

Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène
Faculté des Mathématiques
- ALGER -

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

Présentée par
M^{ed}-SALEM REZAOUI

Pour obtenir le diplôme de :

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Mention : Algèbre et Théorie des Nombres

Sujet :

**Étude Algébrique Et Analytique De Certains
Systèmes Différentiels Singuliers**

Soutenue à l'USTHB, le 04 Juillet 2006, devant le Jury composé de :

BENZAGHOU BÉNALI Professeur (USTHB), Président
BETINA KAMEL Professeur (USTHB), Directeur de Thèse
ZITOUNI MOHAMED Professeur (USTHB), Examineur
KESSI AREZKI Professeur (USTHB), Examineur
SALINIER ALAIN Maître de Conférences, Université de Limoges (France), Examineur
BOUGHABA SORAYA Maître de Conférences, Université de Constantine, Examineur
HAMRI NASR-ÉDDINE Maître de Conférences, Université de Constantine, Examineur

**ÉTUDE ALGÈBRIQUE ET ANALYTIQUE DE
CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
SINGULIERS**

THÈSE DE DOTORAT D'ÉTAT

Présentée à l'USTHB par

M^{ed}-SALEM REZAOUI

Pour obtenir le Grade de

DOCTEUR-ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Faculté des Mathématiques, Université d'Alger(USTHB),

B.P32 El Alia Bab-Ezzouar 16111, Alger.

e-mail: mrezaoui@usthb.dz

Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène
Faculté des Mathématiques
- ALGER -

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

Présentée par
M^{ed}-SALEM REZAOUI

Pour obtenir le diplôme de :

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Mention : Algèbre et Théorie des Nombres

Sujet :

**Étude Algébrique Et Analytique De Certains
Systèmes Différentiels Singuliers**

Soutenue à l'USTHB, le 04 Juillet 2006, devant le Jury composé de :

BENZAGHOU BÉNALI Professeur (USTHB), Président
BETINA KAMEL Professeur (USTHB), Directeur de Thèse
ZITOUNI MOHAMED Professeur (USTHB), Examineur
KESSI AREZKI Professeur (USTHB), Examineur
SALINIER ALAIN Maître de Conférences, Université de Limoges (France), Examineur
BOUGHABA SORAYA Maître de Conférences, Université de Constantine, Examineur
HAMRI NASR-ÉDDINE Maître de Conférences, Université de Constantine, Examineur

Remerciements

Je voudrais avant tout renouveler ici tous mes remerciements à Monsieur BÉTINA KAMEL qui a initialement orienté mes recherches depuis ma Thèse de Magister dans la présente direction en leur communiquant une impulsion initiale. Je tiens donc à lui exprimer ici ma profonde gratitude pour sa pédagogie de Directeur de Recherches qui a permis à ma passion mathématique de s'épencher dans plusieurs domaines à partir des travaux de la présente thèse.

C'est tout aussi vivement que j'aimerais remercier Le Professeur BENZAGHOU BÉNALI pour toute l'instruction et la culture mathématique que j'ai acquises de par ses soins durant mon cursus universitaire aussi bien en graduation qu'en post-graduation. Il me fait un grand honneur en présidant le jury de cette Thèse.

Je tiens aussi à exprimer tous mes vifs remerciements au Professeur ZITOUNI MOHAMED pour ses enseignements en Algèbre et Théorie des Nombres. En acceptant de participer au jury, il me fait un grand honneur et montre tout l'intérêt qu'il porte aux travaux de cette Thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur AREZKI KESSI, Professeur à l'USTHB, Madame BOUGHABA SORAYA, Maître de conférences à l'Université de Constantine et à Monsieur HAMRI NASR-EDDINE, Maître de conférences à l'Université de Constantine, pour l'intérêt qu'ils ont porté aux travaux de cette Thèse, et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à son jury, et tout spécialement à Monsieur ALAIN SALINIER, Maître de conférences, à l'Université de Limoges, pour ses accueils chaleureux lors de mes séjours à Limoges et pour notre amicale collaboration aussi bien dans le sujet de la présente Thèse que dans d'autres.

Qu'il me soit permis d'associer à ces remerciements Les Professeurs BERNARD MALGRANGE, de m'avoir permis d'élargir ma culture mathématique, YASUTAKA SIBUYA et BOELE BRAAKSMA pour m'avoir permis d'enrichir mes connaissances sur les équations différentielles non linéaires dans le champ complexe (notamment la théorie de la multisommabilité, dont je n'ai pas parlé ici), ainsi que Le Professeur PIERRE SCHAPIRA de m'avoir initié lors de mes séjours à Paris, à l'aspect plus algébrique « faisceutique », de la théorie des systèmes différentiels linéaires.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur PASCAL ADJAMAGBO pour notre amicale collaboration et ses chaleureux accueils au département de géométrie des équations aux dérivées partielles de l'Université de Paris 6, et à Monsieur CLAUDE SABBAH, Directeur de Recherches CNRS à l'X (école polytechnique de Paris), pour ses cours, sa gentillesse et nos entretiens à l'IHP (Paris) sur l'aspect « plus algébrique » (la théorie des D-modules, non abordée ici) des systèmes différentiels, cela a permis d'enrichir mes connaissances.

Qu'il me soit enfin permis d'associer à ces remerciements toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de cette Thèse, je pense notamment à mes parents et à toute ma famille.

RÉSUMÉ

Cette Thèse est formée de quatre parties distinctes. La première et la deuxième parties traitent de l'aspect algébrique des équations différentielles, elles exposent la théorie de l'indice d'opérateurs différentiels, plus précisément, la première partie concerne l'indice polynomial, dans la seconde partie, il est question de l'indice rationnel. Quant à la troisième et quatrième parties, elles traitent de l'aspect analytique des équations différentielles. Plus exactement on s'intéresse à l'analyticité des solutions formelles de certains systèmes différentiels linéaires dans la troisième partie et non linéaires dans la quatrième partie.

La première partie a fait l'objet d'une publication (Chap.1, [8]), on y trouve une variante polynomiale du théorème d'indice de Malgrange-Komatsu pour des opérateurs différentiels à coefficients matriciels et on démontre une propriété de régularité. Poursuivant l'aspect algébrique dans le chapitre deux, nous montrons comment généraliser à une matrice d'opérateurs différentiels à coefficients dans la K -algèbre des fractions rationnelles à une indéterminée et à coefficients dans K , K étant un corps de caractéristique zéro, les résultats établis dans le cas p -adique par Adolphson (Chap.2, [3]) et Robba (Chap.2, [12]).

Dans le chapitre trois, nous établissons sous certaines conditions, l'analyticité des solutions de certains systèmes de Pfaff linéaires. Quant au chapitre quatre, il a pour objectif la généralisation de certains résultats de Sibuya (Chap.4, [18]), concernant la convergence des solutions séries formelles de certains systèmes différentiels non linéaires en un point singulier irrégulier, ce dernier chapitre a fait l'objet d'une publication (Chap.4, [16]), l'idée utilisée ici est basée sur des techniques empruntées à l'analyse fonctionnelle, on construit un espace de Banach dans lequel nous appliquons le théorème du point fixe.

Table des matières

0.1	Introduction :	3
1	Indice Polynomial d'une Matrice d'Opérateurs Différentiels :	5
1.1	Introduction :	5
1.2	Rappel sur le Théorème de l'indice analytique :	5
1.3	Théorème d'indice dans les espaces de polynômes :	6
1.4	RÉGULARITÉ :	13
	Bibliographie du Chapitre 1	18
2	Théorèmes d'Indice dans des Espaces de Fractions Rationnelles	19
2.1	Introduction :	19
2.2	Rappel sur la théorie des déterminants sur des domaines de Ore :	19
2.2.1	Domaines de Ore :	19
2.2.2	Déterminant sur un domaine de Ore :	20
2.2.3	Propriétés et exemples de déterminant sur des domaines de Ore :	21
2.3	Indice d'un opérateur dans des espaces de fractions rationnelles :	22
2.3.1	Rappel sur les indices d'applications linéaires :	22
2.3.2	Cas d'un opérateurs à pôles dans une partie finie fixée :	24
2.3.3	Cas d'une matrice d'opérateurs différentiels et des fractions rationnelles à pôles dans une partie finie :	26
2.3.4	Corollaire : théorème de Robba pour un système	26
2.3.5	Remarque :	27
2.4	Indice dans des limites inductives d'espaces vectoriels :	27
2.4.1	Un théorème d'indice général :	27
2.5	Cas des fonctions rationnelles à pôles dans un sous ensemble quelconque :	32
2.5.1	cas d'un opérateur :	32
2.5.2	Corollaire : cas de $K(x)$	36
2.6	Indice d'une matrice dans des espaces de fractions rationnelles à pôles dans un sous ensemble quelconque :	36
2.6.1	Le théorème fondamental	36
2.6.2	Cas des matrices d'opérateurs différentiels :	36
	Bibliographie du Chapitre 2	41
3	Solutions Analytiques et Polynomiales de Certains Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles	42
3.1	Introduction :	42
3.2	Notations :	42
3.3	Rappels (le cas d'une variable) :	42
3.4	Quelques systèmes de Pfaff linéaires :	43
	Bibliographie du Chapitre 3	47

4	Convergence des Solutions Formelles de Certains Systèmes Différentiels Non Linéaires Au voisinage d'une Singularité Irrégulière	48
4.1	Introduction :	48
4.2	Notations :	49
4.3	Étude d'une classe d'opérateurs linéaires :	54
4.4	Le cas linéaire : Théorème Fondamental	61
4.5	Application du cas linéaire :	64
4.6	Existence de solutions convergentes pour certains systèmes de Pfaff non linéaires, complètement intégrables :	65
4.7	Exemples :	71
	Bibliographie du Chapitre 4	75

0.1 Introduction :

L'objet du présent travail, est d'exposer d'abord un aspect algébrique pour étudier certains opérateurs différentiels et calculer des invariants qui sont appelés indices de ces opérateurs.

Une étude algébrique est faite dans les deux premiers chapitres, plus précisément nous établissons une formule explicite de l'indice polynomial et nous démontrons une propriété de régularité, nous donnons ensuite dans le second chapitre une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'indice d'opérateurs différentiels agissant sur l'espace vectoriel des fractions rationnelles ayant des pôles dans une partie finie d'un corps K de caractéristique zéro, et nous donnons une formule explicite de ce dernier. Ceci généralise certains résultats d'Adolphson(Chap.2, [3]) et Robba(Chap.2, [12]). Nous donnons ensuite, sous une condition nécessaire et suffisante, une formule d'indice pour une matrice de tels opérateurs, en utilisant certains éléments de la théorie des déterminants sur les domaines de Ore (Chap.2, [1] et [7]), introduite par Dieudonné.

Dans le cadre de l'étude analytique, nous donnons dans les deux derniers chapitres, d'abord des conditions suffisantes d'existence de solutions analytiques pour certains systèmes de Pfaff linéaires, ensuite nous généralisons certains résultats de Y.Sibuya (Chap.4, [18]), plus exactement nous étudions la convergence des solutions séries formelles de certains systèmes différentiels non linéaires au voisinage d'une singularité irrégulière.

Malgrange (Chap.1, [7]) et Komatsu (Chap.1, [6]) ont calculé l'indice analytique. Le résultat du chapitre un, est d'établir sous certaines conditions la formule de l'indice polynomial, pour une matrice P d'opérateurs différentiels, ensuite nous montrons que l'indice analytique est égal à l'indice polynomial, si et seulement si, toute solution convergente du système différentiel $P(u) = g$, où g est un polynôme, est polynomiale.

Dans le chapitre deux, Adolphson (Chap.2, [3]) et Robba (Chap.2, [12]), ont explicité l'indice d'un opérateur différentiel unitaire dans la K -Algèbre θ des fractions rationnelles à une indéterminée, à coefficients dans un corps K de caractéristique zéro, et ayant des pôles dans une partie finie donnée de K . La question naturelle que suscite un tel résultat, est comment le généraliser à une matrice d'opérateurs différentiels à coefficients dans θ , en particulier à une matrice de la forme $I_N \cdot \frac{d}{dx} + A$, où I_N désigne la matrice identité d'ordre N .

L'anneau θ n'étant pas un corps, on ne peut utiliser le théorème du vecteur cyclique pour calculer l'indice d'une matrice d'opérateurs différentiels de la dernière forme, contrairement à ce que suggère le théorème 11-3 de Robba (Chap.2, [12]).

Nous nous proposons dans ce deuxième chapitre d'obtenir d'abord une formule explicite pour l'indice d'opérateurs différentiels de la forme $P = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ où les a_k sont des fractions rationnelles à pôles dans un sous ensemble fini de K , ceci généralise les théorèmes établis, d'abord par A.Adolphson (Chap.2, [3]) dans le cas où les a_k sont des polynômes de $\mathbb{C}_p[x]$, ensuite par P.Robba (Chap.2, [12]) dans le cas où $a_m(x) = 1$. Ensuite nous étendons ce résultat au cas où les a_k ont des pôles dans un sous ensemble quelconque de K .

Nous généralisons ensuite, ce résultat au cas des matrices carrées $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ où les a_{ij} sont des opérateurs différentiels à pôles dans une partie quelconque Ω de K . Comme corollaire, nous obtenons le théorème 11.3 de Robba (Chap.2, [12]) pour un système de la forme :

$$L = I_N \cdot \frac{d}{dx} + G, \text{ avec } G \in \mathcal{M}_N(K(x)),$$

où $\mathcal{M}_N(A)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre N et à coefficients dans A .

Le chapitre trois concerne les systèmes de Pfaff linéaires ayant la forme :

$$\begin{cases} x^{p+1}.y^r \frac{\partial f}{\partial x} + A(x, y).f = g(x, y) \\ x^t.y^{q+1} \frac{\partial f}{\partial y} + B(x, y).f = h(x, y) \end{cases}$$

Nous établissons que, s'il existe des solutions pour de tels systèmes, qui sont des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, celles ci sont des fonctions analytiques, et que sous certaines conditions, elles sont polynomiales.

Notre but dans le dernier chapitre, est de généraliser certains résultats de Y.Sibuya (Chap.4, [18]), plus précisément nous étudions la convergence des solutions formelles au voisinage d'une singularité irrégulière, des systèmes différentiels :

$$A(x).\frac{du}{dx} - B(x).u(x, y) = yE(x, y, u) \quad (1)$$

$$A(x).\frac{du}{dx} = E(x, y, u) \quad (2)$$

où :

- 1) y est un paramètre
- 2) $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ est une fonction à valeurs vectorielles, holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(0, 0, 0) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^N$
- 3) $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$ sont deux matrices carrées $N \times N$ dont les coefficients, sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine $x = 0 \in \mathbb{C}$.

Dans le cas étudié par Y.Sibuya, la matrice intervenant au lieu de $A(x)$ dans les systèmes différentiels précédents, est la matrice diagonale $x^{p+1}.I_N$, qui est un cas particulier de notre résultat.

Nous établissons, sous certaines conditions, la convergence des solutions formelles des systèmes différentiels (1). La méthode utilisée ici, s'inspire de certains travaux de Harris, Sibuya et Weinberg (Chap.4, [9] et [10]), elle est basée sur des techniques d'analyse fonctionnelle, en l'occurrence le théorème du point fixe dans les espaces de Banach. Nous obtenons alors, comme conséquence, sous certaines conditions, l'analyticité des solutions formelles des systèmes différentiels non-linéaires (2) et nous donnons un exemple qui illustre une situation plus générale que celle traitée dans Sibuya (Chap.4, [18]).

Nous déduisons ensuite, des conditions suffisantes d'existence de solutions analytiques pour une classe de système de Pfaff, complètement intégrables, à singularités irrégulières, ayant la forme :

$$\begin{cases} A(x) \frac{\partial u}{\partial x} = E(x, y, u) \\ B(x) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u) \end{cases}$$

Chapitre 1

Indice Polynomial d'une Matrice d'Opérateurs Différentiels :

1.1 Introduction :

Malgrange (Chap.1, [5]) et Komatsu (Chap.1, [6]) ont calculé l'indice analytique. Le résultat de ce chapitre, est d'établir sous certaines conditions la formule de l'indice polynomial, pour une matrice P d'opérateurs différentiels, ensuite nous montrons que l'indice analytique est égal à l'indice polynomial, si et seulement si, toute solution convergente du système différentiel $P(u) = g$, où g est un polynôme, est polynomiale.

1.2 Rappel sur le Théorème de l'indice analytique :

Définition 1.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps k . On dit qu'une application k -linéaire $u : E \rightarrow F$ possède un indice, si son noyau et son conoyau sont de dimensions finies, auquel cas l'indice de u est l'entier :

$$\chi(u, E, F) = \dim \text{Ker}(u) - \dim \text{Coker}(u)$$

Si $E = F$, on note simplement : $\chi(u, E)$

Proposition 1.2.1 (lemme du serpent, voir [1], page 23, prop. 2.10) Soit

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & f \downarrow & & f' \downarrow & & f'' \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramme de A -modules et d'homomorphismes, où les lignes sont exactes, les carrés commutatifs. Il existe alors, une suite exacte longue :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f' & \longrightarrow & \text{Ker } f & \longrightarrow & \text{Ker } f'' & & \\ & & \longrightarrow & \text{Coker } f' & \longrightarrow & \text{Coker } f & \longrightarrow & \text{Coker } f'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où \bar{u} et \bar{v} sont les restrictions de u , v , et, \bar{u}' et \bar{v}' , sont induites par u et v .

Proposition 1.2.2 (voir [1], page 24, prop. 2.11) Soient K un corps et

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0.$$

une suite exacte de K -espaces vectoriels de dimensions finies. On a alors :

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \dim M_i = 0$$

Remarque 1.2.1 Si E et F sont de dimensions finies, on a :

$$\chi(u, E, F) = \dim E - \dim F$$

En effet, la suite

$$0 \longrightarrow \text{Ker} u \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \text{Coker} u \longrightarrow 0$$

étant exacte, on déduit de la proposition 1.2.1, que la somme alternée des dimensions est nulle.

En particulier, si $E = F$ on obtient :

$$\chi(u, E, F) = 0$$

THÉORÈME 1.2.1 (voir Komatsu [5]) Soit P l'opérateur différentiel, $P : \mathbb{C}\{x\}^N \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}^N$ défini par :

$$P(u) = A_m(x) \frac{d^m u}{dx^m} + \dots + A_1(x) \frac{du}{dx} + A_0 u$$

où $A_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, ($0 \leq i \leq m$). Supposons que : $\det(A_m(x)) \neq 0$, alors P possède un indice, et son indice est donné par :

$$\chi(P, \mathbb{C}\{x\}^N) = m.N - V\left(\det(A_m(x))\right)$$

où $V\left(\det(A_m(x))\right)$ désigne l'ordre en 0 de $\det(A_m(x))$.

1.3 Théorème d'indice dans les espaces de polynômes :

Considérons l'opérateur différentiel défini par : $P : \mathbb{C}[x]^N \longrightarrow \mathbb{C}[x]^N$

$$P = A_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + A_1(x) \frac{d}{dx} + A_0(x)$$

où $A_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}[x]^N)$, ($0 \leq i \leq m$) sont des matrices carrées d'ordre N , à coefficients polynomiaux. l'opérateur P agit sur un vecteur $f = {}^t(f_1 \dots f_N)$ de $\mathbb{C}[x]^N$ de la façon suivante :

$$P(f) = A_m(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{d^m f_1}{dx^m} \\ \vdots \\ \frac{d^m f_N}{dx^m} \end{pmatrix} + \dots + A_1(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df_N}{dx} \end{pmatrix} + A_0(x) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Définition 1.3.1 Soit $A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \text{End}(\mathbb{C}[x]^N)$ une matrice carrée d'ordre N à coefficients polynomiaux.

On pose :

$$d^\circ(A(x)) = \sup_{1 \leq i, j \leq N} \left(d^\circ(a_{ij}(x)) \right) \quad (\text{degré de la matrice } A(x))$$

$$V(A(x)) = \inf_{1 \leq i, j \leq N} \left(V(a_{ij}(x)) \right) \quad (\text{ordre en zéro de la matrice } A(x))$$

La matrice $A(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$A(x) = A_s \cdot x^s + A_{s+1} \cdot x^{s+1} + \dots + A_t \cdot x^t, \quad \text{où } t \geq s \geq 0, \quad A_s \neq 0, \quad A_t \neq 0$$

et $A_i \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$, $(0 \leq i \leq m)$ sont des matrices carrées $N \times N$ constantes.

On a alors : $s = V(A)$ et $t = d^\circ(A)$

Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, posons :

$$A_j = A_j^{m_j} \cdot x^{m_j} + A_j^{m_j+1} \cdot x^{m_j+1} + \dots + A_j^{n_j} \cdot x^{n_j}, \quad \text{où } m_j = V(A_j), \quad n_j = d^\circ(A_j)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} I &= \left\{ j \in \{0, \dots, m\}; k - j + m_j = \inf_{1 \leq i \leq m} (k - i + m_i) \right\} \\ &= \left\{ j \in \{0, \dots, m\}; k - (j - m_j) = k - \sup_{1 \leq i \leq m} (i - m_i) \right\} \\ &= \left\{ j \in \{0, \dots, m\}; j - m_j = n, \text{ où } n = \sup_{1 \leq i \leq m} (i - m_i) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J &= \left\{ j \in \{0, \dots, m\}; k - j + n_j = \sup_{1 \leq i \leq m} (k - i + n_i) \right\} \\ &= \left\{ j \in \{0, \dots, m\}; k - (j - n_j) = k - \inf_{1 \leq i \leq m} (i - n_i) \right\} \\ &= \left\{ j \in \{0, \dots, m\}; j - n_j = n', \text{ où } n' = \inf_{1 \leq i \leq m} (i - n_i) \right\} \end{aligned}$$

Soit λ un vecteur de \mathbb{C}^N , on a pour $j = 0, \dots, m$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^j}{dx^j}(\lambda \cdot x^k) = \lambda \cdot k(k-1) \dots (k-j+1)x^{k-j} = \lambda \cdot l_j(k)x^{k-j}$$

où $l_j(k) = k(k-1) \dots (k-j+1)$ et la relation (2.1) donne :

$$A_j(x) \cdot \frac{d^j}{dx^j}(\lambda \cdot x^k) = A_j^{m_j} l_j(k) \lambda x^{k-j+m_j} + \dots + A_j^{n_j} l_j(k) \lambda x^{k-j+n_j}$$

D'où

$$\begin{aligned} P(\lambda.x^k) &= \sum_{j=0}^{j=m} A_j(x) \cdot \frac{d^j}{dx^j} (\lambda.x^k) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq m} A_j^{m_j} l_j(k) \lambda x^{k-j+m_j} + \dots + A_j^{n_j} l_j(k) \lambda x^{k-j+n_j} \end{aligned}$$

En utilisant la définition des ensembles I et J , on obtient :

$$P(\lambda.x^k) = \left(\sum_{j \in I} A_j^{m_j} l_j(k) \right) \lambda x^{k-n} + \dots + \left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k) \right) \lambda x^{k-n'}$$

Notons par \mathcal{M}_k l'espace vectoriel des polynômes de valuations supérieur ou égal à k , défini par :

$$\mathcal{M}_k = \{f \in \mathbb{C}[x] / V(f) \geq k\}$$

Proposition 1.3.1 *Considérons l'opérateur différentiel $P : \mathbb{C}[x]^N \longrightarrow \mathbb{C}[x]^N$ défini par :*
 $P = \sum_{i=0}^{i=m} A_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$, où $A_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, ($0 \leq i \leq m$). Posons $n = \sup_{1 \leq i \leq m} (i - m_i)$
où $m_i = V(A_i)$ est l'ordre en zéro de la matrice A_i , ($0 \leq i \leq m$)

$$n' = \inf_{1 \leq i \leq m} (i - n_i)$$

où $n_i = d^\circ(A_i)$ est le degré de la matrice A_i , ($0 \leq i \leq m$)

On suppose que : $\det\left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k)\right) \neq 0$, il existe alors, un sous espace $V \subset \mathbb{C}[x]^N$ de dimension $(n - n').N$ tel que :

$$\mathcal{M}_{k-n}^N = P(\mathcal{M}_k^N) \oplus V$$

Preuve : Comme $n = \sup_{1 \leq i \leq m} (i - m_i)$ et $n' = \inf_{1 \leq i \leq m} (i - n_i)$, on a $n \geq n'$.

Si $n = n'$, $P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N$ est manifestement surjective, car $\det\left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k)\right) \neq 0$, le sous espace cherché est alors $V = (0)$.

