

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
Faculté de Mathématiques Département d'Analyse

---



Thèse présentée pour l'obtention du grade de Docteur  
en Mathématiques

Option : Analyse, Equations aux dérivées partielles.  
par :

**Boukra Mohammed**

**Problèmes aux limites non linéaires  
dans les espaces de Sobolev-Orlicz**

Soutenu publiquement, le 06/04/2011 ; devant le jury composé de :

<b>Mr. Dj. Teniou</b>	<b>Prof. à l'USTHB</b>	<b>Président</b>
<b>Mr. Y. Atik</b>	<b>Prof. à l'ENS-Kouba</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Mr. M.S. Moulay</b>	<b>Prof. à l'USTHB</b>	<b>Co-directeur de thèse</b>
<b>Mr. M. Morsli</b>	<b>Prof. à l'UMMTO</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. A. Mokrane</b>	<b>Prof. à l'ENS-Kouba</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. A. Kessab</b>	<b>M.C. (A) à l'USTHB</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. E.H. Ouazar</b>	<b>M.C. (A) à l'ENS-Kouba</b>	<b>Examineur</b>

# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur Youcef Atik, pour la confiance qu'il m'a accordée ainsi que pour sa disponibilité et sa rigueur dans la direction de ce travail.

Mes remerciements vont de même à Monsieur Mohamed Saïd Moulay, mon co-directeur de thèse, pour son entière disponibilité, son amabilité et également pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur Djamel Teniou en acceptant de présider ce jury.

Je remercie Monsieur Amor Kessab, d'avoir accepté de faire partie de ce jury et ainsi de consacrer de son temps à la lecture de cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs Abdelhafid Mokrane, Mohamed Morsli et El Hacene Ouazar d'avoir accepté de participer à ce jury et de m'avoir sans cesse prodigué des encouragements afin de terminer la rédaction de cette thèse.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier ma collègue de L'U.M.M.T.O, Madame Khellas, pour son aide à la réalisation technique de cette thèse.

## **Problèmes aux limites non linéaires dans les espaces de Sobolev-Orlicz.**

**Résumé :** Cette thèse présente quelques résultats d'existence et de régularité pour des problèmes elliptiques non linéaires, de type Leray-Lions, définis sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et avec condition au bord de Dirichlet homogène.

La première partie consiste en l'étude de l'existence d'une solution de type entropique, pour une classe d'opérateurs elliptiques liée au calcul de variations et dont les coefficients ont une croissance non nécessairement polynomiale, conduisant naturellement à une formulation de ces problèmes dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz. La particularité de notre étude vient de la forme de l'opérateur étudié et de la présence d'un terme  $b(x, u)$ , non borné en  $u$ , dans l'opérateur de divergence.

La deuxième partie traite des questions de régularité de solutions de certains problèmes aux limites non linéaires. Nous établissons ici, un résultat de sommabilité d'un problème aux limites associé à un opérateur de type Leray-Lions, à donnée mesure, généralisant un résultat de Boccardo-Gallouët, puis nous présentons un résultat de régularité d'un problème elliptique, à croissance sous quadratique par rapport au gradient, constituant une extension de deux travaux publiés récemment par Grenon-Murat-Porretta et Boccardo-Porzio.

**Mots clés :** Problèmes elliptiques non linéaires, espaces de Sobolev-Orlicz, solutions entropiques, régularité, sommabilité, croissance sous quadratique.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Espaces de Sobolev-Orlicz</b>	<b>21</b>
1.1 Introduction . . . . .	21
1.2 Fonctions de Young et N-fonctions . . . . .	22
1.2.1 Inégalité de Young . . . . .	22
1.2.2 Représentation intégrale d'une fonction de Young . . . . .	23
1.2.3 N-fonctions, définition et propriétés . . . . .	24
1.2.4 Relations de comparaison entre les N-fonctions . . . . .	25
1.2.5 La condition $\Delta_2$ . . . . .	26
1.3 Espaces d'Orlicz . . . . .	28
1.3.1 Inégalité de Hölder, dualité et norme d'Orlicz . . . . .	29
1.3.2 Convergence modulaire, topologies $\sigma(L_A, E_{\bar{A}})$ et $\sigma(L_A, L_{\bar{A}})$ . . . . .	30
1.3.3 Injections et approximation . . . . .	31
1.3.4 Equiabsolue-continuité et compacité . . . . .	32
1.3.5 Opérateurs de Nemytskii dans les espaces d'Orlicz . . . . .	33
1.4 Espaces de Sobolev-Orlicz . . . . .	37
1.4.1 Définitions et propriétés de base . . . . .	37
1.4.2 Propriétés d'approximation . . . . .	38
1.4.3 Dualité et systèmes complémentaires . . . . .	39
1.4.4 Opérateurs de troncature dans $W_0^1 L_A(\Omega)$ . . . . .	41
1.4.5 Inégalité de Poincaré . . . . .	42
1.4.6 Les théorèmes d'injection . . . . .	42
<b>2 Existence de solutions pour une classe d'équations elliptiques à données <math>L^1</math> dans les espaces de Sobolev-Orlicz</b>	<b>46</b>
2.1 Introduction . . . . .	46

---

2.2	Position du problème . . . . .	50
2.3	Preuve du théorème 2.2.3 . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Sommabilité des solutions d'une équation elliptique non linéaire à donnée mesure</b>	<b>66</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	La classe $\mathcal{F}_p$ . . . . .	68
3.3	Sommabilité des solutions du problème $(E)$ . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Equations elliptiques quasilineaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Présentation des résultats . . . . .	78
4.3	Preuve des théorèmes 4.2.2 et 4.2.4 . . . . .	80
4.3.1	Preuve du théorème 4.2.2 . . . . .	80
4.3.2	Preuve du théorème 4.2.4 . . . . .	87
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

# Introduction

Les travaux présentés dans cette thèse concernent les questions d'existence et de régularité de solutions de problèmes aux limites associés à quelques équations aux dérivées partielles elliptiques, faisant intervenir un opérateur de type Leray-Lions :

$$\mathcal{A}_0 u = -\operatorname{div} \hat{a}(\cdot, u, \nabla u)$$

où  $\hat{a} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  (avec  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ) est une fonction de Carathéodory satisfaisant des conditions de monotonie, de coercivité et de croissance; ces deux dernières conditions permettent de formuler ce type de problèmes dans des espaces fonctionnels appropriés.

Ainsi dans la première partie de ce travail, qui regroupe les chapitres 1 et 2, le cadre fonctionnel naturel choisi est celui des espaces de Sobolev-Orlicz; tandis que pour les travaux présentés dans la deuxième partie, constituée des chapitres 3 et 4, on utilisera le cadre fonctionnel habituel qui est celui des espaces de Sobolev standards.

Plus précisément, la première partie concerne les problèmes aux limites elliptiques dont les coefficients ont une croissance non nécessairement polynomiale. On y étudie les questions d'existence de solutions pour une classe assez générale d'opérateurs elliptiques de type  $\mathcal{A}_0$ , perturbés par un terme d'ordre un à croissance naturelle par rapport au gradient, noté  $g(x, u, \nabla u)$ . Cette liberté de croissance des coefficients de ces opérateurs, nécessite une formulation de ces problèmes dans un cadre fonctionnel assez général, qui est celui des espaces de Sobolev-Orlicz; toutefois, le prix à payer en est parfois lourd. En effet, l'utilisation de ces espaces est souvent assez complexe, du fait qu'ils ne possèdent pas les "bonnes propriétés" des espaces  $L^p(\Omega)$  et  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Parmi les raisons de cette complexité, citons entre autres :

- La non homogénéité des fonctions de Young générant ces espaces.
- Les normes sur ces espaces, sont définies de manière indirecte (norme de Luxembourg ou norme d'Orlicz), rendant souvent impossible l'utilisation des techniques connues dans les espaces  $L^p(\Omega)$ .
- La perte de la reflexivité, séparabilité et de l'absolue continuité en norme, dans le cas des croissances exponentielles ou logarithmiques, en d'autres termes, dans le cas où la fonction de Young générant ces espaces, ne vérifie pas les conditions  $\Delta_2$  ou  $\nabla_2$ , voir définition 1.2.10.
- L'opérateur associé à ce problème et défini sur ces espaces, n'est pas borné et est non partout défini ; cela justifie l'étude des propriétés d'un opérateur de type Nemytckii sur les espaces d'Orlicz, faite au chapitre 1.
- La nécessité d'introduire un cadre fonctionnel spécifique à ces espaces, appelé système complémentaire, composé de quatre espaces en dualité au lieu de deux espaces duaux, afin de parer à la non reflexivité de ces espaces en général ; ce type de système a été introduit dans [45] pour ensuite être développé de manière rigoureuse par J.-P.Gossez dans [51].
- Des injections de Sobolev-Orlicz pas très pratiques et même inopérantes dans les estimations à priori, de par la complexité de la conjuguée de Sobolev, exprimée sous forme de l'inverse d'une primitive d'une fonction dépendant de l'inverse de la fonction de Young générant l'espace de départ (en substance, la conjuguée de Sobolev de  $A$  notée  $A^*$  est définie par :  $A^{*-1}(r) = \int_0^r A^{-1}(t) / t^{1+\frac{1}{N}} dt$ ).
- L'utilisation d'un mode de convergence intermédiaire entre la convergence forte et la convergence faible\*, qui est la convergence modulaire (voir [71]), nécessaire dans l'approximation de ces espaces par des espaces de fonctions régulières (voir [54]).

Les remarques ci-dessus sont développées dans le premier chapitre.

En effet, le chapitre 1 est consacré à un exposé sommaire sur les espaces d'Orlicz et les espaces de Sobolev-Orlicz ainsi que les fonctions de Young et particulièrement les N-fonctions générant ces espaces ; on y présente les propriétés essentielles qui nous seront utiles au chapitre 2 et qui sont les suivantes :

- Les propriétés de croissance des N-fonctions.
- Les propriétés d'approximation et de densité, la dualité, la compacité et les injections continues et compactes sur ces espaces.
- Les propriétés d'approximation et de densité sont présentées à partir de

- différentes topologies définies sur ces espaces, à savoir, la topologie forte, la topologie faible\*, la topologie  $\sigma(\Pi L_A, \Pi L_{\bar{A}})$  et la convergence modulaire.
- On définit de même une notion analogue à l'équintégrabilité d'une suite  $(u_n)$  dans l'espace d'Orlicz  $L_A(\Omega)$  appelée equiabsolucontinuité en norme, ce qui permet de présenter une version généralisée du théorème de convergence de Vitali dans les espaces d'Orlicz.
  - On passe en revue les propriétés d'opérateurs de type Nemytckii définis sur un espace d'Orlicz ; on y étudie certaines conditions de continuité, de bornitude et de coercivité.

Un développement détaillé de ces résultats de base est présenté dans mon mémoire de magister [34], il s'inspire des monographies [1], [61], [62], [81] et des articles [44], [45], [51], [52], [53], [54], [55], [38] et [39].

Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'une classe de problèmes elliptiques non linéaires, à donnée  $L^1$ , dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz.

Cette étude concerne particulièrement la question d'existence de solutions d'un problème de Dirichlet associé à l'équation elliptique écrite sous la forme générale suivante :

$$\mathcal{A}_0 u + g(x, u, \nabla u) = f$$

où  $\mathcal{A}_0$  est un opérateur de type Leray-Lions,  $g$  un terme d'ordre inférieur à croissance naturelle par rapport au gradient, mais sans restriction de croissance en  $u$  et  $f \in L^1(\Omega)$ .

Plus précisément, on s'intéresse tout particulièrement au problème de Dirichlet associé à l'opérateur différentiel du type :

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u) + c(x, u) A(|\nabla u|)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a : \text{fonction définie sur } \mathbb{R}^* \text{ telle que } a(t) > 0, \forall t > 0 \\ \tilde{a}(t) = a(|t|)t \text{ continue, croissante et vérifie :} \\ \lim_{t \rightarrow 0} a(t)t = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t)t = +\infty \\ A(t) = \int_0^t a(s) s ds. \end{array} \right. \quad (H1)$$

Les hypothèses ci-dessus, sur la fonction  $a$ , permettent d'affirmer que  $A$  est une  $N$ -fonction générant l'espace d'Orlicz  $L_A(\Omega)$  et l'espace de Sobolev-Orlicz  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , cadre fonctionnel naturel dans lequel est formulé ce problème, de plus

la fonction :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \vec{a} : \xi &\longrightarrow a(|\xi|)\xi\end{aligned}$$

continue sur  $\mathbb{R}^N$ , s'exprime comme le gradient de :  $\xi \longrightarrow A(|\xi|)$ .

L'originalité dans ce travail consiste d'une part, en la présence d'un terme non borné en  $u$ , en l'occurrence  $b(x, u)$  (voir hypothèse  $(H_2)$  ci-dessous) et d'autre part, sur la forme de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , permettant de mettre en apparence de manière assez simple, le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev-Orlicz générés par la N-fonction  $A$ , et d'affirmer que l'équation :

$$\mathcal{A}u = f$$

avec la condition  $c(x, s) = \frac{\partial}{\partial s}b(x, s)$ , n'est autre que l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle :

$$I(u) = \int_{\Omega} b(x, u)A(|\nabla u|)dx - \int_{\Omega} f(x)u(x)dx.$$

De plus cet opérateur est une généralisation du p-laplacien, obtenu en prenant  $b \equiv 1$ ,  $c \equiv 0$  et  $a(s) = |s|^{p-2}$ ,  $\forall p > 1$ .

Notons qu'il existe dans la littérature, quatre formes de généralisations du p-laplacien et qui sont :

$$- \operatorname{div}(a(|\nabla u|)\nabla u) \tag{1}$$

cas particulier de l'opérateur  $\mathcal{A}$  avec  $b \equiv 1$  et  $c \equiv 0$ .

$$- \operatorname{div}(\tilde{a}(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \tag{2}$$

Dans ce cas, le cadre fonctionnel est généré par la N-fonction  $A(t) = \int_0^t \tilde{a}(s)ds$ .

$$- \operatorname{div}(A(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}) \tag{3}$$

Dans ce cas, la fonction génératrice apparaît de manière directe dans l'opérateur divergence.

Et finalement :

$$- \operatorname{div}(\bar{A}^{-1}A(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \tag{4}$$

Ici, la fonction génératrice apparaît avec l'inverse de sa conjuguée  $\bar{A}$ .

Ces formes de généralisation du p-laplacien sont dans un certain sens équivalentes. En effet, ils constituent des modèles types de l'opérateur de Leray-Lions défini par :

$$\mathcal{A}_0 u = -\operatorname{div} \hat{a}(\cdot, u, \nabla u)$$

où  $\hat{a} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  est une fonction de Carathéodory, vérifiant les conditions générales de croissance et de coercivité suivantes (voir [51]) :

**(i) Condition de croissance :** Il existe deux  $N$ -fonctions  $P$  et  $A$  vérifiant  $P \ll A$  à l'infini, des constantes  $k_i$ ,  $i = 1, 4$  positives et une fonction  $C \in E_{\bar{A}}(\Omega)$  telles que :

$$|\hat{a}(x, s, \xi)| \leq C(x) + k_1 \bar{P}^{-1} A(k_2 |s|) + k_3 \bar{A}^{-1} A(k_4 |\xi|)$$

et ceci  $\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  et p.p. en  $x \in \Omega$ .

**(ii) Condition de coercivité :**  $\exists \alpha > 0$ ,  $\exists \lambda > 0$  tels que :

$$\hat{a}(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha A\left(\frac{|\xi|}{\lambda}\right)$$

et ceci  $\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  et p.p. en  $x \in \Omega$ .

Toutefois, pour les quatre modèles ci-dessus, ces conditions sont réduites aux simples inégalités du type :

$$|\hat{a}(x, s, \xi)| \leq k_3 \bar{A}^{-1} A(k_4 |\xi|) \quad \text{et} \quad \hat{a}(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha A(|\xi|).$$

Ces conditions de croissance et de coercivité sont vérifiées pour les quatre modèles ci-dessus ; ceci est une conséquence directe de l'hypothèse  $(H_1)$  et de la série d'inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \frac{\bar{A}^{-1} A(|\xi|)}{|\xi|} \leq \frac{A(|\xi|)}{|\xi|^2} \leq \frac{\tilde{a}(|\xi|)}{|\xi|} = a(|\xi|) \leq \frac{A(2|\xi|)}{|\xi|^2} \leq 2 \frac{\bar{A}^{-1} A(2|\xi|)}{|\xi|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

(Voir proposition 1.2.7).

On introduit à présent une troisième condition, appelée condition de monotonie :

**(iii) Condition de monotonie :**

$$[\hat{a}(x, s, \xi) - \hat{a}(x, s, \eta)] [\xi - \eta] > 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \neq \eta.$$

La stricte convexité de la N-fonction  $A$  et les trois propriétés ci-dessous permettent d'affirmer que les trois premiers modèles précédents, vérifient la condition de monotonie.

1. La fonction :

$$\mathbb{R}^N : \xi \mapsto a(|\xi|)\xi \in \mathbb{R}^N$$

est le gradient de :

$$\mathbb{R}^N : \xi \longmapsto A(|\xi|) \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad A(t) = \int_0^t a(s)sd s.$$

2. De même que la fonction :

$$\mathbb{R}^N : \xi \mapsto \tilde{a}(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|} \in \mathbb{R}^N$$

est le gradient de :

$$\mathbb{R}^N : \xi \longmapsto A(|\xi|) \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad A(t) = \int_0^t \tilde{a}(s)ds.$$

3. Et finalement, la fonction :

$$\mathbb{R}^N : \xi \longmapsto A(|\xi|)\frac{\xi}{|\xi|^2} \in \mathbb{R}^N$$

est le gradient de :

$$\mathbb{R}^N : \xi \mapsto \int_0^{|\xi|} \frac{A(s)}{s} ds \in \mathbb{R}.$$

Par contre, cette condition de monotonie est imposée au quatrième modèle en général.

Les conditions **(i)** **(ii)** et **(iii)** ci-dessus permettent de généraliser le résultat d'existence de solutions faibles dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , dû à Leray-Lions (voir [66]), du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{a}(x, u, \nabla u) & = f \text{ dans } \Omega \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $p > 1$  et  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$  ( $p' = \frac{p}{p-1}$ ) où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $\hat{a}$  une fonction de Carathéodory satisfaisant les conditions suivantes :

**(i') Condition de croissance :** Il existe  $C \in L^{p'}(\Omega)$  et  $k > 0$  tels que pour tout  $s$  et  $\xi$  et presque tout  $x$  on ait :

$$|\hat{a}(x, s, \xi)| \leq k(C(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}).$$

(ii') **Condition de coercivité** : Il existe  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $s$  et  $\xi$  et presque tout  $x$  on ait :

$$\hat{a}(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p.$$

(iii') **Condition de monotonie** : Pour tout  $s, \xi$  et  $\eta$  avec  $\xi \neq \eta$  et presque tout  $x$  on a :

$$[\hat{a}(x, s, \xi) - \hat{a}(x, s, \eta)] [\xi - \eta] > 0.$$

En effet, J.P.Gossez, dans [51], [52] et [56], établit sous les conditions (i) (ii) et (iii), la surjectivité de l'opérateur  $T$  défini par :

$$\begin{array}{ccc} T : D(T) \subset W_0^1 L_A(\Omega) & \longmapsto & W^{-1} E_{\bar{A}}(\Omega) \\ u & \longmapsto & Tu \end{array}$$

et tel que :

$$\langle v, Tu \rangle = \int_{\Omega} \hat{a}(x, u, \nabla u) \nabla v dx, \forall v \in W_0^1 L_A(\Omega),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant le produit de dualité entre  $W_0^1 L_A(\Omega)$  et  $W^{-1} L_{\bar{A}}(\Omega)$  et

$$D(T) = \left\{ u \in W_0^1 L_A(\Omega) \text{ tel que } \hat{a}(x, u, \nabla u) \in (L_{\bar{A}}(\Omega))^N \right\}.$$

Toutefois une condition géométrique est imposée à l'ouvert  $\Omega$  et qui est la propriété du segment, permettant d'obtenir la  $\sigma(\Pi L_A, \Pi L_{\bar{A}})$ -densité de l'espace de Schwartz  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , propriété utilisée pour introduire le cadre variationnel dans les espaces de Sobolev-Orlicz (voir [51], [54] et les détails au chapitre 1).

Revenons à présent au problème de Dirichlet lié à l'équation générale

$$\mathcal{A}_0 u + g(x, u, \nabla u) = f$$

Commençons par rappeler les principaux résultats d'existence, obtenus dans le cadre des espaces de Sobolev standards.

Soit  $\mathcal{A}_0$  l'opérateur de Leray-Lions défini sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $g$  une fonction de Carathéodory à croissance naturelle par rapport à  $|\nabla u|$  et sans restriction de croissance en  $u$ , i.e :

(iv)  $|g(x, s, \xi)| \leq \gamma(|s|)(d(x) + |\xi|^p)$   
avec  $\gamma$  continue et croissante et  $d \in L^1(\Omega)$ .

On suppose de plus que  $g$  vérifie une condition d'absorption du type, condition de signe i.e. :

$$(v) \quad g(x, s, \xi) s \geq 0$$

ou condition de coercivité à l'infini i.e :

$$(vi) \quad \exists \sigma \geq 0 \text{ et } \lambda > 0 \text{ tels que } g(x, s, \xi) \text{sign } s \geq \lambda |\xi|^p, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq \sigma.$$

Notons que ces équations apparaissent naturellement dans le calcul de variations, généralisant les équations d'Euler-Lagrange et dans d'autres contextes, entre autres dans la recherche de solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi relatives aux problèmes de contrôle stochastique.

Ces problèmes ont donné lieu à de très nombreux travaux se basant généralement sur les résultats pionniers de Leray-Lions (cf. [66], [67]) et Browder (cf. [36], [37]) et utilisant des techniques d'approximation par troncature, des estimations a priori puis des passages à la limite justifiés par des propriétés de compacité.

Dans le cadre variationnel, i.e. quand  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , on citera particulièrement le résultat d'existence de Bensoussan, Boccardo et Murat [16] (voir aussi [19] et [28]), dont l'énoncé est le suivant :

Sous les hypothèses (i') (ii') et (iii') relatives à l'opérateur  $\mathcal{A}_0$ , la condition de signe  $g(x, s, \xi) s \geq 0$  et la condition de croissance (iv'), relatives à  $g$ , il existe au moins une solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega), \quad g(x, u, \nabla u) u \in L^1(\Omega) \\ \langle \mathcal{A}_0 u, v \rangle + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) v dx = \langle f, v \rangle \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{et pour } v = u. \end{array} \right.$$

L'extension de ces résultats au cas où  $f$  est seulement dans  $L^1(\Omega)$  a été traitée dans [24] (voir aussi [27]), en imposant, en plus de la condition de signe sur  $g$ , la condition de coercivité à l'infini ; cette dernière s'est avérée avoir un effet régularisant et a permis ainsi d'obtenir l'existence d'une solution dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Ce résultat est par la suite établi dans [25], sans la condition de signe.

Notons qu'en imposant uniquement la condition de signe à  $g$ , A. Porretta obtient plus tard dans [74], un résultat d'existence d'une solution appartenant seulement à  $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$  et non pas à  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , généralisant ainsi le résul-

tat de Boccardo-Gallouët (cf. [21], [22]) (voir aussi [79]) obtenu dans le cas  $g \equiv 0$  ou  $g \equiv g(x, s)$ .

Ces problèmes sont par la suite traités dans [29] (voir aussi [75]) avec un opérateur du type :

$$-\operatorname{div}(b(x, u) \nabla u) + g(x, u, \nabla u) \text{ et } f \in L^1(\Omega).$$

En effet, en imposant les deux conditions d'absorption à  $g$  et l'hypothèse suivante sur  $b$  :

$b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Carathéodory vérifiant :

$0 < \alpha \leq b(x, s) < \beta(s)$  avec  $\beta$  continue, croissante et non bornée éventuellement, L Boccardo, dans [29] établit l'existence d'une solution du problème de Dirichlet associé à cet opérateur, dans le sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,2}(\Omega), g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} b(x, u) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi) dx = \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi) dx \\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } \forall k > 0. \end{array} \right.$$

Par ailleurs l'étude de ces problèmes sans condition d'absorption, a été récemment traitée d'une part, pour des perturbés du type  $g(x, u, \nabla u) = g_1(u) |\nabla u|^p$ , et ce, en imposant une condition de sommabilité sur  $g_1$  ( $g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ ) (voir [32], [76], [78]) et d'autre part, pour des perturbés du Laplacien du type  $g(x, u, \nabla u) = \lambda u - \gamma |\nabla u|^q$ ,  $1 \leq q \leq 2$  et ce, en imposant une condition de régularité convenable sur  $f$  et une condition de petitesse sur la norme de  $f$  dans  $L^{\frac{N}{q}}(\Omega)$ , dans le cas où  $\lambda = 0$  (voir chapitre 4).

Après cet historique très succinct de l'étude des problèmes elliptiques de type Leray-Lions dans le cadre des espaces de Sobolev classiques, nous passons à un historique de l'étude de ces mêmes problèmes dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz. Il s'agit du cas où les coefficients de  $\mathcal{A}_0$  et  $g$  sont relaxés, dans le sens où les conditions de croissance et de coercivité de ces opérateurs, ne sont plus polynomiales (voir les conditions **(i)** et **(ii)**), pour  $\mathcal{A}_0$  et  $g$  vérifie la condition de croissance suivante :

$$\mathbf{iv)} \quad |g(x, s, \xi)| \leq \gamma(|s|)(d(x) + A(|\xi|))$$

avec  $\gamma$  continue et croissante et  $d \in L^1(\Omega)$ .

Récemment, de nombreux travaux consacrés à l'existence de solutions de ces problèmes, dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz, ont été effectués principalement par une équipe de la faculté des sciences DharMahraz de Fes, et ceci sous l'impulsion de A. Benkirane. (voir [10], [11], [12], [13], [46], [47], [87]), se basant généralement sur les résultats pionniers d'existence de solutions, selon l'approche variationnelle, des problèmes de Dirichlet associés à l'équation  $\mathcal{A}u = f$  dans le cas  $g \equiv 0$  ou  $g \equiv g(x, s)$ , et développés principalement par J.-P. Gossez (voir [44], [51], [52], [53], [56], [63], [64], [72]), ainsi que sur l'adaptation des techniques utilisées pour ces problèmes, dans le cadre des espaces de Sobolev classiques.

En effet dans le cadre variationnel (i.e. quand  $f \in W^{-1}E_{\bar{A}}(\Omega)$ ) et sous les conditions **(i)**-**(iv)** et la condition de signe, un résultat d'existence de solution du problème de Dirichlet fut établi dans [11], mais avec une restriction sur la croissance de  $A$  et qui est la condition  $\Delta_2$ .

Ce résultat fut ensuite généralisé dans [46], au cas d'une N-fonction  $A$  quelconque.

Dans le cas où  $f \in L^1(\Omega)$ , un premier résultat d'existence est présenté dans [12] mais sous des conditions restrictives, et qui sont :

les deux conditions d'absorption de  $g$  et la condition  $\Delta_2$ ; et ensuite dans [13] sous la condition de signe de  $g$  et la condition  $\Delta_2$ .

Le résultat de [13] fut ensuite généralisé dans [47] au cas d'une N-fonction  $A$  quelconque; toutefois, dans ces deux derniers travaux, seule la régularité des tronquées des solutions est établie i.e. :  $T_k(u) \in W_0^1 L_A(\Omega)$  avec  $T_k(s) = \frac{1}{2} \{|s+k| - |s-k|\}$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k > 0$ .

Par la suite, dans un article publié en 2007 (voir [87]), un résultat d'existence de solutions de ce problème, appartenant à  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , est présenté sans la condition  $\Delta_2$ , mais avec la condition de coercivité à l'infini de  $g$  :

$$\mathbf{vi)} \quad \exists \sigma \geq 0 \text{ et } \lambda > 0 \text{ tels que } g(x, s, \xi) \text{ sign } s \geq \lambda A(|\xi|), \forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq \sigma.$$

Cette condition, qui a un effet régularisant, permet d'établir que les solutions appartiennent à l'espace d'énergie  $W_0^1 L_A(\Omega)$ .

Cependant, signalons que dans ce travail, il n'est pas du tout clair que la condition de coercivité **(vi)** soit conservée pour l'approximé  $g_n$  de  $g$  (voir détails au chapitre 2). Cette difficulté est néanmoins aplaniée dans notre travail, par l'utilisation de la condition de signe **(v)**.

Notons que dans tous les travaux énumérés ci-dessus, l'opérateur modèle considéré est du type (4) i.e. :  $-\text{div}(\bar{A}^{-1} A(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|})$ .

Ainsi, en considérant dans notre travail, l'opérateur :

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u) + c(x, u) A(|\nabla u|),$$

nous établissons un résultat d'existence de solutions du problème de Dirichlet, avec une condition de croissance plus générale que la condition (i) associée à la fonction  $\hat{a}$ .

