suppose que } \alpha_0 > 0 \text{ et } \alpha_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, q)$$

Cette façon de procéder permettait à Engle (1982) de tenir compte du fait que les variations de prix (forte ou faible) étaient suivies d'autres fortes ou faibles de signe imprévisible.

Sur les séries financières, ce type de phénomène est encore plus courant, car on sait que les périodes de forte variation des cours sont souvent groupées (phase d'incertitude économique, tension sur les marchés) contrastant avec des périodes calmes. Là encore un modèle ARMA à volatilité constante ne pourra rendre compte de ce type de processus, ce qui rend certaines données mal expliquées.

Diverses formulations permettant à la variance conditionnelle de dépendre des réalisations passées ont été introduites, parmi elles, on distingue : les modèles bilinéaires et les modèles non linéaire décrits par Jones (1965) . Outre la volatilité, les séries financières présentent fréquemment une tendance saisonnière, de nombreuses études ont révélé cette caractéristique. Parmi ces études, des travaux utilisèrent des autorégressions périodiques pour l'analyse de la structure d'autocorrélation des rendements aux alentours des jours de fermetures. Et dans une contribution originale de Bollerslev et Ghysel (1996) et étant donné que des effets périodiques sont observés au niveau de la moyenne conditionnelle, des séries financières ont émergé les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastique périodique noté PARCH.

Les modèles ARCH ont donné lieu à des extensions diverses "modèle GARCH", "ARMA à erreur ARCH". Par ailleurs la théorie financière a été repensée de façon à inclure la dépendance temporelle de volatilité. Dès lors à côté des développements de la théorie des modèles ARCH on assiste à une remise en question de l'étude concernant un certain nombre de problèmes comme les évaluations des prix et des options. En ce qui concerne les domaines d'application on peut distinguer deux grandes catégories : les premières consistent à tester des théories économiques relatives aux divers marchés. La seconde traite des comportements d'intervention sur le marché des établissements financiers comme la détermination de portefeuille de couvertures.

Initialement, les propriétés statistiques de cette nouvelle classe ont été étudiées dans Weiss (1986) et dans Bera et Higgins (1994) et Bollerslev et al. (1994). Ainsi les modèles ARCH ont fait l'objet de plusieurs recherches où deux étapes essentielles ont été abordées : l'estimation et les tests.

L'estimation des paramètres d'un modèle ARCH par la méthode du maximum du vraisemblance, en employant "L'algorithme du score", a été vue pour la première fois dans Engle (1982) puis elle a été revue et améliorée dans Weiss (1984) et Pantula (1985).

L'approche Bayésienne, utilisée dans la méthode d'intégration de Monté Carlo semble surmonter pas mal d'obstacle ; à titre d'exemple : Geweke (1989) l'appliqua à travers la méthode de l'échantillonnage aux modèle ARCH. Müller et Pole (1995) ont implémenté la méthode de Markov Chain Monté Carlo "MCMC" aux modèles GARCH.

On note que différentes approches d'estimation ont été utilisées : la méthode des moments est la plus répandue dans la littérature mais elle a montré un certain malaise face aux modèles mixtes PARMA ou modèles à composante moyenne mobile périodique.

En général, les méthodes d'estimation sont classées en deux grandes classes et ce en fonction de type de données sur lesquelles elles se basent : Les méthodes "hors ligne" et les méthodes "en ligne". Dans le premier cas, il s'agit d'une série de taille fixe par contre dans le second les données sont progressivement disponibles.

Les techniques d'estimation hors ligne des paramètres de modèles de séries chronologiques peuvent être classées en deux catégories générales : Les méthodes d'estimation utilisant directement les données et les méthodes qui n'utilisent les données qu'à travers une transformation de celle-ci en résumé statistique.

Parmi les méthodes de la première classe nous citons en particuliers la méthode du maximum de vraisemblance et ses différentes approximations (ces approximations sont astreintes à préserver quelques propriétés asymptotiques telles que la convergence et l'efficacité asymptotique) et la méthode des moindres carrés et ses variantes. Parmi les méthodes de la seconde classe, probablement l'approche commune est de transformer en un ensemble fini de résumé statistique (moyennes empiriques, covariance empirique) et d'estimer par la suite les paramètres du modèle (estimateur de Yulle Walker, estimateur de Durbin Levinson, etc.). Le traitement en-ligne des données était au début propre aux problèmes qu'encourageaient les ingénieurs car ils étaient les premiers à les confronter. Les phénomènes à temps continu : Transmission, télécommunication, traitement de signal en automatique, etc.

Cependant, avec l'avènement des grandes bases de données, plusieurs domaines d'application, du fait de leur complexité croissante, font actuellement appel à des données en-ligne (météorologie, finances et bourses). De ce fait, tout laisse à croire que les méthodes en-ligne, bien qu'elles soient peu répandues en statistique, connaîtrons un nouvel essor. Les méthodes d'estimation hors-ligne sont trop lourdes voir impossible lorsqu'elles sont appliquées à des données en ligne, car leur utilisation contraint à chaque introduction d'une nouvelle donnée de refaire la procédure d'estimation pour tout le bloc des données ce qui est très coûteux en terme de complexité spatial et temporel. Face à ce problème les ingénieurs ont développé une méthodologie complète portant le nom "d'identification récurrente". Cette méthodologie part de la conception des algorithmes à l'examen des conditions de mise en œuvre numérique sur le calculateur, en passant par l'étude approfondie de la convergence et l'optimisation de leur vitesse.

Une des raisons de l'existence de plusieurs algorithmes récurrents est la diversité de la nature des problèmes à traiter. Cette diversité implique l'utilisation de plusieurs approches qui peuvent être énumérées selon les quatre classes suivantes : méthodes issues par modification des méthodes hors-ligne, méthodes basées sur les filtres non linéaires, les méthodes d'approximations stochastiques et les méthodes pseudo-régression linéaires.

Les algorithmes récurrents ont occupé une place considérable due au développement du traitement numérique et à l'augmentation constante de la puissance des calculateurs permettant ainsi l'implémentation en temps réel d'algorithmes de plus en plus sophistiqués. L'intérêt de la forme récursive des algorithmes récurrents est dû à la possibilité du traitement en ligne des données en temps réel grâce à une mémorisation finie dans un vecteur de taille fixé. En effet l'estimation courante est remise à jour de manière à ce que le nombre d'opérations et l'espace mémoire ne se croient pas avec le nombre d'observations et ne dépendent que du modèle choisi.(voir aussi Aknouche (2001)).

Dans notre travail, nous nous intéressons principalement au problème de l'estimation récursive des paramètres des modèles autoregressifs hétéroscédastique classiques et périodiques notés respectivement ARCH et PARCH, on y trouve en particulier deux principales méthodes en ligne pour chaque modèle (classique et périodique). Ces méthodes concernent le cas où la taille de la série de données observées n'est pas fixe, c'est-à-dire que les données sont disponibles progressivement dans le temps.

L'introduction de ces méthodes en ligne a permis de soulever le problème de coût en temps de traitement que les méthodes hors ligne ont connu puisqu'elles nécessitent à l'introduction de chaque nouvelle donnée le déroulement complet de toute la procédure d'estimation. Donc, les méthodes présentées dans ce travail sont des méthodes en ligne et hors ligne dont les deux premières permettent de calculer récursivement un estimateur des paramètres d'un modèle ARCH(q) et d'un modèle PARCH _{d} (q) où q est l'ordre du modèle et d la période ; hors l'inconvénient de ces deux méthodes est qu'elles nécessitent l'inversion d'une matrice de grande taille, ce qui est très coûteux en temps du programme si le nombre de paramètres à estimer grand. Pour résoudre ce problème nous avons proposé deux autres méthodes qui améliorent beaucoup les deux premières puisqu'elles ne nécessitent pas l'inversion d'une matrice de grande taille ; seulement, il faut prendre quelques précautions pour que l'estimateur ne s'éloigne pas trop de la vraie valeur de paramètre à estimer, étant donné que les méthodes récurrentes sont très sensibles aux valeurs initiales.

Apport et contenu de la thèse

Ce mémoire dont le thème est "estimation récursive des modèles conditionnellement hétéroscédastiques périodiques" est formée de cinq chapitres et deux annexes, nous présentons brièvement le contenu de chaque chapitre.

Chapitre 1 : Classe des modèles PARMA et processus périodiquement corrélés.

Dans ce chapitre nous donnons un aperçu sur les processus périodiquement corrélés et les modèles linéaires à coefficients périodiques inhérents à ces processus en annonçant quelques définitions générales concernant les modèles ARMA périodiques.

Chapitre 2 : Classe des modèles ARCH classiques.

Ce chapitre est une introduction aux modèles ARCH classiques avec ses différentes extensions et ceci pour mieux suivre le travail élaboré dans cette thèse, nous commençons d'abord par donner une présentation générale des modèles ARCH et leurs caractéristiques.

Chapitre 3 : Classe des modèles ARCH Périodiques.

Dans ce chapitre nous présentons un aperçu panoramique sur les modèles ARCH Périodiques et l'objectif de ces modèles qui consiste à capter l'effet saisonnalité dans la dynamique de la volatilité des séries financières.

Chapitre 4 : Estimation récursive des paramètres d'un modèle ARCH(q).

Dans ce chapitre nous présentons les différentes méthodes d'estimation récursive, hors ligne et en ligne, des paramètres d'un modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique d'ordre q .

Chapitre 5 : Estimation récursive des paramètres d'un modèle PARMA_d(q).

Les méthodes d'estimation récursive des paramètres d'un modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique périodique, de période d et d'ordre q , font l'objet de ce cinquième chapitre.

Une conclusion termine ce travail.

Chapitre 1 :

Classe des modèles ARMA périodiques et processus périodiquement corrélés

Ces dernières années ont révélé un intérêt renaissant pour l'analyse des séries chronologiques, cependant l'analyse standard des séries suppose la stationnarité faible du modèle stochastique qui génère la série temporelle sous étude, il est montré que pour la classe des séries stationnaires nous pouvons toujours trouver deux entiers p et q pour lesquels le modèle ARMA(p,q) associé soit représentatif. Pour certaines séries non stationnaires il existe des transformations usuelles telles que la technique d'élimination de la tendance ou de la saisonnalité permettent de passer à des séries stationnaires. En pratique il y a des séries qui sont présentées adéquatement par les processus ARIMA ou les processus SARIMA pour les séries qui montrent des instabilités saisonnières, or plusieurs séries temporelles rencontrées dans domaines divers tels que : l'économétrie, l'hydrologie, météorologie et les études d'environnement ne peuvent être stationnarisé par une transformation saisonnière telles que la technique d'élimination de la tendance ou de la saisonnalité, dans ce cas l'analyse classique ne tiens pas compte de la périodicité cachée. Des résultats sur l'effet de négliger la périodicité sont donnés par TIAO et GRUPE (1980) ces études ont montré que le fait de modéliser un processus périodiquement corrélé non stationnaire par un processus stationnaire mène entre autre à la surévaluation des ordres, à l'inconsistance des estimateurs des paramètres et à une prévision biaisée, ce qu'on appelle prévision inefficace.

L'introduction de la classe des modèles linéaires autorégressifs moyennes mobiles à coefficients et ordres périodiques a été une alternative attrayante à la modélisation saisonnale habituelle, la justification théorique de l'utilisation des modèles linéaires périodiques revient à la décomposition linéaire de Cramer (1961) faite pour les processus non stationnaires et qui est une généralisation de la décomposition linéaire de Wold (1938) spécifique du cas faiblement stationnaire.

L'analyse des modèles PARMA avec ses trois volets : identification, estimation et validation a été explorée par plusieurs chercheurs : Pagano (1978), Troutman (1979), Tiao et Goutman (1980), Anderson et Vicchia (1993), Bentarzi et Hallin (1996) et beaucoup d'autres.

Dans les études des propriétés théoriques de ces modèles l'outil de base qui a été exploité est le théorème de Gladyshev (1961), ce dernier a créé une dualité entre les processus périodiques et les processus multivariés faiblement stationnaires associés. Ainsi pour faciliter des problèmes concernant les modèles ARMA d-périodiques, on est amené à transférer ces mêmes problèmes aux modèles ARMA d-variés stationnaires associés. Ce qu'on appelle la technique "PERIOD SPAN LUMPING" cette approche a fait l'objet de nombreux travaux de recherches pour l'étude des modèles périodiques citant à titre d'exemple : Bentarzi et Hallin (1995) et Ula et Smadi(1997) et Bentarzi(1998). Toujours dans le contexte de l'étude des

propriétés théoriques des modèles de série chronologiques une autre approche dite "ORDER SPAN LUMPING" a vu le jour après le constat établis par ces chercheurs dans lequel ils remarquèrent que les résultats obtenus jusqu'à la pour les modèles PARMA semblent incomplets pour le cas moyenne mobile périodique.

Définition 1.1 (Processus périodiquement corrélés)

Le processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du second ordre est dit périodiquement corrélé (ou encore périodique au sens faible) s'il existe un entier d strictement positif, tel que pour tout s, t et $\tau \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\begin{aligned} i) \quad & \mu_{t+d\tau} = \mu_t \quad \forall t, \tau \in \mathbb{Z} \\ ii) \quad & \gamma(t+d\tau, s+d\tau) = \gamma(t, s) \quad \forall s, t, \tau \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\gamma(t, s) = E(y_t - E(y_t))(y_s - E(y_s))$ avec $E(y_t) = \mu_t$

Autrement dit, si la moyenne et la fonction d'autocovariance sont d -périodiques dans le temps. De plus on appelle " d " période du processus y_t le plus petit entier positif satisfaisant i) et ii).

Remarque 1.1

Un processus faiblement stationnaire est un processus périodiquement corrélé 1-périodique ($d = 1$).

1.1 Fonction d'autocovariance d'un processus périodiquement corrélé^(*)

Soit $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement corrélé d -périodique de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance $\gamma(\dots)$ d -périodique. Pour tout entier $t \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, tel que : $t = i + d\tau$, alors la fonction d'autocovariance pour l'horizon h (ou d'ordre h) et relative à la $i^{\text{ème}}$ période (ou saison), notée $\gamma_h^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$, est définie par :

$$\gamma_h^{(i)} = \gamma(t, t - h) = \gamma(i, i - h) \quad i = 1, \dots, d, h \in \mathbb{N} \text{ et } t \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

Il est facile de vérifier que : $\gamma_h^{(i+d\tau)} = \gamma_h^{(i)}$ et $\gamma_{-h}^{(i)} = \gamma_h^{(i+h)}$ (1.3)

1.2 Processus multivarié stationnaire associé à un processus univarié périodiquement corrélé

Lors de l'introduction, pour la première fois, de la notion de processus périodiquement corrélés, Gladyshev (1961) a montré que l'on peut toujours construire à partir d'un processus périodiquement corrélé d -périodique, le processus stationnaire d -varié qui lui est correspondant. Cette relation permet la représentation d'un processus d -périodique par un certain processus d -varié qui est stationnaire. Par conséquent l'étude des processus périodiques se ramène immédiatement à celle des processus stationnaires multivariés.

* Voir Bentarzi (1995)

Théorème 1.1 (Gladyshev (1961))

Soit $\{y_t, t \in Z\}$ un processus centré périodiquement corrélé de période d . Pour tout $t \in Z$, l'entier $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ et l'entier τ tel que : $t = i + d\tau$ on définit le processus d -varié $X(\tau)$ où : $X_i(\tau) = y_{i+d\tau}$. Ce processus est alors donné par le vecteur

$$\begin{aligned} X(\tau) &= (X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_d(\tau))^T \\ &= (y_{1+d\tau}, y_{2+d\tau}, \dots, y_{d+d\tau})^T \end{aligned}$$

Alors $\{y_t, t \in Z\}$ est périodiquement corrélé si et seulement si le processus multivarié correspondant est stationnaire.

1.3 Relation entre les autocovariances d'un processus multivarié stationnaire et celles d'un processus périodiquement corrélé

Soit $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ la matrice de variance-covariance de $X(\tau_1)$ et $X(\tau_2)$ définie par :

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = (\Gamma_{ij}(\tau_1, \tau_2))_{i,j=1,\dots,d}$$

où $\Gamma_{ij}(\tau_1, \tau_2) = \text{cov}(X_i(\tau_1), X_j(\tau_2))$ $i, j = 1, \dots, d$ et $\tau_1, \tau_2 \in Z$,

nous avons alors

$$\Gamma_{ij}(\tau_1, \tau_2) = \gamma_{i-j+d(\tau_1-\tau_2)}^{(i)} \quad i, j = 1, \dots, d \quad (1.4)$$

Le processus d -varié $X(\tau)$ étant stationnaire, alors sa matrice d'autocovariance à l'horizon h est de la forme :

$$\Gamma(h) = \Gamma(\tau, \tau - h) = (\Gamma_{ij}(h))_{i,j=1,\dots,d}$$

où $\Gamma_{ij}(h) = \gamma_{i-j+dh}^{(i)}$

1.4 Processus bruit blanc périodique

Les processus bruits blancs stationnaires sont souvent utilisés pour générer d'autres processus stationnaires. De manière analogue, les processus bruits blancs périodiques, quant à eux jouent le même rôle dans le cas de processus périodiquement corrélés. Ainsi le processus $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ est dit processus bruit blanc périodique s'il vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ est centré, c'est à dire : $E(\varepsilon_t) = 0$ pour tout $t \in Z$.
- ii) Il est de variance d -périodique : $\sigma_{i+d\tau}^2 = \sigma_i^2$ pour tout $i = 1, \dots, d$ et $\tau \in Z$.
- iii) Le processus $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ est non corrélé : $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$, pour tout t et s tel que $t \neq s$.

1.5 Modèle autorégressif moyenne mobile périodique

Avec l'incapacité des modèles SARIMA, traités dans le fameux ouvrage de Box et Jenkins (1970), à décrire et à représenter certaines séries à caractère non régulier (des séries générées par des processus non stationnaires) mais aussi avec la parution de la généralisation, par Cramér (1961), du théorème de Wold (1938), de la décomposition des processus stationnaires aux processus non stationnaires, les modèles linéaires non stationnaires à coefficient dépendants du temps ($ARMA_t$ évolutifs) ont connu un développement très important ces dernières années et sont souvent utilisés malgré leur complexité par rapport aux modèles linéaires stationnaires. Par analogie aux processus stationnaires et aux modèles ARMA qui les représentent, une classe particulière de modèles non stationnaires $ARMA_t$ évolutifs et qui permet de représenter les processus périodiquement corrélés est la classe de modèles linéaires à coefficients périodiques dans le temps. Ce paragraphe est consacré à l'étude de ce type de modèles. Nous commençons d'abord par présenter le théorème de Wold-Cramér pour la décomposition des processus non stationnaires.

1.6 Représentation linéaire des processus périodiquement corrélés

Du fait que les processus périodiquement corrélés sont des processus non stationnaires, au sens faible, la représentation de ces processus par la famille des modèles classiques ARMA n'est pas justifiée par le théorème de Wold (1938) qui assure l'existence et l'unicité d'une décomposition linéaire uniquement pour les processus, du second ordre, faiblement stationnaires. Néanmoins, les modèles linéaires autorégressifs moyenne mobile intégrés saisonniers étudiés par Box et Jenkins (1976) ont montré leur efficacité pour modéliser (après les avoir ramener au cas stationnaire à l'aide d'une ou de plusieurs transformations) plusieurs séries saisonnières et sont justifiés par la représentation de Wold. Toutefois, cette classe de modèles ne s'avère adéquate que pour une classe particulière de processus périodiquement corrélés (saisonniers) à savoir ceux qui peuvent être ramenés par le biais d'une transformation saisonnière ou mixte au cas stationnaire faible et par conséquent peuvent être modélisés par des membres de la famille des modèles saisonniers de Box et Jenkins. La pratique a montré qu'une diversité de processus périodiquement corrélés ne peuvent pas être modélisés de façon adéquate par cette classe de modèles intégrés saisonniers. Le théorème suivant de Cramer (1961) qui a donné une impulsion remarquable à l'analyse des séries chronologiques non stationnaires a permis l'introduction des modèles linéaires évolutifs, dans le temps, en particulier, les modèles ARMA périodiques.

1.7 Représentation linéaire de Wold-Cramer

Une généralisation du cas d'un processus, du second ordre, non stationnaire, du théorème de Wold (1938) concernant l'existence et l'unicité de la décomposition linéaire d'un processus du second ordre faiblement stationnaire, a été établie par Cramer (1961). Ce résultat, connu sous le l'appellation décomposition (linéaire) de Wold-Cramer, a permis l'extension des modèles linéaires usuels (à coefficients constants) $ARMA(p,q)$ aux modèles linéaires non-stationnaires, à coefficients dépendants du temps, $ARMA_t(p_t,q_t)$, dont les modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques sont des cas particuliers.

1.8 Processus purement indéterminable et processus déterminable du second ordre

Notons par $H^2(y_t, t)$ le sous-espace de Hilbert, $H^2(y_t,]-\infty, t])$, engendré par le passé et le présent $(\dots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t)$ du processus du second ordre $\{y_t, t \in Z\}$.

Définition 1.2

Un processus stochastique, du second ordre, $\{y_t, t \in Z\}$ est dit purement indéterminable ou encore régulier, si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} H^2(y_t, t) = \{0\} \quad (1.5)$$

et purement déterminable ou singulier si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} H^2(y_t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} H^2(y_t, t) \quad (1.6)$$

Théorème 1.2 (Cramer (1961))

Tous processus stochastique, du second ordre, $\{y_t\}$ possède une décomposition linéaire unique donnée par :

$$y_t = U_t + V_t \quad (1.7)$$

telles que :

- Les processus U_t et V_t appartiennent au sous-espace de Hilbert $H^2(y_t, t)$.
- Ces processus sont orthogonaux, de plus le processus U_t est purement déterminable (singulier) et V_t est purement indéterminable (régulier) et peut être représenté par une combinaison linéaire infinie unique convergente (en moyenne quadratique) de la forme

$$V_t = \sum_{s=-\infty}^t a_{t,s} \varepsilon_s \quad (1.8)$$

où $\{\varepsilon_t\}$ est un processus bruit blanc. Le processus $\{a_{t,t} \varepsilon_t, t \in Z\}$ est, alors, dit innovation du processus et le processus $\{\varepsilon_t\}$ est l'innovation normée.

Cette décomposition a permis donc la construction des modèles linéaires non stationnaires qui ne sont que des approximations de la représentation de Wold-Cramér. Dans ce qui suit nous présenterons une classe particulière de ces modèles qui est la classe des modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques.

Considérons un processus périodiquement corrélé généré à partir d'un bruit blanc périodique $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{s=1}^{\infty} a_{t,s} \varepsilon_{t-s} \quad (1.9)$$

où la suite $\{a_{t,s}\}$ est absolument sommable pour tout t , alors les coefficients $\{a_{t,s}\}$ sont périodiques dans le temps (en t).

1.9 Modèle ARMA périodique (PARMA)

Comme pour les modèles ARMA classiques, un processus périodiquement corrélé peut être représenté par un modèle ARMA périodique qui n'est rien d'autre qu'une approximation de la décomposition de Wold-Cramer.

Définition 1.3 (Processus Autorégressif moyenne mobile périodique)

On dit qu'un processus périodiquement corrélé $\{y_t, t \in Z\}$ admet une représentation autorégressive moyenne mobile d'ordre (p_t, q_t) , périodique de période de période d , noté $\text{PARMA}_d(p_t, q_t)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$y_t - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{tj} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} \varepsilon_{t-j} \quad (1.10)$$

ou encore : $\Phi_t(L)y_t = \Theta_t(L)\varepsilon_t \quad t \in Z$

où : $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ est un bruit blanc périodique de variance σ_t^2 les paramètres $\theta_{tj} \quad j=1, \dots, q_t$; $\phi_{ti} \quad i=1, \dots, p_t$; q_t et p_t sont des fonctions d -périodiques et les polynômes $\Phi_t(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{ti} L^i$ et $\Theta_t(L) = 1 - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} L^j$ ne possèdent pas de zéros communs.

Posons $p = \max_{1 \leq t \leq d} p_t$ et $q = \max_{1 \leq t \leq d} q_t$ alors (1.10) peut s'écrire également dans une forme plus simple

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_{tj} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_{tj} \varepsilon_{t-j}. \quad (1.11)$$

1.10 Modèle autorégressif d-périodique pur (PAR)

Définition 1.4 (Processus Autorégressif périodique)

Le processus périodiquement corrélé $\{y_t, t \in Z\}$ d -périodique est dit admettre une représentation autorégressive périodique d'ordre p_t , de période d , noté $\text{PAR}_d(p_t)$, s'il est solution d'une équation aux différences stochastique de la forme suivante :

$$y_t = \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{ti} y_{t-i} + \varepsilon_t \quad t \in Z; \quad (1.12)$$

où : $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ est un bruit blanc périodique de variance σ_t^2 , les paramètres $\phi_{ti} \quad i=1, \dots, p_t$; et p_t et la variance σ_t^2 sont des fonctions d -périodiques.

1.11 Modèles moyenne mobile d-périodique pur (PMA)

Définition 1.5 (processus moyenne mobile périodique)

Le processus périodiquement corrélé $\{y_t, t \in Z\}$ de période d est dit admettre une représentation moyenne mobile périodique d'ordre q_t de période d , noté $MA(q_t)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$y_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} \varepsilon_{t-j} \quad t \in Z; \quad (1.13)$$

où les paramètres θ_{tj} $j=1, \dots, q_t; t \in Z$ et la variance du bruit blanc σ_t^2 sont des fonctions périodiques, en t , de période d .

1.12 Méthode d'études des modèles ARMA périodiques

Définition 1.6 (Causalité)

Le modèle univarié $AR_d(p_t)$ de période d définit par l'équation (1.12) est dit causal s'il admet une solution de la forme

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ti} \varepsilon_{t-i} \quad t \in Z \quad (1.14)$$

où la série infinie est convergente, en moyenne quadratique.

Définition 1.7 (Inversibilité)

Le modèle (1.13) est dit inversible s'il existe des fonctions β_{ti} telles que :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ti} y_{t-i} \quad t \in Z \quad (1.15)$$

où la série est convergente, en moyenne quadratique.

Pour étudier les propriétés des modèles ARMA périodiques nous pouvons distinguer deux approches. La première se base directement sur le théorème de Gladyshev (1961) qui consiste à ramener un modèle périodique univarié à un modèle classique multivarié et d'étudier les propriétés de ce dernier. Quant à la deuxième, elle ramène un modèle moyenne mobile (autorégressif) périodique à un modèle moyenne mobile périodique (autorégressif) mais seulement d'ordre 1.

1.13 Technique « period-span lumping » et étude des modèles univariés $ARMA_d$ périodiques

Le principe de cette méthode est de ramener l'étude des propriétés d'un modèle périodique univarié à celle du modèle d -varié autorégressif moyenne mobile qui lui correspond. Ceci permet d'exploiter les résultats déjà existant concernant l'analyse des modèles multivariés classiques pour étudier les modèles périodiques. Dans ce qui suit nous allons présenter le lien entre un modèle périodique univarié et un modèle multivarié classique.

1.14 Modèle $ARMA$ multivarié associé à un modèle $ARMA_d(p_t, q_t)$ univarié

Soit $\{y_t, t \in Z\}$ un processus univarié périodiquement corrélé admettant une représentation autorégressive moyenne mobile d'ordre (p_t, q_t) , périodique de période d

$$y_t - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{tj} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} \varepsilon_{t-j}. \quad (1.16)$$

Alors le processus d -varié $\{X(\tau)\}$ définit par : $X_i(\tau) = y_{i+d\tau}$

où

$$X(\tau) = (X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_d(\tau))^T \\ = (y_{1+d\tau}, y_{2+d\tau}, \dots, y_{d+d\tau})^T$$

satisfait à un modèle d -varié autorégressif moyenne mobile donné ci-dessous

$$\phi(0)X(\tau) + \phi(1)X(\tau-1) + \dots + \phi(p^*)X(\tau-p^*) = \vartheta(0)\eta(\tau) + \theta(1)\eta(\tau-1) + \dots + \theta(q^*)\eta(\tau-q^*) \quad (1.17)$$

où

$\eta(\tau) = (\eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \dots, \eta_d(\tau))^T$ avec $\eta_i(\tau) = \varepsilon_{i+d\tau}$, $i = 1, \dots, d$ est un processus bruit blanc d -varié.

$$p^* = \max_{1 \leq i \leq d} \left[\frac{p_i - i}{d} \right] + 1 \quad \text{et} \quad q^* = \max_{1 \leq i \leq d} \left[\frac{q_i - i}{d} \right] + 1; \quad (1.18)$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_1(2) & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot \\ \phi_{i-1}(i) & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{d-1}(d) & \cdot & \cdot & \phi_1(d) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_1(2) & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot \\ \theta_{i-1}(i) & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{d-1}(d) & \cdot & \cdot & \theta_1(d) & 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

et

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} \phi_{dk}(1) & \phi_{dk-1}(1) & \phi_{dk-2}(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{dk+1-d}(1) \\ \phi_{dk+1}(2) & \phi_{dk}(2) & \phi_{dk-1}(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{dk+2-d}(2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{dk+i-1}(i) & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{dk+1}(i) & \phi_{dk}(i) & \phi_{dk-1}(i) & \cdot & \phi_{dk+i-d}(i) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{dk+d-1}(d) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{dk+1}(d) & \phi_{dk}(d) \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

avec $i=1,2,\dots,d$ et $k=1,2,\dots,p$

et

$$\Theta(r) = \begin{pmatrix} \theta_{dr}(1) & \theta_{dr-1}(1) & \theta_{dr-2}(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_{dr+1-d}(1) \\ \theta_{dr+1}(2) & \theta_{dr}(2) & \theta_{dr-1}(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_{dr+2-d}(2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{dr+i-1}(i) & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_{dr+1}(i) & \theta_{dr}(i) & \theta_{dr-1}(i) & \cdot & \theta_{dr+i-d}(i) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{dr+d-1}(d) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_{dr+1}(d) & \theta_{dr}(d) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

avec $i=1,2,\dots,d$ et $r=1,2,\dots,q^*$.

Cette relation entre un $\text{ARMA}_d(p_t, q_t)$ univarié et un $\text{ARMA}(p^*, q^*)$ d -varié permet de vérifier quelques propriétés théoriques tel que la causalité et l'invisibilité.

1.15 Condition de Causalité d'un modèle ARMA multivarié

Les conditions de causalité du modèle $\text{ARMA}(p^*, q^*)$ multivarié à coefficients constants,

$$\sum_{i=0}^p A_i X(t-i) = \sum_{j=0}^q B_j \varepsilon(t-j) \quad (1.22)$$

où $\varepsilon(t)$ est un processus multivarié non corrélé et les matrices A_i et B_j , sont des matrices carrées réelles. Sont données par Hannan (1970) et consistent à ce que les racines de l'équation :

$$\det \left[\sum_{i=0}^p A_i z^{p-i} \right] = 0; \quad z \in C \quad (1.23)$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

1.16 Condition d'invisibilité d'un modèle ARMA multivarié

Les conditions d'invisibilité du modèle multivarié à coefficients constants, ARMA(p^*, q^*)

$$\sum_{i=0}^{p^*} A_i X(t-i) = \sum_{j=0}^{q^*} B_j \varepsilon(t-j) \quad (1.24)$$

où $\varepsilon(t)$ est un processus multivarié non corrélé et les matrices A_i et B_j , sont des matrices carrées réelles; consistent à ce que les racines de l'équation :

$$\det \left[\sum_{i=0}^q B_j z^{q-j} \right] = 0; \quad z \in C \quad (1.25)$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

Remarque

Les conditions de causalité et d'inversibilité du modèle (1.16) découlent, directement, de celles du modèle multivarié qui lui est équivalent.

1.17 Condition d'inversibilité d'un modèle autorégressif périodique

$$\text{Le modèle univarié PAR}(p_t) \text{ d-périodique : } y_t - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{ti} y_{t-i} = \varepsilon_t \quad t \in Z;$$

est causal si, et seulement si le modèle d-varié autorégressif à coefficients constants qui lui correspond :

$$\phi(0)X(\tau) + \phi(1)X(\tau-1) + \dots + \phi(p^*)X(\tau-p^*) = \eta(\tau) \quad (1.26)$$

est causal. C'est-à-dire, si et seulement si les racines de l'équation caractéristique

$$\det \left(\sum_{k=0}^{p^*} \Phi(k) z^{p^*-k} \right) = 0, \quad z \in C$$

sont à l'intérieur du cercle unité, où les matrices $\Phi(k)$, $k=1, \dots, p^*$ sont données par (1.20).

1.18 Condition d'inversibilité d'un modèle moyenne mobile périodique

Le modèle univarié MA(q_t) d-périodique : $y_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{tj} \varepsilon_{t-j}$; est inversible si et seulement si le modèle d-varié moyenne mobile à coefficients constants qui lui correspond est inversible. C'est à dire, les racines de l'équation caractéristique

$$\det \left(\sum_{k=0}^{q^*} \Theta(k) z^{q^*-k} \right) = 0, \quad z \in C$$

sont à l'intérieur du cercle unité, où les matrices $\Theta(k)$, $k=1, \dots, q^*$ sont données par (1.16)

1.19 Technique « order-span lumping » et étude des modèles univariés autorégressifs moyenne mobile périodiques $ARMA_d(p_t, q_t)$

connue sous l'appellation de "order span lumping », utilisé dans l'étude des propriétés théoriques des modèles de séries chronologiques périodiques (cf., Bentarzi (1998), Bentarzi (1995) et Ula et Smadi (1997)). Cette technique a été exploitée par Ula et Smadi (1997) pour établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un modèle autorégressif périodique soit causal.

1.20 Modèle multivarié moyenne mobile périodiques d'ordre 1 associé à un modèle multivarié moyenne mobile périodique d'ordre q

Soit $\{y_t, t \in Z\}$ un processus m -varié moyenne mobile d'ordre q et d -périodique

$$y_t = \theta_{t,0}\varepsilon_t + \theta_{t,1}\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_{t,q}\varepsilon_{t-q} \quad t \in Z \quad (1.27)$$

où $\{\varepsilon_t\}$ est un processus bruit blanc de variance périodique et $\theta_{k,i}, i = 0, \dots, q$ sont des matrices $(m \times m)$.

Bentarzi (1995) considèrent le processus mq -varié

$$\begin{aligned} Y_T &= (y'_{qT}, y'_{qT-1}, \dots, y'_{q(T-1)+1})' \\ \eta_T &= (\varepsilon'_{qT}, \varepsilon'_{qT-1}, \dots, \varepsilon'_{q(T-1)+1})' \end{aligned}$$

Le modèle moyenne mobile périodique (1.27) se présente, en terme de processus $\{Y_T, T \in Z\}$ sous la forme suivante :

$$Y_T = \Theta_{T,0}\eta_T + \Theta_{T,1}\eta_{T-1} \quad (1.28)$$

Les matrices $\Theta_{T,0}$ et $\Theta_{T,1}$, de dimension $(mq \times mq)$ sont données en fonction des coefficients périodiques $\theta_{t,i}, i = 0, \dots, q_t$ du modèle (1.27) comme suit :

$$\Theta_{T,0} = \begin{pmatrix} \theta_{qT,0} & \theta_{qT,1} & \dots & \theta_{qT,i-1} & \dots & \theta_{qT,q-1} \\ 0_m & \theta_{qT-1,0} & \theta_{qT-1,1} & \dots & \dots & \theta_{qT-1,q-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \dots & \theta_{qT-i+1,0} & \dots & \theta_{qT-i+1,q-i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0_m & & \dots & \dots & \dots & \theta_{qT-q+1,q} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

et

$$\Theta_{T,1} = \begin{pmatrix} \theta_{qT,q} & 0_m & \cdots & \cdots & \cdots & 0_m \\ \theta_{qT-1,q-1} & \theta_{qT-1,q} & 0_m & \cdots & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \theta_{qT-i+1,q-i+1} & \cdots & \theta_{qT-i+1,q} & 0_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{qT-q+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_{qT-q+1,q} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Le modèle (1.28) est un modèle mq -varié moyenne mobile S -périodique d'ordre 1, où S ($S > 1$) est le plus petit entier tel que : Sq est le plus petit multiple commun de q et d .