Si $n > n'$, alors $n - n' - 1 \in \mathbb{N}$. Considérons alors la famille suivante de polynômes de $\mathbb{C}[x]^N$:

$$\psi_{ij}(x) = {}^t(0, \dots, 0, x^{k+j}, 0, \dots, 0) \text{ où } x^{k+j} \text{ figure à la } i^{\text{ème}} \text{ place, } (0 \leq i \leq N) \text{ et } (0 \leq j \leq n - n' - 1).$$

La famille ψ_{ij} est libre, en effet supposons qu'il existe une combinaison linéaire $\sum_{i,j} \lambda_{ij} \psi_{ij}$ non triviale, de la famille ψ_{ij} , contenue dans $P(\mathcal{M}_k^N)$, on doit alors avoir :

$$d^\circ\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} \psi_{ij}\right) \leq n - n' \quad (2.2)$$

En d'autres termes, on a :

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} \psi_{ij} = \left(\sum_{j=0}^{j=n-n'-1} \lambda_{1j} x^{k+j}, \quad \dots, \quad \sum_{j=0}^{j=n-n'-1} \lambda_{Nj} x^{k+j} \right)$$

D'où :

$$d^\circ \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} \psi_{ij} \right) = \sup_{1 \leq i \leq N} d^\circ \left(\sum_{j=0}^{j=n-n'-1} \lambda_{1j} x^{k+j} \right)$$

Et

$$\begin{aligned} d^\circ \left(\sum_{j=0}^{j=n-n'-1} \lambda_{1j} x^{k+j} \right) &= \sup \left\{ k+j, \quad 0 \leq j \leq n-n'-1; \quad \lambda_{1j} \neq 0 \right\} \\ &= k+j_i \quad \text{where } 0 \leq j_i \leq n-n'-1 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} d^\circ \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} \psi_{ij} \right) &= \sup(k+j) \\ &= k+j_0, \quad \text{où } j_0 \in \{0, \dots, n-n'-1\} \\ &\geq k \\ &> k-n' \end{aligned}$$

Ce qui contredit la relation (2.2). D'où $P(\mathcal{M}_k^N)$ ne contient aucune combinaison linéaire non triviale des ψ_{ij} . Il en résulte que, les ψ_{ij} engendrent un sous espace, disons \mathcal{V} , de \mathcal{M}_{k-n}^N distinct de $P(\mathcal{M}_k^N)$.

Soit $g \in \mathcal{M}_k^N$

$$g = g_{k-n} \cdot x^{k-n} + g_{k-n+1} \cdot x^{k-n+1} + \dots + g_{k-n'+l} \cdot x^{k-n'+l}$$

où $l > 0$ et $g_{k-n}, \dots, g_{k-n'+l}$ sont des vecteurs de \mathbb{C}^N .

Choisissons $u \in \mathcal{M}_k^N$ et $v \in \mathcal{V}$ de la forme :

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cdot x^k + \dots + u_l \cdot x^{k+l}, & u_0, \dots, u_l &\in \mathbb{C}^N \\ v &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq n-n'-1}} \lambda_{ij} \psi_{ij}, & \lambda_{ij} &\in \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

Satisfaisant l'équation différentielle :

$$P(u) + v = g$$

On a :

$$P(u) = P(u_0 \cdot x^k + \dots + u_l \cdot x^{k+l})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} P(u_0.x^k) = \left(\sum_{j \in I} A_j^{m_j} l_j(k) \right) u_0 x^{k-n} + \dots + \left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k) \right) u_0 x^{k-n'} \\ \vdots \\ P(u_l.x^k) = \left(\sum_{j \in I} A_j^{m_j} l_j(k+l) \right) u_l x^{k-n+l} + \dots + \left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k+l) \right) u_l x^{k-n'+l} \end{array} \right.$$

En faisant la somme de ces $(l+1)$ équations, il vient :

$$\begin{aligned} P(u) &= \left(\sum_{j \in I} A_j^{m_j} l_j(k) \right) u_0 x^{k-n} + \dots + \left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k) \right) u_0 x^{k-n'} + \\ &\quad \dots + \left(\sum_{j \in I} A_j^{m_j} l_j(k+l) \right) u_l x^{k-n+l} + \dots + \left(\sum_{j \in J} A_j^{n_j} l_j(k+l) \right) u_l x^{k-n'+l} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^l pour $(k-n \leq l \leq k-n'-1)$ dans les expressions de $P(u)$ et de g , on obtient le système d'équations suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \right) u_0 + \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-1} l_j(k) \right) u_1 + \\ \quad \dots + \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-l+1} l_j(k+l-1) \right) u_{l-1} + \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-l} l_j(k+l) \right) u_l = g_k \\ \vdots \\ \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-l+1} l_j(k+l-1) \right) u_{l-1} + \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-l} l_j(k+l) \right) u_l = g_{k-n+l-1} \\ \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-l} l_j(k+l) \right) u_l = g_{k-n+l} \end{array} \right.$$

Comme $\det \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \right) \in \mathbb{C}[k]$ et que, par hypothèse $\det \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \right) \neq 0$, on déduit qu'il existe un entier k_0 , tel que $\forall k \geq k_0$ $\det \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \right) \neq 0$.

D'où pour $k \geq k_0$, $\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \in Gl(N, \mathbb{C})$

On déduit alors, pour $k \geq k_0$ l'inversibilité des matrices :

$$\left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k+l) \right), \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k+l-1) \right), \quad \dots \quad , \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \right)$$

En utilisant l'inversibilité de ces matrices, il vient du système (S), par récurrence, que les coefficients u_i , $(0 \leq i \leq l)$ sont déterminés de façon unique par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_l = \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k+l) \right)^{-1} \cdot g_{k-n+l} \\ u_{l-1} = \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k+l-1) \right)^{-1} \cdot \left(g_{k-n+l} - \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k+l) \right) u_l \right) \\ \vdots \\ u_0 = \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k) \right)^{-1} \cdot \left(g_{k-n} - \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-l} l_j(k+l) \right) u_l - \dots - \left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j-1} l_j(k+1) \right) u_1 \right) \end{array} \right.$$

Par suite, on obtient de façon unique, le vecteur :

$$u = u_0.x^k + \dots + u_l.x^{k+l} \in \mathcal{M}_k^N$$

Ceci donne aussi, de façon unique le vecteur v come combinaison linéaire des ψ_{ij} , en posant :

$$v = P(u) - g$$

Finalement la famille des $(\psi_{ij})_{1 \leq i \leq N}$ est une base de \mathcal{V} comme supplémentaire de $P(\mathcal{M}_k^N)$ dans \mathcal{M}_{k-n}^N .

D'où $\mathcal{M}_{k-n}^N = P(\mathcal{M}_k^N) \oplus \mathcal{V}$, et $\dim(\mathcal{V}) = (n - n')N$.

Ce qui termine la preuve de la proposition 1.3.1.

Lemme 1.3.1 *Soit P l'opérateur différentiel défini par*

$$P = A_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + A_1(x) \frac{d}{dx} + A_0(x)$$

où $A_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}[x]^N)$, ($0 \leq i \leq m$). Il existe alors un entier k_1 tel que $\forall k \geq k_1$, l'opérateur

$$P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N$$

est injectif.

Preuve : Comme $\dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{Ker} \left(P : \mathbb{C}[x]^N \longrightarrow \mathbb{C}[x]^N \right) \right) < +\infty$ (cf :[6]), il existe une base $\{u_1, \dots, u_l\}$ de $\mathcal{Ker} \left(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N \right)$, avec :

$$u_i = {}^t (u_i^1, \dots, u_i^N), \quad u_i^j \in \mathbb{C}[x], \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq N$$

Posons $d^\circ(u_i) = \sup_{1 \leq j \leq N} d^\circ(u_i^j)$ et $k_1 = \sup_{1 \leq i \leq l} d^\circ(u_i) + 1$.

Soit $Q(x) = {}^t (Q_1(x), \dots, Q_N(x)) \in \mathbb{C}[x]^N$ un polynôme, avec $Q \neq 0$, tel que $d^\circ(Q) \geq k_1$ (où $d^\circ(Q) = \sup_{1 \leq i \leq N} d^\circ(Q_i)$). On obtient alors :

$$Q(x) \notin \mathcal{Ker} \left(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N \right)$$

En effet, comme $d^\circ(Q) \geq k_1$, Q ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire non triviale des u_i . Il ne reste donc que le polynôme $Q \equiv 0$ qui satisfait à $P(Q) = 0$, d'où :

$$\forall k \geq k_1 : \quad \mathcal{Ker} \left(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N \right) = (0)$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme 1.3.1 .

THÉORÈME 1.3.1 Soit $P : \mathbb{C}[x]^N \longrightarrow \mathbb{C}[x]^N$, l'opérateur différentiel défini par :

$$P = A_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \cdots + A_1(x) \frac{d}{dx} + A_0(x)$$

où $A_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}[x]^N)$, ($0 \leq i \leq m$) sont des matrices carrées d'ordre N , à coefficients polynomiaux.

On suppose que $\det\left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k)\right) \neq 0$ où $l_j(k) = k(k-1) \cdots (k-j+1)$.

Alors l'opérateur différentiel P possède un indice, et ce dernier est donné par :

$$\chi(P, \mathbb{C}[x]^N) = N \cdot \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^\circ(A_i))$$

Preuve : D'après le lemme 1.3.1, il existe un entier k_1 tel que

$$\forall k \geq k_1 : \text{Ker}(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) = (0)$$

Et d'après la proposition 2.1, il existe un entier k_0 , tel que

$$\mathcal{M}_{k-n}^N = P(\mathcal{M}_k^N) \oplus \mathcal{V}$$

Où \mathcal{V} est le sous espace de $\mathbb{C}[x]^N$ engendré par la famille $(\psi_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq n-n'-1}}$.

D'où :

$$\text{Coker}(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) = \frac{\mathcal{M}_{k-n}^N}{P(\mathcal{M}_k^N)} \simeq \mathcal{V} \quad (\text{pour } k \geq k_0)$$

Par suite le conoyau de P satisfait à :

$$\dim \text{Coker}(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) = \dim \mathcal{V} = (n - n') \cdot N \quad (\text{pour } k \geq k_0)$$

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$(1.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_k^N & \longrightarrow & \mathbb{C}[x]^N & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_k^N} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & P \downarrow & & \bar{P} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{k-n}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}[x]^N & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_{k-n}^N} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le lemme du serpent (prop. 1.2.1) donne :

$$\chi(P, \mathbb{C}[x]^N) = \chi(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) + \chi\left(P : \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_k^N} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_{k-n}^N}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \chi(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) &= \dim \text{Ker}(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) - \dim \text{Coker}(P : \mathcal{M}_k^N \longrightarrow \mathcal{M}_{k-n}^N) \\ &= 0 - (n - n') \cdot N \\ &= -(n - n') \cdot N \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

D'autre part, les espaces vectoriels $\frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_k^N}$ et $\frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_{k-n}^N}$ sont de dimensions finies sur \mathbb{C} , de dimensions respectives $k.N$ et $(k-n).N$, on conclut alors en utilisant la remarque 1.2.1, que :

$$\begin{aligned} \chi\left(P : \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_k^N} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_{k-n}^N}\right) &= \dim \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_k^N} - \dim \frac{\mathbb{C}[x]^N}{\mathcal{M}_{k-n}^N} \\ &= k.N - (k-n).N \\ &= n.N \quad (1.3.3) \end{aligned}$$

On déduit alors, de (1.3.2) et de (1.3.3), que :

$$\begin{aligned} \chi\left(P, \mathbb{C}[x]^N\right) &= -(n-n').N + n.N \\ &= N.n' \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 1.3.1 .

1.4 RÉGULARITÉ :

Considérons l'opérateur différentiel $P : \mathbb{C}[x]^N \longrightarrow \mathbb{C}[x]^N$, défini par :

$$P = A_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \cdots + A_1(x) \frac{d}{dx} + A_0(x)$$

où $A_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}[x]^N)$, ($0 \leq i \leq m$) tel que $\det(A_m(x)) \neq 0$ et $\det\left(\sum_{j \in I} A_j^{n_j} l_j(k)\right) \neq 0$ où $l_j(k) = k(k-1) \cdots (k-j+1)$ ($0 \leq j \leq m$).

D'après les Théorèmes 1.2.1 et 1.3.1, les opérateurs différentiels :

$$P : \mathbb{C}\{x\}^N \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}^N \quad \text{et} \quad P : \mathbb{C}[x]^N \longrightarrow \mathbb{C}[x]^N$$

ont des indices, et leurs indices sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} \chi\left(P, \mathbb{C}\{x\}^N\right) &= m.N - V\left(\det(A_m(x))\right) \\ \chi\left(P, \mathbb{C}[x]^N\right) &= N \cdot \inf_{0 \leq i \leq m} (i - d^\circ(A_i)) \end{aligned}$$

On pose alors :

$$i_{p,a}(P) = \chi\left(P, \mathbb{C}\{x\}^N\right) - \chi\left(P, \mathbb{C}[x]^N\right)$$

Et on établit le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4.1 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $i_{p,a}(P) = 0$

(ii) $\left(P(u) \in \mathbb{C}[x]^N ; u \in \mathbb{C}\{x\}^N\right) \implies u \in \mathbb{C}[x]^N$

Preuve : On montre que l'opérateur $P : \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N}$ est de codimension nulle, en utilisant le résultat suivant :

Proposition 1.4.1 Soient E_1, F_1, E_2, F_2 quatre espaces de banach, et considérons le diagramme commutatif d'applications \mathbb{C} -linéaires continues suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u_1} & F_1 \\ v \downarrow & & \downarrow w \\ E_2 & \xrightarrow{u_2} & F_2 \end{array}$$

On suppose que :

- (i) u_1 et u_2 sont à indice
- (ii) v est injective
- (iii) w est injective et d'image dense

Alors la suite suivante est exacte :

$$\frac{E_2}{E_1} \xrightarrow{\bar{u}_2} \frac{F_2}{F_1} \longrightarrow 0.$$

Preuve : L'application u_2 est de codimension finie (car $\chi(u_2, E_2, F_2) < \infty$), elle est aussi d'image fermée, en effet la suite suivante :

$$\mathcal{I}m(u_2) \xrightarrow{i} F_2 \xrightarrow{s} \frac{F_2}{\mathcal{I}m(u_2)} \longrightarrow 0$$

étant exacte, (où i et s désignent respectivement l'injection et la surjection canoniques) s étant continue, $\mathcal{I}m(u_2) = s^{-1}(0)$ est par conséquent fermée, d'où $\mathcal{C}oker(u_2)$ muni de la topologie quotient, est un espace vectoriel topologique de dimension finie (donc muni de la topologie usuelle). Considérons alors, l'application $\tilde{w} = s \circ w$ définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{u_1} & F_1 & & \\ v \downarrow & & w \downarrow & \searrow \tilde{w} & \\ E_2 & \xrightarrow{u_2} & F_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}oker(u_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

L'application \tilde{w} est alors d'image dense, en effet si $x \in \mathcal{C}oker(u_2)$, $x = s(f)$ où $f \in F_2$, comme w est par hypothèse d'image dense, il existe alors une suite $(e_n)_{n \geq 0}$ de points de F_1 telle que :

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} w(e_n)$$

La surjection canonique s étant continue, on conclut que :

$$\begin{aligned} x = s(f) &= s\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} w(e_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} s \circ w(e_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{w}(e_n) \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que : $\mathcal{C}oker(u_2) \subset \overline{\mathcal{I}m(\tilde{w})}$.

Inversement si $x \in \overline{\text{Im}(\tilde{w})}$ il existe une suite $(e_n)_{n \geq 0}$ de points de F_1 telle que : $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{w}(e_n)$, s et w étant continues, $\tilde{w} = s \circ w$ l'est aussi, d'où $x = \tilde{w}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n\right)$, F_1 étant de banach, il est complet, par suite la suite $(e_n)_{n \geq 0}$ converge vers un point $e \in F_1$, d'où $x = \tilde{w}(e) \in \text{Coker}(u_2)$.

Ainsi $\overline{\text{Im}(\tilde{w})} = \text{Coker}(u_2)$, par conséquent \tilde{w} est d'image dense.

Lemme 1.4.1 *Soit E un espace vectoriel topologique normé de dimension finie, F un sous espace de E partout dense, alors $E = F$.*

preuve : F étant de dimension finie, il est fermé, d'où $F = \overline{F} = E$.

L'application $\tilde{w} : F_1 \longrightarrow \text{Coker}(u_2)$ étant d'image dense, on déduit du lemme 1.4.1 que \tilde{w} est surjective, la surjectivité de $\bar{u}_2 : \frac{E_2}{E_1} \longrightarrow \frac{F_2}{F_1}$, suit alors, en effet :

Le carré du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \xrightarrow{u_1} & F_1 & & & & \\ v \downarrow & & w \downarrow & \searrow \tilde{w} & & & \\ E_2 & \xrightarrow{u_2} & F_2 & \longrightarrow & \text{Coker}(u_2) & \longrightarrow & \frac{F_2}{u_2(E_2)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

étant commutatif, l'application u_2 passe au quotient :

$$\bar{u}_2 : \frac{E_2}{v(E_1)} \longrightarrow \frac{F_2}{w(F_1)}, \quad \bar{u}_2(e_2 + v(E_1)) = u_2(e_2) + w(F_1)$$

Soit $y \in F_2$, $s(y) \in \text{Coker}(u_2)$, \tilde{w} étant surjective, il existe $f_1 \in F_1$ tel que :

$s(y) = \tilde{w}(f_1) = s \circ w(f_1)$, d'où $s(y - w(f_1)) = 0$, d'où $y - w(f_1) \in \mathcal{Ker}(s) = u_2(E_2)$, d'où il existe $e_2 \in E_2$ tel que $y - w(f_1) = u_2(e_2)$, d'où $y = w(f_1) + u_2(e_2)$ où $e_2 \in E_2$ et $f_1 \in E_1$, c'est à dire que l'application :

$$\bar{u}_2 : \frac{E_2}{v(E_1)} \longrightarrow \frac{F_2}{w(F_1)}$$

est surjective, v et w étant injectives, on identifie $v(E_1)$ à E_1 et $w(F_1)$ à F_1 .

Ce qui termine la preuve de la proposition 1.4.1 .

Suite de la preuve du Théorème 1.4.1 :

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x]^N & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}[x]^N \\ u \downarrow & & v \downarrow \\ \mathbb{C}\{x\}^N & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}\{x\}^N \end{array}$$

où v est définie par :

pour

$$R = a_0 + a_1x + \cdots + a_sx^s \in \mathbb{C}[x]^N \quad (a_i \in \mathbb{C}^N, 0 \leq i \leq s)$$

on pose :

$$w(R) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \text{ où } a_i = 0 \quad \forall i \geq s + 1$$

Alors v est évidemment injective, et on a :

$$\chi(P, \mathbb{C}\{x\}^N) < +\infty \quad (\text{d'après le Théorème 1.2.1})$$

$$\chi(P, \mathbb{C}[x]^N) < +\infty \quad (\text{d'après Théorème 1.3.1})$$

Il reste donc, à vérifier que v est d'image dense.

Soit D un disque centré à l'origine $x = 0 \in \mathbb{C}$, et notons par $\mathcal{H}(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur D et à valeurs dans \mathbb{C} .

Soit $u = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{H}(D)^N$, en utilisant sur $\mathcal{H}(D)^N$ la topologie de convergence uniforme sur tout compact, on obtient :

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^n u_i x^i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n \quad \text{où } R_n(x) = \sum_{i=0}^n u_i x^i \in \mathbb{C}[x]^N$$

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n u_i x^i = \sum_{i \geq 0} u_i x^i, \quad \text{avec } u_i = 0 \quad \forall i \geq n$$

Par conséquent :

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} v(R_n), \quad \text{où } R_n \in \mathbb{C}[x]^N$$

Ceci signifie que v est d'image dense dans $\mathbb{C}\{x\}^N$, on déduit alors de la proposition 1.4.1, la suite exacte :

$$\frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} \xrightarrow{\bar{P}} \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} \longrightarrow 0.$$

D'où

$$\text{Coker} \left(\bar{P} : \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} \right) = (0)$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & \\ & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x]^N & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x\}^N & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} & \longrightarrow & 0 & \\ & & \downarrow & P \downarrow & & P \downarrow & & \bar{P} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x]^N & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x\}^N & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N} & \longrightarrow & 0 & \\ & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \end{array}$$

Où N_1, N_2, N_3 et C_1, C_2, C_3 sont respectivement les noyaux et conoyaux des flèches respectives.

Le lemme du serpent(prop. 1.2.1), donne la suite exacte d'espaces vectoriels de dimensions finies :

$$N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0 \quad (1.4.1)$$

En appliquant la remarque 1.2.1 à la suite exacte (1.4.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{Ker}\left(P, \frac{\mathbb{C}\{x\}^N}{\mathbb{C}[x]^N}\right) &= \chi(\overline{P}, \mathbb{C}\{x\}^N) - \chi(P, \mathbb{C}[x]^N) \\ &= i_{p,a}(P) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Le Théorème 1.4.1, découle alors de la relation (1.4.2).

Bibliographie

- [1] M.F. ATIYAH & I.G. MACDONALD : Introduction to commutative Algebra, Addison-Welsley Publishing company, (1969).
- [2] K. BETINA : Indices polynômiaux et solutions polynômiales de certains systèmes de Pfaff singuliers, Analysis 12, R.Oldenbourg- Verlag, München, 95-216, (1992)
- [3] H. CARTAN : Théorie élémentaire d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann Paris, (1975).
- [4] P. DELIGNE : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. N° 163, Springer-Verlag,(1970).
- [5] H. KOMATSU : On the index of differential operators, Jour. Fac. Sci. Univ. of Tokyo IA, 379 - 398,(1971).
- [6] B. MALGRANGE : Sur les points singuliers des équations différentielles, l'enseignement mathématique, t.XX, 1-2, 147-176, (1974).
- [7] J.P. RAMIS : Théorèmes d'indice gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Mémoires of the A.M.S, 48, N° 296, (1984).
- [8] M.S. REZAOUI : Indice polynomial d'une matrice d'opérateurs différentiels, C.R Acad. Sci. Paris, Série I, tome 332, 505-508, (2001).

Chapitre 2

Théorèmes d'Indice dans des Espaces de Fractions Rationnelles

2.1 Introduction :

Adolphson (Chap.2, [3]) et Robba (Chap.2, [12]), ont explicité l'indice d'un opérateur différentiel unitaire dans la K -Algèbre θ des fractions rationnelles à une indéterminée, à coefficients dans un corps K de caractéristique zero, et ayant des pôles dans une partie finie donnée de K . La question naturelle que suscite un tel résultat, est comment le généraliser à une matrice d'opérateurs différentiels à coefficients dans θ , en particulier à une matrice de la forme $I_N \cdot \frac{d}{dx} + A$, où I_N désigne la matrice identité d'ordre N .

L'anneau θ n'étant pas un corps, on ne peut utiliser le théorème du vecteur cyclique pour calculer l'indice d'une matrice d'opérateurs différentiels de la dernière forme, contrairement à ce que suggère le théorème 11-3 de Robba (Chap.2, [12]).

Nous nous proposons dans ce deuxième chapitre d'obtenir d'abord une formule explicite pour l'indice d'opérateurs différentiels de la forme $P = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ où les a_k sont des fractions rationnelles à pôles dans un sous ensemble fini de K , ceci généralise les théorèmes établis, d'abord par A.Adolphson (Chap.2, [3]) dans le cas où les a_k sont des polynômes de $\mathbb{C}_p[x]$, ensuite par P.Robba (Chap.2, [12]) dans le cas où $a_m(x) = 1$. Ensuite nous étendons ce résultat au cas où les a_k ont des pôles dans un sous ensemble quelconque de K .

Nous généralisons ensuite, ce résultat au cas des matrices carrées $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ où les a_{ij} sont des opérateurs différentiels à pôles dans une partie quelconque Ω de K . Comme corollaire, nous obtenons le théorème 11.3 de Robba (Chap.2, [12]) pour un système de la forme :

$$L = I_N \cdot \frac{d}{dx} + G, \text{ avec } G \in \mathcal{M}_N(K(x)),$$

où $\mathcal{M}_N(A)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre N et à coefficients dans A .

2.2 Rappel sur la théorie des déterminants sur des domaines de Ore :

2.2.1 Domaines de Ore :

Soit θ un anneau. On dit que θ est un domaine, s'il est intègre et que θ possède la propriété de Ore à gauche, deux éléments quelconques non nuls possèdent un multiple commun à gauche

non nul, c'est à dire :

$\forall a, b \in \theta^* : \theta.a \cap \theta.b \neq \{0\}$, où θ^* désigne l'ensemble des éléments non nuls de θ .

Enfin, on dit que θ quasi-Euclidien à gauche, s'il existe $\varphi : \theta \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ tel que :

$$\varphi^{-1}(\{-\infty\}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \forall (a, b) \in \theta \times \theta^*, \exists (c, d) \in \theta^* \times \theta; \varphi(ca - db) < \varphi(b).$$

Le théorème suivant est une caractérisation des domaines de Ore :

THÉORÈME 2.2.1 *Soit θ un anneau, on a l'équivalence :*

$$\begin{aligned} \theta \text{ est de Ore à gauche} &\iff \theta \text{ admet un corps de fractions à gauche.} \\ &\iff \theta \text{ est quasi-Euclidien à gauche} \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1 *Soit θ un anneau, ∂ une dérivation de θ . Let $\theta[\partial]$ l'espace des opérateurs différentiels à coefficients dans θ , il s'en suit alors, que si θ est de Ore à gauche, alors $\theta[\partial]$ est quasi-Euclidien à gauche, le théorème 1.1.2 montre alors, que $\theta[\partial]$ est un domaine de Ore à gauche si et seulement si θ l'est, en particulier si θ est un anneau commutatif intègre.*

2.2.2 Déterminant sur un domaine de Ore :

Soit θ un domaine de Ore à gauche, K un corps des fractions à gauche pour θ , $\varphi : \theta \longrightarrow M$ un morphisme, où M est un monoïde commutatif et $\varphi(a)$ élément régulier de M . Notons aussi par :

$\varphi : K^* \longrightarrow \varphi(\theta^*)^{-1}.\varphi(\theta^*)$ l'extension canonique de $\varphi : \theta^* \longrightarrow \theta^*$.