De plus, les conditions (ii) et (iii) sont naturellement vérifiées grâce à l'hypothèse  $(H_1)$ , tandis que les conditions (iv) (v) et (vi) s'expriment plus clairement sur la fonction  $c$  dans l'hypothèse  $(H_2)$  suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \text{ et } c : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ des fonctions de Carathéodory} \\ \text{telles que pour p.p } x \in \Omega \text{ et } \forall s \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq b(x, s) \leq \beta(s) \\ |c(x, s)| \leq \gamma(s) \text{ avec } \beta \text{ et } \gamma \text{ deux fonctions positives continues} \\ \text{croissantes, bornées ou non et } \exists \sigma \geq 0, \exists \lambda > 0, \text{ tels que :} \\ c(x, s) \operatorname{sign} s \geq \lambda, \forall s, |s| \geq \sigma \text{ et } c(x, s) \operatorname{sign} s \geq 0. \forall s \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (H_2)$$

Une classe d'opérateurs de type  $\mathcal{A}$  pour laquelle les hypothèses  $(H_2)$  sont vérifiées, est donnée par :

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}[(1 + |u|^m) a(|\nabla u|) \nabla u] + \lambda |u|^{r-2} u A(|\nabla u|)$$

avec  $m > 0$  et  $r > 1$ . En particulier dans le cas où  $m = r = \lambda$ , alors  $\mathcal{A}u = f$  est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle :

$$I(v) = \int_{\Omega} (1 + |v|^m) A(|\nabla v|) dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

On démontre alors le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $f \in L^1(\Omega)$ . Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , le problème de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

admet au moins une solution dans le sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^1 L_A(\Omega), c(x, u) A(|\nabla u|) \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx + \int_{\Omega} c(x, u) A(|\nabla u|) T_k(u - \varphi) dx \\ = \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi) dx \\ \text{et ce } \forall \varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } \forall k > 0. \end{array} \right.$$

**Remarques :**

D'une part, de par la croissance non contrôlée en  $u$  de la fonction  $b(x, u)$ , le terme  $b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u$  n'appartient pas nécessairement à  $L^1(\Omega)$  (et ceci, même dans le cas standard où  $a \equiv \text{constante}$ )

D'autre part, même dans le cas où la fonction  $b(x, u)$  est bornée, on n'a pas nécessairement  $b(x, u_n) a(|\nabla u_n|) \nabla u_n$  borné dans  $L^1(\Omega)$ , pour une suite  $(u_n)$  bornée dans  $W_0^1 L^1(\Omega)$ .

Des remarques ci-dessus, la définition de solutions faibles (ou au sens des distributions) de ce problème, n'a pas de sens; ce qui a motivé l'introduction d'une notion de solution par une formulation de type entropique.

Differentes notions de solutions sont apparues ces dernières années notamment quand ces équations sont mal posées dans le cadre des solutions faibles, comme c'est le cas pour ce problème et surtout quand le second membre est peu régulier et ceci, afin de parer au problème de non unicité des solutions; on citera :

- la formulation entropique introduite dans [9] adaptée aux seconds membres  $L^1$  mais pas aux mesures quelconques.
- La formulation SOLA (Solution obtenue comme limite d'approximations) introduite dans [40].
- Les solutions renormalisées ayant pour origine l'article de R. Diperna-P.-L. Lions [43] et adaptées au cas des problèmes elliptiques à donnée  $L^1$  par P.-L. Lions et F. Murat (voir [70]).

Toutefois ces concepts de solutions se sont avérés équivalents dans le cas de la donnée  $L^1$  et ont permis d'obtenir l'unicité.

Finalement dans un article publié en 1999 (voir [42]), ces auteurs introduisent une notion de solutions renormalisées avec une mesure quelconque; ils y établissent un résultat d'existence mais seulement quelques résultats d'unicité partielles (c'est à dire lorsque deux solutions sont "comparables").

La deuxième partie, composée de deux chapitres, traite de questions de sommabilité et de régularité de solutions.

Précisément, au chapitre 3, on présente un résultat de sommabilité du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{a}(x, u, \nabla u) & = \mu \text{ dans } \Omega \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}_0 u = -\operatorname{div} \hat{a}(\cdot, u, \nabla u)$  est l'opérateur de type Leray-Lions, i.e avec  $\hat{a}$ , une fonction de Carathéodory définie de  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  à valeur dans  $\mathbb{R}^N$  et vérifiant les

conditions de coercivité, de croissance et de monotonie (i') (ii') et (iii') introduites précédemment.

$\mu \in M(\Omega) = (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$  l'espace des mesures de Radon, bornées sur  $\Omega$ .

On suppose que  $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$ .

La condition  $p \leq N$  n'est pas une restriction, car si  $p > N$  alors  $M(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ , cette inclusion nous ramène alors au cadre variationnel résolu par Leray-Lions. Ainsi dans le cas  $p \leq N$ , on sort du cadre variationnel.

Le premier résultat d'existence (et même d'unicité) est obtenu par Stampacchia en 1965 dans [82], grâce à une méthode de dualité, valable uniquement dans le cas d'un opérateur linéaire et où il y établit l'existence d'une solution  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  avec  $q < \frac{N}{N-1}$ .

La régularité de cette solution s'est avérée optimale dans le sens que  $u \notin W_0^{1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)$  et ceci par le biais de la solution fondamentale du Laplacien dans la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ .

Dans le cas d'un opérateur de Leray-Lions non linéaire, le premier résultat d'existence d'une solution au sens des distributions, fut établi plus tard, en 1989, par Boccardo-Gallouët dans [21] (voir aussi [22] et [79]).

Pour résoudre ce problème, ces auteurs utilisent une méthode d'approximation consistant à introduire une suite de problèmes à données régulières dont les solutions vérifient des estimations a priori et un résultat de compacité sur les gradients, permettant ainsi de passer à la limite pour obtenir une solution du problème initial.

les solutions ainsi obtenues appartiennent à  $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ . Comme pour le

cas linéaire, la régularité de ces solutions s'est avérée optimale dans le sens que  $u \notin W_0^{1,\frac{N(p-1)}{N-1}}(\Omega)$  et ceci par le biais de la solution fondamentale du  $p$ -laplacien dans la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ .

Notons que la condition  $p > 2 - \frac{1}{N}$  imposée dans les travaux ci-dessus et qui est équivalente à  $\frac{N(p-1)}{N-1} > 1$ , permet de trouver des solutions dans le cadre des espaces de Sobolev  $W_0^{1,q}(\Omega)$  avec  $q \in [1, \frac{N(p-1)}{N-1}[$ .

Le résultat d'existence de solutions pour les valeurs de  $p$  proches de 1, c'est à dire pour  $p \in ]1, 2 - \frac{1}{N}]$ , rentrent dans le cadre de la formulation de type entropique introduite dans [9] et font intervenir un nouveau cadre fonctionnel du type :  $T_0^{1,p}(\Omega) = \{u \text{ mesurable} : T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k > 0\}$  (voir aussi [5],[6], [7], [80], pour un cadre fonctionnel analogue appelé  $T$ -ensembles.).

Par la suite, dans [23], Boccardo-Gallouët raffinent la régularité des solutions du problème de Dirichlet à donnée mesure ; ils obtiennent le résultat de sommabilité suivant :

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &\in L^{q_0^*}(\Omega) \text{ et } \nabla \Phi_0(u) \in L^{q_0}(\Omega) \\ \text{avec } q_0 &= \frac{N(p-1)}{N-1} \text{ et } \Phi_0(s) = \frac{s}{\text{Log}^\beta(2+|s|)}, \forall \beta > \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous présentons une généralisation de ce résultat.

En effet, on introduit une classe de fonctions impaires notée  $\mathcal{F}_p$ , de la forme :

$$\Phi_A(t) = \left[ \int_0^t \frac{d\tau}{\{A(\tau)\}^{\frac{1}{p}}} \right]^{p'}, \quad t \geq 0, \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

où  $A$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , paire, positive sur  $]0, +\infty[$  et vérifie les propriétés suivantes :

- (a)  $\int_d^{+\infty} \frac{dt}{A(t)} < +\infty$ , pour  $d > 0$
- (b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = +\infty$
- (c)  $A$  vérifie la propriété de monotonie suivante : il existe deux réels  $\beta > 0$  et  $t_0 \geq 0$  tels que  $A(t_2) \geq A(t_1)$ ,  $\forall t_1, t_2$  vérifiant  $t_2 > t_1 \geq t_0$ .
- (d) Si  $A(0) = 0$ , on suppose de plus qu'il existe une constante  $c$  telle que  $A(t) \geq c|t|$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  et  $\Phi'_A(0)$  finie.

On démontre alors le résultat suivant :

Sous les conditions (i') (ii') et (iii') avec  $2 - \frac{1}{N} < p < N$ , le problème de Dirichlet à donnée mesure :

$$\begin{cases} -\text{div } \hat{a}(x, u, \nabla u) &= \mu \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution  $u$  vérifiant la propriété de sommabilité suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_A(u) &\in L^{q_0^*}(\Omega) \text{ et } \nabla \Phi_A(u) \in L^{q_0}(\Omega) \\ \text{avec } q_0 &= \frac{N(p-1)}{N-1}, \quad \forall \Phi_A \in \mathcal{F}_p. \end{aligned}$$

Ce résultat généralise celui de Boccardo-Gallouët par le fait que la classe  $\mathcal{F}_p$  contient la fonction  $\Phi_0$  ainsi qu'une suite de fonctions  $(\Phi_m)_{m \in \mathbf{N}^*}$  que l'on exhibera et qui croient plus rapidement que  $\Phi_0$  au voisinage de l'infini, et ceci dans le sens que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_m(t)} = 0$ .

Ce chapitre, en collaboration avec Youcef Atik, a fait l'objet d'une publication en 2003 dans "Journal of Convex Analysis" (voir [4]).

On y présente en plus, un résultat de sommabilité pour un problème parabolique associé à l'opérateur de Leray-Lions avec comme second membre et condition initiale, deux mesures de Radon bornées, généralisant ainsi le travail publié en 2000 par Li Feng-Quan et Li Guang-Wei dans ce même journal (voir [68]).

Au chapitre 4, on s'intéresse particulièrement aux questions d'existence et de régularité de solutions faibles de problèmes de type elliptiques dont le terme d'ordre inférieur est à croissance sous quadratique par rapport au gradient, mais sans condition d'absorption.

Dans un premier temps, on considère les problèmes de Dirichlet dont le prototype est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha_0 u = \gamma |\nabla u|^q + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N > 2$ ).

Ce type de problèmes a été abordé dans différents travaux récents et a donné lieu, selon le type de croissance du gradient et selon la régularité de  $f$ , à plusieurs résultats d'existence et d'unicité des solutions. On citera particulièrement :

- Les travaux [17], [18], et [33], dans le cas où  $0 \leq q \leq 1$ .
- Le cas où le gradient est à croissance quadratique, mais avec la donnée  $f \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$  (cette condition de régularité sur  $f$  s'est révélée nécessaire pour la solvabilité de ce problème) qui a été traité dans [49], [50] si  $\alpha_0 = 0$  et dans [41] si  $\alpha_0 > 0$  (voir aussi [20], dans le cas où  $f \in L^m(\Omega)$  avec  $m > \frac{N}{2}$ ).
- Par contre le cas  $1 < q < 2$  est resté ouvert jusqu'en 2006, où dans une note C.R.A.S (voir [57]), N. Grenon, F. Murat et A. Porretta parviennent, par une nouvelle technique d'estimations a priori, à obtenir un résultat d'existence d'une solution dans le cas où  $1 + \frac{2}{N} \leq q < 2$  (condition permettant de chercher des solutions dans  $H_0^1(\Omega)$ ) et avec  $f \in L^{\frac{N}{q'}}(\Omega)$ . Cette solution vérifie de plus la condition de régularité suivante :

$$|u|^{\sigma_0} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{\left(\frac{N}{q'}\right)^{**}}{2^*}.$$

Dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ , une condition sur la taille de  $f$  est nécessaire, elle

s'exprime dans ce cas par :

$$\|f\|_{\frac{N}{q}} \leq c_0 \gamma^{-\frac{1}{q-1}} \text{ avec } c_0 \text{ une constante dépendante de } N \text{ et de } q.$$

La donnée  $f \in L^{\frac{N}{q}}(\Omega)$  est la régularité minimale à imposer à  $f$  pour la solvabilité de ce problème, (Voir [3] et [58]); de plus ces travaux montrent qu'une condition sur la taille de la donnée  $f$  est, comme pour sa régularité, nécessaire pour l'existence d'une solution de ce problème quand  $\alpha_0 = 0$ . De manière précise il y est démontré que  $f$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi^{q'}(x) dx \leq c_q \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{q'} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La restriction  $1 + \frac{2}{N} \leq q$  (équivalente à  $\sigma_0 \geq 1$ ) permet de chercher des solutions dans  $H_0^1(\Omega)$ , étant donné que  $1 + \frac{2}{N} \leq q \Leftrightarrow \frac{N}{q'} \geq \frac{2N}{N+2}$  et donc  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

Notons de plus qu'un résultat d'unicité, sous la condition de régularité :  $|u|^{\sigma_0} \in H_0^1(\Omega)$  avec  $\sigma_0 = \frac{(\frac{N}{q'})^{**}}{2^*}$ , est obtenu dans [8] et ceci suite au résultat d'existence de [57] et que ce résultat d'unicité tombe en défaut sans cette condition de régularité, comme le montre l'exemple suivant :

Soit  $\Omega = B(0, 1)$  la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ ; alors pour  $q > 1 + \frac{2}{N}$ , les fonctions  $u(x) = M_q (|x|^{-\alpha} - 1)$  avec  $\alpha = \frac{2-q}{q-1}$  et  $M_q = \frac{[N-1-(\alpha+1)]^{\frac{1}{q-1}}}{\alpha}$  sont solutions au sens des distributions du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Ces solutions vérifient  $|u|^\rho \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall \rho < \sigma_0$  mais  $|u|^{\sigma_0} \notin H_0^1(\Omega)$ . En fait la seule solution vérifiant  $|u|^{\sigma_0} \in H_0^1(\Omega)$ , est la solution triviale.

- Ces résultats ont été de même établis dans [48] en utilisant les techniques de réarrangement et de comparaison.

En ce qui nous concerne, on s'est intéressé à la régularité des solutions de ce problème, pour  $f \in L^m(\Omega)$  quand  $m$  varie dans l'intervalle  $[\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[$  avec  $1 + \frac{2}{N} \leq q < 2$

On montre en effet que cette nouvelle technique d'estimation a priori présentée dans [57], s'applique de même pour un  $m$  quelconque dans l'intervalle  $[\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[$ ;

ce qui nous permet d'obtenir l'existence d'une solution vérifiant la régularité suivante :

$$|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{m^{**}}{2^*} \quad \forall m \in \left[ \frac{N}{q'}, \frac{N}{2} \right[$$

Dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ , une condition sur la taille de  $f$  est nécessaire, elle s'exprime de même dans ce cas par :

$$\|f\|_m \leq c_0 \gamma^{-\frac{1}{q-1}} \quad \text{avec } c_0 \text{ une constante dépendante de } N, q \text{ et de } m.$$

Notons qu'en remplaçant le terme  $\alpha_0 u$  par  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$ , avec  $p \geq 1$ , dans l'équation ci-dessus, on obtient les mêmes résultats et ceci indépendamment de la valeur de  $p$ .

Toutefois, des valeurs de  $p$  suffisamment grandes permettent de résoudre ce problème, sans imposer la condition de régularité sur  $f$  ni même la condition de petitesse sur la taille de  $f$ ; de plus le terme  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$  possède un effet régularisant pour des valeurs de  $p$  suffisamment grandes.

Par suite et parallèlement aux résultats obtenus dans [57], L. Boccardo et M.M. Porzio, dans un article publié en 2006 (voir [31]), étudient le problème de Dirichlet associé à l'équation :

$$-\Delta u + \alpha_0 |u|^{p-1} u = \gamma |\nabla u|^q + f$$

avec  $p > 1$  et plus précisément, sous la condition :

$$p > \frac{q}{2-q} \quad \text{et} \quad 1 < q < 2$$

Cette condition sur  $p$  leur permet d'établir l'existence d'une solution de ce problème, sans la condition de petitesse sur la taille de  $f$  et pour  $f \in L^m(\Omega)$  et ceci  $\forall m \geq 1$ , contrairement au cas où  $p = 1$  où il est nécessaire d'imposer  $m \geq \frac{N}{q}$ .

En réalité, ceci s'explique par le fait que le terme  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$ , pour  $p > \frac{q}{2-q}$ , permet d'absorber le terme dépendant du gradient, i.e.  $\gamma |\nabla u|^q$ , retrouvant ainsi les résultats classiques d'existence et de régularité des solutions du problème de Dirichlet associé à l'équation :

$$-\Delta u + \alpha_0 |u|^{p-1} u = f.$$

En reprenant les techniques d'estimation a priori utilisées dans cet article, on présente de manière plus précise, le résultat d'existence et de régularité des solutions de ce problème, dans le cas  $m \in \left[ \frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2} \right[$ , retrouvant ainsi la régularité

obtenue dans le cas  $p = 1$ , à savoir :

$$|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{m^{**}}{2^*}, \quad \forall m \in \left[ \frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2} \right].$$

On montre de plus que :

$$u \in L^{mp}(\Omega), \quad \forall m \in \left[ \frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'} \right].$$

Notons que dans cet intervalle, la sommabilité  $L^{mp}(\Omega)$  améliore celle obtenue précédemment et ceci, bien entendu, dans le cas où celui-ci est non vide, i.e pour  $p > \frac{N+2}{N-2}$ . En effet, la sommabilité  $L^{m^{**}}(\Omega)$ , déduite de la régularité précédente, i.e.  $|u|^{\frac{m^{**}}{2^*}} \in H_0^1(\Omega)$  et de l'injection de Sobolev, est plus forte que la sommabilité  $L^{mp}(\Omega)$  dans l'intervalle  $[\frac{N}{2p'}, \frac{N}{2}[$ , du fait que  $m \geq \frac{N}{2p'} \Leftrightarrow m^{**} \geq mp$ .

En particulier si  $q \geq 1 + \frac{2}{N}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |u|^{\frac{m^{**}}{2^*}} &\in H_0^1(\Omega), \quad \forall m \in \left[ \frac{N}{q}, \frac{N}{2} \right[ \\ u &\in L^{mp}(\Omega), \quad \forall m \in \left[ \frac{N}{q}, \frac{N}{2p'} \right]. \end{aligned}$$

La condition  $p > \frac{q}{2-q}$ , étant équivalente à  $q' > 2p'$ , permet d'affirmer dans ce cas, que l'intervalle  $[\frac{N}{q}, \frac{N}{2p'}[$  est non vide.

Ce dernier chapitre, a fait l'objet d'une communication au R.A.M.A. VI (voir [35]).

# Chapitre 1

## Espaces de Sobolev-Orlicz

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés au chapitre 2, concernant les espaces d'Orlicz et de Sobolev-Orlicz. Pour ne pas alourdir l'exposé, on a présenté des versions particulières de ces résultats, en considérant uniquement le cas où l'ouvert  $\Omega$  dans lequel sont définis ces espaces, est borné et de plus, seuls les espaces de Sobolev-Orlicz d'ordre un sont traités.

Les espaces d'Orlicz  $L_A(\Omega)$  ainsi que les espaces de Sobolev-Orlicz  $W^1L_A(\Omega)$ , extension naturelle des espaces  $L^p(\Omega)$ , respectivement des espaces de Sobolev standards  $W^{1,p}(\Omega)$ , sont générés par une fonction de Young  $A$  généralisant les fonctions polynomiales  $A_p(t) = |t|^p$  génératrices des espaces  $L^p(\Omega)$  et  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Les propriétés topologiques de ces espaces dépendent étroitement de la nature de la croissance de la fonction de Young  $A$ , ainsi une étude de ces fonctions et particulièrement des N-fonctions, leur conjuguées et leur propriétés de croissance, est présentée dans la section **1.2**.

Dans la section **1.3**, après la définition des espaces d'Orlicz  $L_A(\Omega)$  et  $E_A(\Omega)$ , nous donnerons leur propriétés topologiques, particulièrement les conditions de séparabilité, de réflexivité, les questions de dualité, les injections continues et les propriétés d'approximation, nous présenterons aussi un résultat de compacité. On termine cette section par l'étude d'une classe d'opérateurs du type Nemytckii définie sur un espace d'Orlicz ; on y étudie certaines conditions de continuité, de bornitude et de coercivité.

Pour la présentation de ces résultats, on s'est particulièrement inspiré des

monographies de base [1], [61], [62], [81], et des articles [54] et [55] (voir aussi [34]).

Enfin dans la dernière section, après une présentation sommaire de propriétés classiques des espaces de Sobolev-Orlicz contenues dans [1], on fait une synthèse des derniers résultats obtenus principalement par J.-P. Gossez (voir [51] et [54]), sur les propriétés de dualité utilisant la notion de système complémentaire et sur les propriétés d'approximation utilisant des topologies autres que celle définie par la norme, à savoir la topologie faible\*, la topologie  $\sigma(\Pi L_A, \Pi L_{\bar{A}})$  et la convergence modulaire (ce dernier concept introduit dans [71] s'avère le plus adapté dans le cadre de ces espaces.) et finalement, des résultats d'injections continues et compactes établies par Donaldson-Trudinger dans [45], [86], et celles plus récentes de A. Cianchi dans [38] et [39], clôtureront ce chapitre.

## 1.2 Fonctions de Young et N-fonctions

**Definition 1.2.1** *On appelle fonction de Young une application  $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ , convexe avec  $A(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = +\infty$ .*

Dans toute la suite, on utilisera comme définition de Young son prolongement à  $\mathbb{R}$  en une fonction paire.

**Definition 1.2.2** *Soit  $\bar{A}$  la fonction associée à  $A$ , définie par :*

$$\begin{aligned} \bar{A} : \mathbb{R} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ s &\mapsto \bar{A}(s) = \sup_{t>0} \{|s|t - A(t)\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\bar{A}$  est appelée complémentaire ou conjuguée de  $A$ .

On vérifie que  $\bar{A}$  est aussi une fonction de Young, de plus :

$$A(t) = \sup_{s>0} \{|t|s - \bar{A}(s)\}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } A = \bar{\bar{A}}.$$

### 1.2.1 Inégalité de Young

De la définition 1.2.2 on déduit immédiatement l'inégalité suivante :

$$st \leq A(t) + \bar{A}(s), \forall s, \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

appelée inégalité de Young.

### 1.2.2 Représentation intégrale d'une fonction de Young

De par sa convexité, une fonction de Young admet la représentation intégrale suivante :

Si  $A$  est une fonction de Young, il existe une fonction  $\tilde{a}$ , appelée densité de  $A$ , telle que :

$$\tilde{a} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ \text{ croissante vérifiant } \tilde{a}(0) = 0 \text{ et } A(t) = \int_0^{|t|} \tilde{a}(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

La proposition suivante permet de définir une relation plus pratique que celle définie dans (1.1) entre  $A$  et  $\overline{A}$  et plus précisément, entre leurs densités respectives, (voir [81]).

**Proposition 1.2.3** *Soit  $A$  une fonction de Young de densité  $\tilde{a}$ , alors  $\overline{A}$  est déterminé par la représentation intégrale suivante :*

$$\overline{A}(s) = \int_0^{|s|} \tilde{a}^{-1}(v) dv. \quad (1.4)$$

La notation  $\tilde{a}^{-1}$  désigne l'inverse généralisé de  $\tilde{a}$ , de manière précise :

$$\tilde{a}^{-1}(s) = \sup \{t, \tilde{a}(t) \leq s\} = \inf \{t, \tilde{a}(t) > s\}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} s\tilde{a}^{-1}(s) &= A(\tilde{a}^{-1}(s)) + \overline{A}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \\ t\tilde{a}(t) &= A(t) + \overline{A}(\tilde{a}(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Exemple 1.2.4** *Fonctions de Young générant les espaces  $L^p$  :*

$$A_p(t) = \frac{|t|^p}{p}, \quad 1 \leq p \leq +\infty \quad \text{et} \quad A_\infty(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ +\infty, & t > 1. \end{cases}$$

On vérifie à l'aide de (1.1) que  $\overline{A}_p = A_{p'}$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . L'exemple 1.2.4 ci-dessus, montre que la conjuguée d'une fonction de Young continue, peut être discontinue et avoir un saut à l'infini, c'est le cas de  $A_\infty$ .

Ainsi pour conserver les propriétés de continuité pour une fonction de Young et sa conjuguée et le fait qu'elles ne prennent que des valeurs finies, on restreindra par la suite notre étude à une classe particulière de fonctions de Young, excluant entre autres les fonctions  $A_1$  et  $A_\infty$ .

Les éléments de cette classe, appelés N-fonctions s'obtiennent par l'addition d'une condition de croissance.

### 1.2.3 N-fonctions, définition et propriétés

**Definition 1.2.5** Une N-fonction est une fonction de Young, continue sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$A(t) > 0, \forall t > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = +\infty.$$

**Definition 1.2.6** Une fonction convexe  $Q$  est dite partie principale d'une N-fonction  $A$ , s'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $Q(t) = A(t), \forall t \geq t_0$ .

On montre ([61]) que toute fonction convexe, vérifiant  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Q(t)}{t} = +\infty$  est la partie principale d'une N-fonction  $A$ , de manière précise :  $\exists \alpha > 1, \exists t_0 > 0$  tel que  $A(t) = \begin{cases} \frac{Q(t_0)}{t_0^\alpha} |t|^\alpha & \text{pour } |t| \leq t_0 \\ Q(t) & \text{pour } |t| \geq t_0 \end{cases}$ , soit une N-fonction.

On regroupe dans la proposition suivante, quelques propriétés élémentaires sur les N-fonctions que nous serons amené à utiliser par la suite :

#### Proposition 1.2.7

1. Soit  $A$  une N-fonction de densité  $\tilde{a}$  alors :

$$\frac{t}{2} \tilde{a} \left( \frac{t}{2} \right) \leq A(t) \leq t \tilde{a}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

2. Une fonction de Young est une N-fonction si et seulement si sa densité vérifie :

$$\tilde{a}(t) > 0, \forall t > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{a}(t) = +\infty \quad \text{et les valeurs de } \tilde{a} \text{ sont finies.}$$

3. Soit  $A$  une N-fonction, on note  $\bar{A}$  et  $A^{-1}$  respectivement sa conjuguée et son inverse sur  $\mathbb{R}^+$ , alors :

- i)  $\frac{A(t)}{t}$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
- ii)  $t \leq A^{-1}(t) \bar{A}^{-1}(t) \leq 2t, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ .
- iii)  $A(kt) < kA(t) \quad \forall k \in ]0, 1[$  et  $\forall t \neq 0$
- iv)  $A(kt) > kA(t), \quad \forall k > 1$  et  $\forall t \neq 0$ .
- v)  $A^{-1}(\alpha u) \leq \max(1, \alpha) A^{-1}(u), \quad \forall u \geq 0, \forall \alpha \geq 0$ .
- vi)  $A(t_1) + A(t_2) \leq A(t_1 + t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ .

Comme conséquence directe de ces propriétés, et particulièrement de (1,6) et des inégalités (ii), on déduit la série d'inégalité suivante, étroitement liée aux problèmes étudiés au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\overline{A}^{-1} A(|\xi|)}{|\xi|} &\leq \frac{A(|\xi|)}{|\xi|^2} \leq \frac{\tilde{a}(|\xi|)}{|\xi|} = a(|\xi|) \\ a(|\xi|) &\leq \frac{A(2|\xi|)}{|\xi|^2} \leq 2 \frac{\overline{A}^{-1} A(2|\xi|)}{|\xi|}, \forall \xi \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.2.4 Relations de comparaison entre les N-fonctions

Les relations d'ordre partielles et la relation d'équivalence qu'on va introduire vont jouer un rôle fondamental, notamment sur les injections continues et compactes entre les espaces fonctionnels que l'on aura à étudier.

**Definition 1.2.8** Soient  $A$  et  $B$  deux  $N$ -fonctions.

1. On dit que  $A$  domine  $B$  à  $l' \infty$  si et seulement si :

$$\exists k > 0, \exists t_0 > 0 \text{ tel que } B(t) \leq A(kt), \forall t \geq t_0.$$

On note alors :  $B \prec A$  à  $l' \infty$ .

2. On dit que  $A$  croît essentiellement plus vite que  $B$  à  $l' \infty$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 > 0 \text{ tel que } B(t) \leq A(\varepsilon t), \forall t \geq t_0.$$

On note alors :  $B \ll A$  à  $l' \infty$ .

3. On dit que  $A$  est équivalente à  $B$  à  $l' \infty$  si et seulement si :  $B \prec A$  à  $l' \infty$  et  $A \prec B$  à  $l' \infty$ . On note alors :  $A \sim B$  à  $l' \infty$ .

Ces relations peuvent être aussi définies globalement si elles sont vérifiées  $\forall t \geq 0$ .

On regroupe ci-dessous quelques propriétés essentielles et autres caractérisations de ces relations (cf [81]).

a) Si  $0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{A(t)} < +\infty$  alors  $A \sim B$  à  $l' \infty$ .

b)  $B \ll A$  à  $l' \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{A(\varepsilon t)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A^{-1}(t)}{B^{-1}(t)} = 0$ .

c)  $A \sim B$  à  $l' \infty \Leftrightarrow \exists l > 0, \exists t_0 > 0$  tel que  $B(l^{-1}t) \leq A(t) \leq B(lt), \forall t \geq t_0$ .

$$\text{d) } B \prec A \Leftrightarrow \bar{A} \prec \bar{B} \ ; \ B \ll A \Leftrightarrow \bar{A} \ll \bar{B} \ ; \ B \sim A \Leftrightarrow \bar{B} \sim \bar{A}$$

**Exemple 1.2.9**

1) Soit  $A_{p,q}$  la N-fonction de partie principale  $Q(t) = t^p \log^q(t)$  avec  $p > 1$  ou ( $p = 1$  et  $q > 0$ ) alors  $A_{p,q} \ll A_{p',q'}$  si et seulement si :

$$(p < p', \forall q \text{ et } \forall q' \in \mathbb{R}) \text{ ou bien } (p = p' \text{ et } q < q').$$

2) Soit  $A(t) = e^t - t - 1$  ;  $B(t) = te^t - t$  et  $C(t) = e^{2t} - 2t - 1$  pour  $t \geq 0$  alors  $A \sim B \sim C$  à l'  $\infty$  même si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{A(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C(t)}{B(t)} = +\infty$ .