Proposition 1.2 (Bentarzi (1995)) :

Le modèle m -varié moyenne mobile d -périodique d'ordre q , (1.27), est inversible si et seulement si les racines de l'équation :

$$|\Psi - Iz| = 0$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

où Ψ est une matrice carrée, de dimension $(mq \times mq)$ donnée par :

$$\Psi = \Theta_{S,0}^{-1} \Theta_{S,1} \Theta_{S-1,0}^{-1} \Theta_{S-1,1} \cdots \Theta_{2,0}^{-1} \Theta_{2,1} \Theta_{1,0}^{-1} \Theta_{1,1}$$

où les matrices $\Theta_{j,0}$ et $\Theta_{j,1}$, $j = 1, \dots, S$ sont données respectivement par (1.29) et (1.30).

Nous remarquons que les éléments de la matrice Ψ sont exprimés en terme des coefficients d -périodiques du modèle périodique (1.27).

Dans le cas simple d'un modèle univarié moyenne mobile périodique d'ordre 1, la condition nécessaire et suffisante est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 1.3 (Bentarzi (1995)) :

Le modèle univarié moyenne mobile d -périodique d'ordre 1 :

$$y_t = \theta_{t,0} \varepsilon_t + \theta_{t,1} \varepsilon_{t-1} \quad t \in Z$$

est inversible si et seulement si :

$$\left| \frac{\theta_{1,1} \theta_{2,1} \cdots \theta_{d,1}}{\theta_{1,0} \theta_{2,0}, \dots, \theta_{d,0}} \right| < 1.$$

Bentarzi (1998) a exploité cette nouvelle technique pour résoudre le problème de la factorisation spectrale d'un modèle m -varié moyenne mobile d -périodique.

Par analogie, Ula et Smadi (1997) ont exploité la technique introduite par Bentarzi (1995) pour obtenir une condition nécessaire et suffisante pour la stationnarité des modèles autorégressifs moyennes mobiles.

1.21 Modèle AR multivarié périodique d'ordre 1 associé à un modèle AR multivarié périodique d'ordre p

Soit $\{y_t, t \in Z\}$ un processus périodiquement corrélé de période d satisfaisant au modèle m -varié autorégressif périodique de période d et d'ordre p et :

$$y_t = \phi_{t,1}y_{t-1} + \dots + \phi_{t,p}y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1.31)$$

Ula et Smadi (1997) définissent

$$\begin{aligned} Y_T &= (y'_{pT}, y'_{pT-1}, \dots, y'_{p(T-1)+1})' \\ \eta_T &= (\varepsilon'_{pT}, \varepsilon'_{pT-1}, \dots, \varepsilon'_{p(T-1)+1})' \end{aligned}$$

le modèle (1.31) s'écrira donc sous la forme suivante :

$$\Phi_{T,0}Y_T + \Phi_{T,1}Y_{T-1} = \eta_T \quad (1.32)$$

les matrices $\Phi_{T,0}$ et $\Phi_{T,1}$, de dimension $(mq \times mq)$ sont données en fonction des coefficients périodiques $\phi_{t,i}$, $i = 1, \dots, p$, $t \in Z$ du modèle (1.31) comme suit :

$$\Phi_{T,0} = \begin{pmatrix} I_m & -\phi_{Tp,1} & -\phi_{Tp,2} & \dots & -\phi_{Tp,p-1} \\ 0_m & I_m & -\phi_{Tp-1,1} & \dots & -\phi_{Tp-1,p-2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \dots & \dots & 0_m & I_m \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

et

$$\Phi_{T,1} = \begin{pmatrix} -\phi_{Tp,p} & 0_m & 0_m & \dots & 0_m \\ -\phi_{Tp-1,p-1} & -\phi_{Tp-1,p} & 0_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{Tp-p+1,1} & -\phi_{Tp-p+1,2} & \dots & \dots & -\phi_{Tp-p+1,p} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Chapitre 2 :

Classe des Modèles ARCH

Au début des années 1970, l'accent a été mis sur les modèles linéaires et devant les problèmes de modélisation rencontrés par certaines séries de données (des séries de biologie, des séries financières et monétaires) les modèles non linéaires ont été envisagés et plusieurs classes de modèles ont été abordées : les modèles bilinéaires, les modèles à seuil, les modèles hétéroscédastiques.

Les séries temporelles financières sont étudiées d'une part dans un objectif d'explication des phénomènes de marché (prévision, analyse des risques, ...) et d'autre part dans un objectif de calcul du prix des actifs.

Les quelques remarques suivantes montrent cependant que la modélisation classique des processus n'est pas entièrement adaptée et néglige une partie de l'information contenue dans les séries financières.

On a pris des processus à volatilité constante, alors que l'examen des historiques des séries temporelles et des volatilités implicites montrent clairement le contraire.

De plus les queues de distributions des probabilités empiriques des séries financières sont plus épaisses que celle d'une loi normale : autrement dit la probabilité d'un fort mouvement à la hausse ou à la baisse (Krashs ou mini-krashs) est dans la réalité trop importante pour pouvoir être modélisée par une loi normale.

Pour prendre en compte toutes ces remarques, plusieurs approches ont été abordées : celle retenue ici est celle des modèles ARCH, qui présente l'intérêt de conserver les propriétés de régularités du processus enrichissant ainsi la technique de prévision.

Cette classe de modèle a tout d'abord été introduite par Engle en 1982 dans le cadre d'étude sur des données macro-économique (en particulier sur l'inflation au Royaume-Uni). Engle est parti de la constatation suivante : les travaux économétriques usuels effectués sur ces séries, qui supposent une volatilité constante, laissent certaines données mal expliquées et celle-ci sont souvent regroupées. Elles correspondent à des périodes où les variations deviennent plus fortes que celles constatées sur l'ensemble de la série, et sont donc considérées comme aberrantes par un modèle usuel.

Sur les séries financières, ce type de phénomène est encore plus courant : on sait que les périodes de forte variation des cours sont souvent groupées (phase d'incertitude économique, tension sur les marchés, ...), contrastant avec des périodes calmes. Là encore, un modèle ARMA à volatilité constante ne pourra rendre compte de ce type de processus.

Pour prendre en compte ces remarques Engle a imaginé un processus mixte : il garde la structure du modèle ARMA, mais le bruit blanc n'a plus une volatilité constante. Dans son article l'auteur ne suppose plus que $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc mais envisage plutôt que ce processus est de la forme suivante :

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \text{ où } \eta_t \sim iid N(0,1) \text{ et } h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Donc l'aspect hétéroscédastique est introduit par l'intermédiaire d'une dynamique auto-régressive sur les carrés du bruit.

La volatilité de la date t est donc fonction des écarts à la moyenne observés dans le passé proche. Si les coefficients $\alpha_i, i=0\dots,q$, sont tous positifs et assez grands on observe alors des périodes de fortes volatilités suivies de périodes de faibles volatilités.

Quoique cette nouvelle classe de modèle se trouve encore dans une phase expérimentale et en pleine évolution on assiste d'ores et déjà à des extensions et utilisation diverses (modèles GARCH, ARMA à erreur ARCH, ARCH-M, etc.).

Divers travaux empiriques ont été effectués afin de mesurer l'impact de la modélisation ARCH sur différents types de séries financières, citons les travaux de Weiss (1984), Milhoj (1985) et Bollerslev et al. (1994). On cite aussi les travaux de Engle (1983) sur le taux d'inflation et Elie et al. (1992) sur les cours de change où on a montré que les modèles ARCH, grâce à l'introduction d'une volatilité aléatoire permettait de mieux appréhender la réalité des séries financières. Ils sont donc mieux adaptés pour la prévision. Et aussi les travaux de Weiss (1985) sur les séries macro-économiques américaines en utilisant les modèles ARMA à erreurs ARCH.

2.1 Modèles ARCH classiques

La classe des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastique notés ARCH a été proposée pour la première fois par Engle en 1982 dans un objectif de large développement des prévisions des séries chronologiques ; le but est de permettre à la variance du bruit de varier conditionnellement au passé de la série. Le modèle ARCH(q) est défini par l'équation :

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}$$

$$\text{telle que } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

$$\text{et } \eta_t \sim iid N(0,1)$$

Il apparaît comme un bruit blanc gaussien multiplié à chaque temps t par une variable aléatoire dont le carré dépend de manière linéaire des q dernières valeurs du processus. Notons que $\alpha_0 > 0$ et que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$ sans quoi la variance conditionnelle pourrait être négative.

On peut l'écrire aussi sous la forme suivante où la distribution conditionnelle de ε_t est normale, centrée et de variance h_t .

$$\begin{cases} \varepsilon_t / \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t) \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\quad (2.2)$$

où ε_{t-1} désigne l'ensemble d'information disponible à la date $t-1$.

Une troisième formulation du modèle vient en posant $u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t \quad (2.3)$$

où les variables u_t sont de moyenne nulle et de variance non constante.

Ce qui montre une forme AR(q) pour les carrés du processus d'innovation ε_t^2 . Cette formulation donne lieu à des définitions plus générales des modèles ARCH(q).

Une Quatrième formulation fait apparaître ε comme une différence de martingales* puisque : $E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = 0$ (2.4)

mais hétéroscédastique puisque $Var(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$ (2.5)

(*) ε_t est une différence de martingales hétéroscédastique si et seulement si :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) &= 0 & \forall t \\ Var(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) &= \Omega_t & \forall t \end{aligned}$$

Exemple 1 : Dans cette exemple on se limite à une étude préliminaire du modèle ARCH(1). Nous avons :

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \quad \text{tel que} \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad \text{et} \quad \eta_t \sim iid \text{ N}(0,1)$$

il faut évidemment que $\alpha_0 > 0$ et que $\alpha_1 \geq 0$.

Il est très important avant toute étude de tout modèle de vérifier les conditions de stationnarité :

$$Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 V(\varepsilon_{t-1})$$

d'où l'on conclut que $\alpha_1 < 1$ et que :

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad (2.6)$$

Soit h un entier strictement positif. Il est aussi intéressant de comparer la variance marginale à la variance conditionnelle $V(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-h})$, par remplacement successif on déduit de (2.3) :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0(1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1^{h-1}) + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2 + \mu_t + \alpha_1 \mu_{t-1} + \dots + \alpha_1^{h-1} \mu_{t-h+1} \quad (2.7)$$

En prenant l'espérance conditionnelle des deux membres conditionnellement à l'information ε_{t-h} , on obtient les variances conditionnelles du processus d'innovation données par :

$$Var(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-h}) = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2$$

ces variances ne dépendent de l'ensemble d'information qu'à travers la valeur la plus récente de ε_{t-h}^2 .

Lorsque h tend vers l'infini la variance conditionnelle converge vers la variance marginale donnée par (2.6). La différence entre la variance conditionnelle et la variance marginale peut s'écrire :

$$V(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-h}) - V(\varepsilon_t) = \alpha_1^h [\varepsilon_{t-h}^2 - V(\varepsilon_{t-h})]$$

Cela n'est possible que si $\alpha_1 < 1$

Pour déterminer les conditions de stationnarité et pour trouver la distribution marginale du processus, il faut procéder par récurrence. Illustrons ceci sur le moment d'ordre 4 dans le cas gaussien. A partir des conditions de l'exemple 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4 / \varepsilon_{t-1}) &= E(\eta_t^4 h_t^2 / \varepsilon_{t-1}) = E(\eta_t^4 / \varepsilon_{t-1}) E(h_t^2 / \varepsilon_{t-1}) \\ &= 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2 \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que le moment d'ordre 4 d'une loi normale $N(0,1)$ vaut 3. En prenant l'espérance marginale par rapport à ε_{t-1} , il vient :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4) &= 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_1\alpha_0\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2\varepsilon_{t-1}^4) \\ &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_1\alpha_0E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_1^2E(\varepsilon_{t-1}^4)) \\ &= 3(\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_1\alpha_0}{1-\alpha_1} + \alpha_1^2E(\varepsilon_{t-1}^4)) \end{aligned}$$

D'où la stationnarité implique

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)}$$

La condition d'existence des moments d'ordre 4 est $3\alpha_1^2 < 1$. On en déduit que le coefficient d'aplatissement de fisher ("Kurtosis") associé à la distribution marginale de ε vaut

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon^4)}{E^2(\varepsilon^2)} = 3 \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

cette dernière étant la valeur de κ pour une loi normale. Les queues de la distribution marginale d'un processus ARCH(1) sont plus épaisses que pour un processus gaussien.

Le théorème général suivant donne les conditions de stationnarité et la variance conditionnelle du processus ARCH(q).

Théorème 2.1 Engle (1982)

Le processus ARCH(q), tels que $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$, a une covariance stationnaire si, et seulement si, l'équation caractéristique associée à toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

La variance est donnée par :
$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j}$$

La figure 2.1 de la page suivante montre une série artificielle générée par le modèle ARCH(1) d'équation :

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{0.02 + 0.3\varepsilon_{t-1}^2} \quad \text{avec} \quad \eta_t \sim iid N(0,1)$$

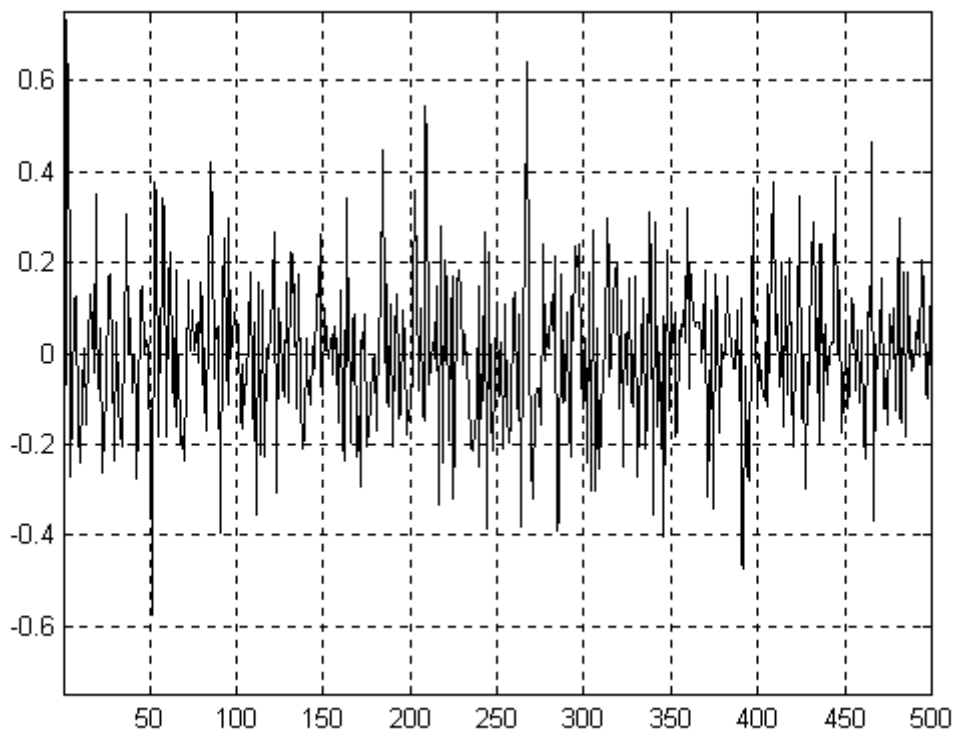


Figure 2.1 : Série artificielle générée par un processus ARCH(1)

2.2 Modèles GARCH(p,q)

Bollerslev (1986), par analogie avec la démarche usuelle de Box et Jenkins, a introduit une dynamique autorégressive moyenne mobile et considérera le modèle suivant :

Le modèle GARCH(p,q) est donné par :

$$\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.7)$$

où

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (2.8)$$

avec

$$\alpha_q \neq 0 \text{ et } \beta_p \neq 0 \text{ pour } q \geq 0 \text{ et } p \geq 0$$

On peut écrire l'équation (2.7) sous forme symbolique :

$$h_t = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (2.9)$$

où on suppose que les polynômes A(L) et B(L) sont donnés par :

$$A(L) = \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i \quad (2.10)$$

et

$$B(L) = \sum_{j=1}^q \beta_j L^j \quad (2.11)$$

où L est l'opérateur retard, c.-à-d. $L\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$.

Propriété 2.1 Bollerslev(1986)

Un processus $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant un modèle GARCH(p,q) avec des coefficients positifs (i.e. $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \ i = 1, \dots, p$ et $\beta_j \geq 0 \ j = 1, \dots, q$) est asymptotiquement stationnaire du second ordre si

$$A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (2.12)$$

avec

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - A(1) - B(1)} \text{ et } COV(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \text{ pour } t \neq s$$

En posant $u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, donc $h_t = \varepsilon_t^2 - u_t$, nous obtenons, en remplaçant h_t dans (2.8), l'équation :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max\{p,q\}} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + u_t - \sum_{j=1} \beta_j u_{t-j}$$

avec les conventions $\alpha_i = 0$ si $i > q$ et $\beta_j = 0$ si $j > p$

Les équations (2.7) et (2.8) sont les plus utilisées en pratique.

2.3 Modèles de régression à erreur GARCH

On peut considérer un modèle de régression linéaire à erreur GARCH :

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t \quad (2.13)$$

où (ε_t) satisfait un modèle GARCH(p,q)

ou un modèle ARMA à erreur GARCH.

$$\Omega(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.14)$$

où (ε_t) satisfait un modèle GARCH(p,q)

2.4 Modèles ARCH-M

Le modèle dit ARCH-M c'est-à-dire "ARCH in mean" pour présence de la variance conditionnelle dans la moyenne conditionnelle a été introduit par Engle et al. (1987) et présenté par :

$$y_t = x_t' \beta + \delta \sqrt{h_t} + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

tels que :

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \text{ et } \eta_t \sim iid N(0,1) \quad (2.16a)$$

$$\text{où } h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \eta_t' \gamma \quad (2.16b)$$

δ mesure l'effet de la variance conditionnelle correspondant au coefficient relatif d'aversion pour le risque positif, compris entre 1 et 4.5.

Les applications de ce modèle sont diverses et nombreuses : Il a été utilisé pour l'indice quotidien de Standard et Poors, pour les rendements hebdomadaire sur un panier de valeurs de la bourse de New York et pour les indices trimestriels sur des actions américaines.

2.5 Modèles EGARCH

Dans le modèle GARCH(p,q) exponentiel noté EGARCH (p,q) de Nelson (1990) la variance h_t dépend de la valeur et du signe de ε_t . Il est défini comme suit :

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \quad (2.17a)$$

tel que

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j (\Phi \eta_{t-j} + \gamma (|\eta_{t-j}| - E|\eta_{t-j}|)) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) \quad (2.17b)$$

et

$$\eta_t \sim iid N(0,1) \quad (2.17c)$$

Contrairement au cas du modèle GARCH(p,q) où aucune restriction sur les paramètres $\alpha_i, i=1..q$ et $\beta_j, j=1..p$ n'est nécessaire pour assurer la positivité de la variance conditionnelle.

2.6 Propriétés des modèles AR(p) à erreur ARCH(1)

Soit le processus stationnaire $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ d'ordre p à erreur ARCH(1) satisfaisant l'équation :

$$y_t = Q_1 y_{t-1} + \dots + Q_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.18a)$$

tel que

$$\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad \text{et} \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.18b)$$

de telle manière que l'équation caractéristique de (2.15) donnée par

$$Z^p - Q_1 Z^{p-1} - Q_2 Z^{p-2} - \dots - Q_p = 0$$

ait ses racines à l'intérieur du cercle unité, de plus $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 \geq 0$.

Propriété 2.2 (Engle, 1982)

Les moments centrés d'ordre impair s'ils existent sont nuls par symétrie.

Propriété 2.3 (Engle, 1982)

On suppose que le processus démarre infiniment loin dans le passé avec les 2r premiers moments finis, le moment d'ordre 2r existe si et seulement si $\alpha_1^r \prod_{j=1}^r (2j-1) < 1$.

2.7 Méthodes d'estimation des modèles modèle AR-ARCH

Les méthodes d'estimation utilisées en pratique sont essentiellement :

2.7.1 Méthode du Pseudo-Maximum de vraisemblance

Elle repose sur une fonction critère déduite de la loi normale

Définition 2.1

Soit $l_t(y, \theta)$ la fonction de vraisemblance associée à Y_t et conditionnelle au passé, c'est-à-dire la fonction de vraisemblance de Y_1, Y_2, \dots, Y_T conditionnelle à Y_0 est :

$$L(y, \theta) = \prod_{t=1}^T l_t(y, \theta) \quad (2.23)$$

L'estimateur Pseudo-Maximum de Vraisemblance (PMV) $\hat{\theta}_T$ du paramètre θ est une solution du problème $\max_{\theta} \{\log L(y, \theta)\}$. (2.24)

Propriété 2.4 (Engle, 1982)

Sous des conditions de régularité :

- 1°/ Il existe une solution $\hat{\theta}_T$ qui converge vers la vraie valeur θ_0 .
- 2°/ L'estimateur PMV est asymptotiquement normal

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \xrightarrow{loi} N(0, J^{-1}IJ^{-1})$$

où θ_0 est la vraie valeur, inconnue, du paramètre θ appartenant à Θ inclus dans IR^k .

Avec

$$J = E_0 \left[- \frac{\partial^2 \log l_t(y, \theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \quad (2.25)$$

et

$$I = E_0 \left[\frac{\partial \log l_t(y, \theta_0)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \log l_t(y, \theta_0)}{\partial \theta'} \right].$$

La fonction de pseudo-vraisemblance est :

$$\log L(y, \theta) = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - m_t(\theta)}{h_t(\theta)} \right)^2 \quad (2.26)$$

L'estimateur de PMV est obtenu en résolvant les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial \log L(y, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \log L(y, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t(\theta)} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\frac{y_t - m_t(\theta)}{h_t(\theta)} \right]^2 \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} + \sum_{t=1}^T \frac{y_t - m_t(\theta)}{h_t(\theta)} \cdot \frac{\partial m_t(\theta)}{\partial \theta} \quad (2.28)$$

Soit les résidus centrés réduits :

$$\hat{u}_t = u(\hat{\theta}_t) = \frac{y_t - m_t(\hat{\theta}_t)}{h_t(\hat{\theta}_t)^{1/2}} \quad (2.29)$$

On aura l'estimateur pseudo-maximum de vraisemblance résolvant l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t(\hat{\theta}_t)} \cdot \frac{\partial h_t(\hat{\theta}_t)}{\partial \theta} \cdot (\hat{u}_t^2 - 1) + \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t(\hat{\theta}_t)^{1/2}} \cdot \frac{\partial m_t(\hat{\theta}_t)}{\partial \theta} \cdot \hat{u}_t = 0. \quad (2.30)$$

C'est une condition d'orthogonalité entre les résidus réduits, leur carrés centrés et certains régresseurs, ici $\frac{1}{h_t(\hat{\theta}_t)^{1/2}} \cdot \frac{\partial m_t(\hat{\theta}_t)}{\partial \theta}$ et $\frac{1}{h_t(\hat{\theta}_t)} \cdot \frac{\partial h_t(\hat{\theta}_t)}{\partial \theta}$ respectivement.

2.7.2 Méthode en deux étapes

C'est une démarche d'estimation en deux étapes dans le cas d'un modèle ARMA à erreurs GARCH, l'idée est inspirée à partir de la structure particulière du modèle.

1°/ considérons le modèle de régression suivant à erreurs ARCH :

$$Y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon_t / \varepsilon_{t-1} \sim N(0, h_t) \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \end{cases}$$

On peut régresser par moindres carrés ordinaires Y_t sur X_t qui donne un estimateur convergent $\tilde{\beta}_T$ de β , mais non efficace, car il ne prend pas en compte l'hétéroscédasticité des erreurs. On déduit les résidus de cet estimateur :

$$\varepsilon_t = Y_t - X_t \tilde{\beta}_T$$

2°/ on considère le modèle associé au moment conditionnel d'ordre 2 :

$$E(\varepsilon_t^2 / Y_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

i.e.

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + w_t$$

tel que

$$E(w_t / Y_{t-1}) = 0 .$$

après avoir remplacé les erreurs qui sont inconnues par les résidus associés en effectuant une régressions par MCO, et on note $\tilde{\alpha}_{T_0}, \tilde{\alpha}_{T_1}, \dots, \tilde{\alpha}_{T_q}$ les estimateurs obtenus en régressant ε_t^2 sur $1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$. Ces estimateurs sont convergents de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$.

3°/ On déduit l'estimation de seconde étape des approximations de volatilité en prenant en compte le phénomène d'hétéroscédasticité :

$$\tilde{h}_t = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \tilde{\alpha}_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \tilde{\alpha}_q \varepsilon_{t-q}^2 .$$

On peut régresser Y_t sur X_t avec les poids $\frac{1}{\tilde{h}_t}$. Pour réestimer β , on obtient alors des estimateurs $\tilde{\beta}_T$ de type moindres carrés quasi-généralisés plus performant que les estimateurs initiaux $\tilde{\beta}_T$.

4°/ Sous l'hypothèse de normalité conditionnelle, le terme d'erreur w_t du modèle linéaire d'ordre 2 est conditionnellement hétéroscédastique, de variance conditionnelle

$$\text{var}(w_t / Y_{t-1}) = 2.h_t^2(\theta_0)$$

On note $\tilde{\alpha}_{T_0}, \tilde{\alpha}_{T_1}, \dots, \tilde{\alpha}_{T_q}$ les estimateurs obtenus en régressant $\tilde{\varepsilon}_t^2$ sur $1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$ avec les poids $\frac{1}{\tilde{h}_t^2}$ avec la méthode des moindres carrés généralisée qu'on remplace par $\alpha_{T_0}, \alpha_{T_1}, \dots, \alpha_{T_q}$.

Chapitre 3 :

Modèles ARCH périodiques

Au cours des dernières décennies, un nombre important d'études empiriques en finance se sont concentrées sur ce qu'on appelle les anomalies des marchés financiers, c'est-à-dire des phénomènes observables, difficilement explicables d'un point de vue purement théorique. Parmi ces anomalies, plusieurs effets saisonniers (effet janvier, effet lundi, etc.) ont été mis à jours pour multitude de séries financières, de période d'observation et de différents marchés nationaux. En matière de saisonnalité journalière, ces études se sont souvent intéressées à l'effet "week-end" qui pour un grand nombre de places boursières se traduit par des rendements significativement plus faibles, voire même négatifs les lundi, et des rendements souvent fort élevés le vendredi avant la fermeture des marchés.

L'origine exacte de cet effet "week-end" ou effet "lundi" ou encore effet "jour de la semaine" est difficile à expliquer. Certains auteurs extorquent l'arrivée plus massive de "mauvaises nouvelles" (bad news) après la fermeture du vendredi, alors que les "bonnes nouvelles" surviennent pendant la semaine. D'autres auteurs avancent l'idée d'une accumulation de nouvelles pendant les jours de fermeture ou attribuent l'effet "week-end" à un volume de transactions nettement moins élevé les lundis ou encore expliquent cet effet par la différence de comportement entre les investisseurs individuels et institutionnels. Ces derniers prenant des décisions d'investissement pendant la semaine alors que les premiers seraient essentiellement actifs pendant le week-end. Un dernier type d'explications, fréquemment avancé, est lié aux spécificités et réglementations nationales d'organisation des marchés financiers (settlement procedures).

D'un point de vue empirique, certains résultats apparaissent assez robustes aux choix des périodes étudiées, aux types de données, aux techniques utilisées, etc. Parmi ceux-ci, on peut mentionner une différence significative entre les rendements des lundis et ceux obtenus les autres jours de la semaine, le caractère en général supérieur des rendements le vendredi, la corrélation souvent négative entre les rendements du lundi et ceux du vendredi, etc.

Si on envisage également la volatilité, c'est-à-dire la variabilité instantanée des séries et/ou les moments d'ordre supérieur, des observations similaires peuvent être faites puisque la volatilité du marché semble, en général, être plus importantes un certain jour que le reste de la semaine et la structure dynamique de la volatilité semble, elle aussi, témoigner d'assez évident effet saisonnier.

L'observation d'une structure saisonnière non constante des autocorrélations des rendements boursiers nécessite le recours à une classe de modèles plus riches que les modèles linéaires standards des séries temporelles qui suppose une constance de la structure d'autocorrélation. Ce dernier point a amené certains auteurs à utiliser des modèles de séries temporelles périodiques qui admettent explicitement une structure d'autocorrélation qui peut

varier au travers de la semaine. Cette classe de modèles périodiques a été largement étudiée tant d'un point de vue théorique qu'empirique, comme en témoignent les articles donnés en bibliographie. Elle couvre une multitude de modèles univariés ou multivariés qui s'avèrent fort utile pour modéliser les phénomènes économiques saisonniers. Leur utilisation en finance empirique reste néanmoins relativement peu courante en comparaison aux simples modèles linéaires de régression. Certains travaux utilisent des autorégressions périodiques (PAR, périodique autorégression) pour l'analyse de la structure d'autocorrélation des rendements aux alentours des jours de fermeture alors que dans une contribution assez importante, Bollerslev et Ghysels (1996) appliquent un raisonnement similaire à la modélisation de la dynamique de la volatilité des séries financières. Pour ce faire, ils proposent un modèle GARCH périodique (PGARCH) qu'ils appliquent avec succès à des séries de taux de change ainsi qu'à certains indices boursiers. L'avantage évident de cette approche est qu'elle permet une représentation assez flexible des effets saisonniers et des périodicités diverses sur la volatilité des séries financières. (Voir Boukerdenna (2002))

D'autres auteurs, quant à eux, unifient ces deux types d'étude en proposant une modélisation économétrique des rendements financiers intégrant à la fois périodicité observée en moyenne avec celle observée en volatilité : le modèle PAR-GARCH. Leurs résultats ainsi mettent assez clairement en évidence non seulement une structure périodique dans l'autocorrélation des rendements, mais aussi des effets périodiques dans la persistance de la volatilité.

3.1 Modèles PARCH

L'objectif de ces modèles est de capter l'effet périodicité dans la dynamique de la volatilité des séries financières.

Définition 3.1

On dit que le processus d'innovation périodiquement corrélé $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation autorégressive conditionnellement hétéroscédastique périodique de période d , noté $\text{PARCH}_d(q)$, s'il vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t / \varepsilon_{\underline{t-1}}, d) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \text{Var}(\varepsilon_t / \varepsilon_{\underline{t-1}}, d) \equiv h_t = \alpha_{t,0} + \sum_{i=1}^q \alpha_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

telles que $\alpha_{t,0} > 0$ et $\alpha_{t,i} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q$ et $\forall t \in \mathbb{Z}$,

où les coefficients de l'équation de la variance conditionnelle $\alpha_{t,i}$ $i = 0, 1, \dots, q$ sont des fonctions périodiques du temps de période d , c'est-à-dire : $\alpha_{t,i} = \alpha_{S+d\tau,i} = \alpha_{S,i}$, $i = 0, 1, \dots, q$ tels que $\tau, t \in \mathbb{Z}$ et $S \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.

La figure 3.1 de la page suivante montre une série artificielle générée par le modèle

$$\text{PARCH}_2(1) \text{ d'équation : } \varepsilon_{2\tau+s} = \eta_{2\tau+s} \sqrt{\alpha_{s,0} + \alpha_{s,1} \varepsilon_{2\tau+s-1}^2} \quad \text{avec} \quad \eta_{2\tau+s} \sim iid N(0,1) ,$$

$$\alpha_{0,0} = 0.02 , \alpha_{0,1} = 0.3 , \alpha_{1,0} = 0.2 \text{ et } \alpha_{1,1} = 0.03$$

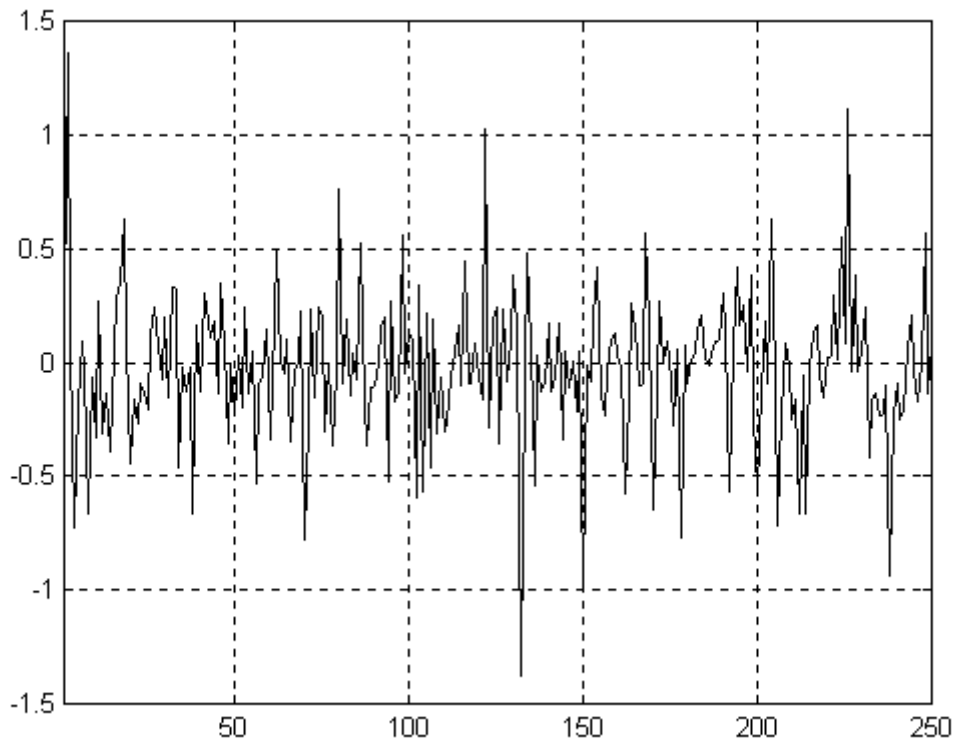


Figure 3.1 : Série artificielle générée par un processus $\text{PARCH}_2(1)$

3.2 Modèles PGARCH

Une première façon de prendre en compte les effets jours dans la volatilité serait d'introduire une série de variables muettes journalière dans la spécification standard du GARCH. Une telle modélisation suppose que ces effets jours ont un impact direct sur la variance non conditionnelle des séries envisagées sans pour autant affecter la dynamique de la volatilité ce qui est assez restrictif.

Une alternative consiste à étendre la classe des modèles précédents en y introduisant une structure périodique. Cette extension a été initialement proposée par Bollerslev et Ghysels (1996) qui motivent leur approche par l'observation que les coefficients de la volatilité et de persistance varient fréquemment avec la périodicité des séries observées que celles-ci soient fixes (effet saisonnier) ou non (fermeture, vacances, etc.). Etant donné que des effets périodiques sont également observés au niveau de la moyenne conditionnelle des séries financières, certains auteurs proposent de modéliser celle-ci par une structure autorégressive périodique admettant des coefficients autorégressifs différents pour les cinq jours de la semaine.

Notons que les modèles GARCH offrent souvent une représentation plus explicative que les modèles ARCH et que Bollerslev et Ghysels (1996) proposèrent succès l'application des modèles GARCH périodique à des séries de taux de change plus exactement sur les série "Derily Bilateral Deutschmark / British Pound" et "Intraday Deutsmark / US Dollar Spot Exchange" ainsi qu'à certain indice boursier.