Soit $K' = K^*/[K^*, K^*]$ l'Abélianisé du groupe K^* et $\bar{\varphi} : K' \longrightarrow \varphi(\theta^*)^{-1}.\varphi(\theta^*)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \varphi(\theta^*)^{-1}.\varphi(\theta^*) \\ \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ K' & & \end{array}$$

où l'application verticale désigne la surjection canonique. On étend $\bar{\varphi}$ au monoïde $\bar{K} = K' \cup \{0\}$ pour lequel 0 est un élément absorbant, tel que : $\bar{\varphi}(0) = 0$.

Notons par \det_K (voir [7]), le déterminant de Dieudonné sur le corps K . \det_K est défini comme étant un homomorphisme de groupe multiplicatif $\det_K : \mathcal{M}_N(K) \longrightarrow \bar{K}$, qui est une extension de l'application canonique de K à \bar{K} .

En posant $\mathcal{M}(\theta) = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{M}_N(\theta)$, Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.2 *Il existe une unique application notée $\det_\varphi : \mathcal{M}(\theta) \longrightarrow \bar{K}$, tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\theta) & \xrightarrow{\det_\varphi} & \varphi(\theta^*)^{-1}.\varphi(\theta^*) \\ \det_K \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ \bar{K} = K' \cup \{0\} & & \end{array}$$

ce qui signifie : $\det_\varphi = \bar{\varphi} \circ \det_{K/\mathcal{M}(\theta)}$.

De plus, \det_φ est déterminé par les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in \mathcal{M}_N(\theta)^2 : \det_\varphi(a.b) = \det_\varphi(a). \det_\varphi(b)$

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\theta), \text{ avec } a \in \theta \implies \det_\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(a)$

Définition 2.2.1 \det_φ est appelé déterminant sur θ associé à φ .

2.2.3 Propriétés et exemples de déterminant sur des domaines de Ore :

Calcul de \det_φ par blocs :

$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^*, a \in \mathcal{M}_m(\theta), b \in \mathcal{M}_{m,n}(\theta), c \in \mathcal{M}_{n,m}(\theta) \text{ et } d \in \mathcal{M}_n(\theta)$

$$\det_\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \det_\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \det_\varphi(a). \det_\varphi(d)$$

Calcul pratique d'un déterminant :

1) En calculant \det_φ par blocs, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a = (a_{i,j}) \in T_n(\theta)$ (où $T_n(\theta)$ est le sous ensemble des matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\theta)$) : $\det_\varphi(a) = \prod_{i=1}^n \varphi(a_{i,i})$

2) Pour calculer $\det_\varphi(a)$, pour $a \in \mathcal{M}_n(\theta)$, il suffit de réduire a à sa forme triangulaire, en utilisant la méthode de Gauss, et de calculer ensuite \det_φ par blocs (voir le paragraphe 1) ci-dessus).

Plus précisément $P \in \langle E_n(\theta) \cup D'_n(\theta) \rangle$, tel que $p.a = t \in T_n(\theta)$, où $E_n(\theta)$ et $D'_n(\theta)$ désigne respectivement l'ensemble des matrices élémentaires et matrices diagonales à éléments non nuls de $\mathcal{M}_n(\theta)$. Alors :

$$\det_\varphi(a) = \det_\varphi(t). (\det_\varphi(p))^{-1}.$$

Un exemple :

Considérons par exemple, $a = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\theta)$.

Si $\alpha = 0$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_2(\theta)$. D'où, en utilisant la propriété (i) du Théorème 1.2, on obtient :

$$\det_\varphi(a) = \varphi(-\beta.\gamma).$$

Sinon, il existe $(\alpha', \beta') \in \theta \times \theta^*$ tel que $\alpha'.\alpha = \beta'.\beta$. Alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha' & \beta' \end{pmatrix}.a = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & -\alpha'\gamma + \beta'\delta \end{pmatrix}.$$

D'où $\det_\varphi(a) = \varphi(\alpha).\varphi(-\alpha'\gamma + \beta'\delta).\varphi(\beta')^{-1}$.

Déterminant sur un anneau filtré :

Soient A un anneau, $G(A)$ l'ensemble de ses sous groupes additifs, et Δ un monoïde commutatif muni d'une loi additive, un élément unité « 0 », et totalement ordonné. Une filtration sur A de type Δ est une application croissante de Δ dans $G(A)$ telle que $\bigcup_{n \in \Delta} F(n) = A$, $1 \in F(0)$ et

$F(m)F(n) = F(n+m) \forall (m, n) \in \Delta^2$, le couple (A, F) est dit anneau filtré de type Δ .

On pose alors $gr(F)(n) = \frac{F(n)}{\bigcup_{n < m} F(m)}$, $gr_n^F =$ l'application canonique de $F(n)$ dans $gr(F)(n)$,

$$gr_F A = \bigoplus_{n \in \Delta} F(n), \quad gr_F(a) = \sum_{m, a \in F(n)} gr_n^F(a),$$

$$deg_F(a) = \begin{cases} \inf\{n; a \in F(n)\} & \text{si } gr_F(a) \neq 0 \\ -\infty & \text{si } gr_F(a) = 0 \end{cases}$$

Le groupe $gr_F(A)$ est muni de la multiplication telle que :

$$gr_m^F(a)gr_n^F(b) = gr_{m+n}^F(ab) \quad \forall (a, b) \in F(m) \times F(n)$$

L'application $gr(F) : n \mapsto gr(F)(n)$ de Δ dans $G(gr_F A)$ est alors une graduation sur l'anneau $gr_F(A)$, c'est à dire, une application Γ de Δ dans $G(gr_F A)$ telle que $gr_F(A) = \bigoplus_{n \in \Delta} \Gamma(n)$, $1 \in \Gamma(0)$

et $\Gamma(m)\Gamma(n) \subset \Gamma(m+n)$ for $(m, n) \in \Delta^2$.

$(gr_F A, gr(F))$ est alors appelé anneau gradué associé à l'anneau filtré (A, F) .

De plus, si F est strictement séparé (i.e : $gr_F^{-1}(0) = \{0\}$ et l'anneau $gr_F A$ est intègre), l'application gr_F est alors un homomorphisme multiplicatif de A dans $gr_F A$.

Définition 2.2.2 Avec les hypothèses du rappel précédent, supposons en plus que A est de Ore à gauche et que $gr_F A$ est commutatif.

On appelle alors « déterminant sur (A, F) ou sur A associé à la filtration F », l'application :

$$\det_F := \det_{gr_F}, \text{ de } M(A) \text{ dans } gr_F(A^*)^{-1}gr_F(A)$$

Exemple 2.2.2 Si \mathcal{O} est un anneau et $d = \{d_i, i \in I\}$ une famille de dérivations de \mathcal{O} , on définit la filtration canonique de $\mathcal{O}[d]$, comme étant sa filtration F_d de type \mathbb{N} telle que :

$$F_d(n) = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha d^\alpha \in \mathcal{O}[d] \right\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où

$$|\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha(i), \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^{(I)},$$

et $(\mathcal{O}[d], F_d)$ l'anneau filtré des opérateurs différentiels sur \mathcal{O} . Si \mathcal{O} est commutatif et intègre, on appelle \det_{F_d} « le déterminant canonique sur $\mathcal{O}[d]$ ».

2.3 Indice d'un opérateur dans des espaces de fractions rationnelles :

2.3.1 Rappel sur les indices d'applications linéaires :

Définition 2.3.1 Soient k un corps commutatif, E et F deux espaces vectoriels sur k et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire; on dit que u possède un indice, si $\dim \text{Ker}(u) + \text{codim } \text{Im}(u) < +\infty$, auquel cas, on appelle indice de u , le nombre :

$$\chi(u, E, F) = \dim \text{Ker}(u) - \text{codim } \text{Im}(u)$$

Si $E = F$, on note simplement : $\chi(u, E)$

Soient \mathcal{V} un espace vectoriel sur un corps commutatif k , θ un domaine de Ore à gauche d'endomorphismes de \mathcal{V} , tel que tout élément non nul de θ possède un indice, χ l'application de θ to $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tel que :

$$\chi(0) = \infty, \quad \text{et} \quad \chi(u) = \chi(u, E) = \text{indice } u, \quad \forall u \in \theta - \{0\}.$$

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3.1 *Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in M_n(\theta)$ une matrice d'opérateurs différentiels à coefficients dans θ , alors l'application linéaire, encore notée par A :*

$$\begin{aligned} A : \quad \mathcal{V}^N &\longrightarrow \mathcal{V}^N \\ f = (f_1, \dots, f_N)^t &\longmapsto A.f = \left(\sum_{j=1}^{j=N} a_{i,j} f_j \right)_{1 \leq i, j \leq N} \end{aligned}$$

possède un indice si et seulement si : $\det_\chi(A) \neq \infty$, et dans ce cas : $\chi(A, \mathcal{V}^N) = \det_\chi(A)$

Nous utiliserons aussi, le résultat suivant établi par Adolphson pour $K = \mathbb{C}$, mais qui reste valable pour tout corps K de caractéristique zéro.

THÉORÈME 2.3.2 ([3], **prop. 1 and Remark 2**) *Considérons x une indéterminée sur K , $K[x]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K , $K[x] \left[\frac{d}{dx} \right]$ l'anneau des opérateurs différentiels*

à coefficients dans $K[x]$, $\mathcal{L} = \sum_{0 \leq i \leq m} p_i(x) \cdot \frac{d^i}{dx^i} \in K[x] \left[\frac{d}{dx} \right] - \{0\}$,

N le nombre $\max_{0 \leq i \leq m} (d^o p_i - i)$, et pour $c \in K$, R_c le nombre

$$R_c = \max_{0 \leq i \leq m} \left(i - \text{ord}_c(p_i(x)) \right)$$

Alors l'application linéaire $\mathcal{L} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ possède un indice, ce dernier est donné par la formule :

$$\chi(\mathcal{L}, \mathcal{V}) = - \left(N + \sum_{i=1}^{i=N} R_{c_i} \right)$$

Nous utiliserons aussi le résultat suivant :

Proposition 2.3.1 *Soit $u : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et $v : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{Z}$, deux applications linéaires entre espaces vectoriels sur un corps K . Alors, si deux des applications $u, v, v \circ u$ ont un indice, il en est de même pour la troisième, auquel cas l'indice de $v \circ u$ est donné par :*

$$\chi(v \circ u, \mathcal{V}, \mathcal{Z}) = \chi(u, \mathcal{V}, \mathcal{W}) + \chi(v, \mathcal{W}, \mathcal{Z})$$

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.3.1 Soient $u : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et $v : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{Z}$, deux applications linéaires sur un corps K . Alors :

$$(i) \dim_K \mathcal{Ker}(v \circ u) = \dim_K \mathcal{Ker}(u) + \dim_K \mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)$$

$$(ii) \operatorname{codim}_K \mathcal{Im}(v \circ u) + \dim_K \mathcal{Ker}(v) = \operatorname{codim}_K \mathcal{Im}(u) + \operatorname{codim}_K \mathcal{Im}(v) + \dim_K \mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)$$

preuve :

Posons

$$\mathcal{V} = \mathcal{Ker}(u) \oplus \mathcal{V}_1, \quad \mathcal{Im}(u) = (\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)) \oplus \mathcal{W}_1$$

$$\mathcal{Ker}(v) = (\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)) \oplus \mathcal{W}_2, \quad \mathcal{W} = (\mathcal{Im}(u) + \mathcal{Ker}(v)) \oplus \mathcal{W}_3$$

Soient $u_1 : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{Im}(u)$ et $v_1 : \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \longrightarrow \mathcal{Im}(v)$ les applications déduites par restriction de u et v respectivement.

Alors, $\mathcal{Ker}(v \circ u) = \mathcal{Ker}(u) \oplus u_1^{-1}(\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v))$, et $\mathcal{Im}(v \circ u) = v_1(\mathcal{W}_1)$.

En utilisant l'inversibilité de u_1 et v_1 , il vient

$$u_1^{-1}(\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)) \simeq \mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v), \quad v_1(\mathcal{W}_3) \simeq \mathcal{W}_3, \quad \mathcal{Im}(v) = v_1(\mathcal{W}_1) \oplus v_1(\mathcal{W}_3)$$

Et par définition des \mathcal{W}_i ,

$$\dim(\mathcal{W}_3) + \dim(\mathcal{W}_3) = \operatorname{codim}(\mathcal{Im}(u)).$$

On déduit alors :

$$\dim_K \mathcal{Ker}(v \circ u) = \dim_K \mathcal{Ker}(u) + \dim_K \mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v),$$

et que :

$$\operatorname{codim}_K \mathcal{Im}(v \circ u) = \operatorname{codim}_K \mathcal{Im}(v) + \dim_K \mathcal{W}_3$$

d'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}_K \mathcal{Im}(v \circ u) + \dim(\mathcal{Ker}(v)) &= \operatorname{codim}(\mathcal{Im}(v)) + \dim(\mathcal{W}_3) + \dim(\mathcal{W}_2) + \dim(\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)) \\ &= \operatorname{codim}(\mathcal{Im}(v)) + \operatorname{codim}(\mathcal{Im}(u)) + \dim(\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)) \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 2.3.1 : D'après le lemme 2.3.1, il suffit de prouver la dernière partie de la proposition . Si u et v ou u et $v \circ u$ ont des indices, le résultat découle immédiatement du lemme 2.3.1. Supposons alors que u et $v \circ u$ sont à indices. En utilisant le lemme 2.3.1, (i), $\dim(\mathcal{Im}(u) \cap \mathcal{Ker}(v)) < +\infty$, La conclusion découle alors du lemme 2.3.1, (ii).

2.3.2 Cas d'un opérateurs à pôles dans une partie finie fixée :

Considérons :

- K , un corps de caractéristique zéro.
- $S = \{c_1, \dots, c_n\}$, un sous ensemble fini de K , et $c_{n+1} = \infty$,

- $\mathcal{V} = K \left[x, \frac{1}{x - c_1}, \dots, \frac{1}{x - c_n} \right]$ l'espace vectoriel sur K , des fonctions rationnelles, sans poles en de hors de S .
- $\mathcal{D} = \mathcal{V} \left[\frac{d}{dx} \right]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans \mathcal{V} .

Considérons l'opérateur différentiel $P \in \mathcal{D}$:

$$P = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i(x) \cdot \frac{d^i}{dx^i}, \quad a_i(x) \in \mathcal{V}, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Montrons maintenant, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3.3 *Supposons que $a_m(x) \neq 0$, alors l'application linéaire $P : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ possède un indice et ce dernier est donné par la formule :*

$$\chi(P, \mathcal{V}) = - \left(\sup_{0 \leq j \leq m} (d^\circ a_j - j) + \sum_{i=1}^n \sup_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_{c_i} a_j) \right)$$

preuve :

Il existe un polynôme $a \in K[x]$ tel que $a.P \in K[x] \left[\frac{d}{dx} \right]$, d'après le théorème 2.1.2, a et $a.P$ ont des indices donés par :

$$\chi(a, \mathcal{V}) = - \left(N + \sum_{i=1}^{i=n} R_{c_i} \right), \quad \text{où } N = d^\circ(a) = -\text{ord}_\infty(a), \quad \text{et } R_{c_i} = -\text{ord}_{c_i}(a)$$

$$a.P = \sum_{0 \leq i \leq m} a.a_i \frac{d^i}{dx^i}, \quad \text{d'où :}$$

$$\chi(a.P, \mathcal{V}) = - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a.a_j) - j) + \sum_{i=1}^{i=n} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_{c_i}(a.a_j)) \right)$$

D'après la proposition 2.3.1, P possède un indice tel que :

$$\chi(a.P, \mathcal{V}) = \chi(a, \mathcal{V}) + \chi(P, \mathcal{V})$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \chi(P, \mathcal{V}) &= \chi(a.P, \mathcal{V}) - \chi(a, \mathcal{V}) \\ &= - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a.a_j) - j) + \sum_{i=1}^{i=n} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_{c_i}(a.a_j)) \right) + \left(d^\circ(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \text{ord}_{c_i}(a) \right) \\ &= - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + d^\circ(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_{c_i}(a_j)) - \sum_{i=1}^{i=n} \text{ord}_{c_i}(a) \right) \\ &\quad + \left(d^\circ(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \text{ord}_{c_i}(a) \right) \\ &= - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{i=1}^{i=n} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_{c_i}(a_j)) - \sum_{i=1}^{i=n+1} \text{ord}_{c_i}(a) \right) - \left(\sum_{i=1}^{i=n+1} \text{ord}_{c_i}(a) \right) \\ &= - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{i=1}^{i=n} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_{c_i}(a_j)) \right) \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème 2.3.3.

2.3.3 Cas d'une matrice d'opérateurs différentiels et des fractions rationnelles à pôles dans une partie finie :

Soient K un corps de caractéristique zéro, $\Omega \subset K$ un sous ensemble fini fixé de K , et soit \mathcal{V} l'espace des fractions rationnelles à pôles dans Ω .

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, θ un domaine de Ore à gauche d'endomorphismes de \mathcal{V} nuls ou ayant un indice, et $\chi : \theta \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, l'application définie par : $\chi(0) = +\infty$ and $\forall P \in \theta - \{0\}$:

$$\chi(P) = \chi(P, \mathcal{V}) = \text{indice de } P$$

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\theta)$ une matrice d'opérateurs différentiels à coefficients dans θ , A peut s'écrire comme un opérateur différentiel à coefficients matriciels, c'est à dire :

$A = \sum_{0 \leq i \leq m} A_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$, $A_i(x) \in \mathcal{M}_N(\mathcal{V})$, ($0 \leq i \leq m$) A agit de \mathcal{V}^N dans \mathcal{V}^N , d'après [1], on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3.4 *L'application linéaire $A : \mathcal{V}^N \longrightarrow \mathcal{V}^N$ possède un indice si et seulement si :*

$\det_\chi(A) \neq \infty$, auquel cas, l'indice de A est donné par : $\chi(A, \mathcal{V}^N) = \det_\chi(A)$,

2.3.4 Corollaire : théorème de Robba pour un système

Soit $A \in \mathcal{D} = \mathcal{V} \left[\frac{d}{dx} \right]$, l'opérateur différentiel défini par :

$$A = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0, \text{ where } a_i(x) \in K(x), 0 \leq i \leq m-1$$

à l'opérateur d'ordre m A , est associé le système différentiel d'ordre un :

$$\mathcal{L} = I_m \cdot \frac{d}{dx} + \tilde{G}, \text{ où } \tilde{G} = \begin{pmatrix} 0, 1 & , \cdots , & 0 \\ \vdots & \ddots \ddots & \vdots \\ a_0 & , \cdots , & a_m \end{pmatrix}$$

En regardant A comme une matrice d'opérateurs différentiels d'ordre un, i.e $A \in \mathcal{M}_1(\mathcal{D})$, notons par \bar{A} la réduction de la matrice A au premier ordre (cf. [2]), on a alors le résultat suivant :

Proposition 2.3.2 *Il existe une matrice de permutation P de $\{1, \cdots, m\}$ et deux matrices $Q, R \in Sl(m, \mathcal{D})$ telles que :*

$$P^{-1} \cdot Q \cdot \bar{A} \cdot R \cdot P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

I_m étant la matrice identité d'ordre m .

On déduit que \bar{A} a la forme suivante : $\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} + a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_0 \\ 1 & \frac{d}{dx} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \text{diag}(D, \dots, D) + \begin{pmatrix} a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } D = \frac{d}{dx} \\
&= I_m \cdot \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il existe une matrice de permutation P' of $\{1, \dots, m\}$ telle que : $\bar{A} = P' \cdot \tilde{\mathcal{L}}$, on déduit alors de la proposition 2.3.2 que :

$$P^{-1} \cdot Q \cdot (P' \cdot \tilde{\mathcal{L}}) \cdot R \cdot P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

Les matrices Q , P' et R étant inversibles, on déduit que :

$$\det_\chi(Q) = \det_\chi(P') = \det_\chi(R) = 0$$

en utilisant la propriété (i) du théorème 2.2.2, on obtient :

$$\det_\chi(\tilde{\mathcal{L}}) = \det_\chi(A)$$

Nous obtenons ainsi, une autre formule explicite, de l'indice de l'opérateur A , agissant sur \mathcal{V} , donnée par :

$$\chi(A, \mathcal{V}) = \chi(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{V}^m) = \det_\chi(\tilde{\mathcal{L}})$$

$\det_\chi(\tilde{\mathcal{L}})$ étant simple à calculer, vu la forme simple de la matrice \tilde{L} .

2.3.5 Remarque :

Robba [12], dans le théorème 11.3, a obtenu une formule d'indice pour le système $\tilde{\mathcal{L}} = I_m \cdot \frac{d}{dx} + \tilde{G}$ comme un endomorphisme de l'espace $K \left[x, \frac{1}{x-c_1}, \dots, \frac{1}{x-c_n} \right]$ des fractions rationnelles à pôles fixés. Dans notre cas, nous donnons une formule d'indice, pour le même système, mais sous forme plus explicite, vu que $\det_\chi(\tilde{\mathcal{L}})$ est simple à calculer, grâce à la simple forme de la matrice \tilde{L} . Nous utilisons ici la théorie des déterminants sur les domaines de Ore, au lieu du théorème du vecteur cyclique, car \mathcal{V} n'est pas un corps.

2.4 Indice dans des limites inductives d'espaces vectoriels :

2.4.1 Un théorème d'indice général :

Soient I un ensemble ordonné et filtrant à droite, $(E_i)_{i \in I}$ et $(F_i)_{i \in I}$ deux familles de K -espaces vectoriels, pour $i \in I$, posons $S_i = \{j \in I, i \leq j\}$ et \mathcal{F} le filtre engendré par les S_i , c'est à dire le filtre des sections de I

THÉORÈME 2.4.1 *Considérons le système inductif suivant d'espaces vectoriels et d'applications linéaires :*

$$(2.4.1) \quad \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ E_i & \xrightarrow{u_i} & F_i \\ \varphi_{j,i} \downarrow & & \downarrow \psi_{j,i} \\ E_j & \xrightarrow{u_j} & F_j \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

où tous les diagrammes sont commutatifs, notons respectivement par $E = \varinjlim_{i \in I} E_i$, $F = \varinjlim_{i \in I} F_i$ et $u = \varinjlim_{i \in I} u_i$ les limites inductives des familles d'espaces vectoriels $(E_i)_{i \in I}$, $(F_i)_{i \in I}$ et de la famille d'applications linéaires $(u_i)_{i \in I}$. Supposons que :

- 1) $\forall (i, j) \in I^2, i \leq j \implies \varphi_{j,i}$ et $\psi_{j,i}$ sont injectives
- 2) $\forall i \in I, u_i$ possède un indice
- 3) $\exists N \in \mathbb{N}, \exists i_0 \in I / \forall i \in I, i \geq i_0 \implies \dim \ker u_i \leq N$
- 4) La famille $\left(\chi(u_i, E_i, F_i) \right)_{i \in I}$ est stationnaire

Alors $u : E \longrightarrow F$ possède un indice, il existe $k_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$ supérieur ou égal à k_0 , les applications linéaires :

$$\ker u_i \longrightarrow \ker u \quad \text{and} \quad \text{coker } u_i \longrightarrow \text{coker } u$$

are isomorphisms and we have :

$$\begin{aligned} \chi(u, E, F) &= \chi(u_{k_0}, E_{k_0}, F_{k_0}) \\ &= \lim_{\mathcal{F}} \chi(u_i, E_i, F_i). \end{aligned}$$

La preuve du théorème 2.4.1 est basée sur les lemmes suivants :

Lemme 2.4.1 *Soient (I, \leq) un ensemble ordonné, $(x_i)_{i \in I}$ une famille croissante d'entiers indexée par I , et $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall i \in I, x_i \leq N$. Alors $\exists i_0 \in I$ tel que : $\forall i \in I, i \geq i_0 \implies x_i = x_{i_0}$*

preuve :

Posons $A = \{x_i ; i \in I\}$, nous avons $A \subset \mathbb{N}$, d'où A possède un plus grand élément x_{i_0} , soit $i \in I$ tel que $i \geq i_0$, comme la famille est croissante, on a : $x_i \geq x_{i_0}$, d'autre part, comme x_{i_0} est le plus grand élément de A , on a : $x_i \leq x_{i_0}$, d'où : $x_i = x_{i_0}, \forall i \in I, i \geq i_0$.