3) Soit  $A_\alpha(t) = \exp(t^\alpha) - 1$  avec  $\alpha > 1$  alors  $A_{\alpha_1} \ll A_{\alpha_2}$  si et seulement si  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

4) Soit  $A$  une N-fonction, alors la fonction définie par  $\tilde{A}(t) = \int_0^{|t|} \frac{A(\tau)}{\tau} d\tau$  pour  $t \neq 0$  et  $\tilde{A}(0) = 0$  est une N-fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , globalement équivalente à  $A$ .

Ce dernier exemple permet de construire en utilisant ce procédé, réitérant, une N-fonction, équivalente à une N-fonction donnée, aussi régulière que l'on veut.

**1.2.5 La condition  $\Delta_2$** 

**Definition 1.2.10** On dit qu'une N-fonction  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$  à l'  $\infty$  s'il existe  $k$  (nécessairement supérieur à 2) et  $t_0 > 0$  tel que :

$$A(2t) \leq kA(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.8)$$

On l'énonce aussi de manière équivalente par :

$$\forall r > 0, \exists k(r) > 0, \exists t_0 > 0 \text{ tel que } A(rt) \leq kA(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

On résume les propriétés essentielles de la condition  $\Delta_2$  dans la proposition suivante (cf [61]) :

**Proposition 1.2.11**

1. La condition  $\Delta_2$  à l'  $\infty$  est conservée par équivalence à l'  $\infty$  des N-fonctions.

2. Soit  $A$  une N-fonction de densité  $\tilde{a}$ , alors  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$  à l'  $\infty$  si et seulement si :

$$\exists \alpha > 1, \exists t \geq t_0 \text{ tel que } t\tilde{a}(t) \leq \alpha A(t), \forall t \geq t_0. \quad (1.9)$$

Si  $A$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  à dérivée strictement croissante, alors (1.9) équivaut à :

$$s\tilde{a}^{-1}(s) \geq \bar{\alpha}\bar{A}(s), \forall s \geq \tilde{a}(t_0) \text{ avec } \bar{\alpha} = \alpha/(\alpha - 1). \quad (1.10)$$

3. Une N-fonction vérifiant la condition  $\Delta_2$  à l'  $\infty$  est à croissance polynomiale ; de manière précise, par intégration de l'inégalité (1.9), on déduit que :  $A(t) \leq \frac{A(t_0)}{t_0^\alpha} \cdot t^\alpha, \forall t \geq t_0$ .

### Remarque 1.2.12

On définit de même une condition complémentaire à la condition  $\Delta_2$  et qui est la condition  $\nabla_2$  :

On dit que  $A$  vérifie la condition  $\nabla_2$  à l'  $\infty$  si et seulement si  $\bar{A}$  vérifie la condition  $\Delta_2$  à l'  $\infty$

Une caractérisation d'une N-fonction vérifiant les deux conditions simultanément et qu'on peut déduire de (1.9) et (1.10) est donnée par :

$$1 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{t\tilde{a}(t)}{A(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t\tilde{a}(t)}{A(t)} < +\infty. \quad (1.11)$$

Pour un développement détaillé de ces propriétés on pourra se référer à [81].

D'autre part, une étude détaillée sur des propriétés de convexité d'une fonction auxiliaire liée à  $A$  et en relation avec la constante  $\alpha$  intervenant dans (1.9), est développée dans [34].

Comme pour les relations de comparaison, on définit de même la condition  $\Delta_2$  globalement en imposant que les inégalités ci-dessus soient vérifiées  $\forall t \geq 0$  ; toutefois, ces conditions globales ne seront pas utilisées dans le cadre de notre travail ; ainsi dans toute la suite, ces relations de comparaison et la condition  $\Delta_2$  seront considérées à l'infini.

### Exemple 1.2.13 .

1. Les N-fonctions  $A_{p,q}(t)$  de partie principale  $t^p \log^q(t)$  vérifient les conditions  $\Delta_2$  et  $\nabla_2$  et ce  $\forall (p, q) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

2.  $A_{1,1}(t) = (1 + |t|) \log(1 + |t|) - |t|$  vérifie la condition  $\Delta_2$  mais pas la condition  $\nabla_2$  c'est à dire que sa complémentaire définie par  $\overline{A_{1,1}} = e^{|t|} - |t| - 1$  ne vérifie pas la condition  $\Delta_2$
3.  $A(t) = e^{t^2} - 1$  n'est pas  $\Delta_2$  elle vérifie par contre la condition  $\nabla_2$ .

Ces conditions s'obtiennent par application directe des inégalités (1.11); tandis que pour la condition  $\nabla_2$  de  $A(t) = e^{t^2} - 1$ , voir [34].

### 1.3 Espaces d'Orlicz

Dans toute la suite,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $A$  est une N-fonction.

**Definition 1.3.1** On note  $K_A(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $u$ , mesurables sur  $\Omega$  (modulo l'égalité presque partout sur  $\Omega$ ) et vérifiant :

$$\rho_A(u) = \int_{\Omega} A(u(x)) dx < +\infty$$

L'espace d'Orlicz noté  $L_A(\Omega)$  est l'enveloppe linéaire de  $K_A(\Omega)$ , i.e. :

$$L_A(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega; \exists \lambda > 0, \int_{\Omega} A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx < +\infty \right\}. \quad (1.12)$$

L'espace d'Orlicz noté  $E_A(\Omega)$  est l'espace linéaire maximal contenu dans  $K_A(\Omega)$ , i.e. :

$$E_A(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega; \forall \lambda > 0, \int_{\Omega} A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx < +\infty \right\}. \quad (1.13)$$

De cette définition, on déduit que :  $E_A(\Omega) \subset K_A(\Omega) \subset L_A(\Omega)$ . Les égalités  $E_A(\Omega) = K_A(\Omega) = L_A(\Omega)$  ont lieu si et seulement si  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$ , en particulier dans le cas où  $A(t) = |t|^p$  avec  $p \geq 1$ ,  $E_A(\Omega) = K_A(\Omega) = L_A(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

On munit  $L_A(\Omega)$  et  $E_A(\Omega)$  de la norme de Luxemburg (cf [69]), notée  $\|\cdot\|_A$ , définie par  $\|u\|_A = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$ .

Muni de cette norme, ces espaces possèdent les propriétés suivantes (voir [1] et [61]) :

1.  $(L_A(\Omega), \|u\|_A)$  est un espace de Banach, il est séparable si et seulement si  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$ .
2.  $(E_A(\Omega), \|u\|_A)$  est un espace de Banach séparable ;.de plus, il est caractérisé dans  $(L_A(\Omega), \|u\|_A)$  par :

$$E_A(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_A} \quad (1.14)$$

3. La boule unité fermée de  $(L_A(\Omega), \|u\|_A)$  s'exprime de même par :

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_A}(0, 1) = \{u; \rho_A(u) \leq 1\} \quad (1.15)$$

### 1.3.1 Inégalité de Hölder, dualité et norme d'Orlicz

**Inégalité de Hölder.** Soient  $u \in L_A(\Omega)$  et  $v \in L_{\overline{A}}(\Omega)$ . Alors

$$uv \in L_1(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} |uv| dx \leq 2 \|u\|_A \|v\|_{\overline{A}}. \quad (1.16)$$

Cette inégalité est une conséquence de l'inégalité de Young appliquée à  $u/\|u\|_A$  et  $v/\|v\|_{\overline{A}}$  et de l'inégalité  $\int_{\Omega} A(u(x)/\|u\|_A) dx \leq 1, \forall u$  tel que  $\|u\|_A > 0$ .

**Dualité dans les espaces d'Orlicz.**

De l'inégalité de Hölder, on déduit que l'application :

$$\begin{aligned} L_A(\Omega) \times L_{\overline{A}}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} uv dx \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire continue, on dit alors que  $L_A(\Omega)$  et  $L_{\overline{A}}(\Omega)$  sont deux espaces de Banach en dualité, de plus pour  $v$  fixé dans  $L_{\overline{A}}(\Omega)$ , la forme linéaire notée  $l_v$ , définie sur  $L_A(\Omega)$  par  $l_v(u) = \int_{\Omega} uv dx$  est un élément de  $(L_A(\Omega))'$  et en particulier de  $(E_A(\Omega))'$ , réciproquement, on démontre (cf. [1]), que toute forme linéaire continue sur  $E_A(\Omega)$  est de la forme  $l_v$ . En résumé, on a le théorème suivant :

**Théorème 1.3.2 (cf. [1])**

1. Le dual de  $E_A(\Omega)$ ,  $(E_A(\Omega))'$  est isomorphe et homéomorphe à  $L_{\overline{A}}(\Omega)$ .
2.  $L_A(\Omega)$  est réflexif si et seulement si  $A$  et  $\overline{A}$  vérifient la condition  $\Delta_2$ .

**Norme d'Orlicz.**

La norme d'Orlicz sur  $L_A(\Omega)$ , notée  $\|\cdot\|_A^0$ , est par définition la norme duale définie sur  $(E_{\bar{A}}(\Omega))' \simeq L_A(\Omega)$ , ainsi pour  $u \in L_A(\Omega)$  on a :

$$\|u\|_A^0 = \sup_{\|v\|_{\bar{A}} \leq 1, v \in E_{\bar{A}}(\Omega)} \left| \int_{\Omega} uv dx \right| = \sup_{\|v\|_{\bar{A}} \leq 1, v \in E_{\bar{A}}(\Omega)} \int_{\Omega} |uv| dx. \quad (1.17)$$

Les normes de Luxemburg et d'Orlicz sont équivalentes, précisément on a :

$$\|u\|_A \leq \|u\|_A^0 \leq 2 \|u\|_A, \quad \forall u \in L_A(\Omega) \quad (1.18)$$

De l'inégalité de Young, on déduit les inégalités pratiques suivantes :

$$\|u\|_A \leq \|u\|_A^0 \leq 1 + \rho_A(u), \quad \forall u \in L_A(\Omega) \quad (1.19)$$

En posant  $\mathcal{P}(E_A(\Omega), r) = \left\{ u \in L_A(\Omega), \inf_{\omega \in E_A(\Omega)} \|u - \omega\|_A^0 < r \right\}$ , on obtient la double inclusion :

$$\mathcal{P}(E_A(\Omega), 1) \subset K_A(\Omega) \subset \overline{\mathcal{P}(E_A(\Omega), 1)}^{\|\cdot\|_A^0} \quad (\text{cf. [61]}).$$

**1.3.2 Convergence modulaire, topologies  $\sigma(L_A, E_{\bar{A}})$  et  $\sigma(L_A, L_{\bar{A}})$** 

**Definition 1.3.3** Soit  $(u_n)$  une suite de  $L_A(\Omega)$ .

1. On dit que  $u_n$  converge vers  $u$  pour la convergence modulaire et on note

$$u_n \xrightarrow{\rho_A} u \text{ si et seulement si } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \int_{\Omega} A\left(\frac{u_n - u}{\lambda}\right) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.  $u_n \rightharpoonup u$  pour  $\sigma(L_A, L_{\bar{A}})$  si et seulement si  $\int_{\Omega} (u_n - u) v dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall v \in L_{\bar{A}}(\Omega)$ .

3.  $u_n \rightharpoonup u$  pour  $\sigma(L_A, E_{\bar{A}})$  si et seulement si  $\int_{\Omega} (u_n - u) v dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall v \in E_{\bar{A}}(\Omega)$ .

Les deux propositions suivantes, permettent de comparer ces différents modes de convergence et la convergence forte.

**Proposition 1.3.4 ([71]) a)** Si  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$  dans  $L_A(\Omega)$  alors  $u_n \xrightarrow{\rho_A} u$ .

b) La convergence en norme et la convergence modulaire sont équivalentes si et seulement si  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$ .

c)  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u \iff \int_{\Omega} A\left(\frac{u_n - u}{\lambda}\right) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \lambda > 0$ .

**Proposition 1.3.5 ([54])** Si  $u_n \xrightarrow{\rho_A} u$  alors  $u_n \rightharpoonup u$  pour  $\sigma(L_A, L_{\bar{A}})$ .

### 1.3.3 Injections et approximation

On commence par énoncer les propriétés de comparaison entre espaces d'Orlicz sous forme d'injections continues et qu'on résume dans le théorème suivant :

**Théorème 1.3.6** ([1]) 1.  $L_B(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega)$  si et seulement si  $A \prec B$ .

2. Si  $A \ll B$  alors  $L_B(\Omega) \hookrightarrow E_A(\Omega)$ .

3.  $L_B(\Omega) \equiv L_A(\Omega)$  si et seulement si  $A \sim B$ .

**Remarque 1.3.7** . Ces trois propriétés restent vraies pour un ouvert quelconque  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  à condition que les relations entre  $A$  et  $B$  soient vérifiées globalement. La dernière propriété affirme que la connaissance d'une  $N$ -fonction  $A$  au voisinage de  $l^\infty$ , suffit à définir entièrement l'espace d'Orlicz  $L_A(\Omega)$ , permettant ainsi de redéfinir la  $N$ -fonction  $A$  au voisinage de 0 sans changer l'espace d'Orlicz correspondant.

Les propriétés d'approximation établies sur les espaces  $L^p$  à l'aide de suites régularisantes sont généralisées à l'espace  $E_A(\Omega)$ , en effet on a le résultat suivant (cf.[45]) :

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|} = E_A(\Omega),$$

où  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace de Schwartz des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ , par contre, dans le cas où  $A$  ne vérifie pas la condition  $\Delta_2$ ,  $E_A(\Omega)$  est un sous espace propre de  $L_A(\Omega)$ , fermé pour la convergence en norme et par suite, l'approximation d'un élément  $u \in L_A(\Omega)$  n'est possible qu'en utilisant un mode de convergence plus faible que la convergence en norme, en effet, l'utilisation des tronqués de  $u$  nous permet d'établir le résultat suivant :

**Proposition 1.3.8**  $L^\infty(\Omega)$  est  $\rho_A$ -dense dans  $L_A(\Omega)$ .

**Preuve.** Soit  $u \in L_A(\Omega)$ . Pour tout réel positif  $k$ , on note  $T_k$  la fonction troncature à hauteur  $k$ , définie par  $T_k(s) = \frac{1}{2} \{|s+k| - |s-k|\}$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ .

On a  $|T_k(u(x))| \leq k \forall x \in \Omega$ . Il s'agit alors de montrer que  $T_k(u) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\rho_A} u$ .

Soit  $\lambda > 0$  tel que  $\int_{\Omega} A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx < +\infty$ . En utilisant la convexité de  $A$ , on obtient :

$$A\left(\frac{u(x) - T_k(u(x))}{2\lambda}\right) \leq \frac{1}{2}A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}A\left(\frac{T_k(u(x))}{\lambda}\right) \leq A\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Comme  $A\left(\frac{u(x)-T_k(u(x))}{2\lambda}\right)$  converge presque partout vers 0 dans  $\Omega$ , du théorème de convergence dominé, on déduit que :

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{u(x)-T_k(u(x))}{2\lambda}\right) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

■

### 1.3.4 Equiabsolue-continuité et compacité

La notion d'équi-intégrabilité définie sur les espaces  $L^p(\Omega)$  se généralise aux espaces  $L_A(\Omega)$  par le concept d'équiabsolue-continuité en norme, défini comme suit :

**Definition 1.3.9** 1. On dit que  $u \in L_A(\Omega)$  admet une norme absolument continue si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|u\chi_G\|_A < \varepsilon, \forall G \subset \Omega \text{ tel que } \text{mes}(G) < \delta$$

( $\chi_G$  étant la fonction caractéristique de  $G$ ).

2. On dit qu'une suite  $(u_n)$  de  $L_A(\Omega)$  est équiabsolument continue en norme si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|u_n\chi_G\|_A < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall G \subset \Omega \text{ tel que } \text{mes}(G) < \delta$$

Une caractérisation du "petit espace"  $E_A(\Omega)$ , utilisant cette notion, est établi dans [61] :

$$E_A(\Omega) = \{u \in L_A(\Omega) ; u \text{ absolument continue en norme}\} \quad (1.20)$$

Ainsi une suite  $(u_n)$  de  $L_A(\Omega)$ , équiabsolument continue en norme, appartient nécessairement à  $E_A(\Omega)$ .

Le résultat suivant présente une version généralisée du théorème de convergence de Vitali dans les espaces d'Orlicz.

**Théorème 1.3.10 ([61])** Soit  $(u_n)$  une suite convergeant p.p. vers  $u$  dans  $\Omega$ , alors  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$  dans  $E_A(\Omega)$  si et seulement si  $(u_n)$  est équiabsolument continue en norme dans  $L_A(\Omega)$ .

De plus, en utilisant le théorème de De la vallée Poussin (voir [61] ou [34]), on déduit le résultat suivant :

**Théorème 1.3.11** *Soient  $(u_n)$  une suite bornée de  $L_A(\Omega)$  et  $B$  une  $N$ -fonction telle que  $B \ll A$ . Alors  $(u_n)$  est équiabsolument continue en norme dans  $E_B(\Omega)$ .*

Comme conséquence des théorèmes 1.3.10 et 1.3.11 on déduit le résultat de compacité suivant :

**Théorème 1.3.12** *Soit  $(u_n)$  une suite bornée de  $L_A(\Omega)$  et convergente p.p vers  $u$  dans  $\Omega$  alors :*

$$u \in L_A(\Omega) \text{ et } \forall B, N\text{-fonction telle que } B \ll A, u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u \text{ dans } E_B(\Omega)$$

D'un autre coté, en utilisant le théorème de Banach-Alaoglu et la propriété de séparabilité de  $E_{\bar{A}}(\Omega)$ , on peut extraire d'une suite bornée  $(u_n)$  de  $L_A(\Omega)$ , une sous suite notée  $(u_{n_i})$  telle que  $u_{n_i} \rightharpoonup u_0$  pour  $\sigma(L_A, E_{\bar{A}})$ ; en supposant de plus que  $(u_n)$  converge p.p vers  $u$  dans  $\Omega$ , on montre que  $u = u_0$  (voir [34]), d'où la proposition suivante :

**Proposition 1.3.13** *Soit  $(u_n)$  une suite bornée de  $L_A(\Omega)$  et convergente p.p vers  $u$  dans  $\Omega$  alors  $u_n \rightharpoonup u$  pour  $\sigma(L_A, E_{\bar{A}})$ .*

### 1.3.5 Opérateurs de Nemytskii dans les espaces d'Orlicz

**Definition 1.3.14** *Soit :*

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

*une fonction de Carathéodory, i.e :  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(\cdot, t)$  est mesurable sur  $\Omega$  et  $f(x, \cdot)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ . Alors la fonction  $F : u \rightarrow Fu$  telle que  $Fu(x) = f(x, u(x))$ ,  $\forall x \in \Omega$  opérant d'un espace fonctionnel  $X(\Omega)$  à valeurs dans un espace fonctionnel  $Y(\Omega)$  est appelé opérateur de Nemytskii.*

Dans le cas des espaces  $L^p$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $F$  soit défini et continu de  $L^p(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$ , est que :

$\forall t \in \mathbb{R}$  et p.p sur  $\Omega$   $|f(x, t)| \leq d(x) + b|t|^{p/q}$  avec  $d \in L^q(\Omega)$  et  $b > 0$  (cf. [60]).

Cette condition de croissance se généralise naturellement aux espaces d'Orlicz par :

$$|f(x, t)| \leq d(x) + bB^{-1}(A(\alpha t)) \text{ avec } d \in L_B(\Omega) \text{ et } b > 0, \alpha > 0. \quad (1.21)$$

Toutefois, même si la condition (1.21) permet de montrer que  $F$  opère de  $L_A(\Omega)$  dans  $L_B(\Omega)$ , son domaine de définition

$$D(F) = \{u \in L_A(\Omega) \text{ tel que } Fu \in L_B(\Omega)\}$$

est strictement inclus dans  $L_A(\Omega)$  en général (voir exemple ci-dessous); de plus la condition (1.21) n'assure plus la continuité de l'opérateur  $F$  de  $D(F)$  dans  $L_B(\Omega)$ .

Dans ([61] théorème 17.3), Krasnoselskii et Rutickii démontrent que si  $F$  envoie  $\mathcal{P}(E_A, \frac{1}{\alpha})$  dans  $E_B(\Omega)$  avec  $d \in E_B(\Omega)$  (en particulier si  $B$  est  $\Delta_2$ ) alors  $F$  est continue de  $\mathcal{P}(E_A, \frac{1}{\alpha})$  dans  $E_B(\Omega)$ .

Finalemt, en imposant une restriction sur la croissance de  $f$  dans (1.21), on récupère la continuité de  $F$ , sans imposer la condition  $\Delta_2$  ni à  $A$  ni à  $B$ .

En effet on a :

**Proposition 1.3.15 ([51])**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois  $N$ -fonctions avec  $B \ll C$  et  $f$  une fonction de Carathéodory vérifiant la condition de croissance suivante :  $\forall t \in \mathbb{R}$  et p.p  $x \in \Omega$ ,

$$|f(x, t)| \leq d(x) + bC^{-1}(A(\alpha t)) \text{ avec } d \in L_B(\Omega) \text{ et } b > 0, \alpha > 0. \quad (1.22)$$

Alors l'opérateur  $F$  est défini et continu de  $\mathcal{P}(E_A, \frac{1}{\alpha})$ -fort dans  $E_B(\Omega)$ -fort.

**Remarque 1.3.16** Ce résultat de continuité, justifiant la restriction de croissance en  $s$  imposée à  $\hat{a}(x, s, \xi)$  dans (i) (voir introduction), est une conséquence pratique de ([61] théorème 17.3); en effet :

Soit  $u \in \mathcal{P}(E_A, \frac{1}{\alpha})$  alors  $\alpha u \in \mathcal{P}(E_A, 1) \subset K_A(\Omega)$  il s'en suit que  $A(\alpha u) \in L^1(\Omega)$  et  $C^{-1}A(\alpha u) \in K_C(\Omega) \subset L_C(\Omega) \hookrightarrow E_B(\Omega)$  et comme  $d \in E_B(\Omega)$  alors  $d + bC^{-1}A(\alpha u) \in E_B(\Omega)$ ; de la propriété de croissance (1.22), on déduit que  $F$  envoie  $\mathcal{P}(E_A, \frac{1}{\alpha})$  dans  $E_B(\Omega)$ .

L'exemple qui va suivre montre de quelle manière les propriétés d'un simple opérateur de Nemytskii opérant sur  $L_A(\Omega)$ , à savoir, son domaine de définition, la bornitude et la coercivité, dépendent de la nature de la croissance de la  $N$ -fonction  $A$ .

**Exemple 1.3.17**

Soit  $A$  une  $N$ -fonction de densité  $\tilde{a}$  continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

On considère l'opérateur de Nemytskii noté  $T$  et défini par  $T : u \rightarrow Tu$  tel que :

$$(Tu)(x) = \tilde{a}(u(x)) \text{ pour presque tout } x \text{ dans } \Omega.$$

Alors  $T$  opère de  $L_A(\Omega)$  dans  $L_{\bar{A}}(\Omega)$ .

En effet on a :

$$\bar{A}(\tilde{a}(t)) \leq \bar{A}(\tilde{a}(t)) + A(t) = t\tilde{a}(t) \leq \frac{1}{\lambda-1} \int_t^{\lambda t} \tilde{a}(\tau) d\tau, \forall \lambda > 1 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},$$

ainsi :

$$\bar{A}(\tilde{a}(t)) \leq \frac{1}{\lambda-1} A(\lambda t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \lambda > 1. \quad (1.23)$$

De manière précise, en notant  $D(T) = \{u \in L_A(\Omega) \text{ tel que } Tu \in L_{\bar{A}}(\Omega)\}$  le domaine de définition de  $T$  et  $R(T)$  son image, on obtient :

1.  $E_A(\Omega) \subset P(E_A, \frac{1}{\lambda}) \subset D(T) \subset K_A(\Omega), \forall \lambda > 1.$

En effet soit  $u \in P(E_A, \frac{1}{\lambda})$  alors  $\lambda u \in P(E_A, 1) \subset K_A(\Omega)$ , il s'en suit de (1.23), que  $Tu = \tilde{a} \circ u \in K_{\bar{A}}(\Omega) \subset L_{\bar{A}}(\Omega)$ , par suite,  $u \in D(T)$ .

Soit  $u \in D(T)$ , en utilisant l'égalité de Young, on obtient :

$$A(u(x)) \leq \bar{A}(\tilde{a}(u(x))) + A(u(x)) = u(x)\tilde{a}(u(x));$$

de l'inégalité de Hölder, on déduit que :

$$\int_{\Omega} A(u(x)) dx \leq \int_{\Omega} u(x)\tilde{a}(u(x)) dx \leq 2\|u\|_A \|\tilde{a} \circ u\|_{\bar{A}} < +\infty$$

et par suite  $u \in K_A(\Omega)$ . Notons que cette dernière inclusion permet d'affirmer que  $T$  est non partout défini dans  $L_A(\Omega)$  dans le cas où  $A$  n'est pas  $\Delta_2$ .

2.  $E_{\bar{A}}(\Omega) \subset P(E_{\bar{A}}, \frac{1}{\lambda}) \subset R(T) \subset K_{\bar{A}}(\Omega), \forall \lambda > 1.$

En effet, en notant  $T^{-1}$  l'opérateur de Nemytskii défini par  $T^{-1}u = \tilde{a}^{-1} \circ u$  alors  $T^{-1}$  opère de  $L_{\bar{A}}(\Omega)$  dans  $L_A(\Omega)$  et les inclusions du point 2. se traduisent alors de celles de 1. Notons que si  $\bar{A}$  n'est pas  $\Delta_2$  alors  $R(T) \subsetneq L_{\bar{A}}(\Omega)$ .

3.  $T$  est un opérateur borné (i.e. l'image de toute partie bornée de  $D(T)$  est bornée dans  $L_{\bar{A}}(\Omega)$ ), si et seulement si  $A$  est  $\Delta_2$ .

En effet, supposons  $T$  borné dans  $D(T)$ . Soit  $u \in L_A(\Omega)$ . Notons :

$$T_n(u(x)) = \frac{1}{2} \{|u(x) + n| - |u(x) - n|\}$$

alors  $T_n(u) \in L^\infty(\Omega) \subset E_A(\Omega) \subset D(T)$  et  $\|T_n(u)\|_A \leq \|u\|_A, \forall n \in \mathbb{N}$ , par hypothèse  $\tilde{a} \circ T_n(u)$  est de même, borné dans  $L_{\bar{A}}(\Omega)$ ; par conséquent  $\exists c > 0$  independant de  $n$  tel que :

$$\int_{\Omega} A(T_n(u)) dx \leq \int_{\Omega} T_n(u) \tilde{a}(T_n(u)) dx \leq 2 \|T_n(u)\|_A \|\tilde{a} \circ T_n(u)\|_{\bar{A}} \leq c$$

et d'après le lemme de Fatou  $\int_{\Omega} A(u(x)) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} A(T_n(u)) dx \leq c$

d'où  $u \in K_A(\Omega)$ , ainsi  $L_A(\Omega) \subset K_A(\Omega)$  et par suite  $A$  est  $\Delta_2$ .

Réciproquement, supposons que  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$  et soit  $(u_i)_{i \in I}$  une partie bornée de  $D(T) = L_A(\Omega)$ , alors  $\exists r > 0$  tel que  $\|u_i\|_A \leq \frac{r}{2}, \forall i \in I$  et par suite  $\int_{\Omega} A\left(\frac{2u_i(x)}{r}\right) dx \leq 1, \forall i \in I$ .  $A$  étant  $\Delta_2$ ,  $\exists t_0 > 0, \exists k > 0$  tel

que  $A(rt) \leq kA(t), \forall t \geq t_0$ . En posant  $t = \frac{2|u_i(x)|}{r}$  on déduit alors que

$$\int_{\frac{2|u_i(x)|}{r} \geq t_0} A(2u_i(x)) dx \leq k \cdot \int_{\frac{2|u_i(x)|}{r} \geq t_0} A\left(\frac{2u_i(x)}{r}\right) dx \leq k.$$

En utilisant (1.23), pour  $\lambda = 2$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \bar{A}(\tilde{a}(u_i(x))) dx \leq \int_{\Omega} A(2u_i(x)) dx \leq \int_{\frac{2|u_i(x)|}{r} \geq t_0} A(2u_i(x)) dx + A(t_0 r) \text{mes}(\Omega)$$

$\leq \text{cste} \forall i \in I$ . Or d'après (1.19),  $\|\tilde{a} \circ u_i\|_{\bar{A}} \leq 1 + \int_{\Omega} \bar{A}(\tilde{a}(u_i(x))) dx$ , il s'en suit que  $(\tilde{a} \circ u_i)_{i \in I}$  est borné dans  $L_{\bar{A}}(\Omega)$ .

4.  $T$  est un opérateur coercif (i.e.  $\frac{1}{\|u\|_A} \int_{\Omega} Tu(x) \cdot u(x) dx \xrightarrow{\|u\|_A \rightarrow \infty} +\infty$ ) si et seulement si  $\bar{A}$  vérifie la condition  $\Delta_2$ .