Définition 3.2

On dit que le processus d'innovation périodiquement corrélé $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation autorégressive conditionnellement hétéroscédastique généralisée périodique de période d , noté PGARCH $_d(p,q)$, s'il vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, d) = 0 & (3.3) \\ \text{Var}(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, d) \equiv h_t = \alpha_{t,0} + \sum_{i=1}^q \alpha_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{t,j} h_{t-j} & (3.4) \end{cases}$$

telles que $\alpha_{t,0} > 0$, $\alpha_{t,i} \geq 0$ et $\beta_{t,i} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ et $\forall t \in \mathbb{Z}$

où les coefficients de l'équation de la variance conditionnelle $\alpha_{t,i}$ $i = 0, 1, \dots, q$ et $\beta_{t,j}$ $j = 0, 1, \dots, p$ sont des fonctions périodiques du temps de période d , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha_{t,i} = \alpha_{S+d\tau,i} = \alpha_{S,i} & i = 1, \dots, q \\ \beta_{t,j} = \beta_{S+d\tau,j} = \beta_{S,j} & j = 1, \dots, p \end{cases}$$

tels que $\tau, t \in \mathbb{Z}$ et $S \in \{0, 1, \dots, d-1\}$

3.3 Modèles PAR-PGARCH

L'avantage évident du modèle PGARCH c'est qu'il permet une représentation assez flexible des effets saisonniers et des diverses périodicités sur la volatilité des séries financières. Cependant, en prenant compte de ces résultats obtenus certains auteurs proposèrent une modélisation économique des rendements financiers intégrant à la fois périodicité observée en moyenne avec celle observée en volatilité, c'est la modélisation PAR-PGARCH.

Les modèles autorégressifs périodiques à erreur GARCH noté PAR-PGARCH sont définis par les équations suivantes :

$$\varepsilon_t = y_t - \sum_{l=1}^p \phi_{t,l} y_{t-l} \quad (3.5)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\varepsilon_t / \varepsilon_{\underline{t-1}}, d) = 0 \\ Var(\varepsilon_t / \varepsilon_{\underline{t-1}}, d) \equiv h_t = \alpha_{t,0} + \sum_{i=1}^q \alpha_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{t,j} h_{t-j} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\quad (3.7)$$

Ces modèles mettent en évidence une structure périodique dans l'autocorrélation des rendements ainsi que des effets périodiques dans les persistances de la volatilité.

3.4 Stationnarité périodique des modèles PARCH

Il est très important, avant toute étude de tout modèle, de vérifier les conditions de stationnarité. Selon Bollerslev et Ghysels (1996) et du fait de la non linéarité de ces modèles et de leur hétéroscédasticité, leur mécanique ne peut être exploité directement, alors ils ont proposé de regrouper les observations en paquet de telle manière que le vecteur couvre tout le cycle. C'est l'approche "Period span lumping". La détermination des conditions de causalité périodique est difficile, ce qui les a poussé à considérer les modèles cas par cas, c'est-à-dire supposer la stationnarité périodique de chaque canal, mais comme l'a montré Bentarzi et Hallin (1994) cette procédure est incomplète, car elle offre une condition suffisante mais pas nécessaire de la stationnarité périodique.

Stationnarité périodique d'un modèle PARCH_d(1) : (Boukerdenna (2002))

Soit le processus périodique corrélé $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ qui admet une représentation PARCH(1) de période $d, d \geq 2$, défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\varepsilon_t / \varepsilon_{\underline{t-1}}, d) = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Var(\varepsilon_t / \varepsilon_{\underline{t-1}}, d) = \alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} \varepsilon_{t-1}^2 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

que l'on peut reformuler selon une représentation AR(1) de sorte que $u_t = \varepsilon_t^2 - h_t$

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}\varepsilon_{t-1}^2 + u_t \quad (3.10)$$

telles que $\alpha_{t,0} > 0$ et $\alpha_{t,1} \geq 0$

Par remplacement récursif de $m-1$ fois dans l'équation (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}\alpha_{t-1,0} + \alpha_{t,1}\alpha_{t-1,1}\alpha_{t-2,0} + \dots + \alpha_{t,1}\alpha_{t-1,1}\alpha_{t-2,1}\dots\alpha_{t-(m-1),1}\alpha_{t-m,0} \\ &\quad + \left(\prod_{j=1}^m \alpha_{t-j+1,1}\right)\varepsilon_{j-m}^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\prod_{l=1}^j \alpha_{t-l+1,1}\right)u_{t-j} + u_t \end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_{t,0} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\alpha_{t-j,0} \prod_{l=1}^j \alpha_{t-l+1,1}\right) + \left(\prod_{j=1}^m \alpha_{t-j+1,1}\right)\varepsilon_{j-m}^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\prod_{l=1}^j \alpha_{t-l+1,1}\right)u_{t-j} + u_t$$

en prenant l'espérance des deux membres conditionnellement à ε_{t-m} , on aura

$$E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-m}, d) = \alpha_{t,0} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\alpha_{t-j,0} \prod_{l=1}^j \alpha_{t-l+1,1}\right) + \left(\prod_{j=1}^m \alpha_{t-j+1,1}\right)\varepsilon_{j-m}^2 \quad (3.11)$$

Si on pose $k + d\tau = t - j + 1$ et $m = i + hd$, telles que $i, k = 0, 1, \dots, d-1$ et $h, \tau \in \mathbb{C}$, et considérant la périodicité des paramètres, alors

$$\prod_{j=1}^m \alpha_{t-j+1,1} = \left(\prod_{k=0}^{d-1} \alpha_{k,1}\right)^h \prod_{k=0}^{i+1} \alpha_{k,1} \quad (3.12)$$

En remplaçant (3.12) dans (3.11), on trouve

$$E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-m}, d) = \alpha_{t,0} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\alpha_{t-j,0} \prod_{l=1}^j \alpha_{t-l+1,1}\right) + \left(\prod_{k=0}^{d-1} \alpha_{k,1}\right)^h + \left(\prod_{j=0}^{d-1} \alpha_{t-j+1,1}\right)\varepsilon_{j-m}^2 \quad (3.13)$$

Lorsque m tend vers l'infini et h tend aussi vers l'infini, la variance conditionnelle convergera vers la variance marginale (Engle (1982)) et cela n'est possible que lorsque :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=0}^{d-1} \alpha_{k,1}\right)^h \prod_{k=0}^{i+1} \alpha_{k,0} = 0 \quad (3.14)$$

c'est-à-dire si la condition suivante est vérifiée

$$\left| \prod_{k=0}^{d-1} \alpha_{k,1} \right| < 1 \quad (3.15)$$

Donc le modèle PARCH(1) est périodiquement stationnaire si et seulement si

$$0 \leq \prod_{k=0}^{d-1} \alpha_{k,1} < 1 \quad (3.16)$$

3.5 Estimation des modèles PAR-PARCH (Boukerdenna (2002))

Dans cette méthode, Boukerdenna (2002) considère les dT observations y_1, y_2, \dots, y_{dT} satisfaisant les équations :

$$\varepsilon_t = y_t - \sum_{l=1}^p \phi_{t,l} y_{t-l} \quad (3.17)$$

où

$$\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, d \sim N(0, h_t) \quad (3.18)$$

tel que

$$h_t = \alpha_{t,0} + \sum_{i=1}^q \alpha_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.19)$$

telles que $\alpha_{t,0} > 0$ et $\alpha_{t,i} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q$ et $\forall t \in \mathbb{Z}$ en posant $t = k + \tau d$, $k = 1, \dots, d$ et $\tau \in \mathbb{Z}$.

Soit la notation suivante :

$$X_t(j) = \begin{cases} y_{k+d\tau-(j-p(k-1))} & \text{si } j \in \{p(k-1)+1, \dots, pk\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.20)$$

ou encore

$$X_t = X_\tau^{(k)} = (0, \dots, 0, y_{k+d\tau-1}, \dots, y_{k+d\tau-p}, 0, \dots, 0) \quad (3.21)$$

Soit l'ensemble des paramètres autorégressifs périodiques le $(d \times p)$ vecteur $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(d)})^t$, sachant que $\beta^{(k)} = (\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,p})^t$, $k = 1, \dots, d$.

Donc, on peut écrire les équations (3.17), (3.18) et (3.19) :

$$y_t = X_t \beta + \varepsilon_t$$

Suivant le même raisonnement, on identifie le $(d \times (q+1))$ vecteur $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(d)})^t$, sachant que $\alpha^{(k)} = (\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,q})^t$, $k = 1, \dots, d$.

On définit Z_t par

$$Z_t(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = (q+1) \times (k-1) + 1 \\ \varepsilon_{k+d\tau - (j - ((q+1) \times (k-1)) - 1)}^2 & \text{si } j \in \{(q+1) \times (k-1) + 2, \dots, (q+1) \times k\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou encore

$$Z_t = \Gamma_\tau^{(k)} = (0, \dots, 0, 1, \varepsilon_{k+d\tau-1}^2, \dots, \varepsilon_{k+d\tau-q}^2, 0, \dots, 0) \quad (3.22)$$

On réécrit la variance conditionnelle comme suit :

$$h_t = Z_t \alpha \quad \text{ou encore} \quad h_t = \Gamma_\tau^{(k)} \alpha \quad (3.23)$$

en suivant la même procédure citée dans l'estimation des modèles AR-ARCH.

3.5.1 Le gradient

Les conditions du 1^{ier} ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L(\hat{\theta}_T)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \log L(\hat{\theta}_T)}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L(\hat{\theta}_T)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \log L(\hat{\theta}_T)}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Le gradient du $\log L$ devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} \frac{(\varepsilon_t^2 - h_t)}{2h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} \frac{(\varepsilon_t^2 - h_t)}{2h_t^2} \cdot Z_t \\ &= \frac{1}{dT} \sum_{k=1}^T \sum_{\tau=0}^{T-1} \frac{(\varepsilon_{k+d\tau}^2 - h_{k+d\tau})}{2h_{k+d\tau}^2} \cdot \Gamma_\tau^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \beta} &= \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} \left[\frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t} + \frac{(\varepsilon_t^2 - h_t)}{2h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta} \right] \\ &= \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} \left[\frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t} - \frac{(\varepsilon_t^2 - h_t)}{h_t^2} \sum_{j=1}^q \alpha_{t,j} \varepsilon_{t-j} x'_{t-j} \right] \\ &= \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} x'_t \varepsilon_t \left[\frac{1}{h_t} - \sum_{j=1}^q \alpha_{t,j} \frac{\varepsilon_{t+j}^2 - h_{t+j}}{h_{t+j}^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{dT} \sum_{k=1}^d \sum_{\tau=0}^{T-1} X_{\tau}^{\prime(k)} \varepsilon_{k+d\tau} \left[\frac{1}{h_{k+d\tau}} - \sum_{j=1}^q \alpha_{k,j} \frac{\varepsilon_{k+d\tau+j}^2 - h_{k+d\tau+j}}{h_{k+d\tau+j}^2} \right] \\
&= \frac{1}{dT} \sum_{k=1}^d \sum_{\tau=0}^{T-1} X_{\tau}^{\prime(k)} \varepsilon_{k+d\tau} s_{k+d\tau}
\end{aligned}$$

où

$$s_{k+d\tau} = \frac{1}{h_{k+d\tau}} - \sum_{j=1}^q \alpha_{k,j} \frac{\varepsilon_{k+d\tau+j}^2 - h_{k+d\tau+j}}{h_{k+d\tau+j}^2}$$

3.5.2 Hessienne

Les dérivées du second ordre du $\log L$ sont données par :

$$\frac{\partial \log l_t(\theta)}{\partial \alpha \partial \alpha'} = -\frac{1}{h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha'} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(\frac{1}{h_t} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log l_t(\theta)}{\partial \beta \partial \beta'} &= -\frac{x'_t x_t}{h_t} - \frac{1}{2h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta'} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) - \frac{2\varepsilon_t x'_t}{h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta} \\
&\quad + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta'} \left(\frac{1}{2h_t} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \log l_t(\theta)}{\partial \alpha \partial \beta'} = \frac{Z_t}{2h_t^2} \cdot \left(1 - 2 \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right) \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta'}$$

3.5.3 Matrice d'information

La matrice d'information est donnée par blocs :

$$\varphi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2dT} \sum_{t=1}^{dT} E \left(\frac{1}{h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha'} \right)$$

et estimée par :

$$\hat{\varphi}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2dT} \sum_{t=1}^{dT} \left(\frac{Z'_t Z_t}{h_t^2} \right) = \frac{1}{2dt} \sum_{k=1}^d \sum_{\tau=0}^{T-1} \left(\frac{\Gamma_{\tau}^{\prime(k)} \cdot \Gamma_{\tau}^{(k)}}{h_{k+d\tau}^2} \right)$$

et

$$\varphi_{\beta\beta} = \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} E \left(\frac{x'_t x_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta'} \right)$$

et estimée par :

$$\hat{\phi}_{\beta\beta} = \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} \left(\frac{x'_t x_t}{h_t} + 2 \sum_{j=1}^q \left(\frac{\alpha_{t,j}^2 \varepsilon_{t-j}^2}{h_t^2} x'_{t-j} x_{t-j} \right) \right)$$

Cette expression est approximée par Engle (1982) :

$$\hat{\phi}_{\beta\beta} = \frac{1}{dT} \sum_{k=1}^d \sum_{\tau=0}^{T-1} X_{\tau}^{(k)} X_{\tau}^{(k)} r_{k+d\tau}^2$$

La off diagonale de la matrice d'information est donnée par :

$$\hat{\phi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{dT} \sum_{t=1}^{dT} \left[\frac{1}{2h_t^2} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \beta'} \right]$$

Algorithme du score :

Ces étapes sont les suivantes :

1°/ Estimation du paramètre β par une procédure d'inférence adéquate..

2°/ Estimation du paramètre α .

Chaque itération est donnée par :

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i + [\tilde{Z}' \cdot \tilde{Z}]^{-1} \tilde{Z}' f^i$$

telles que

$$\tilde{Z}_t = \frac{Z_t}{\hat{h}_t^i}, \tilde{Z}' = (\tilde{Z}'_1, \dots, \tilde{Z}'_{dT}), f_t^i = \frac{e_t^2 - \hat{h}_t^i}{\hat{h}_t^i} \text{ et } f'^i = (f_1^i, \dots, f_{dT}^i)$$

e_t : les résidus de l'itération i.

\hat{h}_t^i : l'estimateur de la vraisemblance conditionnelle.

α^i : l'estimateur du vecteur des paramètres inconnues à l'itération i.

3°/ Estimation du paramètre β .

Etant donné l'estimateur $\hat{\alpha}_{dT}$ de α . Chaque itération est donnée par :

$$\beta^{i+1} = \beta^i + [\tilde{X}' \cdot \tilde{X}]^{-1} \tilde{X}' \tilde{e}$$

telles que

$$\tilde{X}_t = X_t r_t \quad \text{et} \quad \tilde{e}_t = e_t s_t / r_t$$

r_t et s_t sont données dans les expressions de $\hat{\phi}_{\beta\beta}$ et de $\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \beta}$

e_t est l'estimateur de ε_t à l'itération i .

Méthode en deux étape :

Elle ne diffère pas de celle décrite dans la partie de l'itération des modèles AR-ARCH, seulement elle nécessite de nouvelles notations de variables. (Pour plus de détails, voir Boukerdenna (2002).

Chapitre 4 :

Estimation récursive des paramètres d'un Modèle ARCH(q)

Toute méthode récurrente part d'une fonction objectif à optimiser et se termine par une méthode ou un algorithme récursif pour la mise en œuvre effective sur les données. Théoriquement, plusieurs critères à optimiser peuvent être considérés (approche Bayésienne, maximum de vraisemblance, etc.). Mais souvent le critère retenu est la minimisation de l'erreur (de prévision) quadratique moyenne (Mean Square Error ou MSE). Cette approche permet de construire une suite d'estimateurs du paramètre à estimer qui permet d'approcher de plus en plus la vraie valeur de ce paramètre.

Les algorithmes récurrents ont occupé une place considérable due au développement du traitement numérique et à l'augmentation constante de la puissance des calculateurs permettant ainsi l'implémentation en temps réel d'algorithmes de plus en plus sophistiqués. L'intérêt de la forme récursive des algorithmes récursifs est dû à la possibilité du traitement en ligne des données en temps réel grâce à une mémorisation finie dans un vecteur de taille fixé. En effet l'estimation courante est remise à jour de manière à ce que le nombre d'opérations et l'espace mémoire ne croient pas avec le nombre d'observations et ne dépendent que du modèle choisi.

L'introduction des méthodes en ligne a permis de soulever le problème de coût en temps de traitement que les méthodes hors ligne ont connu puisqu'elles nécessitent à l'introduction de chaque nouvelle donnée le déroulement complet de toute la procédure d'estimation.

4.1 Méthode

Pour notre problème il s'agit de considérer la troisième formulation du modèle ARCH(q) définie dans le chapitre 1.

Nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + u_t \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t \\ &= \varphi_t^T \theta + u_t\end{aligned}$$

où

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_{t-1}^2 \\ \varepsilon_{t-2}^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q}^2 \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} \text{ qui sont deux vecteurs de taille } q+1.$$

Ce modèle décrit la variable ε_t^2 comme une combinaison linéaire des composants de φ_t plus u_t qui représente l'innovation du processus dans cette représentation autorégressif d'ordre q "AR(q)". La meilleure prévision de au sens des moindres carrés ε_t^2 basée sur son passé et que l'on note $\hat{\varepsilon}_{t/t-1}^2(\theta)$ est par conséquent donnée par : $\hat{\varepsilon}_{t/t-1}^2(\theta) = \varphi_t^T \theta$.

L'erreur de prévision $\hat{u}_t(\theta)$ est donc égal à $\varepsilon_t^2 - \hat{\varepsilon}_{t/t-1}^2(\theta)$.

Nous avons la relation $\hat{u}_t(\theta^*) = u_t$ où θ^* est la vraie valeur du paramètre.

Le critère d'optimisation est donc : $\min_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q} f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$

où

$$f(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) = \frac{1}{N-q+1} \sum_{t=q}^N \hat{u}_t(\theta)^2 = \frac{1}{N-q+1} \sum_{t=q}^N (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \theta)^2$$

La suite $(\hat{u}_t(\theta))$ n'est définie que pour $t \geq q$ et $N-q+1$ étant le nombre d'éléments de la suite $\hat{u}_q(\theta), \hat{u}_{q+1}(\theta), \dots, \hat{u}_N(\theta)$.

Considérons le théorème suivant qui nous donne un estimateur des paramètres d'un modèle ARCH(q). Cet estimateur est calculé de manière directe (c'est-à-dire que le calcul n'est pas récursif). C'est la méthode hors ligne.

Théorème 4.1 :

Supposons que la matrice $(\sum_{t=q}^N \varphi_t \varphi_t^T)$ est inversible, nous avons :

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{t=q}^N \varphi_t \varphi_t^T \right)^{-1} \sum_{t=q}^N \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

où $\hat{\theta}_N = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_q \end{pmatrix}$ est l'estimateur hors ligne du paramètre θ en utilisant une série de taille N .

Preuve

En calculant et en annulant les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial \hat{\alpha}_i}$ pour $i = 0, 1, \dots, q$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_q)}{\partial \hat{\alpha}_0} &= \frac{-2}{N-q+1} \sum_{t=q}^N (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_N) = 0 \\ \frac{\partial f(\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_q)}{\partial \hat{\alpha}_1} &= \frac{-2}{N-q+1} \sum_{t=q}^N (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_N) \varepsilon_{t-1} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f(\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_q)}{\partial \hat{\alpha}_q} &= \frac{-2}{N-q+1} \sum_{t=q}^N (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_N) \varepsilon_{t-q} = 0\end{aligned}$$

Donc
$$\sum_{t=q}^N (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_N) \varphi_t = \underline{0}$$

Ainsi
$$\sum_{t=q}^N \varepsilon_t^2 \varphi_t - \sum_{t=q}^N \varphi_t^T \hat{\theta}_N \varphi_t = \underline{0}$$

D'où
$$\sum_{t=q}^N \varphi_t^T \hat{\theta}_N \varphi_t = \sum_{t=q}^N \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

où

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \text{un vecteur à } q+1 \text{ éléments nuls.}$$

Finalement

$$\left(\sum_{t=q}^N \varphi_t \varphi_t^T \right) \hat{\theta}_N = \sum_{t=q}^N \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

et

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{t=q}^N \varphi_t \varphi_t^T \right)^{-1} \sum_{t=q}^N \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

sous l'hypothèse que la matrice $\sum_{t=q}^N \varphi_t \varphi_t^T$ (de taille $(q+1) \times (q+1)$) soit inversible.

Considérons maintenant le théorème suivant qui nous permet de calculer récursivement un estimateur des paramètres d'un modèle ARCH(q). C'est-à-dire que le résultat du théorème 4.1 peut être obtenu de manière récursive en calculant $\hat{\theta}_t$ à partir de $\hat{\theta}_{t-1}$ et d'une nouvelle observation à l'instant t.

Théorème 4.2

Pour $t > q$, nous avons : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}}{t} \bar{R}_t^{-1} \varphi_t$

avec $\bar{R}_t = \bar{R}_{t-1} + \frac{1}{t}(\varphi_t \varphi_t^T - \bar{R}_{t-1})$

Preuve

Du théorème 4.1, posons :

$$\hat{\theta}_t = R_t^{-1} \sum_{k=q}^t \varepsilon_k^2 \varphi_k \quad \text{avec} \quad R_t = \sum_{k=q}^t \varphi_k \varphi_k^T \quad (4.1)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t &= R_t^{-1} \sum_{k=q}^t \varepsilon_k^2 \varphi_k \\ &= R_t^{-1} \left(\sum_{k=q}^{t-1} \varepsilon_k^2 \varphi_k + \varepsilon_t^2 \varphi_t \right) \\ &= R_t^{-1} (R_{t-1} \hat{\theta}_{t-1} + \varepsilon_t^2 \varphi_t) \quad (\text{car d'après 4.1, nous avons } \sum_{k=q}^{t-1} \varepsilon_k^2 \varphi_k = R_{t-1} \hat{\theta}_{t-1}) \\ &= R_t^{-1} (R_t \hat{\theta}_{t-1} - \varphi_t \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1} + \varepsilon_t^2 \varphi_t) \quad (\text{car d'après 4.1, nous avons } R_t = R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T \\ &\quad \text{et } R_{t-1} = R_t - \varphi_t \varphi_t^T) \\ &= R_t^{-1} (R_t \hat{\theta}_{t-1} + \varphi_t (-\varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1} + \varepsilon_t^2)) \\ &= \hat{\theta}_{t-1} + R_t^{-1} \varphi_t (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aussi :

$$\begin{aligned} \bar{R}_t &= \frac{1}{t} R_t \\ &= \frac{1}{t} (R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T) \quad (\text{car d'après 4.1, nous avons } R_t = R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T) \\ &= \frac{1}{t} ((t-1) \bar{R}_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T) \\ &= \frac{t-1}{t} \bar{R}_{t-1} + \frac{1}{t} \varphi_t \varphi_t^T \\ &= \bar{R}_{t-1} + \frac{1}{t} (\varphi_t \varphi_t^T - \bar{R}_{t-1}) \end{aligned}$$

Finalement : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}}{t} \bar{R}_t^{-1} \varphi_t$.

Les équations du théorème précédent possèdent théoriquement l'aspect d'un algorithme récursif, mais cet algorithme n'est pas encore exploitable du point de vue numérique. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'inversion d'une matrice de taille $(q+1) \times (q+1)$, ce qui est très coûteux en temps de traitement du programme si le nombre de paramètres à estimer est grand. Pour remédier à cela, nous proposons le résultat suivant :

Théorème 4.3

Pour $t > q$, nous avons : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) L_t$

avec $L_t = \frac{1}{1 + \varphi_t^T P_{t-1} \varphi_t} P_{t-1} \varphi_t$ et $P_t = P_{t-1} - L_t \varphi_t^T P_{t-1}$

Preuve

Nous avons :

$$\begin{aligned} R_t^{-1} &= (R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T)^{-1} \\ &= R_{t-1}^{-1} - \frac{R_{t-1}^{-1} \varphi_t \varphi_t^T R_{t-1}^{-1}}{1 + \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t} \quad (\text{car } (A + bb^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} b b^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} b}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donc

$$R_t^{-1} \varphi_t = R_{t-1}^{-1} \varphi_t - \frac{R_{t-1}^{-1} \varphi_t \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t}{1 + \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t} = \frac{R_{t-1}^{-1} \varphi_t}{1 + \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t}$$

En posant

$$R_t^{-1} = P_t$$

et

$$L_t = \frac{1}{1 + \varphi_t^T P_{t-1} \varphi_t} P_{t-1} \varphi_t,$$

on obtient :

$$P_t = P_{t-1} - L_t \varphi_t^T P_{t-1} \quad (\text{d'après 4.3})$$

et

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) L_t. \quad (\text{d'après 4.2})$$

Cette méthode est plus intéressante puisqu'elle ne nécessite pas l'inversion d'une matrice de taille $(q+1) \times (q+1)$, ce qui minimise la propagation des erreurs d'arrondi dans les calculs et accélère et diminue le temps d'exécution.

Proposition 4.4

La complexité spatiale de la méthode récursive du théorème 4.3 est de $O(q^2)$.

Preuve

Pour le déroulement de cette méthode récursive, nous avons besoin uniquement d'une matrice P de taille $(q+1) \times (q+1)$ et de trois vecteurs $\hat{\theta}_t$, φ_t et L de taille $q+1$ chacun. D'où le résultat.

Proposition 4.5

La complexité temporelle de la méthode récursive du théorème 4.3 est de $O((N - q)q^3)$.

Preuve

Le nombre d'itérations de la méthode récursive est égal à $N - q$ et lors du passage d'une itération à une autre, nous avons besoin de multiplier deux matrices $L\varphi^T$ et P de taille $(q + 1) \times (q + 1)$ chacune. Cette multiplication se fait en $O(q^3)$. Les autres additions et multiplications sont de complexité inférieure. D'où le résultat.

4.2 Méthode en ligne

Les méthodes en ligne concernent le cas où la taille de la série des données observées n'est pas fixe. C'est-à-dire que les données sont disponibles progressivement dans le temps. Les méthodes hors ligne concernent le cas où la taille de la série est fixe.

Les méthodes d'estimation hors ligne s'avèrent trop lourdes et inadéquates lorsqu'elles sont appliquées à des données qui sont disponibles progressivement dans le temps. Car elles nécessitent, à l'introduction de chaque nouvelle donnée, le déroulement complet de toute la procédure d'estimation pour tout le bloc. Ce qui est très coûteux en temps de traitement. L'introduction des méthodes en ligne a permis de soulever ce problème.

Les deux dernières méthodes récursives d'estimation que nous avons développées dans ce chapitre sont des méthodes en ligne.

Proposition 4.6

La complexité temporelle de la méthode du théorème 4.3 dans le cas d'une méthode en ligne est de $O(q^3)$.

Preuve

Dans la méthode en ligne nous considérons une seule itération (le passage de $\hat{\theta}_{t-1}$ à $\hat{\theta}_t$). Pour cette méthode, nous avons besoin de multiplier deux matrices $L\varphi^T$ et P de taille $(q + 1) \times (q + 1)$ chacune. Cette multiplication se fait en $O(q^3)$. Les autres additions et multiplications sont de complexité inférieure. D'où le résultat.

4.3 Choix des valeurs initiales

La simplicité des méthodes récurrentes étudiées ne doit pas faire oublier qu'en pratique leur implémentation numérique n'est pas une tâche facile puisque ces méthodes récurrentes sont très sensibles aux valeurs initiales. Pour empêcher que l'estimateur ne soit très sensible aux valeurs de départ (les premières valeurs de la série), il faut bien choisir ces valeurs initiales. Il faut donc prendre quelques précautions pour que l'estimateur ne s'éloigne pas de la vraie valeur du paramètre à estimer.

4.3.1 Choix de $\hat{\theta}_q$

La pratique et l'expérience ont montré que la bonne valeur pour $\hat{\theta}_q$ est : $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

Pour vérifier l'efficacité de la valeur de $\hat{\theta}_q$, nous proposons les simulations suivantes pour deux valeurs de $\hat{\theta}_q$: $\hat{\theta}_q = \underline{1}$ et $\hat{\theta}_q = \underline{0}$ ($\underline{1}$ est un vecteur ayant tous ces éléments égaux à 1 et est de dimension $q+1$) sur des données générées aléatoirement par un processus ARCH(1). Pour cela, nous avons considéré le modèle suivant :

Modèle : $\alpha_0 = 0.02$ et $\alpha_1 = 0.3$

Les résultats sont rapportés sur les graphes ci-dessous en prenons $M=10000$.

De toutes les simulations faites, nous avons remarqué que :

- $\hat{\theta}_q = \underline{1}$ est une bonne valeur de départ surtout pour des échantillons de petite taille (taille de l'échantillon inférieure à 100).
- Pour une taille d'échantillon supérieure à 100, l'estimation est faiblement influencée par la valeur de départ.

$$\text{MSE} = 3,668702 \times 10^{-9}$$

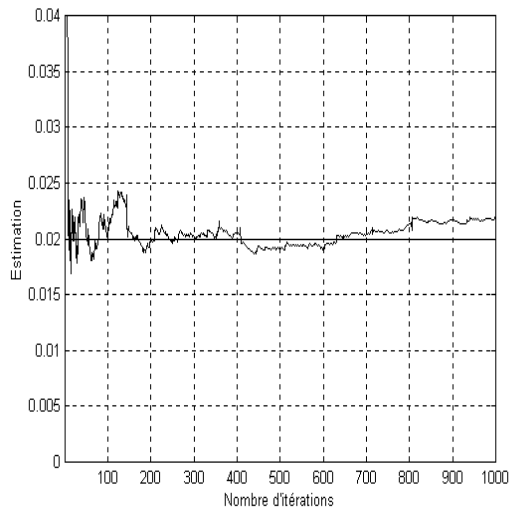


Figure 4.1 : Estimation de α_0 pour $\hat{\theta}_q = \underline{0}$

$$\text{MSE} = 3,198634 \times 10^{-9}$$

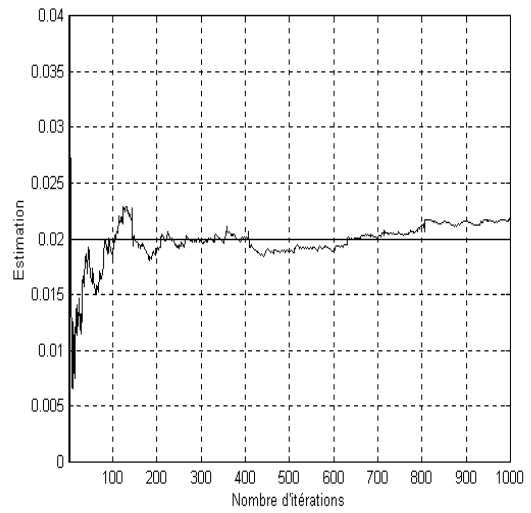


Figure 4.2 : Estimation de α_0 pour $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

$$\text{MSE} = 1,221141 \times 10^{-6}$$

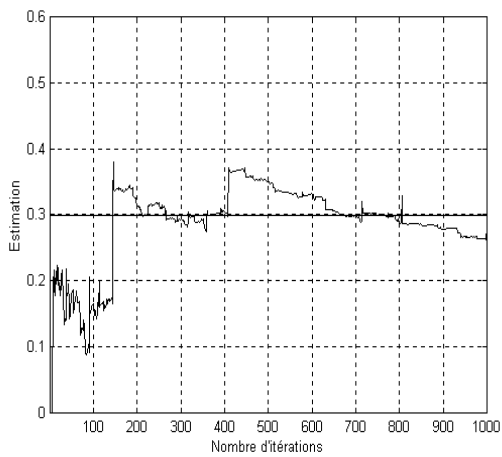


Figure 4.3 : Estimation de α_1 pour $\hat{\theta}_q = \underline{0}$

$$\text{MSE} = 9,220243 \times 10^{-7}$$

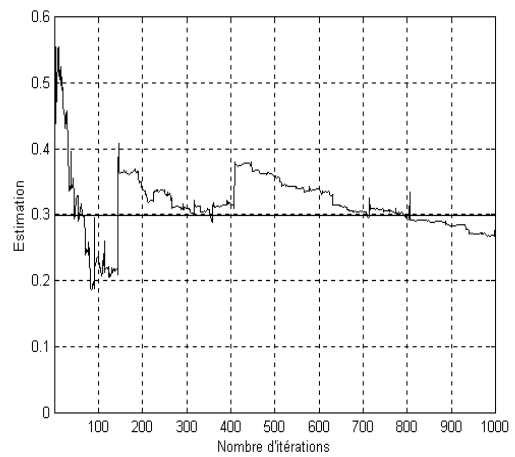


Figure 4.4 : Estimation de α_1 pour $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

4.3.2 Choix de P_q

En pratique, la bonne valeur pour P_q est :

$$P_q = M Id$$

où M est un nombre positif assez grand et Id la matrice identité de taille $(q+1)^2$.

Pour vérifier l'efficacité de la valeurs de M , nous proposons les simulations suivantes pour différentes valeurs de M : $M=10$, $M=100$, $M=1000$ et $M=10000$ sur des données générées aléatoirement par un processus ARCH(1). Pour cela, nous avons considéré le modèle suivant :

Modèle : $\alpha_0 = 0.02$ et $\alpha_1 = 0.3$

Les résultats sont rapportés sur les graphes ci-dessous.

