

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE**



FACULTE DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse (Systèmes Dynamiques)

Par : BENMOUHOU B Naima

THEME

**Dynamique d'une Fonction Quadratique
à Perturbations Singulières**

Soutenu le: 12/03/2007, devant le jury composé de :

Mr. R. BEBBOUCHI
Mr. A. KESSI
Mr. M. ABID
Mr. A. AROUCHE

Professeur à L'U.S.T.H.B
Professeur à L'U.S.T.H.B
Maître de conférences à L'U.S.T.H.B
Maître de conférences à L'U.S.T.H.B

Président
Directeur de Mémoire
Examineur
Examineur

Dédicaces

Je dédie ce travail

À

**Mes trop chers parents, la source de mon énergie, et qui m'exhortent toujours par leurs précieux conseils pour y aller de l'avant.*

**Mes frangins et frangines.*

**Ma très chère amie Nadia.*

**Mes beaux frères et belles sœurs.*

**Mes charmants neveux : Zakaria, Mohamed-Ramezi, Abderrahmane, Mehdi et les petits poussins; Yacine, Younes et Ayemane.*

**Toutes mes amies sans exception, sans oublier les deux enseignantes; mesdames F.Mammache et N.Seddiki, chargés de cours à L'USTHB.*

**Les Messieurs D.Smai chargé de cours à L'USTHB et H.Abchir, professeur à l'université Hassan II à Casablanca (Maroc); qui ne cessent de m'encourager.*

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse le Professeur A.Kessi qui a évalué et dirigé mon travail, ensuite mes remerciements vont vers tous les membres de Jury qui vont lire ma thèse.

Durant mon travail, il y a eu des personnes qui m'ont aidé, qui sont :

**Le professeur A.Amroun de l'université d'Orsay (France).*

**Le Professeur R.L.Devaney de l'université de Boston (USA).*

**Le maître de conférence S.Djebali de L'ENS de Kouba.*

** Le Professeur E.Ghys de l'ENS de Lyon (France).*

**Le maître de conférence Y.Shapiro de l'université de Boston (USA).*

**Monsieur A.Benferrah, ancien enseignant à L'USTHB.*

**A.Chaoui, maître assistante à L' USTHB.*

J'en resterai très reconnaissante à ces personnes toute ma vie.

Table des matières

Introduction	4
1 Préliminaires	6
1.1 Introduction	6
1.2 Classification des points périodiques	7
1.2.1 Définitions et Notations	7
1.2.2 Classification des points périodiques	8
1.3 Ensembles de Fatou et de Julia	9
1.3.1 Famille normale	9
1.3.2 Ensembles de Fatou	9
1.3.3 Ensemble de Julia	10
1.3.4 Comportement chaotique	12
1.3.5 Hyperbolicité	12
1.4 Conclusion	13
2 Dynamique de $z \mapsto f_\varepsilon(z) = z^2 + \frac{\varepsilon}{z}$, $\varepsilon > 0$	15
2.1 Introduction	15
2.2 Étude dans $\mathbb{R}$	15
2.2.1 Points critiques	15
2.2.2 Points fixes	16
2.2.3 Valeurs de bifurcations	17
2.3 Étude dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	21
2.3.1 Points critiques	23

2.3.2	<i>Topologie de l'ensemble de Julia</i>	28
2.4	<i>Conclusion</i>	36
3	<i>Dynamique de $z \mapsto g_\varepsilon(z) = z^3 + \frac{\varepsilon}{z^3}$, $\varepsilon > 0$</i>	38
3.1	<i>Introduction</i>	38
3.2	<i>Points fixes</i>	38
3.3	<i>Valeurs de bifurcations</i>	41
3.3.1	<i>Bifurcation noeud-col</i>	41
3.3.2	<i>Bifurcation de doublement de période</i>	42
3.4	<i>Points critiques</i>	44
3.5	<i>Topologie de l'ensemble de Julia</i>	46
3.5.1	<i>Avant bifurcation</i>	46
3.5.2	<i>Après bifurcation</i>	48
3.6	<i>Conclusion</i>	49
4	<i>Généralisation à $z \mapsto h_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$</i>	53
4.1	<i>Introduction</i>	53
4.2	<i>Etude de la famille $z \mapsto \varphi_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$, $n \geq 2$ et $m > 1$</i>	54
4.2.1	<i>Points critiques</i>	54
4.2.2	<i>Points fixes</i>	55
4.2.3	<i>Valeurs de bifurcations</i>	57
4.2.4	<i>Topologie de l'ensemble de Julia</i>	59
4.3	<i>Etude de la famille $z \mapsto \psi_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z}$, $n \geq 2$</i>	61
4.3.1	<i>Points critiques</i>	61
4.3.2	<i>Points fixes</i>	61
4.3.3	<i>Valeurs de bifurcations</i>	62
4.3.4	<i>Topologie de l'ensemble de Julia</i>	63
4.4	<i>Conclusion</i>	64
	Conclusion	67

Bibliographie	67
5 Annexe	70

Introduction

Notre travail rentre dans le cadre des *systèmes dynamiques holomorphes*. On s'intéresse plus particulièrement à des fonctions holomorphes définies sur la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, qui grâce à un théorème de l'analyse complexe, coïncident avec le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(z)$. Ces dernières sont les seules transformations analytiques de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (fonctions méromorphes sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$).

Nous nous proposons dans ce mémoire de vous faire découvrir un domaine qui a connu un grand développement ces vingt dernières années : *"la théorie des itérations des fractions rationnelles d'une variable complexe"*.

L'intérêt porté au sujet date du siècle dernier, avec la méthode de *Newton* pour la recherche des racines d'un polynôme, et la théorie des équations fonctionnelles. C'est en fait cette dernière qui a motivé les travaux des deux grands mathématiciens français: *Pierre Fatou* (1878 – 1929) et *Gaston Julia* (1893 – 1978), les principaux pionniers de l'étude de la dynamique holomorphe, qui ont commencé l'étude globale de l'itération des fonctions rationnelles sur la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

La question fondamentale qui a s'été posée est la suivante: pour un point arbitraire $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, quelle est le comportement typique pour l'orbite $\{f^n(z)\}_{n=0}^{n=\infty}$ où

$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une fonction rationnelle?

On a attendu jusqu'à 1884 pour essayer de répondre à cette question grâce aux travaux d'un mathématicien qui s'appelle *Koenigs*, qui a prouvé une série de résultats sur la linéarisation d'une fonction analytique au voisinage d'un point fixe attractif, ensuite il y a eu beaucoup d'autres mathématiciens qui ont poursuivi ses travaux tels que: *Picard*, *Poincaré*, *Brouwer*...

Mais jusque là, la plupart des résultats démontrés sont des théorèmes d'existence de solutions uniquement. C'est alors qu'entre 1916 et 1920, *Fatou* et *Julia* publient une série d'articles qui posent les bases modernes de cette théorie, en s'appuyant sur de nouveaux théorèmes dus au mathématicien français *Paul Antoine Montel* (1876 – 1975) sur les familles normales. Depuis une vingtaine d'années, ce sujet ne cesse de s'épanouir notamment sous la houlette de *A. Douady*, *J. H. Hubbard* et *D. Sullivan*.

Nous allons ici présenter quelques résultats de la théorie des itérations, en espérant ainsi ouvrir une porte vers ce vaste domaine.

Dans le premier chapitre, on commence par donner les notions nécessaires de la théorie de l'itération des fonctions rationnelles, ce qui donnera le langage requis pour étudier la notion d'ensembles de Julia, dont plusieurs propriétés simples de ces ensembles sont données.

Dans le chapitre deux et trois, on étudiera la dynamique d'une famille de fonctions rationnelles dépendant d'un paramètre réel positif ε . On verra que les résultats auxquels nous allons aboutir, peuvent être généralisés dans le dernier chapitre à la famille définie par $z \mapsto z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$ où $n \geq 2$ et $m \geq 1$, et on va prouver que la dynamique de chaque famille est liée proportionnellement à la valeur du paramètre ε .

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 *Introduction*

On travaille dans l'espace $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (le compactifié d'Alexandrov) dit *sphère de Riemann*, l'espace topologique obtenu en rajoutant un point noté ∞ à $\mathbb{C}$. On se propose de décrire la dynamique d'une fraction rationnelle complexe f , c'est à dire donner le comportement des itérés d'ordre élevé $f^n(z) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(z)$ lorsque z parcourt la sphère de Riemann.

Définition 1.1.1 Soit $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

♦ On dit que f est une fraction rationnelle si pour tout $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f(z)$ peut s'écrire comme le quotient de deux polynômes P et Q à coefficients complexes qui n'ont pas de zéros communs. C'est-à-dire

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

♦ On définit le degré de f comme étant le maximum des degrés de P et de Q , et on écrit

$$\deg(f) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

En particulier, pour la plus part du choix de $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, l'équation $f(z) = c$ admet exactement d solutions distinctes dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On définit les itérations de f par

$$f^0 = Id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}, f^2 = f \circ f, f^n = f^{n-1} \circ f = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{(n \text{ fois})}$$

Dans tout ce qui suit, la fonction f désigne une fonction rationnelle de degré d supérieur strictement à un.

1.2 Classification des points périodiques

1.2.1 Définitions et Notations

On s'intéresse ici à la dynamique de la fonction f au voisinage des points périodiques.

Définition 1.2.1 *Un point fixe de f est un point z vérifiant $f(z) = z$. Un point z est dit périodique si $f^n(z) = z$ et $f^j(z) \neq z$ pour $j = 1, 2, \dots, n-1$. Le plus petit entier n qui vérifie $f^n(z) = z$ est dit la période de z .*

Définition 1.2.2 *L'ensemble $\{z, f(z), \dots, f^{n-1}(z)\}$ est dit un cycle (orbite périodique). Le nombre complexe*

$$\lambda = (f^n)'(z_j)$$

est le même en tout point $z_j = f^{j-1}(z)$ du cycle (il est égal au produit $f'(z) f'(z_1) \dots f'(z_{n-1})$) et il est appelé valeur propre (multiplicateur) du cycle.

Cas particulier

$$(f^n)'(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(f^n)'(z)} \right)$$

Proposition 1.2.1 *Si on pose $\omega = \frac{1}{z}$, alors*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(f^n)'(z)} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{f(\frac{1}{\omega})} \right) \Big|_{\omega=0}$$

Preuve. voir [5] ■

Proposition 1.2.2 *Le nombre total de cycles attractifs ou rationnellement neutres (resp irr rationnellement neutres) n'excède pas $(2d-2)$ (resp $4d-4$).*

Définition 1.2.3 Soit $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ un cycle (super)attractif.

A chaque point z_k du cycle on peut associer l'ensemble suivant

$$B(z_k) = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : (f^n)^m(z) \rightarrow z_0; m \rightarrow \infty\}$$

qu'on l'appelle le **bassin d'attraction** du point z_k .

La composante connexe de $B(z_k)$ qui contient z_k est dite **bassin d'attraction immédiat**, on le note par $B^*(z_0)$.

Définition 1.2.4 Le bassin d'attraction du cycle attractif serait la réunion de tous les bassins d'attractions de tous les points qui constituent le cycle.

Théorème 1.2.1 Le bassin d'attraction de tout point fixe attractif est soit simplement connexe soit infiniment connecté, c'est à dire son bord a une infinité de composantes connexes.

Preuve. Voir la référence [16] ■

1.2.2 Classification des points périodiques

Le multiplicateur λ permet de classer les points périodiques de la manière suivante

Si z est un point périodique, il est dit

- a) Super-attractif si $|\lambda| = 0$;
- b) Attractif si $0 < |\lambda| < 1$;
- c) Répulsif si $|\lambda| > 1$;
- d) Rationnellement neutre ou parabolique si $|\lambda| = 1$ et $\lambda^q = 1$ pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$;
- e) Irrationnellement neutre si $|\lambda| = 1$ et $\lambda^q \neq 1$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$;
- f) Éventuellement périodique (prépériodique) s'il existe un entier $m > 0$ tel que $f^m(z)$ est périodique.

1.3 Ensembles de Fatou et de Julia

1.3.1 Famille normale

Définition 1.3.1 Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions définies sur un domaine D contenu dans la sphère de Riemann est dit normale si chaque suite infinie de $\mathcal{F}$ possède une sous suite qui converge uniformément sur tout compact de D .

Définition 1.3.2 Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions d'un espace métrique (X, d) vers (X_1, d_1) est dit équicontinue en un point x_0 si et seulement si pour tout ε positif, il existe un δ positif tel que pour tout x de X , et pour toute fonction f de $\mathcal{F}$,

$$d(x_0, x) < \delta \text{ implique } d_1(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue sur tout X si elle est équicontinue en chaque point x_0 de X .

Proposition 1.3.1 Soit D un domaine de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur D . Alors, la famille $\mathcal{F}$ est normale sur D si et seulement si elle est équicontinue sur D .

Preuve. Voir [1] ■

Théorème 1.3.1 (de Montel)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\{a, b, c\}$ trois points distincts et soit $f_n : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{a, b, c\}$ une suite de fonctions holomorphes, alors la suite est normale sur U .

Preuve. Elle se trouve dans [5]. ■

1.3.2 Ensembles de Fatou

Définition 1.3.3 L'ensemble de Fatou d'une fonction rationnelle non constante f , noté $\mathcal{F}_f$, est le sous ensemble maximal de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sur lequel la suite des itérées $\{f^n : n \geq 0\}$ de f est équicontinue.

Remarque 1.3.1 *L'ensemble de Fatou est appelé aussi ensemble normal ou ensemble stable.*

Définition 1.3.4 *Toute composante connexe de l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}_f$ est dite **composante de Fatou**.*

Lemme 1.3.1 *L'image d'une composante de Fatou Ω d'une fraction rationnelle f est de nouveau une composante de Fatou Ω' .*

Preuve. Elle se trouve dans [11]. ■

Propriétés de l'ensemble de Fatou

1. L'ensemble de Fatou est totalement invariant sous l'action de f , c'est à dire

$$f(\mathcal{F}_f) = f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$$

2. Les bassins d'attractions des cycles attractifs ou super-attractifs sont dans l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}_f$. En particulier, les cycles attractifs et super-attractifs sont contenus dans l'ensemble de Fatou.

Preuve. voir [11] ■

Théorème 1.3.2 (De Sullivan 1985) *Toute composante connexe de l'ensemble de Fatou est prépériodique.*

Preuve. Voir [16] ■

1.3.3 Ensemble de Julia

Définition 1.3.5 *L'ensemble de Julia est le complémentaire de l'ensemble de Fatou, on le note J_f .*

Remarque 1.3.2 *L'ensemble de Julia est un ensemble compact dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ car l'ensemble de Fatou est un ouvert.*

Quelques propriétés topologiques de l'ensemble de Julia

1. L'ensemble de Julia n'est pas vide ;
2. L'ensemble de Julia est totalement invariant sous l'action de f et par conséquent, si $z \in J_f$ alors $O(z) \subseteq J_f$;
3. $J_f = J_{f^N} \neq \emptyset \forall N \geq 1$;
4. J_f ne contient pas de points isolés, c'est-à-dire il est parfait ;
5. J_f contient les points fixes répulsifs et les points paraboliques ;
6. L'ensemble de Julia est l'adhérence des points périodiques répulsifs.

Et plus généralement, on a le théorème suivant

Théorème 1.3.3 *Si $z_0 \in J_f$, l'ensemble $\{z : f^n(z) = z_0 \text{ pour un certain } n \geq 0\}$ est dense dans J_f .*

Preuve. Voir [5] ■

Remarque 1.3.3 *Ce théorème suggère un algorithme pour représenter l'ensemble de Julia. Soit $z_0 \in J_f$, on calcule toutes ses préimages $f(z_1) = z_0$, ensuite toutes les préimages $f(z_2) = z_1$ et on continue comme ça.*

7. Si D est un ouvert rencontrant l'ensemble de Julia, alors il existe un entier $N \geq 0$ tel que $f^N(D \cap J_f) = J_f$;
8. Si z_0 est un point périodique attractif, alors le bassin d'attraction $B(z_0)$ est une réunion de composantes de l'ensemble de Fatou et son bord coïncide avec l'ensemble de Julia ;
9. Un fermé de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ totalement invariant par f contenant trois points, contient nécessairement l'ensemble de Julia ;
10. Les points périodiques répulsifs et rationnellement neutres de f sont dans J_f ;

11. Si J_f n'est pas connexe, alors il possède une infinité non dénombrable de composantes connexes.

Preuve. voir [7] et [11]. ■

Remarque 1.3.4 En 1918, Lattès a construit une fraction rationnelle dont l'ensemble de Julia est égal à tout $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, c'est une bonne illustration du résultat suivant.

Proposition 1.3.2 Si l'intérieur de J_f est non vide, alors $J_f = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Preuve. Voir [16]. ■

1.3.4 Comportement chaotique

Définition 1.3.6 Une fonction $\varphi : K \rightarrow K$ d'un espace métrique (K, d) sur lui même est dite chaotique, si elle satisfait les trois conditions suivantes

- a) f est sensible aux conditions initiales : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in K$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $d(x, a) < \varepsilon$ et $d(f^n(x), f^n(a)) > \delta$;
- b) f est topologiquement transitive : pour tout $a, b \in K$ et tout $\delta > 0$, il existe $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $d(x, a) < \delta$ et $d(f^n(x), b) < \delta$;
- c) Les cycles de f sont denses dans K .

Théorème 1.3.4 Toute fraction rationnelle de degré au moins égal à deux est chaotique sur son ensemble de Julia.

Preuve. Elle existe dans [11]. ■

1.3.5 Hyperbolicité

Nous nous intéressons ici à une classe particulière d'applications; les fractions rationnelles hyperboliques.

L'importance de cette famille tient à sa densité dans l'espace des fractions rationnelles (un problème posé pour la première fois par *Fatou*) et à la bonne compréhension de la dynamique de ses éléments.

Définition 1.3.7 Une fraction rationnelle f est dite dilatante sur un ensemble

$E \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, s'il existe $c > 0$ et $\lambda > 1$ tel que $|(f^n)'(z)|_\sigma \geq c\lambda^n$ pour tout $z \in E$ et pour tout $n \geq 0$ où σ est une métrique sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Remarque 1.3.5 La condition de dilatation signifie donc que la dérivée croît exponentiellement dans E .

Lemme 1.3.2 Toute fraction rationnelle est dilatante sur un cycle répulsif $\{z_0, \dots, z_m\}$.

