N° d'ordre : 34 / 2004 – M / MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

Université des Sciences et de Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **Magister**

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité: RECHERCHE OPERATIONNELLE

Par : **AICHE Rachid**

SUJET :

QUELQUES MODELISATIONS DU PROBLEME DE L'EMPLOI DU TEMPS

Soutenue publiquement le : 13 Décembre 2004, devant le jury composé de :

BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur	USTHB	Président
KHELLADI Abdelkader	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
BOUDHAR Mourad	Maître de Conférences	USTHB	Examinateur
CHERGUI Mohamed El-Amine	Chargé de cours	USTHB	Examinateur
MOULAI Mustapha	Maître de Conférences	USTHB	Examinateur

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à témoigner ma profonde reconnaissance à Monsieur Le Professeur Abdelkader KHELLADI, pour son suivi, ses orientations pertinentes, et ses précieux conseils.

Je remercie également Monsieur Le Professeur Abdelhafid BERRACHEDI pour son aide et qui me fait l'honneur de présider le jury.

Mes plus vifs remerciements vont aussi aux Messieurs Mourad BOUDHAR, Maître de conférences et Mohamed El-Amine CHERGUI, chargé de recherches, Mustapha MOULAI, Maître de conférences, chacun à sa manière, pour leur contribution à la réalisation de ce travail, et pour l'honneur qu'ils me font en participant au jury.

Enfin, je remercie tous mes collègues enseignants du département de recherche opérationnelle, plus particulièrement ceux qui ont participé de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Rachid AÏCHE

A la mémoire de mon Père

A ma mère

A mes frères et sœur

A Bahia , Sarah et Célia

A mon oncle Khelifa que je remercie sincèrement

A toute ma famille

Je dédie ce travail.

TABLE DES MATIERES

ANNEXES :

INTRODUCTION GENERALE

Le problème d'emploi du temps est un problème difficile dont la réalisation à la main peut mobiliser une personne pendant plusieurs jours de travail.

Ces difficultés ont induit l'idée d'assister par ordinateur l'élaboration des emplois du temps. Il est évident que le problème d'emploi du temps est d'une importance prouvée et partagée par tous les acteurs entrant en jeu (les enseignants, les étudiants, l'administration de la scolarité) puisqu'il s'agit de gérer le temps des différentes personnes et ceci d'une manière satisfaisante [*] pour chacune d'elle. Cette difficulté est d'autant plus aiguë que la grandeur de la taille des établissements où on se trouve confronté à des difficultés multiples :

- volume important d'informations ;
- critère(s) d'optimisation flou ;
- hautement combinatoire ;
- contraintes très diverses ;
- changements intempestifs, …

Toutes ces difficultés montrent la nécessité de définir les modèles mathématiques pour ces problèmes et de les résoudre. Cette approche constitue un des aspects les plus importants du travail.

A cet effet, notre étude est basée sur le résultat d'une étude [1] bibliographique, d'une analyse [2] et d'une synthèse [3] des données tirées d'une réalité et d'un contexte – l'USTHB – pour donner une signification concrète à certains concepts atténuant ainsi quelque peu son aspect théorique sans le négliger.

---

(1) survey
(2) sondage
(3) statistique des proportions
(*) fonction-objectif : satisfaction des enseignants et des étudiants.

L'analyse du problème posé dans ce mémoire relevant de la Recherche Opérationnelle nous conduit à des modèles essentiellement de la théorie des graphes et optimisation combinatoire. La résolution du problème posé nécessite des méthodes algorithmiques raffinées, en rapport avec l'évolution de l'informatique. L'expérience statistique nous sert à interpréter ses résultats par un modèle (1). C'est une représentation formelle (2) et réelle (3) de l'emploi du temps (qui "colle" aussi prés que possible à la réalité modélisée) en termes de Recherche Opérationnelle (théorie des graphes, combinatoire, …).

Dans le questionnaire, on a essayé de formuler un certain nombre d'hypothèses qui nous paraissent les plus importantes, et on peut toujours en rajouter d'autres qui rentrent dans le cadre du raffinement du modèle.

La recherche de la satisfaction globale des intervenants dans un emploi du temps (les enseignants, les étudiants), nous met en situation de la recherche d'un "optimum de pareto", en plus des faits négligés à cause de schématisation (CH. 1, Partie A, §A.1).

On essayera de faire usage de la programmation linéaire (en nombres entiers) dans une optique multicritère (4) et pas seulement dans une optique d'optimisation, ensuite il s'agit de rechercher le meilleurs" compromis"possible sur l'ensemble des vœux (CH.3). La procédure automatique d'optimisation est remplacée par un dialogue administrateur-ordinateur.

LEWIS H.R, APPLEBY J.S, BLACKE D.V, et NEWMAN E.A (1962) [4] sont les premiers à avoir établi des heuristiques pour résoudre quelques cas particuliers.

La première approche non-heuristique est due à GOTLIEB (1962) [37], sa formulation est tridimensionnelle. CSIMA (1965) a étudié le cas polynomial dans une thèse P.H.D [22].

En quelques mots, LAURIERE (1974) [43] décrit ce problème comme appartenant à tous ceux dont il faut "une affectation et un ordonnancement simultané". Ces problèmes appartiennent à une classe très générale de problèmes combinatoires appelée *CLASSE DES PROBLEMES D'EMPLOI DU TEMPS*.

---

(1) Modèle mathématique.
(2) Différents concepts de Recherche Opérationnelle.
(3) Contraintes et objectifs induits du contexte étudié.
(4) Diversité des intervenants.

EVEN S.A, ITA A, SHAMIR A (1975) [30] ont formellement prouvé que le problème d'emploi du temps est NP-complet (par réduction polynomiale au problème de satisfaisabilité 3-SAT, (CH.1, Partie B, §B.3).

C'est ce travail, à notre avis, qui a mis fin à l'approche de GOTLIEB pour l'étude non-heuristique du problème d'emploi du temps et a motivé l'intérêt pour l'étude par les méthodes heuristiques. Ce qui a suscité l'intérêt pour combiner l'approche algorithmique (5) et les heuristiques pour les évaluations et qui a abouti à l'approche par améliorations. On a utilisé la méthode de relaxation LAGRANGIENNE, les systèmes experts, et récemment les algorithmes génétiques.

On signalera une difficulté importante : chaque affectation augmente le nombre de contraintes (au sens §A.3-3 (iii) du CH.1, Partie A). Il y a interaction entre les conséquences de l'affectation et la suite des affectations. Ces interdépendances vont en s'amplifiant (phénomène de feed-back positif).

En outre, la difficulté du problème de l'emploi du temps est due à son caractère hautement combinatoire, mais non un problème de logique, cependant l'influence exercée sur les données, nous incite à recourir aux systèmes experts pour introduire une base de données, à notre avis, indispensable pour la résolution du problème.

On se situe dans une problématique de modélisation où l'aspect non quantitatif des paramètres rend le modèle peu rigoureux puisque l'aspect théorique l'emporte sur la réalité des préférences des intervenants (les enseignants par exemple). On va donc inscrire le modèle dans un processus d'améliorations étape par étape, en faisant des évaluations et améliorations successives.

Ce travail comporte quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente le problème : nous précisons les différents concepts (composants, périodes, disponibilités, séances) et le contexte d'application–USTHB-

(5) Méthode d'évaluation implicite.

Le problème consiste à affecter les enseignants aux enseignements ensuite s'occuper de l'affectation de ces enseignements aux locaux (*).

Bien qu'il ne faut pas perdre de vue que cette décomposition "mutile" un peu la réalité et donc les éléments constitués en agrégats doivent être rassemblés.

Au chapitre 2, on a traité les diverses formulations en termes de théorie des graphes (coloration des arêtes, flots avec coût minimum) et combinatoire (programmation linéaire en nombres entiers) et de différentes techniques utilisées qui nous permet de dégager les aspects intéressants et les difficultés propres à ce problème.

Le chapitre 3 est consacré à l'enquête statistique. On a utilisé le *questionnaire* comme support à l'enquête pour mettre en évidence les différents paramètres spécifiques à notre contexte.

Enfin, le chapitre 4 utilise les résultats du chapitre 2 et chapitre 3 pour élaborer le modèle et les méthodes de résolution.

Des méthodes plus particulières d'affectation sont développées pour résoudre de manière heuristique ce problème hautement combinatoire.

On propose donc, un modèle dont on met en exergue son aspect tridimensionnel tenant compte simultanément des emplois du temps des enseignants et celui des étudiants avec les contraintes de l'environnement qui influent incontestablement sur la solution.

Une bibliographie conclue ce travail.

(*) L'affectation des enseignements aux locaux : cette partie a fait l'objet d'une thèse [13].

CHAPITRE 1 : CONCEPTS ET CONTEXTE

Partie A : Présentation du problème.

Partie B : Formalisation du problème.

Partie C : Formulation tri-dimensionnelle.

INTRODUCTION :

L'étude du problème de l'emploi du temps a débuté depuis les années 60 (GOTLIEB, NEWMAN) et malgré ceci, ce problème reste irrésolu dans sa totalité. Toutes les tentatives de modélisations mathématiques ont échoué (voir les recherches effectuées entre 1962 inauguré par GOTLIEB jusqu'à 1975) [37].

A partir de 1975 avec la publication de l'article EVEN, ITA, SCHAMIR qui prouvèrent la NP- Complétude du problème, les limitations ont été introduites :

- l'une, la principale concerne le nombre de composant formant les tâches à ordonnancer dans le temps ;
- l'autre ne fera intervenir que certains types de contraintes.

EXEMPLE : La recherche d'un emploi du temps pour les enseignants ne fait intervenir que les enseignants et les enseignements (composants) et au niveau des contraintes, on se limite à celle d'intégrité et à celle évitant les chevauchements.

Partie A : PRESENTATION DU PROBLEME.

On se situe dans une problématique de modélisation, où il s'agit de gérer le temps des différentes personnes ou groupes de personnes (les enseignants, les étudiants).

De nombreux problèmes de planification sont concernés par l'arrangement d'événements, de résultats, sous réserve de conditions telles que certains événements peuvent avoir lieu simultanément ou non. C'est le cas, pour ce qui nous concerne, du problème de l'emploi du temps dans un établissement universitaire.

Beaucoup de problèmes concrets peuvent donner lieu à des formulations combinatoires équivalentes (cf. CH.2). Lorsqu'on considère le problème dans sa généralité, le problème fondamental sera désigné sous le nom de :

Problème d'emploi du temps noté (ET).

Nous devons donc introduire quelques concepts de base.

A.1 / LE PROBLEME FONDAMENTAL :

La formulation du problème fait intervenir trois composantes :

(i) Notion de composant :

Elle est définie par un ensemble composé d'enseignants M, de salles, de laboratoires, etc. Ce sont tous les éléments que l'on cherche à affecter et à ordonner.

(ii) Notion de périodes :

C'est l'ensemble H fini d' ″ heures ″ ou périodes de temps.

(iii) Notion de disponibilités :

Elles sont définies par un ensemble noté D et décrivant pour chaque composant, le sous-ensemble d'heures durant lesquelles, il est libre, disponible ou qualifié pour participer à une séance.

La donnée de composants, de périodes et de disponibilités déterminent la notion de *séance*. Chaque séance est décrite alors par une collection de composants compatibles ensemble avec le nombre d'heures exigées.

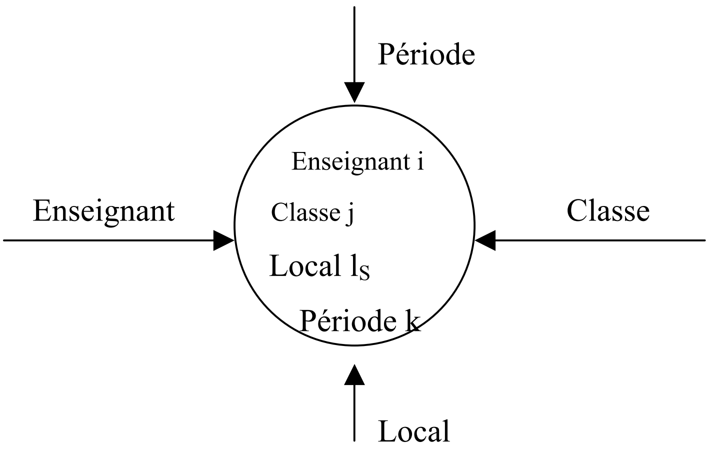


Fig.-1.1 Séance

A.2 / CONTRAINTES FONDAMENTALES :

L'affectation des enseignants aux enseignements suppose que les périodes sont disponibles à cette fin. Une période consiste en la donnée d'un local à un créneau horaire donné, d'un jour donné. Il faut donc estimer les capacités en périodes de l'infrastructure de l'établissement.

(1) contraintes " locaux " :

pour toute période, le nombre d'affectations enseignants-enseignements ne doit pas excéder le nombre de locaux disponibles.

(2) contraintes sur les enseignants :

l'enseignant ne peut assurer deux unités pédagogiques en une même période. De plus, chaque enseignant doit avoir sa charge horaire, c'est un volume horaire hebdomadaire requis réglementairement, devant être respecté et ne peut être dépasser qu'avec son consentement.

(3) contraintes sur les enseignements :

deux types de contraintes sont à considérer :

- deux unités pédagogiques ne doivent pas avoir le même enseignant à la même période ;
- deux unités pédagogiques ne doivent pas être affectées dans le même local à la même période. De plus, toutes les séances de chaque enseignement doivent être prises en charges par des enseignants.

A.3 / EXEMPLE DE PROBLEME : Application à l'USTHB.

A.3-1 / INTRODUCTION :

Pour décrire le problème d'emploi du temps, on considère que l'établissement universitaire est caractérisé par :

(1) Un ensemble d'enseignants :

$$M = \{ m_i , i = 1, \dots , n \} ;$$

(2) Un ensemble de classes (sections et groupes) :

$$C = \{ c_j , j = 1 , \dots , m \} ;$$

(3) Un ensemble U d'unité pédagogique (cours, TD, TP) :

$$U = \{ u_l , l = 1 , \dots , r \} ;$$

(4) Un ensemble L de locaux (Amphithéâtres, salles, laboratoires) ;

(5) Un ensemble d' " heures '' ou périodes H :

$$H = \{ h_k , k = 1 , \dots , t\} ;$$

A l'USTHB, l'ensemble H est caractérisé par :

(a) La semaine est supposée occuper seulement pendant p jours ($1 \leq p \leq 6$), du samedi au jeudi.

(b) L'horaire d'une journée comprend au maximum q périodes ou créneaux d'enseignement ($q \leq 6$).

(c) La période h_k ou simplement la période k est la position d'une séance d'enseignement parmi les $t = p.q$ périodes ouvrables de la semaine. Ainsi, une semaine comprend t intervalles (d'une durée de *une heure* et *trente minutes* – 1h30 -) à raison de q intervalles par jour (parmi p jours) ouvrable.

(d) Un ensemble de séances S qui doivent apparaîtrent durant la semaine. Chaque séance dure une " heure et trente minutes " ou une période et incluant une classe, un enseignant et une unité pédagogique.

A.3-2 / STRUCTURE DE L'UNIVERSITE ET DU SERVICE DE SCOLARITE :

L'université est divisée en six facultés et service général (bloc central), le service de la scolarité.

Au niveau de la faculté, on distingue plusieurs départements qui eux aussi sont subdivisés en plusieurs laboratoires.

Les enseignants sont subdivisés en plusieurs corps :

- Les professeurs,
- Les maîtres de conférences,
- Les maîtres-assistants et les maîtres-assistants chargés de cours,
- Les assistants, éventuellement contractuels ou vacataires.

Pour un bon suivi du personnel, il est nécessaire de différencier tous les corps.

A.3-3 / RESSOURCES :

(i) <u>Types de personnel</u> :

(a) Personnel stable : (l'enseignant recruté au sein de l'université)

Il est décrit par un ensemble de variables, qui exprime qu'à l'année T, on possède un nombre X_{TQ} d'enseignants possédant la qualification Q. Les variables X_{TQ} sont des nombres entiers. L'évolution du personnel est décrite à partir des probabilités d'acquisition d'une nouvelle qualification.

(b) Les absences à la demande : elles nous permettent de connaître les périodes où l'enseignant sera absent (congé de maternité, stages, détachements) ou quitter définitivement l'établissement (départ vers un autre établissement, départ à la retraite).

(ii) <u>Les enseignements</u> :

Tout enseignement est subdivisé en trois catégories :

- Cours,
- travaux dirigés,
- travaux pratiques.

L'affectation des unités pédagogiques aux différentes structures :

1) Les enseignements qui sont uniquement des disponibilités de la faculté :

(exemple :Analyse I, Algèbre I, Chimie, Physique, …).

2) Les enseignements qui sont des disponibilités du département :
(exemple : DES (RO 1, ANA 1, PS 1, …)).

(iii) Volumes horaires :

Chaque enseignant est caractérisé par son volume horaire hebdomadaire. Ce volume horaire est la durée réglementaire d'enseignement qu'un enseignant doit exercer effectivement.

Chaque enseignement est aussi caractérisé par son volume horaire hebdomadaire subdivisé en trois parties :

- volume horaire cours,
- volume horaire travaux dirigés,
- volume horaire travaux pratiques.

Une première opération consiste à calculer le nombre d'enseignants disponible dans une faculté quelconque et les enseignements s'y rattachant. Après cette opération, on aura l'information sur le volume horaire global des enseignants (VEG) d'une faculté d'une part et le volume horaire global des enseignements (VPG) : volume horaire pédagogique global d'autre part.

REMARQUE :

Les volumes horaires globaux (VEG) et (VPG) sont subdivisés en trois parties :

- volume horaire global des enseignants (respectivement enseignements) « cours », « travaux dirigés » et « travaux pratiques ».
- Deux éventualités se présentent :

a / soit les disponibilités sont satisfaites, alors la faculté peut gérer l'ensemble des enseignements,
b / soit (VEG) est inférieur à (VPG), alors il y a un déficit, on fera appel aux spécifications (voir § A.3.3, (i)) : Vacations, enseignants associés.

PARTIE B : FORMALISATION DU PROBLEME

INTRODUCTION :

Nous avons considéré que le problème d'emploi du temps (E T) peut se diviser en deux parties car les modélisations mathématiques seules sont insuffisantes (cf. §B.3) :
(a) une première partie notée (E T_E) consiste à affecter les enseignants aux enseignements ;
(b) une deuxième partie notée (E T_L) se propose d'affecter ces enseignements aux locaux.

Le problème d'affectation des enseignants aux enseignements est donc considéré comme une partie du problème général de l'emploi du temps (E T).

Dans ce travail, on peut seulement présenter le problème fondamental, car en ce qui concerne les contraintes, il y a une diversité de contraintes spécifiques dépendant fortement du type d'établissement considéré en entité administrative (Faculté, département, …).

Ainsi, pour les seuls paramètres de périodicité et d'organisation pédagogique des enseignements, on rencontre :

- des systèmes annuels,
- des systèmes semestriels,
- des systèmes modulaires, etc. … qui peuvent exister ensemble.

REMARQUE :

Dans un système annuel, on peut identifier les enseignements aux classes (sections ou groupes selon le cas) i.e. $U \equiv C$.

Dans le système actuel, système annuel, il y a un partitionnement des enseignements en années tel que chaque sous-ensemble d'enseignements par année est indépendant des autres sous- ensembles (le problème de chevauchement des enseignements d'une année sur une autre est réglé).

L'année d'un cursus scolaire est elle-même décomposée en sections de diverses filières. La section est formée d'un certain nombre de groupes (4 à 6), deux cas sont à distinguer :

- les groupes formant la section doivent avoir lieu simultanément ;
- les groupes peuvent avoir lieu, chacun seul ou par paire etc.

Ceci engendre deux sortes de séances à considérer :

- la séance de tous les groupes (la section) qui est le " cours " ;
- la séance d'un groupe particulier qui soit " travaux dirigés " ou " travaux pratiques ".

En conclusion, on peut définir la séance comme étant la rencontre d'une classe (section ou groupe), d'un enseignant et d'une période.

B.1 / DEFINITION DU PROBLEME (E T_I) :

Le problème d'emploi du temps formulé dans sa version primitive de GOTLIEB (E T_I):

B.1-1 / DONNEES DU PROBLEME :

On considère les données suivantes :

(i) les composants M et C désignant respectivement l'ensemble des enseignants et l'ensemble des classes ;

(ii) Un ensemble H fini ;

(iii) Disponibilités pour les composants :

on a l'ensemble $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ où $M_i \subseteq H$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$; M_i représente l'ensemble des périodes où l'enseignant m_i peut enseigner.

L'ensemble $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ où $C_j \subseteq H$, $j = 1, 2,, m$; C_j représente l'ensemble des périodes où la classe c_j peut recevoir un enseignement.

(iv) Une matrice R, $R \in M_{(n\ x\ n)}(IN)$, $R = (r_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, r_{ij} est le nombre de période où l'enseignant m_i doit rencontrer la classe c_j .

<u>REMARQUE</u> :

Dans la formulation de EVEN, [30], on définit les disponibilités pour les enseignants et les enseignements puis on les lie par la matrice $R = (r_{ij})$.

B.1-2 / FORMULATION DU PROBLEME :

La formulation de base est faite en un programme linéaire en nombres entiers (E T / PLE). Cette approche nous permet de définir les différentes équations et leurs variables.

En introduisant une fonction-objectif, on définit le problème optimal (E T / PLE,C).

Le problème consiste à déterminer, si elle existe, une application de rencontre :

$$M \times C \times H \longrightarrow \left] 0,1 \right[$$
$$(m_i , c_j , k) \longrightarrow x_{i\,j\,k} \quad \text{où:}$$

$x_{i\,j\,k} = 1$ si et seulement si l'enseignant m_i rencontre la classe c_j durant la période h_k ou simplement la période k, autrement dit :

(1) $x_{i\,j\,k} = 1 \Leftrightarrow k \in M_i \cap C_j$ satisfaisant les contraintes fondamentales (CH.2, Introduction).

B.1-3 / FORMULATION DE LA SOLUTION :

On se propose de partitionner l'ensemble S (ensemble des séances) (cf. P.HALL [38])

L'ensemble des séances d'une période est défini par, c'est l'emploi du temps d'une période donnée h_k (ou période k).

Un emploi du temps consiste donc à l'assignation de toute séance de S à une période de la semaine. En d'autres termes, c'est une partition de S en t sous-ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_t$ où S_k est le sous-ensemble de toutes les séances apparaissant à la période k. Cette affectation satisfait aux contraintes énoncées au § A.2, Chapitre1. On verra dans le prochain paragraphe (CH.1, PARTIE C) une description illustrée en 3D (formulation tri-dimensionnelle).

La fonction-objectif sera définie en fonction des vœux émis par les enseignants (CH.3)

<u>Conclusion</u> :

On présentera d'abord le problème de la résolution d'emploi du temps en termes mathématiques, puis une revue des différentes techniques associées.

Dans le prochain chapitre, on donnera les représentations du problème de l'emploi du temps les plus usités. Ce partitionnement de S donnera plusieurs modélisations : en théorie des graphes, par exemple, on trouve les modélisations en graphe simple, multigraphe et l'hypergraphe. Les résolutions correspondant donc à ce partitionnement est équivalent à la recherche de certains nombres caractéristiques dans ces graphes : nombre chromatique, indice chromatique, nombre de stabilité.

B.2 / DEFINITIONS :

<u>Définition 1</u> : Un enseignant est dit p-enseignant si $|M_i| = p$.

Un enseignant est dit saturé si $|M_i| = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$.

<u>Définition 2</u> : Le problème d'emploi du temps classique (E T_C) est le problème (E T_I) avec la restriction suivante :

$r_{ij} \in [0,1[$ pour tout i = 1, 2, ...,n et j = 1, 2, …,m.

<u>Définition 3</u> : Le problème d'emploi du temps réduit (E T_R) est le problème (E T_I) avec les restrictions suivantes :

(i) $|H| = 3$;

(ii) $C_j = H$ pour tout j = 1, 2, …,m (les classes sont toujours disponibles) ;

(iii) Tout enseignant saturé est soit 2-enseignant ou 3-enseignant.

(iv) $r_{ij} \in [0,1[$ pour tout i = 1, 2, …,n et j = 1, 2, …,m ;

B.3 / COMPLEXITE DU PROBLEME DE L'EMPLOI DU TEMPS :

Avant d'exposer les résultats connus à ce jour, nous rappelons brièvement les différentes classes d'algorithmes déterminées grâce à des méthodes mesurant leur complexité (travaux de S.A COOK [17] et R.M KARP [40]). Nous exposerons, notamment

une synthèse de l'article d'EVEN, ITAI et SHAMIR (1975) [30]. Le problème d'emploi du temps, formulé dans sa version primitive de GOTLIEB et sa forme classique (E T_I et E T_C) est NP- COMPLET.

Le problème (E T) qu'on discutera est un modèle mathématique d'affectation (des enseignants). C'est un modèle "naïf" puisque, on ignore plusieurs facteurs qui définissent les règles en pratiques. On montrera donc avec les restrictions que le problème reste NP-COMPLET.

Les problèmes (E T) et (E T_R) sont dans la classe NP. On montre que (E T_R) est NP- COMPLET. Dans ce cas, il est évident que (E T) est NP- COMPLET.

La complexité des problèmes ne peut répondre dans l'absolu l'inexistence d'un algorithme polynomiale d'une manière certaine, mais elle procède à la classification des problèmes telle que : "si on connaît un algorithme polynomial pour un problème d'une certaine classe, alors on connaîtra un algorithme polynomial pour tous les problèmes de cette classe". On distingue deux aspects pour la complexité algorithmique :

- complexité temporelle ;
- complexité spatiale, liée à l'évaluation du temps"d'exécution, et la place mémoire utilisé par ce dernier".