Supposons que  $T$  soit coercif, pour montrer que  $\bar{A}$  est  $\Delta_2$ , il suffit de prouver d'après 3, que  $T^{-1}$  est borné de  $R(T)$  dans  $D(T)$ ; supposons le contraire, il existe alors une suite  $(v_n)$  bornée de  $R(T)$  telle que  $\|\tilde{a}^{-1} \circ v_n\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , et en posant  $u_n = \tilde{a}^{-1} \circ v_n \in D(T)$  on aura  $2\|v_n\|_{\bar{A}} = 2\|\tilde{a} \circ u_n\|_{\bar{A}} \geq \frac{1}{\|u_n\|_A} \int_{\Omega} Tu_n(x) \cdot u_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , contradiction.

Réciproquement, en utilisant le résultat suivant, établi dans [51]:

$$\frac{1}{\|u\|_{A\Omega}} \int_{\Omega} A(u(x)) dx \xrightarrow{\|u\|_A \rightarrow \infty} +\infty \text{ si et seulement si } \bar{A} \text{ est } \Delta_2,$$

on conclut grâce à l'inégalité :

$$\frac{1}{\|u\|_{A\Omega}} \int_{\Omega} Tu(x) \cdot u(x) dx \geq \frac{1}{\|u\|_{A\Omega}} \int_{\Omega} A(u(x)) dx.$$

## 1.4 Espaces de Sobolev-Orlicz

### 1.4.1 Définitions et propriétés de base

**Definition 1.4.1** *Etant donné  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $A$  une  $N$ -fonction, on définit les espaces de Sobolev-Orlicz d'ordre un, générés par  $A$  et notés  $W^1L_A(\Omega)$  et  $W^1E_A(\Omega)$  par :*

$$W^1L_A(\Omega) = \left\{ u \in L_A(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_A(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

$$\text{et } W^1E_A(\Omega) = \left\{ u \in E_A(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in E_A(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

où  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ , avec  $i = 1, \dots, N$ , sont les  $N$  dérivées partielles d'ordre un (au sens des distributions) de  $u$ .

En identifiant  $W^1L_A(\Omega)$  (respectivement  $W^1E_A(\Omega)$ ) à un sous-espace de l'espace produit  $(L_A(\Omega))^{N+1} \equiv \Pi L_A$  (respectivement  $\Pi E_A$ ) par l'application  $P : u \rightarrow Pu = \left( u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ , on déduit les propriétés de base de ces espaces à partir de celles correspondantes aux espaces d'Orlicz et résumées dans la proposition suivante :

**Proposition 1.4.2**

1.  $W^1L_A(\Omega)$ , muni de la norme :  $\|u\|_{1,A} = \|u\|_A + \|\nabla u\|_A$ , est un espace de Banach.
2.  $(W^1E_A(\Omega), \|u\|_{1,A})$  est un sous-espace fermé de  $(W^1L_A(\Omega), \|u\|_{1,A})$ .
3.  $W^1L_A(\Omega) = W^1E_A(\Omega)$  si et seulement si  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$ .
4.  $W^1E_A(\Omega)$  est séparable.
5.  $W^1L_A(\Omega)$  est réflexif si et seulement si  $A$  et  $\bar{A}$  vérifient la condition  $\Delta_2$ .

Les différentes topologies utilisées sur ces espaces, sont celles induites par la topologie produit de  $\Pi L_A$ , ainsi, en notant  $D^i u = u$  pour  $i = 0$  et  $D^i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  pour  $i = 1, \dots, N$ , on définit de même :

1. Les normes équivalentes à  $\|\cdot\|_{1,A}$ , en particulier :

$$\sum_{i=0,N} \|D^i u\|_A, \left( \sum_{i=0,N} \|D^i u\|_A^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \max_{i=0,N} \|D^i u\|_A.$$

2. La convergence modulaire : On dit qu'une suite  $(u_n)$  de  $W^1L_A(\Omega)$  est  $\rho_A$ -convergente vers  $u \in W^1L_A(\Omega)$  si et seulement si  $\exists \lambda > 0$  tel que
 
$$\int_{\Omega} A \left( \frac{D^i u_n - D^i u}{\lambda} \right) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall i = 0, \dots, N.$$

3. La topologie  $\sigma(\Pi L_A, \Pi L_{\bar{A}}) : u_n \rightharpoonup u$  dans  $W^1 L_A(\Omega)$  pour  $\sigma(\Pi L_A, \Pi L_{\bar{A}})$  si et seulement si  $\int_{\Omega} D^i(u_n - u) v_i dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \forall (v_i)_{i=0, N} \in \Pi L_{\bar{A}}$ .
4. La topologie  $\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}}) : u_n \rightharpoonup u$  dans  $W^1 L_A(\Omega)$  pour  $\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}})$  si et seulement si  $\int_{\Omega} D^i(u_n - u) v_i dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \forall (v_i)_{i=0, N} \in \Pi E_{\bar{A}}$ .

Les comparaisons de ces différents modes de convergence sont obtenus de manière analogue à celles des propositions 1.3.4 et 1.3.5.

### 1.4.2 Propriétés d'approximation

On note  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  l'espace des restrictions à  $\Omega$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ . De la  $\|\cdot\|_A$ -densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  (et de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ) dans  $E_A(\Omega)$ , on déduit que la fermeture de ces espaces, pour la norme  $\|\cdot\|_{1,A}$  est nécessairement incluse dans  $W^1 E_A(\Omega)$ . Ainsi, pour l'espace  $W^1 L_A(\Omega)$ , les propriétés d'approximation feront intervenir les topologies faibles.

#### Definition 1.4.3

- L'espace  $W_0^1 E_A(\Omega)$  est défini comme étant la fermeture pour la norme, de l'espace de Schwartz  $\mathcal{D}(\Omega)$ , dans  $W^1 E_A(\Omega)$ ; i.e. :  $W_0^1 E_A(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,A}}$ .
- L'espace  $W_0^1 L_A(\Omega)$  est défini comme étant la  $\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}})$ -fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , dans  $W^1 L_A(\Omega)$ ; i.e. :  $W_0^1 L_A(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}})}$ .

#### Remarque 1.4.4

1. Dans le cas où  $A$  est  $\Delta_2$ , alors  $W_0^1 L_A(\Omega) = W_0^1 E_A(\Omega)$ , en particulier pour  $A(t) = |t|^p$ , avec  $1 \leq p < +\infty$ ,  $W_0^1 L_A(\Omega) = W_0^1 E_A(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$
2. Dans le cas où  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , les fonctions de  $W_0^1 E_A(\Omega)$  (respectivement de  $W_0^1 L_A(\Omega)$ ), sont les fonctions de  $W^1 E_A(\Omega)$  (respectivement de  $W^1 L_A(\Omega)$ ) qui sont nulles "au sens des traces" sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  (voir [53] ou [34]).

Une autre propriété géométrique (plus faible que  $\mathcal{C}^1$ ), requise sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , sera souvent utilisée par la suite, il s'agit de la propriété du segment.

**Definition 1.4.5** On dit qu'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , vérifie la propriété du segment, s'il existe un recouvrement localement fini  $(O_i)_{i \in I}$  de  $\partial\Omega$ , et des vecteurs  $(y_i)_{i \in I}$  correspondants à ce recouvrement, tels que  $\forall x \in \bar{\Omega} \cap O_i$  et  $\forall t \in ]0, 1[$ ,  $x + ty_i \in \Omega$ .

On a alors les propriétés d'approximation suivantes :

**Proposition 1.4.6** ([45])

$$\overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^1 E_A(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,A}} = W^1 E_A(\Omega).$$

On suppose que  $\Omega$  vérifie la propriété du segment, alors :

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,A}} = W^1 E_A(\Omega).$$

**Proposition 1.4.7** ([54])

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^1 L_A(\Omega) \text{ est } \rho_A\text{-dense dans } W^1 L_A(\Omega)$$

On suppose que  $\Omega$  vérifie la propriété du segment, alors :

$$\mathcal{D}(\Omega) \text{ est } \rho_A\text{-dense dans } W_0^1 L_A(\Omega) \quad (1.24)$$

De plus, si  $\varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , il existe une suite  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$   $\rho_A$ -convergente vers  $\varphi$  et vérifiant l'inégalité :

$$\|\varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (N+1) \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

La convergence modulaire, étant plus forte que la  $\sigma(\Pi L_A, \Pi L_A^-)$ -convergence, on déduit de (1.24) la caractérisation pratique suivante :

$$W_0^1 L_A(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\sigma(\Pi L_A, \Pi E_A^-)} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\sigma(\Pi L_A, \Pi L_A^-)} \quad (1.25)$$

On a de plus, la relation :  $W_0^1 E_A(\Omega) = W_0^1 L_A(\Omega) \cap W^1 E_A(\Omega)$ .

### 1.4.3 Dualité et systèmes complémentaires

Les espaces de Sobolev-Orlicz étant non réflexifs en général, l'approche variationnelle des problèmes aux limites posés dans ces espaces, nécessite un nouveau cadre fonctionnel autre que le cadre habituel  $(X, X')$  (où  $X$  est un espace de Banach réflexif et  $X'$  son dual), appelé système complémentaire et défini comme suit :

**Definition 1.4.8** Soit  $Y$  et  $Z$  deux espaces de Banach, en dualité et dont le produit de dualité est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y,Z}$ ;  $Y_0$  et  $Z_0$  deux sous-espaces fermés de  $Y$  et  $Z$  respectivement, alors  $(Y, Y_0, Z, Z_0)$  est appelé système complémentaire, si au moyen de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y,Z}$ , le dual  $Y_0'$  de  $Y_0$  est identifié à  $Z$  et le dual  $Z_0'$  de  $Z_0$  est identifié à  $Y$ .

Les systèmes  $(L_A, E_A, L_{\bar{A}}, E_{\bar{A}})$  et  $(\Pi L_A, \Pi E_A, \Pi L_{\bar{A}}, \Pi E_{\bar{A}})$  constituent les exemples types de systèmes complémentaires.

Dans [51] J.-P. Gossez développe une méthode, initiée dans [45], permettant de construire un nouveau système complémentaire à partir d'un sous espace fermé  $E$  de  $Y$  et d'un système complémentaire  $(Y, Y_0, Z, Z_0)$  donné; et ceci dans le but de son application aux espaces de Sobolev-Orlicz, considérés comme sous espaces fermés de  $\Pi L_A$ .

Les restrictions d'ordre topologiques, imposées à  $E$ , pour l'existence du nouveau système généré par  $E$ , se sont avérées satisfaites pour les espaces de Sobolev-Orlicz et ceci, grâce aux propriétés d'approximation présentées ci-dessus; de manière précise :

**Proposition 1.4.9 ([51])** Soient  $(Y, Y_0, Z, Z_0)$  un système complémentaire et  $E$  un sous-espace fermé de  $Y$ . Posons  $E_0 = E \cap Y_0$ .

On suppose que :  $E_0$  est  $\sigma(Y, Z)$  dense dans  $E$  et  $E$  est  $\sigma(Y, Z_0)$  fermé dans  $Y$ . On note  $F = Z/E_0^\perp$  (où  $E_0^\perp$  désigne l'orthogonal de  $E_0$  dans la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y,Z}$ , i.e.  $E_0^\perp = \{z \in Z; \langle y, z \rangle_{Y,Z} = 0, \forall y \in E_0\}$ ) et  $F_0 = \{z + E_0^\perp \in Z/E_0^\perp, z \in Z_0\}$ , Alors  $(E, E_0, F, F_0)$  est un système complémentaire.

#### Système complémentaire généré par $W_0^1 L_A(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , possédant la propriété du segment, en identifiant  $W_0^1 L_A(\Omega)$  à un sous espace  $E$  de  $Y = \Pi L_A$ ,  $W_0^1 E_A(\Omega)$  est alors identifié au sous espace  $E_0 = E \cap \Pi E_A$ , la caractérisation (1.25) et la proposition ci-dessus, permettent d'affirmer que :

$$(W_0^1 L_A(\Omega), W_0^1 E_A(\Omega), F, F_0)$$

avec  $F = \Pi L_{\bar{A}} / (W_0^1 E_A(\Omega))^\perp$  et  $F_0 = \{z + (W_0^1 E_A(\Omega))^\perp; z \in \Pi E_{\bar{A}}\}$ , constitue un système complémentaire, de plus, en utilisant la définition de  $W_0^1 E_A(\Omega)$ , on obtient en termes de distributions, les caractérisations suivantes de  $F$  et de  $F_0$  :

$$F = \left\{ g \in \mathcal{D}'(\Omega); g = g_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \text{ avec } g_0 \text{ et } g_i \in L_{\bar{A}}(\Omega) \right\}, \quad (1.26)$$

$$F_0 = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) ; f = f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \text{ avec } f_0 \text{ et } f_i \in E_{\bar{A}}(\Omega) \right\}. \quad (1.27)$$

On note  $F = (W_0^1 E_A(\Omega))' = W^{-1} L_{\bar{A}}(\Omega)$  et  $F_0 = W^{-1} E_{\bar{A}}(\Omega)$ ; on a ainsi :  $W_0^1 L_A(\Omega) = (W^{-1} E_{\bar{A}}(\Omega))'$ .

La paire de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Pi L_A, \Pi L_{\bar{A}}}$  s'exprime sur ces espaces par :

$$\langle u, g \rangle_{W_0^1 L_A(\Omega), W^{-1} L_{\bar{A}}(\Omega)} = \int_{\Omega} u g_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} g_i dx. \quad (1.28)$$

#### 1.4.4 Opérateurs de troncature dans $W_0^1 L_A(\Omega)$

Pour  $k > 0$ , on définit la troncature à hauteur  $k$ , notée  $T_k$ , par :

$$T_k(s) = \frac{1}{2} \{|s+k| - |s-k|\} = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq k \\ k \frac{s}{|s|} & \text{si } |s| \geq k. \end{cases}$$

On a alors les propriétés suivantes :

1.  $\forall u \in W_0^1 L_A(\Omega), T_k(u) \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .
2.  $\nabla T_k(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u(x)| \geq k \\ \nabla u & \text{si } |u(x)| < k \end{cases}$  presque partout sur  $\Omega$ .
3. Si  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$  pour  $\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}})$ , alors  $T_k u_n \rightharpoonup T_k u$  dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$  pour  $\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}})$ .

Ces propriétés sont un cas particulier du résultat suivant, établi dans [55], généralisant ainsi le lemme de Stampacchia, dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz :

**Lemme 1.4.10 ([55])** .

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément Lipchitzienne, telle que  $F(0) = 0$ .

1. Soit  $u \in W_0^1 L_A(\Omega)$  (resp.  $W_0^1 E_A(\Omega)$ ) alors  $Fu \in W_0^1 L_A(\Omega)$  (resp.  $W_0^1 E_A(\Omega)$ ).
2. On suppose que l'ensemble des points de discontinuité  $D$  de  $F'$  est fini, alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(u) = \begin{cases} F'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} & \text{p.p. dans } \{x \in \Omega, u(x) \notin D\} \\ 0 & \text{p.p. dans } \{x \in \Omega, u(x) \in D\}. \end{cases}$$

3.  $F : W_0^1 L_A(\Omega) \rightarrow W_0^1 L_A(\Omega)$  est séquentiellement continue relativement à la topologie faible\*.

### 1.4.5 Inégalité de Poincaré

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , alors  $\exists c > 0$  (dépendant de  $\Omega$  et de  $A$ ) tel que :

$$\|u\|_A \leq c \|\nabla u\|_A, \forall u \in W_0^1 L_A(\Omega).$$

En particulier l'expression  $\|\nabla u\|_A$  est une norme sur  $W_0^1 L_A(\Omega)$  équivalente à  $\|u\|_{1,A}$  (voir [51]).

### 1.4.6 Les théorèmes d'injection

Rappelons d'abord les théorèmes d'injection de Sobolev classiques, d'ordre 1. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  (avec  $N \geq 2$ ) et  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , l'espace de Sobolev d'ordre 1 et à trace nulle sur  $\partial\Omega$ , muni de la norme du gradient  $\|\nabla u\|_{L^p}$ , alors :

**a)** Si  $1 \leq p < N$ , on a l'injection optimale  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$  avec  $p^* = \frac{Np}{N-p}$ .

De plus  $\forall q \in [1, p^*[$ , on a l'injection compacte  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ .

**b)** Si  $p > N$  alors  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

Dans le cas  $p = N$ , alors  $\exists c > 0$  tel que  $\|u\|_{L^q} \leq c \|\nabla u\|_{L^N}$ ,  $\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega)$  et  $\forall q \geq 1$ ; de ce fait, il n'existe pas d'espace  $L^q(\Omega)$  optimal dans lequel s'injecte continument  $W_0^{1,N}(\Omega)$ . Par contre, une injection optimale de  $W_0^{1,N}(\Omega)$  dans un espace d'Orlicz est établie dans [86] (voir aussi [73] et [88]); en effet on a :

**c)**  $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_N}(\Omega)$  avec  $\Phi_N(t) = \exp t^{\frac{N}{N-1}} - 1$ ,

injection qu'on exprime par :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \|u\|_{\Phi_N} \leq c \|\nabla u\|_{L^N}, \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

cette inégalité s'exprimant sous la forme équivalente suivante :

$$\int_{\Omega} \exp \left( \frac{|u(x)|}{\alpha \|\nabla u\|_{L^N}} \right)^{\frac{N}{N-1}} dx \leq 1,$$

(avec  $\alpha$  constante  $> 0$ , dépendante de  $N$  et de  $\text{mes}(\Omega)$ ), est connue sous l'appellation de l'inégalité de Trudinger-Moser.

Des résultats d'injection, analogues à ceux obtenus sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , peuvent être formulés sur l'espace de Sobolev-Orlicz  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , les premiers résultats dans ce sens, sont présentés par Donaldson-Trudinger dans [45] et ceci, en construisant une fonction de Young notée  $A^*$ , reproduisant la fonction  $A_{p^*}(t) = |t|^{p^*}$  dans le

cas où  $A(t) = |t|^p$ .

En effet, étant donné  $A$  une fonction de Young, en notant  $A^*$  la fonction définie

comme l'inverse de  $\int_0^r \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt$ , on a alors :

**Théorème 1.4.11 ([45])**

a) Si  $\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt = +\infty$ , alors  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L_{A^*}(\Omega)$  et  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow E_B(\Omega)$

pour toute  $N$ -fonction  $B$  vérifiant  $B \ll A^*$  à l'infini.

b) Si  $\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt < +\infty$ , alors  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

En particulier, du fait que  $A \ll A^*$  à l'infini (cf. [51], lemme 4.14), on obtient :

$$W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow E_A(\Omega). \quad (1.29)$$

**Remarque 1.4.12**

*Ces injections continues et compactes de Donaldson-Trudinger, même si elles reproduisent celles de Sobolev et de Rellich-Kondrachov (pour les espaces de Sobolev standards) dans le cas où  $A(t) = |t|^p$  avec  $p \neq N$ , se sont avérées non optimales dans les cas limite, i.e. quand  $A(t)$  est "proche" de  $|t|^N$ . En effet :*

*D'une part, dans le cas où  $\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt = +\infty$  et que  $A(t) \sim |t|^N$  à l'infini, alors*

*$A^*(t) \sim \exp|t| - |t| - 1$  à l'infini.*

*Or  $\exp|t| - |t| - 1 \ll \exp t^{\frac{N}{N-1}} - 1$  à l'infini; ainsi en comparant le résultat d'injection de Trudinger (le cas c) ci-dessus) avec le théorème d'injection 1.4.11, on déduit que ce dernier résultat est non optimal.*

*D'autre part, Talenti dans [84], établit en utilisant les techniques de réarrangement, le résultat d'injection  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ , avec une condition plus faible*

*que la condition  $\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt < +\infty$  et qui est la condition  $\int_1^\infty \frac{\bar{A}(t)}{t^{1+\frac{N}{N-1}}} dt < +\infty$  et*

*ceci, dans le sens où l'on a les implications suivantes (voir [85]) :*

$$\int_1^\infty \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt < +\infty \Rightarrow \int_1^\infty \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\frac{1}{N-1}} dt < +\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\bar{A}(t)}{t^{1+\frac{N}{N-1}}} dt < +\infty.$$

Finalement, utilisant les travaux de Talenti, A. Cianchi établit un résultat d'injection dans [38], en utilisant la fonction  $\Psi_N(s) = \int_0^s \frac{\bar{A}(t)}{t^{1+\frac{N}{N-1}}} dt$  puis dans [39],

en utilisant la fonction  $H_N(s) = \left[ \int_0^s \left( \frac{t}{A(t)} \right)^{\frac{1}{N-1}} dt \right]^{\frac{1}{N'}}$ .

**Théorème 1.4.13 ([38])** Soient  $A$  une fonction de Young et  $A_N^\Psi$  la fonction de Young définie par :  $A_N^\Psi(s) = \int_0^s r^{N'-1} \left[ \Psi_N^{-1}(r^{N'}) \right]^{N'}$   $dr$ , avec  $N' = \frac{N}{N-1}$  et  $\Psi_N^{-1}$  l'inverse généralisé continu à droite de  $\Psi_N$ . Alors  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L_{A_N^\Psi}(\Omega)$ .

**Théorème 1.4.14 ([39])** Soient  $A$  une fonction de Young et  $A_N^H$  la fonction de Young définie par :  $A_N^H(t) = A \left[ H_N^{-1}(t) \right]$  où  $H_N^{-1}$  est l'inverse généralisé de  $H_N(s)$ . Alors  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L_{A_N^H}(\Omega)$ .

#### Remarque 1.4.15

1. Les fonctions de Young  $A_N^\Psi$  et  $A_N^H$  sont équivalentes.
2. L'espace  $L_{A_N^\Psi}(\Omega) = L_{A_N^H}(\Omega)$  est le plus petit espace d'Orlicz dans lequel s'injecte continument  $W_0^1 L_A(\Omega)$ .
3. Dans le cas où  $\int_1^\infty \left( \frac{t}{A(t)} \right)^{\frac{1}{N-1}} dt < +\infty$  (et de même  $\int_1^\infty \frac{\bar{A}(t)}{t^{1+\frac{N}{N-1}}} dt < +\infty$ ), alors  $A_N^H(t) = A_N^\Psi(t) = +\infty$  pour  $t$  suffisamment grand i.e. que  $L_{A_N^\Psi}(\Omega) = L_{A_N^H}(\Omega) = L^\infty(\Omega)$ ; ces injections reproduisent dans ce cas, le résultat d'injection de Talenti [84].
4. L'expression de  $A_N^H(t)$  est plus commode que celle de  $A_N^\Psi(t)$  dans le sens où l'inégalité du type de Sobolev-Poincaré  $\|u\|_{A_N^H} \leq c_1 \|\nabla u\|_A$  interprétant l'injection  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L_{A_N^H}(\Omega)$ , s'exprime de manière équivalente, dans ce cas, par :

$$\int_\Omega A_N^H \left[ \frac{|u(y)|}{c_2 \left( \int_\Omega A(|\nabla u|) dx \right)^{\frac{1}{N}}} \right] dy \leq \int_\Omega A(|\nabla u|) dx, \quad \forall u \in W_0^1 L_A(\Omega)$$

**Corollaire 1.4.16** Pour toute fonction de Young  $B$  vérifiant  $B \ll A_N^H$  à l'infini on a  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow E_B(\Omega)$ .

Du fait de la complexité des expressions de  $A_N^H$  et de  $A_N^\Psi$ , il n'est pas du tout aisé de comparer la croissance d'une N-fonction donnée  $B$  avec  $A_N^\Psi$  (ou  $A_N^H$ ), pour

cela, on établit un résultat précisant d'une certaine manière, le comportement de  $A_N^\Psi$  au voisinage de l'infini en fonction de celui de  $A$ , dans le cas où  $A$  est à variation régulière, dans le sens suivant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tA'(t)}{A(t)} = p \in [1, +\infty] \text{ existe ;}$$

$p$  est appelé indice de  $A$ .

**Lemme 1.4.17 ([34])** *Soit  $A$  une  $N$ -fonction et  $A_N^\Psi$  la fonction de Young définie dans le théorème 1.4.13, alors :*

a) *Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tA'(t)}{A(t)} = p$  avec  $1 \leq p \leq N$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tA_N^{\Psi'}(t)}{A_N^\Psi(t)} = \frac{Np}{N-p}$*

b) *Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tA'(t)}{A(t)} = N$  et que  $\int_1^\infty \frac{\bar{A}(t)}{t^{1+\frac{N}{N-1}}} dt < +\infty$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tA_N^{\Psi'}(t)}{A_N^\Psi(t)} = +\infty$*

c) *Soit  $A$  une  $N$ -fonction d'indice  $p$ , alors :*

$$W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow E_B(\Omega).$$

*pour toute  $N$ -fonction  $B$ , d'indice  $q$  vérifiant :*

$$q < \frac{Np}{N-p} \text{ (respectivement } q < \infty) \text{ si } 1 \leq p < N \text{ (respectivement } p \geq N).$$

# Chapitre 2

## Existence de solutions pour une classe d'équations elliptiques à données $L^1$ dans les espaces de Sobolev-Orlicz

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de Dirichlet, pour une classe d'équations elliptiques non linéaires du type :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u) + c(x, u) A(|\nabla u|) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

ici,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant la propriété du segment,  $N \geq 2$  et  $A$  est une N-fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que  $A'(t) = a(t)t$ . Les deux fonctions  $b$  et  $c$  sont de Carathéodory, définies de  $\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et vérifient certaines conditions de croissance et de signe. Ces équations généralisent celles issues du calcul de variations, en ce sens qu'avec la condition  $c(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} b(x, s)$ , l'équation (2.1), apparaît comme étant l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle :

$$I(v) = \int_{\Omega} b(x, v) A(|\nabla v|) dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

La difficulté principale dans le traitement de ces problèmes est de considérer une N-fonction  $A$ , sans la condition  $\Delta_2$ ; en effet, sans cette condition, l'opéra-

teur particulier  $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(a(|\nabla u|)\nabla u)$ , qui est une généralisation naturelle du  $p$ -Laplacien, et qui opère de  $W_0^1 L_A(\Omega)$  à valeur dans  $W^{-1} L_{\bar{A}}(\Omega)$ , est non partout défini dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$  (i.e.  $D(\mathcal{L}) \subsetneq W_0^1 L_A(\Omega)$ ) et est non borné en général, i.e. dans le cas où  $A$  ne vérifie pas la condition  $\Delta_2$  (voir exemple 1.3.17).

La seconde difficulté est de considérer un second membre  $f$  dans  $L^1(\Omega)$  et non dans l'espace en dualité  $W^{-1} E_{\bar{A}}(\Omega)$ .

La troisième difficulté est la présence du terme  $c(x, u) A(|\nabla u|)$ , perturbé de l'opérateur  $-\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|)\nabla u)$ , avec une croissance non contrôlée en  $u$ , n'appartenant pas nécessairement à  $W^{-1} E_{\bar{A}}(\Omega)$ , et ne permettant pas ainsi, une utilisation directe des méthodes variationnelles développées par J.-P. Gossez dans [51], [52], [55] et [56], pour des problèmes bien posés dans le cadre variationnel des espaces de Sobolev-Orlicz.

La dernière difficulté, qu'on a particulièrement prise en compte dans ce travail, est la croissance non contrôlée de  $b(x, s)$  en  $s$ , plus précisément, on suppose que :

$$0 < \alpha \leq b(x, s) \leq \beta(s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } x \in \Omega,$$

avec  $\beta$  continue, croissante et non bornée éventuellement.

Dans le cas où  $\beta$  est bornée, l'étude de ces problèmes a fait l'objet de nombreux travaux récents utilisant les équations elliptiques, écrites sous la forme générale suivante :

$$\mathcal{A}_0 u + g(x, u, \nabla u) = f \tag{2.2}$$

où

$$\mathcal{A}_0 u = -\operatorname{div} \hat{a}(\cdot, u, \nabla u)$$

est un opérateur de type Leray-Lions défini sur  $D(\mathcal{A}_0) \subset W_0^1 L_A(\Omega)$  et à valeurs dans  $W^{-1} L_{\bar{A}}(\Omega)$ .

Ici  $\hat{a} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est une fonction de Carathéodory, vérifiant les conditions générales de croissance, de coercivité et de pseudomonotonie suivantes :

**(i) Condition de croissance :** Il existe deux N-fonctions  $P$  et  $A$  vérifiant  $P \ll A$  à l' $\infty$ , des constantes  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  positives et une fonction  $C \in E_{\bar{A}}(\Omega)$  telles que :

$$|\hat{a}(x, s, \xi)| \leq C(x) + k_1 \bar{P}^{-1} A(k_2 |s|) + k_3 \bar{A}^{-1} A(k_4 |\xi|) \tag{2.3}$$

et ceci  $\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  et p.p  $x \in \Omega$ .

(ii) **Condition de coercivité** :  $\exists \alpha > 0, \exists \lambda > 0$  tels que :

$$\hat{a}(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha A \left( \frac{|\xi|}{\lambda} \right) \quad (2.4)$$

et ceci  $\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  et p.p.  $x \in \Omega$ .

(iii) **Condition de monotonie** :

$$[\hat{a}(x, s, \xi) - \hat{a}(x, s, \eta)] [\xi - \eta] > 0, \quad (2.5)$$

pour presque tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $\xi$  et  $\eta \in \mathbb{R}^N$ , avec  $\xi \neq \eta$ .

