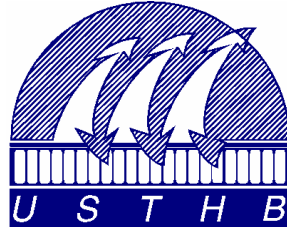


N° d'ordre : 27/2007-M/PH

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
"HOUARI BOUMEDIENE"
FACULTE DE PHYSIQUE**



**Thèse
Présentée pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
EN PHYSIQUE**

Spécialité : Energie Solaire

Par: M^r BENHADDAD Taieb

Sujet :

**Contribution à l'étude du changement de
phase Solide Liquide.
Cas d'une géométrie cylindrique**

Soutenue publiquement le 17 Juillet 2007, devant le jury composé de :

M^r S. SALEM	Professeur (USTHB)	Président
M^r EK. SI-AHMED	Professeur (USTHB)	Directeur de thèse
M^r A. BENZAOUI	Maître de conférence (USTHB)	Examineur
M^r D. SADAOUI	Maître de conférence (BEJAIA)	Examineur
M^{me} A. MATAOUI	Maître de conférence (USTHB)	Examineur

REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur **El-Khider SIAHMED** responsable du Laboratoire des Ecoulements Poly phasiques (USTHB), pour avoir dirigé ce travail et pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je lui exprime mes plus sincères remerciements.*

*Toute ma reconnaissance va à monsieur **A. SALEM**, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury, qu'il veuille trouver ici, l'expression de ma gratitude.*

*Je remercie vivement madame **M. MATAOUI** maître de conférences à l'USTHB, d'avoir accepté de participer au jury. Qu'elle trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.*

*J'ai vivement apprécié la considération que m'a témoignée Monsieur **D.SADAoui**, maître de conférences à l'université de BEJAIA, en acceptant de juger ce travail.*

*Mes remerciements vont également à monsieur **A. BENZAoui**, maître de conférences à l'USTHB, qui malgré ses multiples responsabilités m'a fait l'honneur de faire partie de ce jury.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur **N. SADOun** pour la documentation qu'il a mise à ma disposition et sa précieuse collaboration.*

Mes remerciements vont à tous mes collègues pour leurs encouragements et en particulier ceux de l'équipe poly phasique qui, en diverses circonstances, m'ont apporté leur aide dans le déroulement de ce travail, je suis heureux de leur témoigner ici toute ma reconnaissance et ma sympathie.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	2
<i>Chapitre I.....</i>	<i>4</i>
<i>Introduction et revue de la littérature.....</i>	<i>4</i>
I.1. Introduction	4
I.1.1. Accumulateur d'énergie	5
I.1.2. Refroidissement de l'électronique.....	5
I.1.3. Conclusion.....	5
I.2. Changement de phase solide-liquide.....	6
I.2.1. Généralités.....	6
I.3. Les diverses méthodes d'approche	10
I.3.1. Méthodes expérimentales.....	10
I.3.2. Méthode analytique	11
I.3.3. Méthodes numériques.....	12
I.3.3.1. Méthode explicite (suivi de l'interface).....	12
I.3.3.2. Méthode implicite.....	13
I.4. Etudes comparatives et orientations possibles.....	18
I.4.1. Etude bibliographique	18
I.4.2. Formulation et objectif.....	20
<i>Chapitre II.....</i>	<i>23</i>
<i>Formulation du Problème</i>	<i>23</i>
II.1. Introduction	23
II.2. Modèle Physique.....	23
II.3. Modèles mathématiques.....	25
II.3.1. Introduction.....	25
II.3.2. Modèle explicite.....	25
II.3.3. Modèle implicite	29
II.3.3.1. Définition de l'enthalpie.....	30
II.3.3.2. Modèle à une phase	31
II.3.3.3. Conditions initiales et aux limites	31
II.4. Modèle implicite réduit	32
II.4.1. Variables réduites.....	32
II.4.2. Equations adimensionnelles.....	32
II.5. Conclusion.....	33
<i>Chapitre III.....</i>	<i>35</i>
<i>Approche numérique</i>	<i>35</i>
III.1. Introduction	35
III.2. Formulation aux volumes finis	35
III.3. Maillage	36
III.3.1. Milieu fusible.....	37
III.4. Intégration des équations.....	38
III.4.1. Introduction.....	38
III.4.2. Conductivité inter-faciale	39
III.4.2.1. Direction radiale	39

