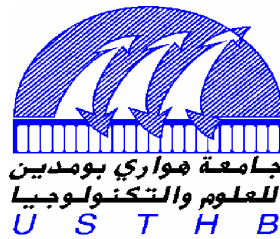


N^o d'ordre : 34/2009-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse : Systèmes Dynamiques

Par

BOURAOUI Radia

THÈME

Invariants des Nœuds à Partir
des Systèmes Dynamiques

Soutenu publiquement, le 11/ 03/ 2009, devant le jury composé de :

Mr. R. BEBBOUCHI	Professeur	U.S.T.H.B	Président.
Mr. A. AROUCHE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Directeur de Thèse.
Mr. A. KESSI	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur.
Mr. S. BOUROUBI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur.
Mr. A. IDRIS BEY	Chargé de Cours	U.S.T.H.B	Examineur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué à ma formation depuis mes premiers pas à l'école.

Mes sincères remerciement à Monsieur A. AROUCHE mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé et également pour la confiance qu'il ma accordée.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Monsieur R. BEBOUCHI, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie aussi vivement Messieurs A. KESSI, Professeur à l'U.S.T.H.B, S. BOUROUBI, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. et A. IDRIS BEY Chargé de cours à l'U.S.T.H.B qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail sans oublier Mr A. Menouer pour sa précieuse aide dans le domaine de l'analyse numérique.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents pour leur patience et leur soutien tout au long de mes études et à mon mari pour son soutien tout au long de cette dernière année.

Dieu merci pour la patience et le courage que vous m'avez accordé tous le long de la préparation de ce modeste travail.

Invariants des Nœuds à Partir des Systèmes Dynamiques

Résumé

Si G est un groupe d'un nœud orienté k , alors l'ensemble $Hom(K, \Sigma)$ de représentations d'un groupe de commutateur $K = [G, G]$ dans un groupe fini Σ a une structure d'un shift de type fini Φ_Σ . Les invariants de Φ_Σ , tel que l'entropie topologique et le nombre de points périodiques déterminent des invariants du nœud.

Mots-clés : Nœuds, Invariants, Coloriages, Représentations, Shift de type fini.

Table des matières

Introduction	1
Introduction	2
1 Généralités sur les nœuds	3
1.1 Nœuds et entrelacs	3
1.2 Projections et Diagrammes	4
1.2.1 Projection régulière	4
1.2.2 Diagramme d'un nœud	5
1.3 Equivalence des nœuds	6
1.3.1 Mouvements de Reidmeister	7
1.3.2 Equivalence des diagrammes	7
1.4 Groupe d'un nœud	7
1.4.1 Voisinage tubulaire et extérieur d'un nœud	8
1.4.2 Groupe fondamental d'un nœud et présentation de Wirtinger	8
1.4.3 Algorithme de Wirtinger	10
1.4.4 Nœuds toriques	11
1.5 Coloriages d'un nœud	16
1.5.1 Trois coloriages d'un nœud	16
1.5.2 Le p-coloriage	17
2 Les shifts de type fini	18
2.1 Le full shift	18
2.2 Espace shift	20
2.3 Langages	21
2.4 Shift de dimension supérieure	21

2.5	Entropie	22
3	Représentations associées aux entrelacs	23
3.1	Méthode de Reidmeister-Schreier	25
3.1.1	Application	
	26	
3.2	Le système dynamique associé au nœud en huit	28
3.3	Le système dynamique associé au nœud $k=5_2$	30
3.4	Le système dynamique associé à l'entrelacs $l = 6_2^3$	33
4	Généralisation de la N-colorabilité	35
4.1	(n,r)-coloriages et représentations	35
4.1.1	Relation entre coloriage et représentation	36
4.1.2	Le coloriage du nœud Satellite	42
5	Conclusion et perspectives	47
6	Appendice A	48
6.1	Graphes	48
6.1.1	Connexité d'un graphe	50
7	Appendice B:	53

Introduction

La technique de défaire les nœuds est d'invention très ancienne, beaucoup plus ancienne que celle de la roue. Au cours des siècles, l'art de faire et défaire des nœuds a été attribué aux couturières, aux tisserands et aux fervents des casse têtes mathématiques. La théorie des nœuds des mathématiques proprement dite, née il y a environ cent ans, a été développée dans le domaine de la topologie mais utilise aussi plusieurs disciplines mathématiques, à mentionner l'algèbre, la géométrie différentielle et la topologie algébrique.

L'expérience nous apprend qu'on peut défaire n'importe quel nœud aussi compliqué soit-il, à condition d'être assez patient, mais ces nœuds là sont d'habitude des nœuds à extrémités libres, alors que les nœuds de la théorie des nœuds n'ont pas d'extrémités, en fait traiter avec des nœuds mathématiques se fait sans coupure dans la ficelle nouée et les dénouer est presque impossible pour la plupart d'entre eux, seulement et suivant certains critères dit invariants (dans la plupart du temps compliqué à calculer et à manipuler) on peut les comparer et les distinguer.

Dans le travail qui va être présenté, on trouve une nouvelle approche qui modélise l'un des premier problèmes de la théorie des noeuds(cherché des invariants), basé sur les articles de D.S.Silver et S.G.Williams, [12], [13] et [14], qui utilisent un système dynamique symbolique spécial dit Shift de type fini. Pour tout groupe du nœud G et tout groupe fini Σ , on définit l'ensemble $Hom(K, \Sigma)$ des représentations du sous groupe dérivé $K = [G, G]$ qui aura la structure d'un système dynamique (shift de type fini), ce système peut être décrit par un graphe orienté qu'on va utiliser pour chercher un invariant assez important et connu en systèmes dynamiques dit entropie et qui représente un invariant assez important pour le noeud traité. Il parle aussi d'une façon de coloriage qui généralise le 3-coloriage connu en théorie des nœuds.

Le travail est divisé en quatre grandes parties : trois chapitres et un appendice

Un premier chapitre est consacré pour des généralités sur les nœuds, à citer : le groupe fondamental et le coloriage attribué à un nœud.

Un second chapitre parle uniquement des systèmes dynamiques symboliques, des shifts et des shifts de type fini et enfin de l'entropie topologique d'un espace shift de type fini totalement décrit par un graphe orienté.

Le troisième chapitre est celui qui fait le lien entre les nœuds et les systèmes dynamiques. Dans cette partie on va construire étape par étape le shift de type fini associé à un nœud et cela à partir de son groupe fondamental G et d'un morphisme $\rho : K \rightarrow \Sigma$, où Σ est un groupe fini et K le sous groupe dérivé $[G, G]$, cette construction est très fructueuse car elle nous permet d'interpréter le shift en termes de graphes, qui nous permet de calculer des invariants tels le nombre des points périodiques, le coloriage et l'entropie dûe à ce shift.

1

Généralités sur les nœuds

Dans ce chapitre nous allons préciser ce que veut dire nœuds et entrelacs en langage mathématique, nous allons en étudier l'équivalence et le groupe fondamental de chacun d'eux et enfin parler du coloriage associé aux nœuds.

1.1 Nœuds et entrelacs

Définition 1.1.1 On appelle entrelacs à n composantes dans $\mathbb{R}^3$ l'image d'un plongement $f : S^1 \amalg \dots \amalg S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que l'on note $\ell = \ell_1 \amalg \ell_2 \amalg \dots \amalg \ell_n$.

Si le plongement est un plongement de cercles orientés alors l'entrelacs est orienté.

Si $n = 1$ alors l'entrelacs à une composante est dit nœud.

Exemple 1.1.1 On donne ici quelques exemples de nœuds et entrelacs : le nœud trivial orienté dans la figure (1.1.1) , le nœud non orienté à six croisements (figure 1.1.2) .

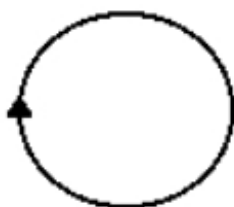


Figure 1.1.1 : Nœud trivial orienté

Et en fin, dans la figure (1.1.3) un entrelacs orienté à deux composantes.

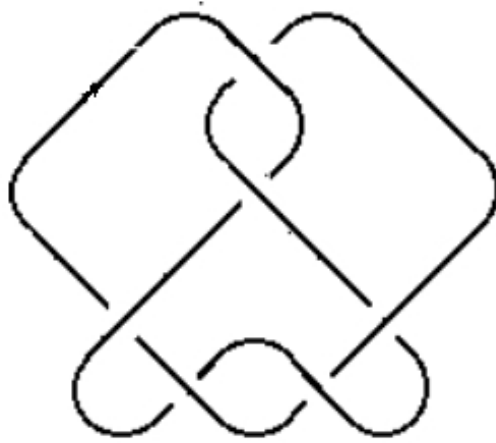


Figure 1.1.2 : Nœud non orienté à six croisements



Figure 1.1.3 : Entrelacs orienté à deux composantes

1.2 Projections et Diagrammes

Vue que le premier problème dans la théorie des nœuds est de comparer ces nœuds (détecter ceux qui sont équivalents) et que ce n'est pas une tâche facile dans l'espace, on ramène le nœud sur un plan (le plan $z = 0$ par exemple) à l'aide d'une projection régulière qui garde en mémoire les informations dessus- dessous.

1.2.1 Projection régulière

Définition 1.2.1 Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathbb{R}^2$.

On dit que p est régulière si pour tout nœud k de $\mathbb{R}^3$, les trois conditions suivantes sont vérifiées.

- 1-Toute droite tangente à k en un point, se projette sur une droite du plan.
- 2-Les seuls points multiples sont les points doubles (dits croisements).

3-L'ensemble des croisements est fini et en chaque croisement les projections des lignes tangentes ne sont pas colinéaires.

Dans une telle projection, les cas présentés dans la figure 1.2.1 ne sont pas permis

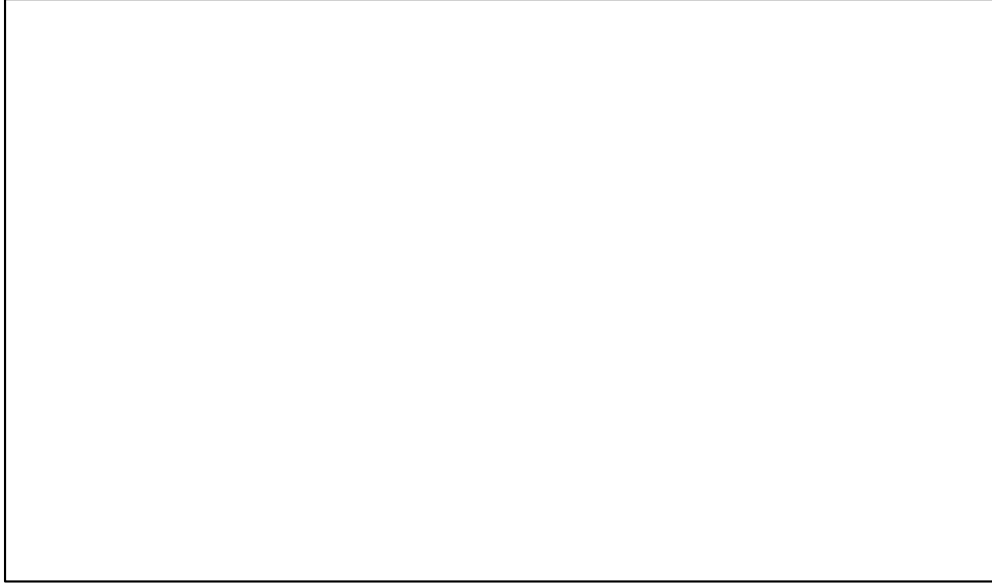


Figure 1.2.1 : Cas non permis dans une projection d'un nœud

1.2.2 Diagramme d'un nœud

Définition 1.2.2 On appelle diagramme d'un nœud, son image par une projection régulière dans laquelle on garde aux niveaux des croisements, les informations dessus-dessous.

Aux niveaux des croisements dans un diagramme, l'arc dessus est l'arc continue alors que celui d'en dessous est discontinu (voir figure 1.2.2). Le diagramme d'un nœud héritera de l'orientation du nœud.

Dans tout ce qui suit, on traitera avec des nœuds et des entrelacs orientés et sauf avec mention, tout ce qui concerne les nœuds est valable pour les entrelacs

Remarque 1.2.1 à chaque croisement, on associe un nombre algébrique ε , $\varepsilon = -1$ pour celui de gauche et $\varepsilon = 1$ pour le croisement de droite voir figure 1.2.3.

Définition 1.2.3 On appelle le nombre d'enlacement de K et J , la somme des signes des croisements des points communs entre K et J , divisée par deux.



Figure 1.2.2 : Brins dessus-dessous

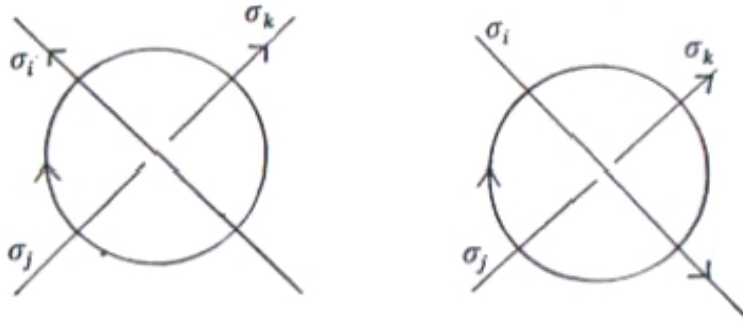


Figure 1.2.3 : Signe algébrique d'un coisement

1.3 Equivalence des nœuds

Deux nœuds k et l sont équivalents si on peut les déformer continûment (sans couper l'un des brins) l'un sur l'autre. De manière plus formelle : il faut qu'il y ait une isotopie qu'on va définir ci-dessous.

Définition 1.3.1 Une isotopie ambiante entre deux nœuds k et l est une fonction continue $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que:

- a- $h_0 = H(., 0)$ est l'identité de $\mathbb{R}^3$.
- b- Pour tout $t \in [0, 1]$, $h_t = H(., t)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- c- Si $h_1 = H(., 1)$, alors $h_1 k = l$.

Si k et l sont isotopes alors, la famille $h_t k (t \in [0, 1])$ est une famille de déformations continues du nœud k en l .