**Conditions sur  $g$  :**

La fonction  $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$  est de Carathéodory, et vérifie la propriété de croissance suivante :

$$|g(x, s, \xi)| \leq \gamma(|s|) (d(x) + A(|\xi|)) \quad \text{p.p } x \in \Omega \text{ et } \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (2.6)$$

avec  $\gamma$  une fonction continue et croissante et  $d$  une fonction positive de  $L^1(\Omega)$ .

Nous supposons de plus que la fonction  $g$  vérifie la condition de signe :

$$g(x, s, \xi) s \geq 0 \quad (2.7)$$

et la condition de coercivité à l'infini i.e. :

$$\exists \sigma \geq 0 \text{ et } \lambda > 0 \text{ tel que } g(x, s, \xi) \text{ sign } s \geq \lambda A(|\xi|), \forall s, |s| \geq \sigma, \quad (2.8)$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ .

Quand la donnée  $f$  est dans  $L^1(\Omega)$ , les premiers résultats d'existence de solutions du problème de Dirichlet associé à l'équation (2.2), avec la condition  $\Delta_2$ , et sous les conditions (2.3) – (2.8), sont présentés dans [11], puis dans [13], sans la condition de coercivité (2.8); néanmoins, même avec la restriction  $\Delta_2$ , ces travaux généralisent les travaux analogues, présentés dans le cadre des espaces de Sobolev classiques, [21] et [74] respectivement.

Le résultat de [13], est généralisé par la suite, dans [47], par Elmahi-Meskine, sans la condition  $\Delta_2$ , toutefois, concernant les solutions de type entropique présentées dans ce travail, seule la régularité des tronqués est établie, c'est-à-dire que  $T_k(u) \in W_0^1 L_A(\Omega)$ .

**Remarque 2.1.1**

La non homogénéité des  $N$ -fonctions et les injections de Sobolev-Orlicz assez complexes, ne permettent pas d'établir des résultats de régularité aussi précis que ceux établis dans les Sobolev classiques. Néanmoins, en se référant à l'article de Talenti [83], (voir aussi [15]), on retrouve un résultat de régularité, analogue à la régularité  $\bigcap_{1 \leq q < \frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ , établi pour les problèmes à donnée  $L_1$ , dans [74]

(voir aussi [22],[23] et [79]), et qui est la régularité  $\bigcap_{Q \in \mathcal{Q}_A} W_0^1 L_Q(\Omega)$ , tel que :

$$\mathcal{Q}_A = \left\{ Q, Q \text{ } N\text{-fonction telle que } \frac{Q''}{Q'} \leq \frac{A''}{A'} \text{ et } \int_0^1 Q \circ H^{-1} \left( \frac{1}{t^{1-\frac{1}{N}}} \right) dt < \infty \right\}$$

avec  $H(t) = \frac{A(t)}{t}$ , et ce, en supposant que  $\mathcal{Q}_A \neq \emptyset$ .

Dans le cas où  $A(t) = t^p$ , avec  $p > 1$ , en notant  $A_q(t) = t^q$ , on vérifie que  $A_q \in \mathcal{Q}_A$  si et seulement si  $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$ .

Signalons cependant, qu'en imposant la condition de coercivité (2.8) (qui a un effet régularisant) et les conditions (2.3) – (2.6), un résultat d'existence de solutions de type entropique, appartenant à  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , est présenté dans [87] et ceci, sans la condition  $\Delta_2$ , généralisant, le résultat de [25], établi dans le cadre des espaces de Sobolev classiques; toutefois, dans ce travail, l'auteur utilise la condition de coercivité (2.8) pour l'approximé

$$g_n(x, u_n, \nabla u_n) = \frac{g(x, u_n, \nabla u_n)}{1 + \frac{1}{n} |g(x, u_n, \nabla u_n)|}$$

Nous pensons que cette condition de coercivité n'est pas conservée sur  $g_n$  en général; c'est pour cette raison à notre avis, que dans le cadre des espaces de Sobolev classiques, les auteurs, dans ([25], théorème 2.1), ont au préalable démontré un résultat d'existence de solutions pour le problème approché, ne conservant de  $g_n$  que la condition de signe à l'infini, mais avec une donnée suffisamment régulière pour le second membre, permettant ainsi d'utiliser les techniques de Stampacchia [82] pour l'estimation  $L^\infty(\Omega)$  des solutions approchées et par voie de conséquence, obtenir l'existence de solutions de ce problème approché.

Les injections de Sobolev-Orlicz, pratiquement inopérantes dans les estimations à priori, rendent difficiles à notre connaissance, l'adaptation de ces techniques au cadre des espaces de Sobolev-Orlicz, néanmoins, l'ajout de la condition

de signe globale (2.7), permet d'éviter ce type de situation.

Ainsi, la condition de signe (2.7), jointe à la condition de coercivité (2.8), nous permet d'établir un résultat d'existence de solutions du problème (2.1) dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$  avec  $b(x, u)$  non borné éventuellement en  $u$ , généralisant par la même, au cadre des espaces de Sobolev-Orlicz, les résultats obtenus dans [29] (voir aussi [65]).

## 2.2 Position du problème

On considère le problème de Dirichlet dans sa formulation un peu plus générale que celle de (2.1), et qui est :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u) + g(x, u, \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

avec :

$g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de Carathéodory, vérifiant la propriété de croissance (2.6) et les conditions de signe et de coercivité (2.7) et (2.8), introduites ci-dessus.

$b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Carathéodory vérifiant :

$$0 < \alpha \leq b(x, s) < \beta(s), \quad (2.10)$$

pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$  et  $\forall s \in \mathbb{R}$ , avec  $\beta$  continue, croissante et non bornée éventuellement et  $\alpha$  une constante positive.

$a : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^*$ , telle qu'il existe une N-fonction  $A$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , vérifiant :

$$A'(t) = a(|t|)t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

**Remarque 2.2.1** Dans le cas où  $g(x, s, \xi) = c(x, s) A(|\xi|)$ , les hypothèses (2.6)-(2.8) et (2.10), s'expriment de manière équivalente par :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \text{ et } c : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ des fonctions de Carathéodory} \\ \text{telles que pour p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall s \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq b(x, s) \leq \beta(s), \\ |c(x, s)| \leq \gamma(s) \text{ avec } \beta \text{ et } \gamma \text{ deux fonctions positives continues} \\ \text{croissantes et non bornées éventuellement et } \exists \sigma \geq 0, \exists \lambda > 0 \\ \text{tel que } c(x, s) \operatorname{sign} s \geq \lambda, \forall s, |s| \geq \sigma \text{ et } c(x, s) \operatorname{sign} s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (H_2)$$

**Remarque 2.2.2** *L'hypothèse (2.11) s'exprime de manière équivalente par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a : \text{fonction définie sur } \mathbb{R}^* \text{ telle que } a(t) > 0, \forall t > 0 \\ \tilde{a}(t) = a(|t|)t \text{ continue, croissante et vérifie :} \\ \lim_{t \rightarrow 0} a(t)t = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t)t = +\infty \\ A(t) = \int_0^t a(s) ds. \end{array} \right. \quad (H_1)$$

On énonce à présent notre résultat principal :

**Théorème 2.2.3** *Soit  $f \in L^1(\Omega)$ , sous les hypothèses (2.6)-(2.8), (2.10) et (2.11), le problème (2.9) admet au moins une solution  $u$  dans le sens suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^1 L_A(\Omega) , g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi) dx \\ = \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi) dx \\ \text{et ce } \forall \varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } \forall k > 0. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

**Remarque 2.2.4**

1. *Etant donné que  $b(x, u)$  est non borné éventuellement en  $u$ , le terme  $b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u$  n'appartient pas nécessairement à  $(L^1(\Omega))^N$ , et par suite, le terme  $-\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u)$  n'a pas de sens en général au sens des distributions; aussi, pour surmonter cette difficulté, on utilise une formulation plus faible que celle au sens des distributions et qui est la formulation entropique introduite dans [9].*
2. *Un problème similaire a été traité dans le cas d'opérateurs de type Leray-Lions, perturbés par un terme d'ordre un, non borné, exprimé sous forme divergence dans [26] et dont la difficulté a été surmontée par l'utilisation de la notion de solution renormalisée (voir aussi [2], dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz) et dans [30], par l'utilisation de la notion de solution entropique.*
3. *Notons que, même dans le cas où  $b(x, u)$  est borné, Elmahi-Meskine et A. Youssfi utilisent cette formulation entropique dans [47] et [87], leur permettant ainsi de faire un passage à la limite dans le problème approché, étant donné que dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz générés par une*

$N$ -fonction sans condition  $\Delta_2$ , la suite  $(a(x, u_n, \nabla u_n))_n$  n'est pas bornée en général dans  $(L_{\bar{A}}(\Omega))^N$  pour une suite bornée  $(u_n)_n$  dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$ ; ce qui a nécessité l'utilisation de la suite  $(a(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)))_n$ , conduisant naturellement à la notion de solutions de type entropique.

### 2.3 Preuve du théorème 2.2.3

La preuve de ce théorème se fera en plusieurs étapes.

**Etape 1 :. Approximation de l'opérateur**  $-\operatorname{div}(b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u)$ .

On commence par introduire l'approximé de  $b(x, u)$  par  $b_n(x, u) = b(x, T_n(u))$  avec :

$$T_n(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq n \\ \frac{sn}{|s|} & \text{si } |s| > n \end{cases}$$

De l'hypothèse (2.10), on déduit que pour tout  $n$  fixé :

$$0 < \alpha \leq b_n(x, s) < \beta(n) \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall s \in \mathbb{R}.$$

**Lemme 2.3.1** Soit  $A$  la  $N$ -fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et de densité  $\tilde{a}(t) = a(|t|)t$ . Alors pour tout  $n$  fixé, l'opérateur  $\mathcal{A}_n$  défini par  $\mathcal{A}_n(u) = -\operatorname{div}(b_n(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u)$  opère de  $D(\mathcal{A}_n) \subset W_0^1 L_A(\Omega)$  dans  $W^{-1} L_{\bar{A}}(\Omega)$  et vérifie les conditions de croissance, de coercivité et de pseudomonotonie **(i)** **(ii)** et **(iii)**; de plus, la fonction :  $(x, s, \xi) \rightarrow \hat{a}_n(x, s, \xi) = b_n(x, s) a(|\xi|) \xi$  est de Carathéodory.

**Preuve.**

**(i) condition de croissance :**

En utilisant l'égalité de Young, on a :

$$\bar{A}(\tilde{a}(t)) \leq \bar{A}(\tilde{a}(t)) + A(t) = t\tilde{a}(t) \leq \int_t^{2t} \tilde{a}(\tau) d\tau \leq A(2t), \forall t \geq 0 \text{ d'où :}$$

$$\tilde{a}(t) \leq \bar{A}^{-1} A(2t)$$

Il s'en suit que :

$$|\hat{a}_n(x, s, \xi)| = |b_n(x, s) a(|\xi|) \xi| \leq \beta(n) \bar{A}^{-1} A(2|\xi|) \quad (2.13)$$

p.p. en  $x \in \Omega$  et  $\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

**(ii) condition de coercivité :**

On a :

$$\hat{a}_n(x, s, \xi) \xi = b_n(x, s) a(|\xi|) |\xi|^2 \geq \alpha \int_0^{|\xi|} a(\tau) \tau d\tau = \alpha A(|\xi|). \quad (2.14)$$

(iii) condition de monotonie :

On a

$$\begin{aligned} [\hat{a}_n(x, s, \xi) - \hat{a}_n(x, s, \eta)] [\xi - \eta] &= b_n(x, s) [a(|\xi|)\xi - a(|\eta|)\eta] [\xi - \eta] \\ &\geq \alpha [\nabla(A(|\xi|)) - \nabla(A(|\eta|))] [\xi - \eta] > 0, \forall \xi \neq \eta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

■

### Etape 2 : Approximation du problème

L'existence de solutions du problème de Dirichlet (2.9) sera établi par approximation.

On introduit la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des tronqués de  $f$  par :

$$f_n(x) = T_n(f(x)), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors  $f_n \in L^\infty(\Omega) \subset W^{-1}E_{\bar{A}}(\Omega)$ , ainsi, en tenant compte du lemme 2.3.1, et des conditions (2.6) et (2.7), le problème de Dirichlet approché :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(b_n(x, u_n) a(|\nabla u_n|) \nabla u_n) + g(x, u_n, \nabla u_n) = f_n & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

vérifie les conditions d'existence d'une solution  $u_n \in W_0^1 L_A(\Omega)$ , (résultat établi par Elmahi-Meskine dans [46]), dans le sens que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_n(x, u_n) a(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v dx + \int_{\Omega} g(x, u_n, \nabla u_n) v dx &= \int_{\Omega} f_n(x) v dx \\ \forall v \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Notons aussi que :

$$f_n \text{ converge fortement vers } f \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ avec } \|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

### Etape 3 : Estimation à priori

En choisissant comme fonction test dans (2.17) :

$$v = T_\sigma(u_n) \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

on obtient d'une part, en utilisant la condition de coercivité (2.14) et la condition de signe  $g(x, u_n, \nabla u_n) T_\sigma(u_n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , que :

$$\alpha \int_{\Omega} A(|\nabla T_\sigma(u_n)|) dx + \int_{|u_n| \geq \sigma} g(x, u_n, \nabla u_n) T_\sigma(u_n) dx \leq \int_{\Omega} f_n T_\sigma(u_n) dx \leq \sigma \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

## 2. Existence de solutions pour une classe d'équations elliptiques à données $L^1$ dans les espaces de Sobolev-Orlicz 54

et d'autre part, comme  $T_\sigma(u_n) = \sigma \text{sign } u_n$  si  $|u_n| \geq \sigma$ , alors en utilisant la condition de coercivité à l'infini (2.8), on a :

$$\alpha \int_{\Omega} A(|\nabla T_\sigma(u_n)|) dx + \lambda \sigma \int_{|u_n| \geq \sigma} A(|\nabla(u_n)|) dx \leq \sigma \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

par conséquent :

$$\int_{\Omega} A(|\nabla(u_n)|) dx \leq c_1, \text{ avec } c_1 \text{ constante indépendante de } n, \quad (2.18)$$

par suite :

$$\|u_n\|_{W_0^1 L_A(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_{L_A(\Omega)} \leq 1 + \int_{\Omega} A(|\nabla(u_n)|) dx \leq c_2. \quad (2.19)$$

De l'estimation (2.19) et de l'injection compacte  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow E_A(\Omega)$ , on peut extraire une sous-suite notée de même  $u_n$ , convergeante vers  $u \in W_0^1 L_A(\Omega)$  dans les sens suivants :

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W_0^1 L_A(\Omega) & \text{pour } \sigma \text{ (} \Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}} \text{)} \\ u_n \rightarrow u & \text{dans } E_A \text{ - fort} \\ u_n(x) \rightarrow u(x) & \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.20)$$

**Etape 4 : La suite  $[b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n)]_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $[L_{\bar{A}}(\Omega)]^N$  pour tout  $k > 0$**

Dans le cas où  $A$  vérifie la condition  $\Delta_2$  à l'infini, cette propriété est une conséquence directe de la bornitude de  $\int_{\Omega} A(|\nabla T_k(u_n)|) dx$ .

En effet on a :

$$\begin{aligned} \|b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n)\|_{\bar{A}} &\leq \beta(k) \|a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n)\|_{\bar{A}} \\ &\leq \beta(k) \left[1 + \int_{\Omega} \bar{A}(|a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n)|) dx\right] \\ &\leq \beta(k) \left[1 + \int_{\Omega} A(2|\nabla T_k(u_n)|) dx\right], \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant la condition  $\Delta_2$  et la bornitude de  $\int_{\Omega} A(|\nabla T_k(u_n)|) dx$ .

### Preuve du cas général.

En utilisant la norme d'Orlicz, il s'agit de montrer que  $\forall \omega \in [L_A(\Omega)]^N$  telle que  $\|\omega\|_A \leq 1$ ,  $\int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n) \omega dx$  est bornée.

D'après (2.15) on a :

$$\int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) \left[ a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n) - a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \frac{\omega}{2} \right] \left[ \nabla T_k(u_n) - \frac{\omega}{2} \right] dx \geq 0,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n) \frac{\omega}{2} dx \\
 & \leq \int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) |\nabla T_k(u_n)|^2 dx \\
 & + \int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) \left[ a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right|^2 - a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \frac{\omega}{2} \nabla T_k(u_n) \right] dx.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour estimer le premier terme de droite de (2.21), on choisit comme fonction test dans (2.17),  $v = T_k(u_n)$  et en utilisant la condition de signe (2.7), on obtient alors :

$$\int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) |\nabla T_k(u_n)|^2 dx \leq k \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young et les relations (1.5) et (1.6) dans le dernier terme de (2.21), on déduit que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} b_n(x, T_k(u_n)) \left[ a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right|^2 - a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \frac{\omega}{2} \nabla T_k(u_n) \right] dx \right| \\
 & \leq \beta(k) \int_{\Omega} a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right|^2 dx + \beta(k) \int_{\Omega} a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right| |\nabla T_k(u_n)| dx \\
 & \leq \beta(k) \int_{\Omega} a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right|^2 dx + \beta(k) \left[ \int_{\Omega} \bar{A} \left[ a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right| \right] dx + \int_{\Omega} \nabla |T_k(u_n)| dx \right] \\
 & \leq 2\beta(k) \int_{\Omega} a\left(\left|\frac{\omega}{2}\right|\right) \left|\frac{\omega}{2}\right|^2 dx + c_1(k) \leq 2\beta(k) \int_{\Omega} A(|\omega|) dx + c_1(k) \leq c_2(k).
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|b_n(x, T_k(u_n)) a(|\nabla T_k(u_n)|) \nabla T_k(u_n)\|_{\bar{A}}^0 \leq c_3(k) \quad \forall k > 0$$

où  $c_i(k)$ ,  $i = 1, 3$  sont des constantes qui dépendent uniquement de  $k$ .

### **Etape 5 : convergence presque partout des gradients**

Cette étape est motivée par le fait que l'opérateur  $\mathcal{A}$ , est non linéaire par rapport au gradient de  $u$ , d'où sa nécessité pour faire un passage à la limite dans le problème approché.

Il suffit en fait de montrer que  $\nabla T_k(u_n)$  converge presque partout vers  $\nabla T_k(u)$   $\forall k > 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (ou du moins pour une sous-suite notée de même  $\nabla T_k(u_n)$ ).

**Lemme 2.3.2 ([63]lemme6)**

Soit  $\hat{a} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction de Carathéodory, vérifiant la condition de monotonie,  $(s_n)$  une suite convergente,  $(\xi_n)$  une suite de  $\mathbb{R}^N$  et  $\xi \in \mathbb{R}^N$  tels que  $[\hat{a}(x, s_n, \xi_n) - \hat{a}(x, s_n, \xi)] [\xi_n - \xi] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  p.p.  $x \in \Omega$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi$ .

Comme la suite  $(u_n)_n$  des solutions du problème approché (2.17) converge p.p. vers  $u$  sur  $\Omega$ , pour montrer que  $\nabla T_k(u_n)$  converge p.p. vers  $\nabla T_k(u)$ , il suffit alors de démontrer que

$$b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k] [\nabla u_n^k - \nabla u^k] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.22)$$

p.p.  $x \in \Omega$ , ( $u_n^k$  désigne  $T_k(u_n)$  et  $u^k$  désigne  $T_k(u)$ ).

La propriété (2.22) est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 2.3.3** Soit  $\Omega_l = \{x \in \Omega, |\nabla T_k(u)| \leq l\}$ , on note  $\chi_l$  la fonction caractéristique de  $\Omega_l$ , alors :

$$\int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l] [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx \rightarrow 0$$

quand  $n$  et  $l$  tendent vers  $l'_{\infty}$  et ceci pour tout  $k$  fixé  $> 0$ .

(2.23)

**Remarque 2.3.4** Compte tenu du fait que :  $0 < \alpha \leq b_n(x, T_k(u_n)) \leq \beta(k)$ ,  $\forall n > k$  et  $\forall x \in \Omega$ , le lemme 2.3.3, se démontre avec exactement les mêmes techniques que celles utilisées dans [47], pour l'équation générale (2.2) ; en effet, il suffit tout simplement de considérer  $n$  suffisamment grand i.e.  $n - 1 > m > k$  ( $m$  étant le paramètre de la fonction plateau intervenant dans la fonction test choisie dans [47]) et d'adapter ainsi la preuve présentée par ces auteurs.

**Remarque 2.3.5** De la propriété (2.23), on déduit que pour tout  $r$  fixé tel que  $0 \leq r \leq l$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k] [\nabla u_n^k - \nabla u^k] dx = 0. \quad (2.24)$$

En effet on a :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Omega_r} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k] [\nabla u_n^k - \nabla u^k] dx \\
 &\leq \int_{\Omega_l} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k] [\nabla u_n^k - \nabla u^k] dx \\
 &= \int_{\Omega_l} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l] [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx \\
 &\leq \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l] [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx.
 \end{aligned}$$

En résumé, on a (2.23)  $\Rightarrow$  (2.24)  $\Rightarrow$  (2.22) (ou du moins pour une sous-suite) et du lemme de Landes 2.3.2, on déduit que :

$$\nabla u_n \text{ converge p.p. vers } \nabla u \text{ dans } \Omega. \quad (2.25)$$

**Etape 6 : Autres résultats de convergence**

1. En utilisant la proposition 1.3.13, on déduit de (2.25) et du résultat de l'étape 4, que :

$$\begin{aligned}
 &b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k \rightharpoonup b(x, u^k) a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \\
 &\text{dans } [L_{\bar{A}}(\Omega)]^N \text{ pour } \sigma(\Pi L_{\bar{A}}, \Pi E_A) \text{ et ce, } \forall k > 0.
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

2. On a de plus la convergence forte suivante :

$$b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u_n^k|) |\nabla u_n^k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b(x, u^k) a(|\nabla u^k|) |\nabla u^k|^2 \text{ dans } L^1(\Omega) \text{-fort.} \quad (2.27)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u_n^k|) |\nabla u_n^k|^2 dx = \\
 &\int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) [a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k - a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l] [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx \\
 &+ \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx \\
 &+ \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k \nabla u^k \chi_l dx,
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

comme  $\nabla u^k \chi_l \in E_A(\Omega)$ , de (2.26), on obtient d'une part :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u_n^k|) \nabla u_n^k \nabla u^k \chi_l dx = \int_{\Omega} b(x, u^k) a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \nabla u^k \chi_l dx. \quad (2.29)$$

De plus :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(x, u^k) a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \nabla u^k \chi_l dx = \int_{\Omega} b(x, u^k) a(|\nabla u^k|) |\nabla u^k|^2 dx. \quad (2.30)$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx \right| \\ & \leq \beta(k) \int_{\Omega} a(|\nabla u^k|) |\nabla u^k \chi_l| |\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l| dx. \end{aligned}$$

Comme  $a(|\nabla u^k|) |\nabla u^k \chi_l| \in E_{\bar{A}}(\Omega)$  et que  $\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l \rightarrow \nabla u^k - \nabla u^k \chi_l$  pour  $\sigma(\Pi L_A, \Pi E_{\bar{A}})$ , il s'en suit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u^k|) \nabla u^k \chi_l [\nabla u_n^k - \nabla u^k \chi_l] dx = 0 \quad (2.31)$$

De (2.23), (2.29), (2.30) et (2.31), on déduit par passage à la limite dans (2.28), que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b_n(x, u_n^k) a(|\nabla u_n^k|) |\nabla u_n^k|^2 dx = \int_{\Omega} b(x, u^k) a(|\nabla u^k|) |\nabla u^k|^2 dx. \quad (2.32)$$

En utilisant le lemme ci-dessous (voir [59]), on déduit alors (2.27),

**Lemme 2.3.6**

Soit  $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$  et  $f \in L^1(\Omega)$  tel que  $f_n \geq 0$ ,  $f_n \rightarrow f$  p.p.  $x \in \Omega$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx,$$

alors  $f_n$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^1(\Omega)$ .

**3. Convergence modulaire.**

De (2.14), (2.25) et (2.27), on obtient, en appliquant le théorème de Lebesgue généralisé, conséquence du théorème de convergence de Vitali (voir théorème ci-dessous), que :

$$A(|\nabla T_k(u_n)|) \rightarrow A(|\nabla T_k(u)|) \text{ dans } L^1(\Omega)\text{-fort et ce } \forall k > 0. \quad (2.33)$$

**Théorème.** Soit  $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$  une suite telle que  $f_n \rightarrow f$  p.p.  $x \in \Omega$  et  $|f_n| \leq g_n$  avec  $g_n$  convergeant fortement dans  $L^1(\Omega)$  alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $f_n$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^1(\Omega)$ .

**Etape 7 : Equi-integrabilité de  $g(x, u_n, \nabla u_n)$**

En vue du passage à la limite dans le problème approché (2.16), nous allons montrer de plus, que :

$$g(x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow g(x, u, \nabla u) \text{ dans } L^1(\Omega) \text{-fort} \quad (2.34)$$

Du fait que  $g(x, u_n, \nabla u_n)$  converge presque partout vers  $g(x, u, \nabla u)$  (conséquence de (2.20) et (2.25)), il suffit alors, grâce au théorème de Vitali, de démontrer que la suite  $(|g(x, u_n, \nabla u_n)|)$  est equi-integrable dans  $\Omega$ .

Pour cela, on reprend les mêmes techniques déjà utilisées dans plusieurs travaux, à savoir [16], [19], [28], [27], [25] et [47].

En effet, pour tout  $m > 1$  et pour toute partie mesurable  $E$  de  $\Omega$ , on note :

$$I_{m,n}^1 = \int_{E \cap \{|u_n| > m\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx \text{ et } I_{m,n}^2 = \int_{E \cap \{|u_n| \leq m\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx.$$

On a alors :  $\int_E |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx = I_{m,n}^1 + I_{m,n}^2$ .

On choisit  $v = \psi_m(u_n)$ , avec  $\psi_m(s) = T_1(s - T_{m-1}(s))$ , comme fonction test dans (2.17), ce qui donne en utilisant (2.14) :

$$\alpha \int_{\Omega} A(|\nabla \psi_m(u_n)|) dx + \int_{\Omega} g(x, u_n, \nabla u_n) \psi_m(u_n) dx \leq \int_{\{|u_n| > m-1\}} |f_n| dx. \quad (2.35)$$

Etant donné que  $\psi_m(u_n)$  est de même signe que  $u_n$  et en particulier  $\psi_m(u_n) \text{sign } u_n$  vaut 1 sur  $\{x, |u_n(x)| > m\}$ , on déduit en supprimant des termes positifs de (2.35), l'inégalité :

$$\int_{\{|u_n| > m\}} |g(x, u_n, \nabla u_n)| dx \leq \int_{\{|u_n| > m-1\}} |f_n| dx \leq \|f\|_{L^1} \text{mes } \{x, |u_n(x)| > m-1\}.$$

La suite  $(u_n)$  étant bornée dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , donc dans  $L^1(\Omega)$ , par conséquent :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \in \mathbb{N}} \text{mes } \{x, |u_n(x)| > m-1\} = 0 \text{ et par suite } \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \in \mathbb{N}} I_{m,n}^1 = 0$$

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 > 1 \text{ tel que } \forall m \geq m_0, I_{m,n}^1 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et ce, } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.36)$$

Concernant le terme  $I_{m,n}^2$ , on a :

$$I_{m,n}^2 \leq \int_E |g(x, T_m(u_n), \nabla T_m(u_n))| dx \leq \gamma(m) \int_E (d(x) + A(|\nabla T_m(u_n)|)) dx$$

## 2. Existence de solutions pour une classe d'équations elliptiques à données $L^1$ dans les espaces de Sobolev-Orlicz 60

---

En vertu de la convergence forte de la suite  $[A(|\nabla T_m(u_n)|)]_n$  dans  $L^1(\Omega)$  et du fait que  $d(x) \in L^1(\Omega)$ , on déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0 \text{ tel que si } \text{mes}(E) < \mu \text{ alors } I_{m,n}^2 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et ce, } \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

De (2.36) et (2.37), on déduit que la suite  $(|g(x, u_n, \nabla u_n)|)$  est equi-integrable dans  $\Omega$  et par suite on a (2.34).