III.4.2.2.Direction verticale.....	41
III.4.3.Integration de l'Equation de l'Energie	43
III.5.Methode de résolution	54
III.5.1.Algorithme de résolution	56
III.5.2.Critère de convergence	57
<i>Chapitre IV.</i>	59
<i>Résultats et Discussion</i>	59
IV.1.Introduction	59
IV.2.Validite du modèle numérique.....	60
IV.2.1. Solidification cylindrique autour d'un puits de chaleur	60
IV.2.1.1.Solution exacte	61
IV.2.1.2.Solution numérique.....	62
IV.2.1.3.Choix du schéma numérique	65
IV.2.1.4.Deroulement des calculs.....	66
IV.2.1.5.Resultats	66
IV.2.2.Conclusion.....	68
IV.3.L'interface solide-liquide.....	69
IV.4.L'approximation homographique.....	70
IV.5. Application à la solidification	73
IV.6.Changement de phase périodique.	75
IV.6.1 .Considérations des effets de bords :	75
IV.6.1.1 Influence sur l'évolution de l'interface.....	75
IV.6.1.2 Influence sur la forme de l'interface.....	76
IV.6.2.Influence du nombre de Stefan.....	78
IV.6.3.Influence du nombre de Biot	79
IV.7.Application au stockage d'énergie.....	80
IV.7.1. Les formes de stockage de la chaleur	80
IV.7.2.Propriétés et avantages	81
IV.7.3.Choix des matériaux.....	82
IV.7.4. Exemple d'application de stockage	83
IV.7.5 Topographie des températures.....	85
<i>Conclusion générale</i>	90
<i>Références Bibliographiques</i>	93

Nomenclature

a	Conductance ($m^{\circ}KW$)
A	Coefficient de l'équation algébrique
B	Coefficient de l'équation algébrique
Bi	Nombre de Biot $\left(\frac{hZ}{k}\right)$
c	Capacité calorifique ($JKg^{-1}K^{-1}$)
C	Capacité calorifique équivalente ($JKg^{-1}K^{-1}$)
C	Coefficient de l'équation algébrique
\tilde{C}	Capacité calorifique équivalente adimensionnelle
D	Diamètre du modèle (m)
D	Coefficient de l'équation algébrique
E	Coefficient de l'équation algébrique
E_i	Fonction d'erreur
F	Facteur d'aspect du modèle = Z/D
g	Fraction liquide
h	Coefficient d'échange par convection ($Wm^{-2}K^{-1}$)
H	Enthalpie (Jm^{-3})
\tilde{H}	Enthalpie adimensionnelle
k	Coefficient de transfert thermique ($Wm^{-1}K^{-1}$)
L	Chaleur latente de changement de phase (Jm^{-3})
$\cdot Q$	Quantité de chaleur (Jm^{-3})
\tilde{Q}	Quantité de chaleur adimensionnelle
r	Coordonnée radiale (m)
\tilde{r}	Coordonnées radiales adimensionnelles
Ra	Nombre de Rayleigh
Ste	Nombre de Stefan $\left(\frac{c(T_m - T_o)}{L}\right)$
t	Temps (s)
T	Température ($^{\circ}K$)
z	Coordonnée azimutale(m)
Z	Hauteur du modèle (m)
\tilde{z}	Coordonnée azimutale adimensionnelle

Symbole grec

α	Diffusivité thermique.
δ	Position de l'interface
ε	Paramètre des fonctions approximation
θ	Température adimensionnelle
ρ	Masse volumique.
τ	Temps adimensionnel

λ	Constante de solidification
ϕ	Facteur de surchauffe
Φ	Variable dépendante
η	Facteur de similitude

Indice inférieur

h	Homographique
l	Phase liquide , linéaire
m	Changement de phase
r, 0	Référence
s	Phase solide

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

L'étude des transferts thermiques avec changement de phase suscite un vif intérêt dans divers domaines scientifiques et technologiques à savoir la métallurgie, l'agroalimentaire, la production et l'accumulation d'énergie et bien d'autres... Néanmoins ce type d'étude, à frontières mobiles, se trouve confronté à divers problèmes issus essentiellement de la non linéarité de la condition de saut à l'interface. Les études concernant les méthodes développées autour de la formulation en une seule région posent de sérieuses difficultés de calculs qui viennent de la formulation de l'évolution de la chaleur latente à l'interface.