B.3-1 / DEFINITIONS :

Définition 1 : Algorithme polynomial

On dit qu'un Algorithme est polynomial si le temps d'exécution est en O(p(n)) où p est un polynôme et n est la longueur d'entrée d'une instance du problème.

Un Algorithme est un ensemble d'instructions applicables de la même façon quelles que soient les données du problème P.

Définition 2 : Problème de décision.

Un problème de décision est un problème dont l'ensemble des réponses se trouve dans $\{$oui, non$\}$.

Exemple : "Problème de recherche d'un stable de cardinal $k \in$ IN"

Donnée : G = (V,E) un graphe, k un entier.

Question : existe-t-il un stable de cardinal k ?

Soit r la réponse à la question, $r \in \{$oui, non$\}$.

Un problème de décision n'est pas un problème d'optimisation mais, à tout problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de décision

Définition 3 : La classe P.

Un problème $D \in P$ s'il existe un algorithme polynomial pour sa résolution. P est appelé classe des problèmes polynomiaux..

Définition 4 : La classe NP.

Un problème de décision $D \in NP$ si et seulement si on peut vérifier qu'une donnée est à réponse positive en temps polynomial.

Les Algorithmes résolvant les problèmes de la classe NP sont dits Algorithmes non déterministes.

Définition 5 : La classe NP- COMPLET.

Soit D un problème de décision. On dira que D est un problème NP-COMPLET si :

(i) $D \in NP$,

(ii) $\forall q \in NP$, q se transforme polynomialement en D; q étant un problème de décision.

On notera alors : $q \propto D$;

Considérons maintenant le problème particulier suivant appelé Problème central ou satisfaisabilité, noté SAT.

Définition 6 : Problème de satisfaisabilité.

On appelle problème de "satisfaisabilité" le problème de réalisation d'une expression logique :

Donnée : $S = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ où c_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) est une clause,

$C_i = (a_1^i \vee a_2^i \vee \ldots \vee a_k^i)$ avec $a_j^i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_p, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_p}\}$

x_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) est une variable booléenne et $\overline{x_i}$ sa négation.

Question : $S = 1$ admet-elle une solution ?

On définit les problèmes issus de SAT :

- 1-SAT : c'est le problème SAT avec $\forall i = 1, \ldots, m$, $|c_i| = 1$.

  Il est clair que l'algorithme résolvant ce problème appartient à la classe P.
- 2-SAT : c'est le problème SAT avec $\forall i = 1, \ldots, m$, $|c_i| \leq 2$ (2-SAT $\in$ P).
- 3-SAT : c'est le problème SAT avec $\forall i = 1, \ldots, m$, $|c_i| \leq 3$.

B.3-2 / THEOREME :

Théorème 1 : (théorème de COOK (1970)) [17]

NP = P si et seulement si SAT $\in$ P.

Théorème 2 : (théorème de COOK (1972))

Soit p un problème de la classe NP, alors p α SAT.

On montre par le théorème suivant que, quelle que soit une équation booléenne, elle se réduit à 3 variables.

Théorème 3 :

SAT α 3-SAT.

Le problème SAT se transforme polynomialement au problème 3-SAT.

D'après le deuxième théorème de COOK on a :

Corollaire : (S.A COOK)

3-SAT est un problème NP-COMPLET.

Théorème 4 : [30]

Le problème de satisfaisabilité 3-SAT se réduit polynomialement au problème (E T_R) :

3-SAT α (E T_R).

PARTIE C : FORMULATION TRI-DIMENSIONNELLE

Parmi toutes les formulations du problème fondamental, on a retenu l'approche tri-dimensionnelle de GOTLIEB. Sa structure clarifie la complexité du problème et à même de nous aider à saisir dans sa globalité la compréhension du problème.

C.1 / APPROCHE DE GOTLIEB :

La première attaque non-heuristique du problème de l'emploi du temps (E T) est caractérisée par un processus de réduction du tableau de disponibilité, présenté par GOTLIEB (Munich, IFIP Congress en 1962) [37].

L'idée de l'algorithme de GOTLIEB est de détecter certaines affectations particulières (i.e. celles contenant dans tout emploi du temps une affectation en fig.-1.3) et certaines pseudo-disponibilités (i.e. affectations non-contenues dans aucun emploi du temps) par l'examen de certains sous-problèmes de complexité moindre (problèmes planaires).

La fig.-1.3 suivante montre un exemple d'un tel problème avec 7 composants, 9 rencontres, 3 heures (ou périodes) et :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $\{m_1, m_2, m_3\}$ l'ensemble des enseignants,

et $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ l'ensemble des enseignements.

L'affectation ferait augmenter le nombre de périodes nécessaire d'une unité si c_1 n'est pas présent dans chaque période.

Une illustration est faite pour cette affectation, il suffit de débuter en période k_1 par les affectations en "traits épais" (Fig.-1.3).

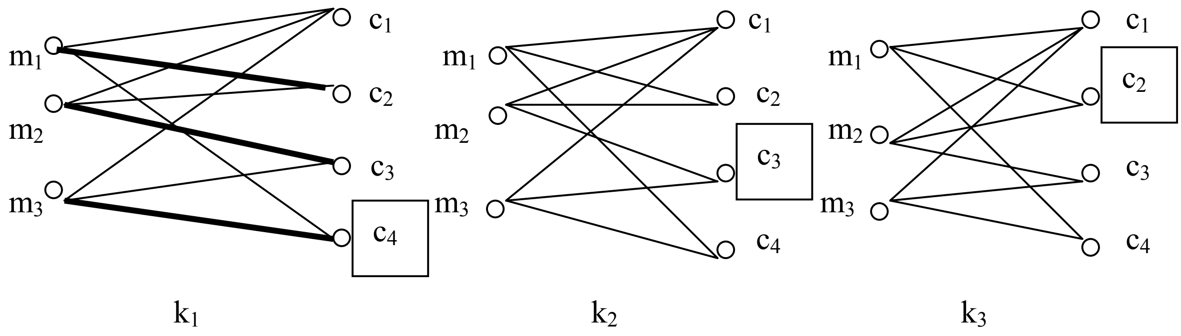


fig.-1.3 – Problème d'emploi du temps avec solution,
k_1, k_2, k_3 désignent les trois périodes.

REMARQUE :

En concentrant l'étude sur un seul composant ou une seule période, on obtiendra une section à deux dimensions planaires laquelle deviendra un problème d'affectation.

A l'origine GOTLIEB pense que son processus de réduction est suffisamment efficace pour éliminer toute pseudo-disponibilité, cependant il s'avère qu'il n'est pas vérifié en général : un contre-exemple a été fourni par LIONS J. (voir [47]).

C.2 / FORMULATION :

C.2-1 / DEFINITIONS :

Définition 1 : Une matrice tri-dimensionnelle ou 3-matrice est une matrice $A=(a_{ijk})$ en 0-1 qui consiste en la donnée d'une structure à 3 dimensions formée de t matrices $A_k \in M(n,n)$ en 0-1.

Définition 2 : On définit l'union de deux 3-matrices en 0-1, $A = (a_{ijk})$ et $B = (b_{ijk})$ de même dimension, la 3-matrice en 0-1 suivante :

$$A \cup B = (a_{ijk} + b_{ijk} - a_{ijk}.\, b_{ijk}).$$

Définition 3 : On définit l'intersection de A et B, deux 3-matrices en 0-1 par :

$$A \cap B = (a_{ijk}.\, b_{ijk}).$$

On définit ces concepts de façon similaire pour les matrices en 0-1 et vecteurs de dimension compatible.

Définition 4 : Une 3-matrice en 0-1 (ou matrice ou vecteur) X est dite contenue dans une 3-matrice en 0-1 (ou matrice ou vecteur) Y de même dimension notée : $X \subset Y$ si : $X \cap Y = X$.

Définition 5 : Le module $\|A\|$ d'une 3-matrice $A = (a_{ijk})$ est défini par :

$$\|A\| = \sum_{i,\,j,\,k} |a_{ijk}|.$$

C.2-2 / FORMULATION ET METHODE DE RESOLUTIO N :

C.2-2.1 / FORMULATION :

On suppose qu'une matrice $R = (r_{ij})_{n \times n}$ est donnée où les lignes et les colonnes ont toutes la somme égale à t (Problème (E T)). On peut former une matrice tri-dimensionnelle initiale en 0-1 de disponibilités $A^0 = (a^0_{ijk})$ pour le problème d'emploi du temps (E T) de la manière suivante :

$$a^0_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{si } r_{ij} = 0 \end{cases} ;$$

A^0 matrice tri-dimensionnelle ou 3-matrice est de taille t, c'est-à-dire formée de t matrices $A^0_k(n x n)$ en 0-1 où les éléments non nuls correspondent à ceux de R ($r_{ij} \neq 0$) .

Conséquences :

1/ Toute 3-matrice $A = (a_{ijk}) \neq 0$ telle que $A \subset A^0$ est appelée une 3-matrice de disponibilités pour le problème d'emploi du temps (E T).

2/ Une section planaire d'une 3-matrice de disponibilité $A = (a_{ijk})$ est définie comme matrice 0-1 obtenue en fixant l'un des trois indices i, j ou k.

3/ Une ligne de la 3-matrice A est définie comme tout vecteur 0-1 obtenu en fixant deux des trois indices i, j, ou k (fig.-1.4).

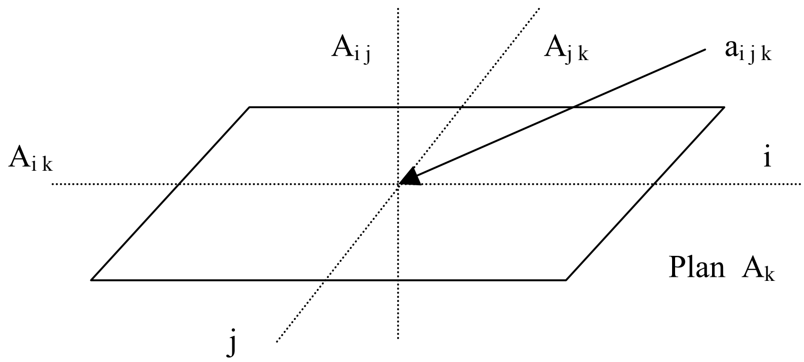


Fig.-1.4

C.2-2.2 / DESCRIPTION DE LA METHODE :

Chaque plan d'une 3-matrice de disponibilité A conduit au problème planaire suivant : Existe-t-il un ensemble de disponibilités contenues dans le plan où la somme de la 3-matrice sur toute ligne est égale aux contraintes pour cette ligne dans la matrice R ?

<u>Par exemple</u> :

Pour $A_{i_0} = (\alpha_{i_0 j k})$, existe-t-il $P_{i_0} = (\beta_{i_0 j k}) \subset A_{i_0}$ tel que :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{i_0 j k} = 1 & k = 1, 2, \ldots, t \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{t} \beta_{i_0 j k} = r_{i_0 j} & j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad ?$$

Un tel plan, s'il existe sera appelé une solution planaire.

Soit $\bar{J} = P(1, 2, \ldots, t)$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, t\}$. On dira que la 3-matrice de disponibilités A satisfait aux conditions de P. HALL (conditions planaires) si :

(i) $\forall i$ fixé, $\left\| \bigcup_{j \in J} A_{ij} \right\| \geq \sum_{j \in J} r_{ij} \qquad \forall J \in \bar{J}$;

(ii) $\forall j$ fixé, $\left\| \bigcup_{i \in I} A_{ij} \right\| \geq \sum_{i \in I} r_{ij} \qquad \forall I \in \bar{J}$;

(iii) $\forall k$ fixé, $\left\| \bigcup_{j \in J} A_{jk} \right\| \geq \sum_{j \in J} 1 \qquad \forall J \in \bar{J}$;

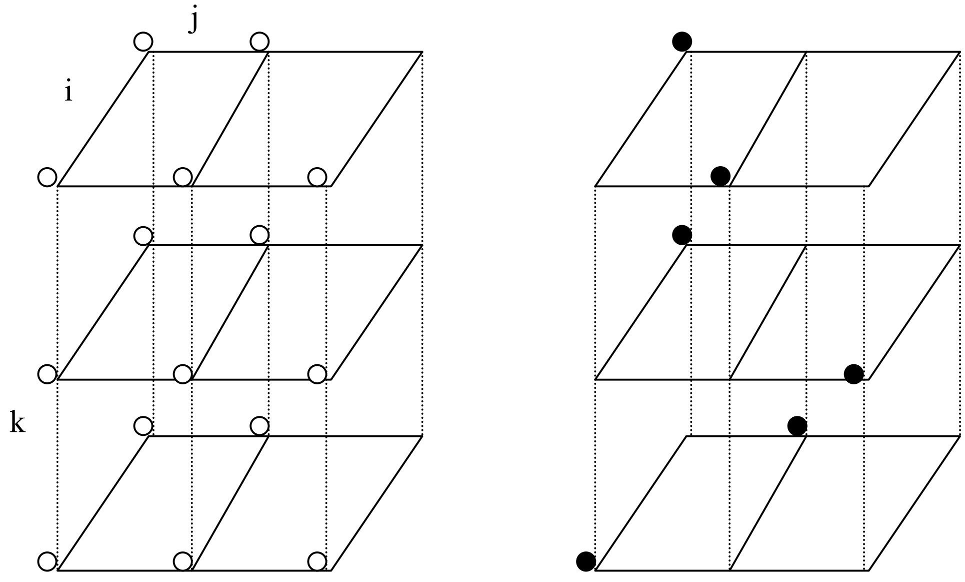
Une disponibilité $\alpha_{i\,j\,k}$ d'une 3-matrice de disponibilité arbitraire A sera dite affectée s'il n'y a aucune autre disponibilité dans la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne du $k^{ème}$ plan horizontal A_k ($\alpha_{i\,j\,k} = 1$ dans la ligne $A_{i\,j}$).

Une solution de (F3D) est une 3-matrice de disponibilité $S = (\sigma_{i\,j\,k})$, c'est un bloc de t matrices de permutations S_k , tel que l'égalité matricielle suivante soit vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{t} S_k = R.$$

Exemple :

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$



○ Disponibilités ● Représente 1

Fig.- 1.5

Les matrices solutions sont : $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

Chaque matrice S_k représente un emploi du temps pour une période spécifique k et la restriction à au plus un unique 1 dans chaque ligne et colonne fait état qu'au plus un enseignant et classe peuvent se rencontrer en une seule période (la création d'enseignants et classes fictifs concèdent la relaxation de cette restriction en pratique).

CHAPITRE 2 : MODELISATIONS MATHEMATIQUES.

PARTIE A : Représentation en graphe

PARTIE B : Formulation en flot (Multiflot entier).

PARTIE C : Techniques de résolution.

INTRODUCTION :

Dans notre formulation, le problème d'emploi du temps (E T) sera défini comme suit :

On considère les données suivantes (CH.1, § A.3) :

(i) $M = \{ m_i, i = 1, 2, ..., n \}$ l'ensemble des enseignants ;

(ii) $C = \{ c_j, j = 1, 2, ..., m \}$ l'ensemble des classes ou unités pédagogiques représentant l'ensemble des enseignements suivis par un même groupe d'étudiants ;

(iii) $H = \{ h_k, k = 1, 2, ..., t \}$ l'ensemble des périodes ou "créneaux horaires" hebdomadaire ;

(iv) $D = V_M \cup V_C$ l'ensemble des disponibilités avec :

$V_M = \{ M_1, M_2, ..., M_n \}$ où $M_i \subseteq H$, M_i représente l'ensemble des périodes libres de l'enseignant m_i ;

$V_C = \{ C_1, C_2, ..., C_m \}$ où $C_j \subseteq H$, C_j représente l'emploi du temps des enseignements de la classe c_j (cf. CH.1, §B.1-1).

FORMULATION DU PROBLEME :

Le problème d'emploi du temps (E T) consiste à trouver, si elle existe, une application de rencontre :

$$f : M \times C \times H \longrightarrow \{0,1\}$$

$$(m_i, c_j, h_k) \longrightarrow x_{ijk} \quad \text{où,}$$

$x_{ijk} = 1$ si et seulement si m_i rencontre la classe c_j durant la période h_k ou simplement la période k, autrement dit :

$x_{ijk} = 1 \Leftrightarrow k \in M_i \cap C_j$ satisfaisant les contraintes fondamentales.

CONTRAINTES FONDAMENTALES OU D'INTEGRITES:

Les contraintes fondamentales sont les suivantes (CH.1, §A.2) :

(i) A une période k, si un enseignant m_i est disponible, il ne peut enseigner qu'à une seule classe ou ne pas enseigner :

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} \leq 1 \text{ , pour tout } i = 1, 2, \ldots, n \text{ ; } k = 1, 2, \ldots, t.$$

(ii) A une période k, la classe c_j ne peut avoir qu'un enseignant :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} \leq 1 \text{ , pour tout } j = 1, 2, \ldots, m \text{ ; } k = 1,2, \ldots, t \text{ ;}$$

et à une période k donnée, un local ne peut-être utilisé que par un seul enseignant et une classe, on a donc ?

(iii) A une période k donnée, le nombre d'affectations enseignants-enseignements ne doit pas dépasser le nombre de locaux disponibles, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in C^S} x_{ijk} \leq l_S \text{ , pour tout } k = 1, 2, \ldots, t;$$

Notations :

l_S :désigne le nombre de locaux disponibles de types S, S = 1, 2, 3.

C^S : les unités pédagogiques de types S, S = 1, 2, 3.

Type1 : les cours ou les locaux correspondants aux cours (Amphithéâtres) ;

Type2 : les T.D ou les locaux correspondants aux T.D (Salles);

Type3 : les T.P ou les locaux correspondants aux T.P (Laboratoires);

(iv) Pour tout enseignant m_i, son volume horaire hebdomadaire est réglementé :

$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{t} x_{ijk} \leq \left| M_i^S \right|$, où $\left| M_i^S \right|$ est le volume horaire hebdomadaire de l'enseignant m_i, de type S, S = 1, 2, 3.

(v) Enfin, on se donne une matrice $R = (r_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, où r_{ij} désigne le nombre de rencontres entre l'enseignant m_i et la classe c_j, on doit avoir :

$$\sum_{k=1}^{t} x_{ijk} = r_{ij} \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, m \text{ et } j = 1, 2, \ldots, n \ ;$$

<u>Remarques</u> :

Pour les contraintes (iv) et (v), on doit avoir :

$\forall c_j \in C \ (1 \le j \le n)$, $\exists m_i \in M \ (1 \le i \le m)$ tel que le volume horaire de l'enseignant m_i est supérieur au volume horaire de la classe c_j ($|M_i| \ge |C_j|$). En d'autres termes : il y a saturation en volume horaire de la classe c_j.

Il existe d'autres contraintes, exemple l'utilisation des locaux : une classe de physique ou chimie, …, ne peut pas avoir lieu, en principe, dans un local non équipé de matériels nécessaire aux manipulations. Ce type de contraintes n'est pas inclus dans la formulation retenue.

Cette formulation est un programme linéaire en nombres entiers (E T /PLE).

$$|S_k| \le l_S \ , \quad 1 \le k \le t \ , \ \text{type } S = 1,2,3.$$

$$\left| \bigcap_{k=1}^{t} \Gamma^{-}_{C_j}(S_k) \right| \le |M_i| \ , \quad 1 \le i \le n \ , \ 1 \le j \le m.$$

PARTIE A : REPRESENTATION EN GRAHE

A.1 / INTRODUCTION :

Les formulations du problème d'emploi du temps les plus usitées se basent sur la théorie des graphes. On distingue plusieurs modélisations (variétés de graphes) :

- graphe simple,
- multigraphe ,
- hypergraphe.

Les résolutions associées à ces modèles sont alors la recherche de certains nombres caractéristiques dans ces graphes :

- nombre chromatique (pour les stables),
- nombre de stabilité,
- indice chromatique (pour les couplages).

Un graphe G est la donnée d'un couple d'ensembles finis V dont les éléments sont appelés sommets avec une famille E d'éléments du produit cartésien VxV. Chaque paire e=(u,v) de points dans E est une arête de G. Elle peut apparaître plusieurs fois dans la famille E mais ne peut pas apparaître plus de p fois si le graphe est un p-graphe.

Un ensemble complet d'invariants défini un graphe modulo l'isomorphisme.

Il est clair que l'objectif commun est l'obtention d'une partition de l'ensemble des classes en un nombre minimum d'ensembles stables ou couplages. Les couleurs (ou intervalles de temps) seront des attributs de chaque élément.

A.2 / GRAPHE SIMPLE :

Un système de parties est un couple S = (X ; E_i , $i \in I$) où X est un ensemble fini (ensemble des sommets de S) et où (E_i , $i \in I$) est une famille finie de parties de X (famille des arêtes de S). S sera dit un graphe si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad |E_i| = 2, \\ E_i = E_j \Rightarrow i = j . \end{cases}$$

Conclusion : Un graphe G est défini par l'ensemble V de ses sommets et par l'ensemble E de ses arêtes : G = (V, E).

L'adjectif simple signifie que le graphe vérifie les deux conditions :

1°) il n'a pas de boucles ;

2°) entre deux sommets, il n'y a jamais plus d'un arc pour les relier. La famille E devient un sous-ensemble de l'ensemble $P_2(V)$ où $P_2(V)$ est l'ensemble des paires d'éléments de V.

A.3 / MULTIGRAPHE :

Un graphe qui n'est pas simple est dit multiple ou multigraphe. La définition d'un multigraphe fini est la donnée de deux ensembles finis V, E et d'une application *f*

$$f : E \longrightarrow P_2(V)$$

où $P_2(V)$ l'ensemble des paires d'éléments de V. On le note G = (V,E), plusieurs éléments de E sont donc représentés par une paire $\{u,v\}$ avec $u,v \in V$ (arêtes parallèles).

Le degré d'un sommet x est noté $d_G(x)$, et $m_G(x,y)$ dénote le nombre d'arêtes de G ayant x et y comme extrémité appelé multiplicité d'une paire x, y.

Soit G un multigraphe sans boucles et de multiplicité $p \geq 1$. On pose :

$$m_G(x) = \max_{y} m_G(x,y) \qquad ; \qquad p = \mu(G) = \max_{x,y} m_G(x,y).$$

A.4 / COLORATION DE GRAPHE :

Soient G un graphe sans boucles, une coloration est une fonction

$$\psi : S \longrightarrow IN$$

où S est un sous-ensemble de V ou de E. Deux éléments adjacents ou incidents de S n'ont pas la même couleur.

On utilise les termes de coloration de sommets, coloration d'arêtes si S = V, S = E respectivement. Les symboles χ (G), χ' (G) dénotent le nombre chromatique, et l'indice chromatique respectivement ; C'est le plus petit entier q ayant la propriété suivante :

il est possible avec q couleurs de colorier les arêtes (resp. les sommets) de G de sorte que deux arêtes (resp. deux sommets distincts) adjacent(e)s ne soient pas de la même couleur.

Remarque : si $S = V \cup E$, le symbole $\chi''(G)$ dénote la coloration totale.

Une *coloration* des arêtes est une partition de l'ensemble des arêtes en classes qui sont des couplages.

L'indice chromatique $\chi'(G)$ est le nombre chromatique du graphe L(G) (Line-graphe).

Soit G un graphe avec $\chi(G) \leq k$ qui est k-coloriable, alors une k-coloration des sommets est une partition $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ de l'ensemble des sommets en k ensembles stables (deux sommets distincts de S ne sont pas adjacents, il représente les sommets de la même couleur).

<u>Exemple</u> 1: Construire un emploi du temps des examens.

Soit un ensemble $\{m_1, m_2\}$ d'enseignants et un ensemble $\{c_1, c_2, c_3\}$ de classes.

Les contraintes d'intégrités sont :

- un enseignant ne peut être affecté qu'à un seul enseignement à la fois,
- un enseignement ne peut avoir qu'à un enseignant à un temps déterminé.

La matrice de rencontres R est définie par :

$$R = (r_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Une solution est :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

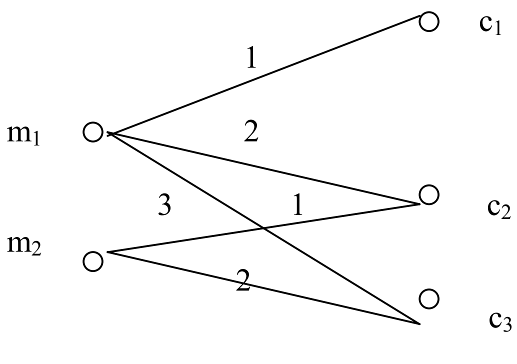


Fig.-2.1- Graphe simple.

<u>Résolution</u> :

Pour la résolution, on cherche l'indice chromatique.

Soit $\Delta(G)$ le degré maximum du graphe G, alors $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Pour le graphe simple, le théorème de VIZING donne : $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Théorème : [10] Soit G un graphe simple de degré Δ. Si G ne possède pas de cycle de sommets de degré Δ, alors $\chi'(G) = \Delta$.

Exemple 2:

$$R = (r_{ij})_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ } (m_1, c_1) \text{ doivent se rencontrer deux fois.}$$

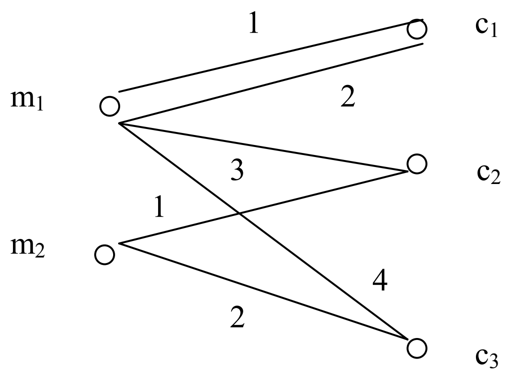


Fig.-2.2- Multigraphe.