1.3.1 Mouvements de Reidmeister

Ce sont trois mouvements élémentaires dans le plan, introduits par Reidmeister dans le but de donner l'équivalence des diagrammes. La liste de ces mouvements sont donnés dans la figure 1.3.1

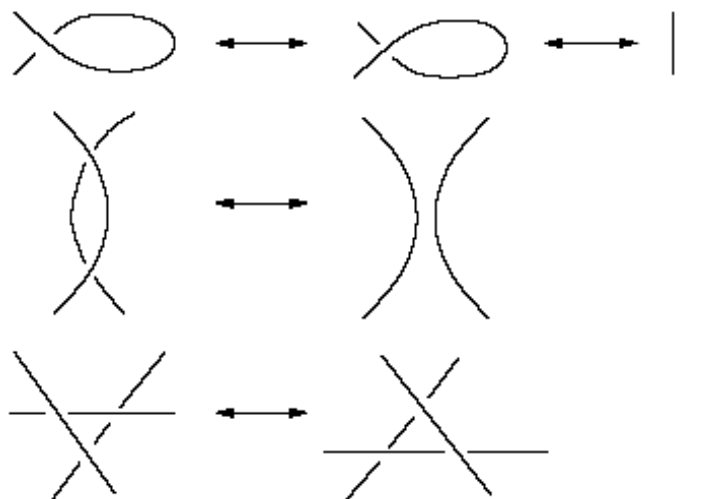


Figure 1.3.1 : Mouvements de Reidmeister

1.3.2 Equivalence des diagrammes

Définition 1.3.2 Deux diagrammes de nœuds sont dits équivalents, si on peut transformer l'un en l'autre par une suite finie de mouvements de Reidmeister.

Remarque 1.3.1 Tous ces mouvements sur le diagramme du nœud, peuvent être réalisés par une isotopie ambiante sur le nœud.

Théorème 1.3.1 [9](De Reidmeister) Deux nœuds sont isotopes si et seulement si leurs diagrammes sont équivalents.

1.4 Groupe d'un nœud

Le groupe d'un nœud est l'un des plus importants invariants qui lui sont associés, en fait c'est le groupe fondamental (groupe de Poincaré) G de la variété $\mathbb{R}^3 - \mathring{N}$ où N est un

voisinage tubulaire du nœud; il est en général non commutatif et est donné sous forme de présentation (générateurs et relations). Deux nœuds de même type ont le même groupe fondamental mais la réciproque est fausse.

Dans cette partie on va chercher (et étudier) ce groupe à partir d'une méthode due à Wirtinger, mais avant cela nous allons donner des définitions qui nous aiderons à nous habituer au vocabulaire utilisé.

1.4.1 Voisinage tubulaire et extérieur d'un nœud

Définition 1.4.1 *On dira que N ou $N(k)$ est un voisinage tubulaire d'un nœud k , s'il existe un plongement $h : S^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $N = h(S^1 \times D^2)$ et $k = h(S^1 \times 0)$.*

Définition 1.4.2 *Soit k un nœud dans $\mathbb{R}^3$ et soit N un voisinage tubulaire de k . On appelle extérieur ou complémentaire du nœud k dans $\mathbb{R}^3$, la variété $X = \mathbb{R}^3 - \mathring{N}$*

1.4.2 Groupe fondamental d'un nœud et présentation de Wirtinger

Soit un nœud k plongé dans $\mathbb{R}^3$, on prend la projection de k sur le plan $z = 0$ et on prend en considération les lignes de projections, les points d'intersections des arcs aux niveaux des croisements se projettent suivant les lignes (directions) qu'on note a_i et on a formation d'un cylindre qu'on va appeler Z ; pour un nombre de croisements égal à n on aura na_i lignes. Ces n traits a_i décomposent le cylindre Z en n composantes Z_i où Z_i est déterminé par les bords a_{i-1}, a_i et l'arc du nœud qui est en dessus σ_i .

Dans la figure 1.4.1 il y a un dessin expliquant la situation pour le nœud de trèfle.

Soit X la clôture du complémentaire du voisinage tubulaire de k dans $\mathbb{R}^3$, pour calculer le groupe fondamental $\Pi_1(X)$, on prend un point de base p dans X et on regarde les lacets allants de p qui s'interceptent avec Z_i (avec seulement une composante), en fait ces lacets qu'on notera s_i représentent les générateurs du groupe $\Pi_1(X)$ (voir figure 1.4.1). Pour avoir les relations, on traite avec chaque croisement à part, en prenant un petit lacet $\varrho_j \in X$ qui encercle a_j et on le joint à p par un chemin λ_j (figure 1.4.2).

Le chemin $(\lambda_j \varrho_j \lambda_j^{-1})$ est contractile et le mot $(l_j r_j l_j^{-1})$ correspondant en termes de s_i (qui lui correspond) est une relation de la présentation du groupe $\Pi_1(X)$, r_j est de la forme $r_j = s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_k}^{\epsilon_k}$ où $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ et $\epsilon_i = \pm 1$.

On peut lire le mot r_i (en termes de s_i) directement sur le diagramme du nœud de la manière suivante:

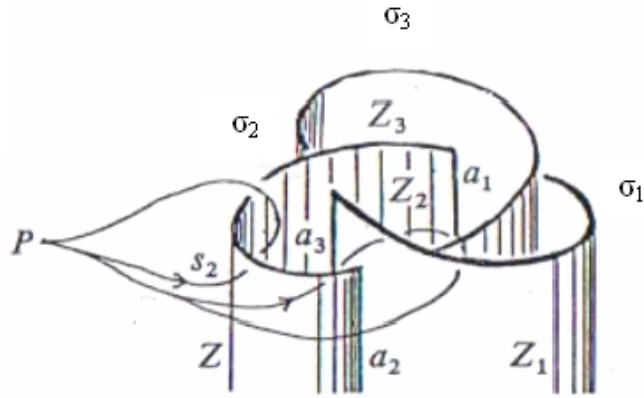


Figure 1.4.1 : Générateurs de Wirtinger

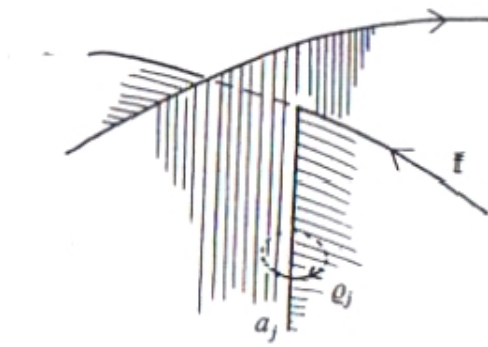


Figure 1.4.2 : Relations de Wirtinger

On entoure le croisement par un chemin fermé et on lit les noms des arcs dans un sens donné (on choisi l'un des sens, direct : trigonometrique ou indirect).

Dans le croisement de gauche (voir figure 1.4.3) la relation est $\sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_i = e$, avec une petite transformation elle devient

$$\sigma_j = \sigma_i^{-1} \sigma_k \sigma_i \quad (1.4.1)$$

et dans le croisement de droite on a $\sigma_j \sigma_i \sigma_k^{-1} \sigma_i^{-1} = e$ qui devient

$$\sigma_j = \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \quad (1.4.2)$$

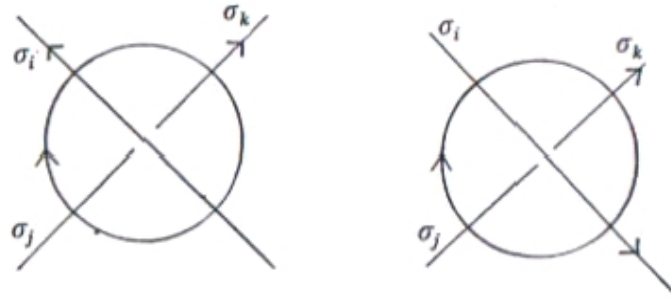


Figure 1.4.3 : Relations aux croisements

1.4.3 Algorithme de Wirtinger

La section précédente expliquait comment le groupe fondamental d'un nœud peut être donné par des générateurs et des relations. Cette nouvelle section illustre une façon qui donne la présentation du groupe $\Pi_1(X)$ directement d'un diagramme du nœud; l'algorithme à présenter est dit de Wirtinger et est donné de la manière suivante:

On prend le diagramme voulu, on l'oriente et on donne à chaque brin un label (ces labels représentent les générateurs de notre groupe), pour donner les relations de la présentation, on entoure chaque croisement par un chemin fermé orienté et on déduit pour chacun une relation (voir les formules (1.4.1) et (1.4.2)). Pour bien voir la procédure, on donne quelques exemples et le premier à mentionner est le nœud trivial.

Exemple 1.4.1 *Le nœud triviale admet un seul arc (qu'on note x) et aucune relation, donc la présentation G de son groupe est : $(x/\emptyset)$.*

Exemple 1.4.2 *Dans cet exemple nous allons chercher la présentation du groupe du nœud de trèfle orienté (que l'on note dans la théorie des nœud $k = 3_1$) et auquel on a donné un label à chaque arc (figure 1.4.4)*

Les générateurs de la présentation sont x , y et z , les trois relations associées aux trois croisements sont :

$$x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1}$$

le groupe fondamental du nœud $k = 3_1$ aura donc la forme suivante :

$$G = (x, y, z / x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1})$$

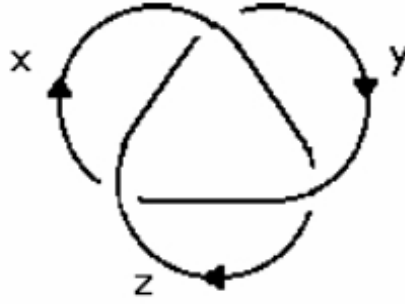


Figure 1.4.4 : Nœud de trèfle orienté

En remplaçant les relations l'une dans l'autre, on élimine z , donc la présentation de G devient:

$$G = (x, y \mid y^{-1}x^{-1}y^{-1}x y x)$$

1.4.4 Nœuds toriques

Les nœuds toriques sont des nœuds qui peuvent être dessinés sur la surface d'un tore sans intersection (voir 1.4.5); ces nœuds forment l'un des ensembles des nœuds les plus populaires. Dans ce qui suit on va parler brièvement des toriques en général $T_{p,q}$ et plus particulièrement des toriques $T_{2,n}$ (p, q et n des entiers).



Figure 1.4.5 : Nœud torique

Définition 1.4.3 Un nœud torique $T_{p,q}$ (p et q premiers entre eux) est un nœud qui tourne autour du tore, p fois dans la direction longitudinale et q fois dans la direction méridienne.

Exemple 1.4.3 $T_{2,3}$ est le nœud de trèfle (voir 1.4.6)

Figure 1.4.6 : Le torique $T_{2,3}$

Remarque 1.4.1 *Le nœud $T_{p,q}$ est isotope au nœud $T_{q,p}$ (p et q sont fixés)*

Les nœuds $T_{\pm 1,q}$ et $T_{p,\pm 1}$ sont triviaux.

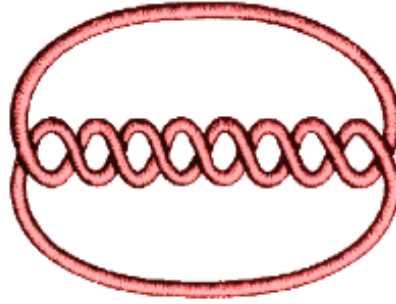
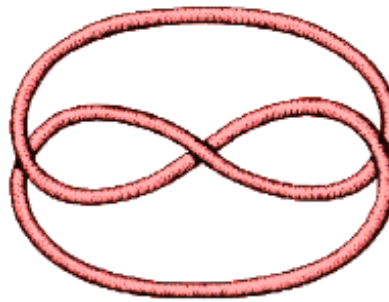
Pour un torique $T_{p,q}$ avec $|p| > |q|$, on a le nombre de croisements minimal égale à : $|p|(|q| - 1)$.

Le groupe fondamental $G_{p,q}$ d'un nœud $T_{p,q}$ est :

$$G_{p,q} = (x, y / x^p = y^q)$$

Dans la partie qui va suivre, on s'intéresse aux nœuds toriques $T_{2,n}$. Ce sont des nœuds qui font deux fois le tour du tore dans la direction méridienne et n fois dans la directions longitudinale, ces nœuds $T_{2,n}$ peuvent être dessinés dans la forme donnée dans la figure 1.4.7

Le nœud de trèfle est un nœud torique que la projection peut être donnée comme dans la figure 1.4.8 .

Figure 1.4.7 : Nœuds toriques $T_{2,n}$ Figure 1.4.8 : Le trèfle $T_{2,3}$

Groupe fondamental des nœuds toriques $T_{2,n}$

Dans cette partie, on va chercher le groupe fondamental pour la famille de ces nœuds et cela pour un nombre de croisements n .

En premier, on cherche les relations pour la tresse au milieu (voir figure 1.4.9) et on traite par récurrence sur les croisements de la manière suivante :

Pour $n = 3$ (voir figure 1.4.10), les relations aux croisements sont écrit sous la forme :

$$x_1 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} = 1, \quad x_2 x_3 x_4^{-1} x_3^{-1} = 1, \quad x_3 x_4 x_5^{-1} x_4^{-1} = 1$$

ou bien sous la forme :

$$x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1}, \quad x_2 = x_3 x_4 x_3^{-1}, \quad x_3 = x_4 x_5 x_4^{-1}$$

On élimine l'un des générateurs (x_3 par exemple) en injectant son expression dans les autres relations, le résultat serait les deux relations suivantes :

$$x_1 = x_2 x_4 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1}, \quad x_2 = x_4 x_5 x_4 x_5^{-1} x_4^{-1}$$

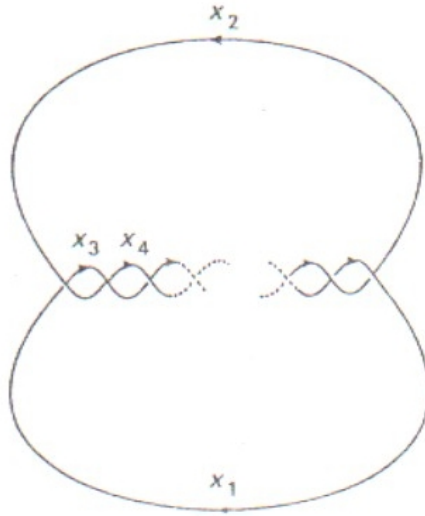


Figure 1.4.9 : Torique



Figure 1.4.10 : Une chaîne à 3 croisements

En phase finale, on remplace x_2 dans l'expression de x_1 pour avoir

$$x_1 = x_4 x_5 x_4 x_5^{-1} x_4^{-1} x_4^{-1} \quad (1.4.3)$$

Pour $n = 4$, on rajoute un croisement à la chaîne dans la figure (1.4.10) (voir figure 1.4.11) et donc on rajoute une relation à l'ensemble des relations précédentes, et de ce fait on a :

$$x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1}, \quad x_2 = x_3 x_4 x_3^{-1}, \quad x_3 = x_4 x_5 x_4^{-1}, \quad x_4 = x_5 x_6 x_5^{-1}$$

après élimination l'un après l'autre des générateurs on a

$$x_1 = x_4 x_5 x_4 x_5^{-1} x_4^{-1} x_4^{-1}, \quad x_4 = x_5 x_6 x_5^{-1}$$



Figure 1.4.11 : Chaîne à 4 croisements

et donc

$$x_1 = x_5 x_6 x_5 x_6 \cdot x_5 \cdot x_6^{-1} x_5^{-1} x_6^{-1} x_5^{-1}$$

de la même manière on procède pour 5 croisements et le résultat serait :

$$x_1 = x_6 x_7 x_6 x_7 x_6 \cdot x_7 \cdot x_6^{-1} x_7^{-1} x_6^{-1} x_7^{-1} x_6^{-1}$$

d'où on généralise pour n croisements de la manière suivante :

si n est paire on a la relation

$$x_1 = x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{n+1} x_{n+2} \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}^{-1} x_{n+1}^{-1} \dots x_{n+2}^{-1} x_{n+1}^{-1}$$

et si n est impaire, on ait :

$$x_1 = x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{n+1} x_{n+2} x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot x_{n+1}^{-1} x_{n+2}^{-1} x_{n+1}^{-1} \dots x_{n+2}^{-1} x_{n+1}^{-1}$$

Pour avoir la présentation du groupe, il faudrait identifier x_{n+1} à x_1 et x_{n+2} à x_2 (voir figure 1.4.9) et dans les deux cas paire et impaire, on a la relation suivante :

$$x_1 = x_1 x_2 \dots x_1 x_2 \cdot x_1 \cdot x_2^{-1} x_1^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}$$

et donc la présentation du groupe $G_{2,n}$ est :

$$G_{2,n} = (x_1, x_2 / x_1 x_2 \dots x_1 x_2 = x_2 x_1 \dots x_2 x_1)$$

où on a n termes de chaque coté de l'égalité.