Le présent travail propose un modèle numérique basé sur la méthode enthalpique associée à une approximation homographique définissant la fonction enthalpie-température (dérivable et continue). Cette approximation à un paramètre du taux de la fraction liquide, a été adoptée. La validité de cette dernière a déjà été prouvée [1] dans le cas de la solidification d'une plaque plane. L'effet de la convection naturelle n'est pas pris en compte en choisissant un faible facteur de forme. Par contre les effets de bord sont inclus à travers un échange convectif avec le milieu ambiant. L'interface n'est pas régulière dans ce cas, sa forme évolue dans le temps et l'espace. L'objectif premier étant de montrer que l'utilisation de la méthode enthalpique, adaptée aux cas de changement de phase étalé, est applicable aux changements de phase isotherme.

Le travail se présente sous forme de quatre chapitres :

Le mémoire débute par une étude bibliographique qui met en évidence la diversité et la complexité du problème à interface mobile.

La formulation du problème, ainsi qu'une revue des approches susceptibles d'être appliquées font l'objet du deuxième chapitre. Aussi, il est à souligner que la méthode implicite a été retenue, la méthode explicite nécessitant des moyens de calcul importants.

Le troisième chapitre retrace la méthode des volumes finis et apporte toutes les précisions nécessaires quant à la résolution de notre système d'équations. Ainsi, la méthode numérique est adaptée aux problèmes de changement de phase bidimensionnelle avec conditions aux limites variables dans le temps.

Au début du quatrième chapitre, il a été procédé à la validation de l'approche adoptée. Celle-ci se fait par comparaison des résultats obtenus avec la solution analytique, et ce, dans le cas de la solidification autour d'un puits de chaleur linéique. On notera que le problème de stockage et destockage d'énergie sous forme de chaleur latente de changement de phase détermine le type de conditions aux limites.

Une conclusion générale regroupe les différents résultats obtenus et les perspectives.

Chapitre I.

Introduction et Revue de la Littérature

Chapitre I.

Introduction et revue de la littérature

I.1. Introduction

L'étude de la cinétique des transferts thermiques lors d'un changement de phase solide-liquide suscite beaucoup d'intérêt dans divers domaines scientifiques et secteurs technologiques. Les principaux domaines concernés par le changement de phase sont: la métallurgie, l'agroalimentaire, la géophysique ...

En métallurgie, le changement de phase solide-liquide trouve un domaine d'intérêt particulier dans le moulage en fonderie ainsi que dans la fabrication des pièces fiables. Les durées de fusion et de solidification, la forme et le comportement du front de solidification et la présence des impuretés dans le matériau, sont, entre autres, des aspects essentiels déterminants les qualités du produit.

Dans le domaine de l'agroalimentaire la conservation des aliments passe par la maîtrise du phénomène de solidification. En effet, la procédure de congélation et de décongélation détermine la qualité du produit conservé.

En géophysique, le changement de phase est un phénomène courant le gel des sols et des lacs, la fonte ou la formation des glaciers et les éruptions volcaniques.

Chacun des divers domaines d'application doit être traité en fonction de ses particularités propres.

De nos jours l'intérêt des chercheurs est motivé par des applications technologiques importantes. A ce titre, on pourrait citer celles qui concernent les énergies renouvelables à travers le stockage d'énergie sous forme de chaleur latente; la fabrication de matériaux, dont, les caractéristiques physico-chimiques répondent à des sollicitations particulières et enfin l'élaboration de systèmes de refroidissement de composants électroniques.

La présente étude qui concerne un mouvement bidimensionnel du front du changement de phase est motivée essentiellement par les applications sus indiquées et en particulier par le stockage d'énergie et les systèmes de refroidissements.

I.1.1. Accumulateur d'énergie

L'enchérissement des produits énergétiques traditionnels, en particulier le pétrole, et les aléas de l'approvisionnement, les dangers potentiels que représente la filière nucléaire, la volonté à l'échelle mondiale de lutte contre toute forme de pollution, pousse à une économie d'énergie et à la recherche de forme d'énergie dites "énergies propres" ou « renouvelables ». L'inconvénient principal des systèmes de production de ces énergies est leur intermittence qui fait que la production ne peut pas être modulée efficacement en fonction de la demande. La seule façon fiable de palier à cet inconvénient est de faire appel au stockage de l'excédent d'énergie pendant les périodes favorables. Il est à noter que même dans les systèmes traditionnels la production d'énergie se fait par paliers en fonction de la demande. Lorsque cette demande se situe entre deux paliers, l'excédent d'énergie est dissipé en pure perte au lieu d'être emmagasiné en vue d'un usage ultérieur. Le stockage sous forme de chaleur latente de changement de phase est la solution indiquée ; en effet, le stockage d'énergie sous cette forme constitue le meilleur procédé en raison de la forte densité de stockage que permet un faible volume dans une plage réduite de température autour du point de fusion.