Preuve. Soit z un point répulsif du cycle $\{z_0, \dots, z_m\}$, $|(f^n)'(z)|_\sigma > 1$ car z est répulsif. Donc, on peut toujours trouver $c > 0$ et $\lambda > 1$ telle que $|(f^n)'(z)|_\sigma \geq c\lambda^n, \forall n \geq 0$. ■

Définition 1.3.8 Une fraction rationnelle est dite hyperbolique si elle est dilatante sur son ensemble de Julia.

Une observation évidente est qu'une fraction rationnelle hyperbolique ne peut avoir de point critique dans J_f .

Théorème 1.3.5 Pour une fraction rationnelle f de degré supérieur ou égal à 2, les assertions suivantes sont équivalentes

- a) f est dilatante sur J_f (hyperbolique) ;
- b) $P_f \cap J_f = \emptyset$ où : P_f est dit l'ensemble post-critique (on donnera dans le chapitre suivant sa définition).

Preuve. Voir la référence [11] ■

Corollaire 1.3.1 Soit f une fraction rationnelle de degré supérieur ou égal à 2. Alors, si f est dilatante, $J_f \neq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1.4 Conclusion

Toute application holomorphe définie sur la sphère de Riemann (fraction rationnelle) permet de partitionner la sphère de Riemann en deux sous ensembles disjoints, l'un d'entre

eux est stable, appelé ensemble de Fatou et l'autre est instable, c'est l'ensemble de Julia. En d'autre terme, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = J_f \cup \mathcal{F}_f$. La structure de l'ensemble de Julia est en général très compliquée contrairement à la structure de l'ensemble de Fatou.

" Une théorie est bonne lorsqu'elle est belle" . Henri Poincaré.

Chapitre 2

Dynamique de $z \mapsto f_\varepsilon(z) = z^2 + \frac{\varepsilon}{z}$,

$\varepsilon > 0$

2.1 Introduction

Cette section a pour but de décrire la dynamique d'une famille de fonctions rationnelles f_ε dans la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et plus particulièrement sur l'ensemble de Julia. On représentera cet ensemble en faisant varier le paramètre ε . Commençons d'abord par étudier le comportement de cette famille dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2.2 Étude dans $\mathbb{R}$

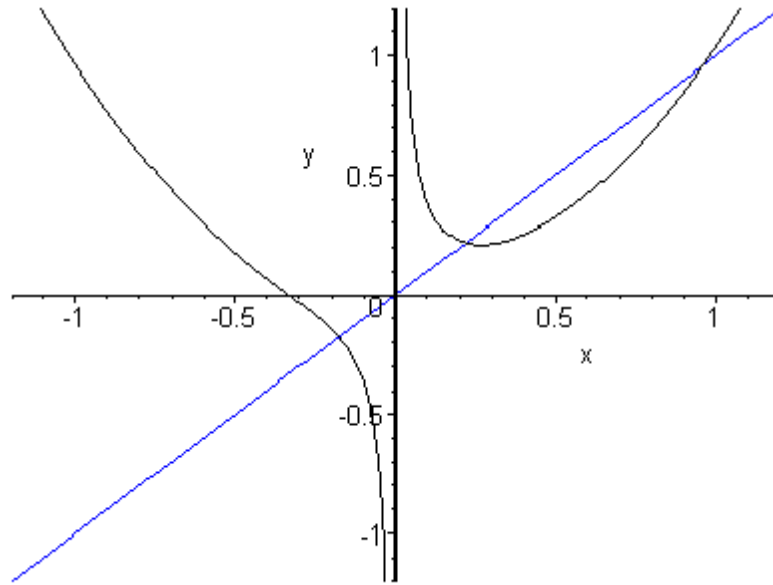
2.2.1 Points critiques

Pour tout ε un réel non nul, f_ε est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée vaut

$$f'_\varepsilon(z) = 2z - \frac{\varepsilon}{z^2}$$

La famille f_ε croît sur l'intervalle $\left] \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}, +\infty \right[$, et décroît sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $\left] 0, \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}} \right[$.

Notation 2.2.1 Le point critique de f_ε est noté par $z_c = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Figure 2.2.1 : Le graphe de f_ε pour $\varepsilon = \frac{1}{27}$

2.2.2 Points fixes

Le graphe de f_ε coupe la diagonale (figure 2.2.1) en trois points distincts z_1 , z_2 et z_- , déterminons-les.

L'équation des points fixes est donnée par

$$z^3 - z^2 + \varepsilon = 0 \quad (2.2.1)$$

Posons :

$$y = z - \frac{1}{3},$$

on aura une équation du troisième degré

$$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{2}{27} + \varepsilon = 0 \quad (2.2.2)$$

Le discriminant D est égal à $\varepsilon(27\varepsilon - 4)$.

Trois cas se présentent

Premier cas

Si $\varepsilon > \frac{4}{27}$, le discriminant sera strictement positif, et donc l'équation 2.2.2 aura deux solutions complexes conjuguées y_1 , y_2 et une solution réelle négative y_3 où

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(u + v) \\ y_2 = \frac{1}{3}(ju + \bar{j}v) \\ y_3 = \frac{1}{3}(\bar{j}u + jv) \end{cases}$$

avec

$$u = \sqrt[3]{\frac{-27\left(\varepsilon - \frac{2}{27}\right) + 3\sqrt{3}\sqrt{D}}{2}}, v = \sqrt[3]{\frac{-27\left(\varepsilon - \frac{2}{27}\right) - 3\sqrt{3}\sqrt{D}}{2}} \text{ et } j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, l'équation 2.2.1 aura pour solutions

$$\begin{cases} z_- = \frac{1}{3}(u + v + 1) \\ z_1 = \frac{1}{3}(ju + \bar{j}v + 1) \\ z_2 = \frac{1}{3}(\bar{j}u + jv + 1) \end{cases}$$

Deuxième cas

Si $\varepsilon = \frac{4}{27}$, le discriminant sera nul et donc l'équation 2.2.1 va admettre une solution réelle négative $z_- = \left(-\frac{2}{3}\right)$ et les deux points z_1 et z_2 vont coïncider au point $z = \frac{2}{3}$.

Troisième cas

Si $\varepsilon < \frac{4}{27}$, le discriminant D sera négatif, donc l'équation (2.2.1) va avoir trois solutions réelles distinctes

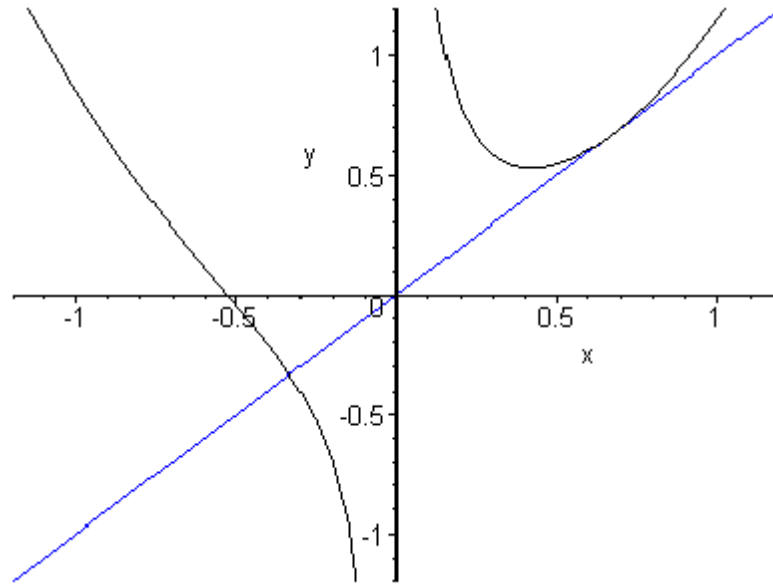
$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{3}(u + \bar{u} + 1) \\ z_2 = \frac{1}{3}(j.u + \bar{j}.\bar{u} + 1) \\ z_- = \frac{1}{3}(j^2u + \bar{j}^2\bar{u} + 1) \end{cases}$$

$$\text{où } u = \sqrt[3]{\frac{-27\left(\varepsilon - \frac{2}{27}\right) + (3\sqrt{3}\sqrt{-D})i}{2}}.$$

2.2.3 Valeurs de bifurcations

Définition 2.2.1 On dira que la famille f_ε subit une bifurcation de type noeud-col en ε_0 , s'il existe un intervalle ouvert I et un $\lambda > 0$ tels que

1. Pour $\varepsilon_0 - \lambda < \varepsilon < \varepsilon_0$, f_ε ne possède pas de points fixes dans I ;
2. Pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, f_ε possède un unique point fixe neutre dans I ;
3. Pour $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \lambda$, f_ε possède deux points fixes dans I ; l'un est attractif et l'autre est répulsif.

Figure 2.2.2 : Le graphe de f_ε pour $\varepsilon = \frac{4}{27}$

Remarque 2.2.1 Dans notre cas, on remarque que

- ✓ Si $\varepsilon < \frac{4}{27}$: il y a exactement deux points fixes réels positifs z_1 et z_2 (figure (2.2.1)).
- ✓ Si $\varepsilon = \frac{4}{27}$: il y a un unique point fixe neutre $z_0 = \frac{2}{3}$ (figure (2.2.2)).
- ✓ Si $\varepsilon > \frac{4}{27}$: pas de points fixes réels (figure (2.2.3)).

Donc en la valeur $\varepsilon = \frac{4}{27}$, il apparaît un phénomène très important que l'on appelle bifurcation noeud-col (tangente).

Proposition 2.2.1 Soient z_1 , z_2 et z_- les points fixes de f_ε .

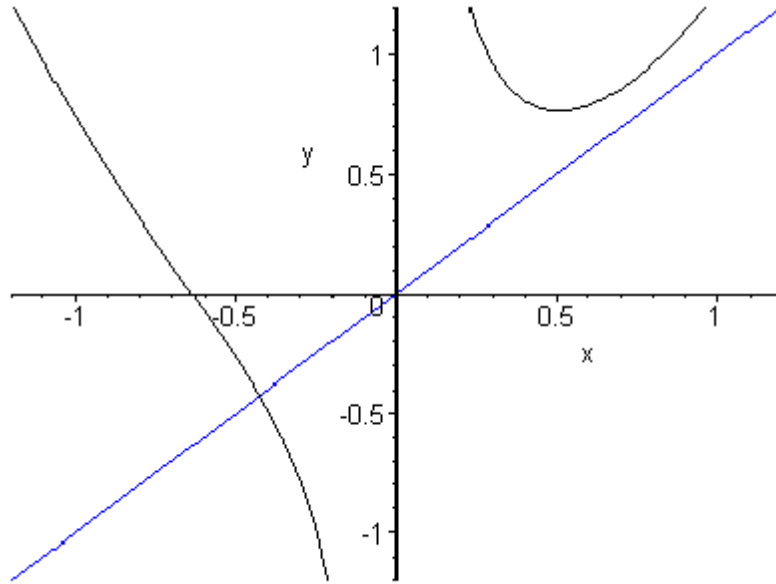
- a) Quand $\varepsilon < \frac{4}{27}$, le point fixe z_1 est attractif, alors que les deux autres points sont répulsifs.
- b) Quand $\varepsilon > \frac{4}{27}$, les trois points fixes sont répulsifs.

Preuve. a) Soit $0 < \varepsilon < \frac{4}{27}$,

On a $f'_\varepsilon(z) = 3z - \frac{1}{z}(z^2 + \frac{\varepsilon}{z})$, et donc pour tout z point fixe de f_ε , $f'_\varepsilon(z) = 3z - 1$.

En particulier, $f'_\varepsilon(z_-) < (-1)$, $\forall \varepsilon > 0$, ce qui implique que z_- est toujours répulsif.

Concernant les deux autres points fixes, on a d'une part, $f'_\varepsilon(z)$ aux points fixes positifs z_1 et z_2 est supérieur à (-1) pour tout $\varepsilon > 0$, et $f'_\varepsilon(z) < 1$ si et seulement si $z < \frac{2}{3}$.

Figure 2.2.3 : Le graphe de f_ε pour $\varepsilon = \frac{7}{27}$

D'autre part, plus le ε est proche de la valeur $\frac{4}{27}$, plus z_1 croît et z_2 décroît et ils finiront par coïncider au point $z = \frac{2}{3}$. Ainsi, $z_1 < \frac{2}{3} < z_2$, et alors z_1 est attractif et z_2 est répulsif.

b) Soit $\varepsilon > \frac{4}{27}$

Les points fixes z_1 et z_2 sont complexes conjugués, donc

$$z_1 + z_2 = 2\Re(z_1) = 2\Re(z_2).$$

Comme z_- , z_1 et z_2 vérifient l'équation (2.2.1), alors :

$$z^3 - z^2 + \varepsilon = (z - z_-)(z - z_1)(z - z_2).$$

Après identification, on obtient

$$z_- + z_1 + z_2 = 1 \tag{2.2.3}$$

Or, z_- décroît de plus en plus et donc $z_1 + z_2$ doit croître grâce à (2.2.3).

Ainsi, $z_1 + z_2 > \frac{1}{3}$ et par suite

$$\begin{cases} \Re(z_1) > \frac{2}{3} \\ \Re(z_2) > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Par conséquent, aucun de ces deux points ne peut appartenir au disque de centre $\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{1}{3}$, alors $|z_k - \frac{1}{3}| > \frac{1}{3}$. $\forall k \in \{1, 2\}$.

Ainsi,

$$|f'_\varepsilon(z_k)| = 3 \left| z_k - \frac{1}{3} \right| > 1. \quad \forall k \in \{1, 2\}$$

D'où z_1 et z_2 sont répulsifs. ■

Proposition 2.2.2 .

1. Avant bifurcation

1-a) Tous les points qui appartiennent à l'intervalle $]z'_2, z_2[$ y compris z_c sont attirés vers z_1 où : z'_2 désigne la préimage réelle positive de z_2 , $z'_2 \neq z_2$. C'est à dire : $f_\varepsilon(z'_2) = z_2$;

1-b) Les points de $\mathbb{R}_+ \setminus]z'_2, z_2[$ tendent vers l'infini.

1-c) L'infini est un point fixe super-attractif.

2. Après bifurcation

Tous les points de la droite réelle sont attirés vers l'infini.

Preuve. 1. Avant bifurcation

1-a) Soit $z \in]z'_2, z_2[=]z'_2, z_1] \cup [z_1, z_2[$.

◆ Sur $]z'_2, z_1]$: $f_\varepsilon(z) \geq z$. Or, $f_\varepsilon(z) \leq z_1$ car sinon $f_\varepsilon(z) > z$ pour tout $z \in]z'_2, z_1]$.

En particulier, $f_\varepsilon(z_1) > z_1$, ce qui est impossible car z_1 est un point fixe.

Donc, $f_\varepsilon(z) \in]z'_2, z_1]$, et plus généralement, $f_\varepsilon^k(z) \in]z'_2, z_1]$ pour tout $k \geq 1$, ce qui implique que, la suite $(f_\varepsilon^k(z))_k$ est croissante et bornée, donc elle converge vers z_1 .

◆ Sur $[z_1, z_2)$: $f_\varepsilon(z) \leq z$, de plus, $f_\varepsilon(z) \geq z_1$ car sinon $f_\varepsilon(z_1) < z_1$ qui est impossible.

$f_\varepsilon(z) < z_2$ puisque $f_\varepsilon(z) \leq z < z_2$. Donc, $f_\varepsilon(z) \in [z_1, z_2[$ alors $f_\varepsilon^k(z) \in [z_1, z_2[$ pour tout $k \geq 1$. D'où, la suite $(f_\varepsilon^k(z))_k$ est convergente vers z_1 (elle est dans ce cas décroissante et minorée).

1-b) Soit $z \in \mathbb{R}_+ \setminus]z'_2, z_2[$

Comme $f_\varepsilon(z) \in (z_2, \infty)$ et f_ε est décroissante sur (z_2, ∞) , alors $\forall k \geq 1$, $f_\varepsilon^k(z) \in]z_2, \infty[$.

Mais, $f_\varepsilon(z) > z$ pour tout $z \in]z_2, \infty[$, donc $(f_\varepsilon^k(z))_k$ est croissante.

Si elle était bornée, elle convergerait vers un point fixe, ce qui contredit le fait que dans $\mathbb{R}_+$ il existe uniquement deux points fixes, d'où, $(f_\varepsilon^k(z))_k$ tend vers l'infini.

1-c) Le fait que $\lim_{z \rightarrow \infty} (\frac{1}{f'(z)}) = 0$, implique que l'infini est super-attractif.

2. Après bifurcation

On a $f_\epsilon(z) > z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, ce qui implique que $(f_\epsilon^k(z))_k$ est croissante, elle ne peut être bornée car f_ϵ ne possède pas de points fixes réels après bifurcation, et par conséquent $(f_\epsilon^k(z))_k$ tend vers l'infini. ■

Corollaire 2.2.1 *Après la bifurcation, le point critique z_c est attiré vers l'infini et grâce à la relation de symétrie, il en sera de même pour les deux autres points ωz_c et $\omega^2 z_c$.*

Remarque 2.2.2 *La dynamique de la famille f_ϵ sur la droite réelle va jouer un rôle crucial dans l'analyse de son comportement dans le plan complexe.*

2.3 Étude dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

On va décrire la dynamique de f_ϵ dans cette section géométriquement. Pour cela, on considère un cercle C proche de l'infini.

Proposition 2.3.1 *Les préimages de C sont deux courbes fermées, l'une d'entre elles est proche de l'infini et s'envoie par f_ϵ sur C en $(2-1)$, en faisant deux tours autour de l'origine dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique); cependant, la seconde est proche de zéro; elle s'envoie sur C en $(1-1)$, en faisant un tour autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre.*

Preuve. ♦ Lorsque $|z|$ est très grand, $f_\epsilon(z)$ est proche de z^2 et comme la préimage de C par $z \mapsto z^2$ est un grand cercle qui est envoyé sur C en $(2-1)$. On en déduit que la préimage de C par f_ϵ s'envoie sur C en $(2-1)$ aussi. Cette préimage est une courbe fermée grâce à la continuité de f_ϵ .

♦ Lorsque $|z|$ est très petit, $f_\epsilon(z)$ est proche de $\frac{\epsilon}{z}$. La préimage de C par $z \mapsto \frac{\epsilon}{z}$ étant un cercle proche de zéro qui est envoyé sur C en $(1-1)$, alors il en est de même pour la préimage de C par f_ϵ , qui grâce à la continuité de f_ϵ , c'est une courbe fermée. ■

Notation 2.3.1 *Notons par C_1 la première courbe et par C_2 la seconde.*

Proposition 2.3.2 *Tous les points qui se trouvent à l'extérieur de C_1 et à l'intérieur de C_2 sont attirés vers l'infini.*

Preuve. 1. Si z un point appartenant à l'extérieur de C_1 , $|z|$ est très grand et donc $f_\varepsilon(z) \approx z^2$.