Remarque 1.4.2 Pour $n = 3$ le nœud est le trèfle 3_1 et son groupe fondamental est :

$$G_{2,3} = (x_1, x_2 / x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2)$$

si on pose $a = x_1 x_2$ et $b = x_1 x_2 x_1$ alors on ait :

$$G_{2,3} = (a, b / a^3 = b^2)$$

et de même pour $G_{2,n}$, on pose $a = x_1 x_2$ et $b = x_1 x_2 \dots x_1 x_2$ alors on aura :

$$G_{2,n} = (a, b / a^n = b^2)$$

1.5 Coloriages d'un nœud

1.5.1 Trois coloriages d'un nœud

En conservant la définition du terme brin introduite précédemment, un nœud est dit tricolorable si chacun des brins de sa projection peut être coloré à l'aide d'une couleur parmi trois et ce, de sorte qu'à chaque croisement on a soit les trois couleurs soit une seule des trois. En fait, si on prend nos couleurs dans la liste $\{x, y, z\}$ avec x, y, z des éléments de $\{0, 1, 2\}$ et si on affecte la couleur x au brin dessus du croisement et y et z aux deux brins restants, le coloriage en chaque croisement est alors donné par la formule suivante :

$$2x - y - z = 0 \pmod{3} \quad (1.5.1)$$

Le nœud trivial n'étant pas tricolorable, cet invariant semble intéressant pour déterminer si un nœud quelconque est noué ou pas. Malheureusement, il y a des nœuds non-tricolorables qui sont manifestement noués, comme par exemple le nœud en huit.

Le nœud de trèfle est un nœud tricolorable (voir figure 1.5.1).

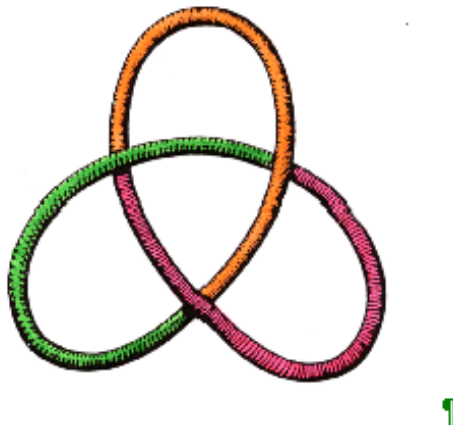


Figure 1.5.1 : Coloriage du trèfle

Théorème 1.5.1 [9] *Si le diagramme d'un nœud k est tricolorable alors tous ses diagrammes sont tricolorables.*

Définition 1.5.1 *Un nœud est dit trois-colorable, si ses diagrammes sont trois-colorables.*

1.5.2 Le p -coloriage

Le diagramme d'un nœud D est dit p -colorable, si on peut affecter pour chaque arc une couleur (de 0 à $p - 1$) de sorte qu'à chaque croisement on ait la relation

$$2x - y - z = 0 \pmod{p}$$

où x , y et z sont les même que pour la formule (1.5.1) .

Dans la figure 1.5.2 on illustre un 7-coloriage du nœud 9_{41} .

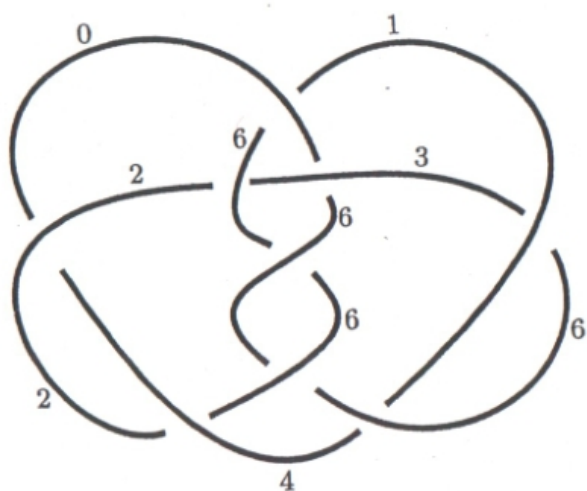


Figure 1.5.2 : Un coloriage du nœud 9_{41}

2

Les shifts de type fini

2.1 Le full shift

Définition 2.1.1 On appelle un alphabet $\mathcal{A}$ un ensemble fini de symboles.

$$\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, r\} \text{ ou } \mathcal{A} = \{a, b, \dots\}$$

les éléments de $\mathcal{A}$ sont aussi dit lettres.

Définition 2.1.2 Sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, le full shift ou le full $\mathcal{A}$ -shift est la collection de toutes les suites bi-infinies de symboles dans $\mathcal{A}$.

Le full r -shift (ou bien tout simplement le r -shift) est le full shift sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, r-1\}$.

Le full $\mathcal{A}$ -shift est noté par $:\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A} \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque 2.1.1 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est la notation mathématiques standard de l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}$, ces fonctions sont les suites bi infinies des éléments de $\mathcal{A}$.

On écrit les suites sans mettre de virgules entre les symboles et on met un point juste avant le terme x_0 .

Toute suite $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est dite point du full shift.

Si $|\mathcal{A}| = r$ alors il existe une correspondance entre le full $\mathcal{A}$ -shift et le r -shift (quelque fois on ne peut faire la différence entre eux).

Il est plus commode de voir le full shift sur $\{-1, +1\}$ ou bien sur $\{0, 1\}$ comme étant le full 2-shift.

Définition 2.1.3 Un bloc (ou mot) sur $\mathcal{A}$ est une suite finie de symboles de $\mathcal{A}$, le bloc vide est la suite qui n'a aucun symbole, il est noté par ε .

Un mot u est de longueur n si le nombre de ses symboles dans la suite est égal à n . Cette longueur est notée par $|u|$.

Un k -bloc est un bloc de longueur k et l'ensemble de tout les k -bloc sur $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{A}^k$

Définition 2.1.4 Un sous bloc ou sous mot de $u = a_1a_2...a_k$ est un bloc de la forme $a_ia_{i+1}...a_j$ tel que $1 \leq i \leq j \leq k$.

Si x est un point de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et $i \leq j$, on note le mot de coordonnée dans le x de la position i jusqu'à la position j par :

$$x_{[i,j]} = x_ix_{i+1}...x_j$$

et de ce fait, on a les notations suivantes :

$$x_{[i,j)} = x_ix_{i+1}...x_{j-1}$$

$$x_{[i, \infty)} = x_ix_{i+1}x_{i+2}...(suite\ infini\ à\ droite)$$

$$x_{(-\infty, i]} = ...x_{i-2}x_{i-1}x_i (suite\ infini\ à\ gauche)$$

On remarque bien que les deux dernières suites $x_{[i, \infty)}$ et $x_{(-\infty, i]}$ ne sont pas des blocs.

Si $i > j$ alors on défini $x_{[i,j]} = \varepsilon$

Le bloc central $(2k+1)$ -bloc de x est de la forme :

$$x_{[-k, k]} = x_{-k}x_{-k+1}...x_0x_1...x_k.$$

Le point réduit à un seul symbole est de la forme : $x_{[i]} = x_i$.

Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et w un bloc sur $\mathcal{A}$, on dira que w se présente dans x si les indices i et j existent de tel manière que $w = x_{[i,j]}$.

Le mot vide ε se présente en tout x puisque $\varepsilon = x_{[1,0]}$.

Définition 2.1.5 L'application shift σ sur le full shift $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une application qui envoie le point x sur le point y tel que $y_i = x_{i+1}$.

Remarque 2.1.2 Cette application *shift* est en fait une opération de décalage des termes de x vers la gauche, l'opération inverse σ^{-1} est un décalage vers la droite.

La composition k fois de σ avec elle même : $\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ ($k \geq 0$) envoie les termes de la suite k fois vers la gauche ($\sigma^{-k} = (\sigma^{-1})^k$ fait la même chose mais vers la droite).

La nomenclature de l'espace *shift* est due à cette application *shift*.

2.2 Espace shift

Définition 2.2.1 Soit $\mathcal{F}$ une collection de mots sur $\mathcal{A}$, on définit $X_{\mathcal{F}}$ comme étant le sous ensemble de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui ne contient aucun mot de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ est dit ensemble de mots interdits.

Définition 2.2.2 Soit $\mathcal{F}$ une collection de mots interdits sur $\mathcal{A}$. L'espace *shift* (ou simplement *shift*) est un sous ensemble X du full shift $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tel que $X = X_{\mathcal{F}}$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ peut être fini ou infini.

Pour un même espace *shift*, il peut y avoir plusieurs collections $\mathcal{F}$ qui le décrivent.

Si X et Y sont deux espaces *shifts* et $X \subset Y$, alors on dit que X est un sous *shift* de Y .

Exemple 2.2.1 L'ensemble vide Φ est un espace *shift* (pour $\mathcal{F} = \mathcal{A}$).

$X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un espace *shift* pour $\mathcal{F} = \Phi$.

L'ensemble X qui contient le seul élément $x = (01)^{\infty} = \dots 0101.010101\dots$ n'est pas un *shift* car $\sigma(x) = \dots 10.1010\dots = (10)^{\infty} \notin X$. (X est invariant par σ).

Définition 2.2.3 Si pour un espace, l'ensemble des mots interdits $\mathcal{F}$ est fini, alors le *shift* $X_{\mathcal{F}}$ est dit *shift* de type fini.

Exemple 2.2.2 Pour $\mathcal{F} = \{11\}$, $X = X_{\mathcal{F}} = \{\text{suites de 0 et 1 qui ne contiennent pas deux uns successifs}\}$ est un espace *shift* de type fini.

2.3 Langages

Définition 2.3.1 Soit X un sous ensemble du full shift et soit $B_n(X)$ l'ensemble de tout les mots de longueur n ($n \in \mathbb{N}$) qui se présentent dans les points de X

Le langage de X est la collection $B(X)$ tel que : $B(X) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(X)$.

Exemple 2.3.1 Le full 2-shift a comme langage: $\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, \dots\}$.

Le langage du shift dont l'ensemble des mots interdits $\mathcal{F} = \{11\}$ est :

$\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 000, 001, 010, 100, 101, 0000, \dots\}$.

2.4 Shift de dimension supérieure

Soit X un espace shift sur un alphabet $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{A}_X^{[N]} = B_N(X)$ l'ensemble de tout les mots permis dans X , de longueur N .

Si on considère $\mathcal{A}_X^{[N]}$ comme étant un alphabet, on peut former le full shift $\left(\mathcal{A}_X^{[N]}\right)^{\mathbb{Z}}$ sur cet alphabet et définir le n ième code de bloc de dimension supérieure :

$$\beta_N : X \rightarrow \left(\mathcal{A}_X^{[N]}\right)^{\mathbb{Z}}$$

par:

$$(\beta_N(x))_{[i]} = x_{[i, i+N-1]}$$

β_N remplace la i ème coordonnée de x par un bloc de coordonnées dans x commencent à la coordonnée i et de longueur N , l'image de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par le code β_4 est :

$$\beta_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \dots$$

Définition 2.4.1 Soit un espace shift, le n ième bloc shift de dimension supérieure $X^{[N]}$ (ou bloc de présentation de dimension supérieure de X) est l'image $X^{[N]} = \beta_N(X)$ dans le full shift sur $\mathcal{A}_X^{[N]}$.

Proposition 2.4.1 [8] Le bloc shift de dimension supérieur d'un espace shift est aussi un espace shift.

2.5 Entropie

Comme la définition d'entropie nécessite l'introduction de plusieurs outils qui ne sont pas nécessaires pour ce travail, on donne une définition spécifique pour les graphes. Pour plus de détails retrouver la référence [8].

Soit X un shift de type fini décrit par un graphe G (voir appendice).

Théorème 2.5.1 *Si G est un graphe irréductible (voir appendice A), l'entropie topologique de l'espace X_G est:*

$$h(X_G) = \log \lambda_{A(G)}$$

où $\lambda_{A(G)}$ est la plus grande des valeurs propres de la matrice A matrice d'adjacence du graphe G .

Pour la preuve de ce Théorème voir [8].

Si le graphe $G = \cup G_i$ est composé de plusieurs composantes irréductibles G_i , alors

$$h(X_G) = \max h(X_{G_i})$$

où

$$h(X_{G_i}) = \log \lambda_i$$

et λ_i la plus grande valeur propre de la matrice A_i associée au graphe G_i

3

Représentations associées aux entrelacs

Soit l'entrelacs orienté $\ell = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_\mu$ avec un voisinage tubulaire $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_\mu$ et soit $G = \Pi_1(S^3 \setminus \ell, *)$ son groupe fondamental, où $*$ le point de base est choisi sur ∂N_1 le bord de N_1 .

Pour x la classe de m le méridien de ℓ_1 , on définit $\chi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupe qui associe à chaque méridien de ℓ le nombre 1 dans $\mathbb{Z}$, notons K le noyau de χ .

si $\mu = 1$, alors ℓ est un nœud, χ est l'homomorphisme d'abelianisation et K le sous groupe dérivé $[G, G]$.

Définition 3.0.1 Soit Σ un groupe fini, un shift de représentation $\Phi_\Sigma(\ell)$ (ou Φ_Σ) d'un entrelacs ℓ est l'ensemble $\text{Hom}(K, \Sigma)$ des représentations $\rho : K \longrightarrow \Sigma$ muni de l'application shift $\sigma_x : \Phi_\Sigma \rightarrow \Phi_\Sigma$ définie par : $\sigma_x \rho(a) = \rho(x^{-1} a x)$ pour tout $x \in K$.