Une solution est :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résolution :

Pour la résolution, on cherche l'indice chromatique.

Soit la matrice de rencontres $R = (r_{ij})$. On considère un multigraphe biparti G avec sommets $m_1, m_2, \ldots, m_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dans lequel chaque charge horaire (m_i, c_j, r_{ij}) est représentée par r_{ij} arêtes parallèles joignant m_i et c_j (Fig.-2.2).

Soit α_i le nombre total de rencontres renfermant l'enseignant m_i et,

β_j le nombre de rencontres renfermant la classe c_j. La contrainte est qu'ils ne soient pas renfermés dans plus de t rencontres, i.e :

$$\begin{cases} \alpha_i \leq t & i = 1, 2, \ldots, m; \\ \beta_j \leq t & j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases}$$

Il apparaît donc que α_i et β_j sont les degrés respectivement des sommets m_i et c_j.

Une description illustrée de ce problème peut-être donnée par une famille de graphes (R peut-être vue comme matrice d'incidence du graphe biparti en y correspondant une matrice booléenne $B = (b_{i\,j})$ qu'on peut appeler matrice caractéristique définie par :

$$b_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{i\,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } r_{i\,j} = 0 \end{cases}.$$

Un sous-ensemble de rencontres pouvant apparaître simultanément (période k donnée) est un graphe G_k dessiné avec $r_{i\,j}$ arêtes et représenté par un couplage dans G.

Un emploi du temps (E T) donc, consiste en le partitionnement des arêtes de G en t couplages $S_1, S_2, \ldots, S_t$ (la détermination de ces couplages est un problème de flot, cf. ch2, §B.1-1).

Soit $\Delta(G)$ le degré maximum du graphe G et de multiplicité maximum $\mu(G)$, alors :

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + \mu(G) + 1$$

<u>Théorème</u> : (Vizing, 1964)

Si G est un multigraphe sans boucles, de multiplicité maximum $\mu(G)$, de degré maximum Δ, on a :

$$\chi'(G) \leq \Delta + \mu(G)$$

<u>Théorème</u> : [10] Soit G un multigraphe de degré maximum $\Delta \leq D$ et de multiplicité $p \leq t$. Si l'ensemble

$$S = \{ x \,/\, x \in V(G) \,;\, d_G(x) = D \,;\, m_G(x) = t \}$$

est un stable ou vide, alors $\chi'(G) = D + t - 1$

Il est clair que si $D = \Delta + 1$, on obtient le théorème de vizing classique, et avec $D = \Delta$ le théorème de fournier.

A.4-1 / COUPLAGE :

Etant donné un graphe G = (V,E), on appelle *couplage* un ensemble C_0 d'arêtes tel que deux quelconques des arêtes de C_0 sont non-adjacentes. On dit qu'un sommet u est saturé par un couplage C_0 s'il existe une arête de C_0 attachée à u ;

Un couplage qui sature tous les sommets du graphe est appelé un *couplage parfait* ; Un couplage parfait est évidemment maximum.

Théorème (BERGE 1957) : [8]

Un couplage C_0 est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne alternée reliant un point insaturé à un autre point insaturé.

Soit un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$ avec X et Y les deux parties de sommets et E l'ensemble des arêtes. Si A est une partie de l'union de X et Y, $\Gamma(A)$ désigne l'ensemble des sommets adjacents à l'ensemble A.

Théorème de KÖNIG (1931) : [9]

Pour un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, le nombre maximum d'arêtes d'un couplage est égal à : $\min_{A \subset X} (|X-A| + |\Gamma(A)|)$

Le théorème du flot maximum permet de démontrer simplement ce théorème.

Une coloration des arêtes est une partition de l'ensemble des arêtes en classes qui sont des couplages.

Théorème 2.1 : [9] Un graphe simple G d'ordre n (et de degré maximum $\Delta = n-1$) a pour indice chromatique : $\chi'(G) = \begin{cases} \Delta & \text{si n est pair} \\ \Delta + 1 & \text{si est impair} \end{cases}$

Théorème 2.2 : [9] L'indice chromatique d'un multigraphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, de degré maximum Δ est : $\chi'(G) = \Delta$.

Corollaire (BERGE) : [9] Dans un multigraphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, il existe un couplage saturant tous les sommets de degré maximum.

A.4-2 / CAS PARTICULIER :

Supposons que les enseignants et les enseignements sont toujours disponibles. Dans ce cas, tous les graphes G_k coïncident et on a le critère suivant :"Le problème est résoluble si et seulement si le degré maximum $\Delta = \mu(G_k)$ est inférieur ou égal à t, ($t = |H|$) (CSIMA (1965)) [19].

EVEN S., ITA A., SHAMIR A., (1975) [30] ont formellement prouvé que le problème est polynomial. Il est équivalent au problème de décomposition de la matrice R en une somme de t matrices de permutations (i.e en 0-1). Autrement dit :

$\Delta = \mu(G_k) \leq |H|$ est la condition nécessaire et $M_i = C_J = H$ est la condition suffisante.

<u>Exemple</u> :

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$, on a les graphes suivants :

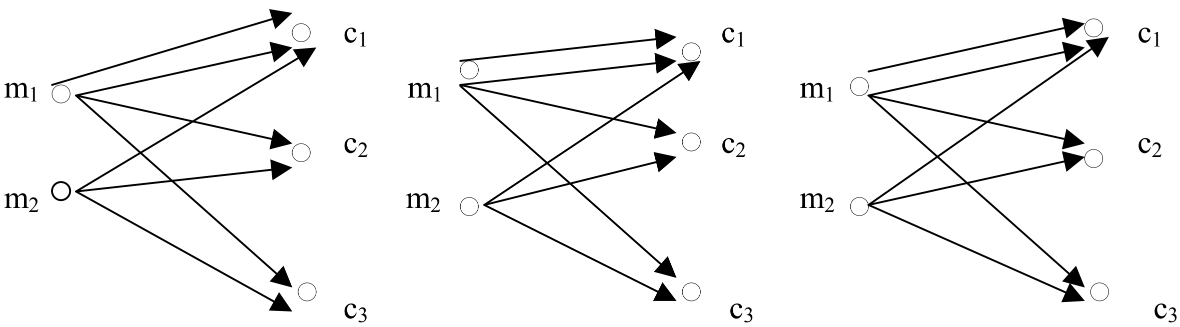


Fig.-2.3- Les graphes G_k, k = 1, 2, 3.

Une solution S (aussi solution de F3D (cf. CH.1, PARTIE C)) est donnée par :

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En calculant la somme de ces matrices, on retrouve R :

$$\sum_{k=1}^{4} S_k = R ;$$

A.4-3 / REPRESENTATION PAR LES COUPLAGES DANS UN GRAPHE BIPARTI :

<u>Résolution</u> :

Considérons le problème (E.T) et supposons que chaque séance de S contient exactement un enseignant m_i et une classe c_j. On définit la charge horaire par le triplet (m_i, c_j, r_{ij}).

Il y a lieu de préciser les différentes charges horaires. On distingue deux types :

• charge horaire modulaire qui sature toujours le volume horaire de la classe c_j, par conséquent, les combinaisons de c_j sont uniformes telles que :

$\forall v \in \mathcal{P}_{r_{ij}}(C_j)$ alors $|v| = r_{ij}$ indépendamment de m_i ;

• Il n'est pas de même pour la charge horaire de l'enseignant m_i puisque les combinaisons $\mathcal{P}_{r_{ij}}(M_i)$ n'est pas uniforme, elles dépendent de c_j.

On a vu précédemment (§ A.4) que α_i et β_j sont les degrés respectivement des sommets m_i et c_j , on a :

<u>Proposition</u> [28] : Il existe une solution au problème :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leq 1 & 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq t \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq 1 & 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq k \leq t \\ \sum_{k=1}^{t} x_{ijk} = r_{ij} & 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\ x_{ijk} \in \{0,1\} & \end{cases}$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} r_{ij} \leq t & 1 \leq j \leq n \\ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \leq t & 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

C'est le théorème de KÖNING sur la coloration des arêtes d'un multigraphe biparti (§ A.4-1).

En effet, l'indice chromatique : $\chi'(G) = \underset{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ij} ,\ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right)$ d'après le théorème 2.2 énoncé au § A.4-1. Une coloration des arêtes est une partition de l'ensemble des arêtes en classes qui sont des couplages. La résolution de cette proposition sera faite au § B.1.

Application : Formation d'un carré Latin (EULER) [9]

Un carré Latin est un tableau de nxn cases rempli avec les symboles 1, 2, …, n de sorte que le même symbole ne figure pas deux fois dans la même ligne, ni deux fois dans la même colonne.

Etant donné un tableau carré de nxn cases, sur lesquelles les symboles 1, 2, …, k ($k<n$) ont été placés, chacun figurant une fois et une fois seulement dans chaque ligne et dans chaque colonne du tableau. Est-il possible de placer dans les cases vides les symboles k+1 k+2, …, n de façon à former un carré Latin ? Si l'on représente les rangées du tableau par les sommets x_1 , x_2 , …, x_n et les colonnes par des sommets y_1 , y_2 , …, y_n et si l'on trace une arête $[x_i , y_j]$ lorsque la case correspondant est encore à remplir, il s'agit de colorier les arêtes du graphe avec n-k couleurs (k+1), (k+2), …, (n).

Pour reconnaître si un rectangle rempli est une partie d'un carré Latin, on a le théorème suivant :(une application du théorème 2.2)

Soit T un pxq rectangle rempli avec les nombres 1, 2, …, n sans qu'il n'y ait deux nombres pareils ni dans la même ligne, ni dans la même colonne, et soit m(k) le nombre de fois où k apparaît dans T, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible, en ajoutant n-p rangées et n-q colonnes de former un carré Latin est que : $m(k) \geq p+q-n$

Exemple de problème d'affectation du personnel :

Dans une organisation utilisant m ouvriers o_1 , o_2 , …, o_m et n postes de travail p_1 , p_2 , …, p_n ; Chaque ouvrier est qualifié pour un ou plusieurs de ces postes. Est-il possible d'affecter chacun à un poste pour lequel il est qualifié ?

Si l'on désigne par $\Gamma(o_i)$ l'ensemble des postes pour lequel l'ouvrier o_i se trouve qualifié, le problème revient à considérer un graphe biparti (O, P,Γ) et à chercher si le couplage maximum sature tous les sommets de O.

A.5 / HYPERGRAPHE :

Définition :

Soit $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $IE = \{E_i \,/\, i = 1, 2, \ldots, m\}$ une famille de parties de V. On dit que IE constitue un hypergraphe sur V si l'on a :

(1) $E_i \neq \varnothing$, $i\in I$

(2) $\cup E_i = V$.

Le couple H = (V,IE) s'appelle un *hypergraphe*.

Un hypergraphe est défini par une famille d' « hyper-arêtes », qui sont des ensembles de sommets de cardinalité quelconque ; Pour un graphe donné, on définit des hyper-arêtes avec ses cliques, ou avec ses arbres maximaux, ou avec ses cycles.

Matrice d'incidence de l'hypergraphe H=(V, IE) :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq m}} \text{ avec } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in E_j \\ 0 & \text{si } x_i \notin E_j \end{cases}$$

Toute matrice dont les coefficients sont 0 ou 1 est donc la matrice d'incidence d'un hypergraphe.

Hypergraphes unimodulaires :

Une matrice A est dite *totalement unimodulaire* si toute matrice extraite de A a pour déterminant 0, +1, ou –1.

Théorème : (Hoffman et Kruskal, 1956).

Un multigraphe est unimodulaire si et seulement si c'est un multigraphe biparti.

Tout sous-hypergraphe d'un multigraphe biparti est un multigraphe biparti. On a donc une bicoloration équitable des arêtes.

Conséquence : Un hypergraphe H est unimodulaire si et seulement si sa matrice d'incidence est totalement unimodulaire.

Exemple : c_1 et c_2 doivent passer un examen avec m_1 simultanément.

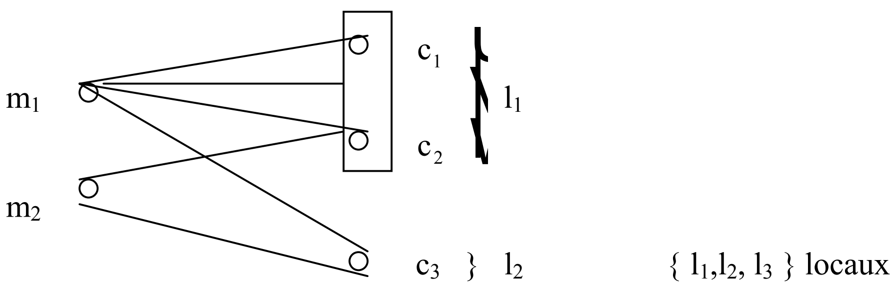


Fig.-2.4- Hypergraphe

A.6 / DUALITE : LINE-GRAPHE OU GRAPHE REEPRESENTATIF DES ARETES :

A.6-1 / DEFINITION :

Soit l'ensemble E des arêtes du graphe G avec au moins une arête comme une famille de sous-ensembles à deux points de V(G). Le Line-graphe de G est le graphe L(G) définie par :

$$V(L(G)) = E(G) ;$$

$$E(L(G)) = \{ \{e,e'\} : e \in E(G), e' \in E(G), |e \cap e'| = 1\}.$$

Remarque: L(G) est un graphe d'intersection $\Omega(E)$.

Propriété :

Soit V un ensemble et E = IF = $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ famille de sous-ensemble distincts non-vide de E tel que la réunion est V. Le graphe d'intersection de IF = V noté $\Omega(E)$ est défini par $V(\Omega(E)) = E$ avec V_i et V_j adjacent si $i \neq j$ et $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Donc, un graphe G est un graphe d'intersection sur V s'il existe une famille IF = E de sous-ensembles de V tel que :

$$G \cong \Omega(E).$$

A.6-2 / COLORATION DE SOMMETS :

c'est la dualité dans la coloration dans les graphes, le sommet se transforme en arête et vice-versa. On aura donc la coloration des sommets comme méthode de résolution (recherche du nombre chromatique, et des stables, chacun d'entre eux représentant les sommets de même couleur) équivalente à la coloration des arêtes. La détermination du nombre chromatique étant un problème difficile, il est préférable et utile en pratique de recourir à des heuristiques [58].

A.7 / CONCLUSION :

La complexité demeure exponentielle. La méthode de coloration revient, quel que soit le modèle utilisé à trouver une partition minimale.

PARTIE B : FORMULATION EN FLOT (MULTIFLOT ENTIER).

B.1 / REPRESENTATION EN MULTIGRAPHE BIPARTI VALUE :

B.1-1 / INTRODUCTION :

Pour ce faire, il convient de considérer le graphe G associé au problème (E T). On oriente chaque arête joignant m_i et c_j de m_i vers c_j et on donne une capacité infinie à chaque arc.

On introduit une source S et on la joint avec tout m_i par un arc (S, m_i) avec une capacité égale à l'unité.

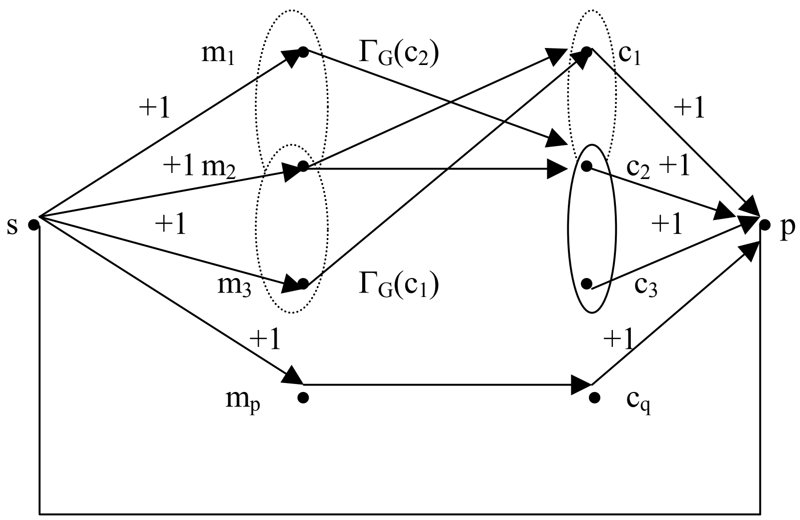
D'une manière similaire, on introduit un puits T et des arcs (c_j, T) avec des capacités égales à l'unité. Ce graphe valué sera noté G*.

Toute valeur entière du flot dans G* de S à T correspond à un couplage dans G.

A toute étape, on doit donc définir les priorités dans l'affectation des rencontres. Ces priorités sont exprimées par une fonction- coût f dans G* définie par :

$$f : E \longrightarrow \overline{IR}$$
$$(u,v) \longrightarrow f(u,v)$$

L'assignation des rencontres à une certaine période est maintenant un problème du flot avec coût minimum.



arc retour

Fig.-2.5

B.1-1 / Résolution de la proposition du § A.4-3 :

Soit le réseau défini par les sommets de $M = \{m_i, i=1,\ldots,n\}$ et $C = \{c_j, j=1,\ldots,m\}$, une entrée s et une sortie p (Fig.-2.5) alors :

$\forall m_i \in M$, la capacité $c(s, m_i) = 1$ et $\forall c_j \in C$, la capacité $c(c_j, p) = 1$, et enfin pour $m_i \in \Gamma(c_j)$ la capacité $c(m_i, c_j) = 1$. La cardinalité maximum d'un couplage C_0 est donc égale à la valeur maximum du flot entre set p.

B.1-2 / Détermination de la fonction coût f :

<u>Premier cas</u> : cas des pré-affectations.

A chaque étape, on peut, par exemple, affecter un coût nul pour tout arc (S, m_i) et (c_j, T) tel que α_i et β_j soient maximum et de coût positif pour le reste des arcs dans G*.

Après chaque étape, on supprime dans G* les arcs (m_i, c_j) correspondant aux rencontres déjà affectées.

<u>Deuxième cas</u> :

A toute période, on calcule les degrés de liberté des enseignants et des classes.

<u>Définitions</u> :

On dénote degré de liberté de m_i, la quantité λ_i définie par :

$$\lambda_i = t - \sum_{k=1}^{t} a_{ik} - \alpha_i ;$$

on dénote degré de liberté de c_j, la quantité μ_j définie par :

$$\mu_j = t - \sum_{k=1}^{t} b_{jk} - \beta_j .$$

On définit degré de liberté pour la charge horaire (m_i, c_j, r_{ij}) la quantité :

$$\eta_{ij} = \sum_{k=1}^{t} (1 - a_{ik})(1 - b_{jk}) - r_{ij} .$$

La fonction –coût f est définie par :

$$f(S, m_i) = \begin{cases} \infty & \text{si } m_i \text{ est disponible à cette pé riode} \\ \lambda_i & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$f(c_j, T) = \begin{cases} \infty & \text{si } c_j \text{ est indisponible à cette pé riode} \\ \mu_j & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$f(m_i, c_j) = \eta_{ij} .$$

La priorité est donnée aux enseignants et classes ayant des degrés de liberté minimum.

Commentaire : L'affectation se fait séquentiellement, étant à la période k, on dira que l'affectation des rencontres restantes aux périodes k+1, k+2, …, t est le problème résiduel.

Cette procédure n'assure pas une solution au problème résiduel même si le problème est soluble, étant donnée que la procédure n'est pas basée sur des conditions nécessaires et suffisantes de solubilité.

B.1-3 / REPRESENTATION EN RESEAU :

B.1-3.1 / INTRODUCTION :

On peut définir le problème (E T) comme un problème de circulation.

La matière qui circule ″quantité de marquage″ est hétérogène, c'est une matière vectorielle. Il s'agit donc d'associer à notre problème un multigraphe biparti valué G* avec la modification suivante :

les coûts sur les arcs représentent le paramètre de la fonction-objectif, ce problème est alors un réseau.

On considère un graphe orienté G = (V,E) :

$V = M \cup C$, et on associe aux arcs des valeurs considérées comme coordonnées d'un vecteur $(\varphi(e_i))_{i = 1, 2, \ldots, s}$ entier prises par une fonction φ définie sur $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ avec l'arc courant $e_h = (m_i, c_j)$, $m_i \in M$ et $c_j \in C$.

Puisque les coordonnées $\varphi(e_h)$ sont supposées entières, on a donc un flot entier.

B.1-3.2 / MULTIFLOT ENTIER :

Soit $(\varphi^1(e_h), \varphi^2(e_h), \ldots, \varphi^r(e_h))$ les coordonnées de $\varphi(e_h)$ élément de IR^r représentant les quantités respectives de r produits distincts portés simultanément par l'arc e_h. Ce multiflot est une matrice ayant r lignes et s colonnes, dont l'élément courant $\varphi^l(e_h)$représente la quantité du produit n° l portée par l'arc e_h.

Contraintes :

(i) Les contraintes de conservation d'une part,

(ii) Et les contraintes de limitation des flux d'autre part :

$$\forall e_h \in E,\ 0 \le \varphi(e_h) \le c_h .$$

Les flux en circulation $\varphi(e_h) = (\varphi^l(e_h))_{l = 1, 2, 3}$ correspondant aux cours, T.D et T.P ;

C_h correspond au volume horaire réglementaire pour tout enseignant en cours, T.D et T.P. La recherche d'une politique d'affectation revient à la recherche d'un flot canalisé sur le graphe G. Les conditions de conservations s'écrivent alors :

$$\forall v_i \in V, \sum_{e \in \omega^-(v_i)} \varphi^l(e) - \sum_{e \in \omega^+(v_i)} \varphi^l(e) = 0 \text{ pour } l \in \{1, 2, 3\}.$$

Chaque vecteur ligne constitue un flot sur G (correspondant respectivement aux cours, T.D et T.P).

Commentaire :

La difficulté du problème de multiflot le distinguant nettement du problème du flot maximum est comme suit : un multiflot solution du problème n'est pas obligatoirement entier lorsque toutes les capacités c_h le sont, même dans le cas de deux produits. L'explication apparaît clairement si l'on écrit le problème en terme de programme linéaire, la matrice des contraintes n'est pas totalement uni-modulaire, alors qu'elle l'est pour les problèmes de flot.

B.2 / FLOT MAXIMUM:

On introduit les contraintes d'indisponibilités (pour cause d'absences ou ayant des pré-affectations). Ces contraintes sont décrites par les matrices A et B :

$$A = (a_{ik})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le t}} \text{ et } B = (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le t}} \text{ où :}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si l'enseignant } m_i \text{ est indisponible à la pé riode k} \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}.$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la classe } c_j \text{ est indisponible à la pé riode k} \\ 0 \text{ ailleurs;} \end{cases}$$

1) Aucun composant ne peut apparaître dans un nombre de rencontres supérieur au nombre de périodes libres, on a donc :

$$\alpha_i \le t - \sum_{k=1}^{t} a_{ik} \qquad 1 \le i \le n$$

$$\beta_j \le t - \sum_{k=1}^{t} b_{jk} \qquad 1 \le j \le m ;$$

2) En outre, il est nécessaire que pour tout charge $(m_i\ ,c_j\ , r_{ij})$ les composants m_i et c_j soient simultanément libres pour un nombre de périodes supérieurs à r_{ij}, ceci donne :

$$r_{ij} \leq \sum_{k=1}^{t} (1 - a_{ik})(1 - b_{jk}) \text{ pour tout triplet } (m_i , c_j , r_{ij}).$$

De simples exemples montrent que les conditions 1) et 2) sont insuffisantes pour la solubilité du problème.

<u>Exemple</u> : Comme vu préalablement (§A.1-2.2 / couplage), on pourra associer un multigraphe biparti G au problème (E T) avec une condition supplémentaire sur S_k qui consiste à supprimer toute arête adjacente au sommet m_i (ou c_j) si a_{ik} (ou b_{jk}) est égal à 1.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ t = 4 ;$$

<u>Résolution</u> :

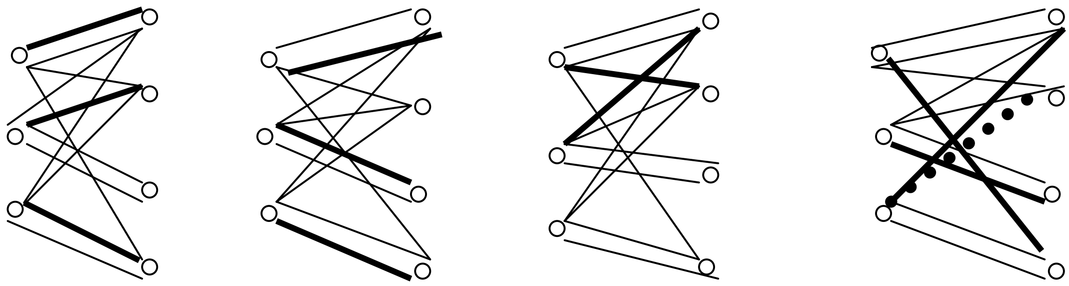
Calcul des couplages S_k , $1 \leq k \leq 4$.

Etapes	Couplages	Solutions	Figures
1	S_1	$x_{111} = 1, x_{221} = 1, x_{341} = 1$	Fig. a ;
2	S_2	$x_{112} = 1, x_{232} = 1, x_{342} = 1$	Fig. b ;
3	S_3	$x_{123} = 1, x_{213} = 1$	Fig. c ;
4	S_4	$x_{144} = 1, x_{234} = 1, x_{314} = 1$	Fig. d ;

La disponibilité (m_3 , c_2) n'est pas affectée, le nombre de périodes est épuisé. Finalement les matrices A et B sont telles que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$b_{24} = 1$, m_3 est donc indisponible.