De toutes les simulations faites, nous avons remarqué que :

- plus M est grand, plus l'estimation est meilleure.
- à partir d'une certaine valeur ($M=10000$), l'estimation se stabilise.

$$\text{MSE} = 2,576850 \times 10^{-8}$$

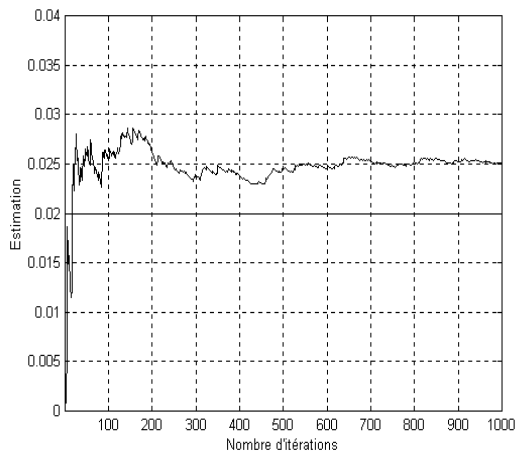


Figure 4.5 : Estimation de α_0 pour M=10

$$\text{MSE} = 3,216830 \times 10^{-9}$$

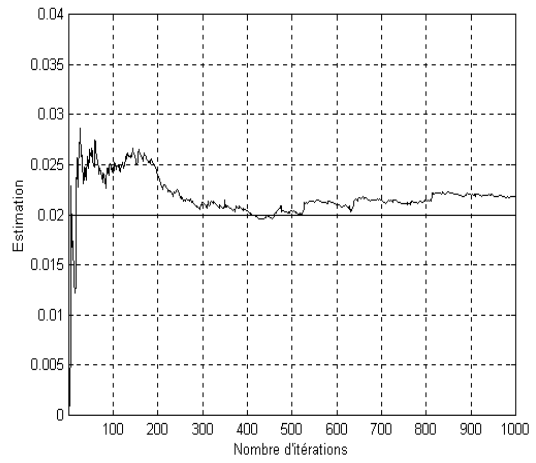


Figure 4.6 : Estimation de α_0 pour M=100

$$\text{MSE} = 1,273477 \times 10^{-9}$$

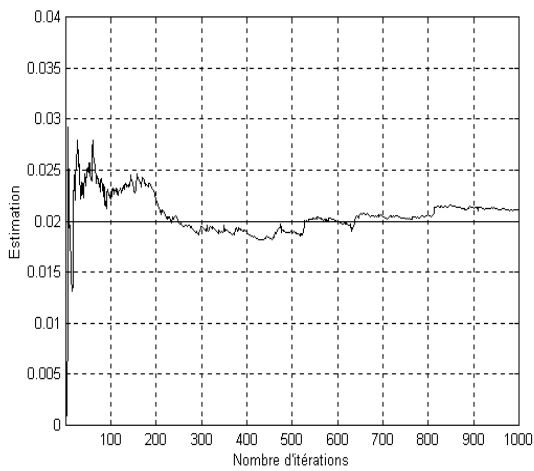


Figure 4.7 : Estimation de α_0 pour M=1000

$$\text{MSE} = 1,132584 \times 10^{-9}$$

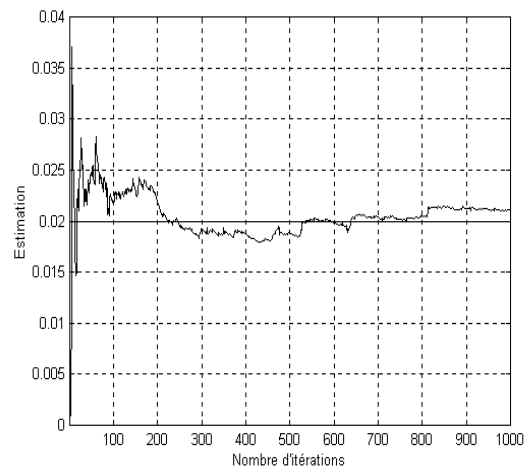


Figure 4.8 : Estimation de α_0 pour M=10000

$$\text{MSE} = 2,429336 \times 10^{-5}$$

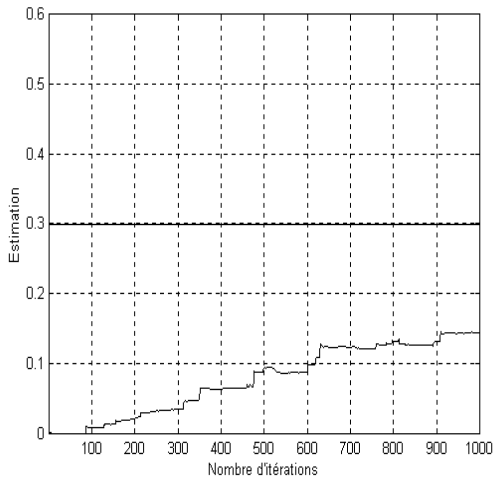


Figure 4.9 : Estimation de α_1 pour M=10

$$\text{MSE} = 1,767231 \times 10^{-6}$$

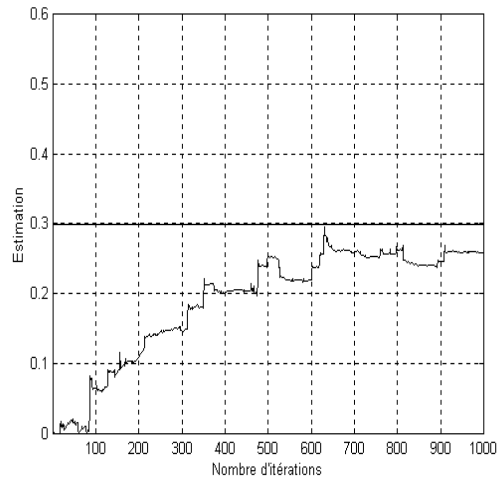


Figure 4.10 : Estimation de α_1 pour M=100

$$\text{MSE} = 3,458749 \times 10^{-7}$$

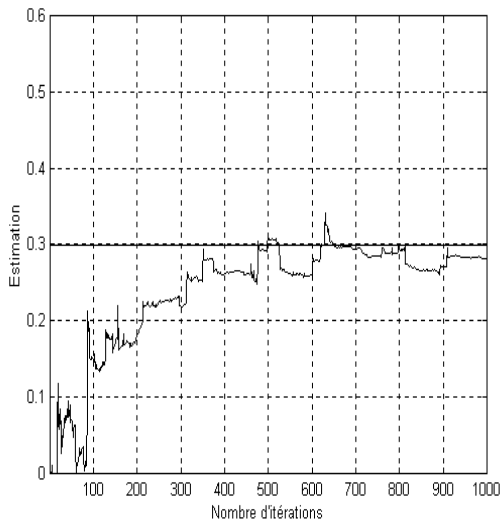


Figure 4.11 : Estimation de α_1 pour M=1000

$$\text{MSE} = 2,570780 \times 10^{-7}$$

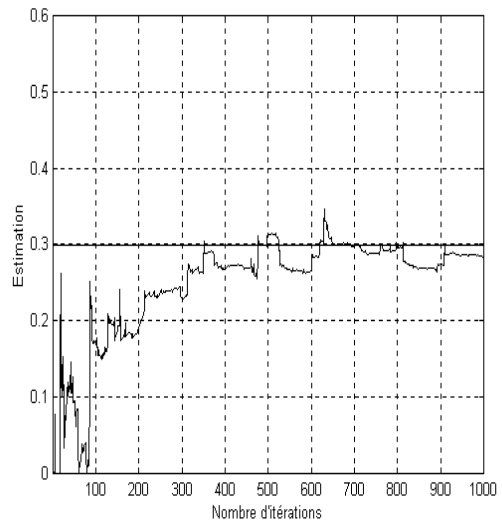


Figure 4.12 : Estimation de α_1 pour M=10000

4.4 Facteur d'oubli

Comme nous l'avons déjà mentionné les méthodes récurrentes sont très sensibles aux valeurs initiales. Pour remédier à cet inconvénient, nous proposons d'incorporer un facteur d'oubli. C'est-à-dire une suite de valeurs λ_t qui permet d'atténuer les variations des paramètres à estimer.

En pratique, les chercheurs utilisent souvent (voir Ljung et Söderström (1983)) :

$$\lambda_t = \delta\lambda_{t-1} + (1 - \delta)$$

et nous avons choisi les conditions :

$$\lambda_q = 0.95 \quad \text{et} \quad \delta = 0.99$$

Le théorème 4.3 devient alors :

Théorème 4.7

Pour $t > q$, nous avons : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) L_t$
avec $L_t = \frac{\lambda_t}{\lambda_t + \varphi_t^T P_{t-1} \varphi_t} P_{t-1} \varphi_t$, $P_t = P_{t-1} - L_t \varphi_t^T P_{t-1}$ et $\lambda_t = \delta\lambda_{t-1} + (1 - \delta)$.

Et comme valeurs initiales :

$$\hat{\theta}_q = \underline{1}, \quad P_q = M \text{ Id}, \quad \lambda_q = 0.95 \quad \text{et} \quad \delta = 0.99$$

où $\underline{1}$ est un vecteur de taille $q+1$, M est un nombre positif assez grand et Id la matrice identité de taille $(q+1) \times (q+1)$.

4.5 Admissibilité de la valeur courante

Pour chaque valeur de t , surtout pour t assez petit (c'est-à-dire pour les premières valeurs de t), nous devons tester et contrôler l'admissibilité de la valeur de $\hat{\theta}_t$. C'est-à-dire vérifier si $\hat{\alpha}_0 > 0$ et $\hat{\alpha}_i \in [0, 1[$ pour $i = 1, \dots, q$ (ou encore si $\hat{\theta}_t$ vérifie les conditions de stationnarité).

La méthode proposée est donnée ci-dessous. Son principe est de projeter l'estimation courante qui ne vérifie pas les conditions de stationnarité dans l'ensemble des valeurs admissibles en rendant de plus en plus petit le terme de remise à jour.

- Si $\hat{\alpha}_i$ ($i \in \{0, 1, \dots, q\}$) est négative alors nous la remplaçons par sa valeur absolue.
- Si $\hat{\alpha}_i$ ($i \in \{1, \dots, q\}$) est supérieure à 1 alors nous cherchons le plus petit $k \in \mathbb{N}$ de sorte que $\frac{\hat{\alpha}_i}{\rho^k}$ soit admissible. Cette dernière valeur remplace l'ancienne valeur de $\hat{\alpha}_i$. En général, $\rho = 2$ convient, mais parfois il faut diminuer cette valeur.

4.6 Simulation

Pour vérifier l'efficacité de la méthode d'estimation proposée, nous proposons d'appliquer cette méthode à différentes données artificielles générées aléatoirement par un processus ARCH(q). Pour cela, considérons les modèles suivants :

Modèle 1 : $\alpha_0 = 0.02$ et $\alpha_1 = 0.3$ (ARCH(1))

Modèle 2 : $\alpha_0 = 0.3$ et $\alpha_1 = 0.05$ (ARCH(1))

Modèle 3 : $\alpha_0 = 0.02$, $\alpha_1 = 0.1$ et $\alpha_2 = 0.3$ (ARCH(2))

Modèle 4 : $\alpha_0 = 0.3$, $\alpha_1 = 0.1$ et $\alpha_2 = 0.02$ (ARCH(2))

Modèle 5 : $\alpha_0 = 0.6$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.02$ et $\alpha_3 = 0.3$ (ARCH(3))

Pour la simulation, nous considérons différentes tailles (N) de l'échantillon : N=100, N=200, N=400, N=600 et N=800. Pour chaque échantillon, nous répétons la procédure d'estimation 40 fois. Nous calculons, ensuite, la moyenne et l'erreur quadratique moyenne (MSE). Tous les résultats sont rapportés sur les tableaux et les graphes ci-dessous.

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$
100	0.02087708	0.26987069	0.00001255	0.01253358
200	0.01939170	0.28887968	0.00000824	0.01516335
400	0.02086885	0.29509424	0.00000541	0.01029258
600	0.02067620	0.31021220	0.00000545	0.00650508
800	0.01986286	0.30307201	0.00000299	0.00357124

Table 4.1 : Résultats du modèle 1.

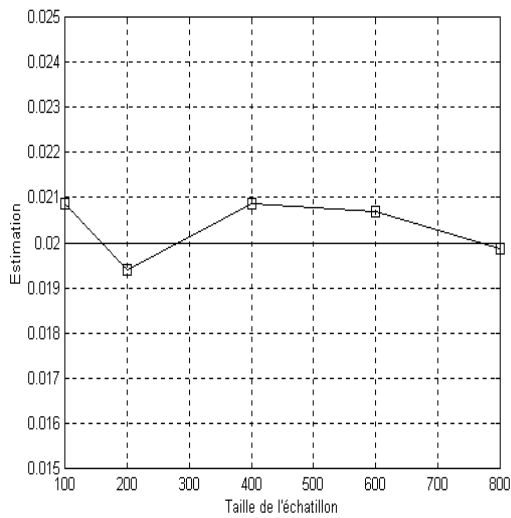


Figure 4.13 : Moyenne de $\hat{\alpha}_0$

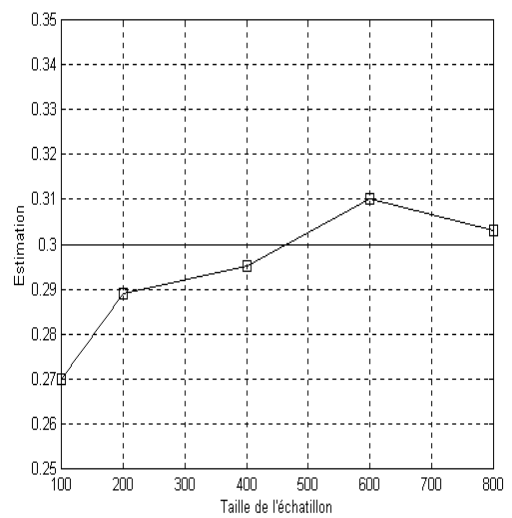


Figure 4.14 : Moyenne de $\hat{\alpha}_1$

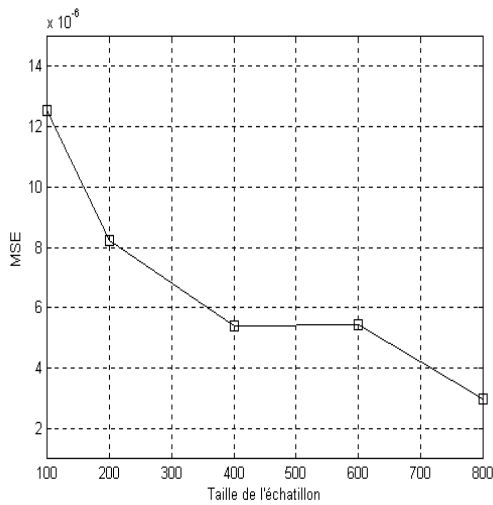


Figure 4.15 : MSE de $\hat{\alpha}_0$

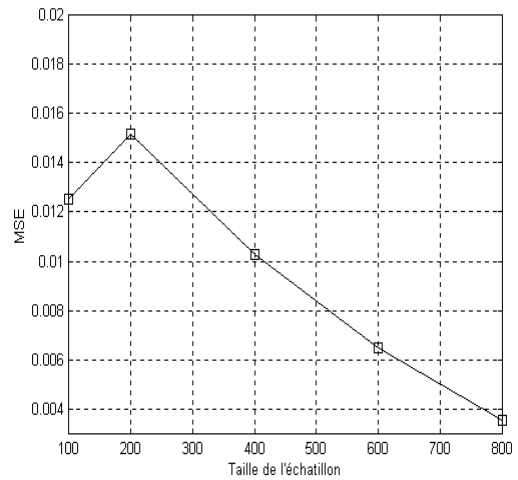


Figure 4.16 : MSE de $\hat{\alpha}_1$

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$
100	0.30520540	0.03585383	0.00125427	0.00586914
200	0.30169839	0.04604151	0.00057739	0.00331598
400	0.30390998	0.05341961	0.00054900	0.00139029
600	0.29878845	0.05147941	0.00049850	0.00143510
800	0.29884000	0.05034201	0.00023991	0.00160565

Table 4.2 : Résultats du modèle 2.

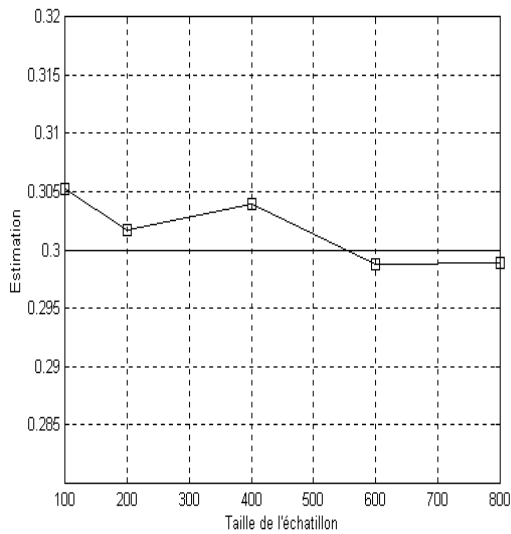


Figure 4.17 : Moyenne de $\hat{\alpha}_0$

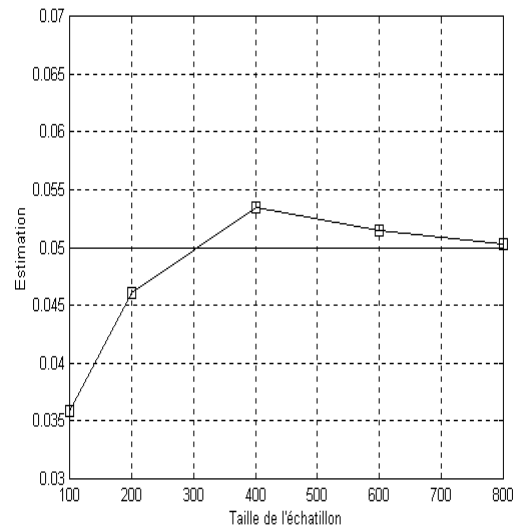


Figure 4.18 : Moyenne de $\hat{\alpha}_1$

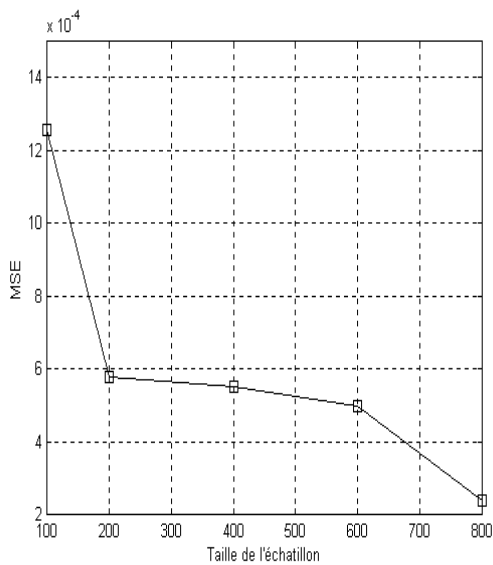


Figure 4.19 : MSE de $\hat{\alpha}_0$

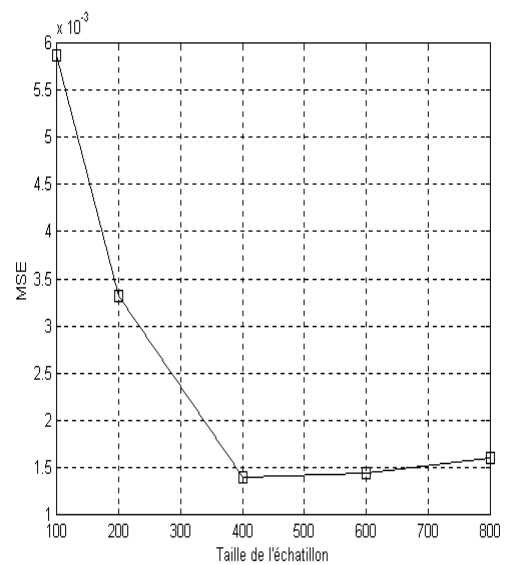


Figure 4.20 : MSE de $\hat{\alpha}_1$

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
100	0.0216656	0.1205515	0.2417541	0.0000206	0.0106953	0.0191682
200	0.0216805	0.0861908	0.2800478	0.0000111	0.0043684	0.0091534
400	0.0210811	0.1031660	0.2443607	0.0000116	0.0049948	0.0068556
600	0.0207646	0.0939747	0.2865403	0.0000088	0.0020791	0.0074655
800	0.0213862	0.0920073	0.2924253	0.0000075	0.0018510	0.0064414

Table 4.3 : Résultats du modèle 3.

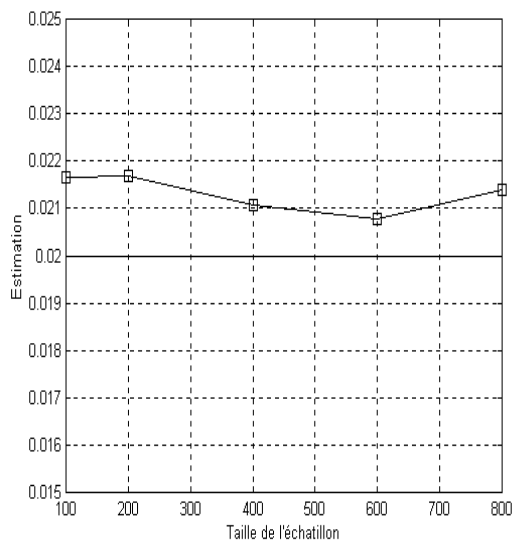


Figure 4.21 : Moyenne de $\hat{\alpha}_0$

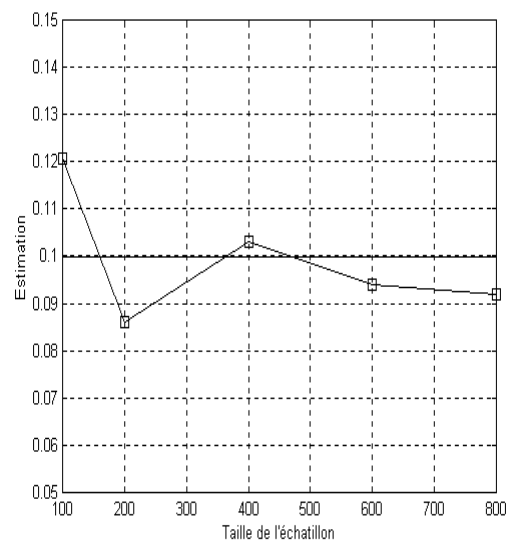


Figure 4.22 : Moyenne de $\hat{\alpha}_1$

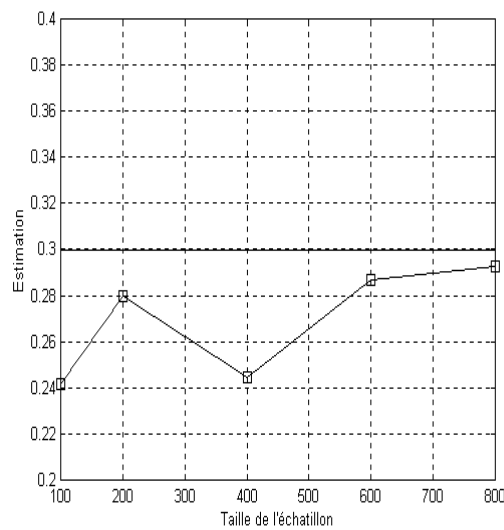


Figure 4.23 : Moyenne de $\hat{\alpha}_2$

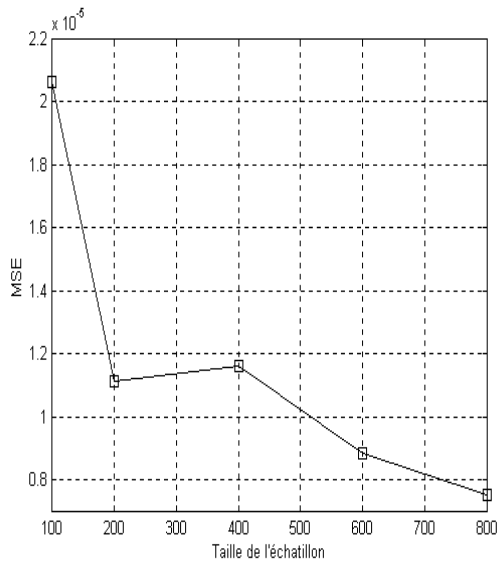


Figure 4.24 : MSE de $\hat{\alpha}_0$

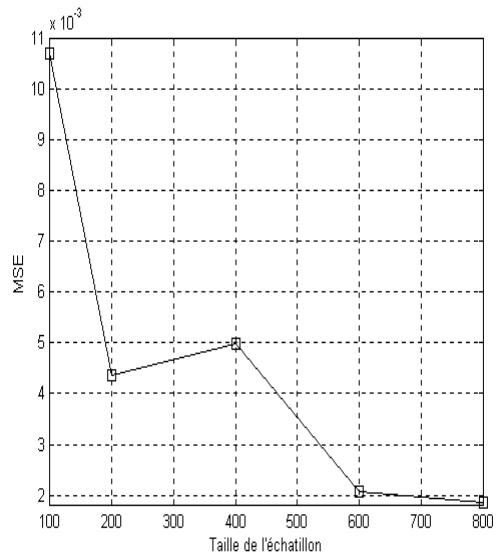


Figure 4.25 : MSE de $\hat{\alpha}_1$

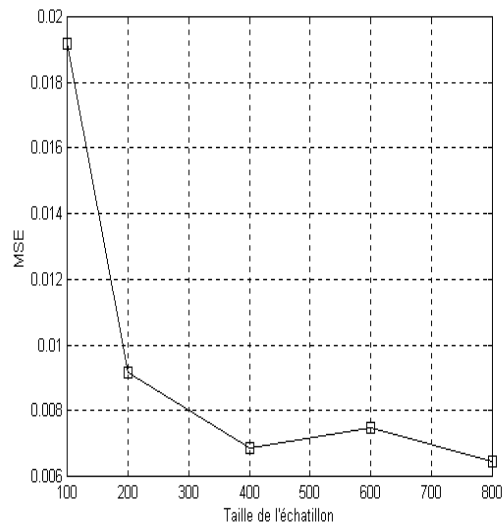


Figure 4.26 : MSE de $\hat{\alpha}_2$

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
100	0.3158867	0.0482412	0.0018354	0.0014854	0.0092331	0.0056870
200	0.3047877	0.0906710	0.0143646	0.0016058	0.0051762	0.0023403
400	0.3008250	0.0859132	0.0121309	0.0005786	0.0025088	0.0017704
600	0.3078348	0.0941203	0.0190542	0.0006913	0.0025808	0.0015600
800	0.2980163	0.0955135	0.0216506	0.0003420	0.0013800	0.0007610

Table 4.4 : Résultats du modèle 4.

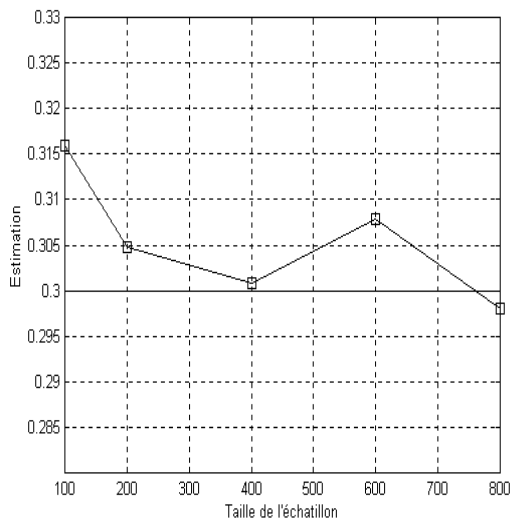


Figure 4.27 : Moyenne de $\hat{\alpha}_0$

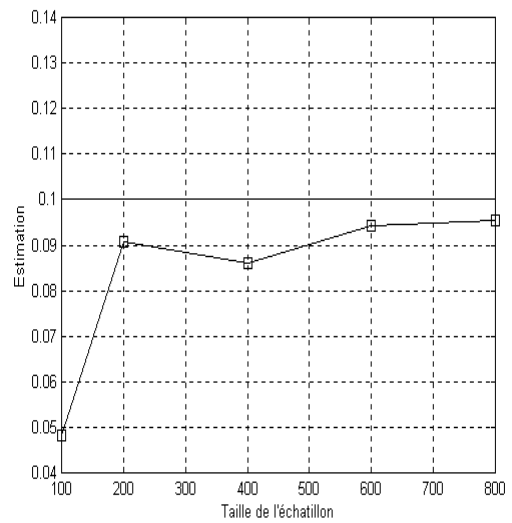


Figure 4.28 : Moyenne de $\hat{\alpha}_1$

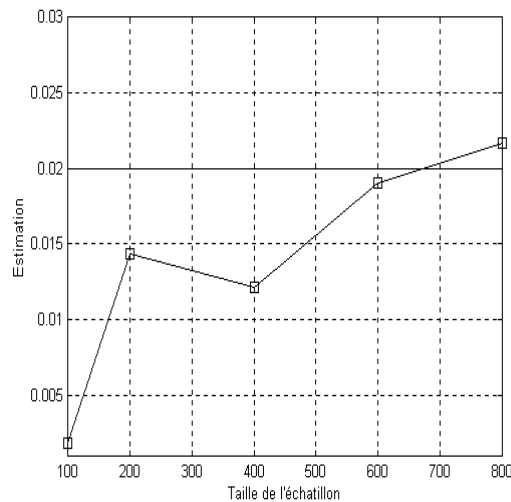


Figure 4.29 : Moyenne de $\hat{\alpha}_2$

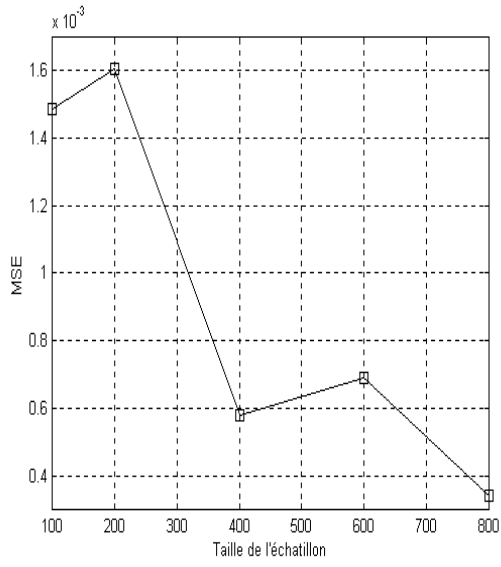


Figure 4.30 : MSE de $\hat{\alpha}_0$

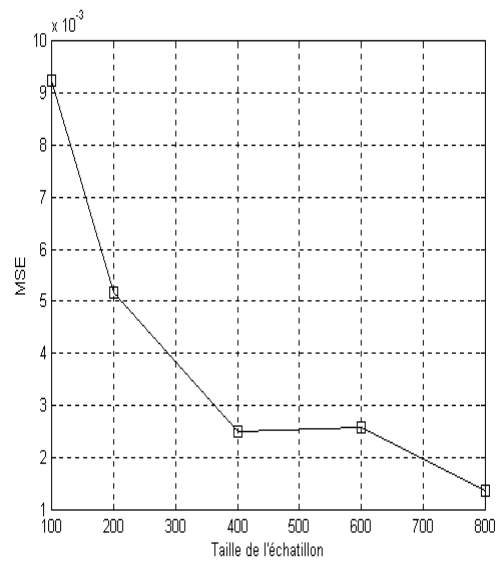


Figure 4.31 : MSE de $\hat{\alpha}_1$

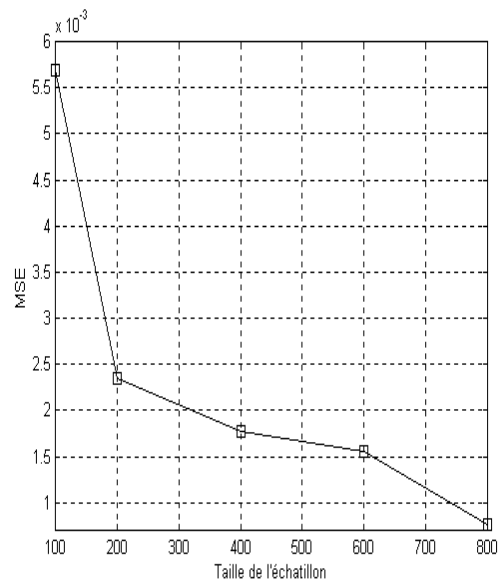


Figure 4.32 : MSE de $\hat{\alpha}_2$

N	Moyenne				MSE			
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
100	0.656896	0.084194	0.013572	0.249457	0.024749	0.006213	0.005727	0.010256
200	0.635591	0.113437	0.015990	0.253348	0.012072	0.006999	0.004309	0.009594
400	0.631262	0.089119	0.021356	0.250067	0.009115	0.002942	0.002018	0.010841
600	0.616018	0.094822	0.020154	0.293606	0.003974	0.003368	0.001090	0.003261
800	0.612942	0.102439	0.020965	0.307469	0.006874	0.002874	0.001436	0.004452

Table 4.5 : Résultats du modèle 5.

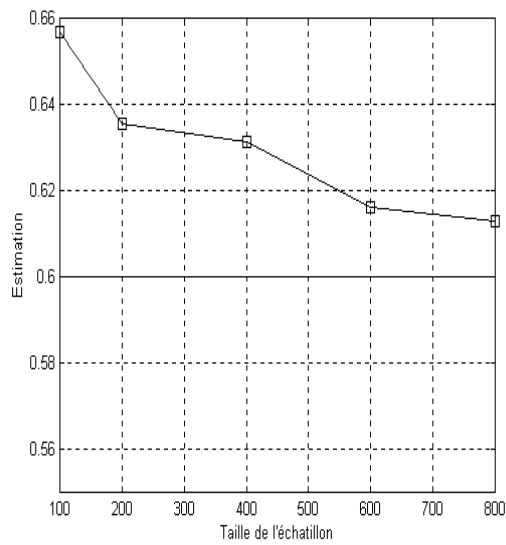


Figure 4.33 : Moyenne de $\hat{\alpha}_0$

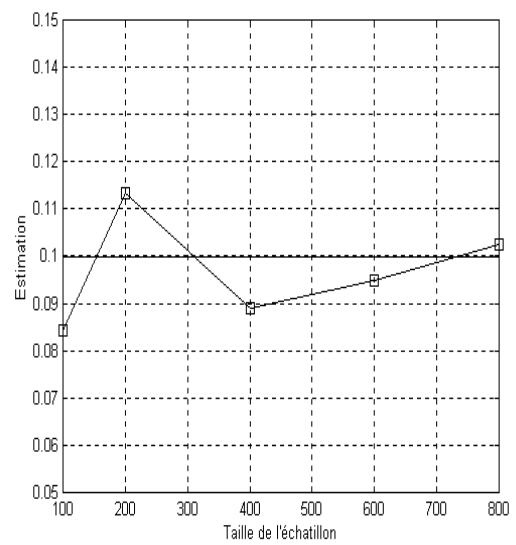


Figure 4.34 : Moyenne de $\hat{\alpha}_1$

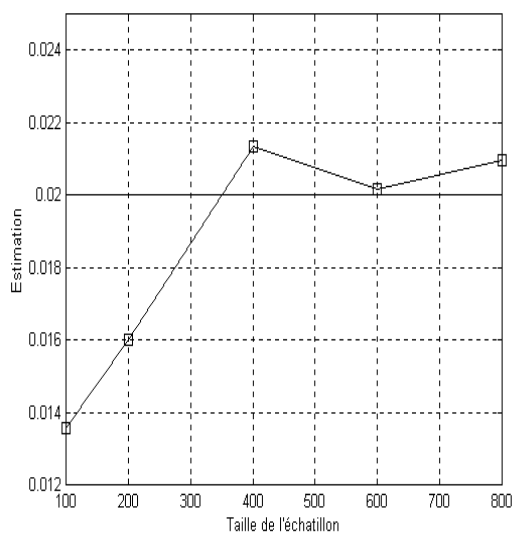


Figure 4.35 : Moyenne de $\hat{\alpha}_2$

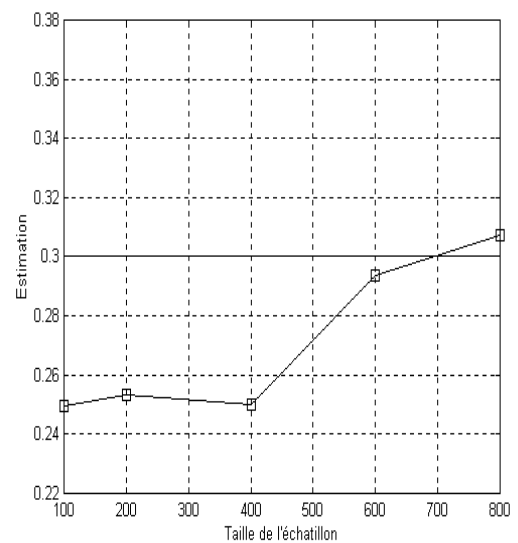


Figure 4.36 : Moyenne de $\hat{\alpha}_3$

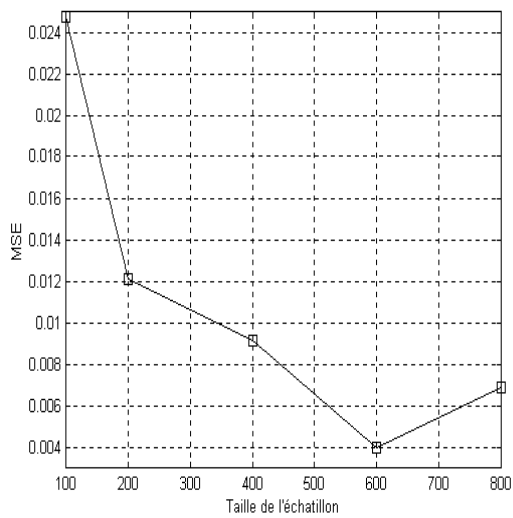


Figure 4.37 : MSE de $\hat{\alpha}_0$

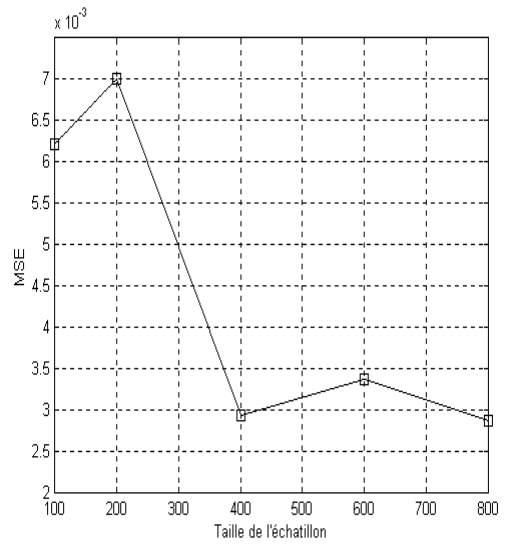


Figure 4.38 : MSE de $\hat{\alpha}_1$

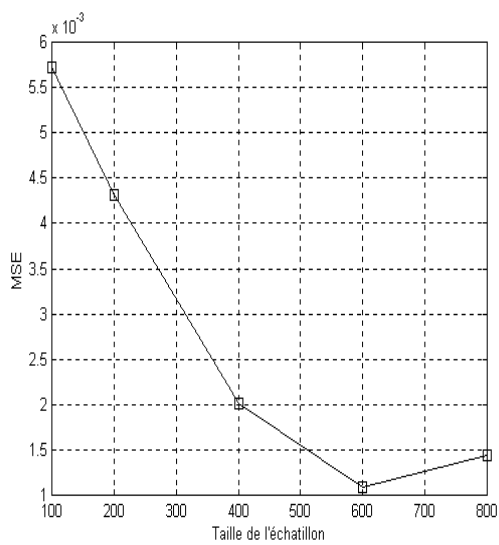


Figure 4.39 : MSE de $\hat{\alpha}_2$

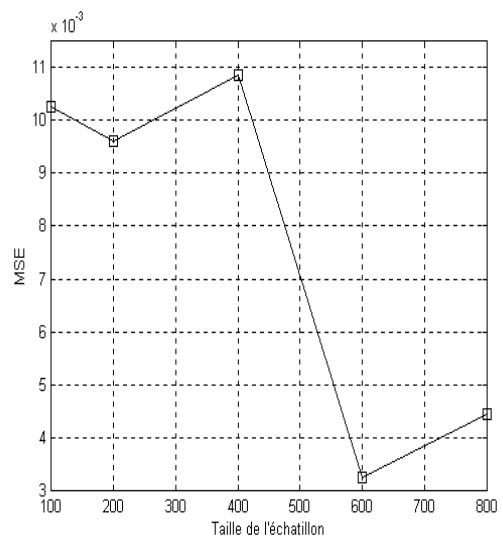


Figure 4.40 : MSE de $\hat{\alpha}_3$

4.7 Comparaison

Nous avons comparé notre méthode à la méthode hors ligne MSE. bien que les deux méthodes n'ont pas les mêmes objectifs car nous n'avons pas trouvé dans la littérature une autre méthode en ligne pour pouvoir faire la comparaison.