Comme $|z^2| \gg |z|$, alors $|f_\varepsilon(z)| \gg |z|$. Après itération on aura, $|f_\varepsilon^k(z)| \gg |z|^k \rightarrow \infty$, $\forall k \geq 1$.

2. Si z un point appartenant à l'intérieur de C_2 , $|z|$ est très petit et donc $f_\varepsilon(z) \approx \frac{\varepsilon}{z} \rightarrow \infty$. Ainsi, $\left|\frac{\varepsilon}{z}\right| \gg |z|$ et par suite, $|f_\varepsilon(z)| \gg |z|$. ■

La région qui est donc intéressante à étudier, est celle qui est située entre les deux courbes. Notons cette région par R .

Définition 2.3.1 *On dira que deux points u et v sont symétriques, s'il existe un entier naturel non nul k , tel que $u = \omega^k v$ où $\omega^3 = 1$.*

Remarque 2.3.1 *Dans notre cas, la famille f_ε possède une propriété de symétrie remarquable.*

² Soit ω le nombre complexe donné par $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ où $\omega^3 = 1$.

Alors

$$\begin{cases} f_\varepsilon(\omega z) = \omega^2 f_\varepsilon(z) \\ f_\varepsilon(\omega^2 z) = \omega f_\varepsilon(z) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Corollaire 2.3.1 *Il en résulte du système (2.3.4) que les rayons $\omega\mathbb{R}^+$ et $\omega^2\mathbb{R}^+$ s'envoient l'un sur l'autre par f_ε .*

Théorème 2.3.1 *(de Julia)*

Soit z_0 un point périodique attractif d'une fonction Ψ . Alors, Le bassin d'attraction immédiat $B^(z_0)$ doit contenir au moins un point critique.*

Preuve. Voir [1] ■

Remarque 2.3.2 *L'orbite $(\omega z_1, \omega^2 z_1)$ est une orbite périodique de période deux (d'après 2.3.4), et elle est de plus attractive car z_1 l'est.*

2.3.1 Points critiques

Proposition 2.3.3 *Etant donnée une fonction rationnelle Ψ de degré d . Alors, elle admet exactement $(2d - 2)$ points critiques (comptés avec leurs ordres de multiplicités).*

Preuve. Voir [5]. ■

On a déjà vu que z_c était un point critique réel positif et grâce à (2.3.4), la famille f_ε va admettre deux autres points critiques ωz_c et $\omega^2 z_c$, sans oublier l'infini et le zéro (un pôle simple). Par suite, les orbites de tous ces points sont symétriques. Il suffirait donc de connaître une, et c'est celle ci qui va déterminer la structure de l'ensemble de Julia comme c'est connu en dynamique complexe.

Remarque 2.3.3 *Il ne peut pas y avoir une autre orbite attractive autre que $(\omega z_1, \omega^2 z_1)$ et celle de z_1 car sinon elle contiendrait un autre point critique d'après le théorème de Julia (2.3.1), ce qui est impossible.*

Proposition 2.3.4 *Avant la bifurcation, on a les résultats suivants*

- a) *Le point z_c est attiré vers l'orbite de z_1 ;*
- b) *Les points ωz_c et $\omega^2 z_c$ sont attirés vers le 2-cycle attractif $(\omega z_1, \omega^2 z_1)$.*

Preuve. a) Déjà traité dans la proposition (2.2.2).

b) $|f_\varepsilon(\omega z_c) - f_\varepsilon(\omega z_1)| = |\omega^2 f_\varepsilon(z_c) - \omega^2 f_\varepsilon(z_1)|$ et comme z_1 est attractif, alors il va exister $\delta < 1$ vérifiant $|f'_\varepsilon(z_1)| < \delta$. Par conséquent, $|f_\varepsilon(\omega z_c) - f_\varepsilon(\omega z_1)| = |\omega^2| |f_\varepsilon(z_c) - f_\varepsilon(z_1)| < \delta |z_c - z_1|$.

Si on refait ce procédé plusieurs fois, on obtient

$$|f_\varepsilon^k(\omega z_c) - f_\varepsilon^k(\omega z_1)| < \delta^k |z_c - z_1| \rightarrow 0; k \rightarrow \infty$$

D'où, ωz_c tend vers le cycle $(\omega z_1, \omega^2 z_1)$.

De la même façon, on montre que $\omega^2 z_c$ tend vers le même cycle attractif. ■

Conséquence Tous les points critiques sont attirés vers des orbites attractives, donc l'ensemble de Julia ne peut rencontrer l'ensemble de toutes les orbites critiques, et d'après le théorème (1.3.5), la famille f_ε est hyperbolique.

Dans le paragraphe suivant, on va construire les domaines qui vont contenir les points critiques.

Post-ensemble critique

Définition 2.3.2 *L'ensemble post-critique d'une fonction rationnelle Ψ est défini comme étant l'ensemble des orbites positives $\{\cup_{n>0} \Psi^n(z_c)\}$ des points critiques pour tout point critique z_c .*

Remarque 2.3.4 *L'ensemble post-critique est fini puisque le nombre de points critiques l'est aussi.*

Proposition 2.3.5 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *L'ensemble post-critique $P(\Psi)$ et l'ensemble de Julia $J(\Psi)$ sont disjoints.*
2. *Chaque point critique de f tend vers un cycle attractif sous les itérations de Ψ .*
3. *Il existe une métrique ρ définie sur un voisinage de $J(\Psi)$ telle que*

$$\|(\Psi^n)'(z)\|_\rho > C > 1$$

pour tout $z \in J(\Psi)$. C'est à dire Ψ est dilatante sur l'ensemble de Julia.

Preuve. voir [5]. ■

Construction des domaines des points critiques

Proposition 2.3.6 *Il existe une région simplement connexe $D_1 \subset R$ qui contient z_c et z_1 , elle s'envoie sur elle même par f_ε , et consiste uniquement en les points qui sont attirés vers z_1 .*

Preuve. Soient $\varepsilon \in (0, \frac{4}{27})$ fixé et N un disque ouvert autour de z_1 , dont tous ces points sont attirés vers z_1 . Comme cet ouvert est constitué uniquement des points attirés par z_1 , alors $f_\varepsilon(N) \subset N$, par suite $N \subset f_\varepsilon^{-1}(N)$.

Sachant que N est connexe, alors il est contenu dans la composante connexe de $f_\varepsilon^{-1}(N)$ qui contient z_1 . On la note par $f_{\varepsilon_1}^{-1}(N)$. De même, $f_{\varepsilon_1}^{-1}(N)$ est contenue dans la composante connexe de $f_{\varepsilon_1}^{-1}(f_{\varepsilon_1}^{-1}(N))$. On la note par $f_{\varepsilon_2}^{-1}(N)$...

Pour construire la région D_1 , on considère la composante connexe de la préimage de N contenant z_1 . On répète ce procédé plusieurs fois, jusqu'à avoir une région qui contiendra

le point critique z_c , on la note par D_1 , c-à-d $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$D_1 = f_\varepsilon^{-n_0}(N)$$

Montrons que D_1 est une union croissante d'ouvers simplement connexes :

Puisque N un disque ouvert autour de z_1 qui est attiré par z_1 , il contient donc au plus un point critique (d'après) et donc au plus une valeur critique.

♦ La préimage de ce disque par f_ε elle va être simplement connexe grâce au résultat suivant

Lemme 1 : Si $\varphi : U \rightarrow D$ est un revêtement holomorphe avec U un ouvert, D un disque contenant au moins une valeur critique, alors U est simplement connexe.

Preuve : Voir [21].

Dans notre cas, $f_\varepsilon : f_\varepsilon^{-1}(N) \rightarrow N$ est un revêtement holomorphe.

♦ La suite des préimages de N par f_ε est croissante (au sens de l'inclusion)

En effet : si $z \in f_\varepsilon^{-1}(N)$, $f_\varepsilon(z) \in N \subset f_\varepsilon^{-1}(N)$ car $f_\varepsilon(N) \subset N$. Donc, $z \in f_\varepsilon^{-2}(N)$.

Supposons par récurrence que $f_\varepsilon^{-k}(N) \subset f_\varepsilon^{-(k+1)}(N)$ et montrons que $f_\varepsilon^{-(k+1)}(N) \subset f_\varepsilon^{-(k+2)}(N)$ pour tout $k \geq 1$.

Soit $z \in f_\varepsilon^{-(k+1)}(N)$, c'est équivalent à $f_\varepsilon^{k+1}(z) = f_\varepsilon^k(f_\varepsilon(z)) \in N$ et donc $f_\varepsilon(z) \in f_\varepsilon^{-k}(N) \subset f_\varepsilon^{-(k+1)}(N)$ (hypothèse de récurrence). D'où $z \in f_\varepsilon^{-(k+2)}(N)$.

♦ **Lemme 2 :** La réunion croissante d'ouverts simplement connexes est un ouverts simplement connexe.

Preuve : Voir [?].

Comme D_1 est une union croissante d'ouverts simplement connexes, le lemme 2 assure que D_1 est simplement connexe.

♦ La région D_1 est bien définie car z_c est attiré vers z_1 d'après la proposition (2.3.4) .

■

La symétrie (2.3.4) induit le corollaire suivant

Corollaire 2.3.2 *On peut construire les régions D_2 et D_3 sachant que la première contient ωz_c et ωz_1 , cependant, la seconde contient $\omega^2 z_c$ et $\omega^2 z_1$, chacune s'envoie sur l'autre par f_ε , et leurs points sont tous attirés vers l'orbite attractive $(\omega z_1, \omega^2 z_1)$.*

Preuve. Découle immédiatement de la relation de symétrie (2.3.4) ■

On considère maintenant la région obtenue à partir de la région R , en supprimant D_1 , D_2 et D_3 . On la coupe en trois domaines symétriques (voir figure (2.3.4)), tout en gardant les rayons suivants

$$\arg z = 0, \arg z = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \arg z = \frac{4\pi}{3}.$$

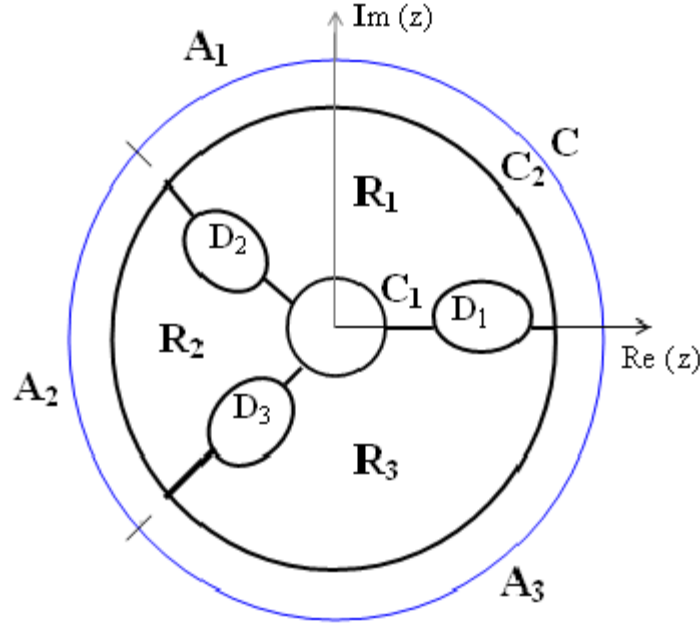


Figure 2.3.4 : La division du plan complexe en des régions pour $\varepsilon < \frac{4}{27}$

Notation 2.3.2 On note par R_1 , R_2 , et R_3 ces domaines et par A_1 , A_2 et A_3 les arcs de C qui leur correspondent.

Faits (voir figure (2.3.5))

1. Le bord extérieur de R_1 (courbe 1) est envoyé sur A_1 et A_2 injectivement.
2. Le bord commun entre R_1 et R_2 (courbes 2 et 4) s'envoie sur le segment J de $\omega^2 \mathbb{R}_+$ qui se trouve entre C et D_3 en mode $(2 - 1)$.

Deux cas se présentent :

♦ Si z est très proche de D_2 , il serait attiré vers le point ωz_1 , donc $f_\varepsilon(z) \in D_3$ car $f_\varepsilon(D_2) \subset D_3$.

♦ Sinon, $f_\varepsilon(z) \in I \subset \omega^2 \mathbb{R}_+$ où I est un intervalle situé entre C et D_3 .

Le même raisonnement est valable pour les points qui appartiennent à la courbe 4.

3. La courbe 3 étant contenue dans D_2 , alors $f_\varepsilon(z) \in D_3$. Mais, la région D_3 contient un point périodique attractif ωz_1 , et donc $f_\varepsilon(z)$ va être exactement à l'intérieur de D_3 .

4. Si z est dans la courbe 5, $f_\varepsilon(z) \approx \frac{1}{z}$ car la courbe 5 est contenue dans C_2 .

Ainsi, si $z = \rho_0 \exp(i\theta_0)$ avec ρ_0 est un rayon très petit, $f_\varepsilon(z) = \left[\frac{1}{\rho_0}, (-\theta_0) \right]$.

C'est à dire $f_\varepsilon(z) \in A_3$, cette application est injective car C_2 est envoyé injectivement sur le cercle C .

5. Pour z assez proche de D_1 , $f_\varepsilon(z) \in D_1^\circ$ (intérieur de D_1), car D_1 contient le point attractif z_1 .

Sinon, $f_\varepsilon(z)$ va appartenir à un intervalle qui se trouve entre C et D_1 .

Le raisonnement est identique pour les points qui sont dans la courbe 8.

6. Si z appartient à la courbe 7, alors $f_\varepsilon(z) \in D_1$ car $f_\varepsilon(D_1) \subset D_1$. Or, D_1 contient un point fixe attractif qui est le z_1 , donc $f_\varepsilon(z)$ serait à l'intérieur de D_1 , et va tourner autour de z_1 (puisque tous les points de D_1 sont attirés par z_1). ■

Remarque 2.3.5 .

♦ On peut maintenant utiliser les domaines R_1, R_2 et R_3 pour introduire la dynamique symbolique de f_ε sur l'ensemble de Julia .

♦ Pour pouvoir utiliser le théorème (2.3.2) , on doit inclure des morceaux des rayons $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ et $\arg z = \frac{4\pi}{3}$, dans R_1, R_2 et R_3 respectivement.

2.3.2 Topologie de l'ensemble de Julia

Dans cette section, on va restreindre f_ε à l'ensemble de Julia et on désigne par σ l'application *shift* définie sur l'espace des suites à un seul côté $\Sigma_3 = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ (Voir Annexe). On en aura besoin de la notion de semi-conjugaison. Définissons-là.

Définition 2.3.3 Soit $g : N \rightarrow N$ une application.

- ✓ Elle est dite *facteur* d'une applicatrion f définie d'un ensemble M dans lui même, s'il existe une application continue et surjective $h : M \rightarrow N$ vérifiant $h \circ f = g \circ h$;
- ✓ L'application h est dite une *semi-conjugaison*.

Avant bifurcation

Théorème 2.3.2 Il existe une semi-conjugaison φ entre la fonction f_ϵ définie sur l'ensemble de Julia J et la fonction shift σ définie sur l'espace des suites $\Sigma_3 = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. La fonction φ consiste à associer à toute suite $S = (s_0 s_1 \dots)$ de Σ_3 , un point z de J , tels que pour tout $k \geq 0$, on a

$$\begin{cases} s_k = 0, & f_\epsilon^k(z) \in R_1 \\ s_k = 1, & f_\epsilon^k(z) \in R_2 \\ s_k = 2, & f_\epsilon^k(z) \in R_3 \end{cases}$$

Preuve. 1. φ est bien définie

Soit donnée une suite $S = (s_0 s_1 \dots s_k \dots)$ dans Σ_3 .

Posons :

$$R_{s_0 s_1 \dots s_k} := \{z \in J \mid z \in R_{s_0}, f_\epsilon(z) \in R_{s_1}, \dots, f_\epsilon^k(z) \in R_{s_k}\} \quad \forall k \geq 0$$

Montrons par récurrence que $R_{s_0 s_1 \dots s_k}$ est non vide pour tout $k \geq 0$.

Soit $k = 1$: comme f_ϵ est de degré trois, alors $f_\epsilon^{-1}(R_{s_1})$ va contenir au plus trois éléments, chacun est dans une des trois régions R_k où $k \in \{0, 1, 2\}$, donc $R_{s_0} \cap f_\epsilon^{-1}(R_{s_1}) = R_k \neq \emptyset$.

Supposons maintenant que $R_{s_0} \cap f_\epsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\epsilon^{-k}(R_{s_k}) \neq \emptyset$, et montrons que $R_{s_0} \cap f_\epsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\epsilon^{-k}(R_{s_k}) \cap f_\epsilon^{-(k+1)}(R_{s_{k+1}}) \neq \emptyset$.

En effet,

$$R_{s_0} \cap f_\epsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\epsilon^{-k}(R_{s_k}) \cap f_\epsilon^{-(k+1)}(R_{s_{k+1}}) = R_{s_0} \cap f_\epsilon^{-1} [R_{s_1} \cap \dots \cap f_\epsilon^{-k}(R_{s_k})]$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, il existe $z \in R_{s_0} \cap f_\epsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\epsilon^{-k}(R_{s_k})$, comme $\{f_\epsilon^{-1}(z)\}$ contient au plus trois éléments, alors il existe un élément $\alpha \in \{f_\epsilon^{-1}(z)\}$ tel que $\alpha \in R_{s_1}$.

D'où $R_{s_0} \cap f_\varepsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\varepsilon^{-k}(R_{s_k}) \cap f_\varepsilon^{-(k+1)}(R_{s_{k+1}}) \neq \emptyset$. c.q.f.d.

Pour tout $k \geq 0$, l'ensemble $R_{s_0 s_1 \dots s_k}$ est une intersection finie de fermés non vides dans l'ensemble de Julia car

$$R_{s_0 s_1 \dots s_k} = R_{s_0} \cap f_\varepsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\varepsilon^{-k}(R_{s_k})$$

L'image réciproque étant compatible avec l'intersection, on a pour tout $k \geq 0$

$$\begin{aligned} R_{s_0 s_1 \dots s_k} &= R_{s_0} \cap f_\varepsilon^{-1}(R_{s_1}) \cap \dots \cap f_\varepsilon^{-k}(R_{s_k}) \\ R_{s_0 s_1 \dots s_k} &= R_{s_0 s_1 \dots s_{k-1}} \cap f_\varepsilon^{-k}(R_{s_k}) \end{aligned}$$

Donc

$$R_{s_0 s_1 \dots s_k} \subset R_{s_0 s_1 \dots s_{k-1}} \quad \forall k \geq 0.$$

Ceci implique que la suite $(R_{s_0 s_1 \dots s_k})_{k \geq 0}$ est une suite décroissante de compacts et donc

$$\bigcap_{k \geq 0} R_{s_0 s_1 \dots s_k} \neq \emptyset$$

Il reste à voir que cette intersection est réduite à un unique point z .