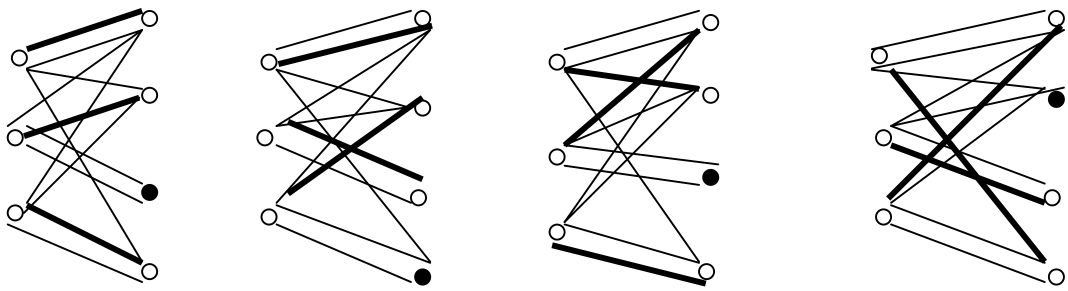
(a) (b) (c) (d)

Fig.-2.6

Pour cette dernière disponibilité (m_3 , c_2), il faut rajouter une cinquième période (donc une colonne de “zéro’’ pour A et B) puisque les conditions (1) et (2) ne sont plus valables. On sait que l’indice chromatique du graphe G (Fig.2.7) χ’(G) = 4, cette cinquième période n’est qu’une unité (couleur) supplémentaire.

Recherche des couplages maximums :

Au lieu de rechercher des couplages quelconques S_k , on cherchera (s’ils existent) des couplages maximums. On donne la solution suivante :



S_1 S_2 S_3 S_4

Fig.-2.7

Conclusion :

On remarquera que l’enseignant m_3 (Fig.-2.6 (d)) doit rencontrer deux classes c_1 et c_2 alors qu’il n’existe qu’une période. Pour cela, un troisième type de conditions ont été utilisées par GOTLIEB basées sur les conditions exprimées par P. HALL pour l’existence d’un système de représentants distincts (voir annexe A.IV).

Les conditions sont les suivantes :

3) $\sum_{i\,:\,c_j \in \overline{C}} r_{ij} \;\leq\; \sum_{k=1}^{t} (1 - a_{ik})(1 - \prod_{j:\,c_j \in \overline{C}} b_{jk})$, pour tout $\overline{C} \subset \overline{C_j}$,i = 1, 2, …, n ;

D'une façon similaire, pour tout $\overline{M} \subset \overline{M_j}$, j = 1, 2, …, m :

4) $\sum_{j\,:\,m_i \in \overline{M}} r_{ij} \;\leq\; \sum_{k=1}^{t} (1 - b_{jk})(1 - \prod_{i:\,m_i \in \overline{M}} a_{ik})$

B.3 / METHODE D'ELABORATION DES EMPLOIS DU TEMPS :

La méthode procède par des étapes successives, à une période donnée, on prépare l'emploi du temps. Chaque étape correspond à une période déterminée de la semaine (t créneaux) consistant à assigner les rencontres.

Quand on a complété l'affectation pour les k premières périodes (absence d'indisponibilités), on dira que l'affectation des rencontres restantes aux périodes k+1, k+2, …, t est le problème résiduel.

Le choix dans l'assignation des rencontres aux périodes k est telle que le problème résiduel admette toujours une solution.

En pratique puisque tout sous-ensemble S_k de rencontres est représenté par un couplage dans un multigraphe biparti, on a à résoudre le problème du flot à chaque étape.

L'efficacité demeure incertaine pour de gros volume de données (comme c'est le cas à l'USTHB).

Conclusion :

La procédure du flot n'étant pas basée sur des conditions nécessaires et suffisantes de solubilité, le cas où le problème résiduel n'a aucune solution peut avoir lieu même si le problème est soluble.

Cette approche nous fournit l'avantage que la formulation peut prendre en charge plusieurs composants mais ceci engendre un nombre de sommets et arêtes trop grand, la combinatoire reste présente.

Le cas simple où il existe des algorithmes efficaces est celui où la matrice d'incidence est uni-modulaire.

Conclusion :

Cette revue des différents modèles et leurs techniques de résolution associées met en évidence les équivalences entre eux.

PARTIE C : TECHNIQUES DE RESOLUTION

PARTIE 1 : L'APPROCHE HEURISTIQUE

PARTIE 2 : L'APPROCHE DE RESOLUTION PAR AMELIORATION.

INTRODUCTION :

Le chapitre précédent montre l'inefficacité des méthodes exactes, celles-ci basées sur les modélisations mathématiques.

Les applications ont montré qu'elles ne suffisaient plus dans la plupart des cas réels.

Les exemples suivants donnent une illustration :

D. DEWERA en SUISSE [27], [28] etc. On a traité ces cas :

1) Méthode d'élaboration des emplois du temps au chapitre 2, paragraphe B.3 avec la procédure du flot où la solution n'est pas garantie même si le problème est soluble.

2) Modélisation en programme linéaire en nombres entiers auquel on associe un modèle de la théorie du graphe (un multigraphe biparti) dont la solution est donnée par le théorème de KÖNIG au chapitre 2, paragraphe A.4-3. La recherche de la solution est un couplage (coloration des arêtes). Le théorème du flot maximum permet de rechercher simplement cette solution, et évidemment, on arrive à la même conclusion que précédemment.

C'est pourquoi sont apparues des techniques qui ne cherchent pas la solution exacte mais essaient seulement de trouver par diverses méthodes une solution approchée qui soit la meilleure possible.

L'approche heuristique domine alors ce domaine depuis le début des années 80.

On utilise la résolution des problèmes soit par des algorithmes approchés, soit par des algorithmes d'énumération, soit par des techniques d'intelligence artificielle. On donnera un aperçu sur les utilisations de ces trois types de techniques.

Intelligence artificielle sera préconisée pour la structure des données, puisque le modèle tel que présenté est une inter-action entre la partie "données" et la partie "traitement des données" dans la formulation mathématique. Dans la deuxième partie, la difficulté est due plutôt au caractère hautement combinatoire du problème que l'aspect logique, l'enseignant étant soit affecté ou non.

Bien entendu, ceci n'exclut pas que les heuristiques s'appuient souvent sur les modèles mathématiques présentés dans le chapitre 2.

<u>PARTIE 1</u> : L'APPROCHE HEURISTIQUE

C.1-1 / ALGORITHMES APPROCHES OU HEURISTIQUES :

Etant arrivé à la conclusion que les algorithmes exacts ne conviennent pas au problème d'emploi du temps, il faut savoir donner une solution approximative qui satisfasse tous les intéressés. On distingue deux types :

- Algorithme itératif [36] : on part d'une solution <u>réalisable</u>, et on cherche à l'améliorer par itérations successives.
- Algorithme glouton [36] : partant d'une solution <u>partielle,</u> on cherche par étapes, à fixer une (ou plusieurs) variables jusqu'à la détermination d'une solution <u>réalisable</u>. Les choix sont sans retour-arrière.

Dans les problèmes d'emploi du temps, souvent il n'existe aucune solution totalement satisfaisante, mais seulement des solutions considérées comme bonne pour l'utilisateur, d'où la notion de résolution par améliorations (AUST R.J [6]) opposé à la notion de placement absolue.

L'emploi d'heuristiques est plus ″digeste″ que celui de modèles mathématiques et aussi plus facile sur le plan expressif.

C.1-2 / CONCLUSION :

L'utilisation de ces méthodes sur les emplois du temps revient à s'en servir pour le coloriage de sommets d'un graphe. Malheureusement, le problème de la détermination du nombre chromatique est un problème lui aussi **NP- COMPLET** [36].

Les <u>algorithmes approchés</u> sont intéressants dans la mesure où on ne cherche pas une <u>solution nécessairement exacte</u> (d'ailleurs par rapport à quelles contraintes exactes ?) mais plutôt réalisable par rapport à des contraintes fondamentales. Cependant, les difficultés viennent du fait que les critères ne sont pas toujours très clairs et que la notion d'optimum est très variable suivant les établissements. Pour notre cas, on a utilisé la méthode des préférences (CH.3) pour procéder aux affectations des enseignants aux enseignements. De plus, les caractéristiques (fortement contraints, gros volumes, combinatoire) font souvent échouer ces approches même quand il s'agit de trouver une solution acceptable.

C.1-3 / ALGORITHMES :

C.1-3.1 / PROCEDURES PAR SEPARATION ET EVALUATION :

Détermination d'une arborescence, le parcours de cet arbre étant limité grâce à une méthode d'évaluation des solutions partielles aux nœuds.

On reprend la formulation (partie 2, § C.2-2 relaxation Lagrangienne).

Le problème (E T) est un problème d'affectation généralisé (PAG)(partie 2, § C.2-1)

La recherche de la borne de la fonction-objectif passe par deux étapes :

1) on relaxe le programme linéaire (P_s) ;
2) on résoud le problème de sac-à-dos (partie 2, § C.2-4).

Cette relaxation (RP_s) résoud le problème suivant :

Les enseignants sont affectés aux enseignements au moindre coût sans regarder les limitations des multiples affectations.

Chaque problème de sac-à-dos (SD_i) binaire résoud le problème suivant :

Désigner les enseignements devant être réaffectés d'un enseignant m_i à un autre tout en satisfaisant les ressources de l'enseignant m_i. La solution optimale indique les réaffectations assurant une augmentation minimum de la valeur de Z.

C.1-3.2 / RELAXATION LAGRANGIENNE ET SON DUAL :

La relaxation est le fait de plonger le problème à résoudre dans un autre plus général – i.e en éliminant une ou plusieurs contraintes – en donnant une solution au nouveau problème (solution approchée du problème initial qui n'est pas nécessairement réalisable) puis en vérifiant les contraintes relâchées.

Une autre méthode est de mettre des poids (multiplicateurs dits de LAGRANGE) sur les contraintes puis de résoudre le problème avec ces poids (minimiser la nouvelle fonction dite de LAGRANGE).

C.1-3.3 / CONCLUSION :

a) TRIPATHY (1984) [56] mixe la méthode de séparation et évaluation avec la relaxation Lagrangienne. Dans l'application de cette méthode se dégagent 2 aspects :

- cette méthode donne de bons résultats au niveau temps de calcul ;
- elle a de gros handicaps, le volume de données engendrées est important [52].

La dépendance entre le temps d'exécution et la qualité de la décomposition et d'évaluation est très forte.

b) L'approche relaxation Lagrangienne mixée à S.E.P est meilleure :

- le cas R.L.D (relaxation Lagrangienne et son dual) permet en outre, de fournir pour les procédures de S.E.P des bornes de valeur à chaque nœud. Ces méthodes apportent des améliorations ;
- les inconvénients viennent de leur gourmandise en mémoire et de la difficulté à trouver des fonctions d'évaluations.

PARTIE 2 : L'APPROCHE RESOLUTION PAR AMELIORATIONS :

Résolution du problème (E T_E) :

La formulation du problème d'affectation des enseignants aux enseignements (E T_E) se présente comme un programme linéaire en nombres entiers (CH.4, § 4.1) ; ce sont des problèmes d'optimisations dans lesquels les variables sont astreintes à ne prendre que les valeurs entières. Dans notre cas, on ne fait appel qu'à des variables de décision en 0-1. La formulation du problème (E T_E) en programmation linéaire en nombres entiers (Ps) nous fait quelques remarques :

- en omettant les contraintes (3), on obtient β sous-problèmes indépendants (RP_s). La résolution du problème (RP_s) donne une solution qui n'est pas nécessairement réalisable pour (P_s) ; Pour cela, on utilise les méthodes par énumération ou recherche arborescente pour arriver à une solution réalisable pour (P_s).

En ce qui nous concerne, on s'inspire donc de la résolution du problème d'affectation généralisé traité par ROSS G.T & SOLAND R.M (1975) [51] et LEGENDRE J.P & MINOUX M (1977) [45] pour la résolution du problème (E T_E).

C.2-1 / PROBLEME D'AFFECTATION GENERALISE :

Une formulation mathématique en programme linéaire en nombres entiers est la suivante :

$$
(\text{LAG}) \begin{cases}
\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}\, x_{ij} = Z\,(\min) & (1) \\
\text{sachant que:} & \\
\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad \text{pour tout } j \in J & (2) \\
\sum_{j \in J} r_{ij}\, x_{ij} \le b_i, \ \text{pour tout } i \in I & (3) \\
x_{ij} \in \{0,1\} \ \text{pour } i \in I \text{ et } j \in J & (4)
\end{cases}
$$

La variable de décision x_{ij} est définie comme suit :

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'agent i est affecté à la tâche j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$

Données du problème (LAG) :

- r_{ij} : la ressource requise par l'agent i pour satisfaire la tâche j ;
- b_i : c'est la valeur de la ressource disponible chez l'agent i, $b_i > 0$.
- c_{ij} : coût pour les priorités (cf. ch.3, § 3.4-3)

Tous les coefficients c_{ij} , r_{ij} , et b_i sont entiers pour $i \in I$ et $j \in J$.

<u>Remarques</u> :

(1) les cardinaux $|I|$ et $|J|$ sont différents (i.e. $n \neq m$), ceci se traduit par l'affectation de plusieurs enseignements à un seul enseignant en tenant compte de son volume horaire hebdomadaire.

(2) r_{ij} : le nombre de rencontres entre l'enseignant m_i et la classe c_j (ou le volume horaire hebdomadaire de la classe c_j à satisfaire par l'enseignant m_i).

(3) b_i : c'est le volume horaire hebdomadaire de l'enseignant m_i fixé par la réglementation.

C.2-2 / RELAXATION LAGRANGIENNE :

C.2-2.1 / DONNEES :

On reprend la formulation du (§.4.1-2, CH.4), on étudie (P_s)

$$
(P_S)\quad \begin{cases}
\displaystyle\sum_{i\in I_p}\sum_{j\in J_q} c_{ij}\,x_{ij} = Z(\mathrm{Min}) & (1)\\
\text{sachant que:} & \\
\displaystyle\sum_{i\in I_p} q_{ij}\,x_{ij} = 1 \qquad \forall j\in J_q & (2)\\
\displaystyle\sum_{j\in J_q} q_{ij}\,r_j\,x_{ij} \le d_i \qquad \forall\, i\in I_p & (3)\\
x_{ij} \in \{0,1\} \ \text{pour}\ i\in I_p \ \text{et}\ j\in J_q & (4)\\
1\le p\le\alpha,\ 1\le q\le\beta &
\end{cases}
$$

avec :

- la matrice $Q = (q_{ij})$ réelle, appelée matrice de qualification ;
- $c = (c_{ij})$ coûts ;
- $r = (r_j)$ volume horaire hebdomadaire de l'unité d'enseignement (ou classe) c_j .
- $d = (d_i)$ seconds membres appelés capacités ;
- $I = \{1,2, \dots ,n\}$ est patitionné en α sous-ensembles disjoints : $I = \bigcup_{j=1}^{\alpha} I_j$
- $J = \{1,2, \dots ,m\}$ est partitionné en β sous-ensembles disjoints : $J = \bigcup_{i=1}^{\beta} J_i$;

On constate deux types de contraintes (2) et (3) de structures différentes.

C.2-2.2 / RELAXATION DES CONTRAINTES (3) :

La difficulté du problème (P_s) est due essentiellement à la prise en compte des contraintes (3). En effet, en omettant les contraintes (3), le problème (P_s) se décompose en β sous-problèmes indépendants du type :

$$
(RP_s)\begin{cases}
\sum_{i\in I_p}\sum_{j\in J_q} c_{ij}\,x_{ij} = Z\,(\text{Min}) \\
\text{Sachant que :} \\
\sum_{i\in I_p}\sum_{j\in J_q} q_{ij}\,x_{ij} = 1\,, \qquad p = 1,2,\ \dots,\alpha \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q = 1,2,\ \dots,\beta \\
x_{ij} \in \{0,1\}
\end{cases}
$$

La solution est obtenue en recherchant l'indice j_0 tel que :

$c_{i j_0} = \underset{j\in J_q}{\text{Min}} \{c_{ij}\}$ et attribuant à la variable $x_{i j_0}$ la valeur 1, et toutes les autres variables x_{ij} $(j \neq j_0)$ sont nulles.

Remarque :

La solution obtenue est toujours entière.

C.2-3 / DEFINITION DU PROGRAMME DUAL :

On associe à chaque contrainte i $(1\leq i \leq n)$ de (3) une variable duale π_i "multiplicateur" de LAGRANGE, la fonction de Lagrange (Annexe 5) est définie par :

$$\boxed{L(\pi) = \pi d - \text{Max}\{\pi Ax - wx\}}$$

Propriété :

$L(\pi) \leq Z^*\ ,\ \forall \pi\in IR^n_+$.

En tout point π, $L(\pi)$ est un minorant de l'optimum Z^* de (P_s) (Annexe 5).

Le problème dual de (P_s) est précisément de trouver le meilleur des minorants de ce type, c'est-à-dire (voir Annexe 5) :

$$
(DP_s)\begin{cases}
L(\pi^*) = \text{Max}\ L(\pi) \\
\pi \in IR^n_+
\end{cases}
$$

Remarque :

Avec les contraintes d'intégrité, on aura en général $L(\pi^*) < Z^*$.

C.2-4 / PROBLEME SAC-A-DOS :

Le problème de sac-à-dos en 0-1 est formulé comme suit :

$$(SD)\begin{cases} \text{Max} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous la contrainte:} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b sont tous positifs ou nuls.

On dispose d'un volume total disponible b et n objets ayant les caractéristiques suivantes :

Les coefficients a_i et c_i représentent respectivement le volume et l'utilité de l'objet i (i = 1, 2, …,n).

Il s'agit donc de mettre le maximum d'objets dans le volume donné.

Le rapport $\frac{c_i}{a_i}$ indique l'importance utilité-volume. On procédera au classement par ordre décroissant de ces rapports : $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}$;

Le choix d'un rapport $\frac{c_i}{a_i}$ indique la sélection de la variable x_i .

La méthode de résolution heuristique est la suivante :

Initialisation : k = 1

Si $a_k \leq b - \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j$

On pose $x_k = 1$

Sinon k = k+1

Soit N et $\overline{N}$ deux ensembles de nombres entiers tels que $\{1, 2, \ldots, n\} = N \cup \overline{N}$, alors la solution obtenue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'écrit :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in N \\ 0 & \text{si } j \in \overline{N} \end{cases}$$ et les objets choisis sont d'indices $j \in N$.

C.2-5 / CONCLUSION :

Ces différentes techniques amènent aux constatations suivantes :

- une application sans le soutien d'un modèle rigoureux n'aboutit pas à grand chose, les tentatives les mieux réussies prennent en compte les modélisations même imparfaites du 1^{er} chapitre en y ajoutant d'autres idées ;

- ceci met en évidence que la résolution doit être ouverte et non figée, le logiciel doit servir de" brouillon inter-actif " [18].
- les améliorations concrètes se feront d'année en année en présentant des mémoires de fin d'études, en ce qui concerne le contexte.

C.2-6 / INTELLIGENCE ARTIFICIELLE :

Ce sont des tentatives basées sur des expériences de concepteurs ou sur des heuristiques. Les différents algorithmes développés jusqu'à présent ayant échoué, les concepteurs se sont tournés vers des techniques récentes en voie d'expansion.

Des systèmes experts sont apparus essayant de codifier l'expérience des concepteurs d'emploi du temps.

C.2-6-1 / SYSTEMES EXPERTS :

Leur originalité se place dans le couplage d'une base de connaissance avec une base de données, donc d'un système expert et d'un **S.G.B.D**, en gardant les propriétés de chacun.

L'approche par les S.I.A.D (systèmes interactifs d'aide à la décision) fait intervenir le décideur non seulement dans la définition du problème mais aussi dans la construction de la solution. C'est une alternance d'étapes de calcul et d'étapes de dialogue avec le décideur. La résolution du problème s'opère par la recherche heuristique et la simulation.

CHAPITRE 3 : ENQUETE STATISTIQUE

3.1/ INTRODUCTION :

Cette partie constitue la partie originale de notre approche du problème (ET). On essaiera d'y clarifier la fonction-objectif par une enquête statistique à l'USTHB qui permet, en principe, d'améliorer la satisfaction des contraintes du type exprimées par les enseignants.

3.1-1/ BUT DE L'ETUDE :

La description de l'ensemble (ou « population ») d'enseignants (éléments) au moyen d'un certain nombre de caractéristiques fournit des informations dans le but d'étudier les caractères pouvant satisfaire le maximum d'enseignants.

Pour les besoins de l'étude, on définit :

a/ L'élément statistique : c'est l'enseignant (facultés et spécialités confondues),

b/ L'objectif : la satisfaction des enseignants en emploi du temps,

c/ La fonction-objectif : il faudra minimiser les coûts inhérents, avec l'interprétation des caractéristiques ainsi déterminées en vue d'en tirer des conclusions quant à la satisfaction générale des enseignants.

3.1-2 / DESCRIPTION DE LA POPULATION :

L'ensemble des enseignants de l'université est partitionné en facultés, puis en départements voire en laboratoires.

Ce partitionnement se fait sur la base de la spécialité ou profil des enseignants (§A.2-3,CH.1).

3.2 / PREPARATION DE L'EXPERIENCE STATISTIQUE :

3.2-1/ CHOIX DE L'ECHANTILLON :

On choisit une collection limitée (ou échantillon) de la façon suivante :

- On recueille les données, par distribution de quota de questionnaires par faculté.
- A la faculté, la distribution se fait au hasard.

  Pour d'éventuels précisions, on a demandé de spécifier le département et le grade de chaque répondant.

Conclusion :

- La procédure utilisée est la méthode des quotas. On se base sur la répartition de la population par le caractère spécialité.(§ A.2-3, CH.1,(i) enseignants).
- Pour le recueil des informations, on a utilisé comme support le questionnaire.

Ces données sont peu aisées à traiter puisque ce sondage s'intéresse à la satisfaction des enseignants avec des environnements divers ; de plus un certain nombre de questions sont sans réponses (voir annexe I).

3.2-2 / ECHANTILLONS STRATIFIES :

3.2-2-1/ INDIVIDU :

On étudie l'avis des enseignants sur les diverses questions traitées dans ce questionnaire.

On est donc amené à partitionner la population M (ensemble des enseignants de l'université) en un nombre fini de sous populations M_f où $f = 1, 2,\ldots, F$ (F désigne le nombre de filières) dans le soucis de tenir compte de la spécificité de ces populations dans le prélèvement d'un échantillon (§ 3.1.1).

3.2-2-2 / SONDAGE STRATIFIE :

Consiste à prélever indépendamment les uns des autres, des échantillons simples, dans chacune des sous populations M_f ($f = 1, 2,\ldots, F$). Ces derniers sont appelés des strates.

Ces strates forment l'échantillon global.

3.2-2-3 / TAUX DE SONDAGE :

a/ Taux de sondage de la strate M_f, la quantité : $t_n = n_f / N_f$

avec : n_f : taille du sous-échantillon,

N_f : taille de la sous-population.

b/ Taux de sondage global :

Soient $N = \sum_f N_f$, $n = \sum_f n_f$,

$t = n/N$ est le taux de sondage global.

On donne les résultats suivants, qui représentent les sous-populations (M_f) et les sous-échantillons (E_f) dans les facultés où les enseignants ont bien voulu répondre au questionnaire :

	Sous-populations	Tailles N_f
M_1	Génie mécanique	60
M_2	I. T. S	60
M_3	Chimie	180
M_4	Informatique	60
M_5	Physique	180
M_6	Mathématiques	180
	TOTAL N	1080

Tableau 1

	Sous-échantillons	Tailles N_f
E_1	Génie mécanique	06
E_2	I. T. S	08
E_3	Chimie	19
E_4	Informatique	09
E_5	Physique	06
E_6	Mathématiques	21
	TOTAL n	69

Tableau 2

Calcul des taux de sondage :

Le tableau 2 donne les résultats suivants :

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
0,1	0,133	0,105	0,15	0,033	0,116

Les tableaux 1 et 2 donnent le taux de sondage global :

$$\boxed{t = 0,064}$$

Remarque :

La stratification n'est pas représentative (taux de sondage t_f ne sont pas les mêmes dans toutes les sous populations) mais le tableau montre qu'en dehors de l'Institut de Physique les taux de sondages sont tous proches de 0,11.

3.2-3 / INTERPRETATION DES RESULTATS :

Le questionnaire est formé de huit (08) questions (de 1 à 8) et deux (02) questions (9 et 10) d'ordre général.

3. 3 / QUESTIONNAIRE ET SON INTERPRETATION:

a/ La première question permet de nous renseigner sur l'importance du choix du module. Pour l'application, en cas d'adoption, on utilisera les fiches de vœux distribuées en fin d'années.

b/ La deuxième question nous renseigne sur la répartition des séances durant la semaine. L'application se fait grâce aux résultats de la question n° 8.

c/ La troisième question se propose de refléter l'importance du choix du collègue, et d'essayer de dégager un critère pour les combinaisons d'enseignants (voir annexe I).

d/ La quatrième question nous informe sur l'avis des enseignants quant au régime de vacances souhaitables (lorsque le système était semestriel).

e/ La cinquième question, nous informe sur l'éventuel réaffectation de l'enseignant pour un même module.

f/ La sixième question, nous renseigne sur les critères à adopter pour l'affectation de deux modules différents en rapport avec la spécialité de l'enseignant (voir annexe n°)

g/ La septième question, nous renseigne sur le classement des unités pédagogiques.

h/ La huitième question, nous donnera la charge horaire maximum pour une journée et le classement des séances de la semaine.

i/ La neuvième question, nous donnera d'autres critères et contraintes à la lumière des précédentes. Les critères choisis sont ceux référant à une idée de préférence et interviennent dans le problème de décision.