L'ensemble $\text{Fix}\sigma_\Sigma^r = \{\rho / \sigma_\Sigma^r \rho = \rho\}$ des représentations de période r est un invariant de l'entrelacs ℓ ($r \geq 0$).

Le shift représentation Φ_Σ est un système dynamique (shift de type fini) qui peut être décrit par un graphe orienté fini Γ .

Les éléments de Φ_Σ correspondent à un chemin bi-infini sur Γ , tel qu'une représentation de période r soit un chemin fermé sur Γ de longueur r .

Une représentation $\rho : K \longrightarrow \Sigma$ est une fonction ρ de K (l'ensemble des générateurs a_i) dans Σ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ la relation $r(\rho(a_i), \rho(a_{i+1}), \rho(a_{i+2}))$ est trivial dans Σ ; une telle fonction peut être construite étape par étape dès le choix d'un couple $(\rho(a_0), \rho(a_1))$

dans $\sum \times \sum$, on cherche si c'est possible $\rho(a_2)$ tel que $r(\rho(a_0), \rho(a_1), \rho(a_2))$ soit trivial dans $\sum$, refaire ensuite le processus autant de fois qu'il est nécessaire pour épuiser toutes les combinaisons $(\rho(a_i), \rho(a_j)) \in \sum \times \sum$, les $(\rho(a_i), \rho(a_j))$ feront les sommets de notre graphe; le processus est donné comme suit :

.

.

.

étape-2:calculer $\rho(a_{-2})$ tel que $r(\rho(a_{-2}), \rho(a_{-1}), \rho(a_0)) = e$.

étape-1:calculer $\rho(a_{-1})$ tel que $r(\rho(a_{-1}), \rho(a_0), \rho(a_1)) = e$.

étape 0:choisir les valeurs $\rho(a_0)$ et $\rho(a_1)$.

étape 1:calculer $\rho(a_2)$ tel que $r(\rho(a_0), \rho(a_1), \rho(a_2)) = e$.

étape 2:calculer $\rho(a_3)$ tel que $r(\rho(a_1), \rho(a_2), \rho(a_3)) = e$.

.

.

.

une fois cette sélection des $\rho(a_i)$ est accomplie, on construit un chemin bi- infini dans un graphe orienté Γ dont les sommets sont les applications $\rho : \{a_0, a_1\} \longrightarrow \sum$ que l'on peut regarder comme un couple $(\rho_0(a_0), \rho_0(a_1))$ et les arêtes (qui serait noté $\rho_0 \rho'_0$) sont des arêtes orientées de ρ_0 vers ρ'_0 et qui existe si et seulement si les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$\rho_0(a_1) = \rho'_0(a_0), \quad (3.0.1)$$

$$r(\rho_0(a_0), \rho_0(a_1), \rho'_0(a_1)) = e. \quad (3.0.2)$$

Les premières chaînes du graphe Γ auraient les formes suivantes:

$$(\rho_0(a_0), \rho_0(a_1)) \xrightarrow{\rho_0 \rho'_0} (\rho_0(a_1), \rho_0(a_2)) = (\rho'_0(a_0), \rho'_0(a_1))$$

$$(\rho_0(a_0), \rho_0(a_1)) \xrightarrow{\rho_0 \rho'_0} (\rho_0(a_1), \rho_0(a_2)) = (\rho'_0(a_0), \rho'_0(a_1)) \xrightarrow{\rho'_0 \rho''_0} (\rho_0(a_2), \rho_0(a_3)) = (\rho''_0(a_0), \rho''_0(a_1))$$

De même, s'il existe une arête de ρ'_0 vers ρ''_0 , on étend ρ_0 par les relations (3.0.1) et (3.0.2) pour définir $\rho_0(a_3)$ qui est égale à $\rho''_0(a_1)$.

Ce chemin bi- infini dans Γ correspond à l'application de $K \longrightarrow \sum$ qui envoie toutes les relations de K à l'élément neutre et donc c'est une représentation de K .

3.1 Méthode de Reidmeister-Schreier

C'est une méthode qui nous a permis de donner la présentation d'un sous groupe H d'un groupe G .

Soit G un groupe donné sous la forme suivante

$$G = (x_1, \dots, x_n / R_1 = 1, \dots, R_m = 1)$$

et soit H un sous groupe de G .

Définition 3.1.1 *L'ensemble $M = \{M_1, M_2, \dots\}$ est dit système de Schreier si pour tout $M_i = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$ on a $x_{i_1}^{\alpha_1}, x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_{k-1}}^{\alpha_{k-1}}$ appartiennent aussi à M .*

Proposition 3.1.1 *Supposons G un groupe donné sous forme de présentation, si H est sous groupe de G alors il existe un système de Schreier de classes à droite modulo H .*

Proposition 3.1.2 *Pour tout élément g de G et M_i de M ($i = 1, 2, \dots$) on a $\varrho(M_i, g) = M_i g \overline{M_i g}^{-1}$ est un élément de H .*

Pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, [G : H]$ on pose $y_{j,k} = \varrho(M_i, g)$ et alors $y_{j,k}$ et $y_{j,k}^{-1}$ sont les générateurs de H .

Théorème 3.1.1 *Soit G un groupe et soit H un sous groupe de G , si $M = \{M_1, M_2, \dots\}$ est un système de Schreier alors la présentation de H est de la forme*

$$H = (y_{j,k} / R_{l,k} \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n, \ l = 1, 2, \dots, m, \ k = 1, 2, \dots, [G : H])$$

où

$$R_{l,k} = \tau(M_k R_l M_k^{-1})$$

et

$$\begin{aligned} \tau(x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_p}^{\alpha_p}) &= \varrho(1, x_{i_1}^{\epsilon_1}) \varrho(\overline{x_{i_1}^{\epsilon_1}}, x_{i_2}^{\epsilon_2}) \dots \varrho(\overline{x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_{p-1}}^{\epsilon_{p-1}}}, x_{i_p}^{\epsilon_p}) \\ &= y_{i_1, \lambda_1}^{\epsilon_1} y_{i_2, \lambda_2}^{\epsilon_2} \dots y_{i_p, \lambda_p}^{\epsilon_p} \end{aligned}$$

3.1.1 Application

Soit le nœud $k = 3_1$ orienté comme dans la figure 3.1.1

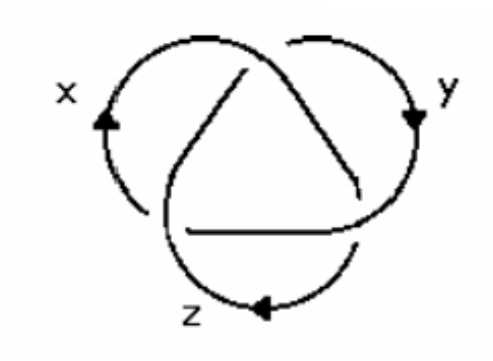


Figure 3.1.1 : Le tréfle

Son groupe fondamental associé (déjà calculé dans la partie Algorithme de Wirtinger) est :

$$G = (x, y / y^{-1}x^{-1}y^{-1}x y x)$$

en remplaçant y par xa , la nouvelle présentation de G est:

$$G = (x, a / a^{-1}x^{-2}a^{-1}x^2x^{-1}a x)$$

La méthode de Reidmeister-Schreier (voir Appendice B) nous permet de calculer le noyau K qui est sous groupe commutateur de G , les générateurs de K sont les $a_i = x^{-i}a x^i (M_i = x^i)$ où $i \in \mathbb{Z}$ et la relation est de la forme.

$$x^{-i}a^{-1}x^{-2}a^{-1}x^2x^{-1}a x x^i$$

qui devient

$$x^{-i}a^{-1}x^i x^{-i}x^{-2}a^{-1}x^i x^2x^{-i}x^{-1}a x x^i$$

en groupant les exposants, on aura :

$$x^{-i}a^{-1}x^i \quad x^{-(i+2)}a^{-1}x^{i+2} \quad x^{-(i+1)}ax^{i+1}$$

en posant

$$a_i^{-1} = x^{-i}a^{-1}x^i \text{ et } a_{i+2}^{-1} = x^{-(i+2)}a^{-1}x^{i+2} \text{ et } a_{i+1} = x^{-(i+1)}ax^{i+1}$$

la présentation du sous groupe K est :

$$K = (a_i / a_i^{-1}a_{i+2}^{-1}a_{i+1}, i \in \mathbb{Z})$$

Posons la relation $a_i^{-1}a_{i+2}^{-1}a_{i+1}$ comme étant le mot $r = r(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$; on cherche à trouver le shift de représentations pour le sous groupe K et $\sum = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
 $\rho : K \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est tel que $\rho(a_i^{-1}a_{i+2}^{-1}a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{3}$, comme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un groupe additif alors on aura: $\rho(a_i^{-1}a_{i+2}^{-1}a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{3}$ qui devient

$$-\rho(a_i) - \rho(a_{i+2}) + \rho(a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{3}$$

d'où

$$\rho(a_{i+2}) \equiv \rho(a_{i+1}) - \rho(a_i) \pmod{3}$$

Dans ce cas précis l'ensemble des sommets du graphe Γ est:

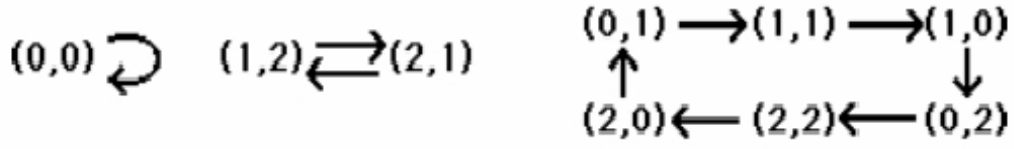
$$\{\rho_0 / \rho_0 : \{a_0, a_1\} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Et l'ensemble des arêtes est:

$$\{\rho_0\rho'_0 / \rho_0(a_1) = \rho'_0(a_0), \rho'_0(a_1) = \rho_0(a_1) - \rho_0(a_0)\}$$

Un petit programme (voir appendice B- Programme 01) nous permet d'avoir le graphe qui représente le shift, ce graphe est donné dans la figure 3.1.2 .

Cet espace shift est composé d'une représentation trivial, de deux représentations périodiques de période deux et de six représentations de période six.


 Figure 3.1.2 : Graphe associé au tréfle dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Définition 3.1.2 (d'un système augmenté) Un système de groupe augmenté (AGS) est le triplet $\mathcal{G} = (G, \chi, x)$ où G est un groupe de présentation fini, χ un épimorphisme de G dans $\mathbb{Z}$ et x un élément fixé dans G tel que $\chi(x) = 1$.

Pour tout nœud k , on peut associer un système de groupe augmenté AGS tel que G soit le groupe du nœud $G = \Pi_1(X(K), *)$ où le point de base $*$ est sur $\partial X(k)$ le bord du voisinage tubulaire $N(k)$, χ un homomorphisme de G dans $\mathbb{Z}$ tel que pour un élément y de G ($y = \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \alpha_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \alpha_{i_q}^{\varepsilon_q}$), $\chi(y) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q$ et x un élément fixé dans G , $\chi(x) = 1$.

3.2 Le système dynamique associé au nœud en huit

Cherchons le système dynamique associé au nœud en huit $k = 4_1$ orienté comme dans la figure 3.2.1, en nommant les quatre brins du nœud (3.2.1, on lit les relations en chaque

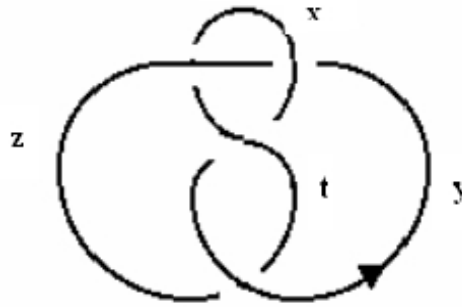


Figure 3.2.1 : Nœud en huit

croisement pour aboutir aux quatre relations suivantes :

$$z = xyx^{-1}, \quad x = ztz^{-1}, \quad y = t^{-1}xt, \quad t = y^{-1}zy$$

ce qui fait que la présentation du groupe G est de la forme:

$$G = (x, y, z, t \mid z = xyx^{-1}, x = ztz^{-1}, y = t^{-1}xt, t = y^{-1}zy)$$

Pour simplifier cette présentation, on élimine t depuis la quatrième relation pour qu'il en reste les trois suivantes:

$$z = x y x^{-1}, x = zy^{-1}z y z^{-1}, y = y^{-1}z^{-1}y x y^{-1}zy$$

et ensuite en injecte z dans x et y pour avoir deux relations en x et y qui sont en fait une seule relation:

$$y x^{-1}y^{-1}x y x^{-1}y x y^{-1}x^{-1}$$

Donc la présentation du groupe fondamental G du nœud 4_1 est:

$$G = (x, y \mid y x^{-1}y^{-1}x y x^{-1}y x y^{-1}x^{-1})$$

Je remplace maintenant y par xa et la nouvelle présentation de G est:

$$G = (x, a \mid x a x^{-1}a^{-1}xa^2xa^{-1}x^{-2})$$

en associant un $AGS \mathcal{G}_{4_1} = (G, \chi, x)$ à ce nœud la méthode de Reidmeister-Schereier nous permet d'avoir la présentation du sous groupe K qui est de la forme:

$$K = (a_k \mid a_{k+2} = a_{k+1} a_k^{-1} a_{k+1}^2)$$

Un programme (Programme 2-appendice B) nous permet d'avoir le graphe qui représente le shift des représentations de K dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le résultat est interprété dans le graphe dans la figure 3.2.2 .

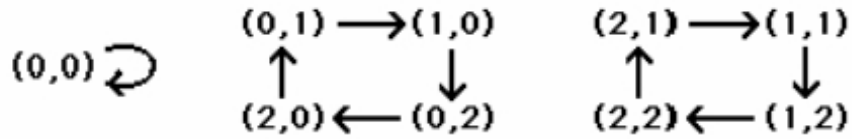


Figure 3.2.2 : Graphe de 4_1 dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Remarque 3.2.1 *Le graphe qui représente le shift du nœud $k = 4_1$ est bien différent de celui de $k = 3_1$; on voit bien que les deux shifts $\Phi_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(4_1)$ et $\Phi_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(3_1)$ ont le même nombre*

de points et aussi le même nombre de points fixes (un seul pour les deux shift), cependant, alors que $\Phi_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(4_1)$ contient huit points périodiques de période quatre, le shift $\Phi_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(3_1)$ contient deux points périodiques de période deux et six de période six et c'est bien ce qui nous mène à dire que le nœud 3_1 est différent du nœud 4_1 et que l'espace shift est un invariant pour un nœud.