Pour vérifier l'efficacité de notre méthode, nous proposons les simulations suivantes pour 100 instances générées aléatoirement par un processus ARCH(1) avec comme taille de l'échantillon égale à 200. Pour cela, nous avons considéré le modèle suivant :

Modèle : $\alpha_0 = 0.02$ et $\alpha_1 = 0.3$

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

De toutes les simulations faites, nous avons remarqué que l'estimation par notre méthode en ligne est meilleure dans plus de 66% des cas.

Instance	$\hat{\alpha}_0$		$\hat{\alpha}_1$	
	En ligne	Hors ligne	En ligne	Hors ligne
1	0.02026360	0.01711157	0.18203872	0.32748675
2	0.02449725	0.02435100	0.38330892	0.38270955
3	0.02342174	0.02344287	0.24711507	0.14461836
4	0.01637884	0.01978200	0.36948022	0.23144363
5	0.01904226	0.01903052	0.33264304	0.33593070
6	0.01772469	0.01790637	0.48273475	0.47242123
7	0.01860360	0.02505191	0.38719672	0.15753545
8	0.01907234	0.01886948	0.23976597	0.24345587
9	0.02124508	0.02115484	0.30831377	0.20531476
10	0.02106973	0.02400096	0.21311288	0.10642383
11	0.02322161	0.02317943	0.24605316	0.24603778
12	0.02063088	0.02067399	0.30527696	0.30135483
13	0.01702318	0.01699460	0.44927564	0.44669485
14	0.01856557	0.00849527	0.37925762	0.70564740
15	0.02347556	0.02361138	0.16624736	0.17745320
16	0.02307086	0.02304579	0.21711466	0.21816952
17	0.02222964	0.02248899	0.19589689	0.18218915
18	0.01912024	0.02082698	0.33551083	0.25731536
19	0.01939444	0.01993728	0.35091343	0.32276477
20	0.02209877	0.02162799	0.23670934	0.26233544
21	0.02159998	0.02167158	0.24256742	0.23122859
22	0.02072208	0.02056584	0.09690422	0.11213349
23	0.02027785	0.01988721	0.15417220	0.19832975
24	0.02317465	0.02618605	0.24689617	0.03257236
25	0.02492162	0.02475931	0.26085547	0.26993496
26	0.02479316	0.02468753	0.30741030	0.23062389
27	0.02222562	0.02211252	0.30261756	0.44309976
28	0.02149338	0.02273055	0.17842278	0.12507508

29	0.02028874	0.02120764	0.30156303	0.27113744
30	0.02462160	0.02618960	0.11098394	0.04746136
31	0.02294348	0.01626533	0.22082046	0.31463180
32	0.01994940	0.02367275	0.31789517	0.17523531
33	0.02382995	0.02372765	0.12149954	0.12061062
34	0.01913121	0.01246961	0.21076530	0.48725835
35	0.02080553	0.02068035	0.26897351	0.26782603
36	0.01957757	0.02011684	0.24372685	0.42466361
37	0.02131396	0.02453982	0.27686842	0.16106680
38	0.01871969	0.01859378	0.43448604	0.43630536
39	0.03103653	0.03096996	0.18337867	0.18099546
40	0.02274758	0.02321385	0.25753192	0.23891304
41	0.01463574	0.01506823	0.42069696	0.38188862
42	0.02128571	0.02073762	0.33608484	0.35592033
43	0.02043304	0.02155630	0.30027938	0.11336180
44	0.02247992	0.02696973	0.28547115	0.12089714
45	0.02353606	0.02345909	0.24623159	0.24743369
46	0.01833795	0.01830323	0.29670617	0.29858523
47	0.02204909	0.01745254	0.22459081	0.36607201
48	0.01684808	0.01980378	0.38851037	0.25764637
49	0.01618076	0.01645791	0.36321553	0.35731291
50	0.01798800	0.01732246	0.30744604	0.33000993
51	0.02295137	0.02313845	0.28285033	0.28097659
52	0.01435645	0.01429611	0.46625682	0.46135739
53	0.02188705	0.02678412	0.30021952	0.03575087
54	0.02343215	0.02844998	0.21119067	0.04017020
55	0.02319897	0.02106401	0.30492016	0.38004100
56	0.01985812	0.02803681	0.32960301	0.04651638
57	0.02740875	0.02770706	0.26360465	0.25654549
58	0.02234433	0.02179928	0.25596296	0.29386319
59	0.01904670	0.01898391	0.28767367	0.28588930
60	0.02414088	0.02424546	0.28050070	0.17774463
61	0.02183848	0.01631408	0.19995304	0.41316950
62	0.01723979	0.02152104	0.36163269	0.18781533
63	0.02077711	0.02083108	0.25537887	0.25394258
64	0.02115130	0.02104302	0.20329527	0.20270977
65	0.02139788	0.02564559	0.28279078	0.03208650
66	0.01511524	0.02406788	0.32407473	0.06147596
67	0.01884933	0.01913570	0.22134577	0.20873132
68	0.02137124	0.02140436	0.18116582	0.18246805
69	0.02190253	0.01892411	0.23406542	0.35580428
70	0.02412613	0.02424669	0.29627153	0.29422769
71	0.02833128	0.03088787	0.25412041	0.19676245
72	0.02007794	0.01998874	0.27265769	0.27394075
73	0.01951739	0.01940363	0.33708926	0.33790192
74	0.02235192	0.02450165	0.15268557	0.06618891
75	0.01995374	0.02455734	0.26322652	0.18628070
76	0.02042230	0.01578402	0.21413825	0.37557250

77	0.02361590	0.02364939	0.30196827	0.26060302
78	0.02252202	0.02394070	0.21605812	0.22134565
79	0.01980523	0.01723359	0.28656603	0.38280460
80	0.01871036	0.01898156	0.25604562	0.25700815
81	0.02022810	0.01136376	0.30326518	0.60890531
82	0.02222768	0.02232643	0.11456774	0.13540494
83	0.01868938	0.02766877	0.41638466	0.12699219
84	0.02446188	0.03134284	0.29858071	0.19217987
85	0.02037623	0.02389768	0.25040047	0.12387131
86	0.02025516	0.02091043	0.28372368	0.25286969
87	0.02115171	0.00989592	0.27853730	0.63689506
88	0.01898639	0.01895056	0.32486465	0.31810726
89	0.02251859	0.02631492	0.24021959	0.09973967
90	0.02162336	0.02455665	0.40745471	0.31306374
91	0.02098736	0.02420589	0.26428945	0.12656381
92	0.02241160	0.02213968	0.19707484	0.20220700
93	0.02091137	0.02345735	0.27429031	0.17655226
94	0.01816710	0.02865608	0.47400368	0.14510759
95	0.01996126	0.02029953	0.26248503	0.24466191
96	0.02306507	0.02487454	0.30702710	0.18735649
97	0.02206611	0.02241373	0.25966925	0.14745571
98	0.02305573	0.02325453	0.21926195	0.21664649
99	0.02356339	0.02717353	0.31622812	0.02669757
100	0.02039410	0.02287856	0.32371231	0.23317588

Table 4.6 : Résultats de la comparaison

4.8 Conclusion

Considérons un modèle ARCH(q), nous avons remarqué que, en général :

- $P_q = M Id$ où M est une très grande valeur est une bonne valeur de départ.
- à partir d'une certaine valeur (M=10000), l'estimation se stabilise.
- $\hat{\theta}_q = \underline{1}$ est une bonne valeur de départ surtout pour des échantillons de petite taille (taille de l'échantillon inférieure à 100).
- Pour une taille d'échantillon supérieure à 100, l'estimation est faiblement influencée par la valeur de départ.
- l'estimation d'un paramètre α_i ($i \in \{0,1,\dots,q\}$) est meilleure si sa vraie valeur est proche de la valeur 0.
- l'estimation d'un paramètre α_i ($i \in \{0,1,\dots,q\}$) est moins bonne si sa vraie valeur est proche de la valeur 1 (Car on approche la frontière de non stationnarité).
- l'estimation des paramètres $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ est meilleure que celle de α_q .
- plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'estimation est meilleure.

Bien que nous n'avons pas trouvé, dans la littérature, d'autres méthodes en ligne pour pouvoir comparer l'efficacité réelle de nos méthodes, nous avons comparé la dernière méthode en ligne avec la méthode hors ligne MSE. Nous avons remarqué que l'estimation par notre méthode en ligne est meilleure dans plus de 66% des cas.

Chapitre 5 :

Estimation récursive des paramètres d'un Modèle $\text{PARCH}_d(q)$

Dans le cas d'un modèle ARCH périodique (noté $\text{PARCH}_d(q)$) où d est la période nous avons retenu comme fonction objectif la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (Mean Square Error ou MSE). Cette approche nous permet de construire un algorithme récursif pour l'estimation des paramètres du modèle et donc une suite d'estimateurs qui permet d'approcher de plus en plus la vraie valeur de ce paramètre. Notons que cet algorithme définit, aussi, une méthode en ligne.

5.1 Méthode

Pour notre problème il s'agit de considérer la deuxième formulation du modèle $\text{PARCH}_d(q)$ définie dans le chapitre 3.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{d\tau+i}^2 &= \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\varepsilon_{d\tau+i-1}^2 + \alpha_{i2}\varepsilon_{d\tau+i-2}^2 + \dots + \alpha_{iq}\varepsilon_{d\tau+i-q}^2 + u_{d\tau+i} \\ &= \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^q \alpha_{ij}\varepsilon_{d\tau+i-j}^2 + u_{d\tau+i}\end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, d-1$ et $\tau \in \mathbb{Z}$

ou encore, en posant $t = d\tau + i$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= \alpha_{i(t)0} + \sum_{j=1}^q \alpha_{i(t)j}\varepsilon_{d\tau(t)+i(t)-j}^2 + u_t \\ &= \alpha_{i(t)0} + \sum_{j=1}^q \alpha_{i(t)j}\varepsilon_{t-j}^2 + u_t \\ &= \varphi_t^T \theta + u_t\end{aligned}$$

où $\tau(t) = \text{quotient}(t, d)$ et $i(t) = \text{reste}(t, d)$

Les coefficients α_{ij} sont des fonctions périodiques du temps ($\alpha_{i,j} = \alpha_{d\tau+i,j} = \alpha_{i,j}$ pour $j = 0, 1, \dots, q$).

(la suite (u_t) n'est définie que pour $t \geq q$ et $dN - q + 1$ est le nombre d'éléments de la suite $u_q, u_{q+1}, \dots, u_{dN}$)

avec

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} \phi_t^0 \\ \phi_t^1 \\ \vdots \\ \phi_t^{d-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{d-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \phi_t^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q}^2 \end{pmatrix} & \text{si } k = i(t) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \theta_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i0} \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{iq} \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 0, \dots, d-1$$

φ_t et θ sont deux vecteurs de taille $(q+1)d$ chacun.

Comme pour le chapitre précédent, l'objectif, qui est la minimisation de l'erreur de prévision, est :

$$\min_{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}} f(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$$

où

$$f(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = \frac{1}{dN - q + 1} \sum_{t=q}^{dN} (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \theta)^2$$

Considérons le théorème suivant qui nous donne un estimateur $\hat{\theta}$ des paramètres d'une série de taille dN . C'est un estimateur hors ligne et le calcul n'est pas récursif.

Théorème 5.1

Supposons que la matrice $\sum_{t=q}^{dN} \varphi_t \varphi_t^T$ est inversible, nous avons :

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=q}^{dN} \varphi_t \varphi_t^T \right)^{-1} \sum_{t=q}^{dN} \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

Preuve

En calculant et en annulant les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial \hat{\alpha}_{ij}}$ pour $i = 0, 1, \dots, d-1$ et $j = 0, \dots, q$, nous obtenons :

$$\frac{\partial f(\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_{d-1})}{\partial \hat{\alpha}_{i0}} = \frac{-2}{dN - q + 1} \sum_{t=q}^{dN} (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}) = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, d-1$$

$$\frac{\partial f(\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_q)}{\partial \hat{\alpha}_{i1}} = \frac{-2}{dN - q + 1} \sum_{t=q}^{dN} (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}) \varepsilon_{t-1}^2 = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, d-1$$

⋮

$$\frac{\partial f(\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_q)}{\partial \hat{\alpha}_{iq}} = \frac{-2}{dN - q + 1} \sum_{t=q}^{dN} (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}) \varepsilon_{t-q}^2 = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, d-1$$

Donc

$$\sum_{t=q}^{dN} (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}) \varphi_t = \underline{0}$$

Ainsi

$$\sum_{t=q}^{dN} \varepsilon_t^2 \varphi_t - \sum_{t=q}^{dN} \varphi_t^T \hat{\theta} \varphi_t = \underline{0}$$

D'où

$$\sum_{t=q}^{dN} \varphi_t^T \hat{\theta} \varphi_t = \sum_{t=q}^{dN} \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

où

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \text{un vecteur à } (q+1) \text{ d'éléments nuls.}$$

Finalement

$$\left(\sum_{t=q}^{dN} \varphi_t \varphi_t^T \right) \hat{\theta} = \sum_{t=q}^{dN} \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

et

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=q}^{dN} \varphi_t \varphi_t^T \right)^{-1} \sum_{t=q}^{dN} \varepsilon_t^2 \varphi_t$$

sous l'hypothèse que la matrice diagonale par blocs $\sum_{t=q}^{dN} \varphi_t \varphi_t^T$ de taille $(q+1) \times (q+1)$ chacun est inversible (le nombre de blocs est égal à d).

Considérons maintenant le théorème suivant qui nous permet de calculer récursivement un estimateur $\hat{\theta}_t$ des paramètres d'un modèle $\text{PARCH}_d(q)$.

Théorème 5.2

Pour $t > q$, nous avons : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}}{t} \bar{R}_t^{-1} \varphi_t$

avec $\bar{R}_t = \bar{R}_{t-1} + \frac{1}{t} (\varphi_t \varphi_t^T - \bar{R}_{t-1})$

Preuve

Du théorème 5.1, posons :

$$\hat{\theta}_t = R_t^{-1} \sum_{k=q}^t \varepsilon_k^2 \varphi_k \quad \text{avec} \quad R_t = \sum_{k=q}^t \varphi_k \varphi_k^T \quad (5.1)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t &= R_t^{-1} \sum_{k=q}^t \varepsilon_k^2 \varphi_k \\ &= R_t^{-1} \left(\sum_{k=q}^{t-1} \varepsilon_k^2 \varphi_k + \varepsilon_t^2 \varphi_t \right) \\ &= R_t^{-1} (R_{t-1} \hat{\theta}_{t-1} + \varepsilon_t^2 \varphi_t) \quad (\text{car d'après 5.1, nous avons } \sum_{k=q}^{t-1} \varepsilon_k^2 \varphi_k = R_{t-1} \hat{\theta}_{t-1}) \\ &= R_t^{-1} (R_t \hat{\theta}_{t-1} - \varphi_t \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1} + \varepsilon_t^2 \varphi_t) \quad (\text{car d'après 5.1, nous avons } R_t = R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T \\ &\quad \text{et } R_{t-1} = R_t - \varphi_t \varphi_t^T) \\ &= R_t^{-1} (R_t \hat{\theta}_{t-1} + \varphi_t (-\varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1} + \varepsilon_t^2)) \\ &= \hat{\theta}_{t-1} + R_t^{-1} \varphi_t (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Posons :

$$\begin{aligned}
\bar{R}_t &= \frac{1}{t} R_t \\
&= \frac{1}{t} (R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T) \quad (\text{car d'après 5.1, nous avons } R_t = R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T) \\
&= \frac{1}{t} ((t-1)\bar{R}_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T) \\
&= \frac{t-1}{t} \bar{R}_{t-1} + \frac{1}{t} \varphi_t \varphi_t^T \\
&= \bar{R}_{t-1} + \frac{1}{t} (\varphi_t \varphi_t^T - \bar{R}_{t-1})
\end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}}{t} \bar{R}_t^{-1} \varphi_t.$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'inversion d'une matrice de taille $(q+1)d \times (q+1)d$, ce qui est très coûteux en temps de traitement du programme si le nombre de paramètres à estimer est grand. Pour remédier à cela, nous proposons le résultat suivant :

Théorème 5.3

Pour $t > q$, nous avons : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) L_t$

$$\text{avec } L_t = \frac{1}{1 + \varphi_t^T P_{t-1} \varphi_t} P_{t-1} \varphi_t \quad \text{et} \quad P_t = P_{t-1} - L_t \varphi_t^T P_{t-1}$$

Preuve

Nous avons :

$$\begin{aligned}
R_t^{-1} &= (R_{t-1} + \varphi_t \varphi_t^T)^{-1} \\
&= R_{t-1}^{-1} - \frac{R_{t-1}^{-1} \varphi_t \varphi_t^T R_{t-1}^{-1}}{1 + \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t} \quad (\text{car } (A + bb^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} b b^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} b}, \text{ voir Annexe}) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Donc

$$R_t^{-1} \varphi_t = R_{t-1}^{-1} \varphi_t - \frac{R_{t-1}^{-1} \varphi_t \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t}{1 + \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t} = \frac{R_{t-1}^{-1} \varphi_t}{1 + \varphi_t^T R_{t-1}^{-1} \varphi_t}$$

En posant

$$R_t^{-1} = P_t$$

et

$$L_t = \frac{1}{1 + \varphi_t^T P_{t-1} \varphi_t} P_{t-1} \varphi_t,$$

on obtient :

$$P_t = P_{t-1} - L_t \varphi_t^T P_{t-1} \quad (\text{d'après 5.3})$$

et

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) L_t. \quad (\text{d'après 5.2})$$

Cette méthode est plus intéressante puisqu'elle ne nécessite pas l'inversion d'une matrice de taille $(q+1)d \times (q+1)d$, ce qui minimise la propagation des erreurs d'arrondi dans les calculs et accélère et diminue le temps d'exécution.

Proposition 5.4

La complexité spatiale de la méthode du théorème 5.3 est de $O(q^2 d^2)$.

Preuve

Pour le déroulement de cette deuxième méthode, nous avons besoin uniquement d'une matrice P de taille $(q+1)d \times (q+1)d$ et de trois vecteurs $\hat{\theta}$, φ , et L de taille $(q+1)d$ chacun. D'où le résultat.

Proposition 5.5

La complexité temporelle de la méthode du théorème 5.3 est de $O((Nd - q + 1)q^3 d^3)$.

Preuve

Le nombre d'itérations de la méthode est égal à $Nd - q + 1$ et lors du passage d'une itération à une autre, nous avons besoin de multiplier deux matrices $L\varphi^T$ et P de dimension $(q+1)d \times (q+1)d$ chacune. Cette multiplication se fait en $O(q^3 d^3)$. Les autres additions et multiplications sont de complexité inférieure. D'où le résultat.

5.2 Méthode en ligne

Comme dans le cas classique, les méthodes en ligne concernent le cas où la taille de la série des données observées n'est pas fixe mais évolue dans le temps. C'est-à-dire que les données sont disponibles progressivement.

Les méthodes d'estimation hors ligne, dans le cas périodique, s'avèrent aussi être trop lourdes et inadéquates lorsqu'elles sont appliquées à des données qui sont disponibles progressivement dans le temps et de manière périodique. Car elles nécessitent, à l'introduction de chaque nouvelle donnée, le déroulement complet de toute la procédure d'estimation pour tout le bloc. Ce qui est très coûteux en temps de traitement, surtout que le cas périodique nécessite beaucoup plus de données.

Les deux dernières méthodes récursives d'estimation que nous avons développées dans ce chapitre sont des méthodes en ligne.

Proposition 5.6

La complexité temporelle de la méthode du théorème 5.3 dans le cas d'une méthode en ligne est de $O(q^3 d^3)$.

Preuve

Dans la méthode en ligne nous considérons une seule itération (le passage de $\hat{\theta}_{t-1}$ à $\hat{\theta}_t$). Pour cette méthode, nous avons besoin de multiplier deux matrices $L\varphi^T$ et P de dimension $(q+1)d \times (q+1)d$ chacune. Cette multiplication se fait en $O(q^3 d^3)$. Les autres additions et multiplications sont de complexité inférieure. D'où le résultat.

5.3 Choix des valeurs initiales

Comme dans le chapitre précédent, la simplicité des méthodes récurrentes étudiées ne doit pas faire oublier qu'en pratique leur implémentation numérique n'est pas une tâche facile, dans le cas périodique, puisque ces méthodes récurrentes sont très sensibles aux valeurs initiales. Pour empêcher que l'estimateur ne soit très sensible aux valeurs de départ (c'est-à-dire les premières valeurs de la série), il faut bien choisir ces valeurs initiales. Il faut donc prendre quelques précautions pour que l'estimateur ne s'éloigne pas de la vraie valeur du paramètre à estimer.

5.3.1 Choix de $\hat{\theta}_q$

La pratique et l'expérience ont montré que la bonne valeur pour $\hat{\theta}_q$ est :

$$\hat{\theta}_q = \underline{1}$$

Pour vérifier l'efficacité de la valeur de $\hat{\theta}_q$, nous proposons les simulations suivantes pour différentes valeurs de $\hat{\theta}_q$: $\hat{\theta}_q = \underline{0}$ et $\hat{\theta}_q = \underline{1}$ ($\underline{1}$ est un vecteur ayant tous ces éléments égaux à 1 et est de dimension $(q+1)d$) sur des données générées aléatoirement par un processus $\text{PARCH}_2(1)$. Pour cela, nous avons considéré le modèle suivant :

$$\underline{\text{Modèle}} : \alpha_{00} = 0.02 , \alpha_{01} = 0.3 , \alpha_{10} = 0.2 \text{ et } \alpha_{11} = 0.03$$

Les résultats sont rapportés sur les graphes ci-dessous.

De toutes les simulations faites, nous avons remarqué que :

- $\hat{\theta}_q = \underline{1}$ est une bonne valeur de départ surtout pour des échantillons de petite taille (taille de l'échantillon inférieure à 200).
- Pour une taille d'échantillon supérieure à 200, l'estimation est faiblement influencée par la valeur de départ.

$$\text{MSE} = 5,245531 \times 10^{-9}$$

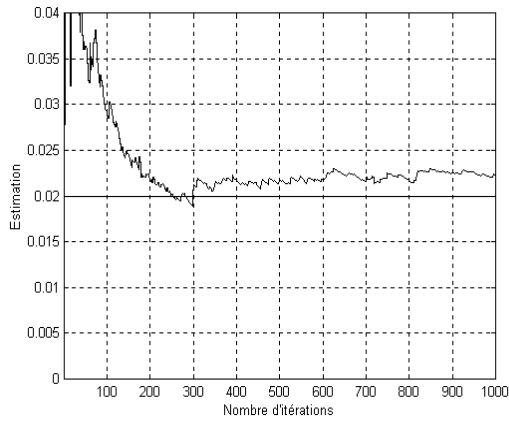


Figure 5.1 : Estimation de α_{00} pour $\hat{\theta}_q = \underline{0}$

$$\text{MSE} = 4,049164 \times 10^{-9}$$

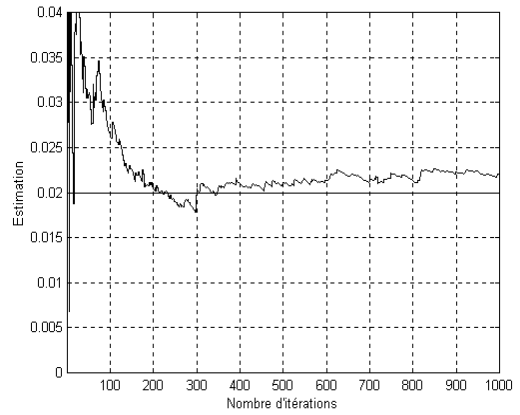


Figure 5.2 : Estimation de α_{00} pour $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

$$\text{MSE} = 2,418207 \times 10^{-6}$$

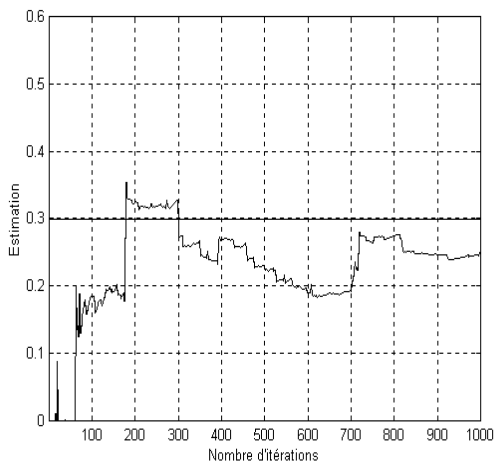


Figure 5.3 : Estimation de α_{01} pour $\hat{\theta}_q = \underline{0}$

$$\text{MSE} = 1,530734 \times 10^{-6}$$

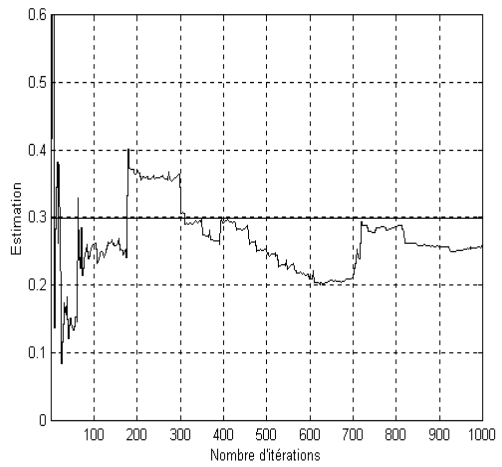


Figure 5.4 : Estimation de α_{01} pour $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

$$\text{MSE} = 6,597440 \times 10^{-7}$$

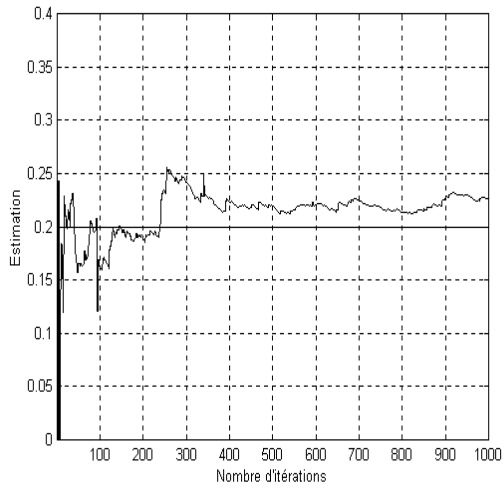


Figure 5.5 : Estimation de α_{10} pour $\hat{\theta}_q = \underline{0}$

$$\text{MSE} = 6,590238 \times 10^{-7}$$

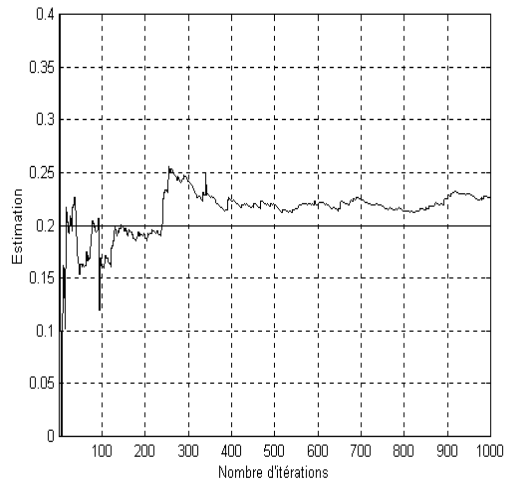


Figure 5.6 : Estimation de α_{10} pour $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

$$\text{MSE} = 2,599209 \times 10^{-8}$$

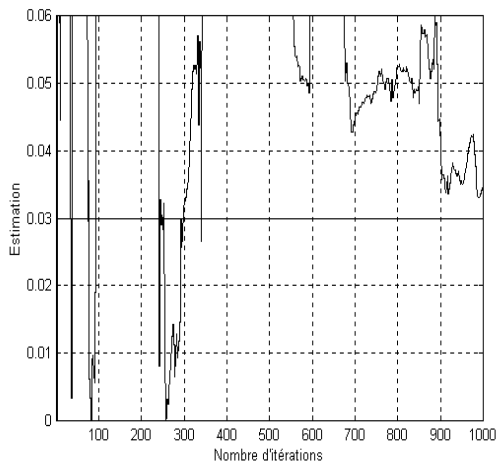


Figure 5.7 : Estimation de α_{11} pour $\hat{\theta}_q = \underline{0}$

$$\text{MSE} = 2,661528 \times 10^{-8}$$

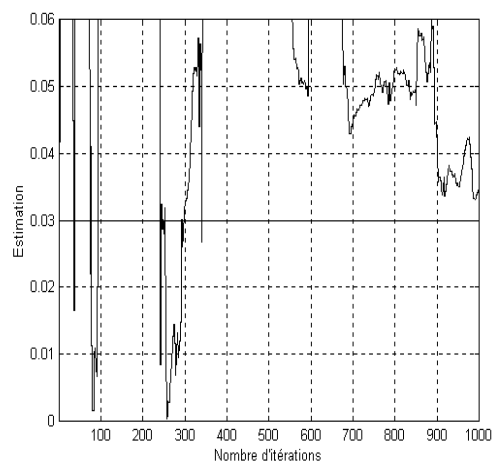


Figure 5.8 : Estimation de α_{11} pour $\hat{\theta}_q = \underline{1}$

5.3.2 Choix de P_q

En pratique, la bonne valeur pour P_q est :

$$P_q = M \text{ Id}$$

où M est un nombre positif assez grand et Id la matrice identité de taille $(q+1)d \times (q+1)d$.

Pour vérifier l'efficacité de la valeurs de M , nous proposons les simulations suivantes pour différentes valeurs de M : $M=10$, $M=100$, $M=1000$ et $M=10000$ sur des données générées aléatoirement par un processus $\text{PARCH}_2(1)$. Pour cela, nous avons considéré le modèle suivant :

Modèle : $\alpha_{00} = 0.02$, $\alpha_{01} = 0.3$, $\alpha_{10} = 0.2$ et $\alpha_{11} = 0.03$

Les résultats sont rapportés sur les graphes ci-dessous.

De toutes les simulations faites, nous avons remarqué que :

- plus M est grand, plus l'estimation est meilleure.
- à partir d'une certaine valeur ($M=10000$), l'estimation se stabilise.