QUESTIONNAIRE :

1°/ Le choix du module vous semble :

- Très important ☐ - Important ☐ - Peu important ☐ - Pas important du tout ☐

2°/ La répartition des séances vous semble :

- Très important ☐ - Important ☐ - Peu important ☐ - Pas important du tout ☐

3°/ Choisir votre collègue de travail, vous y êtes :

- Favorable ☐ - Peu favorable ☐ - Défavorable ☐ .

Dans l'affirmative, donner un critère du choix du collègue :………………………………

4°/ Trouvez-vous l'instauration d'un emploi du temps (horaire) semestriel :

- Très intéressant ☐ - Intéressant ☐ - Peu intéressant ☐ - Pas intéressant ☐.

5°/ Enseigner un module dans des sections différentes :

- Vous arrange beaucoup ☐ - Vous arrange peu ☐ - Ne vous arrange pas du tout ☐ .

6°/ Enseigner des modules différents (au mois deux) :

- Vous arrange sans conditions ☐ - Vous arrange avec conditions ☐ .
Lesquelles :……………………… - Ne vous arrange pas du tout ☐ .

7°/ Pour les assistants et les maîtres assistants (éventuellement les chargés de cours), voulez-vous enseigner : - Uniquement des T.D ☐ - Uniquement des T.P ☐ - Indifférent. ☐

8°/

	8:00 9:30	9:40 11:10	11:20 12:50	13:00 14:30	14:40 16:10	16:20 17:50
Séance n°	1	2	3	4	5	6

a)Donner le nombre de séances maximum que vous jugez acceptable pour une journée :
☐ (chiffre)

b) Indiquer, par ordre décroissant de préférence, les séances qui vous arrangent par le numéro correspondant : 1) ☐ 2) ☐ 3) ☐ ; (rajouter s'il y a lieu) :……….

9°/ Dans le choix d'un emploi du temps, quelles sont les contraintes que vous cherchez :

a) à satisfaire (dans l'ordre décroissant)…………………………………………….………

b) à éviter (exemple : transport, restauration, …) ……………………………………...

10°/ Vos suggestions : ……………………………………………………………………….

N.B. : les questions de 1°) jusqu'à 7°) mettre une croix dans la case choisie.

CONCLUSION :

A partir de cette étude :

1/ On trouvera les critères à accepter et à classer en faisant une étude de comparaison.

2/ On donnera leurs fréquences, comportement, …

3/ On sélectionnera une fonction-objectif.

3.4 / ETUDE DE L'ECHANTILLON :

3.4-1/ INTRODUCTION :

On a recensé les enseignants de l'université (ensemble) en relevant leur vœux (caractères).

Chaque nombre exprime le nombre de voix des enseignants, et chaque série numérotée de 1 à 8 correspond aux questions numérotées de 1 à 8.

Chaque question est présentée sous forme de choix multiples ou critères. Ces critères définissent les classes d'enseignants.

L'enquête a donné les résultats suivants :

S E R I E S	C L A S S E S			
1ère série	46	23	00	00
2ème série	35	33	01	00
3ème série	63	04	02	--
4ème série	10	22	18	16
5ème série	19	26	21	--
6ème série	12	34	22	--
7ème série	27	01	34	--
8ème série				

a/ Nombre maximum de séances par jour :

Deux séances	44
Trois séances	19
Plus de trois séances	03

b/ Répartition des séances :

On donne les résultats sous forme d'un tableau à double entrée :

	CLASSEMENT				
SEANCES	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème
1	23	07	03	03	01
2	42	23	01	00	00
3	03	27	16	03	00
4	01	09	22	03	00
5	00	01	18	03	00
6	00	00	01	01	00

Les 69 enseignants recensés se trouvent ainsi répartis, en fonction des critères, en classes. L'importance de ces classes peut-être caractérisée :

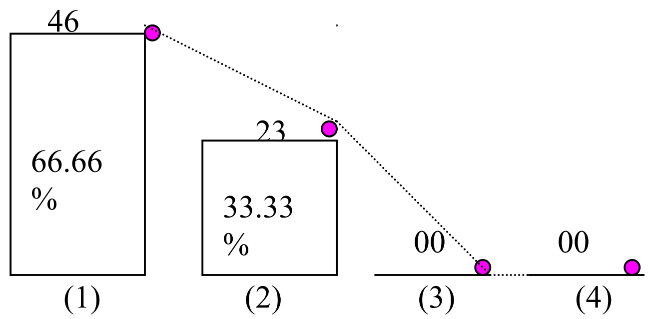
- soit par son effectif (dans un sondage, on doit classer les résultats selon l'importance du nombre),
- soit par sa fréquence, qui est le rapport entre l'effectif total et celui de ladite classe.

On pourrait encore cumuler ces résultats, en totalisant l'effectif d'une classe déterminée avec ceux des classes antérieures (les cumuls nous permettent de résoudre les conflits).

3.4-2 / TRAITEMENT DES DONNEES :

On donnera les résultats sous forme de diagrammes en bâtons. Ces schémas feront apparaître une structure qui est la distribution du phénomène étudié.

1/ Etude de la 1ère série : ***le choix du module***



Effectifs/ Fréquences

LES CLASSES :

(1) Très important
(2) Important
(3) Peu important
(4) Pas important du tout

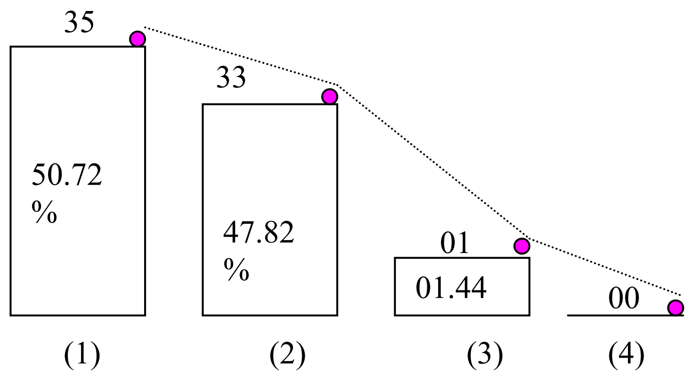
Si l'on joint les sommets, on trace une ligne brisée nommée polygone des fréquences qui schématise l'allure de la distribution.

La classe (1) a obtenu 66.66%.

Le critère 1 « choix du module » est très important avec une majorité absolue.

Conclusion : le critère 1 est retenu.

2/ Etude de la 2ème série : ***la répartition des séances***



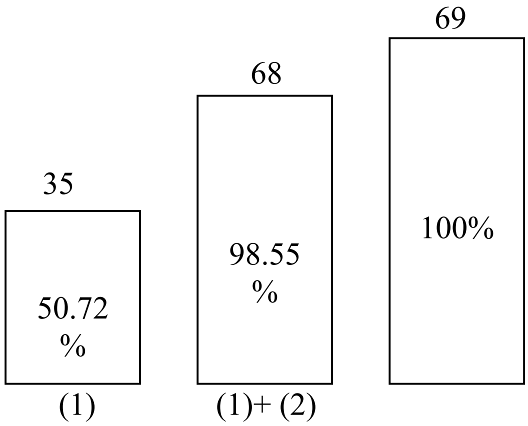
Effectifs/ Fréquences

LES CLASSES :

(1) Très important
(2) Important
(3) Peu important
(4) Pas important du tout

La classe 1 a obtenu 50.72%. Ce taux ne représente pas la majorité absolue qui est le rapport entre l'effectif total et la classe dont le taux est supérieur ou égal à la fréquence de 51.44, ce n'est qu'une majorité simple.

La majorité simple est le plus grand rapport de l'effectif total à chacune des classes qui n'est pas nécessairement supérieur à la fréquence de 51.44.



Les résultats cumulés (effectifs ou fréquences) donnent un diagramme intégral.

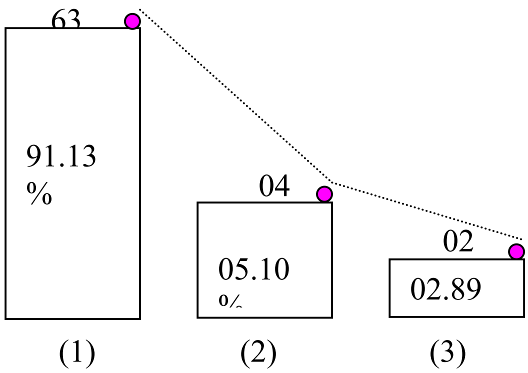
Effectifs cumulés/ Fréquences cumulées

En prenant les classes (1) et (2) cumulées, on obtient une majorité de 98.55%.

Le critère 2 « répartition des séances » est relativement important.

<u>Conclusion :</u> le critère 2 est retenu.

3/ <u>Etude de la 3ème série :</u> ***choix du collègue***

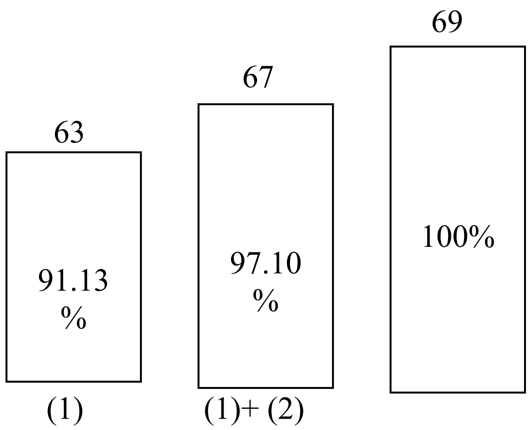


<u>LES CLASSES :</u>

1. Favorable
2. Peu favorable
3. Défavorable.

Effectifs/ Fréquences

La classe 1 a obtenu 91.13%.

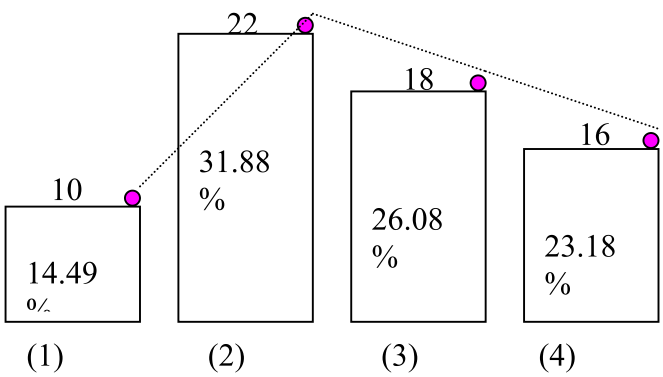


Effectifs cumulés/ Fréquences cumulées.

Le critère 3 « choix du collègue » a reçu l'avis favorable d'une majorité absolue.

<u>Conclusion :</u> le critère 3 est retenu (cf. Annexe I)

4/ <u>Etude de la 4ème série :</u> ***emploi du temps semestriel.***



Effectifs/ Fréquences (*)

LES CLASSES :

(1) Très intéressent

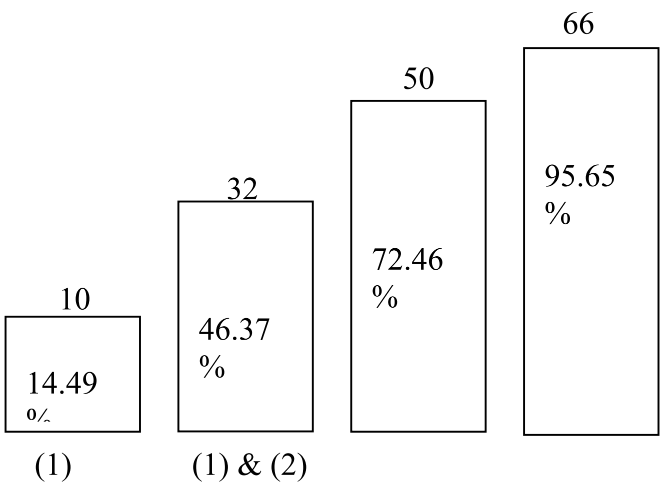
(2) Intéressent

(3) Peu intéressent

(4) Pas intéressent

(*) Dans cette série, il y a trois blancs : le nombre de réponses est 66.

La classe 2 a obtenu 31.88% qui est une majorité simple. On trace le diagramme intégral :



Effectifs cumulés/ Fréquences cumulées.

Les classes (1) et (2) cumulées donnent un pourcentage de 46.37% qui est toujours une majorité simple.

En scindant en deux groupes définis comme suit :

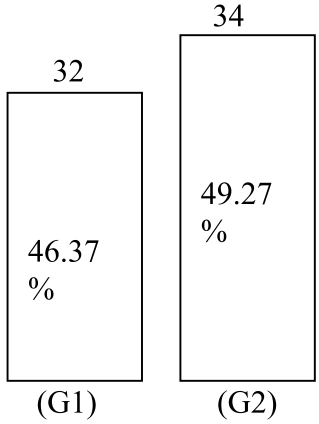
1/ le groupe formé des classes (1) et (2) cumulées,

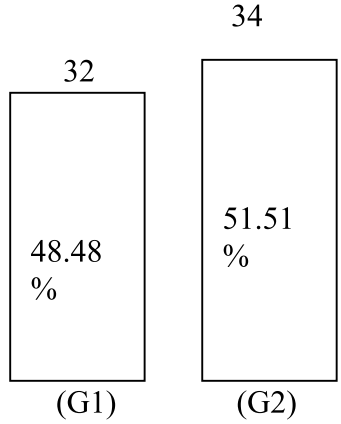
2/ le groupe formé des classes (3) et (4) cumulées.

Le groupe 1 (G1) est caractérisé par « peu intéressant et intéressant ».

Le groupe 2 (G2) est caractérisé par « peu intéressant et pas intéressant ».

On a le diagramme suivant :





<u>Cas 1 :</u> Ces taux sont calculés sur la base de 69 enseignants.

<u>Cas 1 :</u> Ces taux sont calculés sur la base de 66 enseignants.

Le nouveau résultat est de 49.27%; il reste toujours insuffisant.

En calculant les pourcentages sur les réponses effectives, c'est-à-dire 66, on obtient les résultats suivants :

- le groupe 1 a obtenu 48.48%,
- le groupe 2 a obtenu 51.51%.

On fait un <u>test d'hypothèse pour une proportion</u> :

On a prélevé un échantillon de 69 individus et on va faire un test d'hypothèse pour une proportion avec un seuil de probabilité $\alpha = 0.05$.

μ est la proportion d'individus de l'ensemble M des enseignants ayant le caractère c_1 du groupe 1 « très intéressant et intéressant ».

On prendra la moyenne comme estimateur du paramètre μ .

On teste l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ ($\mu_0 = 51.44 \times 10^{-2}$) contre l'hypothèse

$H_1 : \mu < \mu_0$, c'est-à-dire un test unilatéral.

μ est estimé par $\overline{\mu} = (32/69) = 46.37 \times 10^{-2}$.

La taille de l'échantillon N étant supérieure à 30 (N = 69), alors le théorème central limite donne : $\bar{\mu}$ suit la loi Normale de caractéristique,

$$\bar{\mu} \rightarrow n\left(\mu, \sqrt{\frac{\mu(1-\mu)}{N}}\right)$$

On teste l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse H_1. Dans ces conditions :

$$\bar{\mu} \rightarrow n\left(\mu_0, \sqrt{\frac{\mu_0(1-\mu_0)}{N}}\right)$$

Le caractère c_1 dans ce cas, suit une loi Binomiale : $c_1 \rightarrow B(N, \mu)$

$E(c_1) = N.\mu = 69\mu$,

$V(c_1) = N.\mu(1-\mu) = 69\mu(1-\mu)$,

$E(\mu) = \mu$,

$V(\mu) = (\mu(1-\mu)/69)$.

La règle de décision du test est :

- Accepter l'hypothèse H_0 si $|\bar{\mu} - \mu_0| \leq z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\mu_0(1-\mu_0)}{69}}$; $z_{1-\alpha}$ quantile.
- Rejeter l'hypothèse H_0 dans le cas contraire.

Application numérique **:**

Avec les données de l'enquête :

- $\bar{\mu} = 66.37\text{x}10^{-2}$,
- $\mu_0 = 51.44\text{x}10^{-2}$,
- $\alpha = 0.05$,
- $z_{1-\alpha} = 1.646$.

On teste au niveau de probabilité $\alpha = 0.05$, l'hypothèse :

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0 \quad (\mu_0 = 51.44\text{x}10^{-2})$$

contre l'hypothèse :

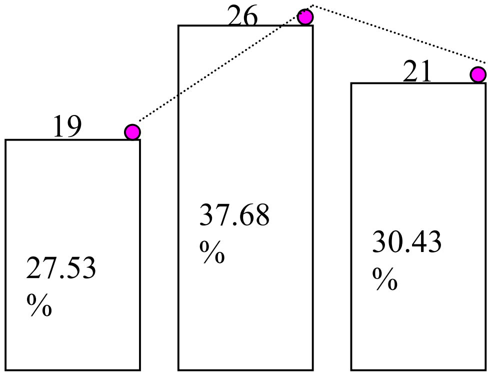
$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

Comme $|\bar{\mu} - \mu_0| = 0.0507 \leq z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\mu_0(1-\mu_0)}{69}} = (1.646).(0.60) = 0.099$,

la conclusion du test est donc l'acceptation de l'hypothèse H_0.

Conclusion : le critère 4 est retenu avec la mention "intéressant".

5/ Etude de la 5ème série : ***enseigner le même module dans des sections différentes.***



LES CLASSES :

(1) Arrange beaucoup

(2) Arrange peu

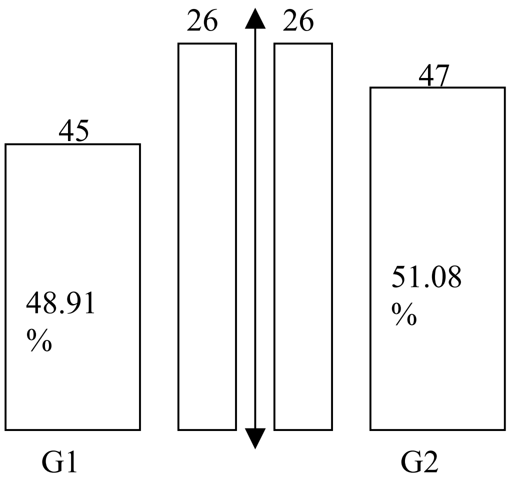
(3) N’arrange pas du tout

(*) Dans cette série, il y a trois blancs : le nombre de réponses est 66.

Dans cette série, il n’y a pas de majorité absolue. La classe (2) intermédiaire, nous l’associerons aux classes (1) et (2), ce qui donnera deux groupes, définis comme suit :

1/ le groupe 1 formé des classes (1) et (2),

2/ le groupe 2 formé des classes (2) et (3).



G1 : le groupe 1

G2 : le groupe 2

Ces fréquences sont calculées sur la base du nombre 92 : [(19+26) + (21+26) = 92].

Le groupe 2 (G2) est majoritaire, ce groupe est caractérisé par « arrange peu et n'arrange pas du tout ».

On fait le test d'hypothèse suivant :

Soit μ la proportion d'éléments de P ayant le caractère C_2 du groupe 2.

On prendra la moyenne comme estimation du paramètre μ .

On teste l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ ($\mu_0 = 51.44 \text{ x } 10^{-2}$) contre l'hypothèse

$H_1 : \mu > \mu_0$.

μ est estimé par $\bar{\mu} = (47/92) = 51.08\text{x}10^{-2}$.

La règle de décision du test est :

- Accepter l'hypothèse H_0 si $\left|\bar{\mu} - \mu_0\right| \leq z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\mu_0(1-\mu_0)}{92}}$,
- Rejeter l'hypothèse H_0 dans le cas contraire.

<u>Application numérique **:**</u>

Avec les données de l'enquête :

- $\bar{\mu} = 51.08\text{x}10^{-2}$,
- $\mu_0 = 51.44\text{x}10^{-2}$,

On teste au niveau de probabilité $\alpha = 0.05$, l'hypothèse :

$H_0 : \mu = \mu_0$ ($\mu_0 = 51.44\text{x}10^{-2}$)

contre l'hypothèse :

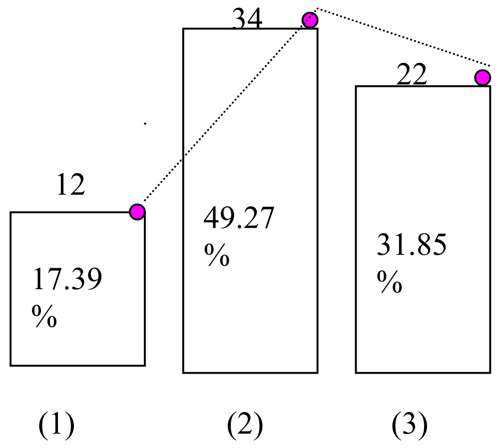
$H_1 : \mu > \mu_0$.

Comme $\left|\bar{\mu} - \mu_0\right| = 3.6x10^{-3} < z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\mu_0(1-\mu_0)}{92}} = (1.646).(0.521) = 0.0858.$

la conclusion du test est donc l'acceptation de l'hypothèse H_0.

<u>Conclusion **:**</u> le critère 5 est retenu avec la mention "arrange".

6/ Etude de la $6^{ème}$ série : ***enseigner des modules différents.***



(1) Arrange sans conditions

(2) Arrange avec conditions

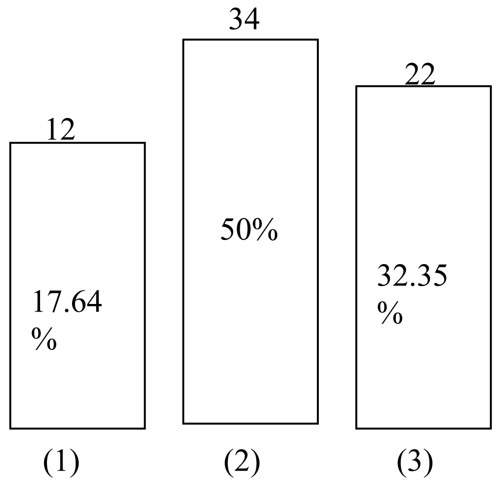
(3) N'arrange pas du tout

Effectifs / fréquences (*)

(*) Dans cette série, il y a un blanc : le nombre de réponses est 68.

Il y a seulement une majorité simple.

En faisant les calculs sur la base des 68 réponses effectives, on obtient les résultats suivants :



La classe (2) a obtenu une majorité de 50% . Ce taux n'est qu'une majorité simple.

On passe donc, au test d'hypothèse.

On teste l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ $(\mu_0 = 51.44 \times 10^{-2})$ contre l'hypothèse

$H_1 : \mu > \mu_0$.

μ est estimé par $\overline{\mu} = (34/69) = 49.27 x 10^{-2}$.

La règle de décision du test est :

- Accepter l'hypothèse H_0 si $\left|\bar{\mu} - \mu_0\right| \le z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\mu_0(1-\mu_0)}{69}}$,
- Rejeter l'hypothèse H_0 dans le cas contraire.

<u>Application numérique **:**</u>

Avec les données de l'enquête :

- $\bar{\mu} = 49.27\text{x}10^{-2}$,
- $\mu_0 = 51.44\text{x}10^{-2}$,

On teste au niveau de probabilité $\alpha = 0.05$, l'hypothèse :

$$H_0 : \quad \mu = \mu_0 \quad (\mu_0 = 51.44\text{x}10^{-2})$$

contre l'hypothèse :

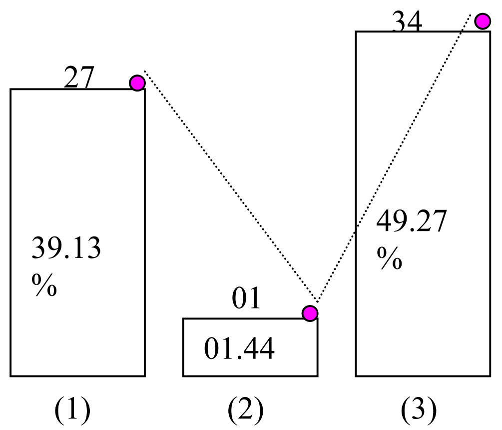
$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

Comme $\left|\bar{\mu} - \mu_0\right| = 0.0217 < z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\mu_0(1-\mu_0)}{69}} = (1.646).(0.602) = 0.0991.$

la conclusion du test est donc l'acceptation de l'hypothèse H_0.

<u>Conclusion **:**</u> le critère 6 est retenu avec conditions (cf. Annexe II pour les conditions énoncées)

7/ <u>Etude de la 7ème série **:**</u> ***choix des unités pédagogiques.***



(1) Enseigner uniquement des TD

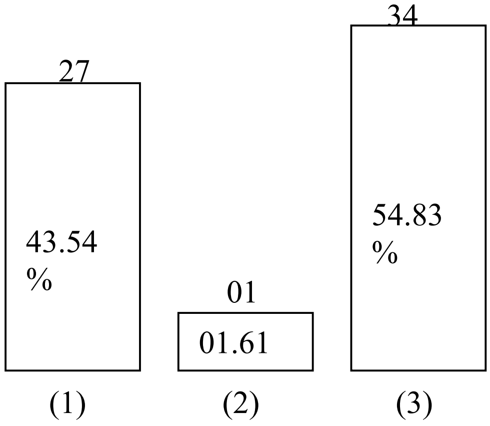
(2) Enseigner uniquement des TP

(3) Indifférent.

Effectifs/ Fréquences (*)

(*) Dans cette série, il y a sept blancs. Le nombre de réponses est 62.