### Etape 8 : Passage à la limite

Soit  $\varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , en vertu de la proposition 1.4.7, il existe une suite  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\rho_A$ -convergente vers  $\varphi$  et vérifiant l'inégalité :

$$\|\varphi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (N+1) \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Posons  $v_n^j = T_k(u_n - \varphi_j)$  comme fonction test dans le problème approché (2.16) ; on notera qu'en posant  $M = k + (N+1) \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $n > M$  on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_n(x, u_n) a(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi_j) dx \\ &= \int_{\Omega} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) \nabla T_M(u_n) \nabla T_k(u_n - \varphi_j) dx. \end{aligned}$$

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) \nabla T_M(u_n) \nabla T_k(u_n - \varphi_j) dx \\ &+ \int_{\Omega} g(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - \varphi_j) dx = \int_{\Omega} f_n(x) T_k(u_n - \varphi_j) dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

De (2.27), on déduit que :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|u_n - \varphi_j| < k\}} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) |\nabla T_M(u_n)|^2 dx \\ &= \int_{\{|u - \varphi_j| < k\}} b(x, T_M(u)) a(|\nabla T_M(u)|) |\nabla T_M(u)|^2 dx \end{aligned}$$

et de (2.26), on déduit que :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|u_n - \varphi_j| < k\}} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) \nabla T_M(u_n) \nabla \varphi_j dx \\ &= \int_{\{|u - \varphi_j| < k\}} b(x, T_M(u)) a(|\nabla T_M(u)|) \nabla T_M(u) \nabla \varphi_j dx \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) \nabla T_M(u_n) \nabla T_k(u_n - \varphi_j) dx \\ &= \int_{\{|u_n - \varphi_j| < k\}} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) |\nabla T_M(u_n)|^2 dx \\ & - \int_{\{|u_n - \varphi_j| < k\}} b(x, T_M(u_n)) a(|\nabla T_M(u_n)|) \nabla T_M(u_n) \nabla \varphi_j dx \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(x, T_M(u)) a(|\nabla T_M(u)|) \nabla T_M(u) \nabla T_k(u - \varphi_j) dx \end{aligned}$$

D'autre part, du fait que  $T_k(u_n - \varphi_j) \rightharpoonup T_k(u - \varphi_j)$  dans  $L^\infty(\Omega)$ -faible\* et que  $g(x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow g(x, u, \nabla u)$  dans  $L^1(\Omega)$ -fort et  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1(\Omega)$ -fort, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - \varphi_j) dx &= \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi_j) dx \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) T_k(u_n - \varphi_j) dx &= \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi_j) dx \end{aligned}$$

et par passage à la limite sur  $n$  dans (2.38), on déduit que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, T_M(u)) a(|\nabla T_M(u)|) \nabla T_M(u) \nabla T_k(u - \varphi_j) dx \\ & + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi_j) dx = \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi_j) dx. \end{aligned} \tag{2.39}$$

La convergence modulaire de  $(\varphi_j)$  vers  $\varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$  permet finalement de faire un passage à la limite quand  $j \rightarrow \infty$ , dans (2.39) et

d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, T_M(u)) a(|\nabla T_M(u)|) \nabla T_M(u) \nabla T_k(u - \varphi) dx \\ & + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi) dx = \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi) dx, \end{aligned}$$

et comme  $\nabla T_k(u - \varphi) = 0$  sur  $\{x \in \Omega, |u| > k + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\}$  et en particulier sur

$\{x \in \Omega, |u| > M\}$  alors :  $\int_{\Omega} b(x, T_M(u)) a(|\nabla T_M(u)|) \nabla T_M(u) \nabla T_k(u - \varphi) dx =$

$$\int_{\{|u| < M\}} b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx = \int_{\Omega} b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx,$$

ce qui permet d'obtenir la formulation (2.12) et achever ainsi la démonstration du théorème 2.2.3.

**Remarque 2.3.7** Dans le cas où la  $N$ -fonction  $A$  vérifie la condition :

$$\int_1^\infty \left( \frac{t}{A(t)} \right)^{\frac{1}{N-1}} dt < +\infty, \quad (2.40)$$

le résultat d'injection  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$  dû à Talenti, permet d'affirmer dans ce cas, que les solutions  $u$  de type entropique du problème (2.9), sont bornées et par suite, sont des solutions au sens des distributions, i.e. que  $u$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^1 L_A(\Omega), \quad g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) \varphi dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi dx \\ \text{et ce } \forall \varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.41)$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned} & b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \in [L_{\bar{A}}(\Omega)]^N \subset [L^1(\Omega)]^N \\ & \text{et } b(x, u) a(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.8**

1. Le problème de Dirichlet associé à l'équation :

$$-div \left[ (1 + u^2 \sin^2 u) \log^p (1 + |\nabla u|) |\nabla u|^{N-2} \nabla u \right] + \lambda u \exp(u) A_1 (|\nabla u|) = f$$

avec  $\lambda > 0$ ,  $p > N - 1$  et  $A_1(t) = \int_0^{|t|} \tau^{N-1} \log^p(1 + \tau) d\tau$  et  $f \in L^1(\Omega)$ , admet au moins une solution bornée, au sens des distributions et appartenant à l'espace de Sobolev-Orlicz  $W_0^1 L^N \text{Log}^p L(\Omega)$

(L'espace d'Orlicz noté  $L^N \text{Log}^p L(\Omega)$ , appelé aussi espace de Zygmund, est l'espace généré par une  $N$ -fonction équivalente à l'infini à  $t^N \log^p t$ )

2. Le problème de Dirichlet associé à l'équation :

$$-div \left[ (1 + |u \cos u|)^m \exp(|\nabla u|^2) \nabla u \right] + \lambda u (\exp|\nabla u|^2 - 1) = f$$

avec  $\lambda > 0$ ,  $m > 0$  et  $f \in L^1(\Omega)$  admet au moins une solution au sens des distributions, bornée et appartenant à l'espace de Sobolev-Orlicz noté  $W_0^1 L_{\exp t^2}(\Omega)$ , généré par  $A_2(t) = \exp t^2 - 1$ .

En effet, d'une part, ces deux problèmes vérifient les hypothèses du théorème 2.2.3 et d'autre part les  $N$ -fonctions  $A_1$  et  $A_2$  satisfont à la condition (2.40).

**Remarque 2.3.9** Le terme  $b(x, s)$  intervenant dans la classe d'équations elliptiques considérée n'est contrôlé par  $\beta(s)$ , qu'à droite seulement.

Si l'on suppose de plus que :

$$0 < \alpha\beta(s) \leq b(x, s) \leq \beta(s), \forall s \geq 0 \text{ et p.p. } x \in \Omega$$

$$\text{avec } \beta \text{ continue, croissante et vérifiant } \int_0^\infty \frac{ds}{\beta(s)} dx < +\infty. \tag{2.42}$$

Alors  $\beta(s)$  possède un effet régularisant.

Ce cas de figure a été exploité dans le cadre des espaces de Sobolev classiques par A. Porretta dans [75], où le terme  $\beta(s) = (1 + |s|)^m$  et  $m > 1$ , compensant la donnée singulière  $f$ , permet de montrer, en particulier pour le cas  $g \equiv 0$ , que les solutions de ce problème sont dans l'espace d'énergie  $W_0^{1,p}(\Omega)$  avec une sommabilité dépendante de  $m$ , plus fine que la sommabilité  $L^{p^*}(\Omega)$ .

Dans le cas présent, on va démontrer que l'on peut remplacer l'hypothèse de coercivité à l'infini (2.8) de  $g$  permettant de trouver les solutions dans  $W_0^1 L_A(\Omega)$ , par la condition (2.42) et obtenir de même l'existence d'une solution entropique

$u$  du problème (2.9) dans l'espace d'énergie  $W_0^1 L_A(\Omega)$ .

De plus en imposant la condition (2.40), ceci nous permet d'affirmer que  $u$  est bornée dans  $\Omega$  et par voie de conséquence, est une solution au sens des distributions.

**Preuve de la remarque 2.3.9**

Rappelons que les solutions obtenues, sans la condition (2.8), par ElMahi-Meskine (voir [47]) sont seulement dans  $T_0^{1,A}(\Omega) = \{u \text{ mesurable, } T_k(u) \in W_0^1 L_A(\Omega), \forall k > 0\}$  et dans  $\bigcap_{Q \in \mathcal{Q}_A} W_0^1 L_Q(\Omega)$  (voir remarque 2.1.1). Ce résultat s'exprime dans le cadre de notre opérateur par :

Soit  $f \in L^1(\Omega)$ , sous les hypothèses (2.6), (2.7), (2.10) et (2.11), le problème (2.9) admet au moins une solution  $u$  dans le sens suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in T_0^{1,A}(\Omega) \text{ , } g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) dx + \int_{\Omega} g(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} f(x) T_k(u - \varphi) dx \\ \text{et ce } \forall \varphi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } \forall k \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

On choisit alors dans la formulation (2.43),  $k = 1$  et  $\varphi = T_n(u) \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , comme  $\nabla T_1(u - T_n(u)) = \nabla u \chi_{\{n \leq |u| \leq n+1\}}$ ,  $T_1(u - T_n(u)) \leq 1$  et  $g(x, u, \nabla u) T_1(u - T_n(u)) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , on obtient alors :

$$\int_{n \leq |u| \leq n+1} b(x, u) a(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega} |f| dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De (2.14) et (2.42), on déduit que :

$$\alpha \beta(n) \int_{n \leq |u| \leq n+1} A(|\nabla u|) dx \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par suite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n \leq |u| \leq n+1} A(|\nabla u|) dx \leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(n)} < +\infty$$

d'où  $\int_{\Omega} A(|\nabla u|) dx < +\infty$ , par conséquent  $u \in W_0^1 L_A(\Omega)$ .

D'autre part, si l'on suppose de plus, que  $A$  vérifie la condition :

$$\int_1^\infty \left( \frac{t}{A(t)} \right)^{\frac{1}{N-1}} dt < +\infty,$$

alors, le résultat d'injection  $W_0^1 L_A(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ , permet d'affirmer dans ce cas, que les solutions  $u$  de type entropique du problème (2.9), sont bornées et par suite, sont des solutions au sens des distributions. En effet en choisissant  $\varphi = u \pm \psi$ , avec  $\psi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $k > \|\psi\|_\infty$  dans la formulation (2.43), on obtient la formulation au sens des distributions, suivante :

$$\begin{cases} u \in W_0^1 L_A(\Omega) , g(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega) \\ \int_\Omega b(x, u) a(|\nabla u|) \nabla u \nabla \psi dx + \int_\Omega g(x, u, \nabla u) \psi dx = \int_\Omega f(x) \psi dx \\ \text{et ce } \forall \psi \in W_0^1 L_A(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

**Exemple 2.3.10**

1. *Le problème de Dirichlet associé à l'équation :*

$$-div \left[ (1 + |u|^\rho) \log^p (1 + |\nabla u|) |\nabla u|^{N-2} \nabla u \right] = f$$

avec  $\rho > 1$ ,  $p > N - 1$  et  $f \in L^1(\Omega)$ , admet au moins une solution bornée, au sens des distributions et appartenant à l'espace de Sobolev-Orlicz  $W_0^1 L^N \text{Log}^p L(\Omega)$ .

2. *Le problème de Dirichlet associé à l'équation :*

$$-div \left[ (1 + |u|) \log^\rho (2 + |u|) \exp(|\nabla u|^2) \nabla u \right] = f$$

avec  $\rho > 1$ , et  $f \in L^1(\Omega)$  admet au moins une solution au sens des distributions, bornée et appartenant à l'espace de Sobolev-Orlicz noté  $W_0^1 L_{\exp t^2}(\Omega)$ , généré par  $A(t) = \exp t^2 - 1$ .

# Chapitre 3

## Sommabilité des solutions d'une équation elliptique non linéaire à donnée mesure

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un résultat de sommabilité de solutions au sens des distributions, d'un problème de Dirichlet associé à un opérateur de Leray-Lions dont la donnée est une mesure de Radon bornée.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ . On note  $\mathcal{M}(\overline{\Omega}) = (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$  l'espace des mesures de Radon bornées sur  $\Omega$ . On s'intéresse à la régularité des solutions faibles du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{a}(x, u, \nabla u) & = \mu \text{ dans } \Omega \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (E)$$

avec  $\hat{a} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction de Carathéodory, vérifiant,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$  et p.p.  $x \in \Omega$ , les conditions suivantes :

$$\hat{a}(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha_0 |\xi|^p \quad (3.1)$$

$$|\hat{a}(x, s, \xi)| \leq \alpha(C(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \quad (3.2)$$

$$[\hat{a}(x, s, \xi) - \hat{a}(x, s, \eta)] \cdot [\xi - \eta] > o, \xi \neq \eta \quad (3.3)$$

Où  $p$  est un réel tel que  $2 - \frac{1}{N} < p < N$ ,  $\alpha_0$  et  $\alpha$  sont deux réels positifs. La fonction  $C$  est positive et appartient à  $L^{p'}(\Omega)$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$ .

La donnée  $\mu$  appartient à  $\mathcal{M}(\Omega)$ .

Sous les conditions (3.1),(3.2),( 3.3) et  $p \in ]2 - \frac{1}{N}, N[$ , Boccardo-Gallouët, dans [21] [22], (voir aussi [79]), démontrent que le problème (E) admet au moins une solution  $u$  appartenant à  $W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, \frac{N(p-1)}{N-1}[$ . L'exposant critique  $\frac{N(p-1)}{N-1}$  sera noté  $q_0$ .

Cette régularité s'avère optimale dans le sens que  $u \notin W_0^{1,q_0}(\Omega)$ , ceci est justifié par la solution fondamentale du  $p$ -Laplacien dans la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ .

Un raffinement de cette régularité fut établie plus tard par ces mêmes auteurs dans [23], par le biais de la fonction :

$$\Phi_0(s) = \frac{s}{\text{Log}^\beta(2 + |s|)}, \forall \beta > \frac{1}{p-1}$$

En effet, ils y démontrent que la solution  $u$  du problème (E) vérifie la condition de sommabilité :

$$\Phi_0(u) \in W_0^{1,q_0}(\Omega) \text{ avec } q_0 = \frac{N(p-1)}{N-1}$$

Dans le présent chapitre, on présente une généralisation de ce dernier résultat, en montrant que :

$$\Phi(u) \in W_0^{1,q_0}(\Omega)$$

avec  $\Phi$  appartenant à une large classe de fonctions notée  $\mathcal{F}_p$ , contenant  $\Phi_0$  ainsi qu'une suite de fonctions  $(\Phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui croient plus rapidement que  $\Phi_0$  au voisinage de l'infini et ceci dans le sens que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_m(t)} = 0, \forall m \geq 1$ .

Ce chapitre, relate le résultat de sommabilité (partie elliptique), du travail effectué en collaboration avec Y. Atik et publié dans [4].

**Remarque 3.1.1** *Le résultat [23] de Boccardo-Gallouët, fut adapté au cas parabolique par Li Feng-Quan et Li Guang-Wei dans [68], ce résultat est de même généralisé dans [4].*

**Remarque 3.1.2** *Dans le cas où le second membre  $\mu$  appartient à l'espace d'Orlicz  $L\text{Log}L(\Omega)$ , alors le problème (E) admet une solution dans l'espace limite  $W_0^{1,q_0}(\Omega)$  (voir [22]).*

**Remarque 3.1.3** *Le problème (E) considéré dans le cadre des espaces de Sobolev-Orlicz, avec la condition de coercivité suivante :*

$$\hat{a}(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha_0 B \left( \frac{|\xi|}{\delta} \right), \alpha > 0, \delta > 0$$

où  $B$  est une  $N$ -fonction telle que  $\int_d^\infty \frac{t^{p-1}}{B(t)} dt < +\infty$  ( $d > 0$ ), admet une solution dans l'espace limite  $W_0^{1,q_0}(\Omega)$  (voir [14]). On notera toutefois, que cette condition de coercivité, plus restrictive que la condition (3.1), n'est pas vérifiée dans le cas du  $p$ -Laplacien.

**Remarque 3.1.4** Pour  $p \in ]1, 2 - \frac{1}{N}]$ , le cadre des espaces de Sobolev est trop restreint pour contenir les solutions de (E). Pour surmonter cette difficulté il est nécessaire d'introduire un nouveau cadre fonctionnel et définir la notion de solutions entropique ou renormalisée (voir [9] et [80]).

## 3.2 La classe $\mathcal{F}_p$

**Definition 3.2.1** Soit  $p > 1$  un nombre reel, la classe  $\mathcal{F}_p$  consiste en un ensemble de fonctions symétriques de la forme :

$$\Phi_A(t) = \left[ \int_0^t \frac{d\tau}{\{A(\tau)\}^{\frac{1}{p}}} \right]^{p'}, \quad t \geq 0, \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad (3.4)$$

où  $A$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , paire, positive sur  $]0, +\infty[$  et vérifie les propriétés suivantes :

- (a)  $\int_d^{+\infty} \frac{dt}{A(t)} < +\infty$ , pour  $d > 0$
- (b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = +\infty$
- (c)  $A$  vérifie la propriété de monotonie suivante : il existe deux reels  $\beta > 0$  et  $t_0 \geq 0$  tels que  $A(t_2) \geq A(t_1)$ ,  $\forall t_1, t_2$  vérifiant  $t_2 > t_1 \geq t_0$ .
- (d) Si  $A(0) = 0$ , on suppose de plus qu'il existe une constante  $c$  telle que  $A(t) \geq c|t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$  et  $\Phi'_A(0)$  finie.

**Proposition 3.2.2** Soit  $\Phi_A \in \mathcal{F}_p$ . Alors :

1.  $\Phi_A$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$A(t) |\Phi'_A(t)|^p = (p')^p |\Phi_A(t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

2. Il existe une constante  $K > 0$  telle que :

$$|\Phi_A(t)| \leq K|t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.  $\Phi_A$  est globalement Lipchitzienne sur  $\mathbb{R}$ .

*Preuve.* En dérivant la relation (3.4), on obtient :

$$\Phi'_A(t) = \frac{p'}{[A(t)]^{\frac{1}{p}}} \left[ \int_0^t \frac{d\tau}{\{A(\tau)\}^{\frac{1}{p}}} \right]^{p'-1} = p' \left[ \frac{\Phi_A(t)}{A(t)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad t > 0$$

ce qui entraîne l'équation (3.5).

Pour montrer 2., on distingue deux cas :

1<sup>er</sup> cas :  $A(0) \neq 0$ .

On utilise l'inégalité de Hölder dans (3.4), on obtient alors  $\Phi_A(t) \leq t \left[ \int_0^t \frac{d\tau}{A(\tau)} \right]^{p'/p}$

$t \geq 0$ , d'où par symétrie,  $|\Phi_A(t)| \leq K|t|, \forall t \in \mathbb{R}$ , avec  $K = \left[ \int_0^\infty \frac{d\tau}{A(\tau)} \right]^{p'/p}$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $A(0) = 0$ .

On utilise la condition (d), on obtient dans ce cas  $\Phi_A(t) \leq \left[ \int_0^t \frac{d\tau}{(c\tau)^{1/p}} \right]^{p'} = \frac{(p')^{p'}}{c^{p'/p}} t$  pour  $t \geq 0$ , ce qui donne la même estimation.

Pour montrer que  $\Phi_A$  est globalement Lipchitzienne, il suffit d'écrire :

$$|\Phi'_A(t)| = p' \left| \frac{\Phi_A(t)}{A(t)} \right|^{\frac{1}{p}} \leq p' K^{\frac{1}{p}} \left| \frac{t}{A(t)} \right|^{\frac{1}{p}} \leq c', \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où  $K$  et  $c'$  sont des constantes positives. ■

On va à présent donner quelques exemples de fonctions de la classe  $\mathcal{F}_p$ .

### Exemple 3.2.3

1. La fonction  $\Phi_A(t) = \log^2(t + \sqrt{t^2 + 1})$ , généré par  $A(t) = t^2 + 1$  appartient à la classe  $\mathcal{F}_2$ .

2. La fonction  $\Phi_A$  générée par  $A(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ t^\alpha & \text{pour } t \geq 1 \end{cases}$  avec  $1 < \alpha < p$  appartient à la classe  $\mathcal{F}_p$ . Dans ce cas  $\Phi_A$  est équivalente au voisinage de l'infini à la fonction  $ct^{(p-\alpha)/(p-1)} = ct^\beta$ , avec  $0 < \beta < 1$ .

Néanmoins, ces fonctions ne permettent pas de raffiner la sommabilité des solutions du problème (E), obtenues dans [21], à savoir que  $u \in L^r(\Omega), \forall r \in [1, q_0^*[$ , en effet, pour les exemples ci-dessus, on vérifie aisément que :

$$u \in \bigcap_{1 \leq r < q_0^*} L^r(\Omega) \implies \Phi_A(u) \in L^{q_0^*}(\Omega)$$

Cependant, la classe  $\mathcal{F}_p$  contient des exemples fondamentaux, permettant de raffiner la sommabilité obtenue par Boccardo-Gallouët dans [21] et [23].

En effet, le résultat de sommabilité présenté dans [23], repose sur la fonction notée  $\Phi_0$ , définie par :

$$\Phi_0(t) = \frac{t}{[\log^\alpha(\kappa_0 + t)]^{1/(p-1)}}$$

avec  $\kappa_0 = 2$  et  $\alpha > 1$  un nombre reel.

Ce dernier exemple est le plus faible de la famille  $\{\Phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  (dans le sens que  $\Phi_0$  croit moins vite que  $\Phi_m$ ,  $\forall m \geq 1$  à l'infini), avec  $\Phi_m$  défini comme suit :

$$\Phi_m(t) = \frac{t}{[D_m(t)]^{\frac{1}{p-1}}} \quad \forall t \geq 0$$

avec :

$$D_m(t) = \log(\kappa_m + t) \log(\log(\kappa_m + t)) \underbrace{\dots \log(\log \dots \log(\kappa_m + t))}_{m \text{ fois}} \underbrace{\log^\alpha(\log \dots \log(\kappa_m + t))}_{(m+1) \text{ fois}}$$

où  $\alpha > 1$  et  $\kappa_m$  choisi suffisamment grand pour avoir  $\underbrace{\log(\log \dots \log(\kappa_m))}_{(m+1) \text{ fois}} > 0$ .

Par un calcul direct, on montre que  $\Phi_m \in \mathcal{F}_p$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  et que la fonction  $A_m$  associée à  $\Phi_m$  est equivalente au voisinage de l'infini à la fonction :

$$Ct \log(\kappa_m + t) \log(\log(\kappa_m + t)) \dots \underbrace{\log(\log \dots \log(\kappa_m + t))}_{m \text{ fois}} \underbrace{\log^\alpha(\log \dots \log(\kappa_m + t))}_{(m+1) \text{ fois}}$$

avec  $C \equiv \text{const.}$

On montre de plus que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_i(t)}{\Phi_j(t)} = 0$ ,  $\forall i < j$ .

### 3.3 Sommabilité des solutions du problème (E)

On énonce à présent le résultat de sommabilité du problème (E) :

**Théorème 3.3.1** *Soit  $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ , Sous les conditions (3.1) – (3.3), et pour  $2 - \frac{1}{N} < p < N$ , Le problème (E) admet une solution  $u$  telle que :*

$$\Phi_A(u) \in L^{q_0^*}(\Omega) \text{ et } \nabla \Phi_A(u) \in L^{q_0}(\Omega), \forall \Phi_A \in \mathcal{F}_p,$$

où  $q_0 = \frac{N(p-1)}{N-1}$  et  $q_0^*$  est le conjugué de Sobolev de  $q_0$ .

**Preuve.** La preuve de ce théorème se fera en quatre étapes. On notera  $C_i$ ,  $i = 0, 8$  les différentes constantes positives intervenant dans la démonstration de ce théorème.

**Etape 1 : Approximation**

On introduit la suite des problèmes approchés de  $(E)$  par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{a}(x, u_k, \nabla u_k) &= \mu_k \text{ dans } \Omega \\ u_k &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (E_k)$$

où  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de fonctions de  $L^\infty(\Omega)$ , convergeant vers  $\mu$  pour la topologie faible\* de  $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$  et telle que  $\|\mu_k\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} = C_0$ ,  $\forall k \geq 1$ .

D'après Leray-Lions (voir [66]), le problème  $(E_k)$  admet une solution  $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , dans le sens que,  $u_k$  vérifie la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \hat{a}(x, u_k, \nabla u_k) \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \mu_k \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (3.6)$$

**Etape 2 : Estimation uniforme de  $\{\nabla u_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$**

**Lemme.** Soit  $A$  une fonction vérifiant les conditions (a) – (d) de la définition 3.2.1. Alors, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que :

$$\int_{\{|u_k| \geq n_0\}} \frac{|\nabla u_k|^p}{A(u_k)} \, dx \leq C_1, \quad \forall k \geq 1, \quad (3.7)$$

où  $\{|u_k| \geq n_0\} = \{x \in \Omega, |u_k(x)| \geq n_0\}$  avec  $n_0 = [t_0] + 1$ ,  $[t_0]$  étant la partie entière de  $t_0$ .

**Preuve du lemme**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\varphi_n$  la fonction définie par  $\varphi_n(s) = T_1(s - T_n(s))$  où  $T_k$  est la fonction de troncature définie par  $T_k(s) = \frac{1}{2} \{|s+k| - |s-k|\}$   $\forall s \in \mathbb{R}$  et  $\forall k \geq 0$ .

Notons  $B_n$  la partie de  $\Omega$  définie par  $B_n = \{x \in \Omega, n \leq |u_k(x)| < n+1\}$ .

On choisit  $\varphi_n(u_k)$  comme fonction test dans la formulation variationnelle (3.6) du problème  $(E_k)$ ; en utilisant (3.1) et en remarquant que  $|\varphi_n(u_k)| \leq 1$  et que  $\nabla \varphi_n(u_k) = \nabla u_k \chi_{\{n \leq |u_k| \leq n+1\}}$ , on obtient l'estimation :

$$\alpha_0 \int_{B_n} |\nabla u_k|^p \, dx \leq \int_{\Omega} |\mu_k| \, dx \leq C_0.$$

### 3. Sommabilité des solutions d'une équation elliptique non linéaire à donnée mesure 72

On note  $n_0 = [t_0] + 1$ , en utilisant la condition (c) de la définition 3.2.1, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\{|u_k| \geq n_0\}} \frac{|\nabla u_k|^p}{A(u_k)} dx &= \sum_{n \geq n_0} \int_{B_n} \frac{|\nabla u_k|^p}{A(u_k)} dx \\ &\leq \sum_{n \geq n_0} \int_{B_n} \frac{|\nabla u_k|^p}{\beta A(n)} dx \leq \frac{C_0}{\alpha_0 \beta} \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{A(n)} = C_1. \end{aligned}$$

La convergence de la dernière série est une conséquence des conditions (b) et (c) de la définition 3.2.1.

**Etape 3 : Estimations uniformes de  $\{\Phi_A(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  et de  $\{\nabla \Phi_A(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$**

En utilisant l'inégalité de Sobolev, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C_\Omega^{q_0} \left( \int_\Omega |\Phi_A(u_k)|^{q_0^*} dx \right)^{\frac{q_0}{q_0^*}} &\leq \int_\Omega |\nabla \Phi_A(u_k)|^{q_0} dx \\ &= \int_\Omega |\Phi'_A(u_k)|^{q_0} |\nabla u_k|^{q_0} dx = I_k^1 + I_k^2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_k^1 &= \int_{\{|u_k| < n_0\}} |\Phi'_A(u_k)|^{q_0} |\nabla u_k|^{q_0} dx \\ \text{et } I_k^2 &= \int_{\{|u_k| \geq n_0\}} |\Phi'_A(u_k)|^{q_0} |\nabla u_k|^{q_0} dx \end{aligned}$$

Ici  $C_\Omega^{-1}$  désigne la constante de Sobolev.

L'ouvert  $\Omega$  étant borné, l'estimation du terme  $\int_{B_n} |\nabla u_k|^p dx$ , établie au lemme précédent, le fait que  $q_0 < p$  et que la dérivée de  $\Phi_A$  soit bornée, permettent de déduire que la suite  $\{I_k^1\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  est bornée par une constante positive  $C_2$

Pour estimer le terme  $I_k^2$ , on va utiliser respectivement, l'inégalité de Hölder,

l'estimation (3.7) et l'équation (3.5); ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 I_k^2 &= \int_{\{|u_k| \geq n_0\}} \frac{|\nabla u_k|^{q_0}}{A(u_k)^{q_0/p}} |\Phi'_A(u_k)|^{q_0} [A(u_k)]^{q_0/p} dx \\
 &\leq \left[ \int_{\{|u_k| \geq n_0\}} \frac{|\nabla u_k|^p}{A(u_k)} dx \right]^{\frac{q_0}{p}} \left[ \int_{\{|u_k| \geq n_0\}} |\Phi'_A(u_k)|^{\frac{pq_0}{p-q_0}} [A(u_k)]^{\frac{q_0}{p-q_0}} dx \right]^{1-\frac{q_0}{p}} \\
 &\leq C_3 \left[ \int_{\{|u_k| \geq n_0\}} |\Phi_A(u_k)|^{\frac{q_0}{p-q_0}} dx \right]^{1-\frac{q_0}{p}} \leq C_3 \left[ \int_{\Omega} |\Phi_A(u_k)|^{\frac{q_0}{p-q_0}} dx \right]^{1-\frac{q_0}{p}}
 \end{aligned}$$

En notant que  $\frac{q_0}{p-q_0} = q_0^*$ , on déduit des estimations précédentes que :

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\Omega} |\Phi_A(u_k)|^{q_0^*} dx \right)^{\frac{q_0}{q_0^*}} &\leq C_4 \int_{\Omega} |\nabla \Phi_A(u_k)|^{q_0} dx \\
 &\leq C_5 + C_6 \left[ \int_{\Omega} |\Phi_A(u_k)|^{q_0^*} dx \right]^{1-\frac{q_0}{p}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

Finalement, du fait que  $\frac{q_0}{q_0^*} = p - q_0 > \frac{p-q_0}{p} = 1 - \frac{q_0}{p}$ , on déduit que :

$$\int_{\Omega} |\Phi_A(u_k)|^{q_0^*} dx \leq C_7 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla \Phi_A(u_k)|^{q_0} dx \leq C_8, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.8)$$

#### Etape 4 : Passage à la limite

On utilise dans cette étape, la compacité faible dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, q_0[$ , de la suite  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  des solutions de  $(E_k)$ ; ceci est une conséquence des estimations (3.8), permettant ainsi d'extraire une sous suite notée de même  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ , faiblement convergente vers  $u$ . La convergence presque partout des gradients de  $u_k$  vers  $\nabla u$ , établi dans [22] (voir aussi [79]), permet de faire un passage à la limite dans la formulation variationnelle (3.6) et dans les estimations (3.8) et conclure à l'existence d'une solution  $u$ , au sens des distributions; du problème  $(E)$  et vérifiant :

$$\Phi_A(u) \in L^{q_0^*}(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla \Phi_A(u) \in L^{q_0}(\Omega), \quad \forall \Phi_A \in \mathcal{F}_p.$$

■

**Remarque 3.3.2**

Dans le cas où  $p = N$ , on a seulement la régularité  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, q_0[$ . Le résultat de sommabilité  $\Phi_A(u) \in W_0^{1,q_0}(\Omega)$  n'est plus valable  $\forall \Phi_A \in \mathcal{F}_N$ ; ce résultat tombe en défaut pour les fonctions  $\Phi_A \in \{\Phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  et particulièrement pour  $\Phi_0(t) = \frac{t}{\log^\beta(2+t)}$  ( $\beta > 1$ ), dans le cas  $p = N = 2$  (et par suite  $q_0 = 2$ ), comme le montre l'exemple suivant :

Soit  $\mathcal{U}$  la boule unité de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\delta$  la distribution de Dirac supportée par l'origine. et  $u(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}$  la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \delta \text{ dans } \mathcal{U} \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\mathcal{U} \end{cases}$$

On vérifie alors, que :

$$\iint_{\mathcal{U}} |\nabla \Phi_0 u(x, y)|^2 dx dy = \infty \quad \text{i.e. } \Phi_0(u) \notin H_0^1(\mathcal{U}) = W_0^{1,2}(\mathcal{U}).$$

# Chapitre 4

## Equations elliptiques quasilineaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré principalement aux questions de régularité de solutions faibles d'un problème de Dirichlet dont le prototype est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha_0 |u|^{p-1} u = \gamma |\nabla u|^q + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $\Omega$ , un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  deux constantes et  $1 < q < 2$ .