Lemme 2.4.2 *Avec les notations et l'hypothèse 1) du théorème précédent, la famille $\left(\dim \text{Ker}(u_i) \right)_{i \in I}$ est croissante, et la famille $\left(\dim \text{Coker}(u_i) \right)_{i \in I}$ est stationnaire*

preuve :

Soit $x \in \mathcal{Ker}(u_i)$, alors $u_i(x) = 0$ et $(\psi_{ji} \circ u_i)(x) = 0$, comme le diagramme (2.4.1) commute, il vient : $u_j(\varphi_{ji}(x)) = 0$ donc $\varphi_{ji}(x) \in \mathcal{Ker}(u_j)$, d'où :

$\varphi_{ji}(\mathcal{Ker}(u_i)) \subset \mathcal{Ker}(u_j)$, comme φ_{ji} est injective, $\varphi_{ji}(\mathcal{Ker}(u_i)) \simeq \mathcal{Ker}(u_i)$, d'où :

$$\dim \mathcal{Ker}(u_i) \leq \dim \mathcal{Ker}(u_j), \quad \forall i, j \in I \quad i \leq j.$$

Soit $x_i = \dim \mathcal{Ker}(u_i)$, $i \in I$. La famille des dimensions $(x_i)_{i \in I}$ est croissante et satisfait l'hypothèse 3) du théorème 2.4.1. Nous déduisons alors du lemme 2.4.1 qu'elle est stationnaire à partir d'un certain indice $i_1 \in I$. Soit $y_i = \dim \mathcal{Coker}(u_i)$, $i \in I$, et $z_i = \chi(u_i, E_i, F_i)$, $i \in I$. Comme la famille $(z_i)_{i \in I}$ est stationnaire à partir de $i = j_0$ par hypothèse, et $y_i = x_i - z_i$, pour un certain $i \in I$, il s'en suit que la famille $(y_i)_{i \in I}$ est stationnaire à partir de $i = \max(i_1, j_0)$.

Preuve du théorème 2.4.1 :

1) Montrons d'abord que $\dim \mathcal{Ker}(u) \geq \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i)$:

D'après l'hypothèse 3) et le lemme 2.4.2, il existe $i_1 \in I$ et $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in I$ avec $j \geq i_1$: $l = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i) = \dim \mathcal{Ker}(u_j)$. Soit φ_{i_1} l'application canonique de E_{i_1} vers E .

Soit $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{Ker}(u_{i_1})$, qui soient linéairement indépendants.

φ_{i_1} étant injective, $\varphi_{i_1}(x_1), \dots, \varphi_{i_1}(x_l)$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{Ker}(u)$, par suite :

$$\dim \mathcal{Ker}(u) \geq l = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i).$$

2) Montrons que $\dim \mathcal{Coker}(u) \geq \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Coker}(u_i)$:

pour $i \in I$, φ_i (resp. ψ_i) considérons le diagramme commutatif :

$$(2.4.2) \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & E_i & \xrightarrow{\varphi_i} & E \\ & & \downarrow u_i & & \downarrow u \\ 0 & \longrightarrow & F_i & \xrightarrow{\psi_i} & F \end{array}$$

En appliquant le lemme du serpent (voir Bourbaki [4], p.19 , prop. 2) au diagramme (2.4.2), nous obtenons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Coker}(u_i) \longrightarrow \mathcal{Coker}(u)$$

i.e pour chaque $i \in I$, $\mathcal{Coker}(u_i)$ se plonge canoniquement dans $\mathcal{Coker}(u)$, d'où :

pour chaque $i \in I$ $\dim \mathcal{Coker}(u_i) \leq \dim \mathcal{Coker}(u)$, d'où :

$$\lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Coker}(u_i) \leq \dim \mathcal{Coker}(u)$$

3) Montrons que $\dim \mathcal{Ker}(u) = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i)$. Supposons le contraire. D'après 1), ceci signifie :

$\dim \mathcal{Ker}(u) > \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i)$. Soit $n = \dim \mathcal{Ker}(u)$. Il existe alors, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Ker}(u)$ tels que a_1, \dots, a_n soient linéairement indépendants.

Comme $\lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i) = \dim \mathcal{Ker}(u_{i_1})$. D'après la définition de u , pour chaque $i \in I$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{u_i} & F_i \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \psi_i \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$

D'autre part, d'après la définition de E , il existe $j \in I$ tel que $a_k = \varphi_j(e_k)$. Par suite, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} 0 = u(a_k) &= (u \circ \varphi_j)(e_k) \\ &= (\psi_j \circ u_j)(e_k) \end{aligned}$$

Comme ψ_j est injective, il vient $u_j(e_k) = 0$, i.e : $e_k \in \mathcal{Ker}(u_j)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. De plus, le système $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre. En effet, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, si $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \cdot e_k = 0$, alors

$$\varphi_j \left(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \cdot e_k \right) = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \cdot \varphi_j(e_k) = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \cdot a_k = 0$$

Par suite : $\lambda_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Supposons d'abord que $j \leq i_1$. Comme $\dim \mathcal{Ker}(u_{i_1}) = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i)$, et d'après le lemme 2.4.2, nous avons : $\dim \mathcal{Ker}(u) > \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i) = \dim \mathcal{Ker}(u_{i_1}) \geq \dim \mathcal{Ker}(u_j)$, il s'en suit que :

$$\dim \mathcal{Ker}(u_j) < \dim \mathcal{Ker}(u) = n$$

Supposons maintenant que $j \geq i_1$. Comme $\dim \mathcal{Ker}(u_1) = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i) = \max_{i \in I} \dim \mathcal{Ker}(u_i)$ et toujours d'après le lemme 2.4.2, nous avons :

$$\dim \mathcal{Ker}(u_j) = \dim \mathcal{Ker}(u_{i_1}) = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Ker}(u_i) < \dim \mathcal{Ker}(u)$$

d'où j vérifie toujours la relation :

$$\dim \mathcal{Ker}(u_j) < \dim \mathcal{Ker}(u)$$

ce qui contredit le fait que $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système libre de $\mathcal{Ker}(u_j)$

4) Montrons que $\dim \mathcal{Coker}(u) = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Coker}(u_i)$.

Supposons le contraire. D'après 2) ceci signifie que $\dim \mathcal{Coker}(u) > \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Coker}(u_i)$. D'autre part, d'après le lemme 2.4.2, il existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall j \in I, j \geq i_2 \implies \dim \mathcal{Coker}(u_j) = \lim_{\mathcal{F}} \dim \mathcal{Coker}(u_i)$$

Soit $d = \dim \mathcal{Coker}(u)$ et x_1, \dots, x_d des éléments linéairement indépendants de $F \setminus \mathcal{Im}(u)$. D'après la définition de F , il existe alors $j \in I$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $x_k = \psi_j(b_k)$. De plus, b_1, \dots, b_d sont linéairement indépendants. En effet, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in K$,

$$\sum_{k=1}^{k=d} \lambda_k \cdot b_k = 0$$

alors

$$\varphi_j \left(\sum_{k=1}^{k=d} \lambda_k \cdot b_k \right) = \sum_{k=1}^{k=d} \lambda_k \cdot \varphi_j(b_k) = \sum_{k=1}^{k=d} \lambda_k \cdot x_k = 0$$

Par suite $\lambda_k = 0$, pour $1 \leq k \leq d$. De plus, b_1, \dots, b_d sont des éléments de $F \setminus \mathcal{Im}(u_j)$. En effet, supposons le contraire, i.e il existe e_1, \dots, e_d dans E_j tel que $b_k = u_j(e_k)$, pour $1 \leq k \leq d$. Nous déduisons de la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
E_j & \xrightarrow{u_j} & F_j \\
\varphi_j \downarrow & & \downarrow \psi_j \\
E & \xrightarrow{u} & F
\end{array}$$

que pour $1 \leq k \leq d$

$$\begin{aligned}
x_k = \psi_j(b_k) &= \psi_j \circ u_j(e_k) = u \circ \varphi_j(e_k) \\
&= u[\varphi_j(e_k)]
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par suite $x_k \in \mathcal{I}m(u)$ pour $1 \leq k \leq d$, par suite, il y a d éléments linéairement indépendants dans $\mathcal{C}oker(u_j)$, i.e $\dim \mathcal{C}oker(u_j) \geq \dim \mathcal{C}oker(u) = d$

Supposons d'abord que $i_2 > j$

En appliquant le lemme du serpent au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & E_j & \xrightarrow{\varphi_{i_2,j}} & E_{i_2} \\
\downarrow & & u_j \downarrow & & \downarrow u_{i_2} \\
0 & \longrightarrow & F_j & \xrightarrow{\psi_{i_2,j}} & F_{i_2}
\end{array}$$

il vient que, l'application canonique $\mathcal{C}oker(u_j) \longrightarrow \mathcal{C}oker(u_{i_2})$ est injective. Par suite : $\dim \mathcal{C}oker(u_j) \leq \dim \mathcal{C}oker(u_{i_2})$. Comme $\dim \mathcal{C}oker(u) > \dim \mathcal{C}oker(u_{i_2})$, nous déduisons que :

$$\dim \mathcal{C}oker(u) > \dim \mathcal{C}oker(u_j).$$

Supposons maintenant que $i_2 \leq j$. D'où, d'après la définition de i_2 ,

$$\dim \mathcal{C}oker(u_j) = \dim \mathcal{C}oker(u_{i_2}),$$

Par suite : $\dim \mathcal{C}oker(u) > \dim \mathcal{C}oker(u_j)$. d'où j vérifie toujours les relations :

$$\dim \mathcal{C}oker(u) > \dim \mathcal{C}oker(u_j) \geq \dim \mathcal{C}oker(u)$$

ce qui est une contradiction.

5) D'après la définition de E et l'injectivité de chaque application $\varphi_{j,i}$, pour $i, j \in I$ et $i \leq j$, l'application φ_i est injective pour chaque $i \in I$. en utilisant la commutativité du diagramme (2.4.2), il vient que l'application canonique de $\mathcal{K}er(u_i)$ dans $\mathcal{K}er(u)$ est injective pour tout $i \in I$. D'après la définition de i_2 , nous déduisons que cette application canonique est un isomorphisme pour tout $i \in I$, $i \geq i_1$.

6) D'après 2), et la définition de i_2 , l'application canonique de $\mathcal{C}oker(u_i)$ dans $\mathcal{C}oker(u)$ est un isomorphisme pour tout $i \in I$ such that $i \geq i_2$.

7) Soit $i_3 = \max(i_1, i_2)$. D'après 5) et 6), pour tout $j \in I$ tel que $j \geq i_3$, les applications canoniques $\mathcal{K}er(u_i) \longrightarrow \mathcal{K}er(u)$ et $\mathcal{C}oker(u_i) \longrightarrow \mathcal{C}oker(u)$ sont des isomorphismes, nous obtenant alors (ii) et :

$$\begin{aligned}
\chi(u, E, F) &= \chi(u_j, E_j, F_j) \\
&= \chi(u_{k_0}, E_{k_0}, F_{k_0}) \\
&= \lim_{\mathcal{F}} \chi(u_i, E_i, F_i)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème 2.4.1.

Remarque 2.4.1 Dans le cas où les espaces vectoriels du théorème 2.4.1 sont des espaces de Banach, P.Robba et G.Christol ont donné dans [5] une autre version du théorème 2.4.1 où l'hypothèse :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \leq j \implies \psi_{j,i} \text{ est injective}$$

est remplacée par l'hypothèse :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \leq j \implies \psi_{j,i} \text{ est d'image dense}$$

connue comme étant « la condition topologique de Mittag-Leffler » (voir par exemple Grothendieck [8] [EGA III], 0.13.2.4)

2.5 Cas des fonctions rationnelles à pôles dans un sous ensemble quelconque :

2.5.1 cas d'un opérateur :

Soit K un corps de caractéristique zéro, $\Omega \subset K$ un sous ensemble infini,

$$S = \Omega \cup \{\infty\}, \mathcal{V}_S = K \left[x, \frac{1}{x-c} \right]_{c \in \Omega}, \mathcal{D}_S = \mathcal{V}_S \left[\frac{d}{dx} \right].$$

Soit P l'opérateur différentiel défini par : $P = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \in \mathcal{D}_S$ avec $a_m \neq 0$. Soit I l'ensemble de toutes les parties finies non vides de S , contenant ∞ et tous les pôles des coefficients de P . I est un ensemble ordonné et filtrant à droite. Pour toute partie finie $i \in I$, posons \mathcal{V}_i , l'espace vectoriel sur K , des fonctions rationnelles à pôles dans la partie i . Soit $i_0 \in I$, telle que $\forall k \in \{0, \dots, m\}, a_k \in \mathcal{V}_{i_0}$. P agit sur \mathcal{V}_S . Pour $i \in I, i \geq i_0$, définissons l'application K -linéaire $P_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i$ comme étant la restriction de P à \mathcal{V}_i , alors P_i possède un indice et on a :

$$\chi(P_i, \mathcal{V}_i) = \chi(P_{i_0}, \mathcal{V}_{i_0})$$

Soit F la filtration canonique de l'anneau gradué $\mathcal{D}_S = \mathcal{V}_S \left[\frac{d}{dx} \right]$, et

$$\sigma_F : \mathcal{D}_S \longrightarrow gr_F \mathcal{D}_S = \frac{\mathcal{V}_S \oplus \mathcal{V}_S \left[\frac{d}{dx} \right]}{\mathcal{V}_S} \simeq K[x, \xi]$$

l'application symbole.

$\sigma_F(P) = a_m(x) \cdot \xi^m$ est le symbole principal de l'opérateur différentiel P , et $\xi = \sigma_F \left(\frac{d}{dx} \right)$.

Nous obtenons alors, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.5.1 Soit $P = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \in \mathcal{D}_S$; $P : \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S$

(i) Une condition nécessaire et suffisante pour que P admette un noyau de dimension finie, est que : $P \neq 0$.

(ii) Une condition nécessaire et suffisante pour que P admette une image de codimension finie, est que : $P \neq 0$ et $m = \deg a_m$.

(iii) $P : \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S$ possède un indice si et seulement si $P \neq 0$ et $m = \deg a_m$

(ce qui signifie : $\deg_\xi \sigma_F(P) = \deg_x \sigma_F(P)$, où $\sigma_F(P) = a_m(x) \cdot \xi^m$ est le symbole principal de P , F la filtration canonique de $K(x) \left[\frac{d}{dx} \right]$ et $\xi = \sigma_F \left(\frac{d}{dx} \right)$)

Dans ce cas :

$$\chi(P, \mathcal{V}_S) = - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{c \in \Omega} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_c(a_j)) \right)$$

preuve :

(i) est un résultat bien connu, (ii) découle du fait que la série donnée dans la conclusion de (iii) du théorème 2.5.1 n'est pas divergente, par suite presque tous les termes s'annulent. Il suffit alors de prouver (iii).

Soit ψ_{ji} l'application injective canonique de \mathcal{V}_i dans \mathcal{V}_j , pour $i, j \in I$, $i \leq j$; $(\mathcal{V}_i, \psi_{ji})$ est alors, un système inductif d'espace vectoriels sur K , et on a :

$$\mathcal{V}_S = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{V}_i$$

le système d'applications linéaires $(P_i)_{i \in I}$ est inductif est la limite inductive des P_i est l'opérateur :

$$P = \varinjlim_{i \in I} P_i : \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S$$

Il résulte du paragraphe 2.3, théorème 2.3.3 que, $\forall i \in I$, P_i possède un indice sur \mathcal{V}_i et pour chaque i fixé dans I , $\forall j \in I$, $j \geq i$; $\chi(P_i, \mathcal{V}_j) = \chi(P_i, \mathcal{V}_i)$, d'où les hypothèses 1), 2) et 4) du théorème 2.4.1 sont satisfaites. Vérifions maintenant la condition 3) du théorème 2.4.1

Nous allons utiliser pour cela, le résultat suivant :

Proposition 2.5.1 Soit (F, ∂) un corps différentiel et \mathcal{L} l'opérateur différentiel défini sur F par : $\mathcal{L} = \partial^n + f_1 \partial^{n-1} + \dots + f_n$, $f_i \in F$; ($1 \leq i \leq n$). Soit (E, ∂) une extension différentielle de (F, ∂) et S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $\mathcal{L}y = 0$, dans E et soit enfin, C_E , le corps des constantes de E , S est alors, un C_E -espace vectoriel, et on a : $\dim C_E S \leq n$.

Cette proposition est un corollaire du résultat suivant :

Lemme 2.5.1 Soit (E, ∂) un corps différentiel, ayant C_E comme corps des constantes, et $u_1, \dots, u_r \in E$. Alors u_1, \dots, u_r sont linéairement dépendant sur C_E si et seulement si, le Wroskien de u_1, \dots, u_r :

$$W(u_1, \dots, u_r) = \begin{vmatrix} u_1 & , \dots , & u_r \\ \partial u_1 & , \dots , & \partial u_r \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^{r-1} u_1 & , \dots , & \partial^{r-1} u_r \end{vmatrix} \text{ est nul}$$

Preuve : Supposons u_1, \dots, u_r linéairement dépendants sur C_E , il existe alors $c_i, (1 \leq i \leq r)$ non tous nuls, tels que :

$$\sum_{i=1}^{i=r} c_i u_i = 0 \quad (2.5.1)$$

dérivons k fois la relation(2.5.1), $(0 \leq k \leq r - 1)$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{i=r} c_i \partial^k u_i = 0, \quad (0 \leq k \leq r - 1),$$

En particulier (c_1, \dots, c_r) est une solution non triviale du système linéaire :

$$\sum_{1 \leq i \leq r} \partial^k u_i . x_i = 0, \quad (0 \leq k \leq r - 1), \quad (2.5.2)$$

Le déterminant de la matrice des coefficients du système (2.5.2) est le Wroskien $W(u_1, \dots, u_r)$, comme le système (2.5.2) possède une solution non triviale, Nous déduisons que :

$$W(u_1, \dots, u_r) = 0.$$

Inversement, si $W(u_1, \dots, u_r) = 0$, le système (2.5.2) possède une solution non triviale (c_1, \dots, c_r) , où $c_i \in E$;

$1 \leq i \leq r$, en particulier, on a pour $k = 0$: $\sum_{1 \leq i \leq r} c_i u_i = 0$.

En permutant les c_i , on peut supposer que $c_1 \neq 0$, en divisant par c_1 , on peut supposer aussi, que $c_1 = 1$. On a alors :

$$\forall k, (0 \leq k \leq r - 1) : \sum_{1 \leq i \leq r} \partial^k u_i . c_i = 0, \quad (2.5.3)$$

En appliquant l'opérateur dérivation à cette équation, il vient :

$$\sum_{1 \leq i \leq r} \partial^{k-1} u_i . c_i + \sum_{1 \leq i \leq r} \partial^{k-1} u_i . \partial(c_i) = 0$$

La première somme est nulle d'après la relation (2.5.3), et dans la deuxième somme, le premier terme est nul, car $\partial(c_1) = \partial(1)$, par suite : $(\partial(c_1), \dots, \partial(c_r))$ est une solution du système linéaire :

$$\sum_{i=2}^r \partial^k u_i . x_i = 0, \quad (0 \leq k \leq r - 2) \quad (2.5.4)$$

Le déterminant de la matrice des coefficients du système (2.5.4) est le Wroskien $W(u_2, \dots, u_r)$.

1^{er} cas : $W(u_2, \dots, u_r) \neq 0$:

La solution $(\partial(c_2), \dots, \partial(c_r))$ est telle que $\partial(c_i) = 0$, $(2 \leq i \leq r)$.

Par suite $c_i \in C_E$, $(2 \leq i \leq r)$, et comme $\sum_{1 \leq i \leq r} c_i \cdot u_i = 0$, on déduit que les u_i sont linéairement dépendants sur C_E .

2^{ème} cas : $W(u_2, \dots, u_r) = 0$:

En appliquant le même raisonnement que pour $W(u_2, \dots, u_r) = 0$, on obtient par récurrence, une relation de dépendance linéaire entre y_2, \dots, y_r , qui nous donne une relation de dépendance linéaire entre y_1, \dots, y_r . Ce qui montre le lemme 2.5.1.

Nous avons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 2.5.2 Soit R un anneau différentiel, $u_1, \dots, u_{r+1} \in R$ tel que :

$$\partial^r(u_k) = \sum_{1 \leq i \leq r-1} a_i \cdot \partial^i(u_k), \quad a_i \in R, \quad 1 \leq i \leq r+1.$$

Alors :

$$W(u_1, \dots, u_{r+1}) = 0$$

Preuve :

$$W(u_1, \dots, u_{r+1}) = \begin{vmatrix} u_1 & , \dots , & u_{r+1} \\ \partial u_1 & , \dots , & \partial u_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^r u_1 & , \dots , & \partial^r u_{r+1} \end{vmatrix}$$

La dernière ligne du déterminant est une combinaison linéaire des précédentes, par suite

$$W(u_1, \dots, u_{r+1}) = 0.$$

Preuve de la proposition 2.5.1 :

L'application $u \rightarrow \mathcal{L}(u)$ définie sur E est C_E -linéaire, d'où son noyau S est un espace vectoriel sur C_E . Soit $u_1, \dots, u_n \in S$, en utilisant le lemme 2.5.2, nous obtenons : $W(u_1, \dots, u_n) = 0$. Nous déduisons alors du lemme 2.5.1, que u, u_1, \dots, u_n sont linéairement dépendants, par suite S est de dimension finie sur C_E et on a : $\dim C_E(S) \leq n$.

Suite de la preuve du théorème 2.5.1 :

Ainsi l'hypothèse 3) du théorème 4.2.1 est satisfaite, il suffit pour cela de poser $N = m$.

Si \mathcal{F} désigne le filtre des sections de I , nous déduisons du théorème 4.2.1 que P possède un indice, et que son indice est donné par :

$$\begin{aligned} \chi(P, \mathcal{V}_S) &= \lim_{\mathcal{F}} \chi(P_i, \mathcal{V}_i) \\ &= \chi(P_{i_0}, \mathcal{V}_{i_0}) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 2.4.1 nous obtenons :

$$\chi(P, \mathcal{V}_S) = - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{c \in \Omega} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_c(a_j)) \right)$$

2.5.2 Corollaire : cas de $K(x)$

Posons $\Omega = K$, dans le paragraphe 2.5, d'où $\mathcal{V}_S = K(x)$, et comme application du théorème 2.5.1, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 2.5.2 *Les notations étant celles du théorème 2.3.1, l'application K -linéaire $P : K(x) \longrightarrow K(x)$ possède un indice, si et seulement si $P \neq 0$ and $m = \deg a_m$, et son indice est donnée par :*

$$\begin{aligned} \chi(P, K(x)) &= \lim_{\mathcal{F}} \chi(P_i, \mathcal{V}_i) \\ &= \chi(P_{i_0}, \mathcal{V}_{i_0}) \\ &= -\left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{c \in K} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_c(a_j)) \right) \end{aligned}$$

Preuve : il suffit de recopier la preuve du théorème 2.5.1, en remplaçant Ω par K .

2.6 Indice d'une matrice dans des espaces de fractions rationnelles à pôles dans un sous ensemble quelconque :

2.6.1 Le théorème fondamental

Soit K un corps de caractéristique zéro, $\Omega \subset K$ un sous ensemble infini.

$S = \Omega \cup \{\infty\}$, $\mathcal{V}_S = K \left[x, \frac{1}{x-c} \right]_{c \in \Omega}$, l'espace des fractions rationnelles à pôles dans Ω .

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, θ domaine de Ore à gauche d'endomorphismes de \mathcal{V}_S nuls ou ayant un indice, et $\chi : \theta \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, l'application définie par : $\chi(0) = +\infty$ et $\forall P \in \theta - \{0\}$:

$$\chi(P) = \chi(P, \mathcal{V}_S) = \text{indice de } P$$

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\theta)$ une matrice d'opérateurs différentiels à coefficients dans θ , A peut s'écrire comme opérateur différentiel à coefficients matriciels, c'est à dire :

$$A = \sum_{0 \leq i \leq m} A_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \quad A_i(x) \in \mathcal{M}_N(\mathcal{V}_S), \quad (0 \leq i \leq m), \quad A \text{ agit de } \mathcal{V}_S^N \text{ dans } \mathcal{V}_S^N.$$

D'après [1], on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.6.1 *L'application linéaire $A : \mathcal{V}_S^N \longrightarrow \mathcal{V}_S^N$ possède un indice si et seulement si :*

$\det_\chi(A) \neq \infty$, auquel cas, l'indice de A est donné par : $\chi(A, \mathcal{V}_S^N) = \det_\chi(A)$

2.6.2 Cas des matrices d'opérateurs différentiels :

Soit K un corps de caractéristique zéro, $\Omega \subset K$ un sous ensemble infini.

$S = \Omega \cup \{\infty\}$, $\mathcal{V}_S = K \left[x, \frac{1}{x-c} \right]_{c \in \Omega}$, l'espace des fractions rationnelles à pôles dans Ω , et

$\mathcal{D}_S = \mathcal{V}_S \left[\frac{d}{dx} \right]$, l'espace des opérateurs différentiels à coefficients dans \mathcal{V}_S .

Considérons $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{D}_S)$, A agit comme suit : $A : \mathcal{V}_S^m \longrightarrow \mathcal{V}_S^n$, $f \mapsto A.f$

Si i est une partie finie de S contenant l'ensemble des pôles des coefficients de A , alors A agit par $A : \mathcal{V}_i^m \longrightarrow \mathcal{V}_i^n$, supposons alors que I est l'ensemble des parties finies S contenant ∞ et tous les pôles des coefficients de A .