Il n'y a qu'une majorité simple. On fera les calculs sur la base des 62 réponses effectives :



(1) Enseigner uniquement des TD

(2) Enseigner uniquement des TP

(3) Indifférent.

La classe (3) a obtenu une majorité absolue.

On fait un test d'hypothèse.

On teste l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ $(\mu_0 = 51.44 \text{ x } 10^{-2})$ contre l'hypothèse

$H_1 : \mu > \mu_0$.

μ est estimé par $\overline{\mu}$ = (34/69) = 49.27x10^{-2}.

La règle de décision du test est :

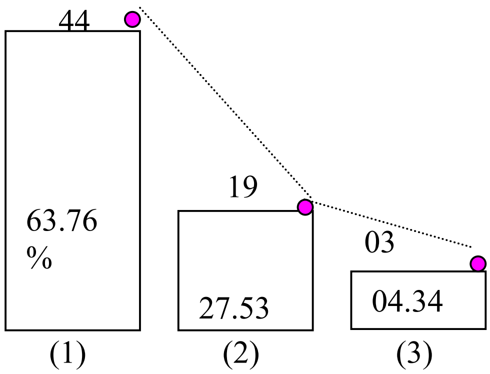
- Accepter l'hypothèse H_0 si $\left|\overline{\mu} - \mu_0\right| \leq z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\mu_0(1-\mu_0)}{69}}$,
- Rejeter l'hypothèse H_0 dans le cas contraire.

La conclusion de ce test est identique au précédent (série 6/).

<u>Conclusion :</u> le critère 7 est retenu avec la mention « indifférent ».

8/ <u>Etude de la 8$^{\text{ème}}$ série :</u> ***nombre de séances maximum par journée et classement des séances par ordre de préférence.***

a/ *<u>Nombre de séances maximum par journée</u>* :



(1) Pour deux séances

(2) Pour trois séances

(3) Supérieur à trois séances.

Effectifs / Fréquences (*)

(*) Dans cette série, il y a trois blancs. Le nombre de réponses est 66.

La classe (1) a obtenu une majorité absolue.

Le critère 8.a/, « nombre de séances maximum par journée », a obtenu une majorité absolue pour deux séances.

Conclusion : le critère 8.a/ est retenu pour deux séances par journée.

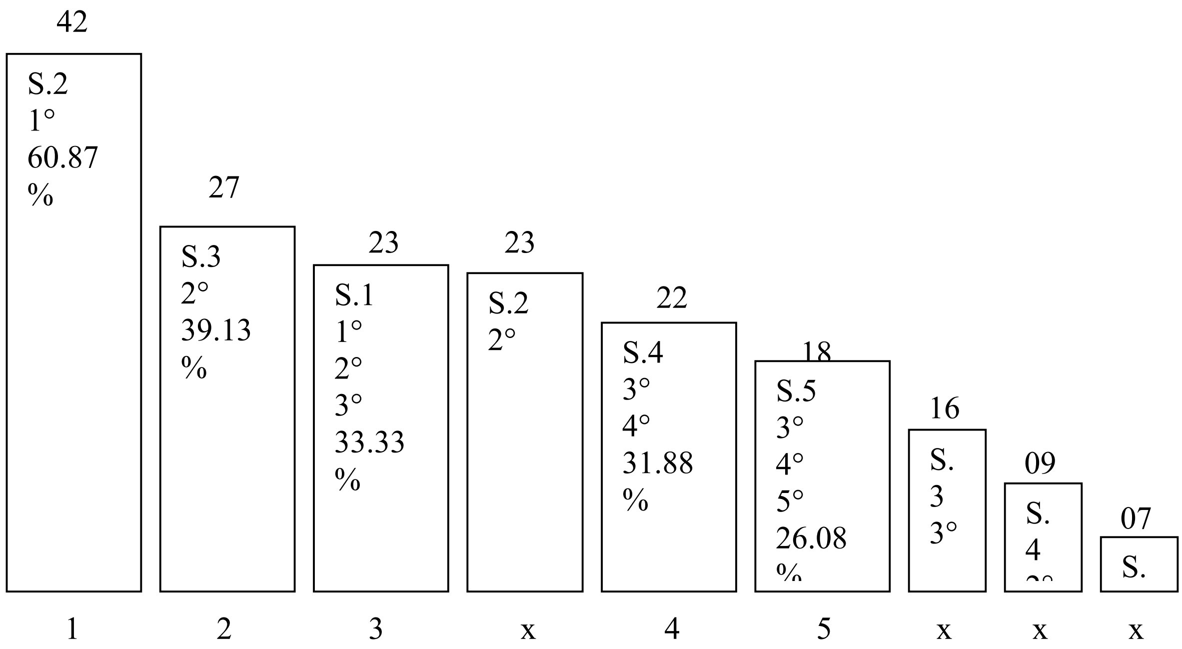
b/ *Classement des séances par ordre de préférence* :

Les résultats sont donnés sous forme d'un tableau à double entrée, où chaque nombre représente le nombre de réponses :

	CLASSEMENT				
Séances	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème
1	23*	07*	03	03	01
2	42*	23*	01	00	00
3	03	27*	16*	03	00
4	01	09*	22*	03	00
5	00	01	18*	03	00
6	00	00	01	01	00

En classant ces nombres par ordre décroissant, on obtient les résultats suivants :

NUMERO DE SEANCE	CLASSEMENT	NOMBRE DE REPONSES
2	Première	42
3	Deuxième	27
1	Première	23
2	Deuxième	23
4	Troisième	22
5	Troisième	18
3	Troisième	16
4	Deuxième	09
1	Deuxième	07



Effectifs / Fréquences

- Les séances et leur classement -

Le classement des séances se fait comme suit :

1/ La séance 2 est classée « première » avec 60.87%.

Dans tout bâton indiquant « séance 2 », cette dernière est éliminée, et aussi, dans tout bâton ayant mention « 1° » est augmenté d'une unité.

2/ La séance 3 est classée « deuxième »avec 39.13%.

On utilise la même méthode qu'en 1/, pour les bâtons ayant les caractéristiques « séance3 » et « 2° ».

3/ La séance 1 est classée « troisième » avec 33.33%.

4/ La séance 4 est classée « quatrième » avec 31.88%.

5/ La séance 5 est classée « cinquième » avec 26.08%.

La méthode s'arrête avec ce dernier résultat.

3.4-3/ <u>INTERPRETATION DES COUTS :</u>

1/ Les coûts associés aux enseignants :

Pour le choix des collègues, on mettra les résultats sous forme d'une matrice E symétrique. Soit E = (e_{il}) une matrice carrée, symétrique d'ordre n (le cardinal de l'ensemble des enseignants).

e_{il} est défini par :

$$e_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si les enseignants } m_i \text{ et } m_l \text{ sont disponibles simultanément} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sur la diagonale principale, le coût est infini.

2/ Les coûts associés aux affectations des enseignants aux périodes :

Pour le choix des séances, on mettra les résultats sous forme d'une matrice A d'éléments a_{ik} définis par :

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enseignant } m_i \text{ est indisponible à enseigner en période k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3/ Les coûts associés aux affectations des enseignements aux périodes :

Les résultats sont mis sous forme d'une matrice B définie par :

$$b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enseignement } c_j \text{ est indisponible à la période k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4/ Les coûts associés aux choix des modules :

Pour le choix du module, nous avons classé ces résultats dans une matrice W définie par :

$$w_{ij} = \begin{cases} r & \text{le numéro de classement du choix de l'enseignant } m_i \text{ au module } c_j \\ M & (M = 10^2 \text{ par exemple}) \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

5/ Les poids associés aux séances :

Les séances de la semaine forment une 6x6-matrice F à raison de 6 périodes par jour pour une semaine de 6 jours.

D'après les conclusions du (§3.2-3 ; 8/), les poids sont définis comme suit :

JOURS	CLASSEMENT				
	3	1	2	4	5
1	4	2	3	5	6
2	5	3	4	6	7
3	6	4	5	7	8
4	7	5	6	8	9
5	8	6	7	9	10
6	9	7	8	10	11

F = (f_{jp}), où f_{jp} est défini par :

$f_{jp} = j + p$, désignant le poids de la séance de la séance repérée par le jour j et le numéro de période de p.

6/ Matrice de qualification :

On définit une matrice Q = (q_{ij}) définie par :

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enseignant } m_i \text{ peut enseigner l'unité } c_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q se présente comme une matrice de disponibilité des enseignants à priori.

La ressource r_j de l'unité c_j, possède la particularité suivante :

$r_{ij} = r_j = C_{.j}$: volume horaire hebdomadaire de l'unité c_j.

3.4-4 / FORMULATION DE LA FONCTION-OBJECTIF :

On mettra le problème, par exemple, sous forme, d'un problème de minimisation :

$$\text{Min.}Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

c_{ij} est le coût de l'affectation de l'enseignant m_i à l'enseignement c_j.

Pour estimer c_{ij}, on doit procéder par étape :

<u>Première étape :</u>

Définir l'ensemble IE des équipes pédagogiques :

$IE = IE_1 \cup IE_2 \cup \ldots IE_p$.

Deuxième étape **:**

Définir l'ensemble IF des enseignements ordonnés par les préférences des enseignants :

$IF = IF_1 \cup IF_2 \cup \ldots IF_q$.

Le problème d'affectation des enseignements aux locaux étant résolu.

Dans l'étape suivante, on s'intéressera aux périodes (un local est défini par une période).

CHAPITRE 4 : CONCLUSIONS DE L'ENQUETE STATISTIQUE SUR LA MODELISATION DU PROBLEME D'EMPLOI DU TEMPS.

4.1 / FORMULATION DU PROBLEME (E T –E) :

Le programme linéaire en nombres entiers (E T / PLE) (CH.2) sera subdivisé en plusieurs phases :

- ♦ première phase : affectation des enseignants aux cours ;
- ♦ deuxième phase : affectation des enseignants aux travaux dirigés ;
- ♦ troisième phase : affectation des enseignants aux travaux pratiques ;

4.1-1 / REMARQUE :

Les cardinaux $|I|$ et $|J|$ sont différents ($I=\{1, 2, \ldots,n\}$ et $J=\{1, 2, \ldots,m\}$ $n \neq m$

L'ensemble $I = \{1, 2, \ldots n\}$ est partitionné en α sous-ensembles disjoints :

$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_\alpha = \bigcup_{p=1}^{\alpha} I_p$, et l'ensemble J : (cf. § A.2-3, CH.1)

$J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_\beta = \bigcup_{q=1}^{\beta} J_q$ est partitionné en β sous-ensembles disjoints.

Dans la partie suivante, on s'intéressera au problème (E T-E).

4.1-2 / FORMULATION :

$$
(P_S)\begin{cases}
\sum_{i \in I_p} \sum_{j \in J_q} c_{ij}\, x_{ij} = Z(\mathrm{Min}) & (1) \\
\text{sachant que:} & \\
\sum_{i \in I_p} q_{ij}\, x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J_q & (2) \\
\sum_{j \in J_q} q_{ij}\, r_j\, x_{ij} \leq d_i \qquad \forall\, i \in I_p & (3) \\
x_{ij} \in \{0,1\} \text{ pour } i \in I_p \text{ et } j \in J_q & (4) \\
1 \leq p \leq \alpha,\; 1 \leq q \leq \beta &
\end{cases}
$$

4.1-3 / DONNEES :

♦ La variable de décision x_{ij} est définie par :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enseignant } m_i \text{ est affecté à l'unité } c_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

♦ $Q = \left(q_{ij}\right)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ matrice de qualification (cf. § A.3-3, ch.1).

♦ Les ressources d_i et r_j : r_j correspond au volume horaire hebdomadaire de l'unité c_j et d_i correspond au nombre d'unité d'enseignement de l'enseignant m_i (volume horaire hebdomadaire de l'enseignant m_i).

Les programmes (P_S) , s = 1, 2, 3 correspondent aux différentes phases.

Remarques :

1) L'unité pédagogique ou classe c_j représente un cours (section), un T.D (groupe) ou bien un T.P (groupe ou ½ groupe).
2) D'autres contraintes secondaires du type :

$x_{ij} + x_{ik} \leq 1$,

$x_{ij} \leq x_{ik}$, $\forall\, i \in I_p$, $\forall\, j, k \in J_q$ peuvent être considérées.

4.2 / PROBLEME OPTIMAL (E T,C) :

On définit les coûts c_{ij} ($i \in I_p$ et $j \in J_q$) de valeurs entières attachées aux rencontres possibles enseignant-enseignement et considérer le problème de trouver une solution au problème (ET) laquelle minimisant la valeur affectée à elle.

Ce problème est le problème d'emploi du temps optimal (E T, C).

C'est un problème de programmation linéaire en nombres entiers bivalent.

Il s'agit dans notre cas, de maximiser la satisfaction des enseignants :

1) Si $c_{ij} = 0$ pour ($i \in I_p$ et $j \in J_q$) alors, ceci revient à l'étude de la faisabilité du problème (E T) (CH.2).
2) Si les c_{ij} sont non tous nuls : Soit Z* la satisfaction idéale des enseignants, et

$\overline{Z}$ = (Min)Z ; Le problème est de minimiser $Z^* - \overline{Z}$.

On définit une transposition τ :

$$\tau : I_p \longrightarrow I_p$$
$$i \longrightarrow \tau(i)$$

Soit $\overline{Z}_\tau$ = (Min) Z_τ suivant la transposition τ , on cherchera à calculer : $\underset{\tau}{\text{Min}}\, (Z^* - \overline{Z}_\tau)$.

COMMENTAIRE :

Il est impossible d'évaluer par une seule fonction-objectif la satisfaction générale. On définit donc plusieurs fonctions-objectif qu'on ne peut améliorer. Puis, on cherche une solution $\overline{Z}^*$ qui minimise le plus grand écart entre les valeurs Z_τ et les valeurs "idéales" $\overline{Z}_\tau$:

$$
\begin{cases}
\text{Min } \Pi \\
\text{Sachant que :} \\
\quad \Pi \geq \overline{Z}_\tau - Z_\tau
\end{cases}
$$

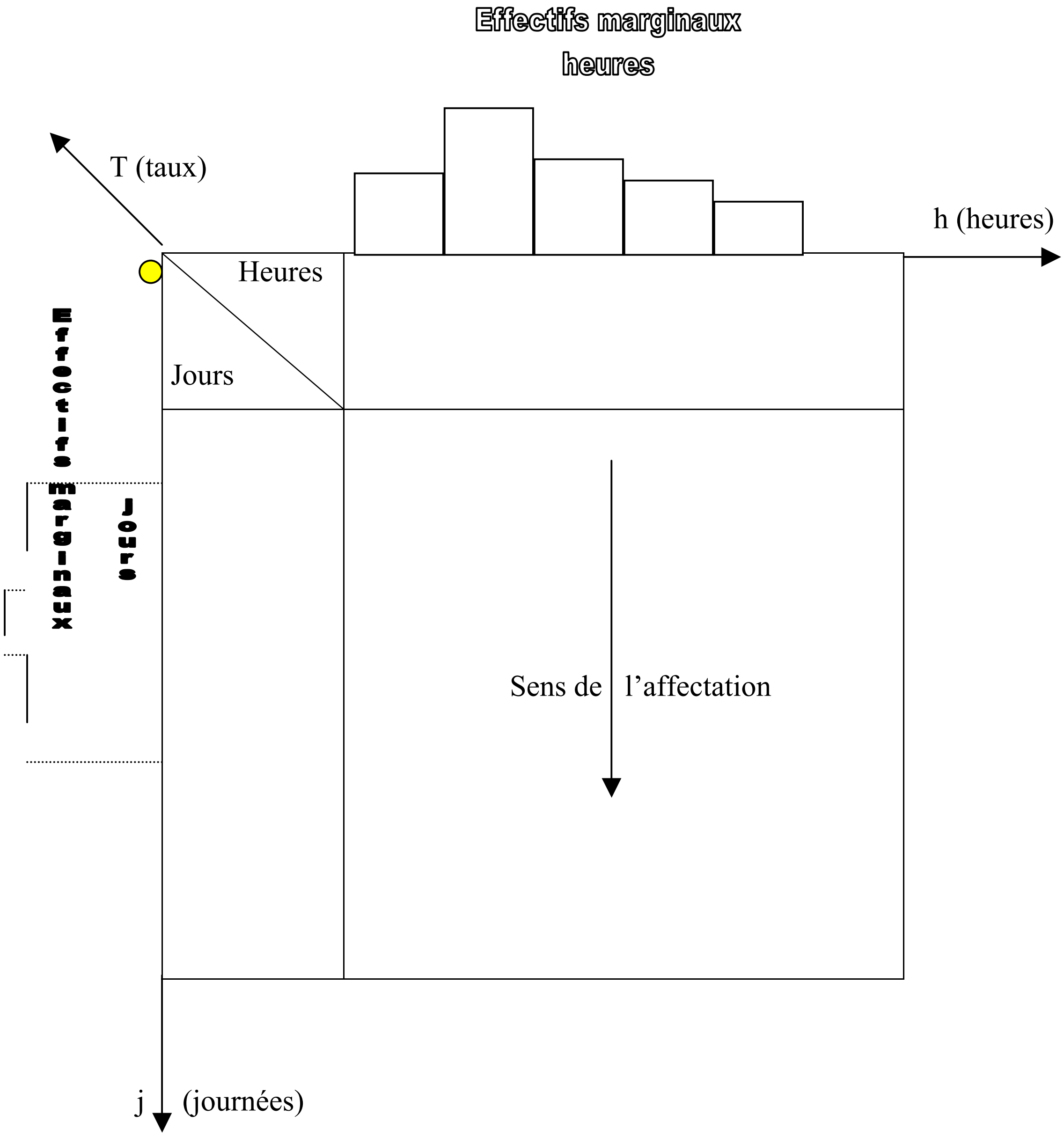
C'est dans l'application que la solution fournit par le programme linéaire ci-dessus sera jugée satisfaisante ou pas.

4.3 / APPROCHE (HEURISTIQUE) :

On propose une affectation verticale pour l'emploi du temps, i.e choisir un créneau horaire et affecter les unités pédagogiques en parcourant les journées.

Pour une visualisation globale, on propose une approche tridimensionnelle, tenant compte :

1) vœux des enseignants en privilégiant les séances souhaitées ;
2) par journée, les étudiants sont équidistribués sur la semaine ;
3) Dans le plan (Toh), les effectifs marginaux par rapport aux créneaux nous fourniront les polygones constatés dans l'étude (question 8, du questionnaire).
4) Dans le plan (Toj), les effectifs marginaux par rapport aux journées, doivent fournir une ligne brisée de tendance monotone.


Effectifs marginaux heures
T (taux)
h (heures)
Heures
Jours
Effectifs marginaux Jours
Sens de l'affectation
j (journées)

4.4 / PROGRAMMATION :

4.4-1 / PRELIMINAIRE :

On définit la matrice D des incompatibilités (conflits) de la manière suivante :

- Hiérarchisation des unités par matières, par spécialité (d'une façon homogène).

		COURS	T.D	T.P
		$U_1U_2 \dots U_P$	$U_{P+1}\ U_{P+2} \dots U_q$	$U_{q+1}\ U_{q+2} \dots U_r$
COURS	U_1 U_2 . U_P			
T.D	U_{P+1} . . U_q			
T.P	U_{q+1} . U_r			

H_j désigne les périodes du cours ou T.D ou T.P de l'unité u_j .

Soit la matrice $D = (d_{j\,k})_{(m \times m)}$, $d_{j\,k}$ désigne le couple (u_j,u_k) définie par :

$$d_{j\,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } H_j \cap H_k \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } H_j \cap H_k = \emptyset \end{cases}$$

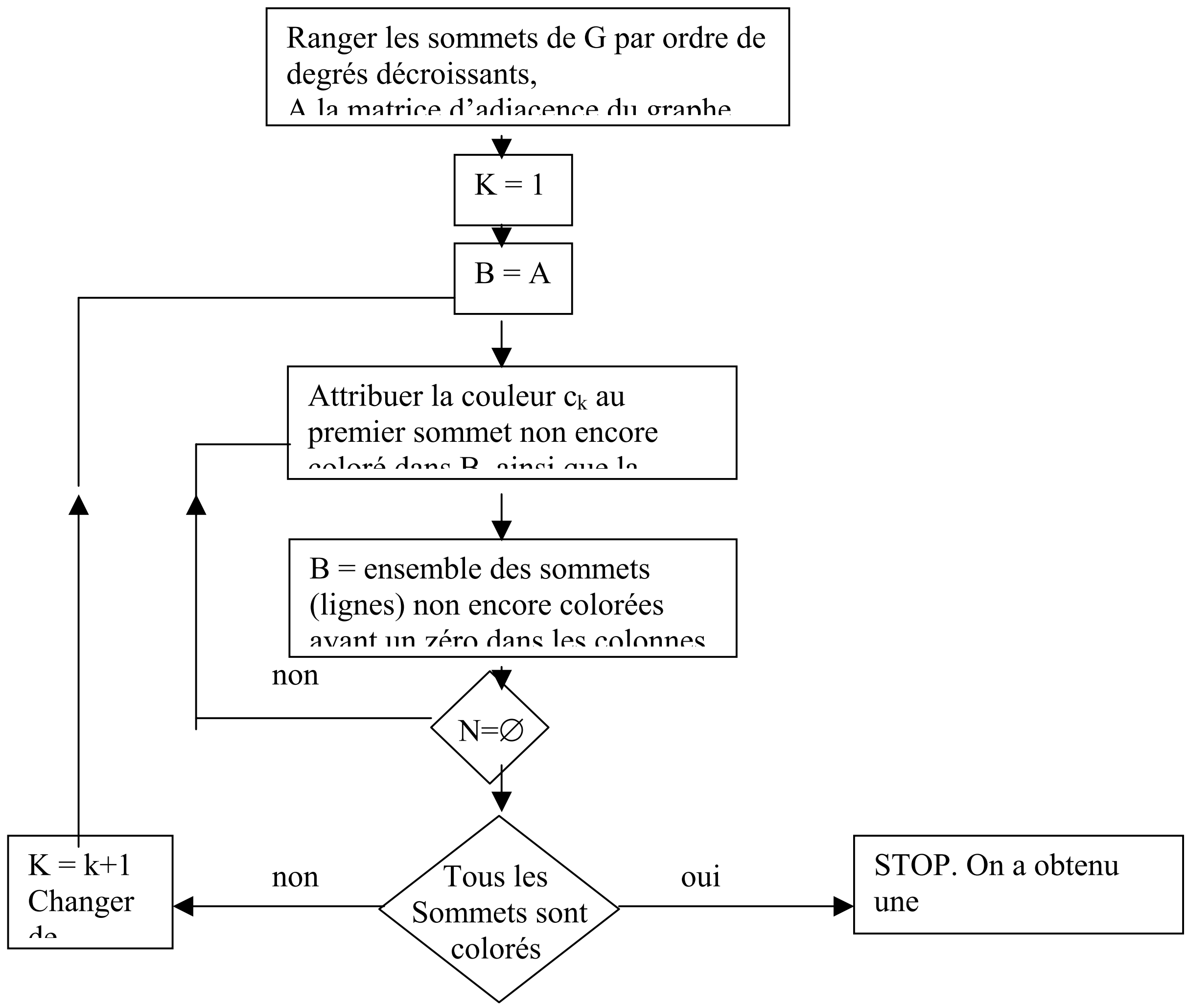
4.4-2 / COLORATION DES SOMMETS :

Soient G un graphe sans boucles et χ (G) son nombre chromatique.

La détermination du nombre chromatique χ (G), ainsi que l'obtention d'une coloration minimale des sommets de G est un problème difficile. Il est préférable, en pratique, de recourir à des heuristiques, qui mènent à une coloration des sommets non nécessairement minimale. L'algorithme de WELSH et POWELL [58] en est un exemple.

Cet algorithme est décrit à partir d'une matrice d'incidence A ; on note c_k la couleur du sommet x_i .

ORGANIGRAMME



4.4-3 / DEFINITIONS :

On définit le vecteur vœux (choix) de l'enseignant m_i :

$$V_i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_m^i \end{pmatrix} \quad \text{avec } x_j^i \text{ défini par : } x_j^i = \begin{cases} 1 \text{ si l'unité } u_j \text{ est choisie par l'enseignant } m_i \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le produit $DV_i = (v_j^i)$, v_j^i désigne le nombre d'incompatibilité de l'unité u_j avec toutes les unités" choisies" (i.e $x_j^i = 1$ dans V_i).

Remarque :

Vu la taille des matrices et vecteurs définis, D et V_i peuvent être définis comme matrices blocs.

4.4-4 / Algorithme choix – permutes :

Etant donnée la matrice des incompatibilités (ou conflits) $D = (d_{p\,q})$ $p,q \in I_p$,

$$d_{p\,q} = \begin{cases} 1 \text{ si l'unité } u_p \text{ est incompatible avec l'unité } u_q \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

D matrice symétrique, booléenne et carrée.

A partir de la matrice D, on définit la matrice P , $P = (p_{j\,q})_{\,j\,,q\,\in\,I_p}$ de la manière suivante :

$$P_{j\,q} = \begin{cases} r \text{ si } d_{j\,r} = 0 \text{ et } r \geq j \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Exemple :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On définit l'ensemble de vecteurs choix :

$V^k = \left\{ v_i^k \ , \ v_i^k \in IR^{|I_p|} \ , \ i \in I_p \right\}$, k = 1, 2, … ,6 (choix à k modules).

$V_i^k = V_i$, tel que $\sum\limits_{j \in I_p} x_j^i = k$.

Recherche du vecteur choix avec maximum de composantes, non nulles, réalisables.

Le premier vecteur $V^{(1)}$, est le vecteur avec m-composantes non nulles.

On calcule $DV^{(1)}$, (v_j^i) les composantes de ce vecteur donnant le nombre d'incompatibilités.