En effet : supposons qu'il existe deux points distincts z et z' , ceci veut dire qu'ils sont dans les mêmes domaines;

$$z, z' \in R_{s_0 \dots s_k} \quad \forall k \geq 0 \tag{2.3.5}$$

D'autre part, f_ε est dilatante sur l'ensemble de Julia puisque $J \cap P(f_\varepsilon) = \emptyset$ (d'après la proposition (2.3.5)) et donc

$$\exists C > 0, \exists \lambda > 1; |(f_\varepsilon^k)'(z)| > C \lambda^k. \forall z \in J, \forall k \geq 1.$$

Ainsi

$$\forall z, z'; z \neq z', \exists \mu > 1 : \|f_\varepsilon(z) - f_\varepsilon(z')\| = |(f_\varepsilon^k)'(z)| \|z - z'\| > \mu. \|z - z'\|$$

En réitérant l'inégalité précédente m fois, on obtient la relation suivante

$$\|f_\varepsilon^m(z) - f_\varepsilon^m(z')\| > \mu^m. \|z - z'\|_{m \rightarrow \infty} \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, quand m tend vers l'infini, les orbites de z et z' tendent aussi vers l'infini, ce qui contredit (2.3.5) . Il suffit donc de prendre z dans cette intersection.

2. La surjectivité

Montrons que φ est surjective

Soit $z \in J$, posons

$$\begin{cases} \text{si } f_\varepsilon^k(z) \in R_1, \text{ alors } s_k = 0 \\ \text{si } f_\varepsilon^k(z) \in R_2, \text{ alors } s_k = 1 \\ \text{si } f_\varepsilon^k(z) \in R_3, \text{ alors } s_k = 2 \end{cases}$$

La construction ainsi donnée vérifie : $\varphi(S) = z$.

3. La continuité

Soit $S \in \Sigma_3$ et montrons que φ est continue en S .

Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $\delta = \frac{1}{3^n}$ pour $n \geq 1$. Si $d(S, T) < \delta$ alors $S_i = T_i \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ (Voir Annexe), et donc

$$\varphi(S), \varphi(T) \in R_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

Or, l'ensemble $\cap_{n \geq 0} R_{s_0 s_1 \dots s_n}$ est réduit à un point et alors $\text{diam}(R_{s_0 s_1 \dots s_n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui est équivalent à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, \text{diam}(R_{s_0 s_1 \dots s_n}) < \varepsilon$.

D'autre part, la conjugaison r vérifie l'inégalité suivante

$$\|\varphi(S) - \varphi(T)\| \leq \text{diam}(R_{s_0 s_1 \dots s_n}), \quad (2.3.6)$$

car $\text{diam}(R_{s_0 s_1 \dots s_n}) = \sup_{z, z' \in J} \|z - z'\|$.

En outre, grâce à l'inégalité (2.3.6), on peut établir l'inégalité suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \|\varphi(S) - \varphi(T)\| < \varepsilon$$

D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \frac{1}{3^n}$ tel que $\forall T \in \Sigma_3, d(S, T) < \delta$ implique $\|\varphi(S) - \varphi(T)\| < \varepsilon$.

4. Commutativité du diagramme

Pour tout $S \in \Sigma_3$, on a

$$(f_\varepsilon \circ \varphi)(S) = f_\varepsilon(\varphi(s_0 s_1 \dots)) = f_\varepsilon(z)$$

et

$$(\varphi \circ \sigma)(S) = \varphi(s_1 s_2 s_3 \dots) = f_\varepsilon(z).$$

donc, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \varphi & \\
 \Sigma_3 & \longrightarrow & J \\
 \sigma \downarrow \square & & \downarrow f_\varepsilon \\
 \Sigma_3 & \longrightarrow & J \\
 & \varphi &
 \end{array}$$

est commutatif. ■

Remarque 2.3.6 *La semi-conjugaison φ définie précédemment ne peut être injective.*

Preuve. i) Le point z_2 correspond à deux suites l'une se termine par (00...) et l'autre par (22...); puisqu'il est à la fois dans le bord de R_1 et de R_3 .

ii) On a d'une part, $\omega z_2 \in \partial R_1$ et $\omega^2 z_2 \in \partial R_3$ et d'autre part, $\omega z_2 \in \partial R_2$ et $\omega^2 z_2 \in \partial R_2$. D'où : la suite qui se termine par des (02...) et la suite qui se termine par (11...) correspondent au cycle $(\omega z_2, \omega^2 z_2)$. ■

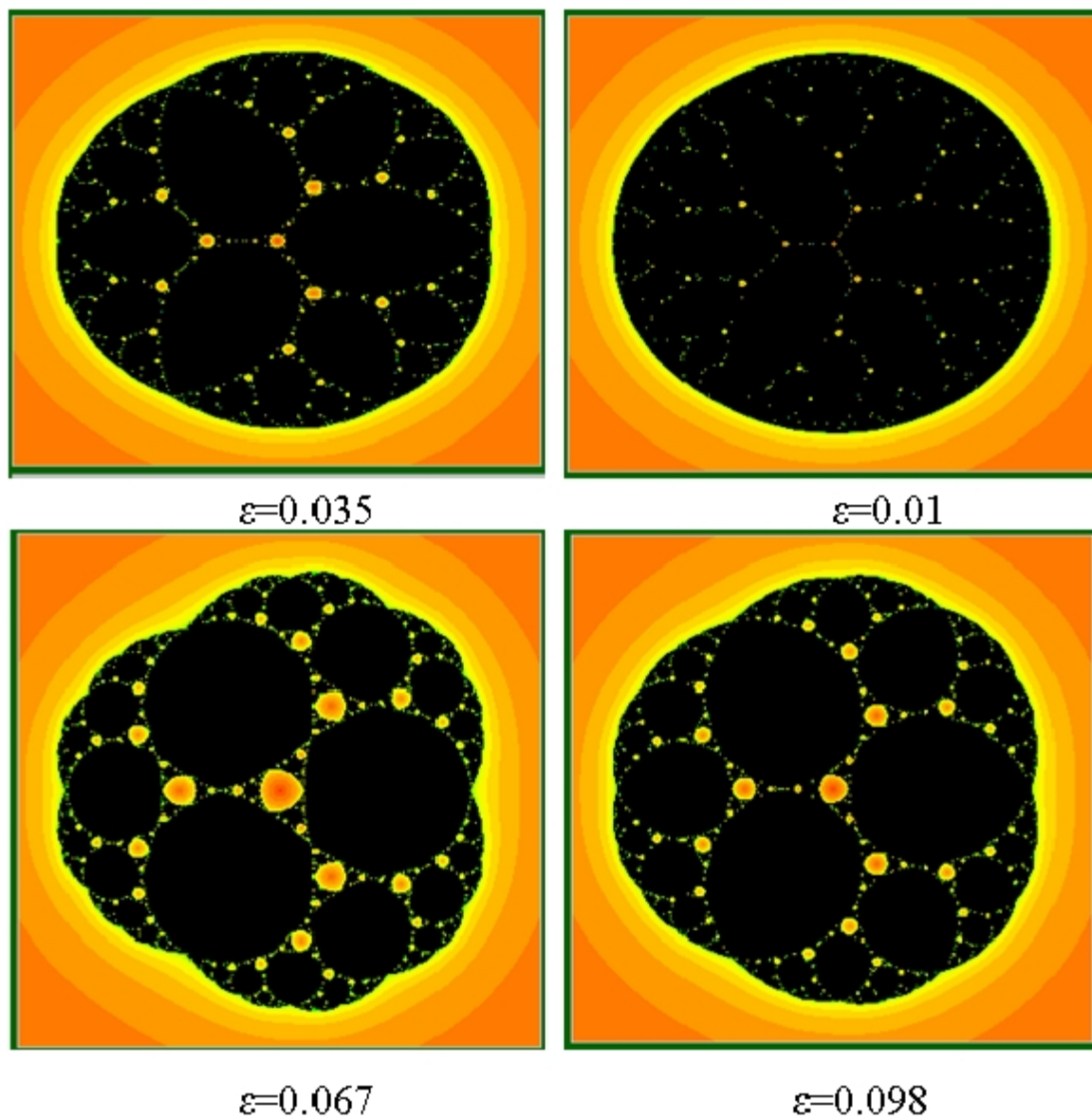
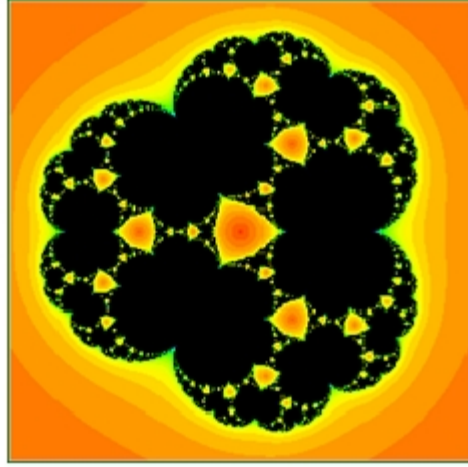


Figure 2.3.6 : Quelques ensembles de Julia avant la bifurcation



$$\varepsilon=0.184$$

Figure 2.3.7 : L'ensemble de Julia pendant la bifurcation

Après bifurcation

De la même manière on va exclure les points critiques de la région R , et on reconstruit les domaines R_1 , R_2 et R_3 , la seule différence est dans la construction des régions D_k où $k \in \{1, 2, 3\}$.

Proposition 2.3.7 *Pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, il existe une région D_1 qui s'envoie sur $D_1 \cup C$ par f_ε et dont tous ses points convergent vers l'infini.*

Preuve. Soit N_1 un voisinage assez petit de $[x, f_\varepsilon(x)]$ où x est un nombre positif plus grand que le rayon du cercle C , contenant z_c , tel que tous ses points sont attirés vers l'infini.

De la même façon que la proposition (2.3.6), on choisit D_1 comme étant une composante connexe d'une préimage de N_1 qui contient z_c (elle peut ne pas contenir N_1) et le voisinage N_1 .

Ainsi, tous ces points seront attirés vers l'infini et elle va s'envoyer sur elle-même union l'extérieur de C (par construction). ■

Corollaire 2.3.3 *On peut construire les régions D_2 et D_3 comme étant les images symétriques de D_1 (figure (2.3.8)).*

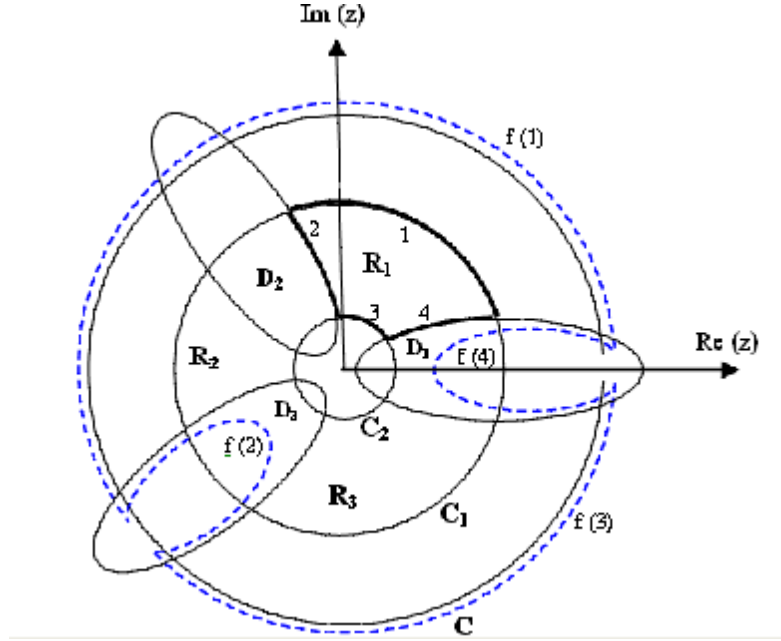


Figure 2.3.8 : La division du plan C en des régions et l'image de R_1 après bifurcation représentée par des pointillés

On peut maintenant introduire de nouveau la dynamique symbolique de la famille de fonctions f_ε sur l'ensemble de Julia.

Définition 2.3.4 *Toute semi-conjugaison injective est dite conjugaison.*

Théorème 2.3.3 *Il existe une conjugaison φ (définie comme précédemment) entre f_ε définie sur son ensemble de Julia J et l'application shift définie sur l'espace des suites Σ_3 .*

Proposition 2.3.8 *Supposons qu'une fonction φ possède un point fixe super-attractif z_0 et que tous ces points critiques sont attirés vers ce point. Alors*

1. *L'ensemble de Julia est totalement discontinu (c'est un ensemble de Cantor).*
2. *La fonction φ est conjuguée à la fonction shift définie sur l'espace des suites à un seul côté Σ_n où n désigne le nombre de points critiques de φ .*

Preuve. La preuve de la proposition 2.3.8 se trouve dans [1]. ■

Preuve. (du théorème)

Comme tous les points critiques (d'après (2.2.1)) convergent vers l'infini, qui est un point fixe super-attractif. Alors, il existe une conjugaison (d'après la proposition précédente) entre la fonction f_ε définie sur son ensemble de Julia et le shift défini sur l'espace des suites Σ_3 , de plus l'ensemble de Julia est totalement discontinu (ensemble de Cantor). ■

2.4 Conclusion

La structure de la famille de fonctions rationnelles $f_\varepsilon(z) = z^2 + \frac{\varepsilon}{z}$ dans le plan complexe dépend uniquement de la valeur du paramètre ε .

* Si $\varepsilon < \frac{4}{27}$, il existe des ensembles fractales de points, qui sont attirés vers z_1 , l'orbite périodique attractive $(\omega z_1, \omega^2 z_1)$ et l'infini et la dynamique de f_ε sur son ensemble de Julia est semi-conjuguée à l'espace des suites à trois symboles.

*Si $\varepsilon > \frac{4}{27}$, tous les points tendent vers l'infini à l'exception de ceux qui sont dans l'ensemble de Julia, qui sur lequel elle est conjugquée à tout l'espace des suites à trois symboles.

"Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle peut seulement être plus commode". (Poincaré).

**"Nous avons des idées arrêtées dès que nous cessons de réfléchir".
(Ernest Renan, 1823-1892).**

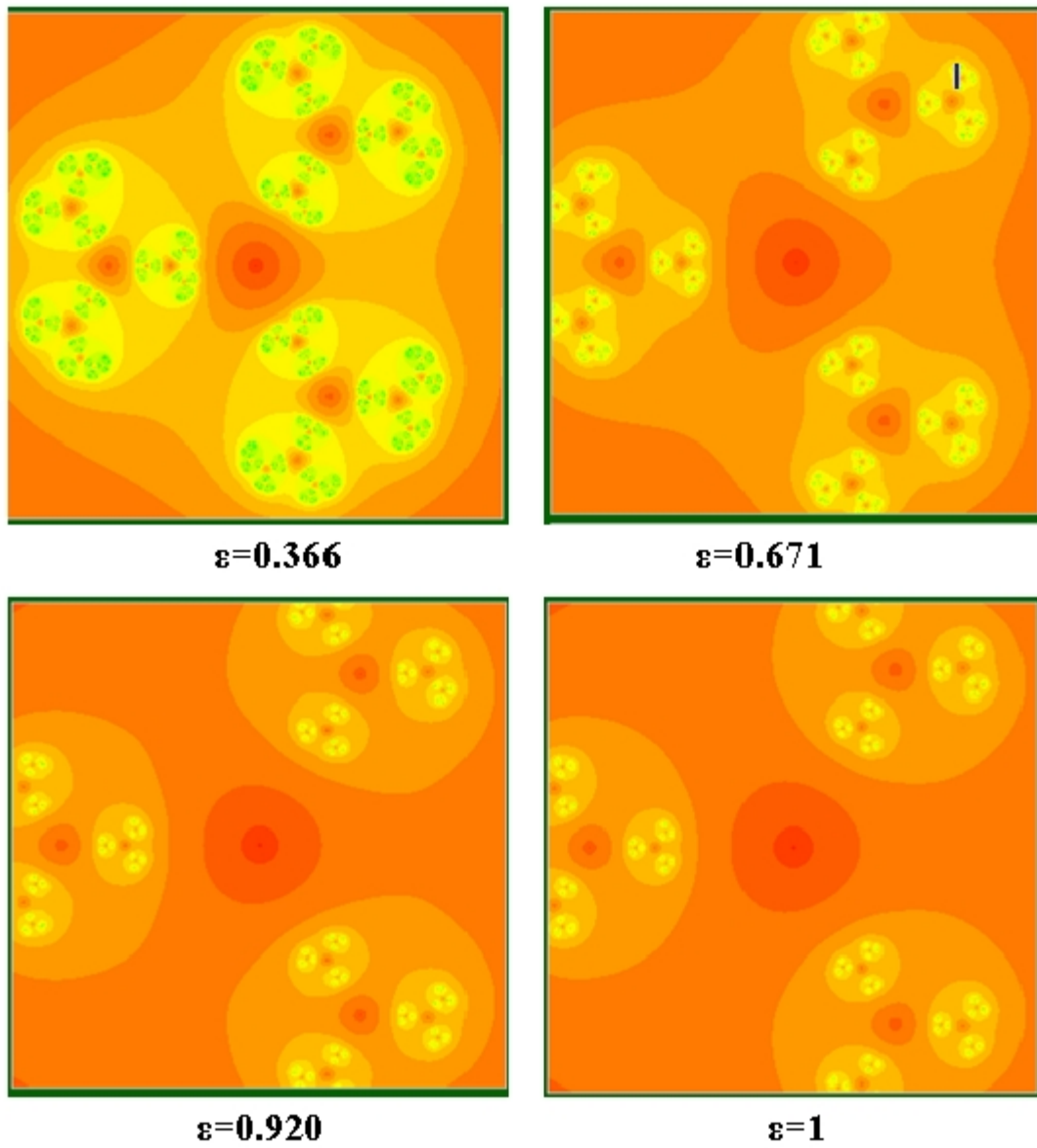


Figure 2.3.9 : Quelques ensembles de Julia après bifurcation

Chapitre 3

Dynamique de $z \mapsto g_\varepsilon(z) = z^3 + \frac{\varepsilon}{z^3}$,

$\varepsilon > 0$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la dynamique d'une autre famille de fonctions rationnelles g_ε , on va constater qu'il y aura une grande ressemblance avec la famille étudiée précédemment.