MSE = $8,903198 \times 10^{-9}$

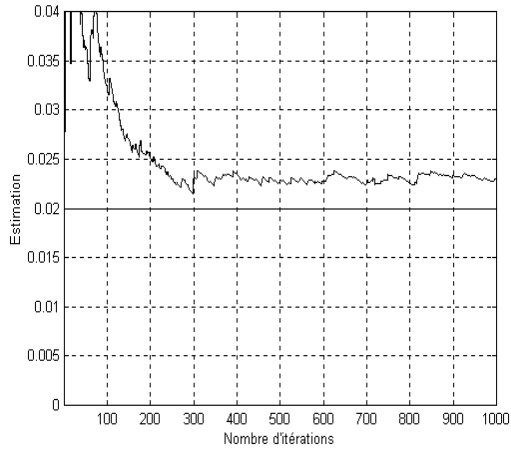


Figure 5.9 : Estimation de α_{00} pour M=10

MSE = $5,262932 \times 10^{-9}$

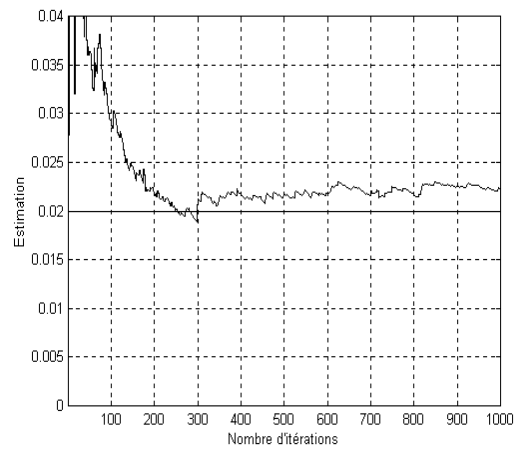


Figure 5.10 : Estimation de α_{00} pour M=100

MSE = $4,704046 \times 10^{-9}$

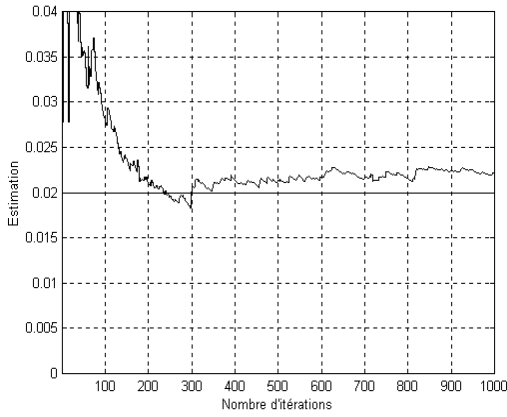


Figure 5.11 : Estimation de α_{00} pour M=1000

MSE = $4,156242 \times 10^{-9}$

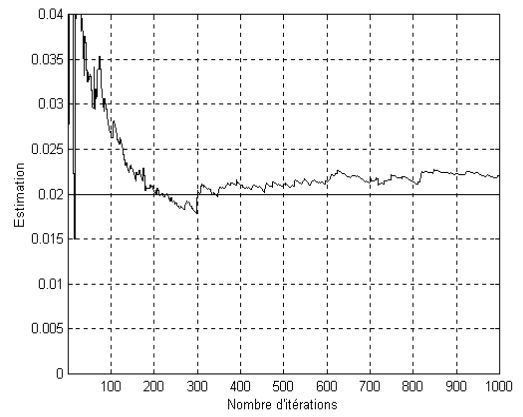


Figure 5.12 : Estimation de α_{00} pour M=10000

$$\text{MSE} = 5,065001 \times 10^{-6}$$

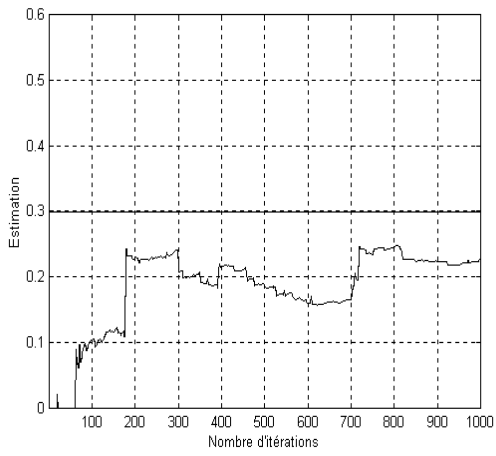


Figure 5.13 : Estimation de α_{01} pour M=10

$$\text{MSE} = 2,422961 \times 10^{-6}$$

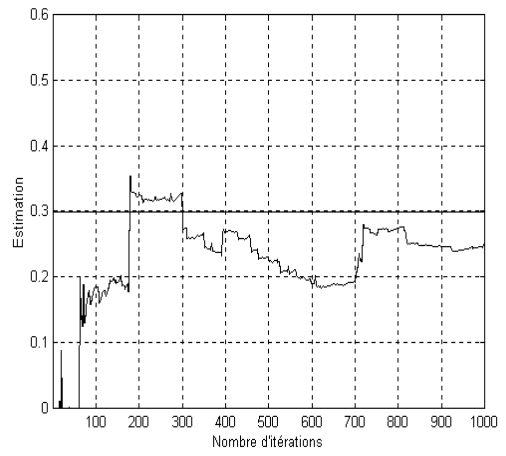


Figure 5.14 : Estimation de α_{01} pour M=100

$$\text{MSE} = 2,044267 \times 10^{-6}$$

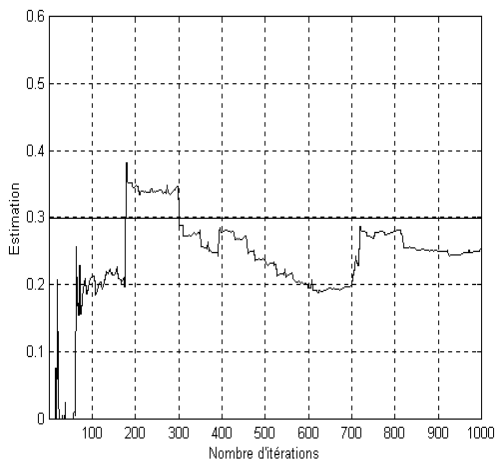


Figure 5.15 : Estimation de α_{01} pour M=1000

$$\text{MSE} = 1,782235 \times 10^{-6}$$

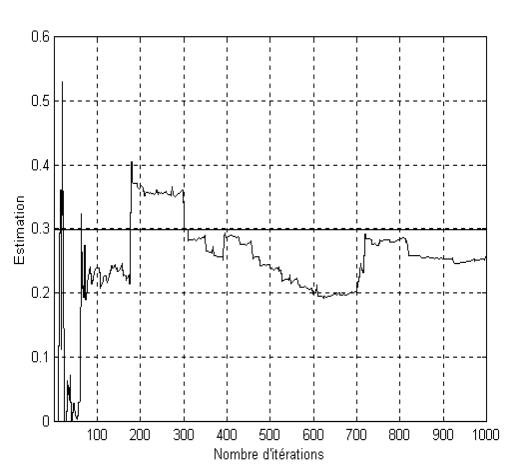


Figure 5.16 : Estimation de α_{01} pour M=10000

$$\text{MSE} = 6,508551 \times 10^{-7}$$

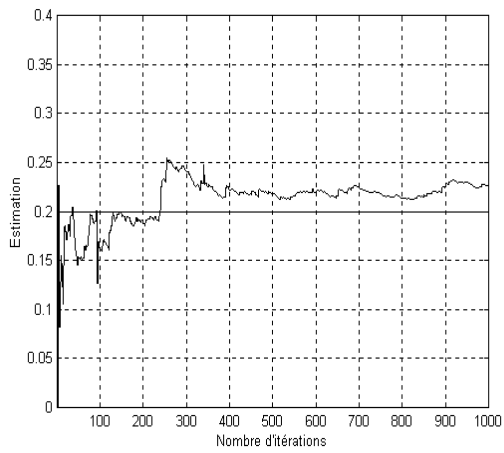


Figure 5.17 : Estimation de α_{10} pour M=10

$$\text{MSE} = 6,586052 \times 10^{-7}$$

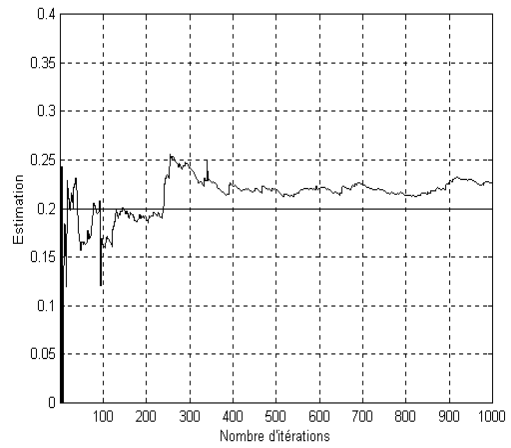


Figure 5.18 : Estimation de α_{10} pour M=100

$$\text{MSE} = 6,768725 \times 10^{-7}$$

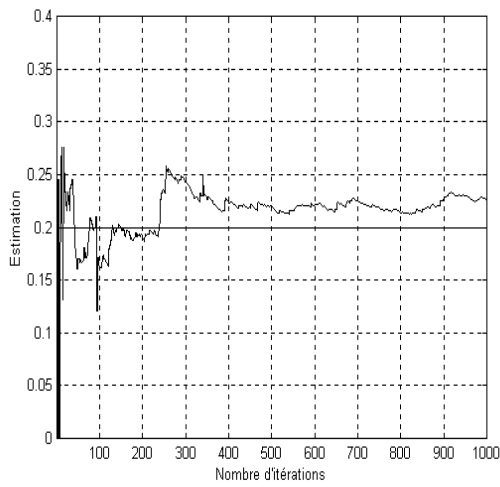


Figure 5.19 : Estimation de α_{10} pour M=1000

$$\text{MSE} = 6,898154 \times 10^{-7}$$

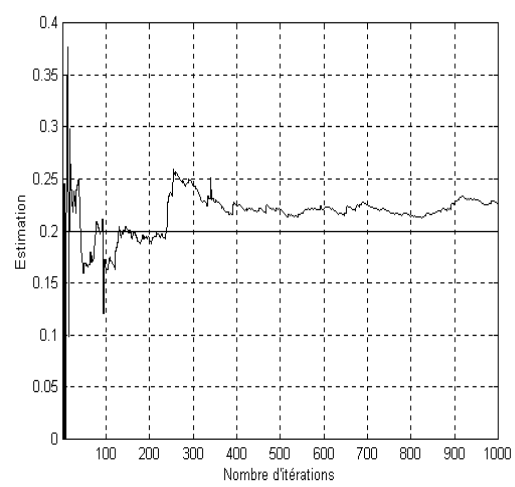


Figure 5.20 : Estimation de α_{10} pour M=10000

$$\text{MSE} = 3,154954 \times 10^{-8}$$

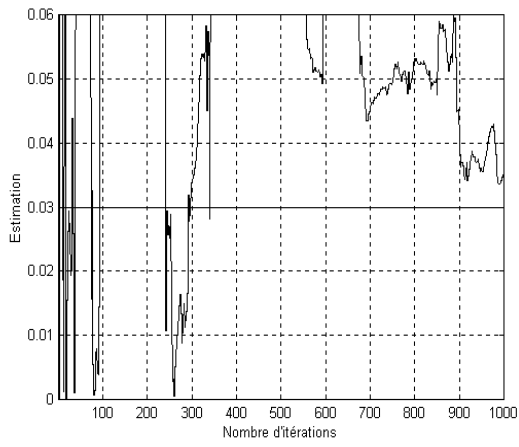


Figure 5.21 : Estimation de α_{11} pour M=10

$$\text{MSE} = 2,605613 \times 10^{-8}$$

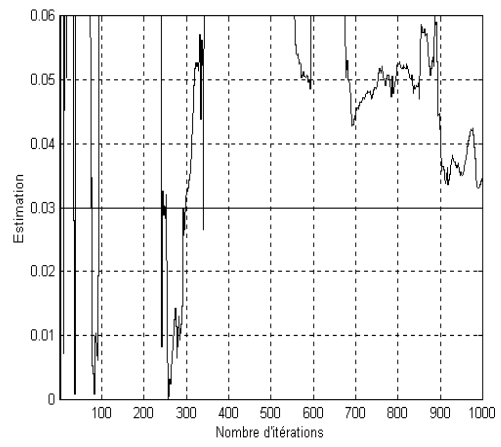


Figure 5.22 : Estimation de α_{11} pour M=100

$$\text{MSE} = 3,127622 \times 10^{-8}$$

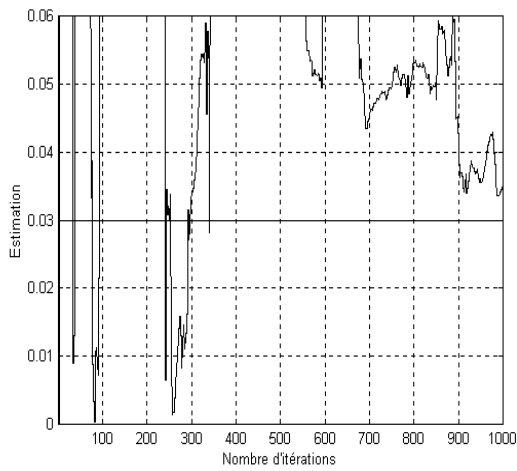


Figure 5.23 : Estimation de α_{11} pour M=1000

$$\text{MSE} = 3,514696 \times 10^{-8}$$

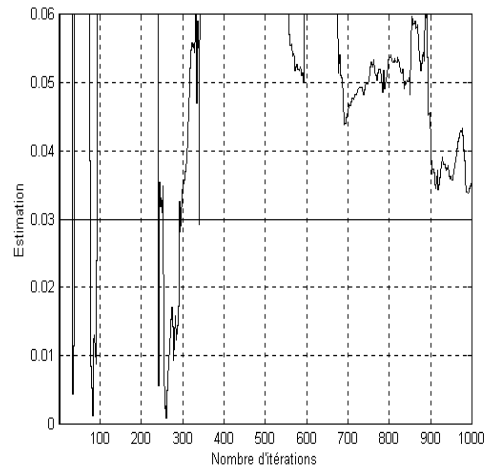


Figure 5.24 : Estimation de α_{11} pour M=10000

5.4 Facteur d'oubli

Comme nous l'avons déjà mentionné les méthodes récurrentes sont très sensibles aux valeurs initiales. Pour remédier à cet inconvénient, nous proposons d'incorporer un facteur d'oubli. C'est-à-dire une suite de valeurs λ_t qui permet d'atténuer les variations des paramètres à estimer.

En pratique, on utilise souvent (voir Ljung et Soderstrom (1983)) :

$$\lambda_t = \delta\lambda_{t-1} + (1-\delta)$$

et nous avons choisis les conditions :

$$\lambda_q = 0.95 \quad \text{et} \quad \delta = 0.99$$

Le théorème 5.3 devient alors :

Théorème 5.7

Pour $t > q$, nous avons : $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + (\varepsilon_t^2 - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) L_t$
avec $L_t = \frac{\lambda_t}{\lambda_t + \varphi_t^T P_{t-1} \varphi_t} P_{t-1} \varphi_t$, $P_t = P_{t-1} - L_t \varphi_t^T P_{t-1}$ et $\lambda_t = \delta\lambda_{t-1} + (1-\delta)$.

Et comme valeurs initiales :

$$\hat{\theta}_q = \underline{1} \quad , \quad P_q = M \text{ Id} \quad , \quad \lambda_q = 0.95 \quad \text{et} \quad \delta = 0.99$$

où $\underline{1}$ est un vecteur de taille $(q+1)d$, M est un nombre positif assez grand et Id la matrice identité de taille $(q+1)d \times (q+1)d$.

5.5 Admissibilité de la valeur courante

Pour chaque valeur de t, surtout pour t assez petit (c'est-à-dire pour les premières valeurs de t), nous devons tester et contrôler l'admissibilité de la valeur de $\hat{\theta}_t$. C'est-à-dire vérifier si $\hat{\alpha}_{i0} > 0$ pour $i = 0, \dots, d-1$ et $\hat{\alpha}_{ij} \in [0, 1[$ pour $i = 0, \dots, d-1$ et $j = 1, \dots, q$.

La méthode proposée est la suivante :

- Si $\hat{\alpha}_{ij}$ ($i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ et $j \in \{0, 1, \dots, q\}$) est négative alors nous la remplaçons par sa valeur absolue.
- Si $\hat{\alpha}_{ij}$ ($i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ et $j \in \{1, \dots, q\}$) est supérieure à 1 alors nous cherchons le plus petit $k \in \mathbb{N}$ de sorte que $\frac{\hat{\alpha}_{ij}}{\rho^k}$ soit admissible. Cette dernière valeur remplace l'ancienne valeur de $\hat{\alpha}_{ij}$. En général, $\rho = 2$ convient, mais parfois il faut diminuer cette valeur.

5.6 Simulation

Pour vérifier l'efficacité de la méthode d'estimation proposée, nous proposons d'appliquer cette méthode à différentes données artificielles générées aléatoirement par un processus $\text{PARCH}_d(q)$. Pour cela, considérons les modèles suivants :

$$\begin{aligned} \text{Modèle 1 : } \alpha_{00} = 0.02 \text{ et } \alpha_{01} = 0.3 & \quad (\text{PARCH}_2(1)) \\ \alpha_{10} = 0.4 \text{ et } \alpha_{11} = 0.04 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modèle 2 : } \alpha_{00} = 0.02 \text{ et } \alpha_{01} = 0.3 & \quad (\text{PARCH}_3(1)) \\ \alpha_{10} = 0.4 \text{ et } \alpha_{11} = 0.04 & \\ \alpha_{20} = 0.5 \text{ et } \alpha_{21} = 0.06 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modèle 3 : } \alpha_{00} = 0.02, \alpha_{01} = 0.3 \text{ et } \alpha_{02} = 0.04 & \quad (\text{PARCH}_2(2)) \\ \alpha_{10} = 0.3, \alpha_{11} = 0.1 \text{ et } \alpha_{12} = 0.02 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modèle 4 : } \alpha_{00} = 0.3, \alpha_{01} = 0.1 \text{ et } \alpha_{02} = 0.02 & \quad (\text{PARCH}_3(2)) \\ \alpha_{10} = 0.02, \alpha_{11} = 0.1 \text{ et } \alpha_{12} = 0.3 & \\ \alpha_{20} = 0.2, \alpha_{21} = 0.01 \text{ et } \alpha_{22} = 0.3 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modèle 5 : } \alpha_{00} = 0.02, \alpha_{01} = 0.1, \alpha_{02} = 0.3 \text{ et } \alpha_{03} = 0.02 & \quad (\text{PARCH}_2(3)) \\ \alpha_{10} = 0.1, \alpha_{11} = 0.01, \alpha_{12} = 0.3 \text{ et } \alpha_{13} = 0.03 & \end{aligned}$$

Pour la simulation, nous considérons différentes tailles de l'échantillon : 200, 400, 600, 800 et 1000. Pour chaque échantillon, nous répétons la procédure d'estimation 40 fois. Nous calculons, ensuite, la moyenne et l'erreur quadratique moyenne (MSE). Tous les résultats sont rapportés sur les tableaux et les graphes ci-dessous.

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$
200	0.02075320	0.28721918	0.00001317	0.01800283
400	0.02081757	0.25542942	0.00000734	0.00996361
600	0.02088427	0.26589754	0.00000367	0.00460717
800	0.02090285	0.28237933	0.00000496	0.00725509
1000	0.02085351	0.29820781	0.00000328	0.00534743

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
200	0.40110894	0.03461272	0.00190257	0.00473716
400	0.40226654	0.02241172	0.00192781	0.00219835
600	0.40940491	0.04216403	0.00072768	0.00191280
800	0.40774801	0.04077289	0.00049239	0.00104554
1000	0.39535498	0.04081782	0.00037244	0.00131866

Table 5.1 : Résultats du modèle 1.

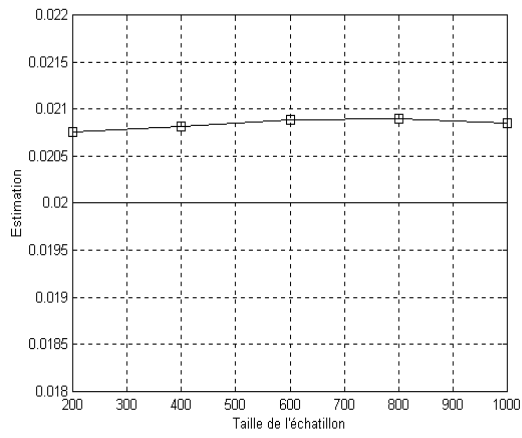


Figure 5.25 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{00}$

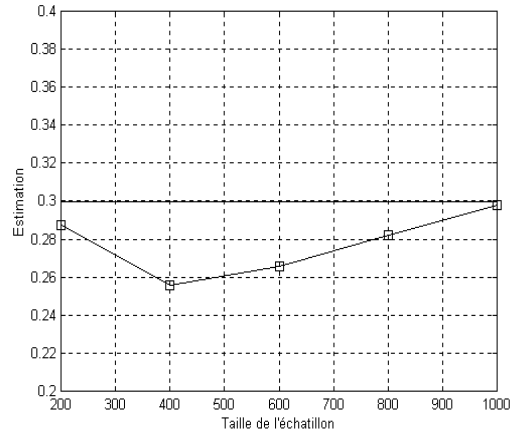


Figure 5.26 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{01}$

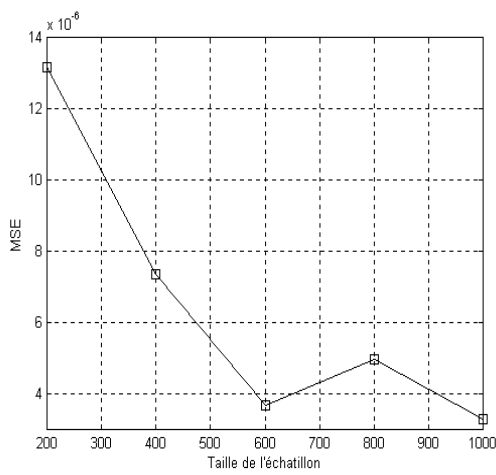


Figure 5.27 : MSE de $\hat{\alpha}_{00}$

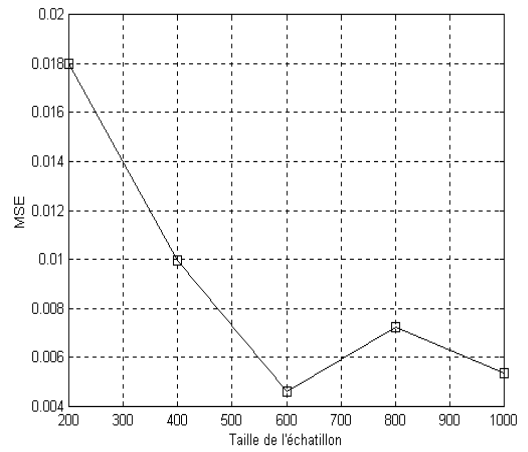


Figure 5.28 : MSE de $\hat{\alpha}_{01}$

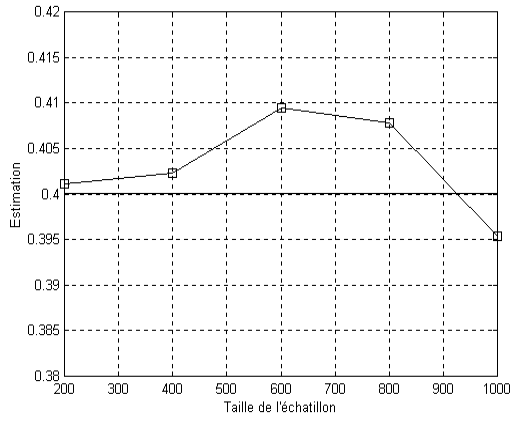


Figure 5.29 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{10}$

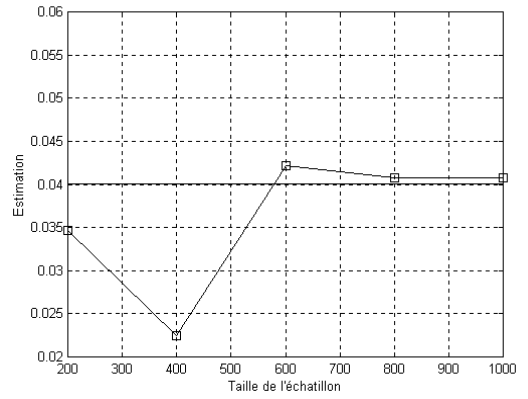


Figure 5.30 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{11}$

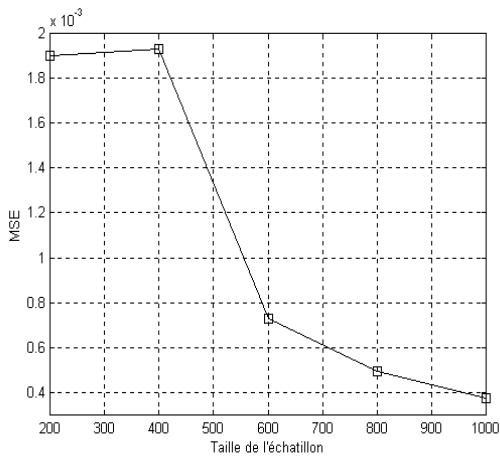


Figure 5.31 : MSE de $\hat{\alpha}_{10}$

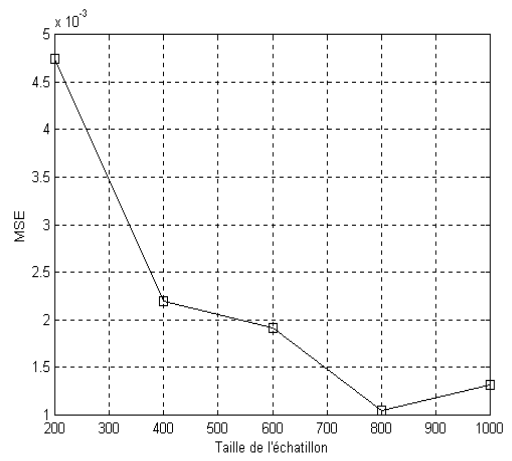


Figure 5.32 : MSE de $\hat{\alpha}_{11}$

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$
200	0.02213402	0.22262117	0.00001280	0.01308861
400	0.02111074	0.25322914	0.00000782	0.00479336
600	0.01971622	0.29116751	0.00000539	0.00572958
800	0.02062949	0.31490045	0.00000288	0.00606259
1000	0.02026122	0.29160385	0.00000260	0.00535432

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
200	0.38801112	0.06007452	0.00256550	0.00993988
400	0.40243950	0.04011081	0.00129884	0.00375476
600	0.41164889	0.03306069	0.00110096	0.00143111
800	0.40258272	0.03922764	0.00057677	0.00128709
1000	0.39856333	0.04019184	0.00051010	0.00094094

N	Moyenne		MSE	
	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$
200	0.52000563	0.04088174	0.00579230	0.00780824
400	0.50506291	0.06362548	0.00236351	0.00376177
600	0.50851590	0.05684826	0.00141673	0.00215657
800	0.50705266	0.05584444	0.00112516	0.00176542
1000	0.50201868	0.06077382	0.00080786	0.00121132

Table 5.2 : Résultats du modèle 2.

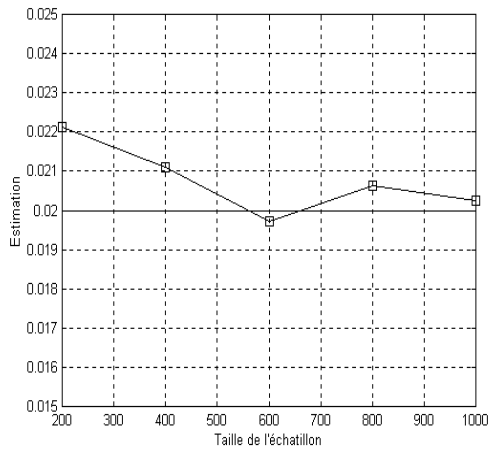


Figure 5.33 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{00}$

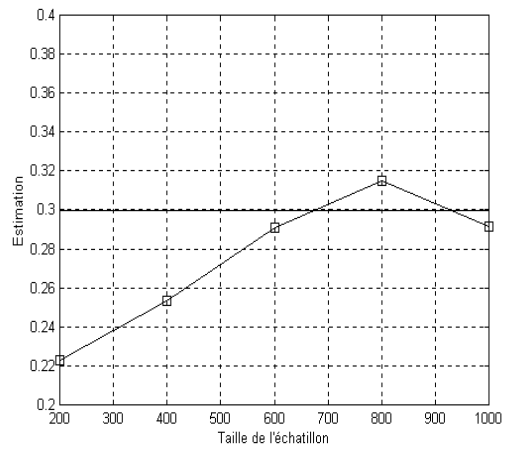


Figure 5.34 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{01}$

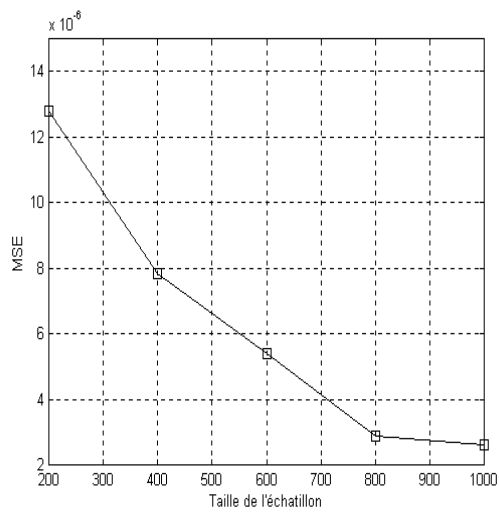


Figure 5.35 : MSE de $\hat{\alpha}_{00}$

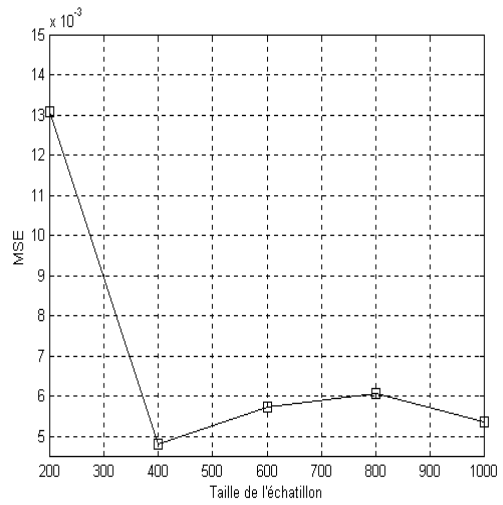


Figure 5.36 : MSE de $\hat{\alpha}_{01}$

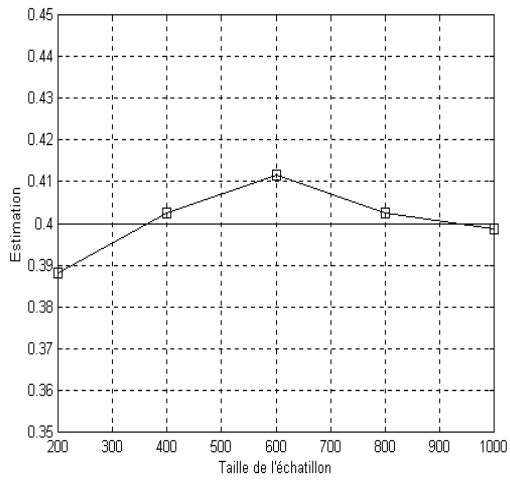


Figure 5.37 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{10}$

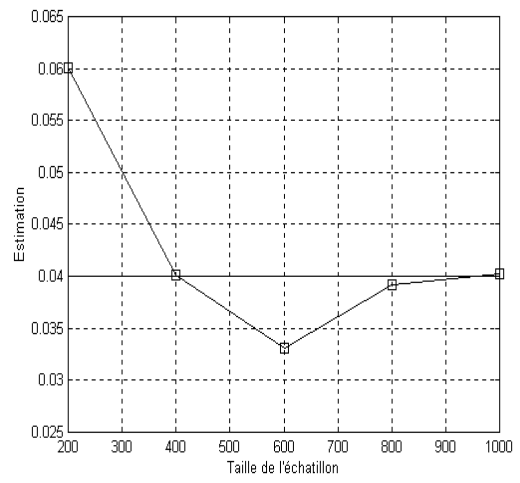


Figure 5.38 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{11}$

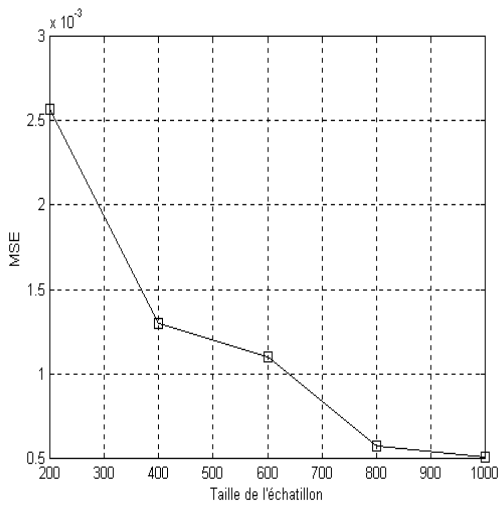


Figure 5.39 : MSE de $\hat{\alpha}_{10}$

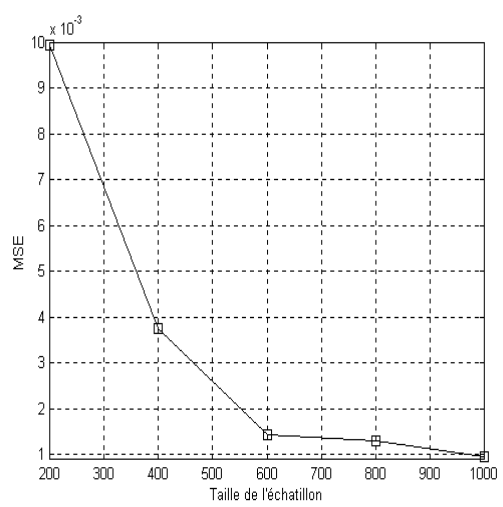


Figure 5.40 : MSE de $\hat{\alpha}_{11}$

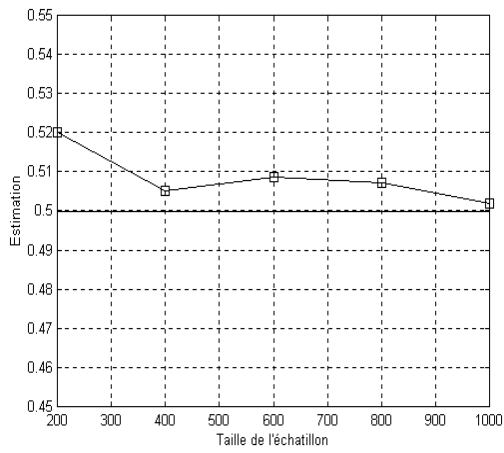


Figure 5.41 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{20}$

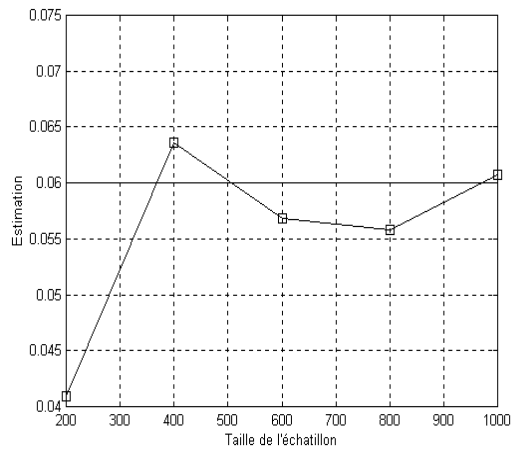


Figure 5.42 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{21}$

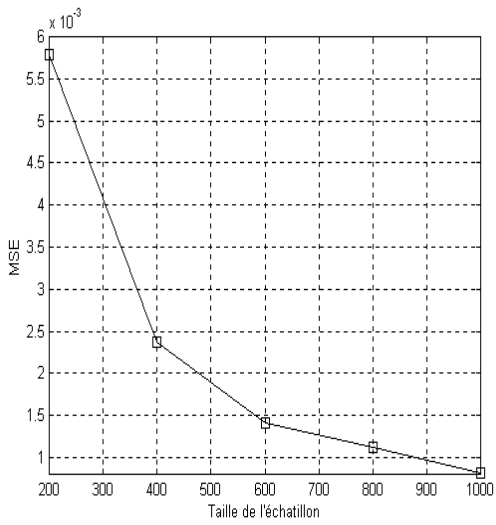


Figure 5.43 : MSE de $\hat{\alpha}_{20}$

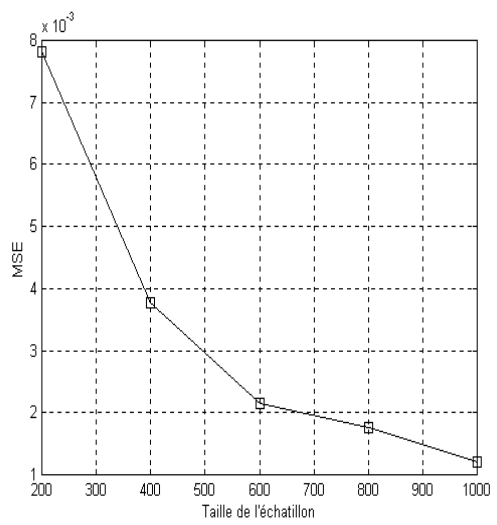


Figure 5.44 : MSE de $\hat{\alpha}_{21}$

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{02}$	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{02}$
200	0.02183901	0.30454220	0.07588445	0.00002003	0.01959491	0.00558579
400	0.02101565	0.27274705	0.07578379	0.00000848	0.01979513	0.00302172
600	0.02076967	0.27280981	0.05593515	0.00000609	0.00905614	0.00134396
800	0.02081265	0.28982568	0.05413315	0.00000977	0.00827351	0.00184159
1000	0.02095194	0.29479596	0.04916607	0.00000751	0.00857285	0.00259838

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$
200	0.29970244	0.11915278	0.07639829	0.00153859	0.00551825	0.00236944
400	0.30020474	0.11810161	0.05141505	0.00123540	0.00524228	0.00167114
600	0.30702857	0.10159182	0.04388232	0.00114007	0.00315029	0.00118690
800	0.29672880	0.10665505	0.03294463	0.00056835	0.00226669	0.00082193
1000	0.29733002	0.10729193	0.02809852	0.00043786	0.00194641	0.00058627

Table 5.3 : Résultats du modèle 3.