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.6.2 (i) *Une condition nécessaire et suffisante pour que A possède un noyau de dimension finie est que : $A \neq 0$ et que la matrice A admette une sous matrice \bar{A} d'ordre m telle que $\det_F \bar{A} \neq 0$.*

(ii) *Une condition nécessaire et suffisante pour que A admette une image de codimension finie est que : $m \leq n$ et que la matrice A admette une sous matrice \bar{A} d'ordre m telle que $\deg_\xi(\det_F(\bar{A})) = \deg_x(\det_F(\bar{A})) \neq -\infty$.*

(iii) *Si $n = m$ et $\deg_\xi(\det_F(A)) = \deg_x(\det_F(A)) \neq -\infty$, alors $A : \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S$ admet un indice, et dans ce cas :*

$$\chi(A, \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S) = \lim_{\mathcal{F}} \det_{\chi_i} A$$

où

$$\det_{\chi_i} A = - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{c \in i} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_c(a_j)) \right)$$

Preuve :

Etablissons d'abord (iii).

Supposons pour cela que, $m = n$ et $\deg_\xi(\det_F(A)) = \deg_x(\det_F(A)) \neq -\infty$, nous devons montrer alors que :

$$\chi(A, \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S) = \lim_{\mathcal{F}} \det_{\chi_i} A$$

où

$$\det_{\chi_i} A = - \left(\max_{0 \leq j \leq m} (d^\circ(a_j) - j) + \sum_{c \in i} \max_{0 \leq j \leq m} (j - \text{ord}_c(a_j)) \right)$$

Nous allons utiliser pour cela, le théorème d'indice général (cf.théorème 2.4.1).

Soit i_0 l'ensemble de tous les pôles des coefficients des éléments de la matrice A , alors

$$A \in \mathcal{M}_n \left(\mathcal{V}_{i_0} \left[\frac{d}{dx} \right] \right).$$

Réduisons A à la forme triangulaire en utilisant la méthode de Gauss (cf. [1]) :

En d'autres termes, $\mathcal{V}_{i_0} \left[\frac{d}{dx} \right]$ étant un domaine de Ore, il existe deux matrices M et T telles que :

$$M.A = T, \text{ where } M \in \langle E_n(\mathcal{D}_{i_0}) \cup D'_n(\mathcal{D}_{i_0}) \rangle, T \in T_n(\mathcal{D}_{i_0})$$

Où $E_n(\mathcal{D}_{i_0})$, $D'_n(\mathcal{D}_{i_0})$ et $T_n(\mathcal{D}_{i_0})$ désigne respectivement l'ensemble des matrices élémentaires, matrices diagonales à éléments diagonaux non nuls, et matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathcal{D}_{i_0})$.

M est alors un produit de matrices élémentaires ou diagonales. Alors l'application linéaire induite par M est bijective, d'où $\det_F(M) = 1$.

D'autre part, nous avons par hypothèse :

$$\deg_\xi(\det_F(A)) = \deg_x(\det_F(A)) \neq -\infty, \quad \text{d'où} \quad \det_F(A) \neq 0.$$

D'où $MA = T$, où $\det_F(M) = 1$ et $\det_F(A) \neq 0 \implies \det_F(T) = \det_F(M).\det_F(A) \neq 0 \iff T(i, i) \neq 0$ (où $T(i, i)$ désignent les éléments diagonaux de la matrice T).

Ainsi, pour $f \in \mathcal{V}_S$ $A.f = 0 \implies (MA).f = 0 \implies T.f = 0$, d'où $\mathcal{Ker}(A) \subset \mathcal{Ker}(T)$.

Comme $\dim \mathcal{Ker}(T) < +\infty$ (car T est triangulaire), par suite

$$\dim(\mathcal{Ker}(A)) < +\infty.$$

Il reste à montrer que $\dim \mathcal{Coker}(A) < +\infty$.

Posons pour cela :

$$\det(X) = \deg_\xi(\det_F(X)) - \deg_x(\det_F(X)), \quad \text{pour} \quad X \in \mathcal{M}_n(D_S)$$

et

$$\varphi(X) = \deg_\xi(\sigma_F(X)) - \deg_x(\sigma_F(X)), \quad \text{pour} \quad X \in \mathcal{M}_n(D_S) \quad (2.6.2)$$

D'après le théorème fondamental de la théorie des déterminants (unicité), (cf. théorème 2.2.2) que :

$$\det = \det_\varphi$$

Et d'après l'hypothèse $\deg_\xi(\det_F(A)) = \deg_x(\det_F(A))$ in (iii), nous déduisons (cf. 2.6.2) que :

$$\det(A) = 0$$

Comme \det est un déterminant à valeurs entières (dans \mathbb{Z}), nous obtenons $\det(MA) = \det(M) + \det(A) = \det(T)$, par suite :

$$\det(M) = \det(T).$$

Soit p_1, \dots, p_n les coefficients de la matrice diagonale qui apparaissent dans le produit M .

Poson $t_k = T(k, k)$, for $1 \leq k \leq n$.

Pour $i \in I$, nous avons (remarquons que M est produit de matrices élémentaires ou diagonales, et comme le déterminant des matrices élémentaires est nul, il vient : $\det_{\chi_i} M = \sum_{1 \leq k \leq n} \chi_i(p_k)$,

nous obtenons ainsi :

$$\det_{\chi_i}(A) = \det_{\chi_i}T - \det_{\chi_i}M = \sum_{1 \leq k \leq n} \chi_i(t_k) - \sum_{1 \leq k \leq n} \chi_i(p_k) \quad (2.6.3)$$

Et

$$\det(M) = \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi(p_k), \quad \det(T) = \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi(t_k), \quad \text{comme } \det(M) = \det(T), \text{ il vient :}$$

$$\sum_{1 \leq k \leq r} \varphi(p_k) = \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi(t_k)$$

Alors :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \varphi(p_k) - \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi(t_k) = 0 \quad (2.6.4)$$

d'après (2.6.3) et (2.6.4) la famille $(\det_{\chi_i}(A))_{i \in I}$ est stationnaire (car (2.6.4)=0 : la série ne diverge pas, d'où la famille est stationnaire)

Nous allons prouver (iii) et (ii) en même temps :

$MA = T$, d'où d'après (2.6.4) nous avons :

$$(\det_{\chi_i}(A))_{i \in I} \text{ est stationnaire} \iff \sum_{1 \leq k \leq n} \varphi(t_k) - \sum_{1 \leq k \leq r} \varphi(p_k) = 0$$

i.e :

$$\det(T) - \det(M) = \det(A) = 0$$

Comme $(\dim \mathcal{Ker}(A : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i))_{i \in I}$ est stationnaire d'après ce qui précède, la condition précédente est équivalente $(\dim \mathcal{Coker}(A : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i))_{i \in I}$ est stationnaire i.e : $\dim \mathcal{Coker}(A : \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{V}_S)$ est finie. ceci prouve la condition suffisante dans (ii), et que l'indice de la matrice A est finie.

Comme $\det(A) = 0$ (d'après l'hypothèse sur les degrés), la formule d'indice de la matrice A dans (iii) est obtenue par le théorème d'indice général (théorème 2.4.1).

Prouvons maintenant (i) :

Supposons que $m \leq n$ et que A admet une sous matrice telle que $\det_F(\bar{A}) \neq 0$. Comme d'après la preuve de (iii), $\mathcal{Ker}(A) \subset \mathcal{Ker}(\bar{A})$, nous déduisons alors que, $\dim \mathcal{Ker}(A) < +\infty$.

Inversement, supposons que cette condition (i) n'est pas satisfaite, alors les colones de A sont linéairement dépendantes sur l'espace vectoriel sur L , L^m , où L est le corps des fractions de \mathcal{D}_{i_0} , dans le \mathcal{D}_{i_0} -module à droite $\mathcal{D}_{i_0}^m$. Il existe alors une combinaison linéaire nulle des colones de A , avec des coefficients respectifs a_1, \dots, a_n . Nous déduisons que, pour tout $f \in \mathcal{V}_S$, $(a_1f, \dots, a_nf) \in \mathcal{Ker}(A)$. Il vient alors :

$$\dim \mathcal{Ker}(A) = +\infty$$

En effet, supposons que la dimension de $E = \{(a_1f, \dots, a_nf) / f \in \mathcal{V}_S\}$ est finie sur K , on projette : soit $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{k_0} \neq 0$.

comme nous avons d'après (ii) du théorème 2.5.1, $\text{Codim } a_{k_0}(\mathcal{V}_S) < +\infty$, $\dim a_{k_0}(\mathcal{V}_S) = +\infty$, contrairement à l'hypothèse sur E dont l'image par l'application $(v_1, \dots, v_n) \longmapsto v_k$ de $\mathcal{V}_S^n \longrightarrow \mathcal{V}_S^n$ est $a_{k_0}(\mathcal{V}_S)$.

Ce qui prouve (i).

Montrons la condition nécessaire dans (ii) :

Supposons que $m \leq n$ et que A admet une sous matrice $\bar{A} \in \mathcal{M}_n(A)$ telle que $\det_{\xi}(\det_F(A)) = \det_x(\det_F(A))$. Comme $\mathcal{I}m(\bar{A}) \subset \mathcal{I}m(A)$ using (iii) (since $\text{Codim } \mathcal{I}m(\bar{A}) < +\infty$) nous obtenons $\text{Codim } \mathcal{I}m(A) < +\infty$.

Montrons enfin, que la condition est suffisante dans (iii) :

Supposons pour cela, que $m = n$ et la condition sur les degrés non satisfaite, nous déduisons de la preuve de (iii) que :

$$\text{Codim } \mathcal{I}m(A) = \text{Codim } \mathcal{I}m(\bar{A}) = +\infty$$

Ainsi l'indice de A serait infini, ce qui est une contradiction.

Supposons que $m > n$, alors les lignes de A sont linéairement dépendantes sur le \mathcal{D}_S -module à droite \mathcal{D}_S^n .

Il existe alors une combinaison linéaire nulle des lignes de A , avec des coefficients respectifs a_1, \dots, a_n , withavec $a_{k_0} \neq 0$

Pour tout $f \in \mathcal{I}m(A : \mathcal{V}_S^n \longrightarrow \mathcal{V}_S^m)$ nous avons alors $\sum_{1 \leq k \leq m} a_k \cdot f = 0$ i.e :

$$\mathcal{I}m(A : \mathcal{V}_S^n \longrightarrow \mathcal{V}_S^m) \subset E = \{f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{V}_S^m / \sum_{1 \leq k \leq m} a_k \cdot f = 0\}$$

Comme $\text{Codim } E$ est infinie, il en est de même de $\text{Codim}(\mathcal{I}m(A : \mathcal{V}_S^n \longrightarrow \mathcal{V}_S^m))$.

Par suite l'indice de A serait infini, ce qui est aussi une contradiction.

Bibliographie

- [1] K. ADJAMAGBO : Fondements de la théorie des déterminants sur un domaine de Ore, Thèse d'Etat, Univ. Paris VI, 1991.
- [2] K. ADJAMAGBO : Déterminant non commutatif et systèmes différentiels, Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Paris VI, Juin 1981.
- [3] A. ADOLPHSON : An index theorem for p-adic differential operators, Trans. A.M.S, vol. 216, 1976, 279-293.
- [4] N. BOURBAKI : Éléments de Mathématiques, Algèbre commutative, Chapitres 1 à 4, Masson, Paris 1985.
- [5] G. CHRISTOL : Équations différentielles p-adiques, Applications aux sommes exponentielles, Actualités Mathématiques, Hermann, 1994.
- [6] P. DELIGNE : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. N° 163 , Springer-Verlag 1970.
- [7] J. DIEUDONNÉ : les déterminants sur un corps non commutatif, Bull.Soc.Math.France, t.71, 27-45, (1943).
- [8] A. GROTHENDIECK : Etude cohomologique des faisceaux cohérents, Éléments de Géométrie Algébrique (EGA) III, Publications de L'IHES N° 11, 1961.
- [9] I. KAPLANSKY : An introduction to differential Algebra, Hermann, paris, 1957.
- [10] B. MALGRANGE : Sur les points singuliers des équations différentielles, l'Enseignement Mathématique, XX(1974), 147-176.
- [11] M.S. REZAOUI : Indice d'opérateurs différentiels, Colloque Franco-Algérien de Théorie des Nombres, « CIRM »(Luminy - Marseille), 1-5 septembre 2003.
- [12] P. ROBBA : Indice d'un operateur differential p-adique IV. Cas des systèmes mesure de l'irrégularité dans un disque, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35,2 (1985), 13-55.

Chapitre 3

Solutions Analytiques et Polynomiales de Certains Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles

3.1 Introduction :

Nous nous intéressons dans ce travail à des systèmes de Pfaff ayant la forme :

$$\begin{cases} x^{p+1}.y^r \frac{\partial f}{\partial x} + A(x, y).f = g(x, y) \\ x^t.y^{q+1} \frac{\partial f}{\partial x} + B(x, y).f = h(x, y) \end{cases}$$

Nous montrons que, s'il existe des solutions pour de tels systèmes, qui sont des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs réelles, au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, celles-ci sont des fonctions analytiques, et que sous certaines conditions, celles-ci sont polynomiales.

3.2 Notations :

Notons par :

$\theta = \mathbb{R}\{x, y\}$, l'anneau des fonctions holomorphes au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

$\hat{\theta} = \mathbb{R}[[x, y]]$, l'anneau des séries formelles en les indéterminées x et y .

E , l'algèbre des fonctions \mathcal{C}^∞ au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.

$H(U)$, l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur U , et à valeurs dans \mathbb{R} , où U est un ensemble ouvert de \mathbb{R} .

$K((x))$, le corps des fractions de l'anneau des séries formelles $K[[x]]$, où K est un corps commutatif.

3.3 Rappels (le cas d'une variable) :

Soit D l'opérateur différentiel défini par :

$$D = x^{p+1} \cdot \frac{d}{dx} + A(x), \quad \text{où } A(x) \in \text{End}\left(K((x))^n\right)$$

Définition 3.3.1 (cf. Malgrange[7]) *D est singulier régulier s'il existe $M \in \text{Gl}(n, K((x)))$ telle que :*

$$\frac{1}{x^p} \cdot M^{-1}AM + xM^{-1} \frac{dM}{dx} \in \text{End}\left(K((x))^n\right)$$

Définition 3.3.2 (cf. Deligne[4]) *Un vecteur $v \in K((x))^n$ est dit cyclique pour D , si la famille $(v, Dv, \dots, D^{n-1}v)$ est libre.*

Proposition 3.3.1 (cf. Deligne[4]) *Si K est de caractéristique zéro, il existe un vecteur cyclique pour D .*

Définition 3.3.3 (cf.[5]) *Pour tout vecteur cyclique v , le premier invariant de Gérard-Levelt $\rho_1(D)$ de l'opérateur D est donné par la formule :*

$$\rho_1(D) = \sup(0, \lambda_0), \quad \text{où } \lambda_0 = \sup_{0 \leq i \leq n-1} \left(-v(a_i) \right)$$

et les a_i sont dans K , donnés par :

$$D^n(v) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot D^i(v)$$

3.4 Quelques systèmes de Pfaff linéaires :

Soient $(N, p, q, r, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^4$

$$D_1 = D_1\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = x^{p+1} \cdot y^r \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + A$$

$$D_2 = D_2\left(x, y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = x^t \cdot y^{q+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + B$$

où $A, B \in \text{End}(\theta^n)$.

Considérons le système de Pfaff :

$$(S) \begin{cases} x^{p+1} \cdot y^r \frac{\partial f}{\partial x} + A(x, y) \cdot f = g(x, y) & (S_1) \\ x^t \cdot y^{q+1} \frac{\partial f}{\partial y} + B(x, y) \cdot f = h(x, y) & (S_2) \end{cases}$$

Par référence aux rappels donnés dans le paragraphe 3.3, donnons la définition suivante du cas singulier régulier à deux variables :

Définition 3.4.1 (i) Le système différentiel (S_1) , est dit singulier régulier à l'origine $x = 0$, si le premier invariant de Gérard-Levelt $\rho_1(D_1)$ est nul, où D_1 est l'opérateur différentiel défini plus haut par :

$$D_1 : K_1[[x]][x^{-1}] \longrightarrow K_1[[x]][x^{-1}], \quad \text{avec} \quad K_1 = \mathbb{C}[[y]][y^{-1}]$$

(ii) Le système différentiel (S_2) , est dit singulier régulier à l'origine $y = 0$, si le premier invariant de Gérard-Levelt $\rho_1(D_2)$ est nul, où D_2 est l'opérateur différentiel défini plus haut par :

$$D_2 : K_2[[y]][y^{-1}] \longrightarrow K_2[[y]][y^{-1}], \quad \text{avec} \quad K_2 = \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$$

(iii) Le système différentiel (S) est dit singulier régulier à l'origine $(x, y) = (0, 0)$, les deux systèmes (S_1) et (S_2) sont singuliers régulier à l'origine.

Rappelons le résultat suivant, bien connu à une variable :

Proposition 3.4.1 (cf. Malgrange[7]) considérons l'opérateur différentiel :

$$D = x^{p+1} \cdot \frac{d}{dx} + A, \quad A \in \text{End}(\{x\}^N)$$

où D est singulier régulier à l'origine. Soit $g \in \mathbb{R}\{x\}^N$, supposons qu'il existe $h \in \mathbb{R}[[x]]^N$ tel que $D(h) = g$. Il existe alors, un unique $f \in \mathbb{R}\{x\}^N$ tel que :

$$D(f) = g \quad \text{et} \quad \widehat{f} = h$$

(\widehat{f} étant la série de Taylor associée à f).

Le résultat suivant est aussi bien connu dans le cas de plusieurs variables complexes, et est souvent utilisé comme définition du cas singulier régulier.

Proposition 3.4.2 (cf.[1]) Supposons que le système (S) soit singulier régulier à l'origine. Si $f \in \widehat{\theta}^N$ est solution du système de Pfaff (S) , alors $f \in \theta^N$.

Soient $A(x, y)$ une matrice carrée $N \times N$ à coefficients dans $\mathbb{C}[x, y]$.

La matrice A peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \sum_{i=0}^s A_i(y) \cdot x^i \\ &= \sum_{i=0}^l B_i(x) \cdot y^i \end{aligned}$$

où :

$$A_i(y) \in \text{End}(\mathbb{C}[y]^N), \quad (0 \leq i \leq s) \text{ et } A_s(y) \neq 0$$

$$B_i(x) \in \text{End}(\mathbb{C}[x]^N), \quad (0 \leq i \leq l) \text{ et } B_l(x) \neq 0$$

Posons : $d_x^\circ(A) = s$ et $d_y^\circ(B) = l$

Proposition 3.4.3 (cf.[2]) *Considérons le système de Pfaff :*

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} x^{p+1}.a(y)\frac{\partial f}{\partial x} + A.f = g \\ y^{q+1}.b(x)\frac{\partial f}{\partial x} + B.f = h \end{cases}$$

Où $a(y) \in \mathbb{R}[y] - \{0\}$; $b(x) \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$, $g, h \in \mathbb{R}[x, y]^N$.

Si $f \in \theta^N$ est solution du système (4.1.1), et si $p \geq d_y^\circ(A)$ et $q \geq d_y^\circ(B)$.

Alors $f \in \mathbb{R}[x, y]^N$.

THÉORÈME 3.4.1 *Considérons le système de Pfaff suivant :*

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} x^{p+1}.y^r\frac{\partial f}{\partial x} + A(x, y).f = g \\ x^t.y^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x} + B(x, y).f = h \end{cases}$$

Avec $p, q, r, t \in \mathbb{N}$; $g, h \in \mathbb{R}[x, y]^N$ et $A, B \in \text{End}(\mathbb{R}[x, y]^N)$

Supposons que :

(i) le système (4.1.2) est singulier régulier à l'origine.

(ii) le système (4.1.2) possède une solution $f \in E^N$.

Alors $f \in \theta^N$.

Preuve :

Soit \hat{f} la série de Taylor de f au voisinage de l'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\hat{f} \in \hat{\theta}^N$, \hat{f} est une solution du système de Pfaff (4.1.2) (il suffit pour cela, de prendre la série de Taylor des deux membres du système (4.1.2)). Par suite, nous déduisons de la proposition 3.4.2, que $\hat{f} \in \theta^N$. Soit $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ le domaine de convergence de la série \hat{f} , et soit y_0 un point fixé dans $\Delta_2 - \{0\}$. Considérons la fonction d'une variable réelle x , $\hat{f}(x, y_0)$. $\hat{f}(x, y_0)$ vérifie l'équation différentielle singulière régulière avec paramètre :

$$x^{p+1} \cdot \frac{d}{dx} \left(\hat{f}(x, y_0) \right) + C(x, y_0) \cdot \hat{f}(x, y_0) = C(x, y_0)$$

Où $C(x, y) = \frac{A(x, y)}{y^q}$; $E(x, y) = \frac{g(x, y)}{y^q}$. Il vient alors, de la proposition 3.4.1, que :

$$\widehat{f}(x, y_0) \equiv f(x, y_0) \quad \text{and} \quad \widehat{f}(x, y_0) \in \mathbb{C}\{x\}^N$$

Par suite $\widehat{f}(x, y_0) \in H(D_1)^N$

Soit $U(y_0)$ un petit ouvert contenant y_0 et contenu dans $D_2 - \{0\}$; nous déduisons alors du théorème de dépendance analytique d'un paramètre (voir par exemple CARTAN [3]) que :

$$f(x, y) \in H\left(\Delta_1 \times U(y_0)\right)^N$$

Par suite :

$$f(x, y) \in H\left(\Delta_1 \times \Delta_2 - \{0\}\right)^N$$

D'où, pour $y \neq 0$, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{n \geq 0} \rho_n(x) \cdot y^n, \quad \text{avec } \rho_n(x) \in H(\Delta_1)^N, \quad n \geq 0$$

Soit alors g , la fonction définie par :

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pour } y \neq 0 \\ \rho_0(x) & \text{pour } y = 0 \end{cases}$$

Par suite, la fonction $f(x, y)$ définit une fonction $g(x, y)$, qui est analytique sur le domaine $\Delta_1 \times \Delta_2$ tout entier. C'est à dire, f est analytique dans un voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Ce qui termine la preuve du théorème 3.4.1.

THÉORÈME 3.4.2 *Considérons le système de Pfaff suivant :*

$$\begin{cases} x^{p+1} \cdot y^r \frac{\partial f}{\partial x} + A(x, y) \cdot f = g \\ x^t \cdot y^{q+1} \frac{\partial f}{\partial x} + B(x, y) \cdot f = h \end{cases} \quad (4.1.3)$$

avec $p, q, r, t \in \mathbb{N}$; $g, h \in \mathbb{R}[x, y]^N$ and $A, B \in \text{End}(\mathbb{R}[x, y]^N)$

Supposons que :

(i) le système (4.1.3) est singulier régulier à l'origine.

(ii) le système (4.1.2) possède une solution $f \in E^N$.

(iii) $p \geq d_y^o(A)$ et $q \geq d_y^o(B)$;

Alors $f \in \mathbb{R}[x, y]^N$.

Preuve :

En utilisant les hypothèses (i) et (ii), nous déduisons du théorème 3.4.1, que $f \in \theta^N$, et en utilisant l'hypothèse (iii), nous déduisons de la proposition 3.4.3 que $f \in \mathbb{R}[x, y]^N$.

Bibliographie

- [1] K. BETINA : Caractérisation des connexions singulières régulières le long d'un diviseur à croisements normaux, Funkcialaj-Ekvacioj, vol 32, N°1, 67-80, (1989).
- [2] K. BETINA : Indices polynômiaux et solutions polynômiales de certains systèmes de Pfaff singuliers, Analysis 12, R.Oldenbourg-Verlag, München, 95-216, (1992)
- [3] H. CARTAN : Théorie élémentaire d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann Paris, (1975).
- [4] P. DELIGNE : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. N° 163, Springer-Verlag,(1970).
- [5] R. GERARD et A.H.M. LEVELT : Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires, Ann. Inst. Fourier,157-195, (1973).
- [6] R. GERARD and Y. SIBUYA : Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, lecture Notes in Math. N° 712, Springer-Verlag, 131-288, (1979).
- [7] B. MALGRANGE : Sur les points singuliers des équations différentielles, l'enseignement mathématique, t.XX, 1-2, 147-176, (1974).
- [8] M.S. REZAOUI : Solutions polynomiales de certains systèmes différentiels singuliers, Thèse de Magister, Université d'Alger (USTHB), 1994.
- [9] Y. SIBUYA : A linear Pfaffian system at an irregular singularity, Tohoku Math. Jour., 32, (1980), 209-215.

Chapitre 4

Convergence des Solutions Formelles de Certains Systèmes Différentiels Non Linéaires Au voisinage d'une Singularité Irrégulière

4.1 Introduction :

Nous nous intéressons dans ce chapitre, à généraliser certains résultats de Y.Sibuya [18], plus précisément nous étudions la convergence des solutions formelles au voisinage d'une singularité irrégulière, des systèmes différentiels suivants :

$$A(x) \cdot \frac{du}{dx} - B(x) \cdot u(x, y) = yE(x, y, u) \quad (4.1)$$

$$A(x) \cdot \frac{du}{dx} = E(x, y, u) \quad (4.2)$$

Où :

- 1) y est un paramètre
- 2) $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ est une fonction à valeur vectorielles, holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(0, 0, 0) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^N$
- 3) $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$ sont deux matrices carrées $N \times N$ à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine $x = 0 \in \mathbb{C}$.