3.2 Points fixes

Pour déterminer les points fixes de g_ε , il suffit de résoudre l'équation

$$z^6 - z^4 + \varepsilon = 0 \tag{3.2.1}$$

Posons

$$y = z^2$$

L'équation (3.2.1) devient

$$y^3 - y^2 + \varepsilon = 0 \tag{3.2.2}$$

On retombe sur l'équation des points fixes de la famille f_ε , et par suite, l'équation (3.2.1)

aura pour solutions

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{y_1}, & z'_1 = -z_1 \\ z_2 = \sqrt{y_2}, & z'_2 = -z_2 \\ z_3 = \iota\sqrt{-y_3}, & z'_3 = -z_3 \end{cases}$$

où y_1 , y_2 et y_3 sont les points fixes de la famille f_ε .

Proposition 3.2.1 *L'infini est un point fixe super-attractif.*

Preuve. On a $g_\varepsilon(\infty) = \infty$ et $\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{g'_\varepsilon(\frac{1}{\lambda})} \right) \right] = g'_\varepsilon(\infty) = 0$, avec $\lambda = \frac{1}{z}$. ■

Proposition 3.2.2 .

1. Lorsque $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$, les points fixes z_1 et z'_1 sont attractifs, cependant, les points fixes z_2 , z'_2 , z_3 et z'_3 sont répulsifs où ε_* est strictement supérieur à $\frac{2}{27}$.
2. Lorsque $\varepsilon > \varepsilon_0$, tous les points fixes sont répulsifs.

Preuve. 1. Soit $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$

On a d'une part,

$$\begin{cases} z_1 < \sqrt{\frac{2}{3}} < z_2. \\ z'_2 < (-\sqrt{\frac{2}{3}}) < z'_1. \end{cases}$$

$g'_\varepsilon(z_1) = 6z_1^2 - 3$ car z_1 est un point fixe, et puisque $z_1 < \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors $g'_\varepsilon(z_1) < 1$.

D'une part, $g'_{\varepsilon_1}(z_1) = (-1)$, ce qui implique que pour $\varepsilon > \varepsilon_1$

$$g'_\varepsilon(z_1) > (-1)$$

On en déduit alors que

$$(-1) < g'_\varepsilon(z_1) < 1 \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_1 \quad (3.2.3)$$

Grâce à la double inégalité (3.2.3), z_1 est un point attractif

D'autre part, on a $g'_\varepsilon(z_1) = g'_\varepsilon(z'_1)$, donc z'_1 est aussi attractif.

De plus, on sait que

$$\begin{cases} g'_\varepsilon(z_2) > 1 \text{ car } z_2 > \sqrt{\frac{2}{3}} \\ g'_\varepsilon(z_2) = g'_\varepsilon(z'_2) \end{cases}$$

D'où z_2 et z'_2 sont répulsifs.

Les points fixes z_3 et z'_3 sont répulsifs pour toute valeur de ε car

$$g'_\varepsilon(\alpha_3) = -6\alpha_3 - 3 < -1 \text{ où } \alpha_3 = z_3 \text{ ou } z'_3, \text{ par suite } |g'_\varepsilon(\alpha_3)| > 1.$$

2. Soit $\varepsilon > \varepsilon_0$

Comme z_3 et z'_3 sont répulsifs pour tout $\varepsilon > 0$, il reste à montrer que les autres points fixes sont répulsifs.

En effet, on sait que y_1 et y_2 sont des points fixes de f_ε complexes conjugués répulsifs pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, et

$$\Re(y_1) = \Re(y_2) > \frac{2}{3} \quad (3.2.4)$$

(d'après la proposition 2.2.1) et donc $\Re(z_1) = \Re(z_2) > \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ainsi,

$$|g'_\varepsilon(z_1)| = 6 \left| z_1 - \frac{1}{2} \right| > 1$$

De manière similaire, on montre que z_2 est répulsif aussi puisque $\Re(z_1) = \Re(z_2)$.

Les points fixes z'_2 et z'_1 sont aussi répulsifs car,

$$\begin{cases} g'_\varepsilon(z_1) = g'_\varepsilon(z'_1) \\ g'_\varepsilon(z_2) = g'_\varepsilon(z'_2) \end{cases}$$

■

Remarque 3.2.1 .

◆ Pour tout point fixe z

$$g_\varepsilon(\omega z) = \omega^3 \cdot g_\varepsilon(z) = \omega^3 z$$

et

$$g_\varepsilon^2(\omega z) = g_\varepsilon(g_\varepsilon(\omega^3 z)) = \omega^3 z$$

Donc, $(\omega z \ \omega^3 z \ \omega^3 z \dots)$ est un cycle prépériodique.

◆ Il en est de même pour les cycles suivants : $(\omega^2 z \ z \ z \dots)$, $(\omega^3 z \ \omega^3 z \ \omega^3 z \dots)$, $(\omega^4 z \ z \ z \dots)$ et $(\omega^5 z \ z \ z \dots)$.

Remarque 3.2.2 La propriété de symétrie demeure vraie; Pour tout point complexe z

$$g_\varepsilon(\omega z) = \omega^3 \cdot g_\varepsilon(z)$$

où $\omega = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ et $\omega^6 = 1$.

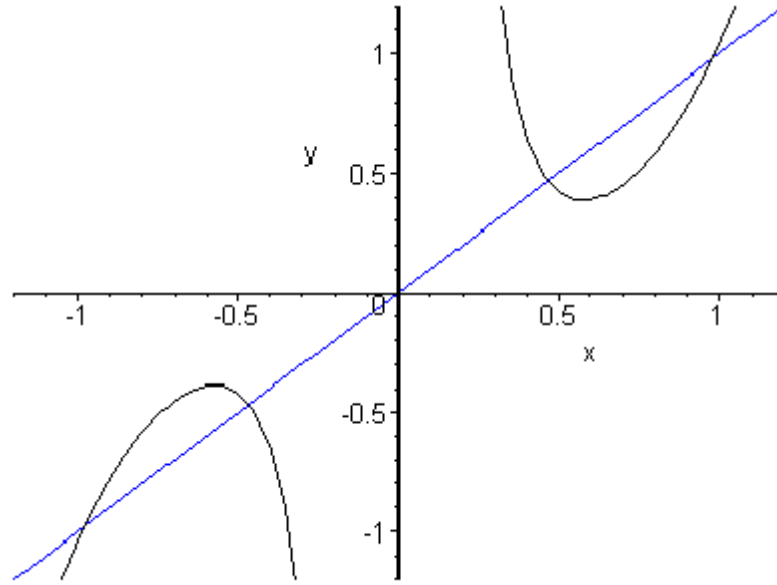


Figure 3.3.1 : Le graphe de g_ε pour $\varepsilon = \frac{1}{27}$

Dans le paragraphe suivant, on verra qu'il existe un autre type de bifurcation mis à part la bifurcation noeud-col.

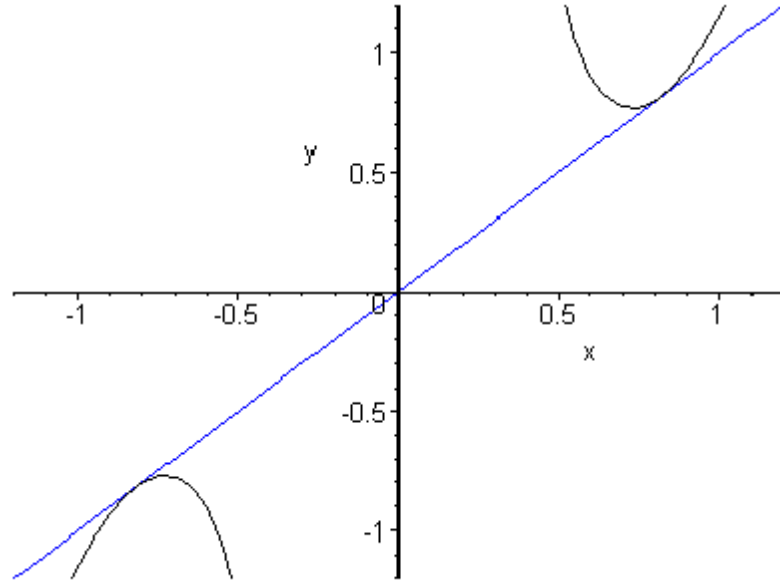
3.3 Valeurs de bifurcations

3.3.1 Bifurcation noeud-col

D'après les figures 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3, il existe une valeur de bifurcation noeud-col en $\varepsilon_0 = \frac{4}{27}$ aux points fixes $\left[z_1 = z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, z'_1 = z'_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$, dès qu'on dépasse cette valeur, il n'y aura pas de points fixes.

Remarque 3.3.1 On peut retrouver ce résultat analytiquement en résolvant le système

$$\begin{cases} g'_{\varepsilon_0}(z) = +1 \\ g_{\varepsilon_0}(z) = z \end{cases}$$

Figure 3.3.2 : Le graphe de g_ε pour $\varepsilon = \frac{4}{27}$

3.3.2 Bifurcation de doublement de période

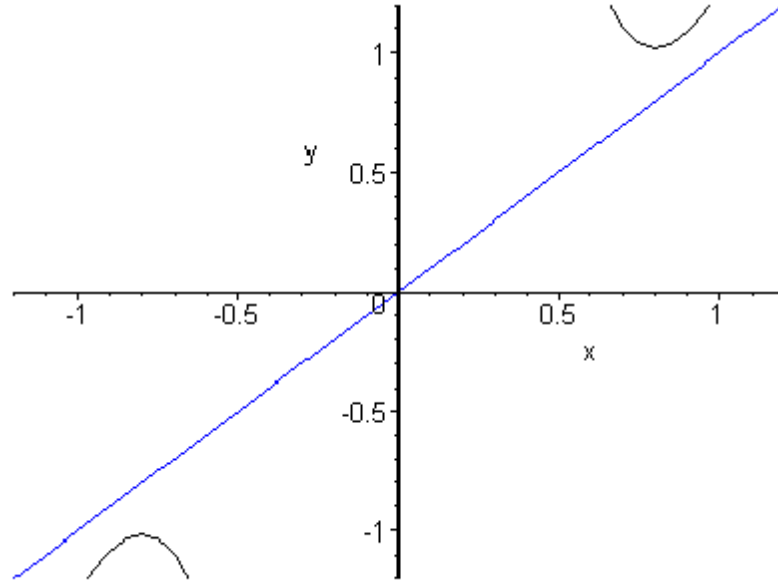
Définition 3.3.1 On dira qu'une famille φ_λ subit une bifurcation de doublement de période en $\lambda = \lambda_0$ s'il existe un intervalle ouvert I et $\alpha > 0$ tels que

1. Pour tout λ appartenant à $[\lambda_0 - \alpha, \lambda_0 + \alpha]$, il y a un seul point fixe p_λ pour φ_λ dans I ,
2. Pour $\lambda_0 - \alpha < \lambda \leq \lambda_0$, φ_λ n'admet pas de 2-cycles dans I et p_λ est attractif (resp répulsif),
3. Pour $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \alpha$, il existe un unique 2-cycle $(q_\lambda^1, q_\lambda^2)$ dans I avec $\varphi_\lambda(q_\lambda^1) = q_\lambda^2$. Ce 2-cycle est attractif (resp répulsif), et le point fixe p_λ est répulsif (resp attractif),
4. Lorsque λ tend vers λ_0 , q_λ^k va tendre vers p_{λ_0} .

Conséquence

Lorsque le phénomène de bifurcation de doublement de période apparaît, les points fixes changent de nature de l'attraction à la répulsion, et il y a naissance d'orbites périodique, dont chacune est de période deux (un 2-cycle).

Dans notre cas, on a

Figure 3.3.3 : Le graphe de g_ε pour $\varepsilon = \frac{7}{27}$

◆ Lorsque $\varepsilon_1 = \frac{2}{27}$, $g_{\varepsilon_1}(z_1) = z_1$ et $g_{\varepsilon_1}(z'_1) = z'_1$, et ces deux points fixes sont non hyperboliques.

◆ Lorsque $\frac{2}{27} < \varepsilon < \frac{4}{27}$, z_1 et z'_1 sont attractifs.

◆ Lorsque $\varepsilon < \frac{2}{27}$, les deux points sont répulsifs, car d'une part $g_\varepsilon(z_1)$ et $g_\varepsilon(z'_1)$ sont continues par rapport à ε , et d'autre part, leurs dérivées sont égales à (-1) en $\frac{2}{27}$.

Ainsi, les deux points fixes z_1 et z'_1 de g_ε subissent un changement dans leurs natures au voisinage de $\varepsilon_1 = \frac{2}{27}$.

Remarque 3.3.2 Si on regarde le graphe de g_ε^2 en $\varepsilon = \frac{2}{27}$ (3.3.4), on constate qu'il y a apparition de deux nouveaux 2-cycles en z_1 et z'_1 (z_1 et z'_1 deviennent des points fixes pour g_ε^2), mais malheureusement, on ne peut les expliciter, malgré qu'on a utilisé le MAPLE 10.

Remarque 3.3.3 On dira qu'il y a apparition d'une bifurcation de doublement de période

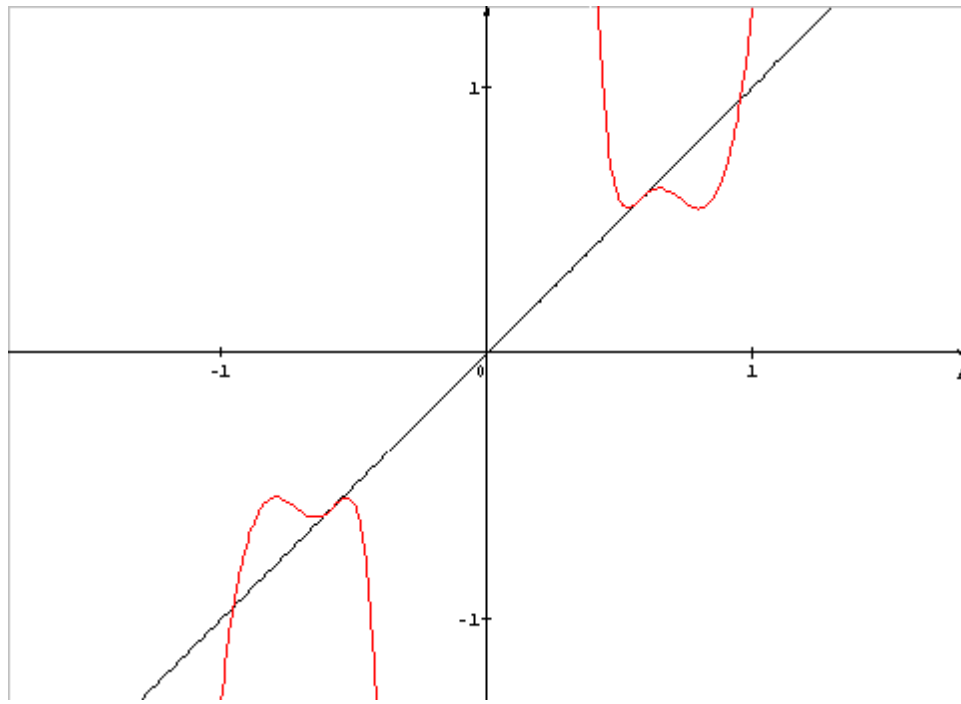


Figure 3.3.4 : Le graphe de g_ε^2 en $\varepsilon = \frac{2}{27}$

pour g_ε en ε_1 si

$$\begin{cases} g'_{\varepsilon_1}(z) = (-1) \\ g_{\varepsilon_1}(z) = z \end{cases}$$

Après calcul, on trouve que $\varepsilon_1 = \frac{2}{27}$, et les points fixes neutres correspondant sont $z_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3})$ et $z'_1 = (\frac{-\sqrt{3}}{3})$.

3.4 Points critiques

Les points critiques autres que zéro et l'infini sont solutions de l'équation $z^6 = \varepsilon$.

Remarque 3.4.1 Rappelons que le zéro est un pôle d'ordre trois.

Proposition 3.4.1 .

1. L'infini est un point super-attractif pour tout $\varepsilon > 0$;
2. Pour $\varepsilon > 1$ et $|z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$, tous les points critiques se trouvent dans le bassin d'attraction

de l'infini ;

3. Pour $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$, le point critique réel z_c est attiré vers z_1 .

Preuve. 1. L'infini est un point fixe super-attarctif car: $g_\varepsilon(\infty) = \infty$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{g_\varepsilon^k\left(\frac{1}{z}\right)} = 0 = (g_\varepsilon)'(\infty), \quad \forall n \geq 2$$

2. On a besoin du lemme suivant

Lemme

Pour tout $\varepsilon > 1$, on a $\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}\} \subset B(\infty)$ où $B(\infty)$ désigne le bassin d'attraction de l'infini.

Preuve du lemme

Soient $\varepsilon > 1$ et z tel que $|z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned} |g_\varepsilon(z)| &\geq |z|^3 - \varepsilon |z|^{-3} \\ &\geq |z|^3 - \frac{\varepsilon}{2^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Or, $|z|^3 - \frac{\varepsilon}{2^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}} = |z|^3 - \frac{1}{2^3 \sqrt{\varepsilon}} \geq |z|^3 - \frac{1}{4\varepsilon |z|}$. Puisque $\varepsilon > 1$, alors $|z|^3 - \frac{\varepsilon}{2^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}} > |z|^3 - \frac{1}{4|z|}$.

Mais, $|z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$, donc $|z|^3 - \frac{1}{4|z|} \geq |z|^3 - \frac{1}{2^3}$.

D'où, $|z|^3 - \frac{\varepsilon}{2^3 \varepsilon^{\frac{3}{2}}} \geq |z|^3 - \frac{1}{2^3} = |z|^2 \left(|z| - \frac{1}{2^3 |z|^2} \right)$. Comme $|z| \geq 2\sqrt{\varepsilon} > 1$, on en déduit que $|z|^2 \left(|z| - \frac{1}{2^3 |z|^2} \right) > |z|^2 (|z| - 1)$.

Par conséquent, $|g_\varepsilon(z)| > |z|^2$ et si on réitère cette dernière inégalité plusieurs fois, on aura $|g_\varepsilon^k(z)| > |z|^{2^k} \rightarrow \infty$, quand $k \rightarrow +\infty$. ■

Soit z un point critique, alors $|z| = \varepsilon^{\frac{1}{6}}$, donc $|g_\varepsilon(z)| = 2\sqrt{\varepsilon}$, et le lemme précédent permis de conclure.