3.3 Le système dynamique associé au nœud $k=5_2$

Considérons le nœud $k = 5_2$ orienté comme dans la figure 3.3.1

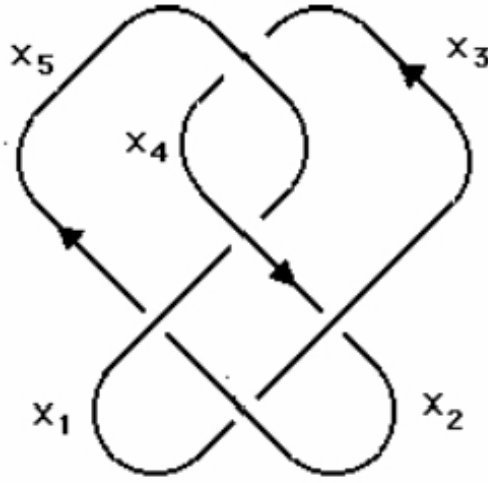


Figure 3.3.1 : Le nœud 5_2

Le groupe $G = \Pi_1(S^3 - k, *)$ a la présentation :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : x_3x_2 = x_2x_1, x_2x_3 = x_3x_4, x_5x_1 = x_1x_2, x_4x_5 = x_5x_3)$$

par les trois premières relations on élimine les générateurs x_5 , x_3 et x_4 , la présentation de G devient :

$$(x_1, x_2 : x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1^{-1})$$

si on pose $x_2 = x_1a = xa$, alors on aura:

$$G = (x, a : a^2xa^{-1}x^{-1}x^2a^2x^{-2}xa^{-2}x^{-1})$$

Par le théorème de Reidmeister-Schereier on a la forme de K le sous groupe des commutateurs de G dont les générateurs sont les $a_i, i \in \mathbb{Z}$ où $a_i = x^{-i}a x^i$, la présentation de K

est :

$$K = (a_i : a_{i+2}^2 a_{i+1}^{-1} a_i^2 a_{i+1}^{-2}, i \in \mathbb{Z}).$$

Pour $\sum = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ la condition (3.0.2) est:

$$\rho(a_2^2 a_1^{-1} a_0^2 a_1^{-2}) = 0 \pmod{7}$$

ce qui donne

$$2\rho(a_2) - \rho(a_1) + 2\rho(a_0) - 2\rho(a_1) = 0 \pmod{7}$$

$$2\rho'(a_1) + 2\rho(a_0) - 3\rho(a_1) = 0 \pmod{7}$$

$$2\rho'(a_1) = 3\rho(a_1) - 2\rho(a_0) \pmod{7}$$

$$2\rho'(a_1) = 10\rho(a_1) - 2\rho(a_0) \pmod{7}$$

$$\rho'(a_1) = 5\rho(a_1) - \rho(a_0) \pmod{7}$$

le shift $\Phi_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}(5_2)$ est décrit par le graphe suivant (programme 3-Appendice B)

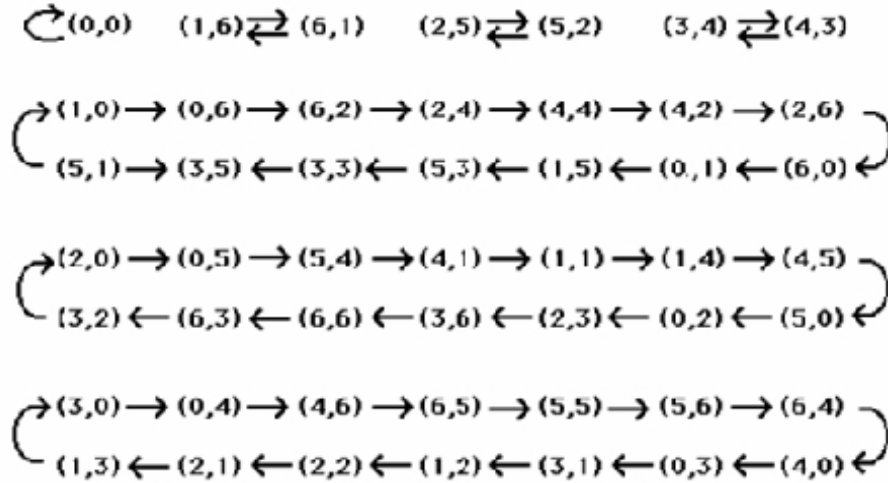


Figure 3.3.2 : Graphe de 5_2 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Si à la place de $\sum = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ on met $\sum = S_4$ (le groupe des permutations qui permute quatre éléments) le résultat obtenu est différent et beaucoup plus compliqué de ce qu'on a rencontré jusqu'à maintenant; le graphe représentant le shift est formé de plusieurs composantes (données en fin de se travail car le graphe admet une composante assez volumineuse qui ne tient pas dans une page de ce format), mais dans ce qui suit je vais l'interpréter et donner autant d'informations possibles.

En appliquant l'algorithme de la composante fortement connexe (voir Appendice A) on décompose ce graphe en : une composante fortement connexe composée de 64 sommets

et qui est la plus importante des composantes (et ça pour des raison que l'on donnera plus tard), 8 composantes d'ordre 4, 3 composantes d'ordre 8 et encore une d'ordre 9. Toutes ces composantes sont fortement connexes, ce qui nous mène à perdre de l'information car certains sommets ne vont pas apparaître dans la forme irréductible du graphe (si on veut toute l'information, il faudrait mettre la composante connexe au lieu de la fortement connexe). Parmi les composantes connexes il existe aussi celles formées de boucles et celles formée de sommets qui n'ont aucune dynamique; ces sommets ne sont pas représentés dans le graphe, vu qu'on a au total $(24)^2=576$ sommets et que l'on ne peut pas tous les mettre.

Restent les sommets qui ont une dynamique mais qui s'arrêtent après quelques sommets (donnés sous forme de chaîne); ces sommets aussi ne sont pas représentés dans notre graphe et avant de finir je précise que je donne seulement les composantes irréductibles de ce graphe.

Après toutes ces explications sur le graphe, je vais étudier l'un des invariants les plus importants dans le domaine des systèmes dynamiques : l'entropie topologique (voir chapitre 1).

En essayant de calculer l'entropie du shift formé seulement de composantes irréductibles, en se rend compte que seulement la composante d'ordre 64 a une entropie non nulle et égale à 0,4570434971 (le programme qui permet de donner ce résultat est dans l'appendice B, sous le nom d'Entropie), l'entropie des cycles de périodes 4, des cycles de période 8 et du cycle de période 9 est égale à zéro (voir[14]), d'où l'entropie de ce système est $h(\Phi_{S_4}(5_2)) = 0,4570434971$ (voir section Entropie).

Si pour ce même nœud, on cherche le shift pour $\sum$ sous groupe de S_4 c'est à dire $\sum$ égal à A_4, S_3, A_3 et D_4 on aura les résultats suivants :

$\Phi_{A_4}(5_2)$ est modélisé par la composante d'ordre 64, $\Phi_{A_3}(5_2) = \Phi_{S_3}(5_2)$ est donné par le graphe formé des deux composantes : cycle(3) et cycle(11) et qui font partie de la composante, $\Phi_{A_4}(5_2)$ et $\Phi_{D_4}(5_2)$ ne contient aucun élément autre que la représentation triviale.

Remarque 3.3.1 *Tous les graphes cités précédemment sont muni d'une composante isolée qui est la représentation triviale.*

Le graghe représentant la composante $\Phi_{S_4}(5_2)$ est donné dans la figure suivante.

3.4 Le système dynamique associé à l'entrelacs $l = 6_2^3$

Soit l'entrelacs $l = 6_2^3$ orienté comme dans la figure 3.4.1

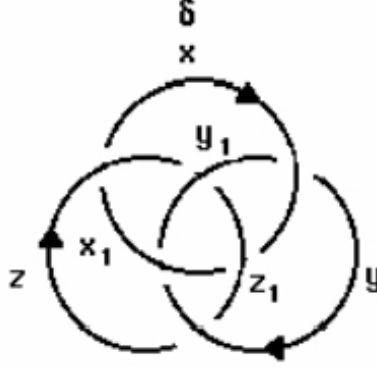


Figure 3.4.1 : L'entrelacs 6_2^3

Le groupe $G = \Pi_1(S^3 - l, *)$ admet la présentation suivante:

$$(x, x_1, y, y_1, z, z_1 / zx = x_1z, xy = y_1x, yz = z_1y, z_1y_1 = y_1z, z_1x = x_1z_1)$$

qui devient après élimination de x_1, y_1 et z_1 :

$$(x, y, z / yzy^{-1}xyx^{-1} = xyx^{-1}z, zxz^{-1}yzy^{-1} = yzy^{-1}x)$$

En remplaçant y par xa et z par xb et en appliquant la méthode de Reidmeister- schreier, le sous groupe $Ker \chi = K$ a la présentation suivante

$$K = (a_i, b_i / a_{i+2}b_{i+1}a_{i+1}^{-1}a_ib_{i+1}^{-1}a_{i+1}^{-1}, b_{i+2}b_{i+1}^{-1}a_{i+1}b_ia_i^{-1}a_{i+1}b_{i+1}^{-1}a_{i+2}^{-1})$$

si $\sum$ est abélien alors il existe $\tilde{\rho}$ tel que $\tilde{\rho} \circ q = \rho$, dans ce cas la présentation du groupe $\frac{K}{[K, K]}$ est :

$$(a_i / a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i) \oplus (b / b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$$

ainsi, si $\sum$ est abélien, l'espace des représentations shift $\Phi_\Sigma(l)$ est un produit cartésien $\Psi \times \Psi$; pour $\sum = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ les relations (3.0.1) et (3.0.2) sont:

$$\rho'_0(a_0) = \rho_0(a_1),$$

$$\rho'_0(a_1) \equiv 2\rho_0(a_1) - \rho(a_0) \pmod{4}.$$

Le graphe de Ψ est formé de 4 représentations fixes, 2 représentations de longueur 2 et 2 représentations de longueur 4. Voir la figure 3.4.2 .

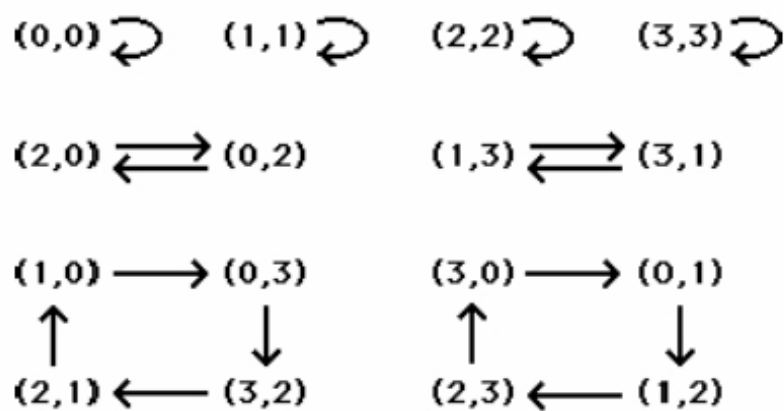


Figure 3.4.2 : Graphe de 6_2^3 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

4

Généralisation de la N-colorabilité

4.1 (n,r)-coloriages et représentations

Définition 4.1.1 Soit D le diagramme d'un entrelacs orienté; soient n et r des entiers positifs tel que $r \geq 2$;

un (n, r) -coloriage de D est l'attribution de $(r-1)$ -uplets (vecteurs couleur) $c \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{r-1}$ aux arcs de D de telle manière qu'à chaque croisement on ait:

$$(C_i - C_k) S_r^\epsilon = C_j - C_k \quad (4.1.1)$$

où C_k correspond au brin dessus du croisement et C_i, C_j aux deux brins dessous, $\epsilon = \pm 1$ est le signe algébrique du croisement (voir le chapitre sur les nœuds) et S_r la matrice suivante

$$S_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & -1 \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1.1 Si $r = 2$, la condition (4.1.1) devient le n -coloriage (vu dans le chapitre des nœuds). Pour tous diagramme D d'entrelacs orienté, on note par $col_{n,r}(D)$, le nombre de (n, r) -coloriage.

Proposition 4.1.1 *Si D et D' sont deux diagrammes d'un même entrelacs orienté l , alors $col_{n,r}(D) = col_{n,r}(D')$, donc $col_{n,r}(D)$ est un invariant de l'entrelacs.*

Preuve. Le diagramme D peut être transformé en D' par une suite finie de mouvements de Reidemeister et le nombre de (n, r) -coloriages de tout diagramme est inchangé par les trois mouvements de Reidemeister.

Soit D le diagramme d'un entrelacs orienté l , on note $r(D)$ le diagramme de l , avec l'orientation inverse ; il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des (n, r) -coloriages de D et celui de $r(D)$, en fait on peut avoir le (n, r) -coloriage de $r(D)$ en inversant l'ordre des composantes de chaque vecteur couleur de D , d'où le nombre $col_{n,r}(D)$ est un invariant de l'entrelacs ; si on change l'orientation de seulement une composante de l alors $col_{n,r}(D)$ peut changer si $r > 2$. ■

Proposition 4.1.2 *Soit D le diagramme d'un entrelacs orienté l et soient n et r deux entiers positifs. Si D peut être (n, r) -coloré alors il peut être (an, br) -coloré où a et b sont des entiers positifs.*

Définition 4.1.2 *Soit D le diagramme d'un entrelacs orienté l , se fixant un arc δ , on définit pour D le coloriage (n, r) avec arc de base δ comme étant un (n, r) -coloriage pour lequel δ reçoit la couleur triviale.*

4.1.1 Relation entre coloriage et représentation

Définition 4.1.3 *soit l un entrelacs orienté, n et r deux entiers positifs avec $r \geq 2$, une représentation de couleur (n, r) est une représentation $\rho \in \Phi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(l)$ tel que : $\rho + \sigma_x \rho + \dots + \sigma_x^{r-1} \rho$ soit trivial.*

Lemme 4.1.1 *Toute représentation de couleur (n, r) est périodique de période r et réciproquement, pour un nœud orienté k , toute représentation périodique (de période r) est une représentation de couleur (n, r) .*

Preuve. si $\rho + \sigma_x \rho + \dots + \sigma_x^{r-1} \rho$ est trivial, alors :

$$\sigma_x (\rho + \sigma_x \rho + \dots + \sigma_x^{r-1} \rho) = \rho + \sigma_x \rho + \dots + \sigma_x^{r-1} \rho.$$

donc $\sigma_x^r \rho = \rho$.

Réciproquement : supposons que $\rho \in \Phi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(l)$ est une représentation tel que $\sigma_x^r \rho = \rho$ donc la représentation $\rho + \sigma_x \rho + \dots + \sigma_x^{r-1} \rho$ est fixé par σ_x donc elle est trivial, d'où ρ est une représentation de couleur (n, r) . ■

Remarque 4.1.2 Pour un entrelacs l une r -représentation n'est pas forcément une représentation de couleur (n, r) .