Dans le cas étudié par Y.Sibuya, la matrice intervenant au lieu de $A(x)$ dans les systèmes différentiels précédents, est la matrice diagonale $x^{p+1} \cdot I_N$, qui est un cas particulier de notre résultat.

Nous établissons sous certaines conditions, la convergence des solutions formelles du système différentiel (1). La méthode utilisée ici, s'inspire de certains travaux de Harris, Sibuya et Weinberg ([9] et [10]), elle est basée sur des techniques d'analyse fonctionnelle, en l'occurrence le théorème du point fixe dans les espaces de Banach. Nous obtenons alors, comme conséquence, sous certaines conditions, l'analyticité des solutions formelles des systèmes différentiels non linéaires (2) et nous donnons un exemple qui illustre une situation plus générale que celle traitée dans Sibuya ([18]).

Nous déduisons ensuite, des conditions suffisantes d'existence de solutions analytiques pour une

classe de système de Pfaff, complètement intégrable, à singularité irrégulière, ayant la forme :

$$\begin{cases} A(x) \frac{\partial u}{\partial x} = E(x, y, u) \\ B(x) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u) \end{cases}$$

Notons que, ce n'est pas assez aisé de trouver pour de tels systèmes, un exemple qui illustre ce résultat dans un cadre beaucoup plus général que celui traité dans Gérard-Sibuya ([7]), à cause de la nature compliquée de la condition de complète intégrabilité.

4.2 Notations :

Notons par $\mathbb{C}[[x]]$ et $\mathbb{C}\{x\}$, respectivement, l'anneau des séries formelles en la variable complexe x et l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $x = 0 \in \mathbb{C}$. Soit $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, où $\text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$ désigne l'anneau des matrices carrées $N \times N$, à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$.

Considérons l'opérateur différentiel :

$$D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x).$$

Pour $\delta_0, \delta \in \mathbb{R}$; $\delta_0 > 0$, $\delta > 0$; posons :

$$D(\delta_0) = \{y \in \mathbb{C} / |y| < \delta_0\} \quad \text{et} \quad D(\delta) = \{x \in \mathbb{C} / |x| < \delta\}$$

$\Omega(\delta_0) = \{\varphi : D(\delta_0) \rightarrow \mathbb{C}^N; \varphi \text{ holomorphe et bornée sur } D(\delta_0)\}$

Si $\varphi \in \Omega(\delta_0)$, nous définissons la norme de φ par :

$$\|\varphi\| = \sup_{y \in D(\delta_0)} |\varphi(y)|$$

Pour toute série $f = \sum_{m \geq 0} f_m(y) x^m$, où $f_m \in \Omega(\delta_0)$, nous poserons :

$$\|f\|_{\delta_0, \delta} = \sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_{\delta_0} \cdot \delta^m$$

pour toute matrice $B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, qui s'écrit : $\|B\|_{\delta} = \sum_{m \geq 0} B_m x^m$, où $B_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ sont des matrices carrées $N \times N$ constantes, nous poserons :

$$\|B\|_{\delta} = \sum_{m=0}^{\infty} |B_m| \delta^m,$$

où, $|B_m| = \sup_{1 \leq i \leq N} \left(\sup_{1 \leq j \leq N} (|b_{ij}^m|) \right)$ avec $B_m = (b_{ij}^m)_{1 \leq i, j \leq N}$. Posons enfin :

$$B(\delta_0, \delta) = \left\{ f = \sum_{m \geq 0} \alpha_m(y) x^m; \alpha_m \in \Omega(\delta_0) \text{ et } \|f\|_{\delta_0, \delta} < +\infty \right\}$$

et

$$B(\delta_0, \delta, M) = \left\{ x^M f, f \in B(\delta_0, \delta) \right\}$$

Proposition 4.2.1 Soit $A(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, $A(0) = 0$ et $A(x) = x.\tilde{A}(x)$ où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ ($m \geq 0$). Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\det(A_p) \neq 0$.

Alors, $\forall \psi \in B(\delta_0, \delta)$, il existe $Q \in B(\delta_0, \delta)$ et $R \in \Omega(\delta_0)[x]$ tel que :

$$\psi = \tilde{A}.Q + R;$$

de plus, Q et R sont déterminés de façon unique, et $d_x^p R \leq p - 1$.

Preuve :

Posons

$$S = -(x^p I - \tilde{A}.A_p^{-1}) \quad (1.1)$$

où I est la matrice identité d'ordre N , il s'en suit que $\tilde{A}.A_p^{-1} = S + x^p I$. Soit $\psi \in B(\delta_0, \delta)$; et soit $(\psi_n)_n$, $(Q_n)_n$, $(R_n)_n$ les suites définies par :

$\psi_0 = \psi$, et si, $\psi_1, \dots, \psi_n \in B(\delta_0, \delta)$ sont définies par récurrence, ψ_n s'écrit :

$$\psi_n = \sum_{m \geq 0} \psi_{n,m} x^m, \quad \psi_{n,m} \in \Omega(\delta_0).$$

Posons :

$$Q_n = \sum_{m \geq p} \psi_{nm} x^{m-p}, \quad R_n = \sum_{m=0}^{p-1} \psi_{nm} x^m$$

Définissons alors ψ_{n+1} , par :

$$\psi_{n+1} = (x^p I - \tilde{A}.A_p^{-1}).Q_n$$

Nous obtenons alors : $\psi_n = x^p Q_n + R_n$ et

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= -S.Q_n \\ &= x^p Q_n - \tilde{A}A_p^{-1}Q_n \\ &= \psi_n - R_n - \tilde{A}A_p^{-1}Q_n \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\|R_n\|_{\delta_0, \delta} \leq \|\psi_n\|_{\delta_0, \delta}$$

$$\|Q_n\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{\|\psi_n\|_{\delta_0, \delta}}{\delta^p}$$

$$\|\psi_{n+1}\|_{\delta_0, \delta} \leq \|S\|_{\delta} \cdot \|Q_n\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{\|S\|_{\delta}}{\delta^p} \|\psi_n\|_{\delta_0, \delta}$$

Choisissons $\delta > 0$ tel que $\frac{\|S\|_{\delta}}{\delta^p} < \varepsilon < 1$, i.e. : $\|S\|_{\delta} < \varepsilon \cdot \delta^p$, où $0 < \varepsilon < 1$, d'où :

$$\|\psi_{n+1}\|_{\delta_0, \delta} < \varepsilon \cdot \|\psi_n\|_{\delta_0, \delta} < \varepsilon^n \cdot \|\psi_0\|_{\delta_0, \delta} = \varepsilon^n \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$$

Posons alors :

$$Q = \sum_{n \geq 0} A_p^{-1}.Q_n$$

et

$$R = \sum_{n \geq 0} R_n$$

Nous avons :

$$\|A_p^{-1} \cdot Q_n\|_{\delta_0, \delta} < \frac{\varepsilon^n}{\delta^p} |A_p^{-1}| \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$$

et aussi

$$\|R_n\|_{\delta_0, \delta} < \varepsilon^n \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$$

d'où :

$$\sum_{n \geq 0} \|A_p^{-1} \cdot Q_n\|_{\delta_0, \delta} < \frac{|A_p^{-1}| \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}}{\delta^p} \cdot \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n = \frac{|A_p^{-1}| \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}}{\delta^p \cdot (1 - \varepsilon)} < +\infty$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \|R_n\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{\|\psi\|_{\delta_0, \delta}}{(1 - \varepsilon)} < +\infty$$

i.e : les séries Q et R sont normalement convergentes, donc convergentes, par suite $Q, R \in B(\delta_0, \delta)$, et comme $\forall n, R_n$ est un polynôme en x , de degré inférieur ou égal à $p - 1$, nous avons : $R \in \Omega(\delta_0)[x]$ et $d_x^c R \leq p - 1$. D'autre part, comme $\|\psi_n\|_{\delta_0, \delta} < \varepsilon^n \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$; $\sum_{n \geq 0} \psi_n < +\infty$.

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 &= \sum_{n \geq 0} \psi_n - \sum_{n \geq 0} \psi_{n+1} = \sum_{n \geq 0} (\psi_n - \psi_{n+1}) = \sum_{n \geq 0} R_n + \tilde{A} \cdot A_p^{-1} \cdot Q_n \\ &= \tilde{A} \cdot \sum_{n \geq 0} A_p^{-1} \cdot Q_n + \sum_{n \geq 0} R_n \\ &= \tilde{A} \cdot Q + R \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'existence. Montrons maintenant, l'unicité d'un tel couple (Q, R) . Supposons pour cela, qu'il existe $Q_1 \in B(\delta_0, \delta)$ and $R_1 \in \Omega(\delta_0)[x]$, $d_x^c R_1 \leq p - 1$, vérifiant :

$$\psi = \tilde{A} \cdot Q_1 + R_1,$$

Nous avons alors :

$$\tilde{A} \cdot Q + R = \tilde{A} \cdot Q_1 + R_1, \text{ d'où :}$$

$$\tilde{A} \cdot (Q - Q_1) + (R - R_1) = 0 \quad (1.2)$$

Nous obtenons

$$\tilde{A} = (S + x^p I) \cdot A_p$$

(d'après la définition de S , voir (1.1)) et aussi : $\|S\|_\delta < \varepsilon \cdot \delta^p$

Nous obtenons alors :

$$0 = S \cdot A_p(Q - Q_1) + x^p \cdot A_p(Q - Q_1) + (R - R_1) \quad (1.3)$$

Nous avons

$$\|x^p \cdot A_p(Q - Q_1)\|_{\delta_0, \delta} \leq \|x^p \cdot A_p(Q - Q_1) + (R - R_1)\|_{\delta_0, \delta}$$

En utilisant (1.3), il vient :

$$x^p \cdot A_p(Q - Q_1) + (R - R_1) = -S \cdot A_p(Q - Q_1)$$

D'où

$$\begin{aligned} \|x^p \cdot A_p(Q - Q_1)\|_{\delta_0, \delta} &\leq \|S \cdot A_p(Q - Q_1)\|_{\delta_0, \delta} \\ &\leq \varepsilon \cdot \delta^p \cdot \|A_p(Q - Q_1)\|_{\delta_0, \delta} \\ &= \varepsilon \cdot \|x^p \cdot A_p(Q - Q_1)\|_{\delta_0, \delta} \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon < 1$, on conclut que :

$$x^p \cdot A_p(Q - Q_1) = 0, \text{ soit } Q = Q_1.$$

Nous déduisons alors de la relation (1.2) que : $R = R_1$.

Ce qui montre l'unicité.

la proposition 4.2.1 est ainsi démontrée.

Lemme 4.2.1 *Soit $\psi = \tilde{A} \cdot Q + R$ la relation donnée dans la proposition 4.2.1, supposons que $\det(A_p) \neq 0$. Il existe alors, une constante $\lambda(\tilde{A})$ qui dépend uniquement de δ_0, δ , et \tilde{A} , telle que :*

$$\|Q\|_{\delta_0, \delta} \leq \lambda(\tilde{A}) \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$$

Preuve :

$$\psi = \tilde{A} \cdot Q + R$$

$$\psi = \sum_{n \geq 0} \psi_n x^n, \quad \psi_n(y) \in \Omega(\delta_0)$$

On peut supposer que :

$$\tilde{A} = \sum_{n \geq 0} A_n x^n, \quad A_n \in \text{End}(\mathbb{C}^N), \quad Q = \sum_{n \geq 0} Q_n x^n, \quad Q_n(y) \in \Omega(\delta_0)$$

$$R = \sum_{n \geq 0} R_n x^n, \quad R_n(y) \in \Omega(\delta_0)$$

Nous obtenons :

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=n} A_i \cdot Q_{n-i} \right) x^n + \sum_{n=0}^{p-1} R_n x^n$$

En identifiant les coefficients de x^{n+p} , $\forall n \geq 0$, dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\psi_{n+p} = A_0 \cdot Q_{n+p} + A_1 \cdot Q_{n+p-1} + \cdots + A_{n+p} \cdot Q_0 + 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } \|\psi_{n+p} - A_p \cdot Q_n\|_{\delta_0} &\leq |A_0| \cdot \|Q_{n+p}\|_{\delta_0} + |A_1| \cdot \|Q_{n+p-1}\|_{\delta_0} + \cdots + |A_{p-1}| \cdot \|Q_{n+1}\|_{\delta_0} \\ &\quad + |A_{p+1}| \cdot \|Q_{n-1}\|_{\delta_0} + \cdots + |A_{n+p}| \cdot \|Q_0\|_{\delta_0} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \|\psi_{n+p} - A_p \cdot Q_n\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p} &\leq |A_0| \cdot \delta^0 \|Q_{n+p}\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p} + |A_1| \cdot \delta \|Q_{n+p-1}\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p-1} + \\ &\quad \cdots + |A_{p-1}| \cdot \delta^{p-1} \|Q_{n+1}\|_{\delta_0} \delta^{n+1} + |A_{p+1}| \cdot \delta^{p+1} \|Q_{n-1}\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n-1} + \cdots + \\ &\quad |A_{n+p}| \cdot \delta^{n+p} \|Q_0\|_{\delta_0} \cdot \delta^0 \\ &\leq |A_0| \cdot \delta^0 \|Q_{n+p}\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p} + |A_1| \cdot \delta \|Q_{n+p-1}\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p-1} + \\ &\quad \cdots + |A_{p-1}| \cdot \delta^{p-1} \|Q_{n+1}\|_{\delta_0} \delta^{n+1} + |A_p| \cdot \delta^p \|Q_n\|_{\delta_0} \delta^n + |A_{p+1}| \cdot \delta^{p+1} \|Q_{n-1}\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n-1} + \cdots + \\ &\quad |A_{n+p}| \cdot \delta^{n+p} \|Q_0\|_{\delta_0} \cdot \delta^0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \|\psi_{n+p} - A_p \cdot Q_n\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p} \leq \|\tilde{A}\|_{\delta_0} \cdot \|Q\|_{\delta_0, \delta}$$

Posons :

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_{n+p} \cdot x^n,$$

Par suite :

$$\|\tilde{\psi} - A_p \cdot Q\|_{\delta_0, \delta} = \delta^{-p} \cdot \sum_{n=0}^{n=+\infty} \|\psi_{n+p} - A_p \cdot Q_n\|_{\delta_0} \cdot \delta^{n+p}$$

C'est à dire :

$$\|\tilde{\psi} - A_p \cdot Q\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{\|\tilde{A}\|_{\delta} \cdot \|Q\|_{\delta_0, \delta}}{\delta^p}$$

Nous déduisons alors :

$$\tilde{\psi} - A_p \cdot Q = A_p \cdot \mathcal{L}(Q)$$

Où $\mathcal{L} : B(\delta_0, \delta) \longrightarrow B(\delta_0, \delta)$ est un opérateur linéaire continue, vérifiant :

$$\|\mathcal{L}(Q)\| = |A_p|^{-1} \cdot \|\tilde{\psi} - A_p \cdot Q\|_{\delta_0, \delta} \leq |A_p|^{-1} \cdot \frac{\|\tilde{A}\|_{\delta}}{\delta^p} \cdot \|Q\|_{\delta_0, \delta}$$

Par suite :

$$\|\mathcal{L}\| \leq \frac{|A_p|^{-1} \cdot \|\tilde{A}\|_{\delta}}{\delta^p}$$

Choisissons δ , pour que le membre de droite dans la relation précédente, soit rendu inférieur à 1, nous déduisons :

$$\tilde{\psi} = A_p \cdot (I + \mathcal{L}) \cdot (Q)$$

Où $\|\mathcal{L}\| < 1$, d'où $(I + \mathcal{L})$ est un opérateur inversible, par suite $Q = (I + \mathcal{L})^{-1} \cdot A_p^{-1} \tilde{\psi}$ et :

$$\begin{aligned} \|Q\|_{\delta_0, \delta} &\leq \|(I + \mathcal{L})^{-1}\| \cdot |A_p^{-1}| \cdot \|\tilde{\psi}\|_{\delta_0, \delta} \\ &\leq \frac{\|(I + \mathcal{L})^{-1}\| \cdot |A_p^{-1}|}{\delta^p} \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta} \end{aligned}$$

Posons

$$\lambda(\tilde{A}) = \frac{\|(I + \mathcal{L})^{-1}\| \cdot |A_p^{-1}|}{\delta^p},$$

D'où :

$$\|Q\|_{\delta_0, \delta} \leq \lambda(\tilde{A}) \cdot \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$$

Ce qui prouve le lemme 4.2.1

4.3 Étude d'une classe d'opérateurs linéaires :

Définissons les applications suivantes :

$$(2.1) \quad B : B(\delta_0, \delta, M) \longrightarrow B(\delta_0, \delta, M) \\ \varphi \longmapsto B(\varphi) = B(x) \cdot \varphi(x, y)$$

$$(2.2) \quad P : B(\delta_0, \delta, M) \longrightarrow \tilde{A}(x) \cdot B(\delta_0, \delta, M)$$

Si $\varphi \in B(\delta_0, \delta, M)$; $\varphi = x^M \cdot \psi$, où $\psi \in B(\delta_0, \delta)$.

Ecrivons $\psi = \tilde{A} \cdot Q + R$, alors : $\varphi = \tilde{A} \cdot Q \cdot x^M + x^M \cdot R$, posons alors :

$$P(\varphi) = \tilde{A} \cdot Q \cdot x^M$$

$$(2.3) \quad T : \tilde{A}(x) \cdot B(\delta_0, \delta, M) \longrightarrow B(\delta_0, \delta, M)$$

Si $\varphi \in \tilde{A}(x) \cdot B(\delta_0, \delta, M)$; $\varphi = \tilde{A}(x) \cdot \psi$,

où $\psi \in B(\delta_0, \delta, M)$, alors $\psi = \sum_{m \geq M} \alpha_m(y) \cdot x^m$, $\alpha_m(y) \in \Omega(\delta_0)$

Posons alors :

$$T(\varphi) = \sum_{m \geq M} \frac{\alpha_m(y)}{m} \cdot x^m$$

Ces applications sont $\Omega(\delta_0)$ -linéaires, et vérifient :

$$\|B(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} \leq \|B\|_{\delta} \cdot \|\varphi\|_{\delta_0, \delta}$$

$$\begin{aligned} \|P(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} &\leq \|\tilde{A}\|_{\delta} \cdot \left\| Q \right\|_{\delta_0, \delta} \cdot \left\| x^M \right\|_{\delta} \\ &\leq \|\tilde{A}\|_{\delta} \cdot \lambda(\tilde{A}) \cdot \|\varphi\|_{\delta_0, \delta} \quad (\text{en utilisant le lemme 4.2.1}) \end{aligned}$$

Posons $\mu(\tilde{A}) = \|\tilde{A}\|_{\delta} \cdot \lambda(\tilde{A})$, nous obtenons alors :

$$\|P(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} \leq \mu(\tilde{A}) \cdot \|\varphi\|_{\delta_0, \delta}$$

$$\|T(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{1}{M} \|\psi\|_{\delta_0, \delta}$$

Comme $\varphi = \tilde{A}.\psi$, nous déduisons du lemme 4.2.1 que $\|\psi\|_{\delta_0, \delta} \leq \lambda(\tilde{A}).\|\varphi\|_{\delta_0, \delta}$, soit :

$$\|T(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{\lambda(\tilde{A})}{M} \|\varphi\|_{\delta_0, \delta}$$

Par suite :

$$\|T.P.B(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{\lambda(\tilde{A}).\mu(\tilde{A})}{M} .\|B\|_{\delta} .\|\varphi\|_{\delta_0, \delta}$$

Choisissons un entier M , suffisamment grand, pour que :

$$\frac{\lambda(\tilde{A}).\mu(\tilde{A}).\|B\|_{\delta}}{M} < 1$$

Il s'en suit que les séries : $\sum_{m \geq 0} \|TPB\|^m$ et $\sum_{m \geq 0} \left(\frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})\|B\|_{\delta}}{M} \right)^m$ sont convergentes, et nous avons :

$$\sum_{m \geq 0} \|TPB\|^m \leq \sum_{m \geq 0} \left(\frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})\|B\|_{\delta}}{M} \right)^m$$

Par suite, l'application :

$I - TPB : B(\delta_0, \delta, M) \longrightarrow B(\delta_0, \delta, M)$ (où I est la matrice identité d'ordre N) est un isomorphisme, et nous avons :

$$\|(I - TPB)^{-1}\|_{\delta_0, \delta} \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})\|B\|_{\delta}}{M}}$$

Posons :

$$W = (I - TPB)^{-1}T.P \quad (2.4)$$

Alors l'application $W : B(\delta_0, \delta, M) \longrightarrow B(\delta_0, \delta, M)$ est $\Omega(\delta_0)$ -linéaire, et vérifie :

$$\begin{aligned} \|W(\varphi)\|_{\delta_0, \delta} &\leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})\|B\|_{\delta}}{M}} . \frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})}{M} . \|\varphi\|_{\delta_0, \delta} \\ &= \frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})}{M - \lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A}).\|B\|_{\delta}} . \|\varphi\|_{\delta_0, \delta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lemme 4.3.1 a) $A(x). \frac{d}{dx} (T(\varphi)) = \varphi$, où $\varphi \in \tilde{A}.B(\delta_0, \delta, M)$

b) $T\left(A(x). \frac{d\varphi}{dx}\right) = \varphi$, où $\varphi \in B(\delta_0, \delta, M)$ et $A(x). \frac{d\varphi}{dx} \in \tilde{A}.B(\delta_0, \delta, M)$

Preuve :

a) $\varphi = \tilde{A}.\psi$; $\psi \in B(\delta_0, \delta, M)$ $\psi = \sum_{m \geq M} \alpha_m(y).x^m$

$$T(\varphi) = \sum_{m \geq M} \frac{\alpha_m(y)}{m} \cdot x^m, \quad \frac{d}{dx} \left(T(\varphi) \right) = \sum_{m \geq M} \alpha_m(y) \cdot x^{m-1}$$

$$A(x) \cdot \frac{d}{dx} \left(T(\varphi) \right) = \tilde{A}(x) \cdot x \cdot \frac{d}{dx} \left(T(\varphi) \right) = \tilde{A}(x) \cdot \sum_{m \geq M} \alpha_m(y) \cdot x^m = \tilde{A} \cdot \psi = \varphi, \text{ ainsi a) est prouvé.}$$

Montrons maintenant b), nous avons : $\varphi = \sum_{m \geq M} \alpha_m(y) \cdot x^m$, d'où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sum_{m \geq M} m\alpha_m(y) \cdot x^{m-1} \text{ et } A(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \tilde{A}(x) \cdot \sum_{m \geq M} m\alpha_m(y) \cdot x^m \in \tilde{A} \cdot B(\delta_0, \delta, M)$$

et par définition de l'opérateur T , nous obtenons :

$$T \left(A(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) = \sum_{m \geq M} \alpha_m \cdot x^m = \varphi \text{ par suite b) est démontré.}$$

Lemme 4.3.2 Soit $D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x)$, $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, où $A(0) = 0$, $A(x) = x \cdot \tilde{A}(x)$ où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ ($m \geq 0$). Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, tel que : $\det(A_p) \neq 0$. Aors, pour tout $f \in B(\delta_0, \delta, M)$, on a :

$DW(f) = f - V(f)$ où V est l'application linéaire définie par :

$$V = (I - P)(I + BW)$$

Preuve :

Nous avons par définition (voir 2.4)

$$W = (I - TPB)^{-1}TP, \text{ soit, } (I - TPB)W = TP, \text{ d'où, } W - TPBW = TP.$$

En appliquant l'opérateur $A(x) \cdot \frac{d}{dx}$ à cette dernière relation, nous obtenons :

$$A(x) \cdot \frac{d}{dx} W(f) - A(x) \cdot \frac{d}{dx} T(PBW(f)) = A(x) \cdot \frac{d}{dx} T(P(f))$$

D'où, d'après le lemme 4.3.1 :

$$A(x) \cdot \frac{d}{dx} W(f) - PBW(f) = P(f),$$

soit :

$$A(x) \cdot \frac{d}{dx} W(f) = PBW(f) + P(f)$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} \left(A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x) \right) W(f) &= A(x) \cdot \frac{d}{dx} W(f) - BW(f) \\ &= PBW(f) + P(f) - BW(f) \\ &= (P - I)(BW + I)(f) + f \\ &= f - (I - P)(I + BW)(f) \end{aligned}$$

par suite : $DW(f) = f - V(f)$, où $V = (I - P)(I + BW)$ ce qui prouve le lemme 4.3.2

Lemme 4.3.3 Soit $D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x)$, $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$ avec $A(0) = 0$, $A(x) = x \cdot \tilde{A}(x)$ où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ ($m \geq 0$). Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\det(A_p) \neq 0$. Si $f = \sum_{m \geq M} \alpha_m(y) \cdot x^m \in B(\delta_0, \delta, M)$, alors $WD(f) = f$.