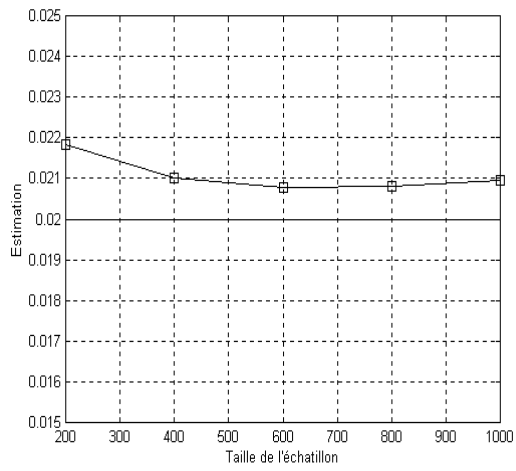


Figure 5.45 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{00}$

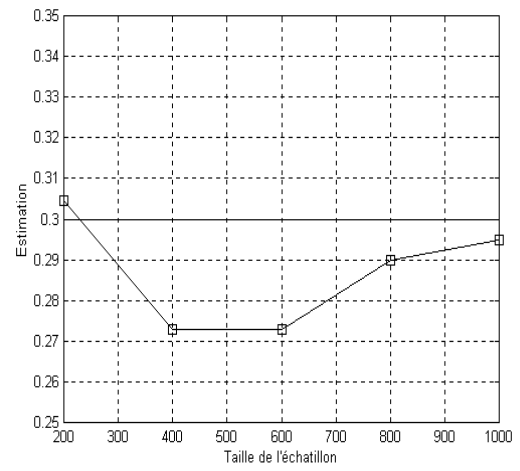


Figure 5.46 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{01}$

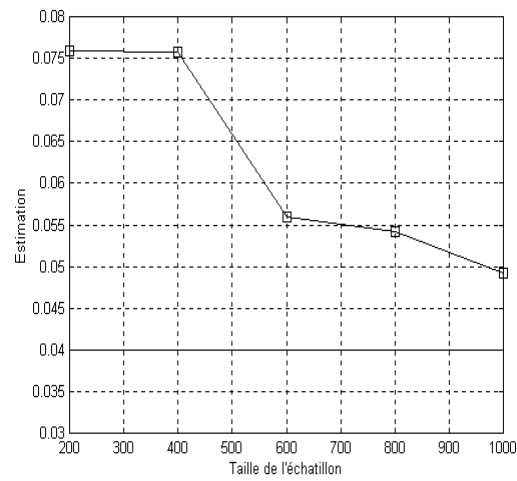


Figure 5.47 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{02}$

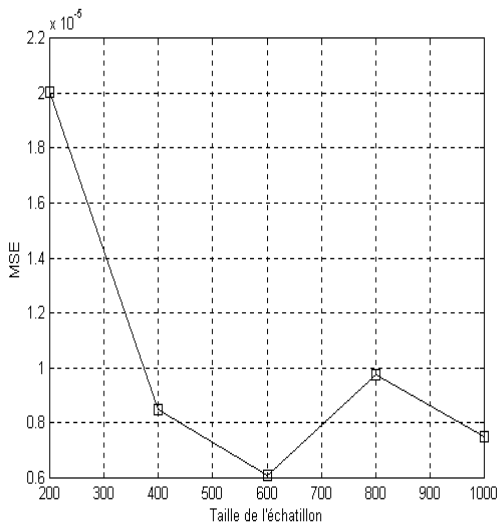


Figure 5.48 : MSE de $\hat{\alpha}_{00}$

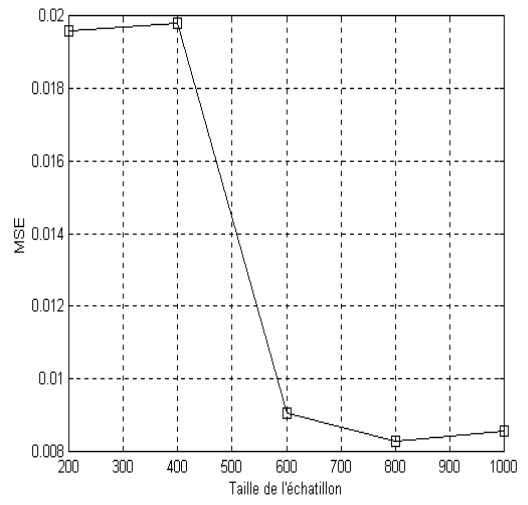


Figure 5.49 : MSE de $\hat{\alpha}_{01}$

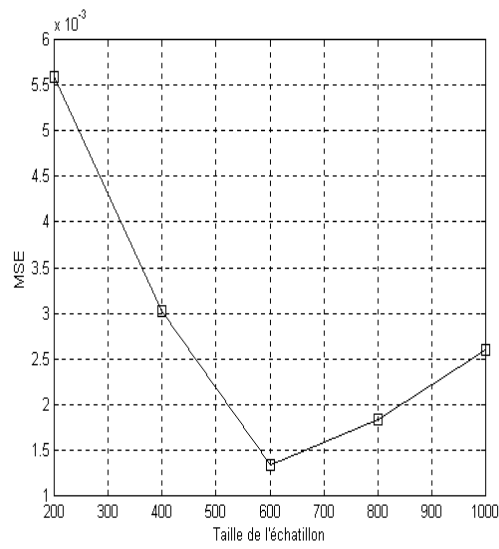


Figure 5.50 : MSE de $\hat{\alpha}_{02}$

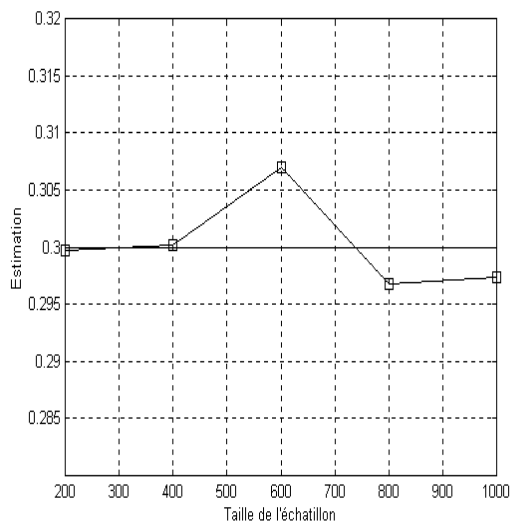


Figure 5.51 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{10}$

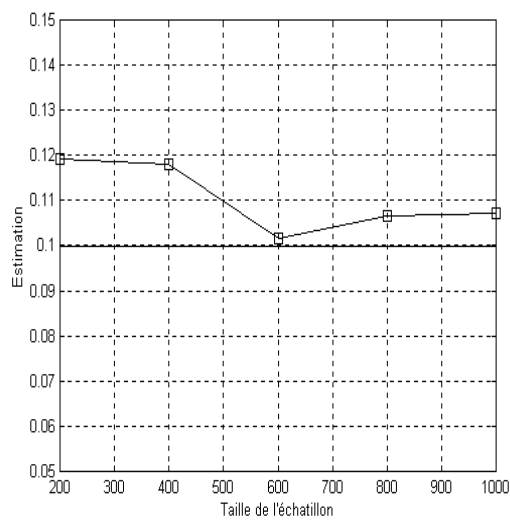


Figure 5.52 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{11}$

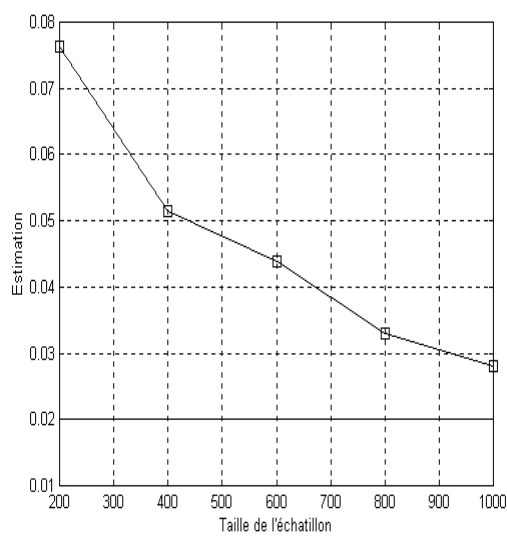


Figure 5.53 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{12}$

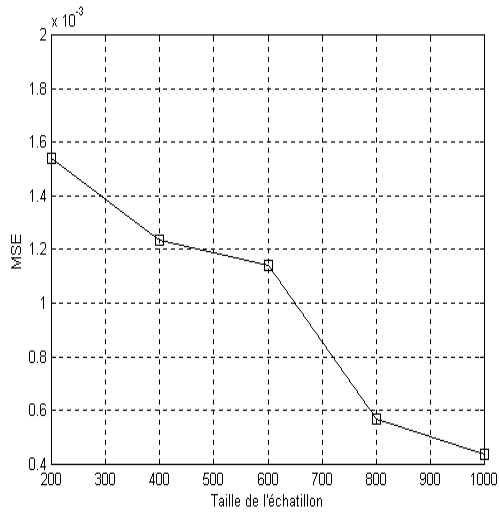


Figure 5.54 : MSE de $\hat{\alpha}_{10}$

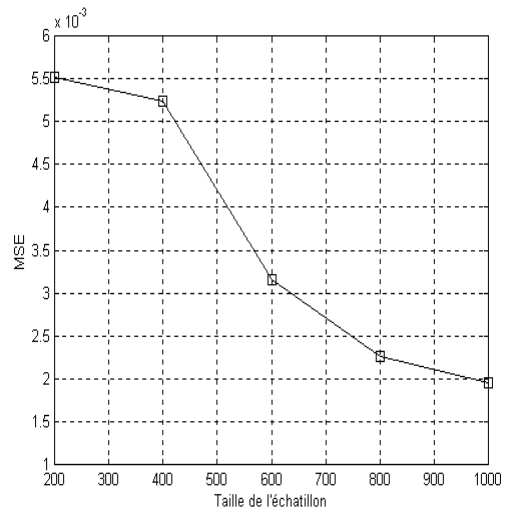


Figure 5.55 : MSE de $\hat{\alpha}_{11}$

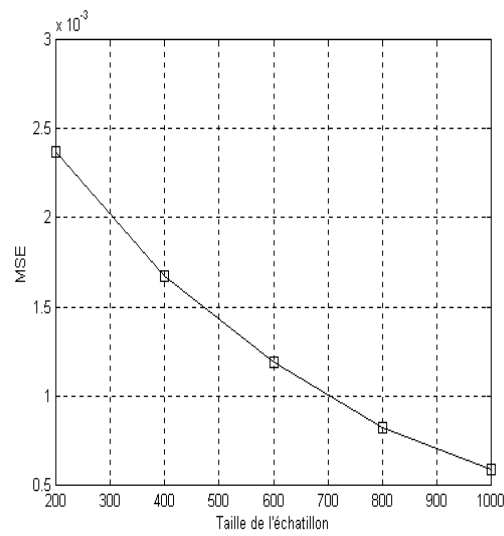


Figure 5.56 : MSE de $\hat{\alpha}_{12}$

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{02}$	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{02}$
200	0.30566917	0.13537084	0.07263143	0.00193645	0.00701411	0.00363381
400	0.29964219	0.12395579	0.06345523	0.00138212	0.00779742	0.00210935
600	0.29925686	0.11267483	0.04871623	0.00063558	0.00275108	0.00115261
800	0.29977546	0.11236895	0.03170573	0.00065592	0.00230031	0.00062129
1000	0.30534546	0.11012345	0.02110479	0.00040822	0.00155814	0.00071704

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$
200	0.02074431	0.14982557	0.29567562	0.00003623	0.01451771	0.01408856
400	0.02063244	0.13294600	0.27401349	0.00001652	0.00620843	0.00978052
600	0.02038906	0.10943576	0.29150783	0.00002141	0.00605113	0.00828068
800	0.01953347	0.10776596	0.29819854	0.00001830	0.00641449	0.01003194
1000	0.02015793	0.10926693	0.29908871	0.00001322	0.00839226	0.00799652

N	Moyenne			MSE		
	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$	$\hat{\alpha}_{22}$	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$	$\hat{\alpha}_{22}$
200	0.22183323	0.05554893	0.26782543	0.00148512	0.00222364	0.00981872
400	0.21122490	0.03965548	0.26399920	0.00105941	0.00143167	0.00969780
600	0.21229997	0.03013261	0.22715329	0.00056483	0.00116563	0.00493283
800	0.21615895	0.02059113	0.28113721	0.00069024	0.00057095	0.00609191
1000	0.20462101	0.01862907	0.29400898	0.00055338	0.00024067	0.00420835

Table 5.4 : Résultats du modèle 5.

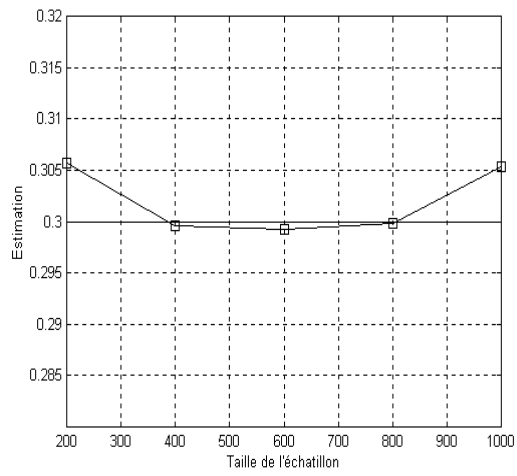


Figure 5.57 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{00}$

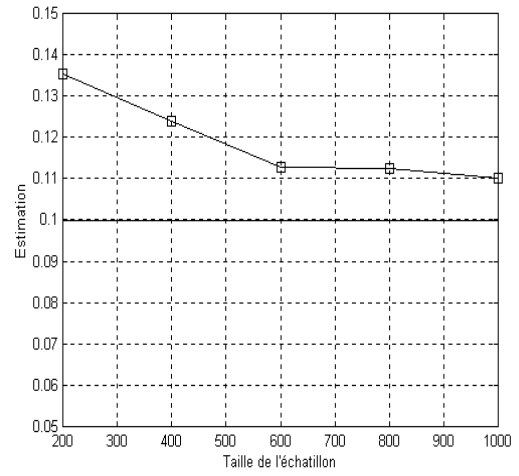


Figure 5.58 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{01}$

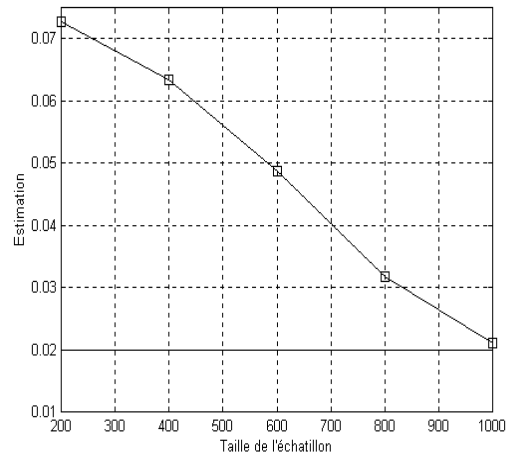


Figure 5.59 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{02}$

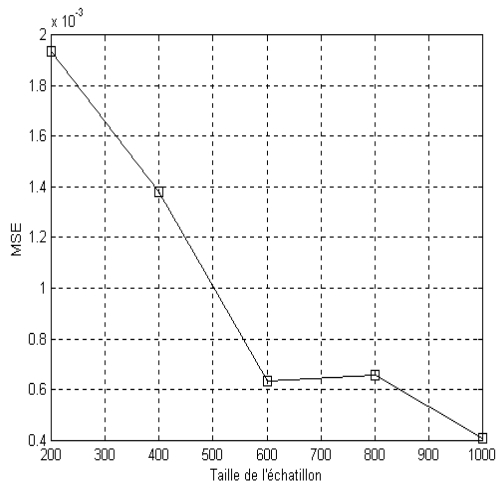


Figure 5.60 : MSE de $\hat{\alpha}_{00}$

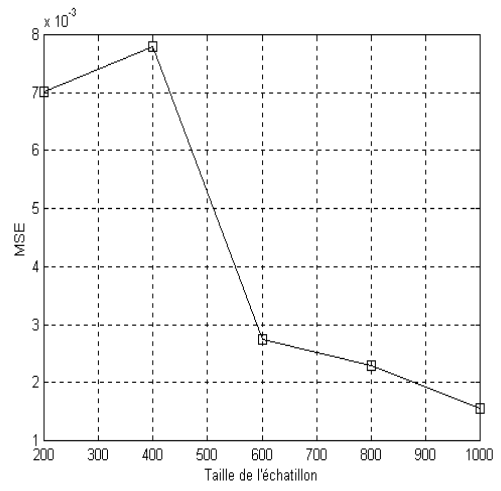


Figure 5.61 : MSE de $\hat{\alpha}_{01}$

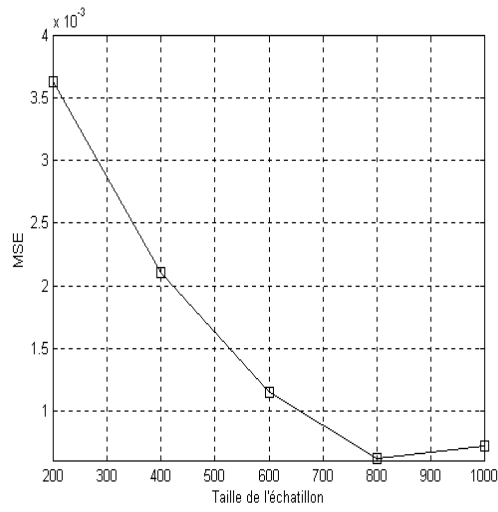


Figure 5.62 : MSE de $\hat{\alpha}_{02}$

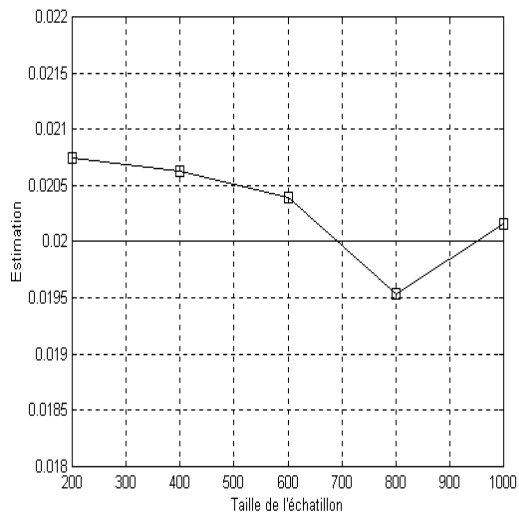


Figure 5.63 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{10}$

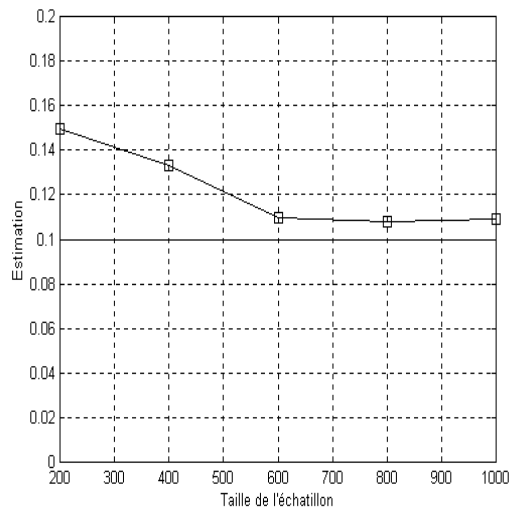


Figure 5.64 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{11}$

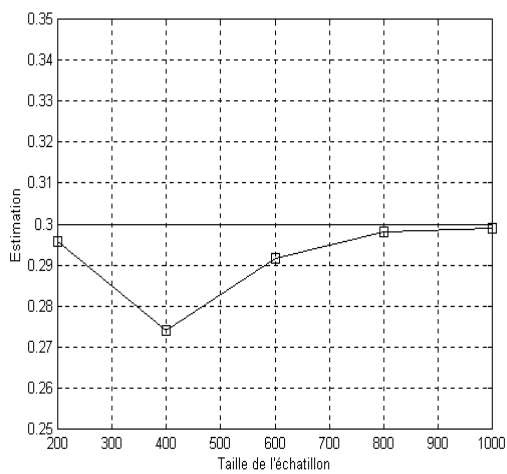


Figure 5.65 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{12}$

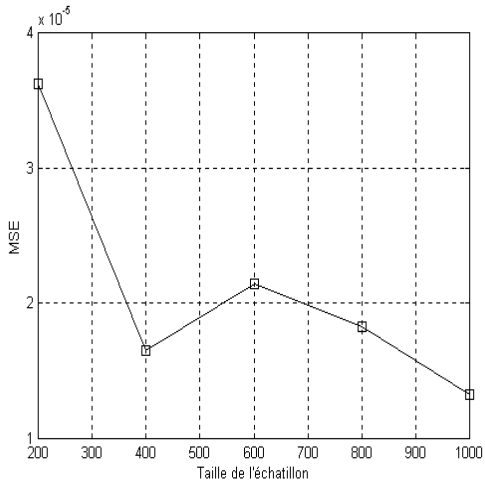


Figure 5.66 : MSE de $\hat{\alpha}_{10}$

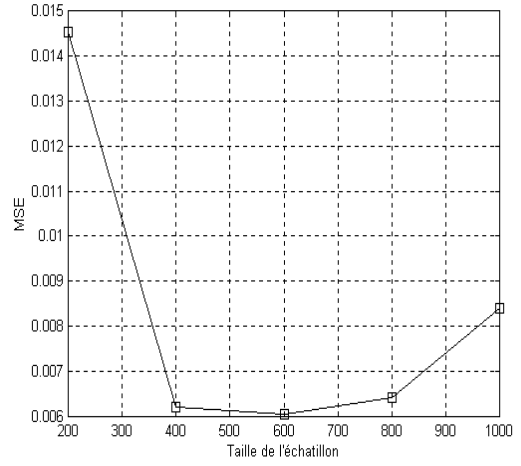


Figure 5.67 : MSE de $\hat{\alpha}_{11}$

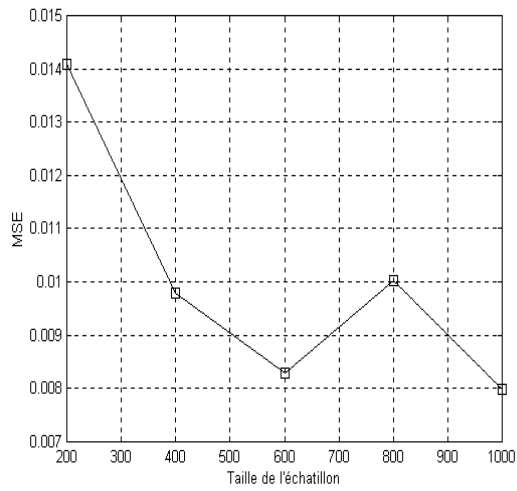


Figure 5.68 : MSE de $\hat{\alpha}_{12}$

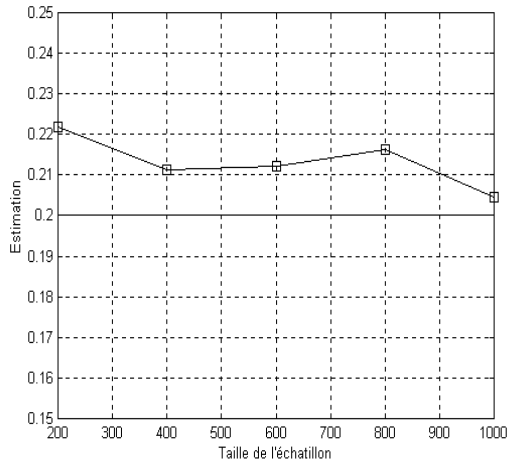


Figure 5.69 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{20}$

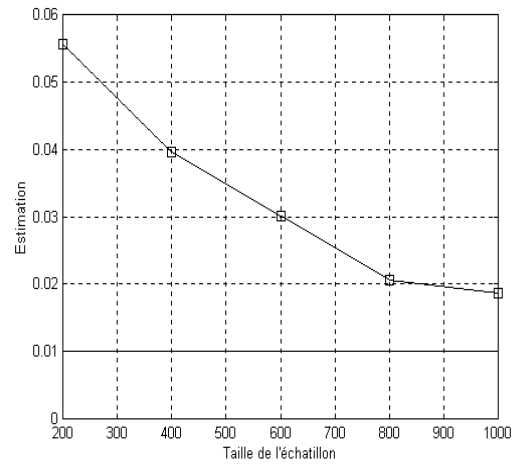


Figure 5.70 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{21}$

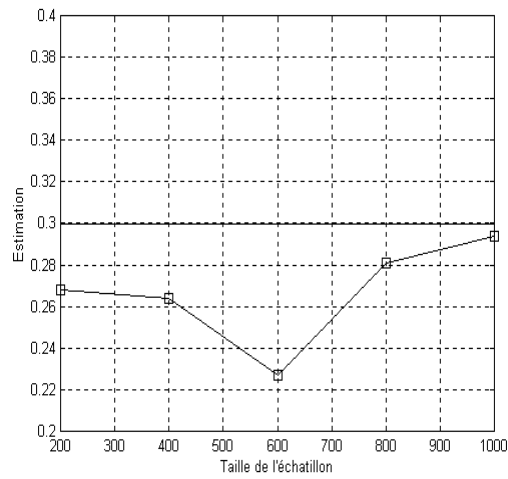


Figure 5.71 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{22}$

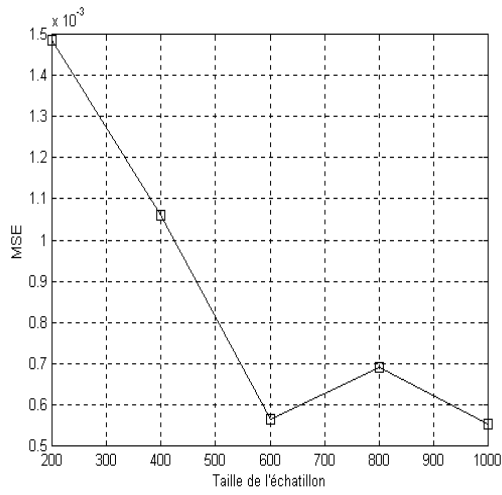


Figure 5.72 : MSE de $\hat{\alpha}_{20}$

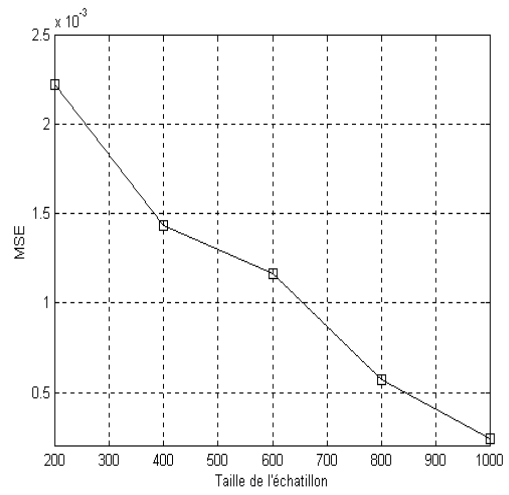


Figure 5.73 : MSE de $\hat{\alpha}_{21}$

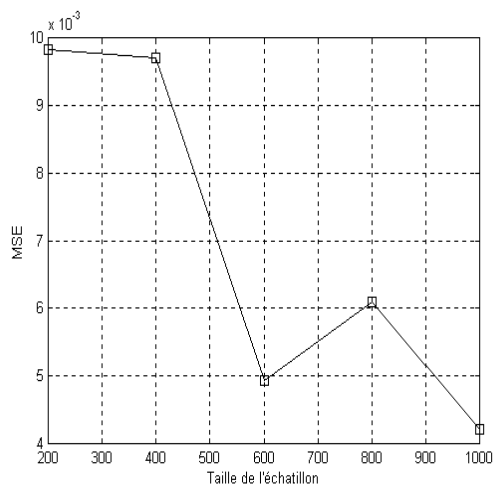


Figure 5.74 : MSE de $\hat{\alpha}_{22}$

N	Moyenne				MSE			
	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{02}$	$\hat{\alpha}_{03}$	$\hat{\alpha}_{00}$	$\hat{\alpha}_{01}$	$\hat{\alpha}_{02}$	$\hat{\alpha}_{03}$
200	0.018946	0.153919	0.278132	0.165409	0.000060	0.013754	0.019137	0.031523
400	0.018305	0.147820	0.298730	0.109106	0.000036	0.010941	0.008812	0.010631
600	0.020526	0.108782	0.277366	0.039606	0.000022	0.003154	0.009768	0.008844
800	0.020187	0.109744	0.282784	0.024538	0.000010	0.003431	0.006169	0.001792
1000	0.020415	0.101519	0.297491	0.024215	0.000010	0.002953	0.003653	0.001889

N	Moyenne				MSE			
	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
200	0.115683	0.078330	0.221481	0.090723	0.000482	0.005341	0.011310	0.003561
400	0.106341	0.032139	0.252456	0.060013	0.000335	0.002736	0.006631	0.002082
600	0.104726	0.014525	0.287103	0.056527	0.000188	0.001279	0.005815	0.001444
800	0.100731	0.013499	0.280401	0.043021	0.000380	0.002737	0.009536	0.005190
1000	0.107436	0.014043	0.291317	0.045625	0.000120	0.001072	0.003469	0.000980

Table 5.5 : Résultats du modèle 5.