3. Soit $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|z_1 - g_\varepsilon(z_c)| = |g'_\varepsilon(z_1)| |z_1 - z_c| < \alpha |z_1 - z_c| \text{ où } \alpha < 1.$$

Après itération, on obtient $|z_1 - g_\varepsilon^k(z_c)| < \alpha^k |z_1 - z_c| \rightarrow z_1; k \rightarrow +\infty$. ■

3.5 Topologie de l'ensemble de Julia

3.5.1 Avant bifurcation

On considère un cercle C de rayon assez grand, ses préimages consistent en deux courbes fermées, dont l'une est proche de l'infini et l'autre de rayon assez petit, et chacun s'envoie sur C en $(3 - 1)$ sur C . Notons par C_1 la première courbe et par C_2 la deuxième courbe.

Remarque 3.5.1 *Il est clair que tout point appartenant à l'extérieur de C_1 ou à l'intérieur de C_2 tend vers l'infini, et donc l'étude de la dynamique de g_ε se fera dans la région R délimitée par C_1 et C_2 .*

Proposition 3.5.1 *Pour $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$, il y a une partie simplement connexe D_1 de R contenant z_1 , z'_1 et z_c qui s'envoie sur elle même, et dont tous ses éléments sont attirés vers z_1 avec $\varepsilon_* > \frac{2}{27}$.*

Preuve. Soient $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$ et N un disque ouvert autour de z_1 attiré vers z_1 .

La preuve de ce résultat se fait exactement comme celle qui a été faite dans la proposition 2.3.6 . ■

Corollaire 3.5.1 *Par symétrie, on construit les parties D_i pour $i \in \{2, \dots, 6\}$ comme suit (voir figure 3.5.5)*

La partie D_2 contient $\omega z_1, \omega z'_1$ et ωz_c avec $g_\varepsilon(D_2) \subset D_4$.

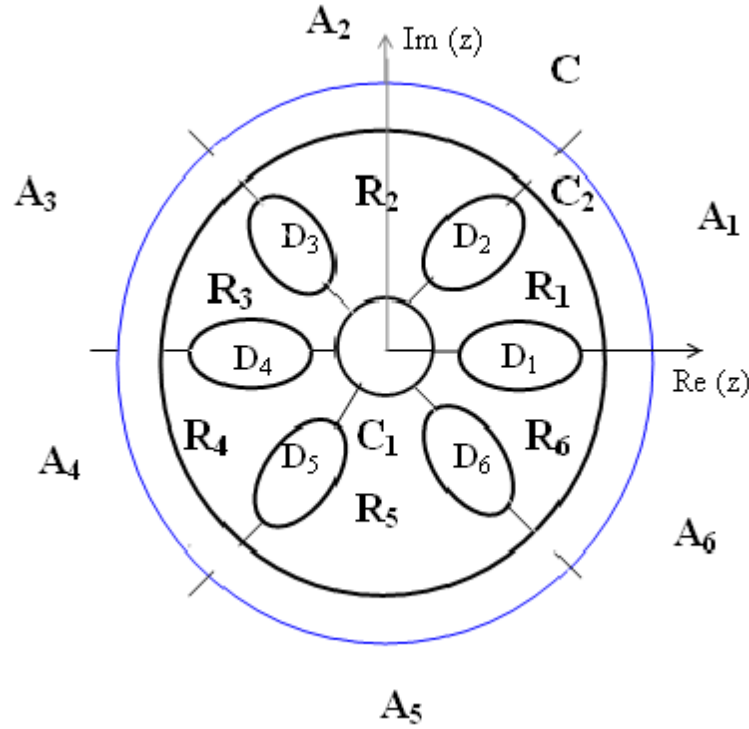
La partie D_3 contient $\omega^2 z, \omega^2 z'_1$ et $\omega^2 z_c$ avec $g_\varepsilon(D_3) \subset D_1$.

La partie D_4 contient $\omega^3 z_1$ et $\omega^3 z_c$ avec $g_\varepsilon(D_4) \subset D_4$.

La partie D_5 contient $\omega^4 z_1$ et $\omega^4 z_c$ avec $g_\varepsilon(D_5) \subset D_1$.

La partie D_6 contient $\omega^5 z_1$ et $\omega^5 z_c$ avec $g_\varepsilon(D_6) \subset D_4$.

Remarque 3.5.2 *Tous les points critiques sont attirés vers les orbites attractives par construction des D_k , ceci veut dire que la famille g_ε est hyperbolique (dilatante sur l'ensemble de Julia) (d'après le résultat (1.3.5)).*

Figure 3.5.5 : La division du cercle C avant bifurcation neoud-col

Maintenant, on est en mesure d'introduire la dynamique symbolique de la famille g_ε après avoir supprimé les six parties précédentes D_i de la région R . On la partitionne en six parties symétriques R_k où: $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$, on leur rajoutant respectivement les rayons suivants

$$\arg z = 0, \arg z = \frac{\pi}{3}, \arg z = \frac{2\pi}{3}, \arg z = \pi, \arg z = \frac{4\pi}{3} \text{ et } \arg z = \frac{5\pi}{3}.$$

Définition 3.5.1 On dit que deux points complexes u et v sont symétriques si et seulement si $u = \omega^k.v$ pour un certain entier naturel k .

Théorème 3.5.1 Il existe une semi-conjugaison Ψ entre la fonction g_ε définie sur son ensemble de Julia et l'application shift définie sur l'espace des suites $\Sigma_6 = \{0, 1, \dots, 5\}^{\mathbb{N}}$ à six symboles, quelque soit $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Preuve. Elle se fait de la même manière que celle faite dans le chapitre précédent. ■

Remarque 3.5.3 *Le point fixe répulsif z_2 ainsi que ses images symétriques empêchent la fonction Ψ d'être bijective. Par exemple, la suite qui se termine par des (00...) et celle qui se termine par des $T = (55...)$ correspondent aux point fixe z_2 .*

3.5.2 Après bifurcation

Soit $\varepsilon > 1$, en s'inspirant du premier chapitre, on construit de la même manière les régions D_k où $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$, contenant les points critiques $\omega^k z_c$ (voir figure (3.5.8)).

Théorème 3.5.2 .

1. *Pour $\varepsilon > 1$, il existe une conjugaison entre la fonction g_ε définie sur son ensemble de Julia et l'application shift définie sur l'espace $\Sigma_6 = \{0, 1, \dots, 5\}$.*
2. *L'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor.*

Preuve. On sait que $\forall \varepsilon > 1$, tous les points critiques sont attirés vers le point super-attarctif qui est l'infini (d'après la proposition (3.4.1)). Alors, il y a effectivement une conjugaison et l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor (d'après la proposition (2.3.8)). ■

3.6 Conclusion

On constate que l'étude de la dynamique de la famille de fonctions rationnelles g_ε ressemble beaucoup à celle de la famille f_ε , sauf qu'ici il y a apparition d'un nouveau type de bifurcation qu'on n'a pas trouvé dans le cas de la famille f_ε .

Peut-on généraliser cette étude à $z \mapsto z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$?

"Généralement, les gens qui savent peu parlent beaucoup, et les gens qui savent beaucoup parlent peu". (Jean-Jacques Rousseau).

"Je suis une substance pensante". (Descartes).

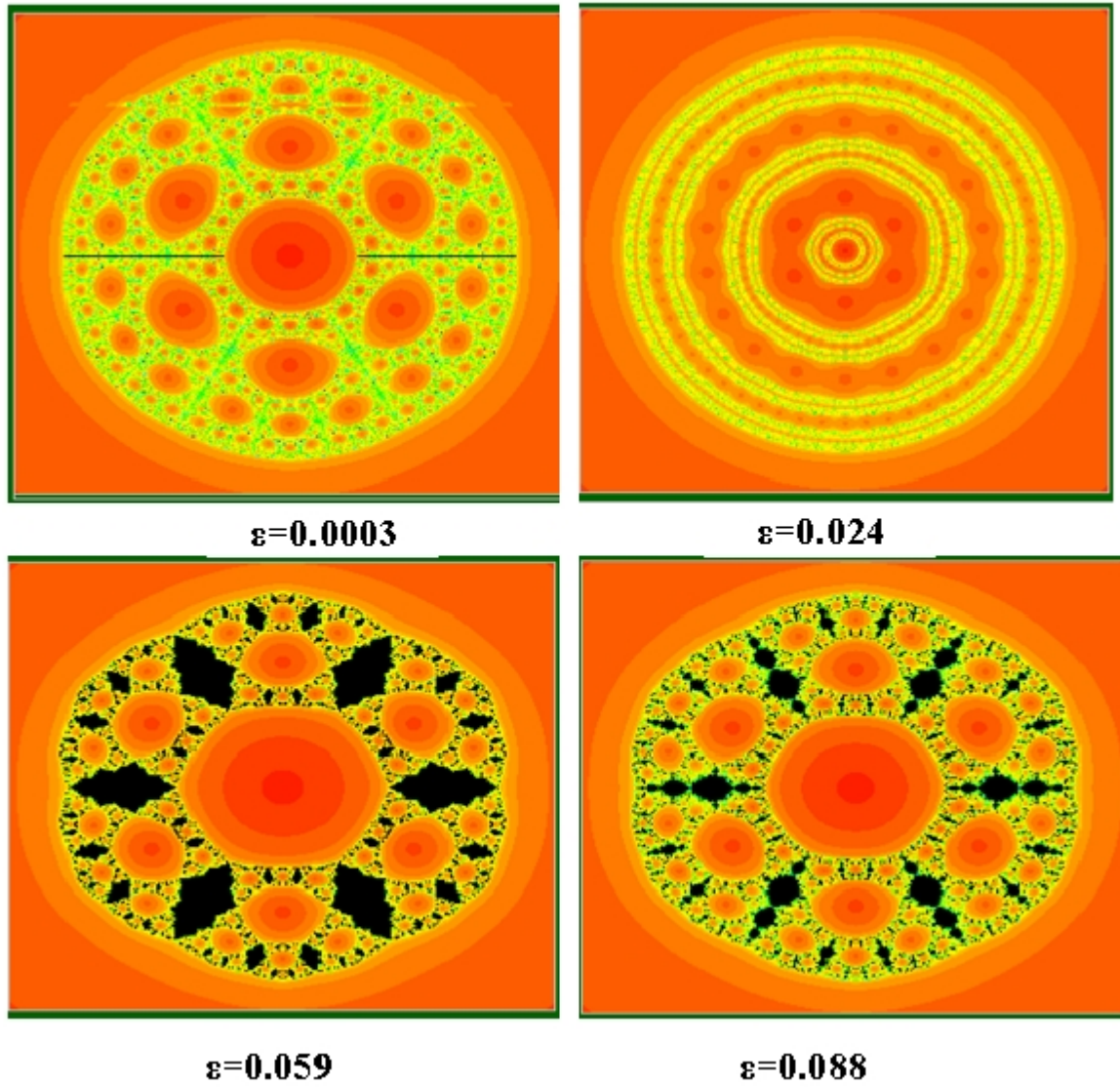
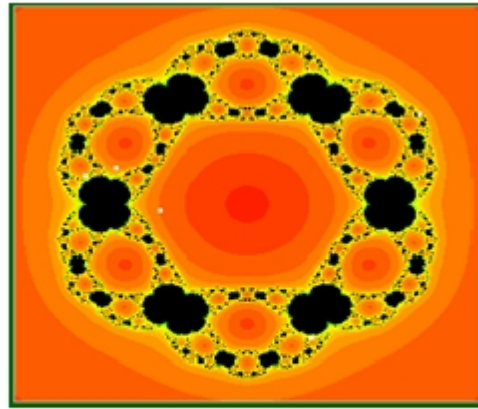


Figure 3.5.6 : Quelques ensembles de Julia avant la bifurcation noeud-col



$$\varepsilon = 0.148$$

Figure 3.5.7 : L'ensemble de Julia pendant la bifurcation noeud-col.

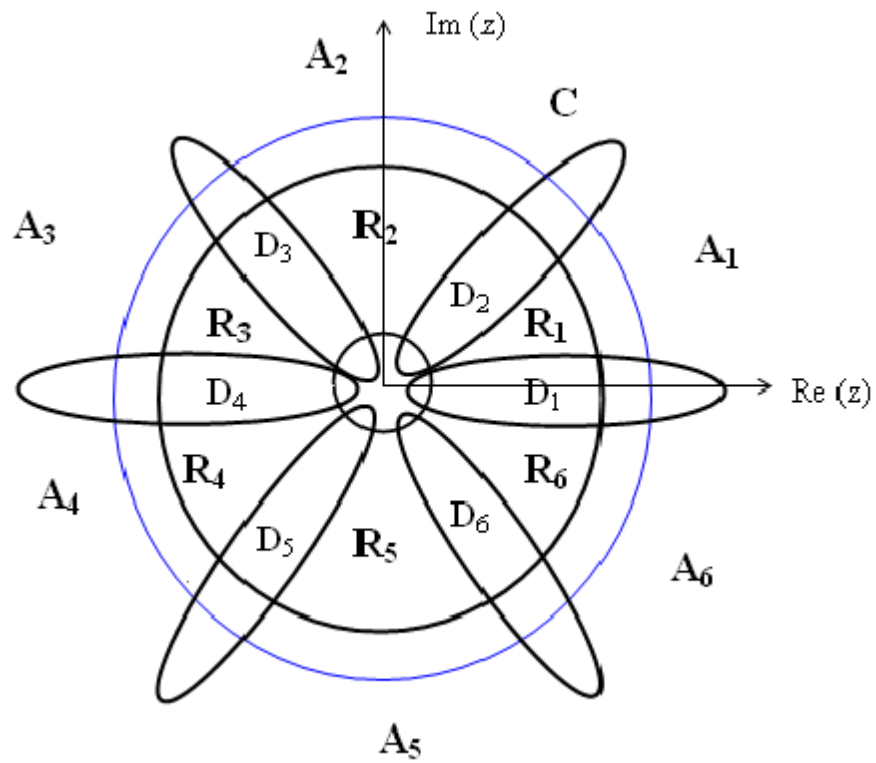


Figure 3.5.8 : La partition du cercle C après bifurcation noeud-col.

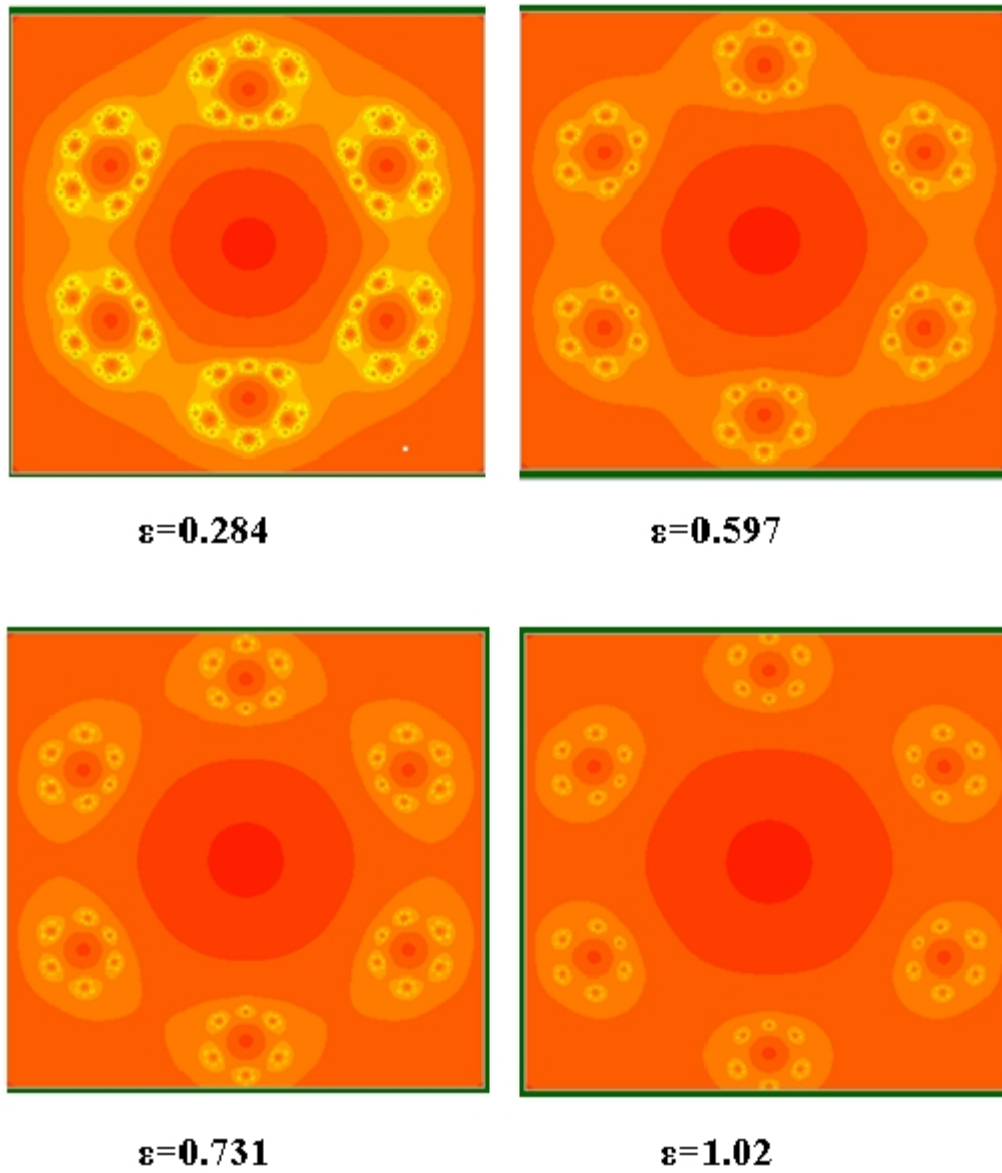


Figure 3.5.9 : Quelques ensemble de Julia après bifurcation noeud-col

Chapitre 4

$$\textbf{Généralisation à } z \mapsto h_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z^m},$$
$$n \geq 2 \textbf{ et } m \geq 1$$

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de généraliser tous les résultats établis dans les deux chapitres précédents, en décrivant ce qui se passera pour l'ensemble de Julia $J(h_\varepsilon)$ à chaque fois que nous faisons varier ε .

La famille h_ε est dite *perturbation singulière* de z^n , car lorsque $\varepsilon = 0$, h_0 est de degré n , par contre quand $\varepsilon \neq 0$, le degré de h_ε augmente à $(n + m)$.