Preuve :

$$\begin{aligned} WD(f) &= W\left(A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x)\right)(f) \\ &= W\left(A(x) \cdot \frac{d}{dx}\right)(f) - WB(f) \quad (W \text{ est linéaire}) \\ &= (I - TPB)^{-1}TP\left(A(x) \cdot \frac{df}{dx}\right) - (I - TPB)^{-1}TPB(f) \quad (2.6) \end{aligned}$$

$TP\left(A(x) \cdot \frac{df}{dx}\right) = f$, en effet, soit $f = \sum_{m \geq M} \alpha_m \cdot x^m \in B(\delta_0, \delta, M)$, $A(x) \cdot \frac{df}{dx} = \tilde{A} \cdot \sum_{m \geq M} m \alpha_m \cdot x^m = x^M \cdot \psi$, où $\psi = \tilde{A} \cdot \left(\sum_{m \geq M} m \alpha_m \cdot x^{m-M}\right) + 0$, d'où par définition de l'opérateur P (voir 2.2), nous obtenons : $P\left(A(x) \cdot \frac{df}{dx}\right) = \tilde{A} \cdot \left(\sum_{m \geq M} m \alpha_m \cdot x^{m-M}\right) \cdot x^M = \tilde{A} \cdot \left(\sum_{m \geq M} m \alpha_m \cdot x^m\right) = A(x) \cdot \frac{df}{dx} \in \tilde{A} \cdot B(\delta_0, \delta, M)$ et en utilisant le lemme 4.3.1, nous obtenons :

$$TP\left(A(x) \cdot \frac{df}{dx}\right) = T\left(A(x) \cdot \frac{df}{dx}\right) = f;$$

et d'après la relation (2.6), nous obtenons :

$$WD(f) = (I - TPB)^{-1}(f) - (I - TPB)^{-1}T.P.B(f) = (I - TPB)^{-1} \cdot (I - TPB)(f) = f$$

Ce qui prouve le lemme 4.3.3.

Proposition 4.3.1 Soit $D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x)$, $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, avec $A(0) = 0$, $A(x) = x \cdot \tilde{A}(x)$ où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ ($m \geq 0$).

Supposons que :

- (i) Il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\det(A_p) \neq 0$
- (ii) $B(0) \in \text{Gl}(N, \mathbb{C})$

Si pour $u \in B(\delta_0, \delta)$; $D(u) = f = x^M \cdot R$, où $R \in \Omega(\delta_0)[x]$ est un polynôme en x , avec $d_x^o(R) \leq p - 1$, alors $u = 0$ et $f = 0$.

Preuve :

Il suffit de montrer que $u \in B(\delta_0, \delta, M)$, en effet, si nous montrons ceci, nous aurons d'après le lemme 4.3.3 : $W(f) = W\left(D(u)\right) = u$.

D'autre part $f = \tilde{A} \cdot 0 \cdot x^M + x^M \cdot R$, d'où, en utilisant la définition de l'opérateur P (voir 2.2), nous obtenons $P(f) = \tilde{A} \cdot 0 \cdot x^M = 0$ d'où (voir 2.4), $W(f) = (I - TPB)^{-1}T.P(f) = (I - TPB)^{-1}T(0) = 0$ par suite $u = W(f) = 0$ et $f = D(u) = D(0) = 0$.

Montrons alors, que $u \in B(\delta_0, \delta, M)$.

Nous avons $D(u) = f$ c'est à dire : $A(x) \cdot \frac{du}{dx} - B(x) \cdot u = f$, $u \in B(\delta_0, \delta)$, $A, B \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$.

A , B , u et f s'écrivent :

$$A(x) = \sum_{m \geq 0} A_m \cdot x^{m+2}, \quad A_m \in A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N), \quad (m \geq 0)$$

$$B(x) = \sum_{m \geq 0} B_m \cdot x^m, \quad B_m \in A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N), \quad (m \geq 0)$$

$$u = \sum_{m \geq 0} u_m \cdot x^m, \quad u_m \in \Omega(\delta_0) \quad (m \geq 0)$$

$$f = \sum_{m \geq M} \alpha_m \cdot x^m, \quad \alpha_m \in \Omega(\delta_0) \quad (m \geq M)$$

Nous obtenons alors :

$$\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{0 \leq i \leq m} A_i(m+1-i) \cdot u_{m+1-i} \right) x^{m+2} - \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} B_i \cdot u_{m-i} \cdot x^m \right) = \sum_{m \geq M} \alpha_m \cdot x^m$$

En identifiant les coefficients de x^m , pour tout $m \geq 0$, dans la relation précédente, nous obtenons le système d'équations infini suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -B(0) \cdot u_0 = 0 \\ -B(0) \cdot u_1 - B_1 \cdot u_0 = 0 \\ \vdots \\ (M-1) \cdot A_0 \cdot u_{M-1} + (M-2)A_1 \cdot u_{M-2} + \cdots + A_{M-2} \cdot u_1 - \\ \quad B(0) \cdot u_M - B_1 \cdot u_{M-1} - \cdots - B_M \cdot u_0 = \alpha_M \\ \vdots \\ (m-1) \cdot A_0 \cdot u_{m-1} + (m-2)A_1 \cdot u_{m-2} + \cdots + A_{m-2} \cdot u_1 - \\ \quad B(0) \cdot u_m - B_1 \cdot u_{m-1} - \cdots - B_m \cdot u_0 = \alpha_m \quad \forall m \geq M+1 \end{array} \right.$$

Comme $B(0) \in Gl(N, \mathbb{C})$; il vient : $u_0 = 0, u_1 = 0, \dots, u_{M-1} = 0$

$$\begin{aligned} u_M &= B(0)^{-1} (\alpha_M - (M-1)A_0 \cdot u_{M-1} - \cdots - A_{M-2} u_1 + B_1 u_{M-1} + \cdots + B_M u_0) \\ &= B(0)^{-1} \cdot \alpha_M; \end{aligned}$$

Comme $\alpha_M \neq 0$, nous avons $u_M \neq 0$.

Et pour $m \geq M+1$, nous avons (u_1, \dots, u_{m-1} étant déterminés par récurrence) :

$$u_m = B(0)^{-1} \cdot (\alpha_m - (m-1)A_0 \cdot u_{m-1} - \cdots - A_{m-2} u_1 + B_1 u_{m-1} + \cdots + B_m u_0)$$

Par suite $u = \sum_{m \geq 0} \alpha_m x^m$, avec $u_0 = \cdots = u_{M-1} = 0$ et $u_m \neq 0, \forall m \geq M$, ainsi la proposition 4.3.1 est démontrée.

Proposition 4.3.2 Soit D l'opérateur différentiel défini par :

$$D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x); \quad A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$$

avec $A(0) = 0$, $A(x) = x \cdot \tilde{A}(x)$ où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ ($m \geq 0$).

Considérons le système différentiel :

$$D(u) = E(x, y, yu) \quad (2.6)$$

où $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ est holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0)$. Supposons que :

(i) Il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\det(A_p) \neq 0$

(ii) $B(0) \in \text{Gl}(N, \mathbb{C})$

Alors, pour $\delta_0 > 0$ suffisamment petit, il existe des fonctions à valeurs vectorielles : $\varphi_m(y) \in \Omega(\delta_0)$ ($m \geq 0$) tel que la série formelle :

$$\varphi^*(x, y) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(y) x^m \in \Omega(\delta_0)[[x]]$$

soit une solution pour le système différentiel (2.6)

Preuve :

A , B et E s'écrivent :

$$A(x) = \sum_{m \geq 0} A_m \cdot x^{m+2}, \quad A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N); \quad (m \geq 0)$$

$$B(x) = \sum_{m \geq 0} B_m \cdot x^m, \quad B_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N); \quad (m \geq 0)$$

$$E(x, y, u) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(m-i)! i!} \frac{\partial^m E(0, y, 0)}{\partial x^{m-i} \partial u^i} \cdot u^i \cdot x^{m-i} \right)$$

où $\frac{\partial^m E(0, y, 0)}{\partial x^{m-i} \partial u^i} \in \text{End}(\mathbb{C}\{y\}^N)$, ($m \geq 0$), et la notation

$$\frac{\partial^m E(0, y, 0)}{\partial x^{m-i} \partial u^i} \cdot u^i = \frac{\partial^m E(0, y, 0)}{\partial x^{m-i} \partial u^i} \cdot (u, u, \dots, u)$$

signifie « appliquer la matrice $\frac{\partial^m E(0, y, 0)}{\partial x^{m-i} \partial u^i}$ successivement une première fois au vecteur u , ensuite au vecteur $\frac{\partial^m E}{\partial x^{m-i} \partial u^i}(0, y, 0) \cdot u$, et ainsi de suite, i fois ».

Cherchons φ^* solution du système (2.6) sous la forme :

$$\varphi^*(x, y) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(y) x^m \in \mathbb{C}[[y]][[x]]^N,$$

Posons $v = yu$, le système différentiel (2.6) devient :

$$\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} (m+1-i) A_i \cdot \varphi_{m+1-i}(y) \right) x^{m+2} - \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} B_i \cdot \varphi_{m-i}(y) \right) x^m = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} \frac{1}{(m-i)! i!} \frac{\partial^m E(0, y, 0)}{\partial x^{m-i} \partial v^i} \cdot v^i x^{m-i} \right)$$

Nous obtenons alors le système d'équations infini suivant :

$$(2.7) \left\{ \begin{array}{l} -B(0) \cdot \varphi_0 = E(0, y, 0) \\ -B(0) \cdot \varphi_1 - B_1 \cdot \varphi_0 = \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \cdot y \varphi_1 + \frac{\partial E}{\partial x}(0, y, 0) \\ A(0) \cdot \varphi_1 - B(0) \cdot \varphi_2 - B_1 \cdot \varphi_1 - B_2 \cdot \varphi_0 = \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \cdot y \varphi_2 \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E(0, y, 0)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 E(0, y, 0)}{\partial x \partial v} \cdot y \varphi_1 + \frac{\partial^2 E(0, y, 0)}{\partial v^2} \cdot (y \varphi_1, y \varphi_1) \right) \\ \vdots \\ (m-1)A(0) \cdot \varphi_{m-1} + (m-2)A_1 \cdot \varphi_{m-2} + \cdots + A_{m-2} \cdot \varphi_1 - B(0) \cdot \varphi_m - B_1 \cdot \varphi_{m-1} - \\ \cdots - B_m \cdot \varphi_0 = \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \cdot y \varphi_m + S_m(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}) \quad \forall m \geq 2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Où $S_m(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1})$ sont des polynômes en $(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1})$, comme $B(0) \in \text{Gl}(N, \mathbb{C})$, le système (2.7) devient :

$$(2.8) \left\{ \begin{array}{l} -B(0) \cdot \varphi_0 = E(0, y, 0) \\ -B(0) \left(I - B(0)^{-1} \cdot y \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \right) \varphi_1 = (B_1 - A(0)) \cdot \varphi_0 + \frac{\partial E}{\partial x}(0, y, 0) \\ \vdots \\ -B(0) \left(I - B(0)^{-1} \cdot y \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \right) \varphi_m = S'_m(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}) \quad \forall m \geq 2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Où les quantités $S'_m(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1})$ sont connues dès que les φ_i le sont. Comme S'_m sont des polynômes en $(m-1)$ variables $\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}$, il vient que $S'_m(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1})$ sont convergentes dans tout voisinage de $y = 0$ où les φ_i le sont. Choisissons $\delta_0 > 0$, suffisamment petit, pour que :

$$\left\| B(0)^{-1} \cdot y \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \right\|_{\delta_0} < 1$$

Par suite $\left(I - B(0)^{-1} \cdot y \frac{\partial E}{\partial v}(0, y, 0) \right)$ est un opérateur inversible, nous déduisons alors, du système (2.8), l'existence et l'analyticité des fonctions vectorielles $\varphi_m(y)$ sur un même disque $D(\delta_0)$, centré en $y = 0$, c'est à dire $\varphi^*(x, y) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(y) x^m \in \Omega(\delta_0)[[x]]$ est une solution formelle du système (2.6). Ce qui prouve la proposition 4.3.2.

4.4 Le cas linéaire : Théorème Fondamental

Théorème 4.4.1 Soit D be l'opérateur différentiel :

$D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x)$ où $A(x), B(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, sont deux matrices carrées $N \times N$ à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine $x = 0 \in \mathbb{C}$, avec $A(0) = 0$, $A(x) = x \cdot \tilde{A}(x)$ où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$; ($m \geq 0$).

Considérons le système différentiel :

$$D(u) = yE(x, y, u) \quad (3.1)$$

Où $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ est une fonction à valeurs vectorielle, holomorphe sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0) \in \mathbb{C}^{N+2}$.

Supposons que :

(i) $B(0) \in \text{Gl}(N, \mathbb{C})$, et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, tel que : $\det(A_p) \neq 0$

(ii) $u = \psi(x, y) = \sum_{n \geq 1} \psi_n(x) y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^N$, est une solution formelle du système (3.1)

Alors ψ converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$.

Preuve :

La fonction : $\varphi = \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_m(y) x^m$, $\varphi_m(y) \in \Omega(\delta_0)$, est d'après la proposition 4.3.2, solution formelle du système différentiel :

$$D(\varphi) - E(\varphi, y, y\varphi) = 0(x^M) \quad (3.2)$$

Posons $v = u - y\varphi(x, y)$, le système différentiel (6.2) devient :

$$\begin{aligned} D(v) &= yE(x, y, v + y\varphi) - D(y\varphi) \\ &= yF(x, y, v) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Posons

$$\tilde{\psi}(x, y) = \psi(x, y) - y\varphi(x, y) = \sum_{n \geq 0} \tilde{\psi}_n(x) y^n$$

$v = \tilde{\psi}$, est une solution formelle du système (3.3), il suffit de montrer que $v = \tilde{\psi}(x, y)$ converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$.

Nous avons $F(x, y, v) = \sum_{|\theta| \geq 0} F_\theta(x, y) v^\theta$, où $\theta = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^N$; $|\theta| = \sum_{i=1}^N p_i$, et

$v^\theta = v_1^{p_1} \dots v_N^{p_N}$, $v = {}^t(v_1, \dots, v_N)$. Comme F est analytique dans un voisinage de $(x, y, v) = (0, 0, 0)$, F vérifie :

$$\sum_{|\theta| \geq 0} \|F_\theta(x, y)\|_{\delta_0, \delta} \rho_1^{|\theta|} < +\infty, \quad (\text{où } \rho_1 > 0)$$

Posons :

$$\mathcal{B} = \{f \in B(\delta_0, \delta, M); \|f\|_{\delta_0, \delta} < \rho_1\}$$

alors $F(x, y, f) \in B(\delta_0, \delta, M) \forall f \in \mathcal{B}$, en effet :

$$F(x, y, f) = \sum_{|\theta| \geq 0} F_\theta(x, y) \cdot f^\theta$$

Le terme constant associé à f (i.e le coefficient de f_θ avec $|\theta| = 0$) dans le développement en série précédent de $F(x, y, f)$, est donné par :

$$\begin{aligned} F_\theta(x, y) = F_{(0, \dots, 0)}(x, y) &= F(x, y, 0) \\ &= E(x, y, y\varphi) - D(\varphi) && \text{(d'après (3.3))} \\ &= O(x^M) && \text{(d'après (3.2))} \end{aligned}$$

Il existe alors, une fonction h_y définie sur un voisinage de $x = 0 \in \mathbb{C}$ et bornée dans celui-ci, vérifiant :

$F_\theta(x, y) = x^M \cdot h_y(x)$ où $|\theta| = 0$, d'où $F_\theta \in B(\delta_0, \delta, M)$ pour $|\theta| = 0$, et pour $|\theta| \geq 1$, nous avons : $f^\theta = f_1^{p_1} \cdots f_N^{p_N}$ où $f = {}^t(f_1 \cdots f_N)$, $\theta = (p_1, \dots, p_N)$, $|\theta| = \sum_{i=1}^N p_i$, nous avons aussi :

$f_i = \sum_{m \geq M} \alpha_{i,m}(y)x^m$; $\forall i, 1 \leq i \leq N$, car $f \in B(\delta_0, \delta, M)$; d'où :

$$f^\theta = \left(\sum_{m \geq M} \alpha_{1,m}(y)x^m \right)^{p_1} \cdots \left(\sum_{m \geq M} \alpha_{N,m}(y)x^m \right)^{p_N} \in B(\delta_0, \delta, M)$$

Par suite,

$$\sum_{|\theta| \geq 0} F_\theta(x, y) \cdot f^\theta = F(x, y, f) \in B(\delta_0, \delta, M), \forall f \in \mathcal{B}$$

D'autre part $(I - TPB) : B(\delta_0, \delta, M) \longrightarrow B(\delta_0, \delta, M)$ étant un isomorphisme, nous déduisons (voir (2.2), (2.3) et (2.4)) $W = (I - TPB)^{-1}TP$ prend ses valeurs dans $B(\delta_0, \delta, M)$, d'où

$$yWF(x, y, f) \in B(\delta_0, \delta, M) \forall f \in B;$$

C'est à dire :

$yWF(x, y, f) = \sum_{m \geq M} g_m(y) \cdot x^m$; $g_m(y) \in \Omega(\delta_0)$; par suite, en choisissant δ_0 suffisamment petit,

nous obtenons :

$$\|yWF(x, y, f)\|_{\delta_0, \delta} = \sum_{m \geq M} \|g_m(y)\|_{\delta_0} \cdot \delta^m \leq \rho_1,$$

D'où, $yWF(x, y, f) \in \mathcal{B}$, $\forall f \in \mathcal{B}$; d'autre part, $yWF(x, y, f)$ est lipschitzienne contractante par rapport à f , en effet : $F(x, y, f) - F(x, y, f') = (f - f') \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, f - f')$, d'où

$$\begin{aligned} \|yWF(x, y, f) - yWF(x, y, f')\|_{\delta_0, \delta} &= \|yW(F(x, y, f) - F(x, y, f'))\|_{\delta_0, \delta} \\ &\leq \frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})}{M - \lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A}) \cdot \|B\|_\delta} \cdot \|F(x, y, f) - F(x, y, f')\|_{\delta_0, \delta} \text{ (cf. (2.5))} \\ &\leq \frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})}{M - \lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A}) \cdot \|B\|_\delta} \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, f - f') \right\|_{\delta_0, \delta} \cdot \|f - f'\|_{\delta_0, \delta} \\ &= C_M(\delta_0, \delta) \cdot \|f - f'\|_{\delta_0, \delta} \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A})}{M - \lambda(\tilde{A})\mu(\tilde{A}) \cdot \|B\|_\delta} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0,$$

il existe $M \geq 1$, tel que : $C_M(\delta_0, \delta) < 1$, ceci donne la contraction, nous déduisons alors, du théorème du point fixe, qu'il existe $f \in \mathcal{B}$ tel que : $f = yWF(x, y, f)$, en utilisant le lemme 4.3.2, nous obtenons : $D(f) = y.F(x, y, f) - y.V(F(x, y, f))$, où :

$$V(F(x, y, f)) = (I - P)(I + BW)(F) = (I + BW)(F) - P((I + BW)(F))$$

$(I + BW)(F) = \varphi \in B(\delta_0, \delta, M)$, d'où, $\varphi = x^M \psi$, $\psi \in B(\delta_0, \delta)$ et nous déduisons de la proposition 4.2.1, qu'il existe $Q \in B(\delta_0, \delta)$ et $R \in \Omega(\delta_0)[x]$, $\deg_x R \leq p - 1$, Q et R étant déterminés de façon unique, tels que : $\psi = \tilde{A}.Q + R$; d'où :

$$\begin{aligned} V(F(x, y, f)) &= \varphi - P(\varphi) \\ &= x^M.\psi - \tilde{A}.Q.x^M \\ &= x^M.\tilde{A}.Q + x^M.R - \tilde{A}.Q.x^M = x^M.R \end{aligned}$$

Alors :

$$D(f) = yF(x, y, f) - yx^M.R \quad (3.4)$$

Nous déduisons alors, des relations (3.3) et (3.4) :

$$D(\tilde{\psi} - f) = yx^M.R + y(F(x, y, \tilde{\psi}) - F(x, y, f)) \quad (3.5)$$

Il suffit de montrer que $\tilde{\psi} = f$; posons : $f = \sum_{n \geq 0} f_n(x)y^n$; et supposons que $\tilde{\psi} \neq f$, il existe

$$\text{alors, } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \begin{cases} \tilde{\psi}_n - f_n = 0 & n < n_0 \\ \tilde{\psi}_{n_0} - f_{n_0} \neq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

En regardant (3.5) comme relation entre séries formelles en y , et en utilisant (3.6), nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} D(\tilde{\psi}_n - f_n).y^n &= yx^M \sum_{m=0}^{m=p-1} \alpha_m(y).x^m + \\ &y. \sum_{n \geq n_0} (\tilde{\psi}_n - f_n) \frac{\partial F}{\partial v} \left(x, y, \sum_{n \geq n_0} (\tilde{\psi}_n - f_n)y^n \right).y^n \end{aligned} \quad (3.7)$$

En identifiant les coefficients de y^{n_0} dans (3.7), nous obtenons :

$$D(\tilde{\psi}_{n_0} - f_{n_0}) = x^M \sum_{m=0}^{m=p-1} \beta_m(y).x^m + (\tilde{\psi}_{n_0-1} - f_{n_0-1}). \frac{\partial F}{\partial v} \left(x, y, \sum_{n \geq n_0} (\tilde{\psi}_n - f_n)y^n \right)$$

où $\beta_m(y) \in \Omega(\delta_0)$, $0 \leq m \leq p - 1$. Comme d'après (3.6) $\tilde{\psi}_n - f_n = 0$ pour $n < n_0$, il vient que :

$$\tilde{\psi}_{n_0-1} - f_{n_0-1} = 0,$$

D'où :

$$D(\tilde{\psi}_{n_0} - f_{n_0}) = x^M \sum_{m=0}^{m=p-1} \beta_m(y).x^m = x^M R',$$

où $R' \in \Omega(\delta_0)[x]$ et $\deg_x R' \leq p - 1$, comme $\tilde{\psi}_{n_0} - f_{n_0} \in B(\delta_0, \delta)$, il s'en suit de la proposition 2.1, que, $\tilde{\psi}_{n_0} - f_{n_0} = 0$, ce qui contredit (3.6).

Par suite : $\tilde{\psi} = f$ et $\tilde{\psi}$ converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$, d'où $u = \tilde{\psi} + \sum_{m=0}^{m=p-1} \varphi_m(y).x^m$ converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$, ceci termine la preuve du théorème 4.4.1.

4.5 Application du cas linéaire :

Théorème 4.5.1 Soit $A(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$, matrice carrée $N \times N$ à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine $x = 0 \in \mathbb{C}$, avec $A(0) = 0$, $A(x) = x.\tilde{A}(x)$, où $\tilde{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m+1}$, $A_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$; ($m \geq 0$); et soit $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ une fonction holomorphe, définie sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0)$. Considérons le système différentiel :

$$A(x) \cdot \frac{du}{dx} = E(x, y, u) \quad (4.1)$$

Supposons que $u = \psi(x, y) = \sum_{n \geq 0} \psi_n(x) y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^N$ soit une solution formelle pour le système (4.1) et que :

(i) $\psi_0(0) = 0$

(ii) Il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\det(A_p) \neq 0$

(iii) La matrice Jacobienne $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) \in \text{Gl}(N, \mathbb{C})$

Alors u converge au voisinage de $(x, y) = (0, 0)$.

Preuve :

Posons $v = u - \psi_0 + \psi_1.y$, le système (4.1) devient alors :

$$\begin{aligned} A(x) \cdot \frac{dv}{dx} &= E(x, y, v + \psi_0 + \psi_1.y) - A(x) \cdot \frac{d}{dx}(\psi_0 + \psi_1.y) \\ &= F(x, y, v) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$F(x, y, v) = F(x, y, 0) + \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, 0).v + H(x, y, v)$$

Posons : $v = y.w$; (4.2) devient :

$$y.A(x) \cdot \frac{dw}{dx} = F(x, y, 0) + y \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, 0).w + H(x, y, yw),$$

D'où :

$$A(x) \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{1}{y} F(x, y, 0) + \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, 0).w + \frac{1}{y} H(x, y, yw)$$

$$\text{Alors } A(x) \cdot \frac{dw}{dx} - \frac{\partial F}{\partial v}(x, 0, 0).w = \frac{1}{y} F(x, y, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial v}(x, y, 0) - \frac{\partial F}{\partial v}(x, 0, 0) \right).w + \frac{1}{y} H(x, y, yw)$$

Posons alors : $D = A(x) \cdot \frac{d}{dx} - B(x)$ où $B(x) = \frac{\partial F}{\partial v}(x, 0, 0)$ and

$$\tilde{F}(x, y, w) = \frac{1}{y^2} F(x, y, 0) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial F}{\partial v}(x, y, 0) - \frac{\partial F}{\partial v}(x, 0, 0) \right).w + \frac{1}{y^2} H(x, y, yw)$$

Par suite (4.2) devient : $D(w) = y.\tilde{F}(x, y, w)$, d'où

$$A(x) \cdot \frac{dw}{dx} - B(x).w = y.\tilde{F}(x, y, w) \quad (4.3)$$

$$\text{et } w = \frac{1}{y} v = \frac{1}{y} \cdot \sum_{n \geq 2} \psi_n(x).y^n = \sum_{n \geq 2} \psi_n(x).y^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \psi_{n+1}(x).y^n$$

est une solution formelle du système différentiel (4.3), d'autre part, nous avons d'après (4.2) :

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x, y, 0) = \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \psi_0 + \psi_1.y)$$

D'où, $B(x) = \frac{\partial F}{\partial v}(x, 0, 0) = \frac{\partial E}{\partial u}(x, 0, \psi_0(x))$; et d'après l'hypothèse(i), $\psi_0(0) = 0$, d'où :

$$B(0) = \frac{\partial F}{\partial v}(0, 0, 0) = \frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0)$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (iii), $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, d'où $B(0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, nous déduisons alors du théorème 4.4.1, que la solution formelle w , converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$. Par suite $u = \psi(x, y)$ converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$. Ce qui termine la démonstration du théorème 4.5.1.