Théorème 4.1.1 Soit D le diagramme d'un entrelacs orienté l et δ un arc fixé dans D , pour tout n , il existe une correspondance biunivoque entre le (n, r) -coloriage avec arc de base δ de D et la représentation ρ de couleur (n, r) : $\rho \in \Phi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(l)$.

Preuve. Supposons que $\rho : K \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est une représentation de couleur pour (l) ; soit r le plus petit entier supérieur à 2 tel que: $\rho + \sigma_x \rho + \dots + \sigma_x^{r-1} \rho$ soit trivial, on obtient un (n, r) -coloriage de D avec arc de base δ comme suit : on associe le vecteur couleur trivial $(0, \dots, 0) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{r-1}$ à l'arc δ qui correspond au générateur x , tout autre arc détermine un générateur x_i du groupe G de l'entrelacs ; le produit $a = x^{-1}x_i$ est dans K . Si on pose $(\rho(a), \sigma_x \rho(a), \dots, \sigma_x^{r-1} \rho(a))$ le vecteur couleur associé à l'arc x_i alors on peut vérifier la condition (4.1.1) .

Réciproquement: supposons qu'on a un (n, r) -coloriage de D avec arc de base auquel on attribue le vecteur couleur $(c_{i,0}, \dots, c_{i,r-2})$ au $i \stackrel{em}{=}$ arc par le théorème de Reidemeister-Schreier on a que $x^{-\gamma} (x^{-1}x_j) x^\gamma$ sont des générateurs de K , la famille des relations en chaque croisement du diagramme du nœud nous donne les relations: $x^{-\gamma} (x_k^{-1}x_i) x^\gamma = x^{-\gamma} (x_j x_k^{-1}) x^\gamma$, ce qui implique :

$$x^{-\gamma-1} (x^{-1}x_k)^{-1} x^{\gamma+1} . x^{-\gamma-1} (x^{-1}x_i) x^{\gamma+1} = x^{-\gamma} (x^{-1}x_j) x^\gamma . x^{-\gamma} (x^{-1}x_k)^{-1} x^\gamma$$

la condition (4.1.1) donne que l'application :

$$\rho(x^{-\gamma} (x^{-1}x_i) x^\gamma) = c_{i,\nu} \quad \text{si } \nu \equiv 0, \dots, r-2 \pmod{r}$$

$$\rho(x^{-\gamma} (x^{-1}x_i) x^\gamma) = -c_{i,0} - \dots - c_{i,r-1} \quad \text{si } \nu \equiv r-1 \pmod{r}$$

détermine une représentation de couleur: $\rho \in \Phi_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(l)$.

■

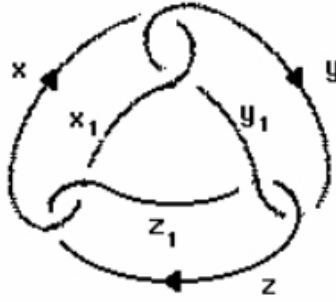
Exemple 4.1.1 Soit l'entrelacs à 3 composante $l = 6_1^3$ orienté comme dans la figure 4.1.1

Le groupe G de cet entrelacs a la présentation suivante:

$$G = (x, x_1, y, y_1, z, z_1 : y_1 z = z y, z_1 x = x z, x_1 y = y x, x_1 y_1 = y x_1, z y_1 = y_1 z_1)$$

en utilisant les 3 premières relations, on élimine x_1, y_1 et z_1 de cette présentation, le résultat est le suivant:

$$G = (x, y, z : x y x^{-1} z y z^{-1} y x^{-1} y^{-2}, z y z^{-1} x z^{-1} x^{-1} z y^{-1})$$


 Figure 4.1.1 : Le coloriage de 6_1^3

le sous groupe K de G est de la forme :

$$K = (a_i, b_i, : a_i a_{i+1}^2 b_{i+1} a_i b_i^{-1}, b_i^{-2} b_{i+1} a_{i+1}^{-1} b_{i+1} a_i, i \in \mathbb{Z}).$$

Si on regarde le $(3, 3)$ -coloriage de l alors on peut déduire tous les coefficients modulo 3 et alors les deux familles de relations deviennent :

$$-a_i + a_{i+1} - b_i + b_{i+1} \text{ et } a_i - a_{i+1} + b_i - b_{i+1}.$$

Il est claire que la deuxième famille de relations est une conséquence de la première et l'une et l'autre peuvent être écrite comme suit :

$$b_{i+1} = a_i - a_{i+1} + b_i.$$

On peut construire tout les homomorphismes ρ de K dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à partir des générateurs a_i et b_0 , les images des générateurs b_i ($i \neq 0$) sont déterminées par les relations :

$$b_{i+1} = a_i - a_{i+1} + b_i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Pour déterminer les $(3, 3)$ -coloriage avec arc de base qui correspondent a chaque représentation de couleur $(3, 3)$ on doit en premier, exprimer $x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-1}x_1, x^{-1}y_1$ et $x^{-1}z_1$ en terme de a_i et b_i :

Les générateurs $a_i = x^{-i} (x^{-1}y) x^i$ et $b_i = x^{-i} (x^{-1}z) x^i$ donnent que : $a_0 = x^{-1}y$ et $b_0 = x^{-1}z$,

$$x^{-1}x_1 = x^{-1}y.x y^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{-1}y.xy^{-1}xx^{-1} \\
 &= x^0x^{-1}yx^0.x(x^{-1}y)^{-1}x^{-1} \\
 x^{-1}x_1 &= a_0a_{-1}^{-1} \\
 x^{-1}y_1 &= x^{-1}z.yz^{-1} \\
 &= x^{-1}z.xx^{-1}yx^{-1}.xz^{-1} \\
 &= x^0x^{-1}zx^0.x(x^{-1}y)^{-1}x^{-1}.xz^{-1}xx^{-1} \\
 &= x^0(x^{-1}z)x^0.x(x^{-1}y)^{-1}x^{-1}.x(x^{-1}z)^{-1}x^{-1} \\
 x^{-1}y_1 &= b_0.a_{-1}.b_{-1}^{-1} \\
 x^{-1}z_1 &= x^{-1}xxz^{-1} \\
 &= xx^{-1}zx^{-1} \\
 x^{-1}z &= b_{-1}
 \end{aligned}$$

comme tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est additif alors on a

$$\begin{aligned}
 x^{-1}y &= a_0 \pmod{3}, x^{-1}z = b_0 \pmod{3}, x^{-1}x_1 = a_0 - a_{-1} \pmod{3}, \\
 x^{-1}y_1 &= a_{-1} - b_{-1} + b_0 \pmod{3}, x^{-1}z_1 = b_{-1} \pmod{3}
 \end{aligned}$$

si α et β sont des éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ alors $\rho : K \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui envoie tout générateur a_i sur α et b_i sur β est une représentation de couleur(3,3), du calcul en déduit que ρ correspond au coloriage(3,3) de base du diagramme dans lequel le y -arc est coloré par $(\rho(a_0), \rho(a_1)) = (\alpha, \alpha)$ et le z -arc coloré par $(\rho(b_{-1}), \rho(b_0)) = (\beta, \beta)$...etc. La figure 4.1.2 représente un coloriage avec arc de base δ . Le shift $\Phi_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(l)$ contient aussi des représenta-

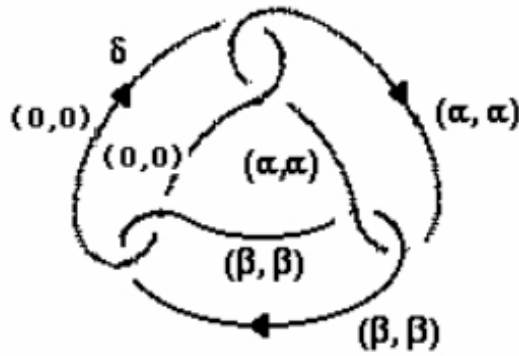


Figure 4.1.2 : Un coloriage de 6_1^3 en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec arc de base

tions de couleur(3,3) qui ne sont pas des points fixes, l'une de ces représentations est donnée

par :

$$a_{3i} \rightarrow 1, a_{3i+1} \rightarrow 0, a_{3i+2} \rightarrow 2; b_{3i} \rightarrow 2, b_{3i+1} \rightarrow 0, b_{3i+2} \rightarrow 1.$$

Dans la figure 4.1.3, on trouve un $(3,3)$ -coloriage avec arc de base. Considérons main-

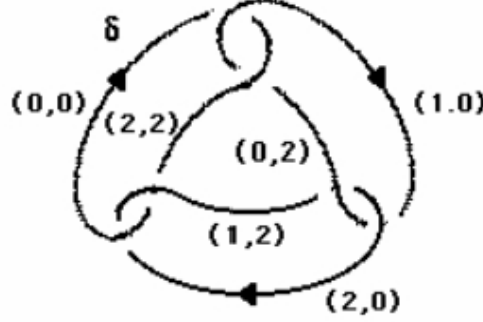


Figure 4.1.3 : Un autre coloriage de base $(3,3)$

tenant l'entrelacs orienté l' obtenu en inversant l'orientation de la composante qui contient l'arc δ , en calculant le groupe G et le sous groupe K on trouve :

$$K = (a_i, b_i : -a_i + 2a_{i+1} - a_{i+2} - b_{i+1} + b_{i+2}, -a_i + a_{i+1} + b_i - 2b_{i+1} + b_{i+2})$$

après réduction des coefficients modulo 3, on a:

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + b_{i+1} - b_{i+2} \tag{4.1.2}$$

$$-a_i + a_{i+1} + b_i + b_{i+1} + b_{i+2} \tag{4.1.3}$$

Chaque représentation ρ de couleur $(3,3)$, s'annule en $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$ et $b_i + b_{i+1} + b_{i+2}$ et à partir de (4.1.2) et (4.1.3) on remarque que ρ s'annule aussi en $-a_i + a_{i+1}$ et $b_{i+1} - b_{i+2}$, donc ρ est un point fixe de l'ensemble schift $\Phi_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(l)$ d'où $\text{col}_{3,3}(l') \neq \text{col}_{3,3}(l)$.

Exemple 4.1.2 le coloriage du nœud $k = 5_2$ (voir parti 3.3)

Le diagramme du nœud 5_2 a six coloriages $(7,2)$ avec arcs de base non triviaux correspondant aux six représentations de période 2 et de même 48 coloriages $(7,14)$ avec arc de base, associer aux 48 représentations de période 14.

la représentation ρ de période 2 donnée par les relations $\rho(a_{2i}) \equiv 5 \pmod{7}$ et $\rho(a_{2i+1}) \equiv 2 \pmod{7}$ nous donne le coloriage $(7,2)$ avec arc de base, défini comme suit :

la couleur 0 affecté à l'arc δ

la couleur 5 affecté à l'arc x_2

la couleur 3 affecté à l'arc x_3

la couleur 1 affecté à l'arc x_4

la couleur 2 affecté à l'arc x_5

ces couleurs sont exprimé à partir du calcul des $x^{-1}x_i, i \in \{2, \dots, 5\}$

$$x^{-1}x_2 = a_0 \pmod{7}, \quad x^{-1}x_3 = a_0 - a_{-1} \pmod{7},$$

$$x^{-1}x_4 = 2a_0 - a_{-1} \pmod{7}, \quad x^{-1}x_5 = a_{-1} \pmod{7}.$$

Exemple 4.1.3 Pour l'entrelacs $l = 6_2^3$ donné dans la figure 4.1.4 . L'espace $\Phi_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(l) =$

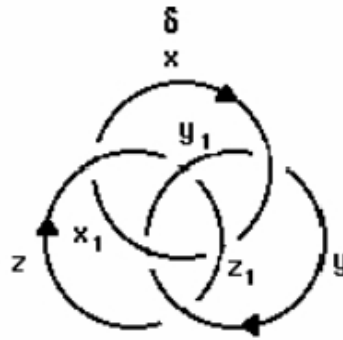


Figure 4.1.4 : Le 6_2^3 avec arc de base

$\Psi \times \Psi$ est donné par le graphe de la figure 4.1.5

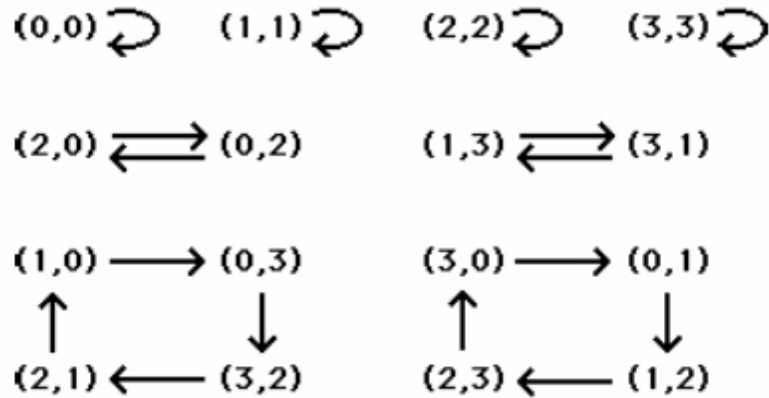


Figure 4.1.5 : L'espace shift Ψ

$\Phi_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(l)$ a 256 représentations qui sont 16 représentations fixe, 48 représentations de période au moins 2 et 192 représentations de période au moins 4.

une représentation de période 2 est de la forme $(\Psi_1, \Psi_2) \in \Psi \times \Psi$ où Ψ_1 et Ψ_2 sont de période 1 ou 2 mais pas en même temps de période 1; aucune de ces représentations de période 2 n'est une représentation de couleur $(4, 2)$.

$\Phi_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(l)$ contient 4 représentations fixes qui sont des représentations de couleur $(4, 2)$, elles sont de la forme (Ψ_1, Ψ_2) où Ψ_1 et Ψ_2 correspondent aux cycles triviaux de $(0,0)$ ou $(2,2)$.

Le $(4,2)$ -coloriage est donné par la figure 4.1.6 .

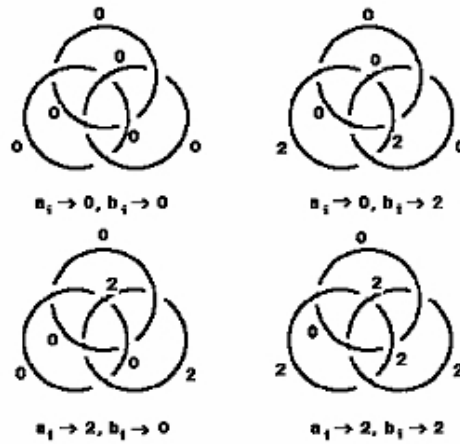


Figure 4.1.6 : Le $(4, 2)$ -coloriage avec arc de base

4.1.2 Le coloriage du nœud Satellite

Soit k_1 un nœud à l'intérieur d'un tore solide (voir figure 4.1.7)

En nouant ce tore solide suivant le modèle d'un nœud k_2 , le nœud k_1 se transforme en un nœud k_3 qui est dit nœud Satellite. Le nœud k_2 est dit nœud compagnon du nœud satellite k_3 .