Le choix de cette famille provient de la *méthode de Newton* qui nous aide en général à trouver les racines d'un polynôme (voir [14]). Par exemple la fonction de Newton associée au polynôme $P_\varepsilon(z) = z^2 + \varepsilon$ est égale à $N_\varepsilon(z) = \frac{z}{2} - \frac{\varepsilon}{2z}$. On voit bien que le zéro qui était un point fixe pour $P_\varepsilon(z)$, devient un pôle pour $N_\varepsilon(z)$ après la perturbation. La famille h_ε possède beaucoup de propriétés qui dépendent des valeurs de n et m , qu'on va citer quelques unes dans ce chapitre. Pour cela, on divise notre chapitre en deux parties; on étudiera dans un premier temps la dynamique de h_ε lorsque $m > 1$, puis quand $m = 1$.

4.2 Etude de la famille $z \mapsto \varphi_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$, $n \geq 2$ et $m > 1$

4.2.1 Points critiques

Mis à part l'infini et le zéro, il existe $(n+m)$ nouveaux points critiques après perturbation qui sont de la forme $\omega^k z_c$ avec

$$z_c = \sqrt[n+m]{\frac{m\varepsilon}{n}} \text{ et } \omega^{n+m} = 1$$

Les orbites des points critiques $\omega^k z_c$ sont toutes symétriques (au sens de la relation (4.2.3)) sous les itérations de φ_ε ; si $\varphi_\varepsilon^m(z_c)$ tend vers l'infini ou vers un cycle attractif, il en aït de même pour $\varphi_\varepsilon^m(\omega^k z_c)$, et donc on peut dire qu'il y a essentiellement une seule orbite qui est celle du point critique réel z_c , et c'est elle qui va jouer un rôle primordial dans la description de la structure de l'ensemble de Julia, puisque si cette orbite tend vers l'infini, toutes les autres orbites critiques vont tendre vers l'infini et dans ce cas, on a le résultat suivant

Théorème 4.2.1 *Supposons que $n \geq 2$ et que l'orbite critique de z_c tend vers l'infini. Alors, l'ensemble de Julia est totalement discontinu (ensemble de Cantor).*

Preuve. Voir [8]. ■

Remarque 4.2.1 *Dans le cas où $n = m \geq 3$, on a le résultat suivant*

Proposition 4.2.1 *Si $\varepsilon > 1$ et $|z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$, alors l'ensemble*

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}\} \subset B_\varepsilon(\infty)$$

Preuve. Soient $\varepsilon > 1$ et $|z| \geq 2\sqrt{\varepsilon}$ et posons $\phi_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z^n}$. Donc

$$\begin{aligned} \left| z^n + \frac{\varepsilon}{z^n} \right| &\geq \left| z \right|^n - \frac{\varepsilon}{\left| z \right|^n} \\ &\geq \left| z \right|^n - \frac{1}{2^n \varepsilon^{\frac{n}{2}-1}} \geq \left| z \right|^n - \frac{1}{4 \left| z \right|^{n-2}} \\ &\geq \left| z \right|^n - \frac{1}{2^n} \\ &> \left| z \right|^{n-1} \end{aligned}$$

$|z|^n - \frac{1}{2^n} > |z|^{n-1}$ car $|z|^n - \frac{1}{2^n} = |z|^{n-1} \left(|z| - \frac{1}{2^n |z|^{n-1}} \right) > |z| - 1 > 0$ puisque $|z| > 1$.

Après itération, on aura $|\phi_\varepsilon^m(z)| \geq |z|^{(n-1)^m}$, puisque $n > 2$, alors $|\phi_\varepsilon^m(z)| \rightarrow \infty$. ■

4.2.2 Points fixes

On ne peut trouver explicitement les points fixes de φ_ε , mais on pourra affirmer qu'il y a exactement $(n+m)$ points vérifiant l'équation $z^{n+m} - z^{m+1} + \varepsilon = 0$, sans oublier l'infin qui est un point super-attractif pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 2$.

Proposition 4.2.2 .

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, φ_ε ne peut avoir plus de deux points fixes réels positifs z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$.
2. Le point z_1 est attractif pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ si et seulement si $m = 1$.

Preuve. 1. L'équation des points fixes de φ_ε est donnée par

$$z^{n+m} - z^{m+1} + \varepsilon = 0.$$

Posons

$$\chi_\varepsilon(z) = z^{n+m} - z^{m+1} + \varepsilon.$$

alors

$$\begin{cases} \chi'_\varepsilon(z) = 0 \iff z_* = \left(\frac{m+1}{n+m} \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ \chi'_\varepsilon(z) > 0 \iff z \in (z_*, \infty) \\ \chi'_\varepsilon(z) < 0 \iff z \in (0, z_*) \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon \searrow \text{ sur } (0, z_*) \\ \chi_\varepsilon(z_*)\chi_\varepsilon(0) < 0 \end{cases}$$

donc, il existe un unique z_1 tel que $\chi_\varepsilon(z_1) = 0$. C'est à dire, z_1 est un point fixe réel positif pour φ_ε .

De même,

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon \nearrow \text{ sur } (z_*, \infty) \\ \chi_\varepsilon(z_*)\chi_\varepsilon(\infty) < 0 \end{cases}$$

alors z_2 est un point fixe réel positif pour φ_ε .

2. Pour tout z :

$$\varphi'_\varepsilon(z) = (n+m)z^{n-1} - \frac{m}{z}\varphi_\varepsilon(z).$$

donc

$$\varphi'_\varepsilon(z_1) = (n+m)z_1^{n-1} - m.$$

car z_1 est un point fixe.

Or

$$\begin{aligned} \varphi'_\varepsilon(z_1) > (-1) &\iff z_1^{n-1} > \frac{m-1}{n+m} \\ &\iff m = 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\varphi'_\varepsilon(z_1) > (-1) \iff m = 1 \quad (4.2.1)$$

De plus, pour tout z réel assez proche de z_1 , $\varphi_\varepsilon(z) < z$, alors

$$\varphi'_\varepsilon(z_1) < 1 \quad (4.2.2)$$

En tenant compte de (4.2.1) et (4.2.2), on conclut que $|\varphi'_\varepsilon(z_1)| < 1 \iff m = 1$. ■

Remarque 4.2.2 La propriété de symétrie est donnée sous la forme

$$\varphi_\varepsilon(\alpha z) = \alpha^n \varphi_\varepsilon(z) \quad (4.2.3)$$

où α est une racine d'ordre $(n+m)$ de l'unité et vérifie $\alpha = \left[1, \frac{2\pi}{n+m}\right]$.

Définition 4.2.1 On dira que deux points u et v sont symétriques si et seulement si $u = \alpha^k v$ pour un certain entier positif k .

Conséquence

La relation (4.2.3) implique que l'orbite des points de la forme $\alpha^k z$ sont toutes symétriques par l'itération de φ_ε , puisque, si $\varphi_\varepsilon^i(z) \rightarrow \infty$, alors $\varphi_\varepsilon^i(\alpha^k z)$ tend aussi vers l'infini pour tout k , et si $\varphi_\varepsilon^i(z)$ tend vers un cycle attractif, il en est de même pour $\varphi_\varepsilon^i(\alpha^k z)$. Ce cycle va dépendre de k , et donc on aura des cycles de différentes périodes.

4.2.3 Valeurs de bifurcations

Bifurcation noeud-col

Les solutions du système suivant

$$\begin{cases} \varphi_{\varepsilon_0}(z) = z \\ \varphi'_{\varepsilon_0}(z) = 1 \end{cases}$$

sont

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{n-1}{n+m}\right)\left(\frac{m+1}{n+m}\right)^{\frac{m+1}{n-1}} \text{ et } z = \sqrt[n-1]{\frac{m+1}{n+m}}$$

Proposition 4.2.3 *Il existe un intervalle de paramètres $(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ dans lequel le point fixe z_1 est attractif.*

Preuve. Comme z_1 et $\varphi'_\varepsilon(z_1)$ dépendent continuellement de ε et de z_1 , alors $\varphi'_\varepsilon(z_1)$ est une fonction en ε continue, on conclut qu'il existe $I = (\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ sur lequel $\varphi'_\varepsilon(z_1) > (-1)$. Puisque cette dérivée vaut $(+1)$ en $\varepsilon = \varepsilon_0$ et que $\varphi'_\varepsilon(z_1) < 1$, alors z_1 est attractif pour tout $\varepsilon \in (\varepsilon_*, \varepsilon_0)$. ■

Bifurcation de doublement de période

La résolution du système

$$\begin{cases} \varphi_{\varepsilon_1}(z) = z \\ \varphi'_{\varepsilon_1}(z) = (-1) \end{cases}$$

implique que

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{m-1}{n+m}\right)^{\frac{m+1}{n-1}} \left(\frac{n+1}{n+m}\right) \quad (4.2.4)$$

et

$$z = \left(\frac{m+1}{n+m}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Proposition 4.2.4 *Supposons que $n > 1$, $m > 1$ avec $(n, m) \neq (2, 2)$. Alors, il existe une valeur de bifurcation de doublement de période dans $\mathbb{R}_+$ qui apparaît pour la première fois lorsque ε décroît de ε_0 vers le zéro.*

Preuve. Elle consiste à utiliser le lemme suivant

Lemme : une valeur de bifurcation de doublement de période ε_c apparaît si $\varphi_\varepsilon^2(z_c)$ coïncide avec un point fixe répulsif.

Preuve du lemme : voir [2].

1. Montrons que $\varphi_\varepsilon^2(z_c) < z_2$

Remarquons d'abord que pour tout $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, $\varphi'_\varepsilon(z_1) \approx 1$. Comme φ_ε est croissante sur $[z_1, +\infty)$ et décroissante sur $]0, z_c]$, alors $z_c < z_1$, ainsi $\varphi_\varepsilon(z_c) < z_1$.

De plus, $\left(\frac{n}{n+m}\right) > \left(\frac{1}{n+m}\right)$ et $\varphi_\varepsilon(z_c)$ est d'ordre $\varepsilon^{\frac{n}{n+m}}$, par contre z_c est d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{n+m}}$, avec $\varphi_\varepsilon(z_c) = \varepsilon^{\frac{n}{n+m}} \left[n^{+m} \sqrt{\frac{m^n}{n^n}} + n^{+m} \sqrt{\frac{n^m}{m^m}} \right]$, ce qui implique que $\varphi_\varepsilon(z_c) > z_c$.

Par conséquent,

$$\varphi_\varepsilon^2(z_c) < z_2 \quad (4.2.5)$$

2. Prouvons maintenant que $\varphi_\varepsilon^2(z_c) > z_2$.

On sait que φ_ε décroissante sur $]0, z_c]$, donc il suffit de montrer que $\varphi_\varepsilon(z_c) > z'_2$ où z'_2 est la préimage réelle positive de z_2 différente de z_2 .

Remarque : Si on montre que $\left(\frac{n}{n+m} > \frac{1}{m}\right)$ implique $\varphi_\varepsilon(z_c) < z'_2$ et comme φ_ε est croissante, on va en déduire que $\varphi_\varepsilon^2(z_c) > z_2$. ■

En effet, on a d'une part, $\varphi_\varepsilon(z'_2) = z_2 < 1$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\frac{\varepsilon}{z_2^m} < 1$, ainsi

$z'_2 > \varepsilon^{\frac{1}{m}}$. Puisque $\varphi_\varepsilon(z_c)$ est d'ordre $\varepsilon^{\frac{n}{n+m}}$, il en résulte que z'_2 est au moins d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{m}}$.

D'autre part, $\left(\frac{n}{n+m}\right) > \left(\frac{1}{m}\right)$ car $m > 1$ et $n > 1$ avec $(m, n) \neq (2, 2)$ et $\varepsilon \approx 0$, alors $\varphi_\varepsilon(z_c) < z'_2$.

D'où

$$\varphi_\varepsilon^2(z_c) > z_2 \quad (4.2.6)$$

La fonction $\varepsilon \mapsto \varphi_\varepsilon(z_c) - z_2$ est continue par rapport à ε . Si on tient compte de (4.2.5) et 4.2.6, on conclut, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe ε_c en lequel $\varphi_{\varepsilon_c}^2(z_c) = z_2$. Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 4.2.3 Lorsque $(m, n) = (2, 2)$, on peut montrer analytiquement l'existence de la bifurcation de doublement de période en $\varepsilon_0 = \frac{27}{256}$ au point fixe $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.2.4 Topologie de l'ensemble de Julia

Dans le cas où z_1 est attractif, on définit de la même façon la région R contenant l'ensemble de Julia, privée de ses $(n + m)$ régions D_k qui contiennent les orbites des points critiques. On la divise ensuite en $(n + m)$ parties symétriques R_k , dont chacune d'elles s'envoie sur R par φ_ε .

Remarque 4.2.4 *En utilisant la relation de symétrie (4.2.3), on peut dire que les ensembles de Julia sont symétriques sous l'application $z \mapsto \alpha z$, avec*

$$\alpha = \left[1, \frac{2\pi}{n+m} \right]; \quad \alpha^{n+m} = 1$$

Théorème 4.2.2 .

1. *Avant la bifurcation noeud-col dans le cas où z_1 est attractif, il existe une semi-conjugaison ϕ entre la fonction φ_ε définie sur son ensemble de Julia et l'application shift définie sur l'espace des suites $\Sigma_{n+m} = \{0, 1, \dots, n+m-1\}^{\mathbb{N}}$ à $(n+m)$ symboles tels que, pour tout $k \geq 0$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } s_k = 0, \varphi_\varepsilon^k(z) \in R_1 \\ \dots \\ \text{Si } s_k = n+m-1, \varphi_\varepsilon^k(z) \in R_{n+m} \end{array} \right.$$

2. *Après bifurcation, l'application ϕ devient une conjugaison et l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor.*

Preuve. Ce théorème étant une généralisation des deux théorèmes 2.3.2 et 2.3.3, par conséquent, sa preuve se fait de la même manière, tout en gardant l'aspect général.

■

Remarque 4.2.5 *Avant la bifurcation noeud-col, le point fixe répulsif z_2 et ses images symétriques $\alpha^k z_2$ où $k \in \{1, \dots, n+m-1\}$ empêchent l'application ϕ d'être bijective.*

Remarque 4.2.6 .

♦ *Lorsque $|z|$ est assez grand, $\varphi_\varepsilon \approx z^n$, donc φ_ε possède un bassin d'attraction immédiat B_ε .*

De plus, le zéro étant un pôle d'ordre $(n + m)$, donc il va exister un voisinage ouvert de zéro qui s'envoie sur B_ε ; ce voisinage est soit contenu dans B_ε , soit c'est le zéro qui appartient à une préimage T_ε de B_ε avec $T_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Ainsi, les seules préimages de B_ε sont T_ε et B_ε lui même.

♦ Dans le cas où $n = m \geq 2$, on a le résultat suivant

Théorème 4.2.3 *Supposons que l'orbite du point critique réel z_c tend vers l'infini. Alors*

1. *Si une valeur critique v_ε se trouve dans le bassin d'attraction immédiat B_ε de l'infini, alors l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor.*
2. *Si une valeur critique v_ε se trouve dans le voisinage de zéro T_ε , l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor constitué de simples courbes fermées.*
3. *Dans le cas où v_ε n'appartient ni à T_ε et ni à B_ε , alors l'ensemble de Julia est un ensemble connexe.*

Preuve. Voir [14] et [20]. ■

Exemple 4.2.1 .

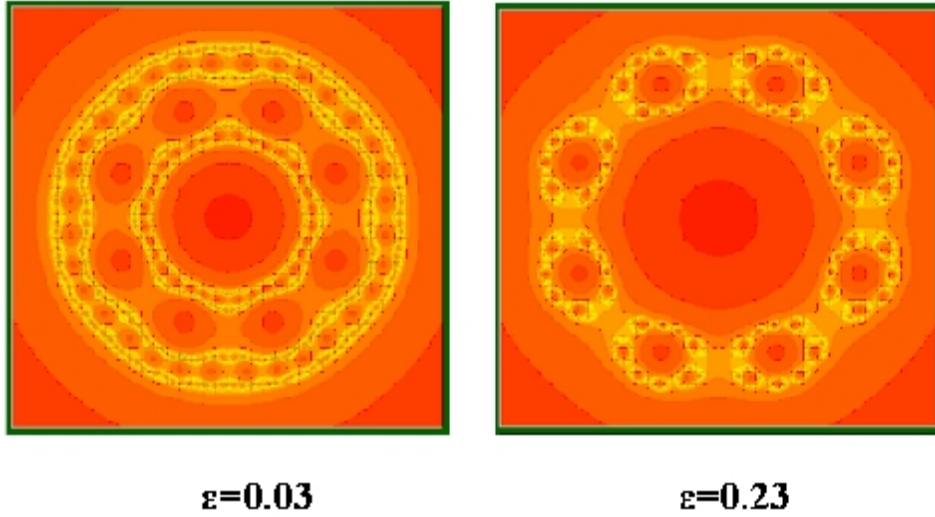


Figure 4.2.1 : En $\varepsilon = 0.03$, l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor; en $\varepsilon = 0.23$, c'est un ensemble constitué de courbes fermées.

On considère la famille $z \mapsto z^4 + \frac{\varepsilon}{z^4}$, dans le cas où $\varepsilon = 0.03$, l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor, lorsque $\varepsilon = 0.23$, il sera constitué de courbes fermées (figure).

Remarque 4.2.7 *Le deuxième cas du théorème ci-dessus ne peut avoir lieu si $n = 2$.*

4.3 Etude de la famille $z \mapsto \psi_\varepsilon(z) = z^n + \frac{\varepsilon}{z}$, $n \geq 2$

La famille ψ_ε qui est de degré $(n + 1)$ est aussi appelée perturbation singulière de z^n qui possède un pôle d'ordre n à l'origine.

4.3.1 Points critiques

Autres que le zéro et l'infini, il existe $(2n)$ points critiques de la forme $\omega^k z_c$ avec $z_c^{n+1} = \frac{\varepsilon}{n}$.

Notons que

$$\psi_\varepsilon(\omega z) = \omega^k \psi_\varepsilon(z); \quad \omega^{n+1} = 1 \quad (4.3.7)$$

D'où, les orbites des points critiques $\omega^k z_c$ sont toutes symétriques (au sens de la relation (4.3.7)) sous les itérations de ψ_ε . Par exemple si $\psi_\varepsilon^m(z)$ tend vers l'infini ou vers un cycle attractif, il en ait de même pour $\psi_\varepsilon^m(\omega^k z)$.