4.6 Existence de solutions convergentes pour certains systèmes de Pfaff non linéaires, complètement intégrables

Comme application du théorème 4.5.1, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.6.1 *Considérons le système de Pfaff complètement intégrable ayant la forme :*

$$(5.1) \begin{cases} A(x) \frac{\partial u}{\partial x} = E(x, y, u) & (5.2) \\ B(y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u) & (5.3) \end{cases}$$

Où $A(x)$, $B(y)$ sont deux matrices carrées $N \times N$ dont les coefficients sont respectivement dans les anneaux $\mathbb{C}\{x\}$ et $\mathbb{C}\{y\}$, tels que $A(0) = B(0) = 0$, $A(x) = \sum_{m \geq 0} A_m \cdot x^{m+2}$, $B(y) =$

$$\sum_{m \geq 0} B_m \cdot y^{m+2},$$

$A_m, B_m \in End(\mathbb{C}^N)$ ($m \geq 0$); $E, F : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ sont deux fonctions holomorphes, définies sur un ouvert U contenant l'origine $(x, y, u) = (0, 0, 0)$ et à valeurs dans \mathbb{C}^N . Supposons que :

(i) $E(0, 0, 0) = F(0, 0, 0) = 0$

(ii) Les matrices Jacobiennes $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0)$; $\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$

(iii) Il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\det(A_p) \neq 0$

(iv) $A.B = B.A$; $A \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot A$; $B \cdot \frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial u} \cdot B$

Alors le système de Pfaff (5.1) possède une unique solution $u = \psi(x, y)$, vérifiant :

a) $\psi(0, 0) = 0$

b) ψ , est holomorphe dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$

Donnons la définition suivante :

Définition 4.6.1 *Nous dirons que la série formelle en x , $\varphi_y(x) = \varphi(x, y) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(y)x^m$,*

(resp. la série formelle en y , $\psi_x(y) = \psi(x, y) = \sum_{m \geq 0} \psi_m(x)y^m$)

où $\varphi_m(y) \in \mathbb{C}[[y]]^N$ ou $\mathbb{C}\{y\}^N$ (resp. $\psi_m(x) \in \mathbb{C}[[x]]^N$ ou $\mathbb{C}\{x\}^N$) et où $\varphi_0(0) = 0$ (resp. $\psi_0(0) = 0$) est une solution formelle pour le système différentiel :

$$A(x) \cdot \frac{du}{dx} = E(x, y, u) \quad (E)$$

si :

a) $E(0, y, \varphi_0(y)) = 0$, (resp. $A(x) \cdot \frac{d\psi_0}{dx} = E(x, 0, \psi_0)$)

b) si nous posons : $v = u - \varphi_0(y)$ (resp. $v = u - \psi_0(x)$)

le système différentiel (E) devient :

$$A(x) \cdot \frac{dv}{dx} = F(x, y, v) \quad (E')$$

où $F(x, y, v) = E(x, y, v + \varphi_0(y))$, (resp. $F(x, y, v) = E(x, y, v + \psi_0(x)) - A(x) \cdot \frac{d\psi_0}{dx}$) ; alors l'équation formelle en x (resp. l'équation formelle en y), obtenue en substituant dans (E'), $F(x, y, v)$ par sa série de Taylor relativement aux variables x et v (resp. y et v) dans un voisinage de $(x, v) = (0, 0)$ (resp. $(y, v) = (0, 0)$) est satisfaite par :

$$v = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(y) x^m, \quad \left(\text{resp. } v = \sum_{m \geq 1} \psi_m(x) y^m \right)$$

Nous allons utiliser aussi le résultat suivant, connu sous le nom de théorème des fonctions implicites, pour les fonctions analytiques :

Théorème 4.6.2 (voir [12], théorème 2.12, page 24) Soit x une multivariable complexe, et $E(x, u(x))$ une fonction définie par : $E : U \subset \mathbb{C}_x^m \times \mathbb{C}_u^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, analytique dans un voisinage U de $(x, u(x)) = (0, 0) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$, supposons que :

(i) $E(0, 0) = 0$

(ii) La matrice Jacobienne $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0) \in Gl(n, \mathbb{C})$

Alors l'équation $E(x, u) = 0$ possède une unique solution $u(x)$, analytique dans un voisinage de $x = 0 \in \mathbb{C}^n$ telle que $u(0) = 0$.

Preuve du Théorème 4.6.1 :

Considérons l'équation (5.3) du système (5.1) et montrons qu'il existe une solution formelle pour (5.3) sous la forme : $u = \psi(x, y) = \sum_{m \geq 0} \psi_m(x) y^m$, où $\psi_m(x) \in \mathbb{C}[[x]]^N$, ($m \geq 0$).

Il vient alors de la définition 4.6.1 que : $B(y) \cdot \frac{d}{dy}(\psi_0(x)) = F(x, 0, \psi_0(x)) = 0$

Considérons alors, l'équation analytique :

$$F(x, 0, u) = 0 \quad (5.4)$$

Comme $F(0, 0, 0) = 0$ et que $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, nous déduisons du théorème 4.6.2 l'existence d'une unique solution analytique dans un voisinage de 0 pour l'équation (5.4); comme $\psi_0(x)$ est une solution de l'équation (5.4), il s'en suit que $\psi_0(x)$ est analytique dans un voisinage Ω_0 de $0 \in \mathbb{C}$.

Posons $v = \psi(x, y) - \psi_0(x) = \sum_{m \geq 1} \psi_m(x)y^m$, le système différentiel (5.3) devient,

$$B(y) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = G(x, y, v) \quad (5.5)$$

où $G(x, y, v) = F(x, y, v + \psi_0(x))$

D'où : $G(x, 0, 0) = F(x, 0, \psi_0(x)) = 0$

$B(y) = \sum_{m \geq 0} B_m \cdot y^{m+2}$; $B_m \in End(\mathbb{C}^N)$, ($m \geq 0$); nous déduisons alors de (5.5) :

$$\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} B_i \cdot \psi_{m+1-i} \cdot y^{m+2} \right) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} \frac{1}{(m-i)!i!} \frac{\partial^m G}{\partial y^{m-i} \partial v^i}(x, 0, 0) \cdot v^i \cdot y^{m-i} \right)$$

En identifiant les coefficients de y^m , ($m \geq 0$); nous obtenons le système d'équations infini suivant :

$$(5.6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial v}(x, 0, 0)\psi_1(x) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0, 0) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial v}(x, 0, 0)\psi_2 \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, 0, 0) + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial y v}(x, 0, 0)\psi_1 + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(x, 0, 0) \cdot (\psi_1, \psi_1) \right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial v}(x, 0, 0)\psi_m(x) + S_m(\psi_1, \dots, \psi_{m-1}) = B_0(m-1)\psi_{m-1} + \\ B_1(m-2)\psi_{m-2} + \dots + B_{m-2}\psi_1; \quad \forall m \geq 2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Où $S_m(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ sont des polynômes à $(m-1)$ variables $\psi_1, \dots, \psi_{m-1}$; les quantités $S_m(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ sont connues dès que les ψ_i ($1 \leq i \leq m-1$) le sont, et sont analytiques dans tout voisinage de $x = 0 \in \mathbb{C}$, où les ψ_i ($1 \leq i \leq m-1$) le sont. Après simplification, le système (5.6) devient :

$$(5.7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial v}(x, 0, 0)\psi_1 + \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0, 0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial v}(x, 0, 0)\psi_m = S'_m(\psi_1, \dots, \psi_{m-1}); \quad \forall m \geq 2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Où $S'_m(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ sont des quantités connues, dès que les ψ_i ($1 \leq i \leq m-1$) le sont ; comme $\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, alors pour x voisin de zéro, nous avons :

$$\frac{\partial G}{\partial v}(x, 0, 0) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, 0, \psi_0(x)) \in Gl(N, \mathbb{C})$$

Nous déduisons alors, par récurrence, du système (5.7), l'existence, l'unicité et l'analyticité des fonctions ψ_m dans un même disque Δ , centré en $x = 0 \in \mathbb{C}$, par suite il existe une unique solution formelle de la forme :

$$u = \psi(x, y) = \sum_{m \geq 0} \psi_m(x) \cdot y^m \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^N$$

pour l'équation (5.3). La condition de complète intégrabilité du système (5.1) s'écrit :

$$B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, u) + \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) F(x, y, u) = A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) E(x, y, u)$$

identiquement en u . Comme $u = \psi(x, y)$ est une solution du système différentiel (5.3), nous avons :

$$B(y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = F(x, y, \psi);$$

D'où :

$$B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, \psi) + \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot B(y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \psi) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot E(x, y, \psi) \quad (5.8)$$

Nous avons :

$$B(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(A(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = B(y) \cdot A(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = A(x) \cdot B(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (\text{voir (iv)})$$

$$A(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(B(y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = A(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x, y, \psi) \right) = A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \psi) + A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Par suite, nous obtenons la relation :

$$A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \psi) = B(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(A(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.9)$$

En remplaçant dans (5.8) l'expression de $A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \psi)$ trouvée dans la formule (5.9), nous obtenons :

$$B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, \psi) + \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \psi) B(y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = B(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(A(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) E(x, y, \psi)$$

Ou encore :

$$A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) E(x, y, \psi) = B(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(A(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, \psi) - \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \psi) B(y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Nous obtenons alors, d'après l'hypothèse (iv) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \left(A(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - E(x, y, \psi) \right) &= B(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(A(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &\quad - B(y) \left(\frac{\partial E}{\partial y}(x, y, \psi) - \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Comme

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x, y, \psi) - \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, \psi) = \frac{\partial}{\partial y} \left(E(x, y, \psi) \right)$$

(5.10) devient alors :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \left(A(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - E(x, y, \psi) \right) = B(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(A(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - E(x, y, \psi) \right)$$

Posons :

$$v(x, y) = A(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - E(x, y, \psi)$$

Alors, v vérifie le système différentiel :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \cdot v = B(y) \frac{\partial v}{\partial y}$$

Par suite :

$$B(y) \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \right) \cdot v = 0 \quad (5.11)$$

Lemme 4.6.1 *La fonction $v = 0$, est l'unique solution du système différentiel (5.11).*

Preuve :

Ecrivons v , sous la forme :

$$v(x, y) = \sum_{m \geq 0} v_m(x) \cdot y^m \in \mathbb{C}[[x]][[y]]^N$$

Et B sous la forme :

$$B(y) = \sum_{m \geq 0} B_m \cdot y^{m+2}; \quad B_m \in \text{End}(\mathbb{C}^N) \quad (m \geq 0)$$

Nous déduisons alors, de l'équation (5.11) :

$$\sum_{m \geq 0} \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \right) v_m(x) y^m = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{i=m} B_i \cdot (m+1-i) \cdot v_{m+1-i}(x) \cdot y^{m+2} \right)$$

En identifiant les coefficients de y^m , pour tout $m \geq 0$; nous obtenons le système infini :

$$(5.12) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi)v_0(x) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi)v_1(x) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi)v_2(x) = B_0v_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi)v_m(x) = B_0(m-1)v_{m-1}(x) + B_1(m-2)v_{m-2}(x) + \cdots + B_{m-2}v_1(x); \forall m \geq 2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, alors pour x et y voisins de zéro, nous avons $\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, \psi) \in Gl(N, \mathbb{C})$, nous déduisons alors, par récurrence, du système (5.12), que :

$$v_0(x) = 0, v_1(x) = 0, v_2(x) = 0, \dots, v_m(x) = 0 \quad \forall m \geq 2;$$

Par suite, $v(x, y) = \sum_{m \geq 0} v_m(x) \cdot y^m = 0$; ce qui termine la démonstration du lemme 4.6.1.

Nous avons alors, d'après le lemme 4.6.1 : $v = 0$, ou encore :

$$A(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} = E(x, y, \psi) \quad (5.13)$$

D'où $u = \psi(x, y) = \sum_{n \geq 0} \psi_n(x) y^n \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^N$ est aussi solution, de l'équation (5.2) du système

de Pfaff (5.1), d'autre part, nous avons :

$u = \varphi(x, y) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(y) x^m \in \mathbb{C}[[y]][[x]]^N$ et la fonction d'une variable complexe $\varphi(0, y) = \varphi_0(y)$ vérifie l'équation analytique :

$$E(0, y, \varphi_0(y)) = A(x) \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_0(y)) = 0$$

Comme par hypothèse, $E(0, 0, 0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$, nous déduisons du théorème 4.6.2 que $\varphi_0(0) = 0$. D'autre part, comme :

$$u = \sum_{n \geq 0} \psi_n(x) y^n = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(y) x^m = \sum_{n+m \geq 0} a_{n,m} x^n y^m,$$

nous avons $\varphi_0(0) = \psi_0(0)$; d'où $\psi_0(0) = 0$. Par suite, les hypothèses du théorème 4.5.1, à savoir :

(i) $\psi_0(0) = 0$

(ii) $\det(A_p) \neq 0$

(iii) $\frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) \in Gl(N, \mathbb{C})$

sont vérifiées, nous concluons alors, du théorème 4.5.1, que u converge dans un voisinage de $(x, y) = (0, 0)$; ceci termine la démonstration du théorème 4.6.1.

4.7 Exemples :

1) Donnons d'abord, un exemple simple particulier pour le théorème 4.5.1 :

Considérons (dans le cas où $N = 2$) le système différentiel :

$$A(x) \cdot \frac{du}{dx} = E(x, y, u) \quad \text{avec} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + x - \exp x \\ 1 + x - \exp x & 0 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, u) &\longmapsto E(x, y, u) = \begin{pmatrix} E_1(x, y, u) \\ E_2(x, y, u) \end{pmatrix} \\ &= E(x, y, (u_1, u_2)) \\ &= (u_2 + x \cdot u_2 - 2y \cdot \exp 2x, u_1 + x \cdot u_1 - y \cdot \exp 2x) \end{aligned}$$

Alors, $A(0) = 0$, $E(0, 0, 0) = 0$ et

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot \exp x \\ 2y \cdot \exp x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}\{x\}[[y]]^2$$

est une solution (formelle) du système différentiel précédent, en effet :

$$\begin{aligned} A(x) \cdot \frac{d\varphi}{dx} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 + x - \exp x \\ 1 + x - \exp x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx} \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 + x - \exp x \\ 1 + x - \exp x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_2 + x \cdot \varphi_2 - 2y \cdot \exp 2x \\ \varphi_1 + x \cdot \varphi_1 - y \cdot \exp 2x \end{pmatrix} \\ &= E(x, y, \varphi) \end{aligned}$$

et la matrice jacobienne de la fonction E est donnée par :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial u_1} & \frac{\partial E_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial u_1} & \frac{\partial E_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + x \\ 1 + x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C}).$$

Par suite, les propriétés (i), (ii) et (iii) du Théorème 4.5.1 sont satisfaites et la solution φ est clairement convergente au voisinage de l'origine $(0, 0)$ de \mathbb{C}^2 et vérifie $\varphi(0, 0) = 0$.

Cet exemple illustre le cas traité par Sibuya [18].

2) Nous pouvons avoir un exemple dans un cadre plus général, pour le Théorème 4.5.1, de la manière suivante :

Etant données $A(x) \in \text{End}(\mathbb{C}\{x\}^N)$ et $E : U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_u^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ comme au paragraphe (4.5), définissons

$$b(x) = A(x) \frac{d}{dx} (\varphi(x, y)) - E(x, y, \varphi(x, y))$$

pour une série convergente quelconque $\varphi(x, y)$. Alors, le système suivant :

$$A(x) \frac{du}{dx} = E(x, y, u) + b(x)$$

admet $u = \varphi(x, y)$ comme solution (formelle).

3) Donnons maintenant, un exemple pour le Théorème 4.6.1 :

Dans le Théorème 4.6.1, la condition de complète intégrabilité du système (5.1) est compatible avec les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv), en effet, si nous considérons $A(x)$ et $B(y)$, les deux matrices 2×2 holomorphes au voisinage de l'origine :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x - \sin x \\ x - \sin x & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } B(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + y - \exp y \\ 1 + y - \exp y & 0 \end{pmatrix}$$

et les deux fonctions vectorielles holomorphes au voisinage de l'origine $(x, y, u) = 0 \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ définies par :

$$E(x, y, u) = \begin{pmatrix} u_2 - 2 \exp y \cdot \sin x, & u_1 - \exp y \cdot \sin x \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$F(x, y, u) = \begin{pmatrix} u_2 + y \cdot u_2 - 2x \cdot \exp 2y, & u_1 + y \cdot u_1 - x \cdot \exp 2y \end{pmatrix}$$

Considérons le système de Pfaff :

$$(S) \begin{cases} A(x) \frac{\partial u}{\partial x} = E(x, y, u) \\ B(y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u) \end{cases}$$

Nous avons alors, $A(0) = B(0) = 0$, $E(0, 0, 0) = F(0, 0, 0) = 0$, et $A(x) \cdot B(y) = B(y) \cdot A(x)$. Les matrices jacobiniennes E et F sont données par :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial u_1} & \frac{\partial E_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial u_1} & \frac{\partial E_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial u}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C}).$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + y \\ 1 + y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{C}).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) &= \begin{pmatrix} 0 & x - \sin x \\ x - \sin x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 + y \\ 1 + y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x - \sin x)(1 + y) & 0 \\ 0 & (x - \sin x)(1 + y) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) \cdot A(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 + y - \exp y \\ 1 + y - \exp y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + y - \exp y & 0 \\ 0 & 1 + y - \exp y \end{pmatrix} = \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) \cdot B(y)
\end{aligned}$$

La condition de complète intégrabilité s'écrit :

$$B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, u) + \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) F(x, y, u) = A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) E(x, y, u)$$

identiquement en u . Nous avons :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + y \\ 1 + y & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, u) = \begin{pmatrix} -2 \sin x \cdot \exp y \\ \sin x \cdot \exp y \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u) = \begin{pmatrix} -2 \exp 2y \\ \exp 2y \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 + y - \exp y \\ 1 + y - \exp y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \sin x \cdot \exp y \\ \sin x \cdot \exp y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin x \cdot \exp y (1 + y - \exp y) \\ 2 \sin x \cdot \exp y (1 + y - \exp y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) \cdot F(x, y, u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 + y u_2 - 2x \cdot \exp 2y \\ u_1 + y u_1 - x \cdot \exp 2y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + y u_1 - x \cdot \exp 2y \\ u_2 + y u_2 - 2x \cdot \exp 2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u) = \begin{pmatrix} 0 & x - \sin x \\ x - \sin x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \exp 2y \\ \exp 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\exp 2y (x - \sin x) \\ 2 \exp 2y (x - \sin x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) \cdot E(x, y, u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 + y \\ 1 + y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 - 2 \exp y \cdot \sin x \\ u_1 - \exp y \cdot \sin x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 + y)(u_1 - \exp y \cdot \sin x) \\ (1 + y)(u_2 - 2 \exp y \cdot \sin x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, u) + \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u) \cdot F(x, y, u) &= \begin{pmatrix} -\sin x \cdot \exp y (1 + y - \exp y) \\ 2 \sin x \cdot \exp y (1 + y - \exp y) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} u_1 + y u_1 - x \cdot \exp 2y \\ u_2 + y u_2 - 2x \cdot \exp 2y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + y u_1 - (1 + y) \sin x \exp y - (x - \sin x) \exp 2y \\ u_2 + y u_2 - 2(1 + y) \sin x \exp y - 2(x - \sin x) \exp 2y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 + y)(u_1 - \sin x \exp y) - (x - \sin x) \exp 2y \\ (1 + y)(u_2 - 2 \sin x \exp y) - 2(x - \sin x) \exp 2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) \cdot E(x, y, u) &= \begin{pmatrix} -(x - \sin x) \exp 2y \\ 2(x - \sin x) \exp 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 + y)(u_1 - \sin x \cdot \exp y) \\ (1 + y)(u_2 - 2 \sin x \cdot \exp y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 + y)(u_1 - \sin x \exp y) - (x - \sin x) \exp 2y \\ (1 + y)(u_2 - 2 \sin x \exp y) - 2(x - \sin x) \exp 2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$B(y) \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(x, y, u) + \frac{\partial E}{\partial u}(x, y, u)F(x, y, u) = A(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u)E(x, y, u)$$

Qui est la condition de complète intégrabilité. Par suite la condition de complète intégrabilité est compatible avec les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv) du Théorème 4.6.1, et toutes ces conditions sont vérifiées.

La fonction :

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \exp y \\ 2x \cdot \exp y \end{pmatrix}$$

est la solution analytique du système (S) au voisinage de l'origine et vérifie $\psi(0, 0) = 0$.

Bibliographie

- [1] W. BALSER : Multisummability of complete formal solutions for nonlinear systems of meromorphic ordinary differential equations, *Complex variables*, vol. 34, pp. 19-24, 1997, OPA Amsterdam B.V.
- [2] W. BALSER : Existence and structure of complete formal solutions of non-linear meromorphic systems of ordinary differential equations, *Asymptotic Analysis* 15 (1997) 261-282
- [3] G. BENDEL and R. GERARD : Formal and convergent solutions of singular partial differential equations, *Manuscripta Math.*, 38(1982), 343-373
- [4] B.L.J. BRAAKSMA : Multisummability and Stokes Multipliers of Linear Meromorphic Differential Equations, *Journal of Differential Equations*, Vol. 92, No. 1, 1991.
- [5] B.L.J. BRAAKSMA : Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 423 (1992), 517-540.
- [6] H. CHARRIERE : Triangularisation formelle de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables et application à l'étude \mathcal{C}^∞ des systèmes non linéaires, *Anali della Scuola Normale superiore di Pisa*, Vol.II (1980), 625-714.
- [7] R. GERARD and Y. SIBUYA : Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, *Lecture Notes in Math.* N° 712, Springer-Verlag (1979), 131-288.
- [8] R. GERARD and H. TAHARA : Singular nonlinear partial differential equations, *Aspects of Mathematics*, Vol. E28, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1996
- [9] W.A. HARRIS, Jr. : Holomorphic solutions of non linear differential equations at singular points; *Advances in differential and integral equations*, SIAM : studies in Applied Math., N° 5(1969), 184-185.
- [10] W.A. HARRIS, Jr., Y. SIBUYA, and, L. WEINBERG : Holomorphic solutions of linear differential equations at singular points, *Archiv.for rational Mech.Anal.* ; 35(1969), 245-248.
- [11] E. HILLE : Ordinary differential equations in the complex domain. JOHN WILEY and SONS Publishing Company, 1976.
- [12] L. HÖRMANDER : An Introduction to complex analysis in several variables, North Holland Publishing company, 1973.
- [13] P-F. HSIEH and Y. SIBUYA : Basic Theory of Ordinary Differential Equations, Universitext, Springer-Verlag, 1999.
- [14] M. HUKUHARA, T. KIMURA, and, T. MATUDA : Equations différentielles ordinaires du 1er ordre dans le champs complexe, publication of the Mathematical Society of Japan (1961).
- [15] B. MALGRANGE : Sur les points singuliers des équations différentielles, *l'enseignement mathématique*, t.XX, 1-2, 1974, 147-176.
- [16] M.S. REZAOUI : Convergence of formal solutions of some nonlinear differential systems at an irregular singularity, *Asymptotic Analysis*, Vol. 46(2), IOS Press, (2006), 93-122.

- [17] Y.SIBUYA : A linear Pfaffian system at an irregular singularity, Tohoku Math. Jour., 32, (1980), 209-215.
- [18] Y. SIBUYA : Convergence of formal power series solutions of a system of non linear differential equations at an irregular singular point, Proceedings of the 4th scheveningen conference on differential equations, the Netherlands, August 26-31 (1979), Lecture Notes in Math. N° 810, Springer-Verlag (1980), 135-142.
- [19] Y.SIBUYA : Linear Differential Equations in the Complex Domain : Problems of Analytic Continuation, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 82, American Mathematical Society. Providence. Rhode Island, 1990.
- [20] Y. SIBUYA : Convergence of Formal Solutions of Meromorphic Differential Equations Containing Parameters, Funkcialaj Ekvacioj, 37 (1994), 395-400.
- [21] H.L. TURRITTIN : Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Mathematica, 93, (1955), 27-66.
- [22] W. WASOW :Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publishers, 1965.

Med-SALEM REZAOUI

Université d'Alger (USTHB),

Faculté des Mathématiques, B.P 32 El-Alia Bab-Ezzouar, 16111, Alger

- ALGERIE -

Adresse électronique : mrezaoui@usthb.dz