On suppose que le nœud compagnon k_2 est non trivial sinon le nœud satellite k_3 est le nœud k_1 .

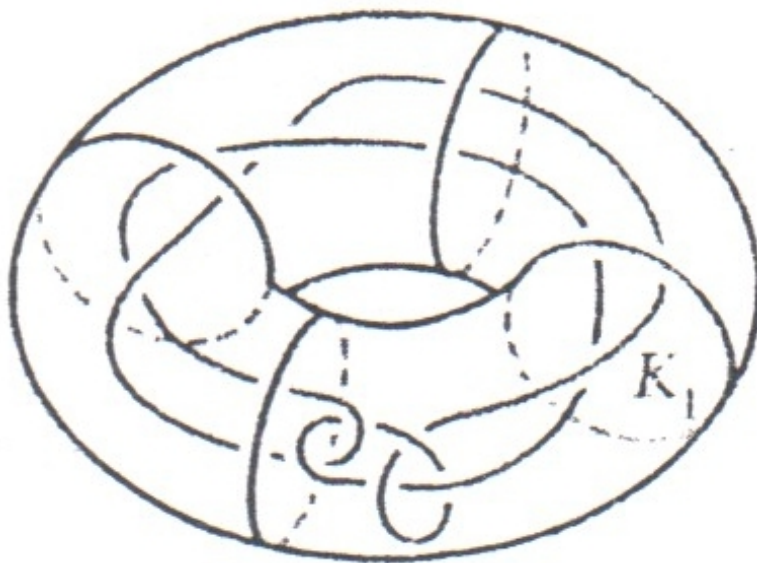


Figure 4.1.7 : Nœud Satellite

Exemple 4.1.4 Pour k_1 le nœud trivial et k_2 le nœud de trèfle le résultat k_3 est le nœud de trèfle (voir figure 4.1.8).

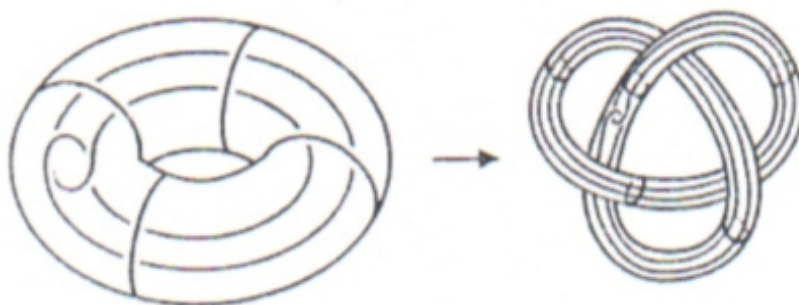


Figure 4.1.8 : Nœud compagneon

Exemple 4.1.5 Si k_1 est nœud de trèfle et le compagneon $k_2 = 4_1$ le nœud en huit alors le Satellite k_3 est le nœud donné dans la figure 4.1.9 .

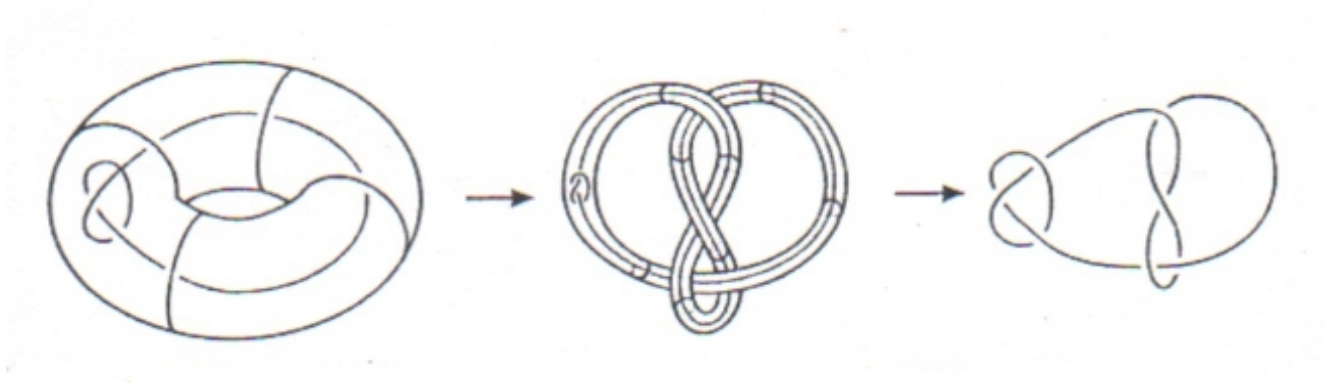


Figure 4.1.9 : Exemple de nœud Satellite

Théorème 4.1.2 Soit k un nœud satellite avec un nœud compagnon $\tilde{k}$ et le nombre d'enlacement d , pour n et r des entiers positifs et $r \geq 2$ on a :

si $d = 0$ alors

$$\text{col}_{n,r}^0(k) = \text{col}_{n,r}^0(\tilde{k}),$$

si $d \neq 0$ alors

$$\text{col}_{n,r}^0(k) = \text{col}_{n,r}^0(\tilde{k}) \left[\text{col}_{n,r/q}^0(\hat{k}) \right]^q \text{ où } q = \text{pgcd}(d, r).$$

Proposition 4.1.3 Soit (Φ, σ) un système dynamique satellite déterminé par $(\tilde{\Phi}, \tilde{\sigma}), (\hat{\Phi}, \hat{\sigma})$ et un entier positif d , alors pour un entier positif r on a :

$$|\text{Fix}\sigma^r| = |\text{Fix}\tilde{\sigma}^r| \cdot \left| \text{Fix}\hat{\sigma}^{r/q} \right|^q \text{ où } q = \text{pgcd}(d, r)$$

Preuve. Soit $\Phi = (\rho, \tau_0, \dots, \tau_{d-1}) \in \text{Fix}\sigma^r, \sigma^r\Phi = \Phi$ implique que $\sigma^r\rho = \rho$ et donc $\rho \in \text{Fix}\sigma^r$.

On a $dr/q = \text{ppcm}(d, r)$ (c'est un multiple de r) donc $\sigma^{dr/q}\Phi = \Phi$.

Calculons $\sigma^{dr/q}\Phi$

$$\sigma^{r/q}(\Phi) = \left(\tilde{\sigma}^{r/q}\rho, \tau_1, \dots, \tau_{d-1}, \hat{\sigma}^{r/q}\tau_0 \right)$$

$$\sigma^{2r/q}(\Phi) = \left(\tilde{\sigma}^{2r/q}\rho, \tau_2, \dots, \tau_{d-1}, \hat{\sigma}^{r/q}\tau_0, \hat{\sigma}^{r/q}\tau_1 \right)$$

.

.

.

$$\sigma^{dr/q}(\Phi) = \left(\tilde{\sigma}^{dr/q}\rho, \hat{\sigma}^{r/q}\tau_0, \dots, \hat{\sigma}^{r/q}\tau_{d-1} \right)$$

et puisque $\sigma^{rd/q}\Phi = \Phi$ alors on déduit que les τ_i sont des points fixes de $\hat{\sigma}^{r/q} \quad \forall i, i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$

Pour r, d et q , $\exists m$ et n tel que $mr = nd + q$ d'où $\Phi = \sigma^{mr}\Phi = \sigma^{nd+q}\Phi$, calculons $\sigma^{nd+q}\Phi$, on a :

$$\sigma\Phi = (\tilde{\sigma}\rho, \tau_1, \dots, \tau_{d-1}, \hat{\sigma}\tau_0)$$

.

.

.

$$\sigma^d\Phi = (\tilde{\sigma}^d\rho, \hat{\sigma}\tau_0, \dots, \hat{\sigma}\tau_{d-1})$$

$$\sigma^{d+1}\Phi = (\tilde{\sigma}^{d+1}\rho, \hat{\sigma}\tau_1, \dots, \hat{\sigma}\tau_{d-1}, \hat{\sigma}^2\tau_0)$$

.

.

.

$$\sigma^{2d}\Phi = (\tilde{\sigma}^{2d}\rho, \hat{\sigma}^2\tau_0, \dots, \hat{\sigma}^2\tau_{d-1})$$

.

.

.

$$\sigma^{nd}\Phi = (\tilde{\sigma}^{nd}\rho, \hat{\sigma}^n\tau_0, \dots, \hat{\sigma}^n\tau_{d-1})$$

$$\sigma^{nd+1}\Phi = (\tilde{\sigma}^{nd+1}\rho, \hat{\sigma}^n\tau_1, \dots, \hat{\sigma}^n\tau_{d-1}, \hat{\sigma}^{n+1}\tau_0)$$

.

.

.

$$\sigma^{nd+q}\Phi = (\tilde{\sigma}^{nd+q}\rho, \hat{\sigma}^n\tau_q, \dots, \hat{\sigma}^n\tau_{d-1}, \hat{\sigma}^{n+1}\tau_0, \dots, \hat{\sigma}^{n+1}\tau_{q-1}).$$

Comme $\sigma^{nd+q}\Phi = \Phi$ alors on a :

$$\tau_i = \hat{\sigma}^n\tau_{i+q}, \forall i \ 0 \leq i \leq d - q - 1. \quad (4.1.4)$$

De cette forme, on peut déterminer les $\tau_q, \dots, \tau_{2q-1}$ à partir de $\tau_0, \dots, \tau_{q-1}$ et ensuite déterminer $\tau_{2q}, \dots, \tau_{3q-1}$ à partir de $\tau_q, \dots, \tau_{2q-1}$ et ainsi de suite.

Inversement, si $\rho \in \text{Fix } \tilde{\sigma}^r$ et $\tau_0, \dots, \tau_{q-1}$ sont dans $\text{Fix } \hat{\sigma}^{r/q}$, alors la formule (4.1.4) donne les termes $\tau_q, \dots, \tau_{2q-1}$ et donc $\Phi = (\rho, \tau_0, \dots, \tau_{q-1})$ est dans $\text{Fix } \sigma^r$.

■

5

Conclusion et perspectives

Le problème abordé dans ce mémoire est un problème classique dans la théorie des nœuds: chercher les invariants qui permettent de différencier un nœud (entrelacs) d'un autre quelque soit sa complexité. La plupart des chercheurs utilisent des méthodes algébriques, seulement on ne sait toujours pas si les invariants que nous avons sont suffisants pour classer tous les nœuds ou pas.

L'utilisation des systèmes dynamiques introduite par Susan Williams est une nouveauté dans la théorie des nœuds. Les invariants : le nombre de croisement, le groupe fondamental et le trois coloriage cité dans ce travail sont connus et classiques; par contre, l'espace shift avec toutes ses caractéristiques (nombre de points et périodicité de ces points), l'entropie, une généralisation du coloriage d'un nœud (entrelacs) et le nombre de coloriage sont de nouveaux invariants. L'étude de plusieurs nœuds et entrelacs est faite et surtout l'étude de familles de nœud importantes et pas très bien connues (les nœuds satellites).

En perspective de recherche, on dira que le domaine des nœuds est une terre très fertile. Beaucoup de choses restent à voir et sont inconnues, à citer :

- 1- Les représentations des groupes des nœuds dans des groupes connus (groupe des quaternions)
- 2- La classification de famille des nœuds pretzels par les représentations de leurs groupes dans des groupes finis.
- 3- Une généralisation en construction des représentations d'un groupe G d'un entrelacs via l'application $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ou $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}^n$.

6

Appendice A

6.1 Graphes

Dans toute cette partie ,on donne des concepts pour les graphes orientés.

Définition 6.1.1 *Un graphe $G = [X, U]$ est déterminé par la donnée:*

D'un ensemble X dont les éléments sont les sommets, et d'un ensemble U dont les éléments $u \in U$ sont des couples ordonnés de sommets appelés des arcs.

Si $N = |X|$ est le nombre de sommets ,on dit que le graphe est d'ordre N .(on supposera que les sommets sont numérotés de 1 à N).

Si $u = (i, j)$ est un arc de G , i est extrémité initiale de u et j extrémité terminale.

Graphiquement, les sommets sont souvent représentés par des points et les arcs par des flèches joignant les sommets.

Un arc $u = (i, j)$ dont les extrémités coïncident est appelé une boucle.

Un p -graphe est un graphe pour lequel il n'existe pas plus de p arcs de la forme (i, j) , en particulier un 1-graphe est un graphe tel qu'il n'existe pas plus d'un arc de la forme (i, j) $(\forall i, \forall j)$.

Pour un arc orienté $u = (i, j)$ on dira que i est un prédécesseur de j et j un successeur de i .

Deux arcs sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune. Le graphe de la figure 6.1.1 est un 3-graphe d'ordre 4.

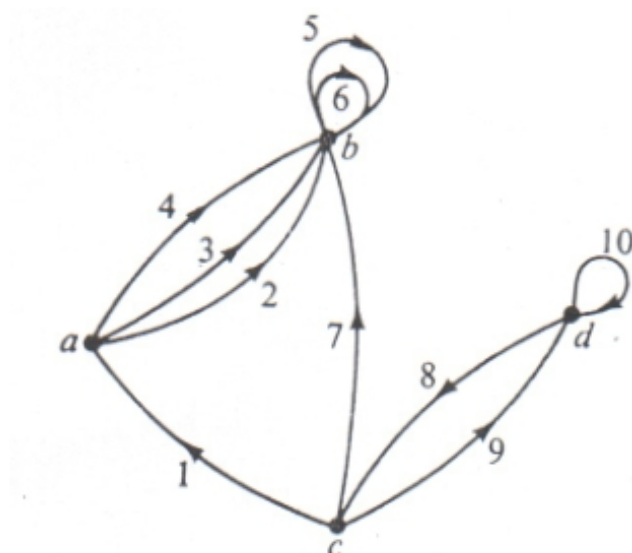


Figure 6.1.1 : Un trois graphe orienté

Matrices associées a un graphe (Matrice d'incidence sommets-sommets)

Soit G un 1-graphe (c'est à dire qu'il n'existe pas plus d'un arc de la forme (i, j) ($\forall i, \forall j$)) comportant éventuellement des boucles (mais pas plus d'une par sommet)

Définition 6.1.2 La matrice d'adjacence (ou matrice d'incidence sommets-sommets) est une matrice $A = (A_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$ à coefficients 0 ou 1 telle que chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet de G tel que :

$$A_{ij} = +1 \text{ si et seulement si } (i, j) \in u$$

$$A_{ij} = 0 \quad \text{sinon}$$

Exemple 6.1.1 Pour le 1-graphe d'ordre 6 présenté dans la figure 6.1.2 , on a la matrice associée:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \\ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

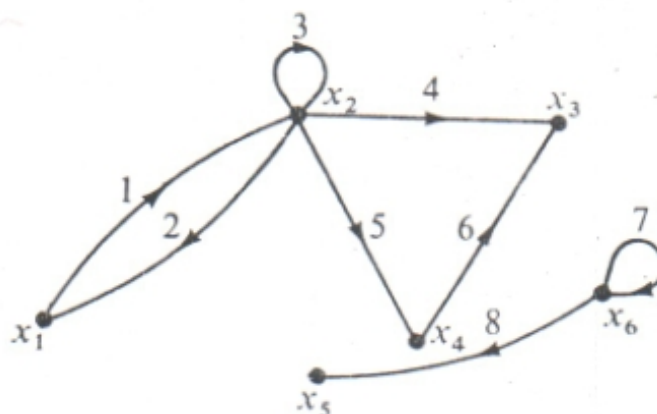


Figure 6.1.2 : Un 1-graphe orienté

6.1.1 Connexité d'un graphe

Chaîne, chaîne élémentaire et cycle

Une chaîne de longueur q (de cardinalité q) est une séquence de q arcs $L = \{u_1, \dots, u_q\}$ telle que chaque arc u_r ($2 \leq r \leq q-1$) ait une extrémité commune avec l'arc u_{r-1} ($\neq u_r$) et l'autre extrémité commune avec l'arc u_{r+1} .