On calcule le nombre de zéro obtenu n_z :

On fait le test $n > n_z$:

Vrai, alors chercher $\underset{j}{Max} \left(v_j^i \right) = v_{j_0}^i$.

$V^{(2)} = V^{(1)} - e_{j_0}$ (e_{j_0} vecteur de la base canonique de IR^n).

(1) calculer $DV^{(2)}$.

Calculer le nombre de zéro obtenu n_z :

faire le test $n > n_z$:

Faux, terminer aller en (2) ;

Vrai, alors chercher $\underset{j \backslash \{j_0\}}{Max} \left(v_j^i \right) = v_{j_1}^i$,

$V^{(3)} = V^{(2)} - e_{j_1}$.

Si $\underset{j}{Max} \left(v_j^i \right) = \left(v_{j_0}^i \ , \ v_{j_1}^i \ , \ v_{j_2}^i \right)$, alors

Calculer $\underset{k}{Max} \left\{ v_{j(k)}^i \right\} = v_{j_2}^i$;

$V^{(4)} = V^{(3)} - e_{j_2}$, aller en (1).

(2) $V^k =$

Soit $P = (p_i)$ le vecteur défini par :

$P_i = 1$ pour $x_1^i = 1$.

Exemple :

$P = (l_1, l_2, l_3)$,

Pour I = 1,n

$Il_1l_2l_3$ faire les combinaisons d'ordre supérieur à 2.

$I<l_1$, $Il_1l_2l_3$ // // // // //

$I=l_1$, Il_2l_3 // // // // //

$I<l_2$, incrémenter.

$I=l_2$, l_2l_3 // // // // //

Avec cet algorithme, on définit V^k automatiquement.

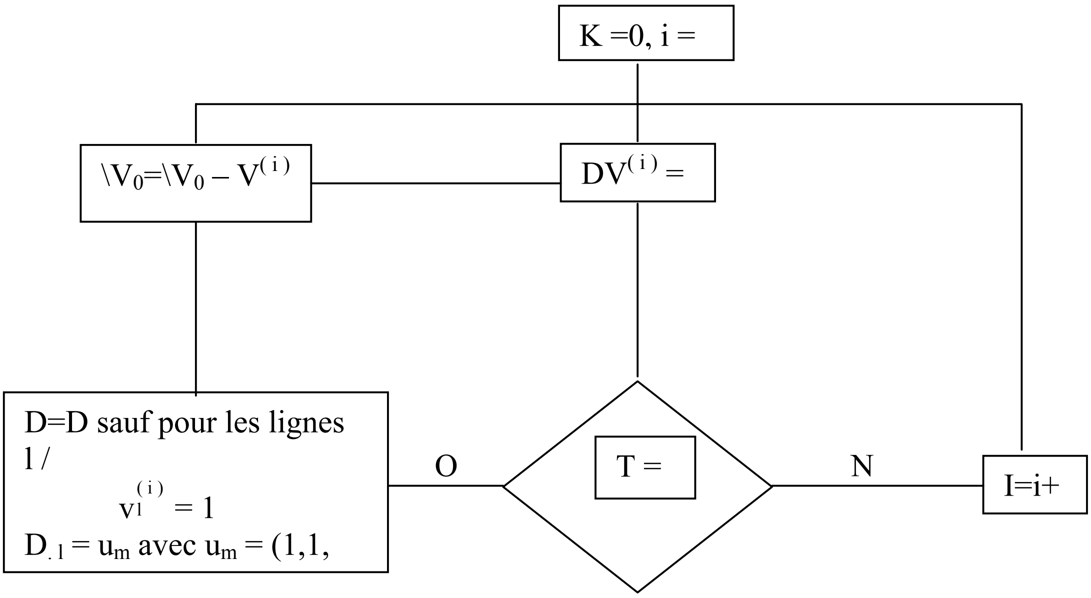
Algorithme choix à k modules :

```
| Si k=1      faire
|         | Tant que j1=1 à n
|         |         Si v(j1,1)=0 alors aller (1)
|         | (2) j1=j1+1
| fsi

| Tant que i=1 à n+1-k
|         Si k>l(i) alors aller (2)
| I1=1
|         | Tant que I2=2 à l(I)-2
|         |         | Tant que I3=I2+1 à l(I)-1
|         |         |         | Tant que I4=I3+1 à l(I)
|         |         |         |         Imprimer v(i,1),v(i,I2),v(i,I3),v(i,I4)
|         |         |         | I4=I4+1
|         |         | I3=I3+1
|         | I2=I2+1
| (1) i=i+1
```

Organigramme

Algorithme des vœux



Algorithme des vœux

Tant que i = 1 à n

P = 0

Tant que j = 1 à m

Si $v_j^i > 0$ alors p = p+1 , $p_0(p) = j$

j = j+1

tant que i_1 = 1 à p

T = 0

Tant que l = 1 à p

$j_1 = p_0(\, l \,)$

$T = T + d_{i_1 j_1}$

l = l+1

si T > 0 alors i_1 = n (*)

$i_1 = i_1 + 1$

si T = 0 faire

tant que l = 1 à p

$i_1 = p_0(\, l \,)$

tant que j = 1 à m

$d_{i_1 j} = 1$

j = j+1

l = l+1

k = k+1 , $C_0(i) = 0$

fsi

i = i+1

(*) Les vœux sont rejetés.

L'algorithme précédent donne une réponse au choix de l'enseignant (i.e : choix compatible ou incompatible).

Exemple :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'enseignant m_1 , son choix V^1 est égal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il a choisi les modules 1, 3, 5.

L'enseignant m_2 , son choix V^2 est égal au vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il a choisi les modules 2, 4, 6.

On peut vérifier ici que pour V^2 , les modules 2 et 4 sont incompatibles.

Conclusion :

V^1 est un bon choix, V^2 est un mauvais choix.

CONCLUSION

Dans la partie de structuration des données pour classifier les critères en vue de faire un choix, on remarque la dominance des données ″subjectives ″, ce qui rend l'élaboration des emplois du temps difficile et donne l'impression d'être imprécis (CH.3, Annexe 1).

Par conséquent, le modèle a été choisi dans le souci de faciliter les discussions, et que tout formalisme (en termes d'optimisation) ne fera qu'obscurcir la situation.

Il est intéressant d'élaborer des emplois du temps et de comparer d'une année sur l'autre les choix arrêtés. Ensuite, au lieu de classer les emplois du temps eux-mêmes, il est préférable d'ordonner l'ensemble des évaluations selon des critères caractérisant une alternative.

L'approche algorithmique est privilégiée dans le souci de développer la solution avec l'outil informatique au détriment de la recherche d'un modèle hypothétique.

La stratégie de résolution a été exposée au Chapitre1, partie B :

- Partie1 : problème (E T_L)
  affectation des enseignements aux locaux, qui aboutira à un emploi du temps des étudiants ;
- Partie2 : problème (E T_E)
  affectation des enseignants aux enseignements, qui aboutira à un emploi du temps des enseignants ;
  A la fin, la résolution du problème global (E T) passe par la fusion des deux emplois du temps précédents.

Il est important de signaler qu'en ce qui concerne la programmation (sur machine), le département de Recherche Opérationnelle a soumis des sujets pour mémoire (PFE) aux ingénieurs relevant dudit département.

ANNEXE $\boxed{\text{I}}$

Cette partie correspond à la question 3, Q.3, critère du "choix du collègue".

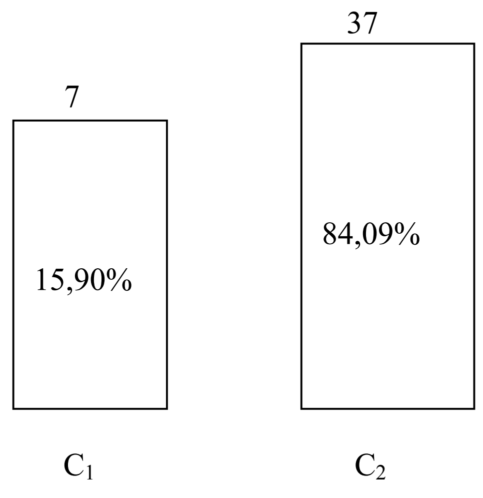
Parmi toutes les réponses recueillies et vu la disparité de ces réponses, on essaiera de les rassembler dans des catégories avec un critère de ressemblance.

A cet égard, on retient deux catégories :

1) on peut rassembler dans une première catégorie les critères suivants :
   - ♦ expérience ;
   - ♦ choisir un collègue dans le même département (surtout quand on est sur le même axe de recherche ou même spécialité).
2) Dans la deuxième catégorie, les critères sont les suivants :
   - ♦ sérieux dans le travail ;
   - ♦ compétence, entente, enseignement homogène (méthode de travail), compatibilité (d'humeur).
   - ♦ relations humaines, affinité professionnelle.

Les résultats recueillis :

Graphe en bâtons :



catégorie 1 : C_1 critères"objectifs"

catégorie 2 : C_2 critères"subjectifs"

Effectifs / Fréquences*

(*) Les calculs sont faits sur les résultats obtenus effectivement :

44 réponses (il y a 25 blancs).

Conclusion :

Le critère du choix du collègue se fait suivant les vœux des enseignants et une procédure automatique définitive est impossible.

Toutefois, on suggère la méthode suivante :

Suivant la matrice définie au § 3.4-3, CH.3 (coûts associés aux enseignants $E = (e_{i\,l})$), on introduit une matrice E*, type dynamique, qui dépendra du temps, à chaque élaboration de l'emploi du temps, autrement dit à chaque rentrée scolaire.

Les éléments de la matrice E* sont définis par :

$$e^*_{i\,l} = \begin{cases} 1 & \text{si l'enseignant } m_i \text{ choisi l'enseignant } m_l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :

Cette matrice E* n'est pas symétrique comme au § 3.4-3,CH.3 car constatant la conclusion du 2) / Annexe I, un enseignant i choisissant un enseignant l n'implique pas nécessairement la réciproque (Figure 1).

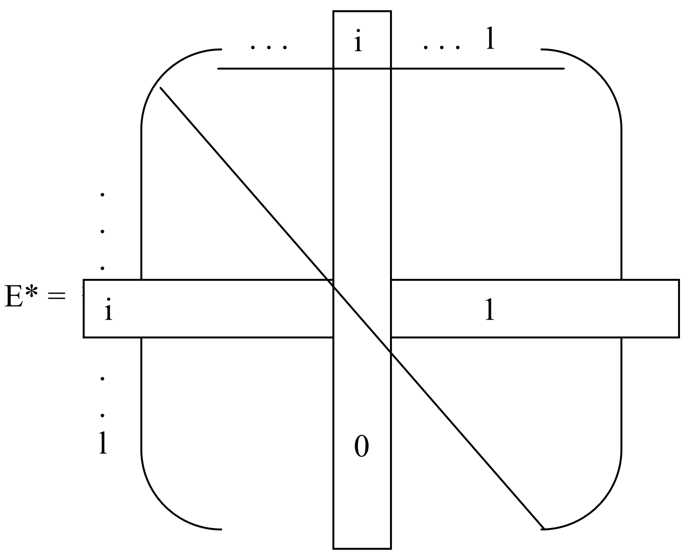


Figure 1

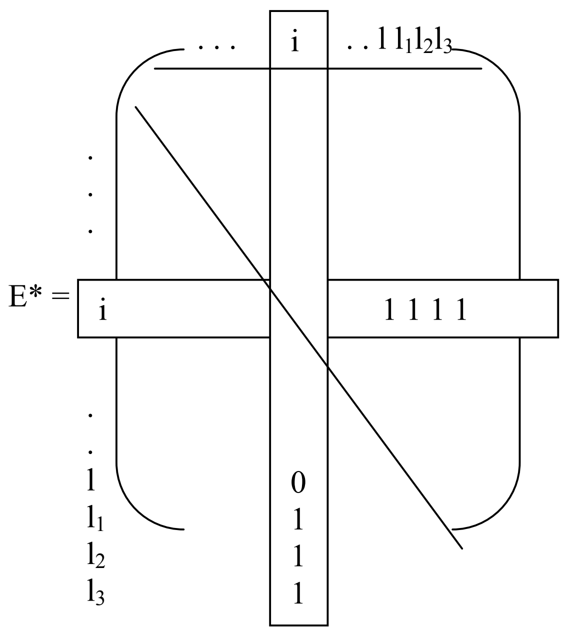


Figure 2

On sait que dans un enseignement, il y a toujours un groupe d'enseignants qui forme l'encadrement ou l'équipe pédagogique dont un enseignant est responsable. Soit m^*_i l'élément principal, pour résoudre ce conflit, nous calculons le sous-ensemble d'enseignants correspondant formé par l'intersection des vecteurs ligne i et colonne i ; La figure 2 donne par exemple le sous-ensemble. En termes de théorie de graphe, E* apparaît comme matrice d'incidence sommet-sommet.

On définit le graphe par : G = (V, Ê), G graphe biparti tel que :

V = E*∪E* et $e_{i\ l}$∈Ê, arc reliant les sommets v_i et v_l si l'enseignant m_i choisit l'enseignant m_l .

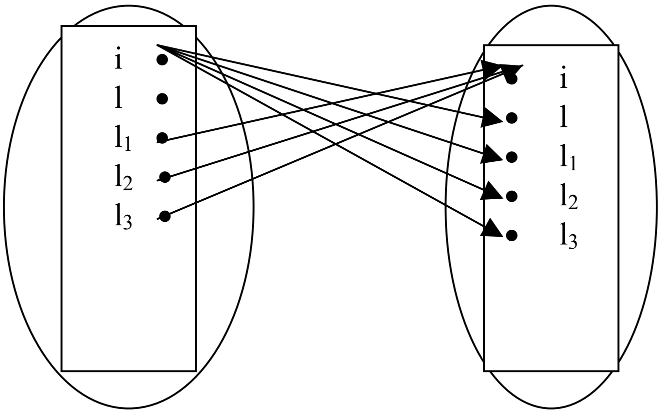


Figure 3

On détermine les cocycles ω{i} correspondant aux deux composantes connexes du graphe biparti. L'intersection des deux cocycles forme un sous-ensemble d'arcs dont les sommets forment le groupe d'enseignants (figure 3).

Remarque :
Le cocycle est déterminé par un singleton représentant l'enseignant principal m^*_i .

Conclusion :
Les cardinaux des équipes pédagogiques doivent être supérieurs ou égaux au nombre d'unités pédagogiques correspondant, sinon, ces équipes forment un problème résiduel (cas de déficit d'enseignants par exemple).

Autre problème : l'enseignant principal m_i*, peut-être associé à plusieurs équipes pédagogiques. Dans ce cas la colonne i représente tous les enseignants qui choisissent m_i* dans un ordre quelconque. Il faut donc, classer ces enseignants par groupes homogènes (qui enseignent le même enseignement, i.e. homogénéité en tâche).

L'équipe pédagogique, c'est l'ensemble des enseignants qui assurent le même enseignement :

$$M^{\alpha} = \{ m_i \ , \ i \in I_{\alpha} \},$$
$$P^i_l = \{ m_l \ , \ l \in I_{\alpha} \ / \ \text{l'enseignant } m_l \text{ choisit l'enseignant } m_i \}.$$

ANNEXE $\boxed{\text{II}}$

Cette partie correspond à la question Q.6, "conditions pour enseigner au moins deux modules différents".

Après étude de toute les réponses, on retient deux catégories :

Catégorie 1 : relation enseignant-enseignement.
(préférence tronc commun exclu).

- ♦ Relation des modules avec la spécialité de l'enseignant.
- ♦ Maîtriser parfaitement au moins l'un des deux modules (exemple : l'avoir au moins enseigner une (01) fois) et être avisé pour l'autre module.
- ♦ Que l'un soit la suite de l'autre (pré-requis).
- ♦ Emploi du temps adéquat.

Catégorie 2 : D'autres caractéristiques.

- ♦ Même journée.
- ♦ Un module de tronc commun et un module de spécialité.
- ♦ Ne pas excéder deux modules différents.
- ♦ Nombre d'étudiants réduit.
- ♦ Seulement T.D ou T.P et non le cours.

Le nombre de réponses :
Catégorie 1 : 26
Catégorie 2 : 07.

ANNEXE III

Cette partie correspond aux contraintes à satisfaire ou à éviter (question Q9).

3.1 / A satisfaire :

Catégorie 1 : répartition des séances.

(a) ♦ Regrouper au maximum les séances d'une journée (respecter les séances telles que souhaitées dans Q8, b/).

♦ Regrouper ces séances dans un nombre minimum de jours (afin de se consacrer le reste de la semaine à la recherche, temps de préparation suffisant).

Exemple : deux séances par jour, enseigner les trois premiers jours de la semaine ou un jour sur deux.

♦ Répartition peut se faire par demi-journée.

(b) Assurer les enseignements le matin de préférence.

(c) ♦ Réserver des demi-journées pour les séminaires.

♦ Une journée libre (enfants scolarisés, jeudi (week-end pour les enseignants habitant loin).

Catégorie 2 :

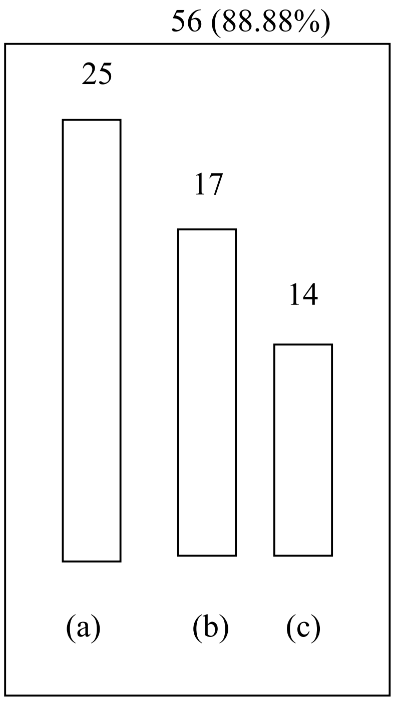
♦ Faire les T.D dans la même salle ou des salles différentes dans le même bloc.

♦ Concorder les départs et les arrivées du transport avec les débuts et fins de séances.

Nombre de réponses :

Catégorie 1 : 56

Catégorie 2 : 07.

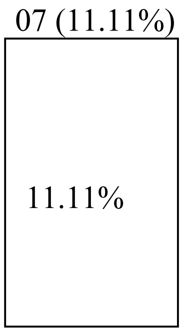


Catégorie 1 : répartition des séances.

(a) regroupement des séances.

(b) enseigner le matin.

(c) réserver des demi-journées.



Catégorie 2 : choix des salles et transport.

Catégorie 1 Catégorie 2

3.2 / A éviter :

Catégorie 1 : contraintes sur le temps.

♦ Les séances tardives et matinales (à cause du transport, enfants scolarisés, recherche, minimiser les absences, assimilation).

♦ Condensation des horaires des enseignements (trois séances d'affilées).

♦ Les séances du milieu de journée (somnolence, cantine).

Catégorie 2 : la dispersion des séances.

♦ Avoir les creux dans la journée (exemple : matin 08 :00, après-midi 13 :00) ou avoir des séances les samedi-dimanche et les autres séances le jeudi.

ANNEXE $\boxed{\text{IV}}$

SUGGESTIONS :

♦ mixage entre l'emploi du temps des enseignants et des étudiants.

♦ respecter les vœux des enseignants, établir des priorités.

♦ seules les contraintes pédagogiques sont à prendre en compte pour l'élaboration des emplois du temps.

♦ adapter les vacances universitaires avec les congés scolaires.

Il y a seulement 13 réponses.

ANNEXE $\boxed{V}$: COMPLEMENTS SUR LES MODELISATIONS MATHEMATIQUES.

$\boxed{\text{I}}$ PROBLEMES D'AFFECTATION : [51]

Soient deux ensembles donnés, un ensemble d'agents et un ensemble de tâches tels que chaque agent exécute une ou plusieurs tâches. Dans les problèmes d'affectations et ses différentes variantes, on se propose de trouver un ensemble de couples optimaux d'agents et de tâches.

On peut distinguer deux cas :

1.1 / Problème d'affectation classique :

Dans ce cas, chaque tâche est affectée à un seul agent, et chaque agent est assigné à une seule tâche. A chaque couple, on y attache un coût.

Une formulation mathématique du problème en un programme linéaire en nombres entiers est la suivante :

$$(LAC)\begin{cases} \sum_{i \in I}\sum_{j \in J} c_{ij}\, x_{ij} = Z\,(\min) \\ \text{sachant que:} \\ \sum_{i \in I} x_{ij} \le 1 \\ \sum_{j \in J} x_{ij} \le 1 \\ \qquad x_{ij} \in \{0,1\} \text{ pour } i \in I \text{ et } j \in J. \end{cases}$$

Données du problème (LAC) :

- ♦ $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ensemble des agents (exemple : enseignants) ;
- ♦ $J = \{1, 2, \ldots, m\}$ ensemble des tâches (exemple : enseignements) ;

Remarque : pour ce cas, on a nécessairement $|I| = |J|$ (i.e. $n = m$) ;

- ♦ c_{ij} est le coût d'affectation de l'agent i à la tâche j.
- ♦ L'interprétation de la variable de décision x_{ij} est :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'agent i est affecté à la tâche } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.2 / Problème d'affectation généralisé :

Dans ce cas, on se propose d'affecter plusieurs tâches à un seul agent en tenant compte des ressources disponibles chez l'agent.

Une formulation mathématique en programme linéaire en nombres entiers est la suivante :

$$
(LAG)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\, x_{ij} = Z\,(\min) & (1) \\ \text{sachant que:} & \\ \displaystyle\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad \text{pour tout } j\in J & (2) \\ \displaystyle\sum_{j\in J} r_{ij}\, x_{ij} \le b_i, \ \text{pour tout } i\in I & (3) \\ x_{ij} \in \{0,1\} \ \text{pour } i\in I \text{ et } j\in J & (4) \end{cases}
$$

Données du problème (LAG) :

♦ r_{ij} : la ressource requise par l'agent i pour satisfaire la tâche j ;

♦ b_i : c'est la valeur de la ressource disponible chez l'agent i, $b_i > 0$.

Tous les coefficients c_{ij} , r_{ij} , et b_i sont entiers pour $i\in I$ et $j\in J$.

Remarques :

(4) les cardinaux $|I|$ et $|J|$ sont différents (i.e. $n \neq m$), ceci se traduit par l'affectation de plusieurs enseignements à un seul enseignant en tenant compte de son volume horaire hebdomadaire.

(5) r_{ij} : le nombre de rencontres entre l'enseignant m_i et la classe c_j (ou le volume horaire hebdomadaire de la classe c_j à satisfaire par l'enseignant m_i).

(6) b_i : c'est le volume horaire hebdomadaire de l'enseignant m_i fixé par la réglementation.

1.3 / Méthode de résolution :

En omettant les contraintes (3), on obtient β sous-problèmes indépendants (R/LAG) si $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_\beta$, un partitionnement de J en β parties.

La résolution du problème (R/LAG) donne une solution qui n'est pas nécessairement réalisable pour le problème (LAG) ; Pour cela, on utilise les méthodes par énumération ou recherche arborescente pour arriver à une solution réalisable pour le problème (LAG).

La résolution du problème d'affectation généralisé est traité par ROSS & SOLAND (1975) [51] et LEGENDRE & MINOUX(1977) [45].

Un résumé est présenté aux parties II et III.

II LES METHODES S.E.P (BRANCH and BOUND) :

La résolution du problème (LAG) par l'algorithme Branch and Bound : les sommets de l'arborescence correspondent à des sous-ensembles de S (il existe un seul sommet qui correspond à l'ensemble S des solutions faisables : la racine de l'arborescence) réparties en niveau (c'est une décomposition du problème en sous-problèmes donc facilement résolus).

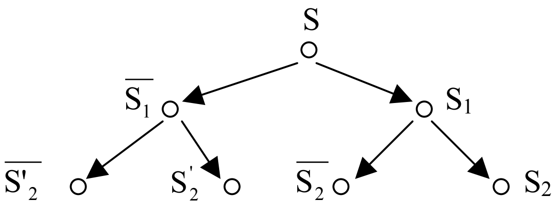


Figure 1

Etablir des bornes (inférieures et supérieures) de la valeur de la fonction-objectif ; pour ce faire, on détermine par une heuristique [51] une solution du problème (LAG), et on passera aux étapes d'évaluation et stérilisation.

III PROGRAMMATION MATHEMATIQUE :

3.1 / Introduction :

Soit le problème de la programmation mathématique s'écrivant :

$$\begin{cases} (\min)\ f(x) \\ \text{sachant que:} \\ \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \quad h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

ou bien : $\underset{x \in K}{(\min)}\ f(x)$ avec $K = \{x \in IR^n \ / \ g_i(x) \leq 0\ (i = \overline{1,n});\ h_j(x) = 0\ (j = \overline{1,m})\}$.

Il s'agit plus précisément de trouver un élément $x^* \in K$ tel que :

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in K.$$

Cas particuliers :

1) programmation linéaire en nombres entiers : toute fonction du problème est linéaire et $K \subseteq IN$;
2) programmation convexe : f est une fonction convexe et K est un ensemble convexe ;
3) problèmes de minimax ou problèmes du point-selle : $f(x) = \max\limits_{y} F(x,y)$.

3.2 / Notion de sous-différentielle :

3.2-1 / Définition : on appelle sous-gradiant, la pente γ vérifiant :

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \gamma , x - x_0 \rangle \quad \forall x \in IR^n ;$$

$\gamma \in IR^n$ est le sous-gradiant de la fonction f au point x_0 .