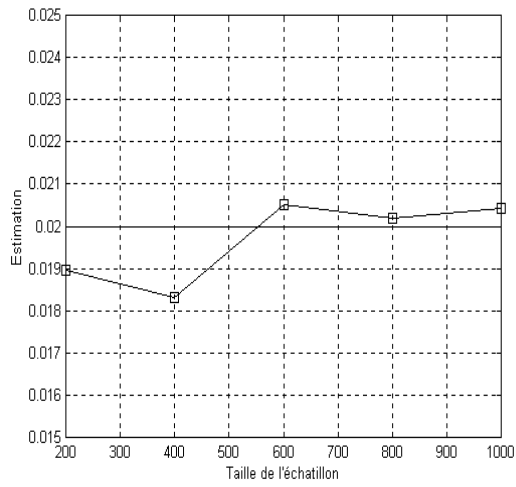


Figure 5.5.75 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{00}$

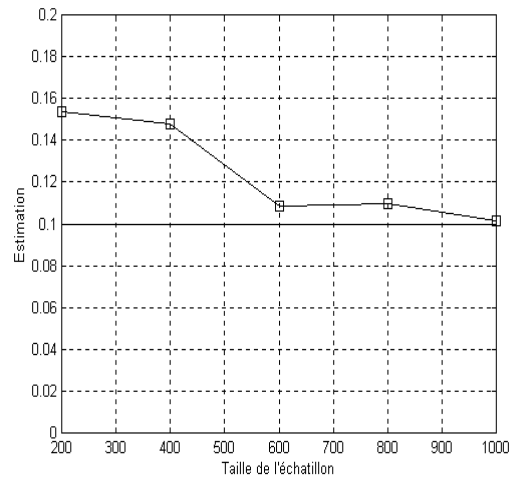


Figure 5.5.76 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{01}$

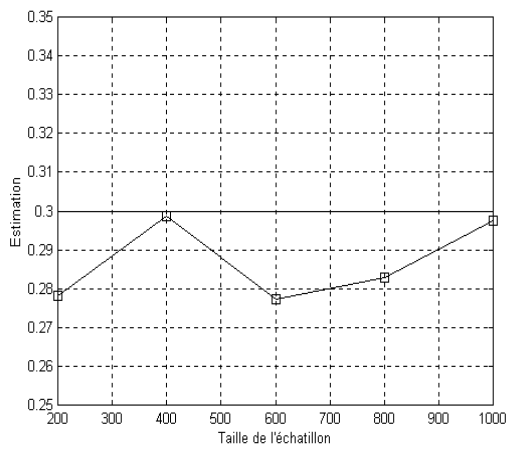


Figure 5.5.77 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{02}$

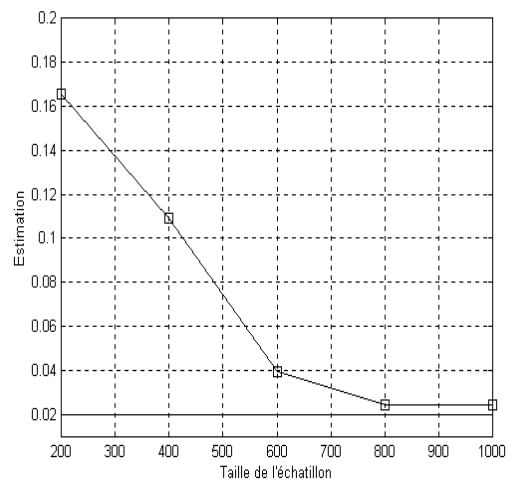


Figure 5.5.78 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{03}$

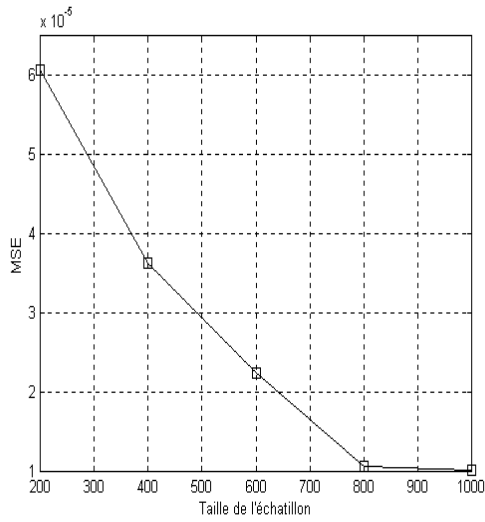


Figure 5.79 : MSE de $\hat{\alpha}_{00}$

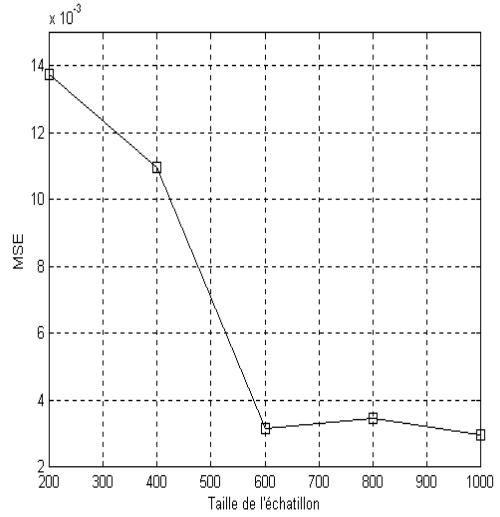


Figure 5.80 : MSE de $\hat{\alpha}_{01}$

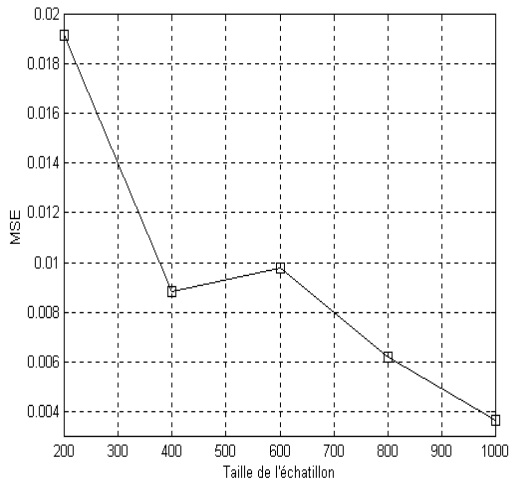


Figure 5.81 : MSE de $\hat{\alpha}_{02}$

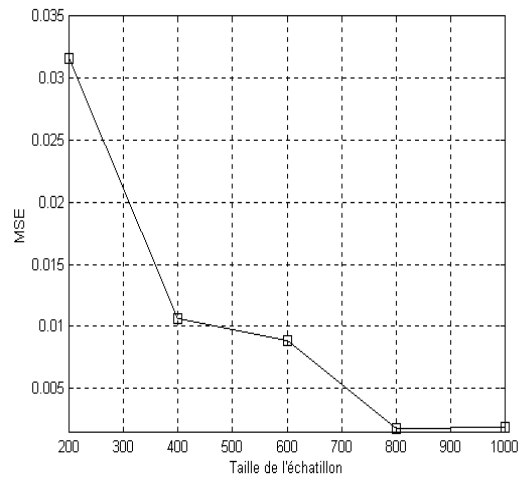


Figure 5.82 : MSE de $\hat{\alpha}_{03}$

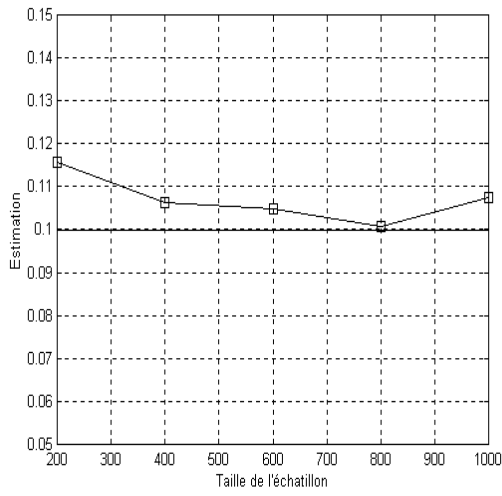


Figure 5.83 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{10}$

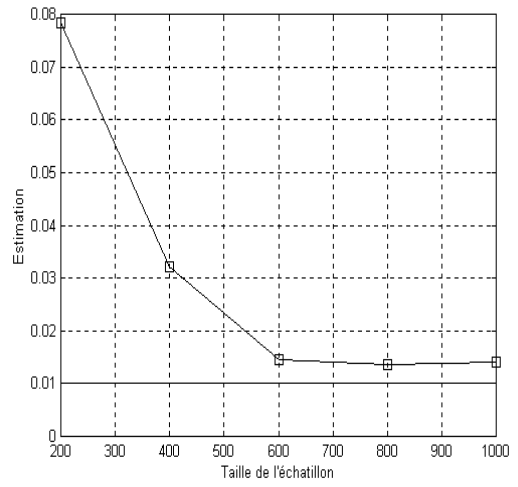


Figure 5.84 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{11}$

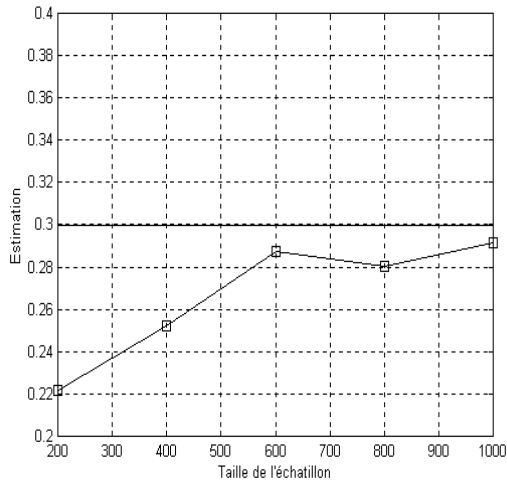


Figure 5.85 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{12}$

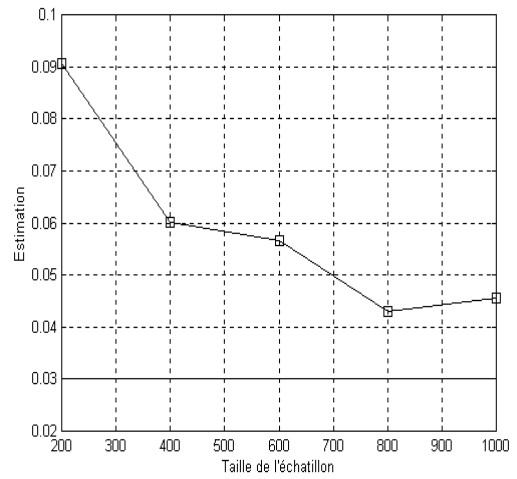


Figure 5.86 : Moyenne de $\hat{\alpha}_{13}$

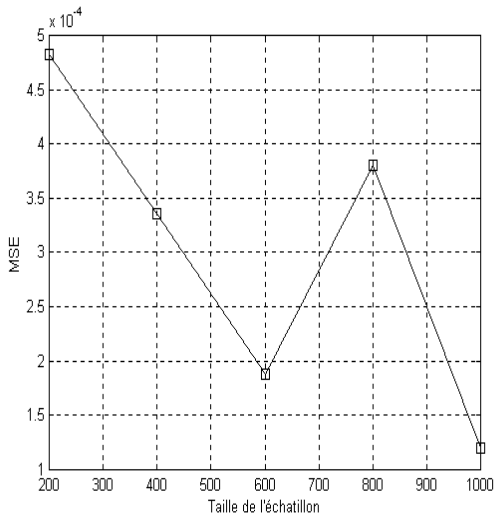


Figure 5.87 : MSE de $\hat{\alpha}_{10}$

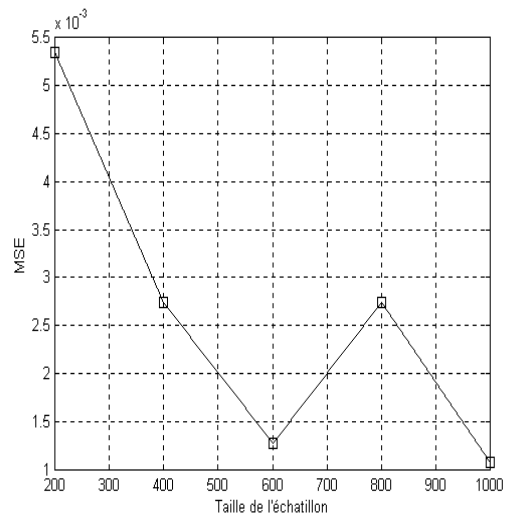


Figure 5.88 : MSE de $\hat{\alpha}_{11}$

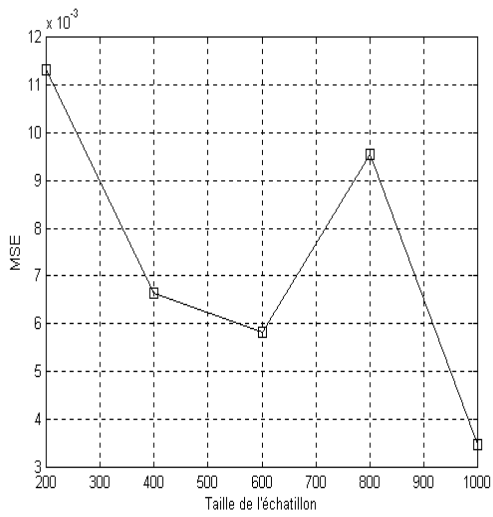


Figure 5.89 : MSE de $\hat{\alpha}_{12}$

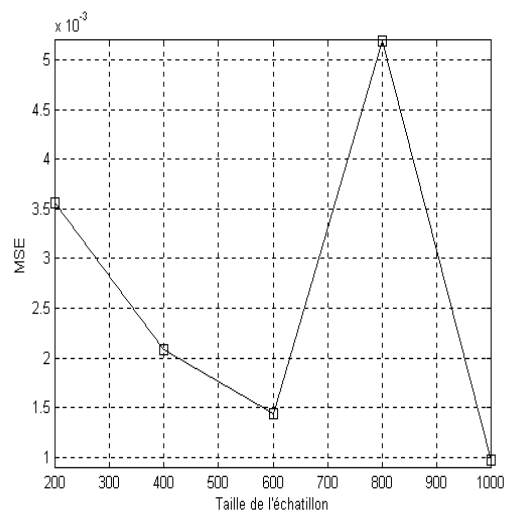


Figure 5.90 : MSE de $\hat{\alpha}_{13}$

5.7 Comparaison

Nous avons comparé notre méthode à la méthode hors ligne MSE. bien que les deux méthodes n'ont pas les mêmes objectifs car nous n'avons pas trouvé dans la littérature une autre méthode en ligne pour pouvoir faire la comparaison.

Pour vérifier l'efficacité de notre méthode, nous proposons les simulations suivantes pour 100 instances générées aléatoirement par un processus $\text{PARCH}_2(1)$ avec comme taille de l'échantillon égale à 1000. Pour cela, nous avons considéré le modèle suivant :

$$\underline{\text{Modèle}} : \alpha_{00} = 0.02 , \alpha_{01} = 0.3 , \alpha_{10} = 0.2 \text{ et } \alpha_{11} = 0.03$$

Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous.

De toutes les simulations faites, nous avons remarqué que l'estimation par notre méthode en ligne est meilleure dans plus de 66% des cas pour la première période et un peu moins pour la deuxième période (55%) et ça va dans l'ordre décroissant.

Instance	$\hat{\alpha}_{00}$		$\hat{\alpha}_{01}$	
	En ligne	Hors ligne	En ligne	Hors ligne
1	0.02051443	0.02020417	0.27584548	0.26809978
2	0.01885041	0.01945646	0.30929927	0.36189612
3	0.02124496	0.02829868	0.33030169	0.09254624
4	0.01654772	0.01542320	0.39096376	0.46670082
5	0.01921961	0.01917417	0.28971306	0.25791747
6	0.02250122	0.02078063	0.19812617	0.26246779
7	0.02090010	0.02079759	0.29224172	0.26738894
8	0.02068806	0.02045258	0.24056532	0.23352716
9	0.01944176	0.01933684	0.29236892	0.25900191
10	0.02229658	0.02219808	0.17996938	0.21066670
11	0.02107746	0.02106071	0.28917346	0.18017411
12	0.02023656	0.01991438	0.25984472	0.29623444
13	0.02109532	0.02114890	0.24295006	0.12083503
14	0.02055302	0.02046567	0.33269139	0.32266805
15	0.02034139	0.01978570	0.22004371	0.25587817
16	0.02451930	0.02450015	0.09026226	0.09740015
17	0.02084792	0.02280585	0.28414471	0.19454580
18	0.02001919	0.02039265	0.31135053	0.30169037
19	0.02401761	0.02588359	0.15108686	0.07767833
20	0.02098202	0.01815708	0.24119769	0.35908131
21	0.02123807	0.02112813	0.29867112	0.21678350
22	0.01878356	0.01867312	0.25744679	0.25654577
23	0.02122748	0.02157629	0.29989393	0.25348535
24	0.01835410	0.02379187	0.28670735	0.06680024
25	0.01976501	0.02655583	0.27373909	0.00694964
26	0.02213385	0.02361179	0.28824816	0.12997629
27	0.02235847	0.02240282	0.25953711	0.24035520
28	0.02552317	0.02324978	0.22813989	0.21276861
29	0.02297263	0.02270063	0.29545693	0.19143302
30	0.01914080	0.01543113	0.32325792	0.45001686
31	0.02117499	0.02085383	0.24881802	0.14068693
32	0.02111658	0.01980939	0.33479994	0.37394910
33	0.02215135	0.02189318	0.27290289	0.27313206
34	0.02144221	0.01476980	0.19602852	0.45551132
35	0.02084756	0.02393925	0.27394365	0.03849282
36	0.01799435	0.02110624	0.29007298	0.15166577
37	0.02195890	0.02456511	0.35735519	0.26830734
38	0.02133238	0.01682869	0.10543173	0.34432009
39	0.02113395	0.02057727	0.38623053	0.38581103
40	0.02203585	0.02162750	0.29114371	0.28987501
41	0.02197604	0.01813707	0.22359973	0.33088546
42	0.02283517	0.02343349	0.11914522	0.09006712
43	0.02236050	0.02286896	0.28721937	0.25824529
44	0.02224641	0.01888974	0.20283225	0.36240572
45	0.02104815	0.02100055	0.29782518	0.30497236

46	0.02201094	0.02417730	0.29877495	0.22801130
47	0.01700954	0.02458605	0.30909688	0.07868961
48	0.01954322	0.01933632	0.21089533	0.18532553
49	0.02044892	0.02060453	0.26321335	0.25260840
50	0.02406499	0.01342188	0.21972263	0.57414031
51	0.02077522	0.02061007	0.29218127	0.19074630
52	0.02046601	0.02039564	0.26584995	0.26783901
53	0.01896180	0.01885288	0.36260099	0.36048084
54	0.01951337	0.01649672	0.28062394	0.38792663
55	0.02197687	0.02296380	0.25062176	0.23173563
56	0.02128879	0.02337076	0.26460469	0.17981261
57	0.02170741	0.01424369	0.27098751	0.53159151
58	0.01879223	0.02341092	0.48649445	0.40126408
59	0.01577804	0.01896315	0.52608538	0.40981854
60	0.01968236	0.02179660	0.26933761	0.18364259
61	0.02361402	0.02404100	0.29520827	0.12857767
62	0.02411881	0.02378234	0.09327938	0.12407885
63	0.02004452	0.02130645	0.26594019	0.21120604
64	0.01972438	0.01948459	0.33588061	0.32855427
65	0.02413642	0.02408597	0.29961466	0.23869297
66	0.02272702	0.01870372	0.23343359	0.39833402
67	0.01790064	0.01784181	0.51991900	0.51384848
68	0.02616154	0.02911558	0.17938286	0.06600623
69	0.01875560	0.01970394	0.30504795	0.31004317
70	0.02112710	0.02094150	0.23769674	0.23664079
71	0.01972795	0.01965104	0.33210386	0.33139597
72	0.02122903	0.02096775	0.33544185	0.32671343
73	0.02036098	0.02169742	0.24654814	0.19179344
74	0.01908012	0.02305033	0.32301948	0.16609225
75	0.01903780	0.02541186	0.30315418	0.11020839
76	0.02288334	0.02301654	0.23125847	0.22512601
77	0.02349933	0.01903592	0.22718380	0.36234195
78	0.02034602	0.02161363	0.32188625	0.35531059
79	0.02160701	0.02577805	0.17087104	0.03116852
80	0.01822896	0.01684929	0.30449188	0.43492253
81	0.01863135	0.01816522	0.28001085	0.27688407
82	0.02078785	0.02112014	0.29428500	0.21387378
83	0.02269185	0.02278173	0.21527041	0.21165549
84	0.01954045	0.02619306	0.30278361	0.09484430
85	0.01954693	0.01879593	0.16267853	0.19574118
86	0.02408773	0.02396613	0.30784875	0.13663045
87	0.02171313	0.02291616	0.19613677	0.14256225
88	0.02473110	0.02457937	0.23973441	0.23874692
89	0.01631563	0.01418466	0.32586181	0.41773456
90	0.02431325	0.02453168	0.29151362	0.20804056
91	0.02164341	0.02532808	0.28775211	0.15319885
92	0.02521688	0.02432488	0.15297730	0.17733249
93	0.01890366	0.01887841	0.22232404	0.21512796

94	0.02166536	0.02231246	0.31981630	0.32603630
95	0.02173485	0.02881271	0.27060039	0.00983063
96	0.02074700	0.02030476	0.33583846	0.32598751
97	0.02027088	0.01944508	0.34739341	0.34471959
98	0.02147520	0.01640178	0.20868254	0.40089669
99	0.02246602	0.02235830	0.30189716	0.30256411
100	0.01926208	0.01871834	0.27858297	0.30217936

Table 5.6 : Résultats de la comparaison pour la première période

Instance	$\hat{\alpha}_{10}$		$\hat{\alpha}_{11}$	
	En ligne	Hors ligne	En ligne	Hors ligne
1	0.20741579	0.20818339	0.01303740	0.01049477
2	0.20351415	0.20148994	0.04348092	0.03825175
3	0.18773964	0.18420230	0.04348652	0.02922504
4	0.18071136	0.17593465	0.02231712	0.03480374
5	0.20325844	0.20280168	0.03378670	0.03996991
6	0.19268867	0.19516820	0.02976050	0.01232147
7	0.19529405	0.19499789	0.04244517	0.01694761
8	0.19948892	0.20184655	0.02281249	0.00013452
9	0.17231723	0.17094214	0.09103714	0.08447122
10	0.20850918	0.20287022	0.02519551	0.03548508
11	0.22144882	0.22377623	0.02549822	0.05224635
12	0.18470187	0.18188861	0.08160633	0.07028327
13	0.19814238	0.19788654	0.12170481	0.11491084
14	0.20997044	0.20600783	0.07250847	0.04414682
15	0.21030105	0.21100020	0.02531107	0.02005396
16	0.20374555	0.20521597	0.11550115	0.07551434
17	0.22164068	0.21911142	0.01058564	0.01960272
18	0.17625431	0.17221769	0.03745840	0.06918537
19	0.20220700	0.20424283	0.05215687	0.01138545
20	0.19550628	0.20072432	0.07008816	0.03496919
21	0.19552765	0.19387253	0.08465453	0.07312564
22	0.18621455	0.18793778	0.02146764	0.00230630
23	0.23755492	0.23903371	0.04108073	0.02246485
24	0.19397680	0.19142022	0.11172816	0.09525601
25	0.17919745	0.17892370	0.09486075	0.07791191
26	0.20409894	0.21203785	0.01657384	0.02824548
27	0.20888490	0.20349360	0.08200201	0.06032689
28	0.18962305	0.18673084	0.09136585	0.05514013
29	0.20009830	0.20569879	0.04139410	0.02396057
30	0.21088736	0.20686774	0.03433314	0.00543130
31	0.20960751	0.20726768	0.01659339	0.04806473
32	0.22528117	0.22405033	0.04671188	0.01691194
33	0.21555978	0.21275204	0.06393499	0.04972169
34	0.20346043	0.20209215	0.03849294	0.01592346
35	0.22022912	0.21708462	0.00418658	0.02725074
36	0.19584706	0.19319806	0.08331391	0.04967131
37	0.22284012	0.21642816	0.11328871	0.10070614
38	0.20618832	0.20381300	0.02805660	0.01846374
39	0.18050315	0.17992564	0.05733036	0.06983317
40	0.21446120	0.21558116	0.03175198	0.03392848
41	0.18103543	0.18131817	0.02876886	0.01029956
42	0.19596766	0.19311729	0.09736315	0.07336883
43	0.19016761	0.19004895	0.01181450	0.02041729
44	0.22708752	0.22423987	0.03974559	0.00925346
45	0.21687350	0.21452435	0.03889535	0.02708959

46	0.20033224	0.19764681	0.03395235	0.01360248
47	0.18418003	0.18547468	0.09294916	0.09933928
48	0.19541601	0.19850787	0.04429286	0.01935929
49	0.18297223	0.18391812	0.03428316	0.04884041
50	0.25051200	0.24791657	0.02898763	0.00090081
51	0.21696737	0.21320219	0.01827237	0.00944206
52	0.18450528	0.18433279	0.06010041	0.03528152
53	0.19707065	0.19820750	0.09152095	0.04407469
54	0.21762346	0.21536936	0.00768022	0.09915738
55	0.20009995	0.20010698	0.06331578	0.04760600
56	0.19955155	0.20122186	0.10843686	0.09667014
57	0.20109345	0.19881609	0.00272699	0.05304785
58	0.20493372	0.20236816	0.00913505	0.05278957
59	0.19485013	0.19226548	0.04818031	0.01766432
60	0.24414685	0.24172965	0.00266033	0.02949536
61	0.19738056	0.19489278	0.05435485	0.04168271
62	0.21033305	0.20851594	0.06775385	0.03739939
63	0.20470489	0.20047407	0.02547874	0.00889258
64	0.21125777	0.20878371	0.01767817	0.02933331
65	0.19084996	0.18953687	0.14715481	0.14018304
66	0.19797487	0.20435818	0.08356726	0.04496422
67	0.19448465	0.19934782	0.07509621	0.06383363
68	0.20951550	0.21442416	0.03587928	0.02004637
69	0.20776790	0.20554291	0.05223744	0.03798135
70	0.21090458	0.19784270	0.03434905	0.04228710
71	0.19157138	0.19547370	0.11075136	0.07256646
72	0.21045898	0.20907205	0.04732169	0.02105388
73	0.21769644	0.21169634	0.05126206	0.05905510
74	0.22072842	0.21815737	0.03407738	0.03673557
75	0.20280381	0.20545154	0.03227356	0.00688936
76	0.19469453	0.19087672	0.06757964	0.07241785
77	0.18755330	0.19257062	0.05087005	0.02710676
78	0.20163076	0.20354171	0.00834959	0.00337285
79	0.18990908	0.18961207	0.08948467	0.05503479
80	0.20779686	0.20580620	0.04248735	0.00240823
81	0.21509578	0.21598762	0.00447268	0.01075270
82	0.21624557	0.21311217	0.00600058	0.01385101
83	0.18625124	0.18571059	0.07841145	0.06528278
84	0.21944583	0.21323650	0.01133340	0.00205928
85	0.19633260	0.19518626	0.09729461	0.07244042
86	0.18721469	0.19135375	0.07296320	0.03659689
87	0.18589109	0.18866082	0.09166271	0.07258697
88	0.20855805	0.20994677	0.06338320	0.04112623
89	0.19014893	0.18927365	0.07635853	0.05276525
90	0.20045554	0.20049084	0.08027714	0.04781783
91	0.20811418	0.21145632	0.08092663	0.05162124
92	0.18892482	0.18436469	0.11875360	0.11866501
93	0.19317214	0.18975913	0.02258868	0.02819009

94	0.20197093	0.20159801	0.07185375	0.03781752
95	0.19978942	0.20143277	0.02924963	0.01858097
96	0.18749602	0.18542700	0.06281390	0.05146624
97	0.20194612	0.20627187	0.00494496	0.06553882
98	0.19478231	0.19351931	0.06347101	0.04234839
99	0.20973168	0.20848788	0.07266881	0.02596866
100	0.20634405	0.20702592	0.08859170	0.05050808

Table 5.7 : Résultats de la comparaison pour la deuxième période

5.8 Conclusion

Considérons un modèle $\text{PARCH}_d(q)$, nous avons remarqué que, en général :

- l'estimation d'un paramètre α_{ij} ($i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ et $j \in \{0, 1, \dots, q\}$) est meilleure si sa vraie valeur est proche de la valeur 0.
- l'estimation d'un paramètre α_{ij} ($i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ et $j \in \{0, 1, \dots, q\}$) est moins bonne si sa vraie valeur est proche de la valeur 1.
- l'estimation des paramètres $\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_{q-1}}$ pour $i = 0, 1, \dots, d-1$ est meilleure que celle de α_{i_q} .
- plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'estimation est meilleure.

Bien que nous n'avons pas trouvé, dans la littérature, d'autres méthodes en ligne pour pouvoir comparer l'efficacité réelle de nos méthodes, nous avons comparé la dernière méthode en ligne avec la méthode hors ligne MSE. Nous avons remarqué que l'estimation par notre méthode en ligne est meilleure dans plus de 66% des cas pour la première période et un peu moins pour la deuxième période et ça va dans l'ordre décroissant.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'estimation récursive des paramètres d'un modèle autoregressif conditionnellement heteroscedastiques classiques et périodiques. Pour cela, nous avons considéré le critère de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (Mean square error ou MSE). A cette effet nous avons développé des méthodes d'estimation hors ligne et en ligne.

La première méthode d'estimation en ligne nous permet de calculer récursivement un estimateur des paramètres, mais l'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'inversion d'une matrice de grande taille, ce qui est très coûteux en temps de traitement du programme, si le nombre de paramètres à estimer est grand. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé une seconde méthode qui est plus intéressante puisqu'elle ne nécessite pas l'inversion d'une matrice de grande taille et minimise la propagation des erreurs d'arrondi dans les calculs et accélère et diminue le temps d'exécution.

Nous avons constaté que malgré la simplicité des méthodes récurrentes en pratique, leur implémentation numérique n'est pas une tâche facile puisque ces méthodes sont très sensibles aux valeurs initiales. Donc il faut bien choisir ces valeurs et prendre quelques précautions pour que l'estimateur ne s'éloigne pas trop de la vraie valeur du paramètre à estimer.

A travers une série de simulations, nous avons constaté que les estimations obtenues sont efficaces, tout de même nous avons comparé nos méthodes récursives en ligne à la méthode hors ligne MSE et nous avons remarqué que les estimations par nos méthodes sont plus efficaces. Nous avons remarqué aussi que plus la taille de l'échantillon est grande l'estimation est meilleure.

Comme perspective à notre travail, nous pensons à :

- Proposer d'autres méthodes d'estimation récursive en ligne plus efficace et surtout pour pouvoir faire des comparaisons.
- Faire des études plus poussées sur l'estimation des valeurs initiales.
- Etudier plus à fond les facteurs d'oubli.
- Appliquer ces techniques d'estimation récursive aux modèles ARMA-ARCH, ARCH-M, GARCH, ARMA-GARCH, ...
- Etc.

ANNEXE 1 :

Preuve de : $(A + bb^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 (A + bb^T)^{-1}(A + bb^T) &= \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \right) (A + bb^T) \\
 &= A^{-1}A + A^{-1}bb^T - \frac{A^{-1}bb^T A^{-1}A}{1 + b^T A^{-1}b} - \frac{A^{-1}bb^T A^{-1}bb^T}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + A^{-1}bb^T - \frac{A^{-1}bb^T}{1 + b^T A^{-1}b} - \frac{A^{-1}bb^T A^{-1}bb^T}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + \frac{A^{-1}bb^T + A^{-1}bb^T b^T A^{-1}b - A^{-1}bb^T - A^{-1}bb^T A^{-1}bb^T}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + \frac{A^{-1}bb^T b^T A^{-1}b - A^{-1}bb^T A^{-1}bb^T}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + \frac{b^T A^{-1}b A^{-1}bb^T - b^T A^{-1}b A^{-1}bb^T}{1 + b^T A^{-1}b} \quad (\text{car } b^T A^{-1}b \text{ est un scalaire}) \\
 &= Id
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (A + bb^T)(A + bb^T)^{-1} &= (A + bb^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \right) \\
 &= AA^{-1} - \frac{AA^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} + bb^T A^{-1} - \frac{bb^T A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id - \frac{bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} + bb^T A^{-1} - \frac{bb^T A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + \frac{-bb^T A^{-1} + bb^T A^{-1} + b^T A^{-1}bb^T A^{-1} - bb^T A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + \frac{b^T A^{-1}bb^T A^{-1} - bb^T A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \\
 &= Id + \frac{b^T A^{-1}bb^T A^{-1} - b^T A^{-1}bb^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}b} \quad (\text{car } b^T A^{-1}b \text{ est un scalaire}) \\
 &= Id
 \end{aligned}$$

ANNEXE 2 :

Programme récursive d'estimation des paramètres d'un modèle ARCH(1) réalisé avec le logiciel MATLAB 5.3.

```
clear all;close all;
%
% La valeur de l'ordre q
%
q=1;
%
% Lecture des données sur un fichier
%
Y=load('data.txt');
N=size(Y,1);
%
% Initialisation
%
for i=1:q+1,
    for j=1:q+1,
        if i==j
            P(i,j)=10000;
        else
            P(i,j)=0;
        end;
    end;
end;
for i=1:q+1,
    A(i,1)=0;
end;
lambda=0.95;
%
% Estimation récursive
%
for t=q+1:N,
    F=[1;Y(t-1)^2];
    L=lambda*P*F/(lambda+transpose(F)*P*F);
    A=A+L*(Y(t)^2-transpose(F)*A);
    P=P-L*transpose(F)*P;
    lambda=0.99*lambda+0.01;
    for j=1:q+1,
        if A(j)<0
            A(j)=-A(j);
        end;
    end;
    for j=2:q+1,
        while A(j)>1,
            A(j)=A(j)/2;
        end;
    end;
end;
end;
```

```
%  
% Affichage des résultats  
%  
fprintf('\nESTIMATION DES PARAMETRES D''UN MODELE ARCH(%i)  
:\n\n',q);  
for i=1:q+1,  
    fprintf('alpha%i=%d  ',i,A(i));  
end;  
fprintf('\n\n');
```

ANNEXE 3 :

Programme récursive d'estimation des paramètres d'un modèle PARCH(d,q) réalisé avec le logiciel MATLAB 5.3.

```
clear all;close all;
%
% La valeur de l'ordre q et de la période d
%
q=1;
d=2;
%
% Lecture des données sur un fichier
%
Y=load('data.txt');
N=fix(size(Y,1)/d);
%
% Initialisation
%
for i=1:d*(q+1),
    for j=1:d*(q+1),
        if i==j
            P(i,j)=10000;
        else
            P(i,j)=0;
        end;
    end;
end;
for i=1:d*(q+1),
    A(i,1)=0;
end;
lambda=0.95;
%
% Estimation récursive
%
for t=q+1:d*N,
    tau=fix((t-1)/d);
    i=mod(t-1,d);
    for k=1:d*(q+1),
        F(k,1)=0;
    end;
    F(i*(q+1)+1)=1;
    for k=1:q,
        F(i*(q+1)+k+1,1)=Y(d*tau-k+i+1)^2;
    end;
    L=lambda*P*F/(lambda+transpose(F)*P*F);
    A=A+L*(Y(t)^2-transpose(F)*A);
    P=P-L*transpose(F)*P;
    lambda=0.99*lambda+0.01;
```

```

for j=1:d*(q+1),
if A(j)<0
    A(j)=-A(j);
end;
end;
for j=1:d*(q+1),
    if mod(j-1,q+1)~=0
        while A(j)>1,
            A(j)=A(j)/2;
        end;
    end;
end;
end;
%
% Affichage des résultats
%
fprintf('\nESTIMATION DES PARAMETRES D''UN MODELE PARCH(%i,%i)
:\n\n',d,q);
for j=1:d,
    for i=1:q+1,
        fprintf('alpha%i%i=%d    ',j-1,i-1,A((j-1)*(q+1)+i));
    end;
end;
fprintf('\n\n');

```

Bibliographie

Aknouche, A. (2001), "Estimation en ligne et hors ligne des modèles ARMA périodiques", thèse de Magister, U.S.T.H.B., Alger, Algérie.

Andel, J. (1983), "Statistical analysis of periodic autoregression", *Aplikace Matematiky* 28 : 364-85.

Anderson, P. L. et A. V. Vecchia (1993), "Asymptotic results for periodic Autoregressive Moving Average Models". *Journal of Times Series Analysis*, 14 : 1-18.

Bentarzi, M. (1995), "Modèles de séries chronologique à coefficient périodiques", Thèse de doctorat Es-sciences, Institut de Mathématique, U.S.T.H.B., Alger, Algérie.

Bentarzi, M. (1998), "Model building problem of periodically m variate Moving Average processes", *Journal of Multivariate Analysis*, 66 : 1-22.

Bentarzi, M. (2000), " Predictive Density Order Selection of Periodic Autoregressive", à paraître.

Bentarzi, M. et M. Hallin (1994), "On the invertibility of Periodic Moving Average Models", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 15,3 : 263-268.

Bentarzi, M. et M. Hallin (1996), "Locally Optimal tests against Periodical Autoregression : Parametric and Nonparametric Approaches", *Journal of Econometric Theory*, 12 : 88-112.

Bentarzi, M. et M. Hallin(1998), "Spectral factorisation of periodically correlated MA(1) processes", *Journal of Applied Probability*, 35 : 46-54.

Bera, A. K., and M. L. Higgins (1992), "A test for conditional heteroscedasticity in time series models", *Journal of Time Series Analysis*, 13 : 501-519.

Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31: 327-367.

Bollerslev, T. et E. Ghysels (1996), "Periodic autoregressive conditional heteroscedasticity", *Journal of Business and Economic Statistics*, 14 (2) : 139-151.

Bollerslev, T., R. F. Engle et D. B. Nelson (1994), "financial market efficiency tests", in *M.H Pesaran et M. wickens Eds. Handbook of Applied Econometrics*, vol. 4, North Holand, Amsterdam.

Bollerslev, T., R. F. Engle et J. M. Wooldridge (1988), "A Capital Asset Pricing Model With Time Varying Covarianes", *Journal of Political Economy*, 96 : 116-31.

Bollerslev, T., R. Y. Chou et K. F. Kroner (1991), "ARCH modeling in finance " : A review of the theory and empirical evidence", *Journal of Econometrics*, 52 : 5-59.

Bollerslev, T., R. Y. Chou, N. Jayaraman et K. F. Kroner (1991), "Les modèles ARCH En Finance : Un point sur la théorie et les résultats empiriques", *Annales d'économie*, 24 : 1-59.

Boshnakov, G. N. (1996) "Recursive computation of the parametres of periodic autoregressive moving average processes" , *Journal of Time Series Analysis*, 17, 4 : 333-49.

Boukerdena, F. (2002), "Etude des modèles autorégressifs à erreurs ARCH classiques et périodiques", Thèse de Magister, U.S.T.H.B., Alger.

Brochwell, P. J. et R. A. Davis (1988), "Time series : Theory and methods", Springer Verlag, New York.

Box, G. E. P. et G. M. Jenkins (1976), "Time series analysis : forecasting and control", Holden Day, San Francisco (CA).

Cleveland, W. P. et G. C. Tiao (1979), "Modeling seasonal time series" *Revue économique appliquée*, 32 : 107-29.

Djuric, P. et M. Kay (1982), "Order selection of autoregressive models", *IEEE transaction on signal processing*, 40, 11: 2828-33.

Drosbeke, J. J., B. Fichet et P. Tassi (1994), "Modélisation ARCH", éditions Ellipses, Bruxelles.

Durbin, J. (1960), "the fitting of time series models", *Rev. Int. Inst. Stat.*, 28 : 233-44.

Elie, N. El-Karaoui, T. Jeantheau et A. Pfertzel (1992), "Les modèles ARCH sur les cours de change", *La Revue Banque*, n° 525, Supplément Banque et Marchés.

Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. Inflation " , *Econometrics*, 55 : 987-1008.

Engle, R. F. (1983), "Estimates of the Variance of US inflation based on the ARCH model", *Journal of Money Credit and Banking*, 15 : 296-301.

Engel, R. F. (2001), "GARCH 101: the use of GARCH models in applied econometrics", *Journal of Economic Perspectives*, 15 : 157-168.

Engle, R. F. et T. Bollerslev (1986), "Modeling the persistence of conditional variances", *Econometric Reviews*, 5 : 1-50.

Engle, R. F., D. F. Hendry et D. Trumble (1985), "Small sample properties of ARCH Estimators and tests", *Candanian Journal of Economics*, 18 : 66-93.

Engle, R. F., D.M. Lilien et P. R. Robins (1987), "Estimating time varying risk premia in the term structure : the ARCH-M model", *Econometrica*, 55 : 391-407.

Franses, P. H. (1997), "Periodicity and stochastic trends in economic time series", Oxford University Press.

Ghysel, E., A. Hall et H. S. Lee (1996), "On Periodic structures and testing for seasonal unit roots", *Journal of the American statistical association*, 91, 436 : 1551-59.

Gladyshev, E. G. (1961), "Periodically correlated random sequences", *Soviet Mathematics*, 2, : 385-8.

Gourieroux, C. (1992), "Modèle ARCH et applications financières ", Ed. Economica.

Hemis, R. (1999), "Sélection de l'ordre des modèles autorégressifs périodiques : Approche classique et approche bayésienne", Thèse de Magistère, Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B., Alger.

Laurent, S. et J. P. Urbain (2001), "L'apport des modèles périodiques à longue mémoire pour la modélisation de l'effet jour sur la volatilité des séries financières", rapport de recherche.

Milhoj, A. (1985), "The moment structure of ARCH processes", *Scand. J. Statist.* 12 : 281-92.

Nelson, D. B. (1990), "Conditional Heteroskedasticity in asset returns: A new approach", *Econometrica*, 59: 347-70.

Pantula, S. G. (1984) "Autoregressive Conditionally heteroskedastic Models", MS. Departement of statistics, North Carolina State University.

Pantula, S. G. (1986), "Modeling the persistence of conditional variances : a comment", *Econometric Reviews*, 5 : 71-74.

Pantula, S. G. (1988), "Estimation of autoregressive models with ARCH errors", *the Indian Journal of Statistics*, 50 : 119-139.

Polasek, W. (2002), "MCMC methods for periodic AR-ARCH models", rapport de recherche.

Salas, J. D., D. C. Boes et R. A. Smith (1982), Estimation of ARMA models with seasonal parameters", *Water Resources Research*, Vol. 18, n° 4 : 461-64.

Subba Rao, T. et M. M. Gabr(1984), "An introduction of bilinear models and Bispectral Analysis", *Lecture Note in Statistics*, 2, Springer-Verlag.

Tiao, G. C. et M. R. Grupe (1980), "Hidden periodic autoregressive moving average in time series data", *Biometrika*, 67 : 365-73.

Ula, T. A. et A. A. Smadi (1997), "Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average process as an eigenvalue problems", *water Resources Research*, 33, 8 : 1929-34.

Weiss, A. A. (1982), "Asymtotic theory for ARCH models: Stability, Estimation and Testing", Discussion Paper : 82-136 (University of California, San Diego, CA)

Weiss, A. A. (1984), "ARMA models with ARCH errors", *Journal of Time Series Anaysis*, 5 : 129-43.

Weiss, A. A (1986a), "Asymptotic theory for ARCH models: Estimation and Testing", *Econometric Theory*, 2 : 107-31.

Weiss, A. A. (1986b), "ARCH and bilinear time series models : comparaison and combination", *Journal of Business and Economic Statistics*, 4 : 59-70.

Young, P. (1984), "Recursive estimation and time series analysis: An Introduction, Springer-Verlag.

Zahaf, T. (1998), "Contribution à l'estimation des paramètres de séries chronologiques", Thèse de Doctorat Es-Sciences, Institut de Statistique et de Recherche Opérationnelle, Université Libre de Bruxelles, Belgique.

Zakoian, J. M. (1992), "Modèles ARCH : Une revue de la littérature", *Journal de la Société Statistique de Paris*, 133 : 44-55.