L'extrémité i de u_1 non adjacente à u_2 et l'extrémité j de u_q non adjacente à u_{q-1} sont appelées les extrémités de la chaîne L ; on dit aussi que la chaîne joint les sommets i et j .

Sur le graphe de la figure 6.1.3 ,

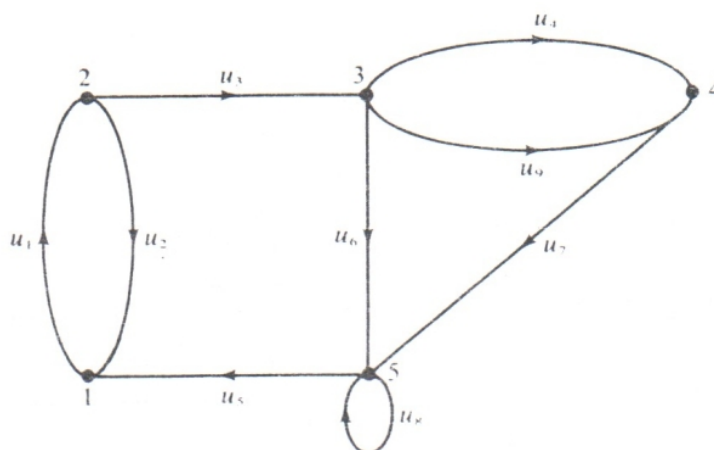


Figure 6.1.3 : Chaîne dans un graphe

$L = \{u_2, u_5, u_6, u_4\}$ est une chaîne allant du sommet 2 au sommet 3.

On appelle chaîne élémentaire, une chaîne telle qu'en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident, un cycle élémentaire est un cycle minimal (pour l'inclusion) c'est à dire ne contenant strictement aucun autre cycle. En parcourant un cycle élémentaire, on ne rencontre pas deux fois le même sommet (sauf l'origine du parcourt).

Chemin, chemin élémentaire et circuit

Un chemin de longueur q est une séquence de q arcs $P = \{u_1, \dots, u_q\}$ avec:

$$u_1 = (i_0, i_1)$$

$$u_2 = (i_1, i_2)$$

.

.

.

$$u_q = (i_{q-1}, i_q)$$

c'est à dire, qu'un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens, i_0 est l'extrémité initiale du chemin P et i_q est extrémité terminale.

Dans l'exemple de la figure 6.1.3, $P = \{u_1, u_3, u_4, u_7\}$ est un chemin allant du sommet 1 au sommet 5 ; on peut le représenter par la séquence des sommets $\{1, 2, 5, 3, 4\}$.

Un chemin élémentaire est tel qu'en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet et un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident.

Connexité d'un graphe

Un graphe connexe est un graphe tel que pour tout couple i et j de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant .

Considérons la relation R donnée par : $i R j \Leftrightarrow i = j$ ou il existe une chaîne joignant i et j .

Cette relation est une relation d'équivalence; les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forme une partition de X en $X_1, \dots, X_p$.

Le nombre p de classes d'équivalence distinctes est dit nombre de connexité du graphe.

Un graphe est dit connexe si $p = 1$. Les sous graphes $G_1, \dots, G_p$ engendré par les sous ensemble $X_1, \dots, X_p$ sont appelés les composantes connexes du graphe G . Chaque composante connexe est un graphe connexe.

La forte connexité d'un graphe

Un graphe est dit fortement connexe si, étant donnés deux sommets quelconques i et j (dans cet ordre), il existe un chemin d'extrémité initiale i et d'extrémité finale j et inversement.

Comme pour la connexité on définit la relation d'équivalence :

$iRj \Leftrightarrow i = j$ ou il existe à la fois un chemin de i à j et un chemin de j à i .

Les classe d'équivalences induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, \dots, X_q$, q est appelé le nombre de forte connexité du graphe G . Les sous graphes $G_1, \dots, G_q$ de G engendrés par les sous ensembles $X_1, \dots, X_q$ sont fortement connexes et sont appelés les composantes fortement connexes de G . Un graphe est fortement connexe si et seulement si il n'a qu'une seule composante fortement connexe. Dans le langage des systèmes dynamiques, composante fortement connexe est aussi dite composante irréductible.

7

Appendice B:

Programme 1: Du trèfle.

```
> restart:
> printlevel := 6:
> P:=3;
> for i from 0 to 2 do
>   for j from 0 to 2 do
>     a(0):=i;
>     a(1):=j;
>     for k from 0 to 12 do
>       a(k+2):=((P-a(k)) mod P)+a(k+1)) mod P;
>       #B:=array(1..k+3)
>       #B:=op(A,a(k+2));
>       if a(0)=a(k+1) then
>         if a(1)=a(k+2) then
>           k;
>         break;
>       end if;
>     end if;
>   od;
> od;
```

Programme 2:du noeud 4_1

restart:

```

> printlevel := 1:
> P:=3;
> for i from 0 to P-1 do
>   for j from 0 to P-1 do
>     a(0):=i;
>     a(1):=j;
>     v[i,j]:=[]:
>     #####
>     numb:=P-1:
>     unassign('halt'):
>     for ii from 0 to i do
>       if ii=i then numb:=j end if:
>       for jj from 0 to numb do
>         #if ii=jj then next; #end if;
>         if v[ii,jj]=[] then next; end if;
>         zz1:=“:zz2:=“:q:=0:w:=0:
>         for y to nops(v[ii,jj]) do
>           if member(a(0),v[ii,jj], 'z1') then
>             zz1[y]:=z1;q:=q+1;
>             v[ii,jj]:=subsop(z1=men,v[ii,jj]):
>           end if:
>           if member(a(1),v[ii,jj], 'z2') then
>             zz2[y]:=z2:w:=w+1;
>             v[ii,jj]:=subsop(z2=amine,v[ii,jj]):
>           end if:
>         od;
>       zz1:=convert(zz1,list):zz2:=convert(zz2,list):
>       for x to q do v[ii,jj]:=subsop(zz1[x]=a(0),v[ii,jj]):
>     od:
>       for x to w do v[ii,jj]:=subsop(zz2[x]=a(1),v[ii,jj]):
>     od:
>   #print('le cycle ',w[ii,jj],'est passé au crible afin de trouver #le('i,j,')');

```

```

> if q=0 then next; end if;
> if v=0 then next; end if;
> for y2 in zz2 do
> for y1 in zz1 do
> if y2=y1+1 then halt:=existe_déjà:
> break:
> end if:
> od;
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle zz1
> od;
> if member(nops(v[ii,jj]),zz1) then
> if member(1,zz2) then halt:=existe_déjà:
> #print('c'est possible au',v[ii,jj],'pour le',[i,j]);
> break:
> end if:
> end if:
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle numb
> od:
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle i
> od:
> #####
> if assigned(halt) then
> print([a(0),a(1)], 'est déjà calculé dans',[ii,jj]);
> next:end if;
> v[i,j]:=[a(0),a(1)]:
> for k from 0 to 12 do
> a(k+2):=((P-a(k)) mod P)mod P;
> #B:=array(1..k+3)
> #B:=op(A,a(k+2));
> if a(0)=a(k+1) then
> if a(1)=a(k+2) then
> k;
> v[i,j]:=[op(1..nops(v[i,j])-1,v[i,j])]:
> break;

```

```

> end if:
> end if:
> v[i,j]:=[op(v[i,j]),a(k+2)]:
> od;
> print((i,j),v[i,j]);
> od;
> od;

```

Programme 3:du noeud 5_2

restart:

```

> printlevel := 1:
> P:=7;
> for i from 0 to P-1 do
> for j from 0 to P-1 do
> a(0):=i;
> a(1):=j;
> v[i,j]:=[]:
> #####
> numb:=P-1:
> unassign('halt'):
> for ii from 0 to i do
> if ii=i then numb:=j end if:
> for jj from 0 to numb do
> #if ii=jj then next; #end if;
> if v[ii,jj]=[] then next; end if;
> zz1:=“:zz2:=“:q:=0:w:=0:
> for y to nops(v[ii,jj]) do
> if member(a(0),v[ii,jj],’z1’) then
> zz1[y]:=z1;q:=q+1;
> v[ii,jj]:=subsop(z1=men,v[ii,jj]):
> end if:
> if member(a(1),v[ii,jj],’z2’) then
> zz2[y]:=z2;w:=w+1;

```

```

> v[ii,jj]:=subsop(z2=amine,v[ii,jj]):
> end if:
> od:
> zz1:=convert(zz1,list):zz2:=convert(zz2,list):
> for x to q do v[ii,jj]:=subsop(zz1[x]=a(0),v[ii,jj]):
> od:
> for x to w do v[ii,jj]:=subsop(zz2[x]=a(1),v[ii,jj]):
> od:
> #print('le cycle ',w[ii,jj],'est passé au crible afin de trouver #le('i,j,')');
> if q=0 then next; end if;
> if v=0 then next; end if;
> for y2 in zz2 do
> for y1 in zz1 do
> if y2=y1+1 then halt:=existe_déjà:
> break:
> end if:
> od;
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle zz1
> od;
> if member(nops(v[ii,jj]),zz1) then
> if member(1,zz2) then halt:=existe_déjà:
> #print('c'est possible au',v[ii,jj],'pour le',[i,j]);
> break:
> end if:
> end if:
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle numb
> od:
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle i
> od:
> #####
> if assigned(halt) then
> print([a(0),a(1)],'est déjà calculé dans',[ii,jj]);
> next:end if;
> v[i,j]:=[a(0),a(1)]:

```

```

> for k from 0 to 12 do
> a(k+2):=(5*a(k+1)+6*a(k)) mod P;
> #B:=array(1..k+3)
> #B:=op(A,a(k+2));
> if a(0)=a(k+1) then
> if a(1)=a(k+2) then
> k;
> v[i,j]:=[op(1..nops(v[i,j])-1,v[i,j])]:
> break;
> end if;
> end if;
> v[i,j]:=[op(v[i,j]),a(k+2)]:
> od;
> print((i,j),v[i,j]);
> od;
> od;

```

Algorithme 4: le noeud 4_1

restart:

```

> printlevel := 1;
> P:=4;
> for i from 0 to P-1 do
> for j from 0 to P-1 do
> a(0):=i;
> a(1):=j;
> v[i,j]:=[];
> #####
> numb:=P-1;
> unassign('halt');
> for ii from 0 to i do
> if ii=i then numb:=j end if;
> for jj from 0 to numb do
> #if ii=jj then next; #end if;
> if v[ii,jj]=[] then next; end if;

```

```

> zz1:=“:zz2:=“:q:=0:w:=0:
> for y to nops(v[ii,jj]) do
> if member(a(0),v[ii,jj],’z1’) then
> zz1[y]:=z1;q:=q+1;
> v[ii,jj]:=subsop(z1=men,v[ii,jj]):
> end if:
> if member(a(1),v[ii,jj],’z2’) then
> zz2[y]:=z2;w:=w+1;
> v[ii,jj]:=subsop(z2=amine,v[ii,jj]):
> end if:
> od;
> zz1:=convert(zz1,list):zz2:=convert(zz2,list):
> for x to q do v[ii,jj]:=subsop(zz1[x]=a(0),v[ii,jj]):
> od:
> for x to w do v[ii,jj]:=subsop(zz2[x]=a(1),v[ii,jj]):
> od:
> #print(‘le cycle ‘,w[ii,jj],‘est passé au crible afin de trouver #le(‘,i,j,’);
> if q=0 then next; end if;
> if v=0 then next; end if;
> for y2 in zz2 do
> for y1 in zz1 do
> if y2=y1+1 then halt:=existe_déjà:
> break:
> end if:
> od;
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle zz1
> od;
> if member(nops(v[ii,jj]),zz1) then
> if member(1,zz2) then halt:=existe_déjà:
> #print(‘c’est possible au‘,v[ii,jj],‘pour le‘,[i,j]);
> break:
> end if:
> end if:
> if assigned(halt) then break: end if:#sort boucle numb

```


.6957598417, .8949589026e-2, .8949589026e-2, .8954307636e-2, .8954307636e-2, 0., 0., 0., 0.,
0., 0.);
> ln(H);

Bibliographie

- [1] C.Adams, The Knot Books(An elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots), 1994.C.
- [2] C. Berge, Graphe, Gauthier-Villars, 1987.
- [3] G. Burde et H. Zieschang, Knots, deGruyer studies in Mathematics 5, Walter de Gruyer, Berlin-New York, 1985.
- [4] J. Calais, éléments de Théorie des Groupes, Presses Universitaires de France, 1984.
- [5] M. Minoux et M. Gondran, Graphes et Algorithmes, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Eyrolles 1990.
- [6] N. B. Gilbert et T. porter, Knots and Surfaces, Oxford University Press, Oxford-New York-Tokyo, 1994.
- [7] B. I . Kurpita et K. Murasugi, A Study of Braids.
- [8] D. Lind et B. Marcus, An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding, Cambridge University Press.
- [9] C. Livingston, Knot Theory, The Mathematical Association of America, Volume 24.
- [10] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, Combinatorial Group Theory, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [11] D. Rolfsen, Knots and Links, Mathematics lecture, serie 7, Publish or Perish, Inc, Berkley, 1976.
- [12] D. S. Silver et S. G. Williams, Generalized n-coloring of links, Proceedings of the 1995 Conference in Knot Theory at the Banach Center Publications 42 (1998) 373-386.

- [13] D. S. Silver et S. G. Williams, Knot invariants from symbolic dynamical systems, Trans. Amer. Math. Soc, 351 (1999), 3243-3265.
- [14] D. S. Silver et S. G. Williams, Knots, Links and representation shifts, Proceedings of the 13th Annual Western Work Shop on Geometric Topology (1996), 36-45.