Dans une première partie, on étudie ce problème dans le cas :

$$p = 1$$

On suppose alors que :

$$f \in L^m(\Omega) \text{ avec } m \in \left[ \frac{N}{q'}, \frac{N}{2} \right[ \text{ et } 1 + \frac{2}{N} \leq q < 2.$$

**Remarque 4.1.1** *La restriction  $1 + \frac{2}{N} \leq q$ , permet de chercher des solutions dans  $H_0^1(\Omega)$ , étant donné que  $1 + \frac{2}{N} \leq q \Leftrightarrow \frac{N}{q'} \geq \frac{2N}{N+2}$  et par suite  $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ .*

**Remarque 4.1.2** La donnée  $f \in L^{\frac{N}{q'}}(\Omega)$  est la régularité minimale à imposer à  $f$  pour la solvabilité de ce problème (voir [3] et [58]) de plus, dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ , une condition de petitesse sur la norme de  $f$  est nécessaire pour l'existence de ce problème. De manière précise, en supposant que le problème (4.1) admet une solution faible, on démontre que (dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ ),  $f$  satisfait à l'inégalité :

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi^{q'}(x) dx \leq c_q \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{q'} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (4.2)$$

avec  $q' = \frac{q}{q-1}$  et  $c_q$  une constante positive dépendante de  $q$ .

En effet, en choisissant  $\varphi^{q'}$ , avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , comme fonction test dans le problème (4.1), on obtient :

$$q' \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \varphi^{q'-1} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^q \varphi^{q'} dx + \int_{\Omega} f(x) \varphi^{q'}(x) dx.$$

D'après l'inégalité de Young, il existe une constante  $c_q$  telle que :

$$q' \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \varphi^{q'-1} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^q \varphi^{q'} dx + c_q \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{q'} dx,$$

ce qui permet de conclure.

L'inégalité (4.2) qui n'est pas vérifiée pour tout  $f$ , exprime de manière assez générale, la condition imposée à  $f$  pour la solvabilité du problème (4.1), (pour plus de détails voir [58] et [77]); cependant, cette inégalité induit une restriction sur la régularité  $L^p$  du second membre  $f$  et sur sa taille, conditions permettant d'établir l'existence et même l'unicité du problème (4.1).

En effet, sous la condition,  $f \in L^{\frac{N}{q'}}(\Omega)$  et  $\|f\|_{\frac{N}{q'}} \leq c_0 \gamma^{-\frac{1}{q-1}}$  avec  $c_0$  une constante dépendante de  $N$  et de  $q$  (dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ ), l'existence d'une solution  $u$  de ce problème a été établie par N. Grenon, F. Murat et A. Porretta, dans [57], de plus,  $u$  vérifie la régularité :

$$|u|^{\sigma_0} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{\left(\frac{N}{q'}\right)^{**}}{2^*}. \quad (4.3)$$

Il existe des solutions de (4.1) qui ne vérifient pas la condition de régularité (4.3).

Un exemple classique en est donné par

$$u(x) = M_q \left( \frac{1}{|x|^\alpha} - 1 \right) \text{ avec } \alpha = \frac{2-q}{q-1} \text{ et } M_q = [N-1 - (\alpha+1)]^{\frac{1}{q-1}} / \alpha,$$

qui, lorsque  $1 + \frac{2}{N} < q$ , et  $\Omega \equiv B(0, 1)$ , la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ , vérifie :  
 $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $-\Delta u = |\nabla u|^q$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , et  $|u|^\rho \in H_0^1(\Omega)$  pour tout  $\rho < \sigma_0$ , mais ne vérifie pas  $|u|^{\sigma_0} \in H_0^1(\Omega)$ . Par contre, des résultats d'unicité pour les solutions du problème (4.1), qui vérifient la condition (4.3) ont été démontrés par la suite, par G. Barles et A. Porretta dans [8].

En ce qui nous concerne, en adaptant la nouvelle technique d'estimation a priori présentée dans [57], on démontre que la régularité de type (4.3), obtenue dans le cas  $f \in L^{\frac{N}{q'}}(\Omega)$ , se généralise pour  $f \in L^m(\Omega)$  avec  $m$  quelconque dans l'intervalle  $[\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[$ , et nous permet d'obtenir la régularité :

$$|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } \sigma = \frac{m^{**}}{2^*} \quad \forall m \in [\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[ \tag{4.4}$$

Dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ , une condition nécessaire sur la taille de  $f$ , s'exprime de même dans ce cas, par :

$$\|f\|_m \leq c_0 \gamma^{-\frac{1}{q-1}} \text{ avec } c_0 \text{ une constante dépendante de } N, q \text{ et de } m$$

**Remarque 4.1.3** Notons que sous les conditions de régularité de  $f$  présentées ci-dessus, le résultat d'existence de solutions du problème (4.1), s'obtient indépendamment de la valeur de  $p \geq 1$ . Cependant, dans le cas où  $\alpha_0 > 0$ , des valeurs de  $p$ , suffisamment grandes, permettent de résoudre ce problème sans imposer la condition de sommabilité  $L^{\frac{N}{q'}}$  de  $f$ . De plus, le terme  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$  possède un effet régularisant.

Ainsi, dans la deuxième partie de ce travail, on étudie le problème (4.1) dans le cas où  $\alpha_0 > 0$ , et  $p$  suffisamment grand ; de manière plus précise, on suppose que :

$$p > \frac{q}{2-q} \text{ et } 1 < q < 2 \tag{4.5}$$

Cette condition sur  $p$ , dont la valeur est très grande quand  $q$  est proche de 2, permet en réalité au terme  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$ , d'absorber le terme dépendant du gradient, i.e  $\gamma |\nabla u|^q$ , retrouvant ainsi les résultats classiques d'existence et de régularité des solutions du problème de Dirichlet associé à l'équation :

$$-\Delta u + \alpha_0 |u|^{p-1} u = f.$$

Ce cas de figure à été développé par L. Boccardo et M.M. Porzio dans [31], en effet, dans cet article, ces auteurs démontrent l'existence d'une solution du problème (4.1) pour  $f \in L^m(\Omega)$  et ceci  $\forall m \geq 1$ , contrairement au cas  $p = 1$ , où il est nécessaire d'imposer  $m \geq \frac{N}{q}$ .

En utilisant les techniques d'estimation à priori développées dans cet article, on présente de manière plus précise, le résultat d'existence et de régularité des solutions de ce problème dans le cas d'une donnée  $f$  régulière, i.e. pour  $m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2}[$ , retrouvant ainsi la régularité de la solution, obtenue dans le cas  $p = 1$ , à savoir :

$$|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{m^{**}}{2^*} \quad \forall m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2}[. \quad (4.6)$$

On montre de plus que :

$$u \in L^{mp}(\Omega) \quad \forall m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[. \quad (4.7)$$

**Remarque 4.1.4** *L'injection de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ , nous permet de déduire, à partir de (4.6), la régularité  $L^{m^{**}}(\Omega)$ , celle ci étant plus forte que la régularité  $L^{mp}(\Omega)$ , quand  $m \in [\frac{N}{2p'}, \frac{N}{2}[$ , car :*

$$m \geq \frac{N}{2p'} \Leftrightarrow m^{**} \geq mp.$$

d'où l'intérêt de (4.7) uniquement dans l'intervalle  $[\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[$ .

D'autre part on a  $[\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[ \neq \emptyset$  si et seulement si  $p > \frac{N+2}{N-2}$ , en particulier si  $q \geq 1 + \frac{2}{N}$ .

En effet si  $q \geq 1 + \frac{2}{N}$ , alors  $[\frac{N}{q'}, \frac{N}{2p'}[ \subset [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[$  et  $p > \frac{q}{2-q} \Leftrightarrow q' > 2p' \Leftrightarrow [\frac{N}{q'}, \frac{N}{2p'}[ \neq \emptyset \Rightarrow [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[ \neq \emptyset$ .

## 4.2 Présentation des résultats

Considérons le problème (4.1) sous sa forme générale suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) + \alpha_0 |u|^{p-1} u = H(x, u, \nabla u) + f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \delta\Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ .

On suppose que  $A(x, s)$  est une matrice de Caratheodory et  $H(x, s, \xi)$  est une

fonction de Carathéodory vérifiant les conditions suivantes :

$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ ,

$$A(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0 \quad (4.9)$$

$$|A(x, s)| \leq \beta, \quad \beta > 0 \quad (4.10)$$

$$|H(x, s, \xi)| \leq \gamma |\xi|^q \quad (4.11)$$

**Definition 4.2.1** On dit que  $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$  est solution faible de (4.8) si :

$g(x, u) \in L^1(\Omega), H(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} A(x, u) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \alpha_0 |u|^{p-1} u \varphi dx = \int_{\Omega} H(x, u, \nabla u) \varphi dx + \int_{\Omega} f(x) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a alors les résultats suivants :

**Théorème 4.2.2** Supposons (4.9)-(4.11),  $p = 1, 1 + \frac{2}{N} \leq q < 2, \alpha_0 > 0$  et  $f \in L^m(\Omega)$  où  $m \in [\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[$ , alors il existe au moins une solution faible du problème (4.8), vérifiant la condition de régularité suivante :

$$|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{m^{**}}{2^*} \quad \forall m \in [\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[$$

Dans le cas où  $\alpha_0 = 0$ , on suppose de plus que  $f$  vérifie la condition :

$$\|f\|_m \leq c_0 \gamma^{-\frac{1}{q-1}} \quad \text{avec } c_0 \text{ une constante dépendante de } N, q \text{ et de } m$$

**Remarque 4.2.3** Ce résultat est en réalité indépendant de la puissance  $p \geq 1$ , en fait, le terme  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$  intervenant dans cette équation, permet uniquement d'éliminer la condition de petitesse sur la taille de  $f$  dans le cas où  $\alpha_0 > 0$ .

Par contre, dans le résultat qui suit; le terme  $\alpha_0 |u|^{p-1} u$  pour une puissance  $p$  suffisamment grande, dépendante de  $q$  (nécessairement  $> 1$ ), permet d'absorber le terme dépendant du gradient à croissance sous quadratique, à savoir  $H(x, u, \nabla u)$ , retrouvant ainsi, les résultats classiques d'existence et de régularité des solutions de ce problème, sans le terme  $H(x, u, \nabla u)$ .

**Théorème 4.2.4** Supposons (4.9)-(4.11) avec  $1 < q < 2, \alpha_0 > 0, f \in L^m(\Omega), \forall m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2}[$  et

$$p > \frac{q}{2-q}$$

alors :

1. Il existe au moins une solution faible du problème (4.8), vérifiant la condition de régularité suivante :

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } |u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } \sigma = \frac{m^{**}}{2^*}.$$

2 Dans le cas où  $f \in L^m(\Omega)$  avec  $m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[$  alors  $u$  vérifie de plus la condition de sommabilité  $u \in L^{pm}(\Omega)$ .

### 4.3 Preuve des théorèmes 4.2.2 et 4.2.4

#### 4.3.1 Preuve du théorème 4.2.2

La preuve de ce théorème qui se fera en trois étapes, repose essentiellement sur les estimations à priori permettant de déduire la condition de régularité (4.4).

**Etape 1 : Approximation du problème.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$H_n(x, s, \xi) = \frac{H(x, s, \xi)}{1 + \frac{1}{n}|H(x, s, \xi)|} \text{ et } f_n(x) = \frac{f(x)}{1 + \frac{1}{n}|f(x)|}$$

On a alors

$$|H_n(x, s, \xi)| \leq H(x, s, \xi), \quad |f_n(x)| \leq f(x),$$

et

$$|H_n(x, s, \xi)| \leq n, \quad |f_n(x)| \leq n.$$

Considérons le problème approché suivant :

$$\int_{\Omega} A(x, u_n) \nabla u_n \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \alpha_0 |u_n|^{p-1} u_n \varphi dx = \int_{\Omega} H_n(x, u_n, \nabla u_n) \varphi dx + \int_{\Omega} f_n(x) \varphi dx$$

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$
(4.12)

Du fait que  $H_n$  et  $f_n$  sont bornés, le problème (4.12) admet une solution  $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  (voir, par exemple, Leray-Lions [66] ou Lions [63] pour l'existence, et Stampacchia [82] pour la bornitude).

**Etape 2 : Estimations à priori.**

**Proposition 4.3.1** *Sous les hypothèses du théorème 4.2.2, on a les estimations suivantes :*

$$\int_{\Omega} |\nabla (|u_n|^\sigma)|^2 dx \leq M_1 \text{ et } \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq M_2$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont des constantes indépendantes de  $n$ ,  $u_n$  est solution du problème (4.12) et  $\sigma = \frac{m^{**}}{2^*}$ .

**Preuve de la proposition 4.3.1.**

Notons  $\sigma = \frac{m^{**}}{2^*}$ , avec  $m^{**} = \frac{mN}{N-2m}$  et  $\sigma_0 = \frac{(\frac{N}{q'})^{**}}{2^*} = \frac{(N-2)(q-1)}{2(q-2)}$ .  
Comme  $q \geq 1 + \frac{2}{N}$  et que  $m \in [\frac{N}{q'}, \frac{N}{2}[$ , on a  $m \geq \frac{N}{q'} \geq \frac{2N}{N+2}$ ; il résulte alors :

$$m^{**} \geq \left(\frac{N}{q'}\right)^{**} \geq \left(\frac{2N}{N+2}\right)^{**} = 2^*$$

par conséquent :

$$\sigma \geq \sigma_0 \geq 1$$

Soient  $T_k$  et  $G_k$  les fonctions de troncatures de niveau  $k$ , définies par :

$$T_k(s) = \frac{1}{2} \{|s+k| - |s-k|\} \text{ et } G_k(s) = s - T_k(s)$$

On choisit dans le problème (4.12), la fonction test définie par :

$$\varphi(x) = |G_k(u_n(x))|^{2\sigma-2} G_k(u_n(x))$$

Comme  $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et que  $\sigma \geq 1$ ,  $\varphi$  est une fonction test admissible.  
En utilisant (4.9) et (4.11) dans la formulation (4.12), on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\alpha(2\sigma-1) \int_{\Omega} |G_k(u_n)|^{2\sigma-2} |\nabla G_k(u_n)|^2 dx}_{I_1} + \underbrace{\alpha_o \int_{\Omega} |u_n| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx}_{I_2} \\ & \leq \underbrace{\gamma \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^q |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{\Omega} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx}_{I_4} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le premier terme de (4.13), s'écrit :

$$I_1 = \alpha C_1 \int_{\Omega} |\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)|^2 dx \quad (4.14)$$

avec  $C_1$ , une constante positive, dépendante uniquement de  $\sigma$ . Dans toute la suite, on notera  $C_i$ ,  $i = 1, 9$  des constantes positives, indépendantes de  $n$  et de  $k$ .

Estimation de  $I_3$ . En utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} I_3 &= \gamma \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^q |G_k(u_n)|^{\frac{2\sigma-2}{2}q} |G_k(u_n)|^{2\sigma-1-(\sigma-1)q} dx \\ &\leq \gamma C_2 \left( \int_{\Omega} |\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)|^2 dx \right)^{\frac{q}{2}} \left( \int_{\Omega} |G_k(u_n)|^{(2\sigma-1-(\sigma-1)q)\frac{2}{2-q}} dx \right)^{1-\frac{q}{2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Posons  $\xi_\sigma = (2\sigma - 1 - (\sigma - 1)q) \frac{2}{2-q}$ , on a alors :

$$\xi_\sigma = 2\sigma - \frac{2(q-1)}{2-q} = 2\sigma + \sigma_0 \frac{4}{N-2} = 2\sigma + \sigma_0 [2^* - 2],$$

en utilisant la relation  $2^*\sigma = 2\sigma + \sigma \frac{4}{N-2}$  et les inégalités  $\sigma \geq \sigma_0 \geq 1$ , on déduit que :

$$2^*\sigma_0 \leq \xi_\sigma \leq 2^*\sigma.$$

Finalement, en appliquant respectivement, l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev au dernier terme de l'inégalité (4.15), on obtient l'estimation :

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \gamma C_3 \left( \int_{\Omega} |\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)|^2 dx \right)^{\frac{q}{2}} \left( \int_{\Omega} |G_k(u_n)|^{\sigma 2^*} dx \right)^{(1-\frac{q}{2})\frac{\xi_\sigma}{\sigma 2^*}} \\ &\leq \gamma C_4 \left( \int_{\Omega} |\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)|^2 dx \right)^{\frac{q}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{2})\frac{\xi_\sigma}{\sigma}} \\ &= \gamma C_4 \|\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^{q+(1-\frac{q}{2})\frac{\xi_\sigma}{\sigma}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

(notons que  $C_4$  est une constante positive, dépendante de  $q, \sigma$  et de  $mes(\Omega)$ ).

Estimation de  $I_4$ . On a :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\Omega} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx \\ &= \int_{\{|f| \leq \alpha_0 |u_n|\}} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx + \int_{\{|f| > \alpha_0 |u_n|\}} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx \end{aligned}$$

par suite :

$$I_4 \leq \alpha_0 \int_{\Omega} |u_n| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx + \int_{\{|f|>\alpha_0|u_n\}} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx. \quad (4.17)$$

Le premier terme du second membre de (4.17), est absorbé par  $I_2$ . D'autre part, étant donné que  $(2\sigma - 1)m' = 2^*\sigma$  et que  $|u_n| > k$  quand  $G_k(u_n) \neq 0$ , alors en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev, on déduit, pour le second terme du second membre de (4.17), l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\{|f|>\alpha_0|u_n\}} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx &= \int_{\{|f|>\alpha_0k\}} |f| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} dx \\ &\leq \|f\chi_{\{|f|>\alpha_0k\}}\|_{L^m(\Omega)} \| |G_k(u_n)|^{2\sigma-1} \|_{L^{m'(\Omega)}} \\ &\leq C_5 \|f\chi_{\{|f|>\alpha_0k\}}\|_{L^m(\Omega)} \|\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2^*}{m'}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Posons

$$X_{n,k} = \|\nabla (|G_k(u_n)|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)}$$

En utilisant (4.14) (4.16) (4.17) et (4.18) dans (4.13), on déduit l'inégalité :

$$\alpha C_6 X_{n,k}^2 \leq \gamma C_7 X_{n,k}^{q+(1-\frac{q}{2})\frac{\xi_\sigma}{\sigma}} + \|f\chi_{\{|f|>\alpha_0k\}}\|_{L^m(\Omega)} X_{n,k}^{\frac{2^*}{m'}} \quad (4.19)$$

En remarquant que :

$$2 - \frac{2^*}{m'} = \frac{1}{\sigma}$$

et que

$$q + (1 - \frac{q}{2})\frac{\xi_\sigma}{\sigma} = 2 + \frac{q-1}{\sigma} = \frac{q}{\sigma} + \frac{2^*}{m'}$$

on déduit de (4.19) l'inégalité suivante :

$$\forall k \geq 0, \forall n \geq 0, \alpha C_6 X_{n,k}^{\frac{1}{\sigma}} \leq \gamma C_7 X_{n,k}^{\frac{q}{\sigma}} + \|f\psi_{\{|f|>\alpha_0k\}}\|_{L^m(\Omega)} \quad (4.20)$$

En définissant la fonction :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^+ &\longmapsto \mathbb{R} \\ X &\longmapsto F(X) = \alpha C_6 X^{\frac{1}{\sigma}} - \gamma C_7 X^{\frac{q}{\sigma}} \end{aligned}$$

#### 4. Equations elliptiques quasilinéaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient 84

---

Alors (4.20) est équivalent à :

$$\forall k \geq 0, \forall n \geq 0, F(X_{n,k}) \leq \|f\psi_{\{|f|>\alpha_0 k\}}\|_{L^m(\Omega)} \quad (4.21)$$

or on a  $q > 1$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $H(X) = F(X^\sigma)$  est concave sur  $[0, +\infty[$ , de plus,  $F(0) = 0$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) = -\infty$ , par conséquent  $F$  admet un maximum unique  $F^* = F(Z^*)$ , où  $Z^*$  et  $F^*$  sont donnés par :

$$Z^* = C_8 \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\sigma}{q-1}} \quad \text{et} \quad F^* = F(Z^*) = C_9 \frac{\alpha^{\frac{q}{q-1}}}{\gamma^{\frac{1}{q-1}}}.$$

On va à présent, exploiter l'inégalité (4.21) (qui est non trivial), dans le cas où :

$$\|f\psi_{\{|f|>\alpha_0 k\}}\|_{L^m(\Omega)} < F^*. \quad (4.22)$$

**1<sup>er</sup> Cas :**  $\alpha_0 = 0$ . Alors (4.22) n'est autre que la condition de petitesse imposée à  $\|f\|_{L^m}$ .

L'équation :

$$F(X) = \|f\|_{L^m},$$

admet deux racines  $Z_0^-$  et  $Z_0^+$  avec  $0 < Z_0^- < Z^* < Z_0^+$   
par suite, l'inégalité (4.21) équivaut à :

$$\forall k \geq 0 \text{ et } \forall n \geq 0, \text{ soit } X_{n,k} \leq Z_0^- \text{ ou bien } X_{n,k} \geq Z_0^+, \quad (4.23)$$

mais comme :

$$X_{n,k} = \|\nabla(|G_k u_n|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

l'alternative (4.23) implique :

$$X_{n,k} \leq Z_0^- < Z^* \quad \forall k \geq 0 \text{ et } \forall n \geq 0.$$

En particulier :

$$X_{n,0} = \|\nabla(|u_n|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)} < Z^*, \quad \forall n \geq 0.$$

**2<sup>ème</sup> Cas :**  $\alpha_0 > 0$ . On définit  $k^*$  par :

$$k^* = \inf \left\{ k > 0, \ \|f\psi_{\{|f|>\alpha_0 k\}}\|_{L^m(\Omega)} < F^* \right\}. \quad (4.24)$$

#### 4. Equations elliptiques quasilinéaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient 85

Pour tout  $\delta > 0$ , on a  $\|f\psi_{\{|f|>\alpha_0(k^*+\delta)\}}\|_{L^m(\Omega)} < F^*$  et l'équation  $F(X) = \|f\psi_{\{|f|>\alpha_0(k^*+\delta)\}}\|_{L^m(\Omega)}$  admet deux racines notées  $Z_{k^*+\delta}^-$  et  $Z_{k^*+\delta}^+$ , vérifiant  $0 < Z_{k^*+\delta}^- < Z^* < Z_{k^*+\delta}^+$ . L'inégalité (4.21) entraîne de même, l'alternative :

$$\forall k \geq k^* + \delta \text{ et } \forall n \geq 0, \text{ soit } X_{n,k} \leq Z_{k^*+\delta}^- \text{ ou bien } X_{n,k} \geq Z_{k^*+\delta}^+,$$

mais comme la fonction  $k \rightarrow X_{n,k}$  est continue et tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini, on conclut de même grâce à l'alternative ci-dessus que :

$$\forall k \geq k^* + \delta \text{ et } \forall n \geq 0, \text{ on a } X_{n,k} \leq Z_{k^*+\delta}^-,$$

et en particulier, on a :

$$X_{n,k^*+\delta} = \|\nabla (|G_{k^*+\delta}(u_n)|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \leq Z_{k^*+\delta}^- < Z^*. \quad (4.25)$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on déduit pour les deux cas précédents, que :

$$\forall n \geq 0, \|\nabla (|G_{k^*}(u_n)|^\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \leq Z^* = C_8 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{\sigma}{q-1}}, \quad (4.26)$$

avec  $k^* = 0$  quand  $\alpha_0 = 0$  et  $k^* = \inf \left\{ k > 0, \|f\psi_{\{|f|>\alpha_0 k\}}\|_{L^m(\Omega)} < F^* \right\}$ , quand  $\alpha_0 > 0$ .

La première estimation de la proposition 4.3.1 est ainsi établie dans le cas  $\alpha_0 = 0$ . Pour le cas  $\alpha_0 > 0$ , on aura besoin de la deuxième estimation de cette proposition et que l'on établit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Posons } k_1^* = k^* + 1. \text{ On a } \int_{\Omega} |\nabla (|G_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx &= \int_{|u_n| \geq k^*+1} |\nabla (|u_n|^\sigma)|^2 dx = \\ &= \int_{|u_n| \geq k^*+1} \sigma^2 |u_n|^{2\sigma-2} |\nabla u_n|^2 dx \geq \sigma^2 \int_{|u_n| \geq k^*+1} |\nabla u_n|^2 dx = \sigma^2 \int_{\Omega} |\nabla G_{k_1^*}(u_n)|^2 dx.. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire une estimation uniforme en  $n$  de  $\|\nabla (G_{k_1^*}(u_n))\|_{L^2(\Omega)}$  à partir de l'estimation (4.26).

D'autre part comme  $u_n = G_{k_1^*}(u_n) + T_{k_1^*}(u_n)$ , il nous reste à établir une estimation uniforme dans  $L^2(\Omega)$  de  $\nabla T_{k_1^*}(u_n)$ . Pour cela, on utilise  $\varphi(x) = T_{k_1^*}(u_n(x))$

comme fonction test dans (4.12), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \alpha \int_{\Omega} |\nabla T_{k_1^*}(u_n)|^2 dx &\leq \gamma \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q |T_{k_1^*}(u_n)| dx + \int_{\Omega} |f T_{k_1^*}(u_n)| dx \\
 &\leq \gamma k_1^* \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q dx + k_1^* \|f\|_{L^1(\Omega)} \\
 &\leq \gamma k_1^* \int_{\Omega} |\nabla T_{k_1^*}(u_n)|^q dx + \gamma k_1^* \int_{\Omega} |\nabla G_{k_1^*}(u_n)|^q dx + k_1^* \|f\|_{L^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Comme  $q < 2$ , l'application de l'inégalité de Young au premier terme du second membre de cette inégalité et l'injection  $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , au second terme, permet d'ecire :

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla T_{k_1^*}(u_n)|^2 dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla T_{k_1^*}(u_n)|^2 dx + C_1(k^*) \int_{\Omega} |\nabla G_{k_1^*}(u_n)|^2 dx + C_2(k^*),$$

où  $C_1(k^*)$  et  $C_2(k^*)$  sont deux constantes positives (dépendantes de  $k^*$ ).

L'estimation de  $\|\nabla(G_{k_1^*}(u_n))\|_{L^2(\Omega)}$ , nous permet alors de déduire l'estimation de  $\|\nabla(T_{k_1^*}(u_n))\|_{L^2(\Omega)}$  et par suite :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq M_2(k^*). \tag{4.27}$$

Il nous reste à établir la première estimation de la proposition 4.3.1 pour le cas  $\alpha_0 > 0$ ; pour cela, on va utiliser les estimations de  $\|\nabla(T_{k_1^*}(u_n))\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\nabla(G_{k_1^*}(u_n))\|_{L^2(\Omega)}$  et l'estimation (4.26).