4.3.2 Points fixes

L'infini est un point fixe super-attractif pour ψ_ε et il est connu que ψ_ε est conjuguée à $z \mapsto z^n$ dans un voisinage de l'infini, et alors on a un bassin d'attraction immédiat $B_\varepsilon(\infty)$ de l'infini.

Remarque 4.3.1 *Le zéro étant un pôle d'ordre un, il existe un voisinage ouvert de zéro qui s'envoie $(1 - 1)$ sur un voisinage de l'infini dans $B_\varepsilon(\infty)$ et les autres points fixes de ψ_ε vérifient l'équation*

$$z^{n+1} - z^2 + \varepsilon = 0$$

4.3.3 Valeurs de bifurcations

Bifurcation noeud-col

Ce phénomène aura lieu lorsque

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{2}{n-1}} \text{ et } z = \sqrt[n-1]{\frac{2}{n+1}}$$

Remarque 4.3.2 Les figures (4.3.2) et (4.3.3) représentent la division du cercle C dans le cas $n = 4$ et $m = 1$.

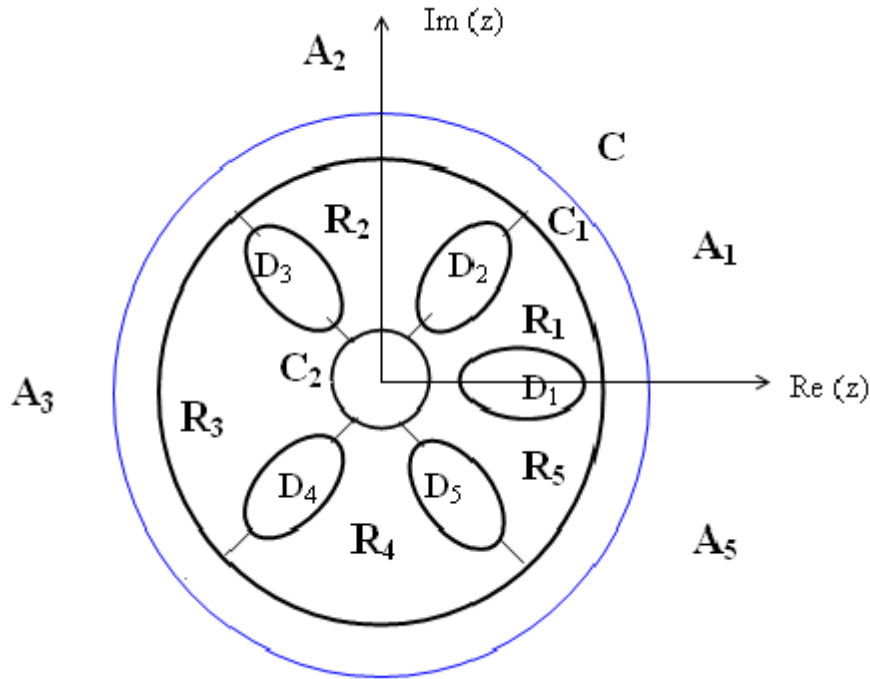


Figure 4.3.2 : La partition du cercle C avant bifurcation noeud-col.

Remarque 4.3.3 En vertu de la proposition (4.2.4), on déduit que dans le cas où $m = 1$, la bifurcation de doublement de période ne peut avoir lieu.

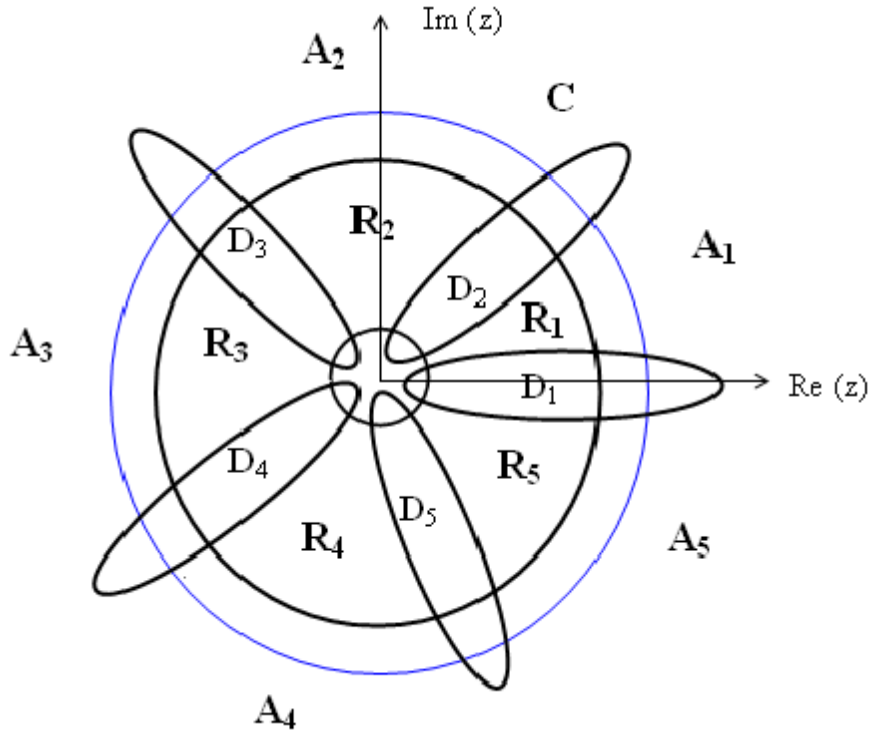


Figure 4.3.3 : La partition du cercle C après bifurcation noeud-col.

4.3.4 Topologie de l'ensemble de Julia

Puisque $m = 1$ alors z_1 est attractif, on pourra ainsi définir de la même façon la dynamique symbolique sur l'ensemble de Julia.

Théorème 4.3.1 .

1. Il existe une semi-conjugaison entre la fonction ψ_ε définie sur l'ensemble de Julia et l'application shift définie sur l'espace des suites Σ_{2n} .
2. Dans le cas où un point critique au moins tend vers l'infini, l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor.

Preuve. La démonstration qui a été faite au premier chapitre, peut être généralisée à la famille ψ_ε . ■

Conséquence

Si $m > 1$, on a déjà montré qu'il existe $\varepsilon \in (\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ pour lequel z_1 est attractif, donc on peut dire qu'il y a une dichotomie entre le cas où $m = 1$ et le cas $m > 1$.

4.4 Conclusion

On conclut que la dynamique de la famille $z \mapsto z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$ où $n \geq 2$, $m > 1$ ressemble énormément à celle de la famille $z \mapsto z^n + \frac{\varepsilon}{z}$, la seule différence est que pour la première famille, il existe un unique type de bifurcation; la bifurcation noeud-col, contrairement à la seconde famille où il y a un autre type de bifurcation (bifurcation de doublement de période) mis à part la bifurcation noeud-col.

Concernant l'ensemble de Julia, il dépend uniquement de la valeur de epsilon, ce dernier quand il dépasse une valeur ε_0 pour laquelle les points critiques tendent vers l'infini, il devient un ensemble de Cantor et sur lequel la famille est conjuguée à l'application shift définie sur l'espace des suites à un seul côté; dont le nombre de symboles est égal au nombre de points critiques (différents de zéro et de l'infini), cette conjugaison ne l'est pas lorsque le point fixe z_1 est attractif.

"La logique, en ce qui nous concerne nous les mathématiciens n'est rien de plus ni de moins que la grammaire du langage que nous utilisons". (Bourbaki).

"Une théorie peut-être vérifiée par l'expérience, mais aucun chemin ne mène de l'expérience à la création d'une théorie". (Einstein).

Les principaux pionniers des systèmes dynamiques holomorphes

Louis Pierre Joseph Fatou 1878 - 1929

En 1898, Pierre Fatou commençait ses études en mathématique à l'Ecole Normale Supérieure à Paris. Après ses épreuves il posait sa candidature à un poste à l'observatoire dans cette ville, car il le pensait inutile d'attendre un poste comme mathématicien. Il recevait l'emploi, mais il continuait à travailler à sa thèse de doctorat sur intégration et sur une théorie sur des fonctions complexes. Il finissait ses travaux en 1906, en 1907 il obtenait son titre de docteur. En 1915, l'Académie des Sciences à Paris publiait le thème pour le "Grand Prix" de 1918. La prime serait donnée pour une étude concernant les itérations. L'Académie pensait à une évolution du concept de Montel.

Fatou écrivait en 1917 un essai et développait une théorie fondamentale concernant itérations. On ne sait pas si Fatou voulait participer au Grand prix, mais on le suppose. Comme le thème était public, ça n'étonnait pas que d'autres mathématiciens de ces temps y travaillent.

Ainsi, un certain Gaston Julia traitait le même problème d'une manière similaire. Plus tard, on remarquait que ces deux mathématiciens en principe traitaient le même problème, mais au temps de la présentation se passaient des événements bien curieux, on n'arrive plus à voir clairement. Il semble que Fatou n'y participait pas, mais néanmoins après cela il recevait une récompense. Il semble que Fatou ne se souciait pas trop des fractales, mais il préparait un chemin pour les futurs travaux de Julia et de Mandelbrot. A son honneur, on appelle les figures de Julia provenant de l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot *"poussière de Fatou"*.

Gaston Maurice Julia 1893 - 1978

Gaston Maurice Julia était né le 3 février 1863 à Sidi Bel Abbés en Algérie. Déjà à l'école primaire, il se faisait remarquer par son intelligence exceptionnelle. Plus tard, il commençait ses études. Le 4 Août 1914, il était appelé sous les drapeaux et le soldat Julia devenait caporal, puis lieutenant, et ainsi il commandait son détachement le 25 Janvier 1915 vers un combat d'une extrême violence. Et c'était ainsi qu'une balle détruisait son visage et lui arrachait le nez. En retournant à sa caserne et comme la douleur l'empêchait

de parler, il écrivait sur un billet de ne pas le libérer. Alors il arrivait à l'hôpital militaire, où on essayait de le rapiécer tant bien que mal, il arrivait un temps de douleurs épouvantables. Et pour se distraire, il se plongeait dans un problème mathématique; C'était le comportement de la formule qui se cache derrière les fractales de Julia.

Après sa sortie de l'hôpital militaire -la guerre étant terminée- il publiait un livre de quelques 200 pages intitulé "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles". Grâce à cela, il gagnait le Grand Prix de l'Académie des Sciences, ce qui lui donnait une grande réputation aux instituts de mathématique.

Plus tard il devenait professeur à l'école polytechnique. En 1925, on donnait des séminaires à Berlin pour étudier ses travaux à fond. Mais comme on ne connaissait pas encore les ordinateurs pour y travailler, les travaux de Julia tombaient dans l'oubli jusqu'à l'arrivée d'un certain Mandelbrot.

Citons enfin pour terminer la dernière phrase de l'initiateur de la théorie du chaos *Henri Poincaré* :

« Le savant n'étudie pas la nature parce que c'est utile, il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue ». (Henri Poincaré, Science et méthode.1908).

Conclusion

C'était un bref aperçu sur la théorie des itérations des familles holomorphes dépendant d'un paramètre réel positif, on a pu généraliser dans le dernier chapitre les résultats des chapitre deux et trois, en décrivant à chaque fois la dynamique de la famille de fonctions rationnelles. Les ensembles de Julia pour les deux familles étudiées, ont été dessinés en utilisant un programme crée par le professeur américain Yakov Chapiro; Ce programme consiste à choisir un point initial et réitérer la famille de fonctions en ce point, le nombre maximum d'itération est égale à 50 (voir [6]). Il y a eu des travaux très récents (voir les références) dus au professeur Robert Devaney, qui continue à étudié le comportement de la famille $z \mapsto z^n + \frac{\varepsilon}{z^n}$ en démontrons beaucoup de propriétés intéressantes dans les cas où le paramètre ε est

◇ Réel négatif.

◇ Complexe.

Les perspectives

On se propose dans un travail ultérieur

1. Voir ce qui se passe pour la famille $z \mapsto z^n + \frac{\varepsilon}{z^m}$, avec: $n \neq m$, $n > 2$ et $m > 1$ dans les deux cas suivants

◇ Le paramètre ε est réel négatif.

◇ Le paramètre ε est complexe.

2. Déterminer explicitement les 2-cycles de la famille définie dans le second chapitre et essayer de donner une méthode ou un algorithme pour les retrouver dans le cas général.

Bibliographie

- [1] Alan.F.Beardon : Iteration of rational fonctions. Graduate Texts in Mathematics Vol 132. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] Adrien.Douady et John Hamal.Hubbard : On the dynamics of polynomial-like maps. An.scint.c.Norm.Sup.4 srie, t.18, 1985.
- [3] Hasselbllat.Boris et Katok.Anatole : Modern Theory of Dynamical systems. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol.54. Cambridge university press, Cambridge, 1995.
- [4] Yuri A.Kuzuetsov : Elements of applied Bifurcation Theory. 2 nd ed. Springer-Verlag.New York.1998.
- [5] John.Milnor : Dynamics in one complex Variable: Introduction Lectures 2 nd ed Vieweg Verlag , Braunschweig, 2000.
- [6] <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/PertPoly.html>.
- [7] Lennart Carleson, Theodore W Gamelin : Complex dynamics, Los Angeles, March, 1992.
- [8] Robert, L Devaney : An introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2 nd edition, June 1994.
- [9] Robert.L.Devaney, Kresimir, Y.Chapiro : singular perturbations of rational maps; October 2002.

- [10] Robert, L Devaney : A first course in chaotic dynamical systemes, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1992.
- [11] François Berteloot, Volker Mayer : Rudiments de Dynamique Holomorphe, cours spécialisés, collection SMF, 2001.
- [12] <http://www.mathcurve.com/fractals/cantor/cantor.shtml>.
- [13] http://users.skynet.be/bs_936509/povfr/concepts/cpt-fract.htm.
- [14] Robert L .Devaney, Matt Holzer, Daniel M. Look, Monica Moreno Rocha et David Uminsky : Singular Perturbations of z^n , February 2006.
- [15] Robert L .Devaney, Structure of the MC Mullen Domain in the Parameter Planes for Rational maps, March 24, 2005.
- [16] Jean-Yves Briend et Pascale Roesch : Une introduction aux systèmes dynamiques holomorphes. Le journal de maths des élèves, Volume 1. 1994, No 2.
- [17] http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor.
- [18] Robert, L Devaney : Cantor Sets of Circles of Sierpinski Curve Julia Sets, July 9, 2006.
- [19] Robert, L Devaney : Cantor Webs in the parameter and Dynamical Planes of Rational Maps, May 22, 2006.
- [20] Robert, L Devaney : The MCMULLEN Domain : Satellite Mandelbrot Sets and Sierpinski Holes, April 22, 2006.
- [21] N.Steinmetz, The Formula of Riemann-Hurwitz and Iteration of Rational Functions. Complex Variables 22, 203-206 (1993). ZBL 0805.30030.

Chapitre 5

Annexe

1. Ensemble triadique de Cantor

George Cantor (1845 – 1918) : mathématicien allemand.

L'ensemble de Cantor (ou ensemble triadique de Cantor ou encore poussière de Cantor) est un sous-ensemble remarquable de la droite réelle construit par Cantor en 1883. Il s'agit d'un ensemble fermé de $[0, 1]$, d'intérieur vide. Il sert d'exemple pour montrer qu'il existe des ensembles non dénombrables mais négligeables au sens de la mesure de Lebesgue. C'est aussi le premier exemple de fractale (bien que le terme ne soit apparu qu'un siècle plus tard), et il possède une dimension fractionnaire au sens de Hausdorff. Il admet enfin une interprétation en terme de développement des réels en base 3. Pour cette raison, il est souvent noté K_3 .

On le construit de manière itérative à partir du segment en enlevant le tiers central ; puis on réitère l'opération sur les deux segments restants, et ainsi de suite. On peut voir les premières itérations du procédé sur le schéma (5.0.1) .

Propriétés

L'ensemble de Cantor a de nombreuses propriétés particulières

1. L'ensemble de Cantor est de mesure nulle, c'est-à-dire négligeable au sens de la mesure de Lebesgue.

2. L'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.

3. L'auto similarité : Si on définit l'homothétie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{3}x$,



Figure 5.0.1 : L'ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR

alors l'image de l'ensemble de Cantor par cette homothétie est elle-même une partie de l'ensemble de Cantor $h(K_3) \subset K_3$. En fait on peut dire plus précisément

$$K_3 = h(K_3) \cup \left(h(K_3) + \frac{2}{3}\right)$$

Ainsi, la partie est similaire (et même homothétique) au tout. On dit que l'ensemble de Cantor est auto-similaire; c'est une des propriétés de base pour les fractales.

Propriétés topologiques

1. L'ensemble de Cantor est compact, et n'a que des points d'accumulation. On dit que c'est un ensemble parfait.
2. Il est d'intérieur vide.
3. L'ensemble de Cantor est également totalement discontinu. c'est-à-dire que chaque singleton est sa propre composante connexe, et homéomorphe à l'espace topologique $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \Sigma_2$.
4. l'ensemble de Cantor est « universel dans la catégorie des espaces métriques ». Autrement dit, tout espace métrique est l'image de l'ensemble de Cantor par une application continue.

Remarque 5.0.1 Une autre version de l'ensemble de Cantor est l'ensemble de Cantor "quatre coins". Il est construit sur le même principe général, mais basé sur un carré : on considère un carré que l'on découpe en 16 carrés de même taille, et on supprime tous les carrés n'étant pas dans un coin du carré de départ. L'ensemble est construit de façon itérative en répétant cette action sur les nouveaux carrés.

2. Rappel sur la dynamique symbolique

Définition 5.0.1 Soit donné l'ensemble suivant

$$\Sigma_N = \{S = (s_0 s_1 \dots) : 0 \leq s_k \leq N - 1\}$$

L'ensemble Σ_N est appelé espace des suites à N symboles, ses éléments sont des suites infinies constituées d'entiers $k \in \{0, \dots, N - 1\}$.

Propriétés

Si $S = (s_0 s_1 \dots)$ et $T = (t_0 t_1 \dots)$ sont deux éléments de Σ_N , alors on définit une application d sur Σ_N par

$$d(S, T) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}$$

Alors

1. L'application d est une métrique sur Σ_N .
2. Si $s_i = t_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, alors $d(S, T) \leq \frac{1}{N^k}$.
3. Si $d(S, T) < \frac{1}{N^k}$, alors $s_i = t_i$ pour tout $i \leq k$.

Preuve. Voir [8]. ■

Définition 5.0.2 L'application $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ définie par $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 \dots)$ est appelée l'application shift.

Proposition 5.0.1 L'application σ est continue.

Preuve. Voir [8]. ■