3.2-2 / Définition : on appelle sous-différentielle, l'ensemble noté $\partial f(x_0)$:

$$\partial f(x_0) = \{\gamma \,/\, f(x) - f(x_0) \geq \langle \gamma , x - x_0 \rangle \}$$

3.2-3 / Lemme : si f est une fonction convexe et dérivable en x_0 alors :

$$\partial f(x_0) = \{ \nabla f(x_0) \}.$$

Propriété : $\partial f(x_0)$ est un ensemble convexe si f est une fonction convexe.

3.3 / Dualité :

Soient (P) et (D) deux programmes linéaires mis sous forme canonique :

$$(P) \begin{cases} (\min)\ Z = Cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} (\max)\ W = yb \\ yA \leq C \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(P) est appelé problème primal et (D) est appelé problème dual.

3.3-1 / Lemme :

si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ constituent un couple de solutions plans (réalisables) des problèmes duals, on a : $C\bar{x} \geq \bar{y}\,b$.

Démonstration :

puisque $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont des solutions réalisables des programmes linéaires (P) et (D) on a :

$$A\bar{x} \geq b \text{ et } \bar{y}A \leq C$$

Donc : $\bar{y}A\bar{x} \geq \bar{y}b$ et $\bar{y}A\bar{x} \leq C\bar{x}$

$$C\bar{x} \geq \bar{y}A\bar{x} \geq \bar{y}b \text{ d'où le résultat.}$$

3.3-2 / Corollaire : si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont des solutions réalisables des programmes duals vérifiant la relation $C\bar{x} = \bar{y}\,b$ (ou plus généralement $C\bar{x} \leq \bar{y}\,b$) alors ce sont des solutions optimales notées (x^*,y^*).

Il est évident que si $\bar{x}$, par exemple, n'était pas optimal, il existerait une solution $\bar{x}'$ telle que : $C\bar{x}' < C\bar{x}$,

or $C\bar{x} \leq \bar{y}\,b$ donc, $C\bar{x}' < C\bar{x} \leq \bar{y}\,b$, ce qui contredit le lemme.

Remarque : Si $\bar{y}$ est une solution réalisable telle que : $\bar{y}b \leq (\max)\ W$, cette fonction $\bar{y}b$ donne une borne inférieure.

3.3-3 / Théorème : (théorème faible des écarts complémentaires)

Soient un couple de problèmes duals, une condition nécessaire et suffisante pour que des solutions réalisables $\bar{x}$ et $\bar{y}$ soient optimales est qu'elles vérifient les relations :

$$\begin{cases} y(Ax - b) = 0 \\ C - yA = 0 \end{cases}$$

3.3-4 / Définitions :

1) Etant donné un couple de problèmes duals, on appelle Lagrangien associé à ces problèmes, la fonction des variables x et y : $L(x,y) = Cx + y(b - Ax)$.
2) Le couple de vecteurs $\bar{x} \geq 0$ et $\bar{y} \geq 0$ constitue un <u>col</u> du Lagrangien $L(x,y)$ lorsque :

$$L(\bar{x},y) \leq L(\bar{x},\bar{y}) \leq L(x,\bar{y}) \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0.$$

Les variables duales y_i jouent un rôle analogue aux <u>multiplicateurs de Lagrange</u> dans la théorie des extréma liés.

<u>Remarque :</u>
Pour résoudre le problème (P), on introduit n multiplicateurs de Lagrange y_i et nous cherchons le minimum de la fonction sans contraintes :

$$Cx + \sum_{i=1}^{n} y_i(b_i - a_i x) .$$

La recherche de ce minimum est remplacée par celle d'un col de cette fonction en x et y.

3.3-5 / Théorème : (théorème du Lagrangien)

Etant donné un couple de problèmes duals, une condition nécessaire et suffisante pour que les deux vecteurs $\bar{x} \geq 0$ et $\bar{y} \geq 0$ constituent des solutions optimales est que $(\bar{x},\bar{y})$ soit un col du Lagrangien $L(x,y)$. La valeur commune des deux fonctions à l'optimum est alors $L(\bar{x},\bar{y})$.

En effet, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont des solutions réalisables, d'après le théorème 3.3-3 /
$C\bar{x} = \bar{y}A\bar{x} = \bar{y}b = L(\bar{x},\bar{y})$, et d'autre part, $\forall x \geq 0$ et $\forall y \geq 0$:

$$L(\bar{x},y) = C\bar{x} + y(b - A\bar{x}) \leq C\bar{x} = L(\bar{x},\bar{y}),$$

$$L(x,\bar{y}) = \bar{y}b + (C - \bar{y}A)x \geq \bar{y}b = L(\bar{x},\bar{y}).$$

Le théorème du Lagrangien n'est que l'application aux programmes linéaires d'une propriété plus générale de la programmation non-linéaire, connue sous le nom de *théorème de Kuhn-Tucker*

3.3-6 / Théorème (Lemme de Minkowsky-Farkas)

Pour toute matrice A et vecteur b, une et une seule des affirmations suivantes est vraie :

a) le système d'équations linéaires, Ax = b a une solution non-négative $\bar{x} \geq 0$,

b) le système d'inéquations linéaires suivant : $\begin{cases} yA \geq 0 \\ yb < 0 \end{cases}$ a une solution $\bar{y}$.

Ce lemme est équivalent à cette proposition :

$$(yA \geq 0 \Rightarrow yb \geq 0) \Leftrightarrow (\exists x, x \geq 0 : Ax = b).$$

<u>Remarques :</u>

1) Soient $K = \{x : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ et $\varphi(y) = \min\limits_{x} L(x,y)$, alors : $\max\limits_{y \geq 0} \varphi(y) \leq \min\limits_{x \in K} Cx$.

2) Soit le problème Lagrangien correspondant au problème (P) :

$$L(P) \begin{cases} \max\limits_{y \geq 0} \varphi(y) & \text{(Fonction - objectif duale)} \\ \text{sous contraintes:} \\ \varphi(y) = \min\limits_{x \geq 0} L(x,y) \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes :

$L(x^*,y^*) = \max\limits_{y \geq 0} \min\limits_{x \geq 0} L(x,y)$, et $\min\limits_{x \in K} Cx = \min\limits_{x \geq 0} \max\limits_{y \geq 0} L(x,y)$.

3.3-7 / Théorème :

Soit $\bar{x}$ un point admissible du problème (P) et (x_1,y_1) un point admissible du problème L(P) alors : $L(x_1,y_1) \leq C\bar{x}$.

<u>Remarque :</u>

Le théorème fournit une borne inférieure pour la valeur minimum du problème (P) :

$$L(x_1,y_1) \leq Cx^*.$$

Si l'on dispose complémentairement d'une solution admissible $\bar{x}$ pour (P), on a l'encadrement suivant :

$$\boxed{L(x_1,y_1) \leq Cx^* \leq C\bar{x}}$$

IV RELAXATION LAGRANGIENNE :

On reprend la formulation du § 1.2, partie I, le problème (LAG) :

Notations :

- ♦ la matrice $R = (r_{i\,j})_{(n \times m)}$, matrice des ressources ;
- ♦ le vecteur $b = {}^t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ seconds membres appelés capacités ;
- ♦ $C = (c_{i\,j})_{(n \times m)}$ coûts ;
- ♦ $J = \{1, 2, \ldots, m\}$ partitionné en β sous-ensembles disjoints : $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_\beta$.

4.1 / Relaxation des contraintes (3) :

La difficulté du problème (LAG) est due essentiellement à la prise en compte des contraintes (3).

En effet, en omettant les contraintes (3), le problème (LAG) se décompose en β sous-problèmes indépendants du type :

$$(\text{R/LAG}) \begin{cases} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_q} c_{i\,j}\, x_{i\,j} = Z(\min) \\ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_q} x_{i\,j} = 1 \qquad 1 \le q \le \beta \\ x_{i\,j} \in \{0,1\} \text{ pour tout } i \in I,\ j \in J_q \end{cases}$$

4.2 / Définition du programme dual :

On associe à chaque contrainte i ($1 \le i \le n$) de (3) une variable duale π_i "multiplicateur" de Lagrange, la fonction de Lagrange (§ 3.3-4/ 1, partie III) est définie par : $L(\pi) = \min\{Cx + \pi\,(b - Ax)\} = \min\{Cx + \pi b - \pi Ax\}$ d'où :

$$\boxed{L(\pi) = \pi b - \max\{\pi Ax - Cx\}}$$

Le problème dual de (LAG) s'écrit : $(\text{DAG}) \begin{cases} L(\pi^*) = \text{Max } L(\pi) \\ \pi \in IR^{m+} \end{cases}$;

4.2-1 / Propriétés du programme dual :

Soit X l'ensemble des vecteurs $x \in IR^n$, points extrêmes du polyèdre convexe IP défini par les contraintes (2) et (4) du problème (LAG).

Posons : $|X| = B$ et $X = \{x^k\}$ $k = 1, 2, \ldots, B$;

Pour $1 \le k \le B$, on définit $L(\pi, x^k)$ par : $\boxed{L(\pi, x^k) = -\pi b + Cx^k + \pi Ax^k}$

Notons :

- $\gamma_k = Ax^k - b$
- $c_k = Cx^k$,

on a donc : $L(\pi,x^k) = \pi\,\gamma_k + c_k$, et par suite :

$$\boxed{L(\pi) = \min_k \{L(\pi,x^k)\} = \min_k \{\pi\,\gamma_k + c_k\}}$$

La fonction $L(\pi)$ est l'enveloppe inférieure d'une famille de B hyperplans d'équations : $y = c_k + \pi\,\gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, B)$.

4.2-2 / Discussion :

Soit $V(\pi) \subset \{1, 2, \ldots, B\}$ l'ensemble des indices l, $1 \le l \le B$ tels que :

$c_l + \pi\,\gamma_l = \min_k \{c_k + \pi\,\gamma_k\}$, $\pi \in IR_+^n$.

1) Si $|V(\pi)| = 1$, $V(\pi) = \{k\}$ alors : $L(\pi)$ est différentiable au point π, et le vecteur γ_k est le gradiant de L en π.
2) Si $|V(\pi)| > 1$ la fonction L n'est pas différentiable en π, on utilise alors la notion de sous-gradiant (§ 3.2/ définition 3.2-1/) . La fonction $L(\pi)$ possède des dérivées directionnelles en tout point π :

$$DL(\pi,t) = \lim_{t\to 0} \frac{L(\pi + t.h) - L(\pi)}{t} \quad (\forall h \in IR_+^n).$$

On a la relation fondamentale : $\boxed{DL(\pi,t) = \min_{\gamma \in \delta L(\pi)} \left[t.\gamma \right]}$

Remarques :

1) les vecteurs γ_l , $l \in V(\pi)$ sont les points extrêmes de $\delta L(\pi)$.
2) La résolution du programme dual (D) se ramène donc à la recherche du maximum d'une fonction concave non-partout différentiable.

4.3 / Résolution du programme dual (DAG) : Méthodes numériques.

On distingue deux classes de méthodes pour la résolution :

1) Méthodes indirectes :

   La recherche de la solution en utilisant les conditions d'optimalités ;
2) Méthodes directes :

   La recherche est algorithmique sans utilisation des conditions d'optimalités.

4.3-1 / Méthode itérative :

Dans la première classe, on utilise la méthode itérative :

Soit $K = \left\{ x \in IR^n \ / \ Rx \leq b \text{ et } \sum_{i \in J_q} x_i = 1 \quad (q = 1, 2, \ldots, \beta),\ x_i \in \{0,1\} \right\}$, ce sont les contraintes (2), (3), (4) du problème (LAG). Cette méthode qui est aussi appelée méthode de relaxation dont le schéma général est le suivant :

On pose $x^{k+1} = Cx^k$, et on suppose que si $x^k \in K \Rightarrow x^{k+1} \in K$ et $Cx^{k+1} \leq Cx^k$ $(k \in IN)$.

On définit la relation :

$X^{k+1} = x^k + \alpha_k.p^k$ avec :

p^k : direction de déplacement ou descente ;

α_k : pas ;

4.3-1.1 / Choix de α_k :

Pour une direction donnée p^k, on résoud le problème de CAUCHY suivant :

$C(x^k + \alpha_k.p^k) = \min\limits_{\alpha}\left[C(x^k + \alpha p^k)\right]$, $\alpha \geq 0$.

4.3-1.2 / Choix de p^k :

(i) Méthodes de gradiants :

$P^k = -\,\mathrm{grad}(Cx^k) = -\,\nabla(Cx^k)$: direction de descente de plus grande pente ($\nabla(Cx^k) \neq 0$).

(ii) Méthodes de sous-gradiants :

Théorème : f est convexe et $\delta f(x) \neq \varnothing$, $\forall x$ et $\min\limits_{x \in IR^n} Cx \geq a$ $(a \in IR)$ alors on a :

(a) $x^{k+1} = x^k - \alpha_k \dfrac{\gamma_k}{\left\|\gamma^k\right\|}$, $\gamma^k \in \delta f(x^k)$, $c^k \neq 0$ et $\alpha_k > 0$ avec $\alpha_k \xrightarrow[k \to 0]{} 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$.

(b) Il existe une sous-suite x^{k_1} telle que : $\lim\limits_{k_1 \to \infty} f(x^{k_1}) = \min\limits_{x \in IR^n} Cx$.

(c) S'il existe un $\gamma_k = 0$ alors x^k est la solution.

L'ALGORITHME :

(a) étape 0 : partir d'un point $\pi^0 \in IR_+^n$ et définir une suite de nombres π_j (j = 1, 2, …) telle que $\pi_j \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$ (π_j représente la longueur du déplacement à l'itération j).

(b) Etape j : déterminer un sous-gradiant $\gamma(\pi^j) \in \delta L(\pi^j)$ au point π^j.

(c) Définir π^{j+1} par : $\pi^{j+1} + \pi_j.\gamma(\pi^j)$, retourner à (b).

Remarque : si $\pi^{j+1} \notin IR_+^n$, projeter π^{j+1} sur IR_+^n.

4.3-2 / Formulation de (DAG) en programmation linéaire :

Dans la deuxième classe, on utilise la résolution du dual par programmation linéaire.

D'après les propriétés au § 4.2-1, le problème dual s'écrit :

$$\max_{\pi \in IR_+^n} L(\pi) = \max_{\pi \in IR_+^n} \min_{k = 1,2,\ldots,B} \{c_k + \pi\gamma_k\}.$$

4.3-2.1 / Le programme linéaire équivalent :

$$(P_2) \begin{cases} \max W \\ \text{sachant que:} \\ c_k + \pi\gamma_k \geq W \quad (k = 1, 2, \ldots, B) \end{cases}$$

La méthode n'est autre que l'application du principe de décomposition de DANTZIG et WOLFE [36] au programme (P_1) où la contrainte d'intégrité a été relaxée.

4.3-2.2 / Le programme dual de (P_2) :

A chaque contrainte k, on lui associe une variable $y_k \geq 0$;

$$(P_3) \begin{cases} \min \sum_{k=1}^{B} c_k y_k \\ \text{sachant que:} \\ \sum_{k=1}^{B} (Ax^k) y_k \geq -b \\ \sum_{k=1}^{B} y_k = 1 \\ \qquad y_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, B) \end{cases}$$

C'est le maitre-programme associé à P_1 ($\gamma^k = Ax^k - b$) sans les contraintes d'intégrité dans la méthode de décomposition de DANZIG et WOLFE.

De façon classique, le programme (P_3) est résolu par génération de colonnes [36].

Recherche de solutions admissibles :

On doit d'abord vérifier que le programme (LAG) possède des solutions entières (faisabilité du programme (LAG)). Pour cela, on utilise le lemme de FARKAS et MINKOWSKY présenté au paragraphe 3.3-6,partie III.

[1] ALMOND M.(1965) : "An algorithm for constructing university Time-Tables", The computer journal, Vol.8, pp.331-340 (ou C.R, Vol.7, p.390).

[2] ALMOND M.(1969) : "A university faculty Timetable", Vol.12, pp.215-217 (ou C.R, Vol.11, p.87).

[3] AKKOYUNLU E.A (1973) : "A linear Algorithm for computing the optimum university Time-table". The computer journal, vol.16 (n°4), n°4, pp.347-350 (ou C.R., Vol.15, p.274).

[4] APPLEBY J.S, BLAKE D.V, and NEWMAN E.A (1961) : "Techniques for producing school Time-tables on a computer and their application to other scheduling problems". The computer journal, vol.3, pp.237-245.

[5] AUBIN J AND FERLAND J (1986) : "A large scale Time-tabling problem". Publication n°568, Université de Montréal.

[6] AUST R.J. (1976): "An improvement algorithm for school Timetabling ", The computer journal, Vol.19, pp.339-343 (ou C.R., Vol.18, p.423, ou Zbl.M., Vol.339, p.438).

[7] BARRACLOUGH E.D (1965) : "the application of a digital computer to the constructions of Time-Tables", The computer journal, Vol.8, pp.136-146 (ou Zbl.M., Vol.129, p.103).

[8] BERGE C (1963) : "Théorie des graphes et ses applications ".Dunod, Paris.

[9] BERGE C (1973) : "Graphes et Hypergraphes". Dunod, Paris.

[10] BERGE C. and FOURNIER J.-C.(1991): "A short Proof for a Generalization of Vizing's Theorem", Journal of Grah Theory, Vol.15, n°3, pp.333-336 (1991).

[11] BURKE E.,BYKOV Y., PETROVIC S.(1999):"A multicriteria Approach to Examination Timetabling", university of Nottingham, School of Computer Science and Information Technology, UK.

[12] CARTER M.W (1986) : "A survey of practical applications of Examination Time-tabling algorithms". Operations Research, vol.34, n°2, pp.193-202.

[13] CHERGUI M.E.A. (1991) "Modèle structuré d'un algorithme d'affectation des enseignements aux locaux", Thèse de Magister, département de Recherche opérationnelle, USTHB, 1991.

[14] CHRISTOFIDES N.(1971): "An algorithm for the chromatic number of a graph", The computer journal, Vol.14 (n°1) pp.38-39 (ou C.R., Vol.12, p.446).

[15] CHRISTOFIDES N.(1973): "Large scheduling problems with bivalent costs", The computer journal, Vol.16 (n°3).

[16] COLE A.J (1964) : "The preparation of Examination Time-tables using a small-store computer". The computer journal, vol.7, pp.117-121 (ou C.R Vol.6 p.17).

[17] COOK S.A (1971): "On the complexity of theorem-proving procedures", Proc. 3rd A.C.M, Symposium on the Theory of computing, pp.151-158.

[18] COUSIN X. (1989): "Emploi du temps: Problème Mathématique ou problème pour la programmation en logique avec Contraintes ?", publication interne n°494-septembre 1989, I.R.I.S.A, université Rennes 1.

[19] CSIMA J. (1965): "Investigations on a Timetable problem", Phil. Doctoral Dissertation (issued as a report of the Institute of computer Science), university of Toronto.

[20] CSIMA J, and GOTLIEB C.C (1963) : "A computer Method for constructing school Time-tables". Presented at the eighteenth annual conference of the association for computing machinery, denver, colorado.

[21] CSIMA J, and GOTLIEB C.C (1965): "Tests on a computer method for constructing school Time-tables". Comm. A.C.M., vol.7, pp.160-164.

[22] CSIMA J (1965) : "Ivestigations on a Time-table problem". Ph.D, Dissertation, university of Toronto.

[23] DEFRENNE A (1978) : "The Time-tabling problem: A survey". Cahier centre Et.Rech. Operat., vol.20, n°2, pp.163-169.

[24] DEMPSTER M. A. H.(1968) : "On the GOTLIEB-CSIMA Time-tabling algorithm", can. J. Math., 20, pp.103-119.

[25] DEMPSTER M. A. H.(1968) : "Two algorithms for the time-table problem", Combinatorial mathematics and its Applications, Proceedings of a Conference held at the mathematical institute, oxford, July 1969.

[26] DESNOS J.F (1971) : "Elaboration Automatique d'emploi du temps". Thèse de docteur-Ingénieur, université scientifique et médicale de Grenoble.

[27] DE WERRA D (1966) : "Construction of school Timetables by Flow methods". Department of Management sciences, university of Waterloo, Waterloo, Ontario.

[28] DE WERRA D (1985) : "An introduction to Timetabling ". European Journal of Operational Research, vol.19, n°2, pp.151-162.

[29] EARLY S (1968) : "Evaluating a Time-table Algorithm based on graph recoloring" Ph. Dissertation, university of Oxford.

[30] EVEN S.A, ITAI A, and SHAMIR A (1976): "On the complexity of Time-table and Multicommodity flow problems". Journal S.I.A.M. on computing, vol.5, n°4, pp;691-703.

[31] FERLAND J.A , ROY S. (1985) : "Timetabling problem for university as assignment of activities to resources". Computers and Operations Research, vol.12, n°2, pp.207-218.

[32] FERLAND J.A. et BABIN G. et AUBIN J (1986) : "Système de confection d'horaires de cours". Publication n°582, Département d'informatique et de Recherche Opérationnelle, université de Montréal, octobre 1986.

[33] FERLAND J.A. , ROY S., LOC T.G.(1986):"the Timetabling problem", OR models on Microcomputers.

[34] GEOFFRION A.M (1970) : "Elements of large school Mathematical Programming". Management Sciences, vol.16, pp.652-691.

[35] GEOFFRION A.M. (1974) : "Lagrangean Relaxation for Integer Programming",Mathematical Programming Study 2, 1974, pp.82-114.

[36] GONDRAN M. et MINOUX M (1985) : "graphes et Algorithmes". Eyrolles, Paris.

[37] GOTLIEB C.C (1963) : "The construction of class-teacxher Time-tables". Proc. IFIP Congress 1962, Munich, Amsterdam, North-Holland, pp.75-77.

[38] HALL P., (1935): "On representatives of Subsets", J.London Math Soc., 10, (1935), pp.26-30.

[39] HILTON A.J.W. (1980): "the reconstruction of Latin squares with applications to school timetabling and to experimental design", Mathematical Programming Study 13, pp.68-77.

[40] KARP R.M (1972): "Reducibility among combinatorial problems" in R.E. MILLER & J.W THATCHER "complexity of computer computation", Plenum Press, pp.85-103.

[41] KIRKPATRICK S., GELATT C.D., JR., VECCHI M.P.:"Optimization by Simulated Annealing", Science, vol.220, Number 4598, 13 May 1983.

[42] LAPORTE G. and DESROCHES S. (1986):"The problem of assigning students to course section in a large engineering school", Computer and Operations Research, 13, pp.387-394.

[43] LAURIERE J.L (1974) : "Problèmes d'emploi du temps et Algorithme de coloration des hypergraphes". Compte rendu de l'Académie des sciences, Paris, volume 278, n°18, série A, pp.1159-1162, 29 avril 1974.

[44] LAWRIE N.L. (1969) : "An integer linear programming model of a school Timetabling problem", the computer journal, Vol.12, pp.307-316 (ou M.R., vol.40, p.1220).

[45] LEGENDRE J.-P. et MINOUX M. (1977) : "Une application de la notion de dualité en programmation en nombres entiers : sélection et affectation optimales d'une flotte d'avions", R.A.I.R.O. recherche Opérationnelle / Operations Research, Vol.11, n°2, mai 1977, pp.201-222.

[46] LEWIS H. R. et PAPADIMITRIOU C.H. (1978) :"L'efficacité des algorithmes", « Pour la Science », mars 1978.

[47] LIONS J (1966) : "A counter-example for GOTLIEB's Method for the construction of school Time-tables". Comm. of the A.C.M., vol.9, n°9, pp.697-698, September 1966.

[48] LIONS J. (May 1967): "The Ontario school scheduling program", the computer journal, Vol.10, pp.14-21 (ou C.R, Vol.8, p.518).

[49] MCDIARMID C.J.H. (1972): "The Solution of a Timetabling problem", Merton college and mathematical institute, Oxford.

[50] PAGE E.S (1963) : "A note on assignment problems", Vol. 6 pp.241-243.

[51] ROSS G.T et SOLAND R.M (1975): "A branch and bound Algorithm for the generalized assignment problem", Mathematical Programming, vol.8, pp.91-103.

[52] SCHMIDT G. and STRÖHLEIN T. (1980) :"Time-table construction –An annotated bibliography". The computer journal, vol.23, n°4, pp.307-316.

[53] SCHREUDERJ.A.M. (1980) : "Constructing Time-tables for sport competitions". Math. Prog. Study n°13, pp.58-67.

[54] SHERMAN G.R. (1963) : "A combinatorial problem arising from scheduling of university classes". Journal of Tennessee Academy of science, vol.38, n°3, p.115.

[55]. TRIPATHY A. (1980) : "A Lagrangian relaxation, Approach to course Timetabling", Journal of Operational research society, 31, pp.599-603.

[56]. TRIPATHY A. (1984) : "School Time-tabling – A case in large binary Integer Linear Programming". Management Sciences, vol.30, n°12, pp.1473-1489.

[57] ULLMANN J.R., HARALICK R.M., SHAPIRO L.G.:"Computer Architecture for solving consistent Labelling Problems", the Computer journal, vol.28, n°2, pp.105-111, 1985.

[58] WELSH D.J.A. and POWELL M.B. (1967) : "An upper bound for the chromatic number of a graph and its applications to Time-tabling problems". The computer journal, vol.10, pp.85-87 (ou Zbl.M., Vol.147, p.152).

[59] WOOD D.C. (1968) : "A system for computing university Examination Time-tables". The computer journal, vol.11, pp.41-47 (ou Zbl.M., Vol.157, p.240).

[60] WOOD D.C. (1969) : "A technique for colouring a graph applicable to large scale Time-tabling problems". The computer journal, vol.12, pp.317-319.

[61] YULE A.P. (1967): "Extensions to the heuristic algorithm for university Time-Tables", the computer journal, Vol.10, p.139.