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^\sigma)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(|T_{k_1^*}(u_n) + G_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx \\
 &= \int_{|u_n| \leq k_1^*} |\nabla(|T_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx + \int_{|u_n| > k_1^*} |\nabla(|k_1^* + G_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} \int_{|u_n| \leq k_1^*} |\nabla (|T_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx &= \int_{|u_n| \leq k_1^*} \sigma^2 |T_{k_1^*}(u_n)|^{2\sigma-2} |\nabla (T_{k_1^*}(u_n))|^2 dx \\ &\leq \sigma^2 (k_1^*)^{2\sigma-2} \int_{|u_n| \leq k_1^*} |\nabla (T_{k_1^*}(u_n))|^2 dx \leq C_3 (k^*). \end{aligned} \quad (4.29)$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité :

$$(a + b)^\beta \leq 2^\beta (a^\beta + b^\beta) \quad \forall a, b \geq 0 \text{ et } \forall \beta \geq 0,$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_{|u_n| > k_1^*} |\nabla (|k_1^* + G_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx &\leq \int_{|u_n| > k_1^*} (k_1^* + |G_{k_1^*}(u_n)|)^{2\sigma-2} |\nabla (G_{k_1^*}(u_n))|^2 dx \\ &\leq (2k_1^*)^{2\sigma-2} \int_{|u_n| > k_1^*} |\nabla (G_{k_1^*}(u_n))|^2 dx + 2^{2\sigma-2} \int_{|u_n| > k_1^*} |G_{k_1^*}(u_n)|^{2\sigma-2} |\nabla (G_{k_1^*}(u_n))|^2 dx \\ &\leq (2k_1^*)^{2\sigma-2} \int_{\Omega} |\nabla (G_{k_1^*}(u_n))|^2 dx + 2^{2\sigma-2} \int_{\Omega} |\nabla (|G_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx, \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_{|u_n| > k_1^*} |\nabla (|k_1^* + G_{k_1^*}(u_n)|^\sigma)|^2 dx \leq C_4 (k^*). \quad (4.30)$$

De (4.28), (4.29) et (4.30), on déduit la première estimation de la proposition 4.3.1, et qui est :

$$\int_{\Omega} |\nabla (|u_n|^\sigma)|^2 dx \leq M_1 (k^*). \quad (4.31)$$

Les constantes positives  $C_i$ ,  $i = 1, 4$  et  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ , apparaissant dans ces estimations, dépendent de  $k^*$ .

### Etape 3. Passage à la limite.

En utilisant l'estimation (4.27), on extrait une sous suite notée de même  $(u_n)$ , faiblement convergente dans  $H_0^1(\Omega)$  et convergeant p.p. vers  $u \in H_0^1(\Omega)$ , de plus, d'après [66] (voir aussi [27]),  $\nabla u_n$  converge p.p. vers  $\nabla u$ .

D'autre part, la fonction  $H$  contenant le terme  $|\nabla u|^q$ , étant de Carathéodory, on

déduit alors, que  $H_n(x, u_n, \nabla u_n)$  converge p.p. vers  $H(x, u, \nabla u)$ . De la condition de croissance (4.11), on déduit que  $\{H_n(x, u_n, \nabla u_n)\}_n$  est bornée dans  $L^{\frac{2}{q}}(\Omega)$ , par conséquent (voir par exemple le théorème 1.3.12),  $H_n(x, u_n, \nabla u_n)$  converge vers  $H(x, u, \nabla u)$  dans  $L^r(\Omega)$ -fort  $\forall r < \frac{2}{q}$ .

Ces résultats de convergence permettent de faire un passage à la limite dans le problème approché (4.12) et dans l'estimation (4.31), et par suite, conclure à l'existence d'une solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème (4.8), vérifiant la condition de régularité :

$$|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{m^{**}}{2^*}$$

### 4.3.2 Preuve du théorème 4.2.4

Les étapes 1 et 3 étant identiques à celles du théorème 4.2.2, il suffit alors de prouver les estimations à priori suivantes :

**Proposition 4.3.2** *Supposons (4.9)-(4.11) avec  $1 < q < 2$  et  $p > \frac{q}{2-q}$  et soit  $u_n$  une solution du problème approché (4.12).*

1. *Soit  $f \in L^m(\Omega)$ , avec  $m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2}[$ , alors on a les estimations suivantes :*

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \left( |u_n|^{\frac{m^{**}}{2^*}} \right) \right|^2 dx \leq C_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq C_2,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes positives, indépendantes de  $n$ .

2. *Dans le cas où  $m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[$ , on a de plus l'estimation :*

$$\int_{\Omega} |u_n|^{mp} dx \leq C_3, \quad \text{où } C_3 \text{ est une constante indépendante de } n.$$

**Preuve.**

Soit  $u_n$  une solution du problème approché (4.12),  $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , on choisit  $v_n = |u_n|^{2\sigma-2} u_n$ , avec  $\sigma \geq 1$ , comme fonction test dans l'équation (4.12). En utilisant (4.9) et (4.11) dans la formulation (4.12), on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\alpha(2\sigma - 1) \int_{\Omega} |u_n|^{2\sigma-2} |\nabla u_n|^2 dx}_{J_1} + \underbrace{\alpha_0 \int_{\Omega} |u_n|^{p+2\sigma-1} dx}_{J_2} \\ & \leq \underbrace{\gamma \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q |u_n|^{2\sigma-1} dx}_{J_3} + \underbrace{\int_{\Omega} |f| |u_n|^{2\sigma-1} dx}_{J_4}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

#### 4. Equations elliptiques quasilinéaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient 89

---

Dans toute la suite, la notation  $C_i$ , désigne des constantes positives, indépendantes de  $n$ .

Le premier terme de (4.32), s'écrit :

$$J_1 = C_1 \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^\sigma)|^2 dx. \quad (4.33)$$

Estimation de  $J_3$  :

En utilisant l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} J_3 &= \gamma \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q |u_n|^{\frac{2\sigma-2}{2}q} |u_n|^{2\sigma-1-(\sigma-1)q} dx \\ &\leq \frac{C_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^\sigma)|^2 dx + C_3 \int_{\Omega} |u_n|^{[2\sigma-1-(\sigma-1)q]\frac{2}{2-q}} dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Comme  $p > \frac{q}{2-q}$ , on déduit que  $\xi_\sigma = [2\sigma - 1 - (\sigma - 1)q]\frac{2}{2-q} < p + 2\sigma - 1$ .

Par l'inégalité de Young, on obtient, une estimation du second terme du second membre de (4.34), sous la forme :

$$C_3 \int_{\Omega} |u_n|^{\xi_\sigma} dx \leq \frac{\alpha_0}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{p+2\sigma-1} dx + C_4. \quad (4.35)$$

On déduit de (4.34) et (4.35) :

$$J_3 \leq \frac{C_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^\sigma)|^2 dx + \frac{\alpha_0}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{p+2\sigma-1} dx + C_4. \quad (4.36)$$

Estimation de  $J_4$  :

D'après l'inégalité de Hölder on a :

$$J_4 = \int_{\Omega} |f| |u_n|^{2\sigma-1} dx \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} |u_n|^{(2\sigma-1)m} dx \right)^{\frac{1}{m'}}. \quad (4.37)$$

En utilisant (4.33), (4.36) et (4.37) dans l'inégalité (4.32), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{C_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^\sigma)|^2 dx + \frac{\alpha_0}{2} \int_{\Omega} |u_n|^{p+2\sigma-1} dx \\ &\leq C_3 + \|f\|_{L^m} \left( \int_{\Omega} |u_n|^{(2\sigma-1)m'} dx \right)^{\frac{1}{m'}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

#### 4. Equations elliptiques quasilinéaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient 90

---

De (4.38) et de l'injection de Sobolev, on déduit que :

$$\begin{aligned}
 C_5 \left( \int_{\Omega} |u_n|^{\sigma \cdot 2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \frac{C_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^{\sigma})|^2 dx \\
 &\leq C_3 + C_4 \left( \int_{\Omega} |u_n|^{(2\sigma-1)m'} dx \right)^{\frac{1}{m'}}.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

On choisit alors  $\sigma$ , de façon que  $\sigma \cdot 2^* = (2\sigma - 1)m'$ , ce qui donne  $\sigma = \frac{m^{**}}{2^*}$ . Or, du fait que  $m < \frac{N}{2}$  on a  $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ , on déduit alors de (4.39), les estimations suivantes :

$$\int_{\Omega} |u_n|^{m^{**}} dx \leq C_6 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla(|u_n|^{\frac{m^{**}}{2^*}})|^2 dx \leq C_7.$$

a présent, pour montrer que  $(u_n)$  est uniformément borné dans  $H_0^1(\Omega)$  et dans  $L^{mp}(\Omega)$  (pour tout  $m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{p'}]$ ), on utilise comme fonction test dans la formulation (4.12), la fonction :

$$v_n = [(1 + |u_n|)^{\lambda} - 1] \operatorname{sign} u_n,$$

où  $\lambda \geq 1$  sera convenablement choisi par la suite.

On obtient de même, en utilisant (4.9) et (4.11) dans la formulation (4.12), l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\alpha \lambda \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\lambda-1} dx}_{K_1} + \underbrace{\alpha_0 \int_{\Omega} |u_n|^p [(1 + |u_n|)^{\lambda} - 1] dx}_{K_2} \\
 &\leq \underbrace{\gamma \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q (1 + |u_n|)^{\lambda} dx}_{K_3} + \underbrace{\int_{\Omega} |f| (1 + |u_n|)^{\lambda} dx}_{K_4}.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Estimation de  $K_2$  :

Comme  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^p [(1+s)^{\lambda} - 1]}{(1+s)^{\lambda+p}} = 1$ , alors  $\exists l_1 = l_1(\lambda, p) > 0$  tel que

$$s^p \left[ (1+s)^{\lambda} - 1 \right] \geq \frac{(1+s)^{\lambda+p}}{2} \quad \forall s \geq l_1.$$

On déduit que :

$$K_2 \geq \frac{\alpha_0}{2} \int_{|u_n| \geq l_1} (1 + |u_n|)^{\lambda+p} dx. \tag{4.41}$$

Estimation de  $K_3$  :

En utilisant l'inégalité de Young On a :

$$\begin{aligned} K_3 &= \gamma \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q (1 + |u_n|)^{(\lambda-1)\frac{q}{2}} (1 + |u_n|)^{\lambda - (\lambda-1)\frac{q}{2}} dx \\ &\leq \frac{\alpha\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\lambda-1} dx + C_1 \int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{[\lambda - (\lambda-1)\frac{q}{2}]\frac{2}{2-q}} dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Comme  $p > \frac{2}{2-q}$ , alors :

$$[\lambda - (\lambda - 1)\frac{q}{2}]\frac{2}{2 - q} = \lambda + \frac{q}{2 - q} < \lambda + p.$$

Utilisant de nouveau, l'inégalité de Young pour le second terme du second membre de (4.42), on déduit que :

$$K_3 \leq \frac{\alpha\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\lambda-1} dx + \frac{\alpha_0}{4} \int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\lambda+p} dx + C_2. \quad (4.43)$$

Estimation de  $K_4$  :

Par Hölder, on a :

$$K_4 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\lambda m'} dx \right)^{\frac{1}{m'}}. \quad (4.44)$$

En utilisant les estimations (4.41), (4.42), (4.43) et (4.44) dans l'inégalité (4.40), on déduit que :

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\lambda-1} dx + \frac{\alpha_0}{4} \int_{|u_n| > l_1} (1 + |u_n|)^{\lambda+p} dx \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\lambda m'} dx \right)^{\frac{1}{m'}} + C_3. \end{aligned} \quad (4.45)$$

De l'inégalité (4.45), on déduit d'une part, que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\lambda-1} dx \leq C_4 \left( \int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\lambda m'} dx \right)^{\frac{1}{m'}} + C_5, \quad (4.46)$$

#### 4. Equations elliptiques quasilineaires à croissance sous quadratique par rapport au gradient 92

---

en utilisant l'injection de Sobolev et l'argument d'estimation utilisé pour  $K_2$ , on minore le terme de gauche de l'inégalité (4.46), par :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\lambda-1} dx &= C_6 \int_{\Omega} \left| \nabla [(1 + |u_n|)^{\frac{\lambda+1}{2}} - 1] \right|^2 dx \\
 &\geq C_7 \left[ \int_{\Omega} [(1 + |u_n|)^{\frac{\lambda+1}{2}} - 1]^{2^*} dx \right]^{\frac{2}{2^*}} \\
 &\geq \frac{C_7}{2} \left[ \int_{|u_n| > l_2} (1 + |u_n|)^{\frac{\lambda+1}{2} 2^*} dx \right]^{\frac{2}{2^*}}.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

On choisit alors  $\lambda$  de façon que :

$$\lambda m' = \frac{\lambda + 1}{2} 2^*.$$

On obtient ainsi :

$$\lambda = \frac{m^{**}}{m'} \quad \text{et} \quad \lambda m' = \frac{\lambda + 1}{2} 2^* = m^{**}.$$

Mais comme  $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ , par suite, on déduit de (4.46) et (4.47), les deux estimations suivantes :

$$\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{m^{**}} dx \leq C_8,$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (1 + |u_n|)^{\frac{m^{**}}{m'} - 1} dx \leq C_9. \tag{4.48}$$

Or  $m \geq \frac{2N}{N+2} \Leftrightarrow \frac{m^{**}}{m'} - 1 \geq 0$ , de l'estimation (4.48), on déduit alors, que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq C_{10}$$

D'autre part, de l'inégalité (4.45), on déduit de plus, l'estimation :

$$\int_{|u_n| > l_1} (1 + |u_n|)^{\lambda+p} dx \leq C_{11} \left( \int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\lambda m'} dx \right)^{\frac{1}{m'}} + C_{12}. \tag{4.49}$$

On choisit dans ce cas,  $\lambda$  de façon que :

$$\lambda + p = \lambda m',$$

on obtient ainsi :

$$\lambda = p(m - 1) \quad \text{et} \quad \lambda + p = \lambda m' = mp.$$

On déduit alors, de l'inégalité (4.49) que :

$$\int_{\Omega} |u_n|^{pm} dx \leq C_{13}.$$

■

**Remarque 4.3.3**

Pour tout  $m \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2}[$  on a :

$$pm > m^{**} \Leftrightarrow m < \frac{N}{2p'}.$$

$$pm \geq m^{**} \Rightarrow \lambda = p(m - 1) \geq 1.$$

Ce qui fait que la sommabilité  $L^{mp}(\Omega)$  n'a d'intérêt, dans ce cas, que dans l'intervalle  $[\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2p'}[$ , intervalle non vide dans le cas où  $p > \frac{N+2}{N-2}$  et particulièrement dans le cas où  $q \geq 1 + \frac{2}{N}$ .

# Bibliographie

- [1] R. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975
- [2] L. Aharouch, J. Bennouna and A. Touzani, *Existence of Renormalized Solutions of some Elliptic Problems in Orlicz Spaces*, Rev. Mat. Complut **22** (2009), no. 1, 91-110.
- [3] N. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), no. 1, 23-35.
- [4] Y. Atik, M. Boukra, *Summability of Solutions of Elliptic and Parabolic Quasilinear Equations with Measures as Data*, Journal of Convex Analysis vol **10** no. 2 (2003), 437-444.
- [5] Y. Atik, *Local T-sets and Degenerate Quasilinear Elliptic Bilateral Problem with an  $L^1$ -datum*, Nonlinear Analysis T.M.A. **38** (1999), 827-867.
- [6] Y. Atik, J.-M. Rakotoson, *Local T-sets and Degenerate Variational Problems*, Part I, Appl Math.Lett, vol **7** no. 4 (1994), 49-53.
- [7] Y. Atik, J.-M. Rakotoson, *Local T-sets and Renormalized Solutions of Degenerate Quasilinear Elliptic Equations with an  $L^1$ -datum*, Differential Equations, vol **1** no. 6 (1996), 965-988.
- [8] G. Barles, A Porretta, *Uniqueness for Unbounded Solutions to Stationary Viscous Hamilton-Jacobi Equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa Cl. Sci. **5** (2006), 107-136.
- [9] Ph. Benilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre and J.L. Vasquez, *An  $L^1$  Theory of Existence and Uniquenes of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1995), 241-273.
- [10] A. Benkirane, A. Elmahi, *Almost everywhere Convergence of the Gradients of Solutions to Elliptic Equations in Orlicz Spaces and Applications*, Nonlinear Analysis T.M.A. **28** (1997), 1769-1784.

- [11] A. Benkirane, A. Elmahi, *An Existence Theorem for a Strongly Nonlinear Elliptic Problem in Orlicz spaces*, Nonlinear Analysis T.M.A. **36** (1999), 11-24.
- [12] A. Benkirane, A. Elmahi, *A Strongly Nonlinear Elliptic Equation having natural growth terms and  $L^1$ -data*, Nonlinear Analysis T.M. **39** (2000), 403-411.
- [13] A. Benkirane, A. Elmahi and D. Meskine, *An Existence Theorem for a class of Elliptic Problems in  $L^1$* , Appl.Math. **29** (2002), 439-457.
- [14] A. Benkirane, M. Kbiriaou, *Sur certaines equations elliptiques non linéaires à second membre mesure*, Forum Math. **12** (2000), 385-395.
- [15] A. Benkirane, J. Bennouna, *Existence of Entropy Solutions for some Nonlinear Problems in Orlicz Spaces*, Abstract and applied Analysis **7**, no. 2 (2002), 85-102.
- [16] A. Bensoussan, L. Boccardo and F. Murat, *On a Nonlinear P.D.E. having Natural Growth Terms and Unbounded Solutions*, Ann. Inst. H.Poincaré, Anal. Non Linéaire, **5** (1988), 347-364.
- [17] F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat and M.M. Porzio, *Existence of Renormalized Solutions to Nonlinear Elliptic Equations with lower order term and right hand side a Measure*, J.Math.Pures Appl. **81** (2002), 533-566.
- [18] F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat and M.M. Porzio, *Uniqueness of Renormalized Solutions to Nonlinear Elliptic Equations with lower order term and right hand side in  $L^1$* , Control Optimization and Calculus of Variations & ESAIM (European Series in Applied and Industrial Mathematics), volume " A Tribute to Jacques Louis Lions", vol **1**, EDP Science, 2002.
- [19] L.Boccardo, F.Murat and J.P.Puel, *Existence of Bounded Solutions for Nonlinear Elliptic Unilateral Problems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **152** (1988), 183-196.
- [20] L. Boccardo, F. Murat and J.-P. Puel,  *$L^\infty$ -estimates for some Nonlinear Partial Differential Equations and Application to an Existence Result*, SIAM J. Math. Anal., **23** (1992), 326-333.
- [21] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations Involving Measure Data*, J.Funct.Anal. **87** (1989), 149-169.
- [22] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear Elliptic Equations with right-hand side Measures*, Comm.Partial Differential Equations **17** (3,4) (1992), 641-655.

- [23] L. Boccardo, T. Gallouët, *Summability of the Solutions of Nonlinear Elliptic Equations with right-hand side Measures*, Journal of Convex Analysis **3** no. 2 (1996), 361-365.
- [24] L. Boccardo, T. Gallouët, *Strongly Nonlinear Elliptic Equations having Natural Growth Terms and  $L^1$ -data*. Nonlinear Analysis T.M.A., **19** (1992), 573-579.
- [25] L. Boccardo, T. Gallouët and L. Orsina, *Existence and Nonexistence of Solutions for some Nonlinear Elliptic Equations*, J.Anal.Math. **73** (1997), 203-223.
- [26] L. Boccardo, D. Giachetti, J.I. Diaz and F. Murat, *Existence and Regularity of Renormalized Solutions for some Elliptic Problems Involving Derivatives of Nonlinear Terms*, Journal of Differential Equations, **106** (1993), 215-237.
- [27] L. Boccardo, T. Gallouët and F. Murat, *A Unified Presentation of two Existence Results for Problems with Natural Growth*, In Progress in Partial Differential Equations : the Metz Surveys, **2** (1992), 127-137, Pitm Res. Notes Math. Ser., 296, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.
- [28] L. Boccardo, F. Murat, *Almost every where Convergence of the Gradients*, Nonlinear Analysis T.M.A, **19** (1992), 591-597.
- [29] L. Boccardo, *Positive Solutions for some Quasilinear Equations with Natural Growth*, Atti Accad.Naz Lincei **11** (2000), 31-39.
- [30] L. Boccardo, *Some Nonlinear Dirichlet Problems in  $L^1$  Involving Lower Order Terms in Divergence Form*, in Progress in elliptic and parabolic partial differential equations ( Capri 1994 ), Pitman Res. Notes Math. Ser. **350**, Longman, Harlow (1996), 43-57.
- [31] L. Boccardo-M.M. Porzio, *Quasilinear Elliptic Equations with Subquadratic Growth*, J.Differential Equations, **229**, (2006), 367-388.
- [32] L. Boccardo, S. Segura de Leon and C. Trombetti, *Bounded and Unbounded Solutions for a class of Quasilinear Elliptic Problems with a Quadratic Gradient Term*, J. Math. Pures Appl., **80**, no.9 (2001), 919-940.
- [33] G. Bottaro, M.E. Marina, *Problema di Dirichlet per Equazioni Ellittiche di tipo Variazionale su insiemi non limitati*, Boll.Un.Mat.Ital.**8** (1973), 46-56.
- [34] M. Boukra, *Memoire de Magister*, U.M.M.T.O, (2001).

- [35] M. Boukra, *Régularité d'un Problème Elliptique à Croissance Sous Quadratique par rapport au Gradient*, Communication au R.A.M.A.VI, Avril 2008, U.M.M.T.O., Tizi-ouzou.
- [36] F.E. Browder, *Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*, Bull. A.M.S., **69**, (1963), 862-874.
- [37] F.E. Browder, *Existence Theory for Boundary Value Problems for Quasilinear Elliptic Systems with Strongly Nonlinear Lower Order Terms*, Proc. Symp. Pure Math., A.M.S., **23**, (1973), 269-286.
- [38] A. Cianchi, *A Sharp Embedding theorems for Orlicz-Sobolev Spaces*, Indiana Univ. Math. J. **45**, (1996), no 1, 39-45.
- [39] A. Cianchi, *Boundedness of Solutions to Variational Problems under General Growth Conditions*, Comm. Partial Differential Equations, **22**, (1997), no. 9-10, 1629-1646.
- [40] A. Dall'Aglio, *Approximated Solutions of Equations with  $L^1$  data. Application to the  $H$ -convergence of Quasilinear Parabolic Equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **170**, (1996), 207-240.
- [41] A. Dall'Aglio, D. Giachetti and J.-P. Puel, *Nonlinear Elliptic Equations with Natural Growth in General domains*, Ann. Mat. Pura Appl., **181**, (2002), 407-426.
- [42] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina and A. Prignet, *Renormalized Solutions of Elliptic Equations with General Measure Data*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **28**, (1999), no. 4, 741-808.
- [43] R. DiPerna-P.-L. Lions, *On the Cauchy Problem for the Boltzman Equation : Global Existence and Stability*, Ann. Math., **130**, (1989), no.2, 321-366.
- [44] T.K. Donaldson, *Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems in Orlicz-Sobolev Spaces*, J. Differential Equations, **10**, (1971) ; 507-528.
- [45] T.K. Donaldson, N.S. Trudinger, *Sobolev-Orlicz Spaces and Embedding Theorems*, J. Funct. Anal., **8**, (1971), 52-75.
- [46] A. Elmahi, D. Meskine, *Existence of Solutions for Elliptic Problems Having Natural Growth Terms in Orlicz Spaces*, Abstract and Applied Analysis, **12**, (2004), 1031-1045.
- [47] A. Elmahi, D. Meskine, *Nonlinear Elliptic Problems Having Natural Growth and  $L^1$  data in Orlicz Spaces*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **184**, (2005), 161-184.

- [48] V. Ferone, B. Messano, *Comparison and Existence Results for Classes of Nonlinear Elliptic Equations with General Growth in the Gradient*, Adv. Nonlinear Stud., **7**, (2007), 31-46.
- [49] V. Ferone, F. Murat, *Quasilinear Problems Having Quadratic Growth in the Gradient : An Existence Result when the Source Term is Small*, In Equations aux Dérivées partielles et Applications, Gauthier-Villars, Ed. Sci. Med. Elsevier, Paris, 1998, 497-515.
- [50] V. Ferone, F. Murat, *Nonlinear Problems Having Natural Growth in the Gradient : An Existence Result when the Source Terms are Small*, Nonlinear Analysis T.M.A, **42**, (2000), no. 7, 1309-1326.
- [51] J.-P. Gossez , *Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems for Equations with Rapidly (or Slowly) Increasing Coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **190**, (1974), 163-205.
- [52] J.-P. Gossez , *Surjectivity Results for Pseudomonotone Mapping in Complementary Systems*, J.Math. Anal. Appl., **53**, (1976), 484-494.
- [53] J.-P. Gossez , *Sobolev-Orlicz Spaces and Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*, Non Linear Analysis, Function Spaces and Applications, (S.Fucik and Kufner Eds), Teubner Leipzig, (1979), 59-94.
- [54] J.-P. Gossez , *Some Approximation Properties in Sobolev-Orlicz Spaces*, Studia Math, **74**, (1982), 17-24.
- [55] J.-P. Gossez , *A Strong Nonlinear Elliptic Problem in Sobolev-Orlicz Spaces*, Proc. Symp. Pure Math, **45**, (1986), 455-462.
- [56] J.-P. Gossez, V.Mustonen, *Variational Inequalities in Sobolev-Orlicz Spaces*, Nonlinear Analysis T.M.A, **11**, (1987), 379-392.
- [57] N. Grenon, F. Murat and A. Porretta, *Existence and a priori Estimate for Elliptic Problems with Subquadratic Gradient Dependent Terms*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **342**, (2006), 23-28.
- [58] K. Hansson, V. Maz'ja and I.E. Verbitsky, *Criteria of Solvability for Multidimensional Ricatti Equations*, Ark. Mat., **37**, (1999), no.1, 87-120.
- [59] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1965).
- [60] M.A. Krasnosel'skii, *Topological methods in the Theory of nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, London 1964.

- [61] M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
- [62] A. Kufner, O. John and S. Fucik, *Functions Spaces*, Academia, Prague, 1977.
- [63] R. Landes, *On Galerkin's method in the Existence Theory of Quasilinear Elliptic Equations*, J. Funct. Analysis, **39**, (1980), 123-148.
- [64] R. Landes, V. Mustonen, *Pseudomonotone Mappings in Sobolev-Orlicz Spaces and Nonlinear Boundary Value Problems on Unbounded Domains*, J. Math. Anal. Appl., **88**, (1982), 25-36.
- [65] C. Leone, A. Porretta, *Entropy Solutions for Nonlinear Elliptic Equations in  $L^1$* , Nonlinear Analysis T.M.A, **32**, (1998), 325-334.
- [66] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques Résultats de Visik sur les Problèmes Elliptiques Non Linéaires par les Methodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, **93**, (1965), 97-107.
- [67] J.-L. Lions, *Quelques Methodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod and Gauthier Villards, Paris 1969.
- [68] Li Feng-Quan, Li Guang-Wei, *Summability of the to Nonlinear Parabolic Equations with Measure Data*, Journal of Convex Analysis vol **7** n°1 (2000), 203-208.
- [69] W. Luxemburg, *Banach Function Spaces, (Thesis)*, Technische Hogeschool te Delft, the Netherlands, (1955).
- [70] F. Murat, *Soluciones Renormalizadas de EDP Ellipticas no Lineales*, Pré-publication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'université Paris VI, France, (1993).
- [71] J. Musielak, W. Orlicz, *On Modular Spaces*, Studia Math., **18**, (1959), 49-65.
- [72] V. Mustonen, *An Elliptic Boundary Value Problem for Strongly Nonlinear Equations in Unbounded Domains*, Proc. Royal Soc. Edinbourg, **76**, (1977), 217-230.
- [73] S.I. Pohozaev, *On imbedding Sobolev Theorem for  $pl = n$* , Doclady Conference, Section Math., Moscow Power Institute, (1965), 158-170. (en Russe).
- [74] A. Porretta, *Existence for Elliptic Equations in  $L^1$  having Lower Order Terms with Natural Growth*, Portugaliae Math., **57**, (2000), 179-190.
- [75] A. Porretta, *Some Remarks on the Regularity of Solutions for a Class of Elliptic Equations with Measure Data*, Houston Journal of Math., **26**, no. 1, (2000), 183-213.

- [76] A. Porretta, *Nonlinear Equations with Natural Growth Terms and Measure Data*, In : 2002-Fes Conference on Partial Differential Equations, Electron. J. Diff. Eqns. Conf., **09**, (2002), 183-202.
- [77] A. Porretta, *Elliptic Equations with first order Terms*, Notes of the course at Alexandria, Ecole Cimpa 1/2009.
- [78] A. Porretta, S. Segura de Leon, *Nonlinear Elliptic Equations having a Gradient Term with Natural Growth*, J. Math. Pures Appl., **85**, (2006), 465-492.
- [79] J.-M. Rakotoson, *Quasilinear Elliptic Problems with Measure as Data*, Diff. Int. Equations, **4**, (1991), 449-457.
- [80] J.-M. Rakotoson, *Generalized Solution in new type of Sets for Problems with Measures as Data*, Diff. Int. Equations, **6**, no. 1, (1993), 27-36.
- [81] M.M. Rao, Z.D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker Inc. New-York, (1991).
- [82] G. Stampacchia, *Le Problème de Dirichlet pour les Equations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15**, no. 1, (1965), 189-258.
- [83] G. Talenti, *Nonlinear Elliptic Equations, Rearrangements of Functions and Orlicz Spaces*, Ann. Mat. Pura e Appl., **120**, no. 4, (1979), 159-184.
- [84] G. Talenti, *An Embedding Theorem*, In Partial Differential Equations and Calculus of Variations, Vol. II, 919-924. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **2**, Birkhäuser, Boston, (1989).
- [85] G. Talenti, *Boundedness of Minimisers*, Hokkaido Math. J., **19**, (1990), 259-279.
- [86] N.S. Trudinger, *On Imbedding into Orlicz Spaces and some Applications*, J. Math. Mech., **17**, (1967), 473-483.
- [87] A. Youssfi, *Existence Result for Strongly Nonlinear Elliptic Equations in Orlicz-Sobolev Spaces*, Proyecciones, Universidad Catolica del Norte, Antofagasta-Chile, **26**, no. 2, (2007), 157-187.
- [88] V.I. Yudovich, *Some Estimates Connected with Integral Operators and with Solutions of Elliptic Equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **138**, (1961), 805-808. Translated in Soviet Math. Dokl., **2**, (1961), 746-749.