I.1.2. Refroidissement de l'électronique

La miniaturisation croissante des circuits électroniques demande une dissipation de plus en plus efficace de la chaleur produite durant leur fonctionnement. C'est l'un des principaux obstacles à surmonter afin d'augmenter la puissance des circuits électroniques. Un matériau fusible peut absorber une grande quantité de chaleur et serait une alternative intéressante pour dissiper l'énergie générée par les composants électroniques. En effet, la dissipation de la chaleur dégagée par ces derniers serait beaucoup plus efficace que celle permise par la convection naturelle ou forcée. Pendant la période d'inactivité le matériau fusible peut céder sa chaleur en se solidifiant. Ce système est particulièrement adapté à l'utilisation cyclique d'équipements électroniques.

I.1.3. Conclusion

Dans ces différentes applications on enregistre une évolution cyclique du changement de phase. Il serait donc judicieux de s'orienter vers l'étude du mouvement de front de solidification/fusion dans le cadre d'une variation temporelle de la température ambiante. A

ce titre, plusieurs travaux numériques sont disponibles dans la littérature [2, 3] modélisant le mouvement de ce front. Ces modèles sont développés en grande partie en se basant sur les méthodes enthalpiques et ne sont efficaces que dans le cadre d'un changement de phase étalé. Cependant, dans le cas de changement de phase isotherme, on notera que ces modèles présentent des instabilités numériques dues au saut d'enthalpie au niveau de l'interface. Le présent travail développe un modèle numérique basé aussi sur la méthode enthalpique à laquelle est associée une approximation homographique définissant la fonction enthalpie-température (dérivable et continue).

I.2. Changement de phase solide-liquide

I.2.1. Généralités

Les problèmes où apparaît un changement de phase solide-liquide sont souvent appelés problèmes de Stefan ou problèmes à frontières mobiles. Les régions solide/liquide sont limitées par une frontière, dont la position et la forme sont inconnues a priori. Sa localisation constitue une partie intégrante de la solution. Ces problèmes présentent aussi la particularité, au plan fondamental, d'associer différents phénomènes couplés tels que les transferts de masse, de chaleur, et de quantité de mouvement.

Depuis les travaux de **Stefan** [4] (1835-1893) de nombreuses études analytiques, expérimentales et numériques ont vu le jour.

Bien avant les travaux de Stefan, **J. Black** [5] (1758-1762) effectua une série d'expériences sur les transformations eau-glace. Il conclut que les phénomènes de transferts thermiques ne pouvaient être expliqués si l'on ne tient compte que de la chaleur sensible. Ainsi, il introduit le terme de chaleur latente de changement de phase. De leur côté, **G.Lame** et **Clapeyron** [6] introduisent le terme de chaleur latente dans l'équation de diffusion. Ceci leur permet d'affirmer que la position du front de solidification évolue en racine carrée du temps ($\delta = \lambda \sqrt{t}$), sans toutefois expliciter la relation donnant la constante de proportionnalité (λ). Cette dernière fut établie par **F. Neumann** [7] (1912).

La modélisation des phénomènes de transfert de chaleur avec changement de phase fait apparaître le groupement adimensionnel $c \Delta T / L$ appelé nombre de Stefan. Ce dernier caractérise l'importance relative de la chaleur sensible et de la chaleur latente ; constituant ainsi un paramètre essentiel de ce phénomène.

I.2.2. Rôle de la convection naturelle

Dans la phase liquide, le gradient thermique crée des variations de densité dans le milieu. Dans un champ de gravité, ceci induit des forces de volume, et en général l'apparition d'un écoulement du fluide en couche limite le long des parois solides. L'écoulement est dit ascendant ou descendant selon qu'on ait un gradient respectivement négatif ou positif.

Le mécanisme moteur dans ce problème est généré par la variation de la densité du matériau en phase liquide en fonction de la température.

En toute rigueur, l'étude devait donc se faire avec un modèle à densité variable. Cependant, la convection naturelle dans les liquides est en général abordée avec un modèle simplifié. Ce modèle est fourni par l'approximation de **Boussinesq [8]** qui consiste à ne considérer l'influence des variations de la densité qu'à travers les forces de volume agissant sur le système.

En d'autres termes, la densité de la phase liquide est considérée constante, égale à ρ_0 , sauf dans les termes traduisant l'action de la force de gravité. Son expression, en fonction de la température, est alors donnée par la relation :

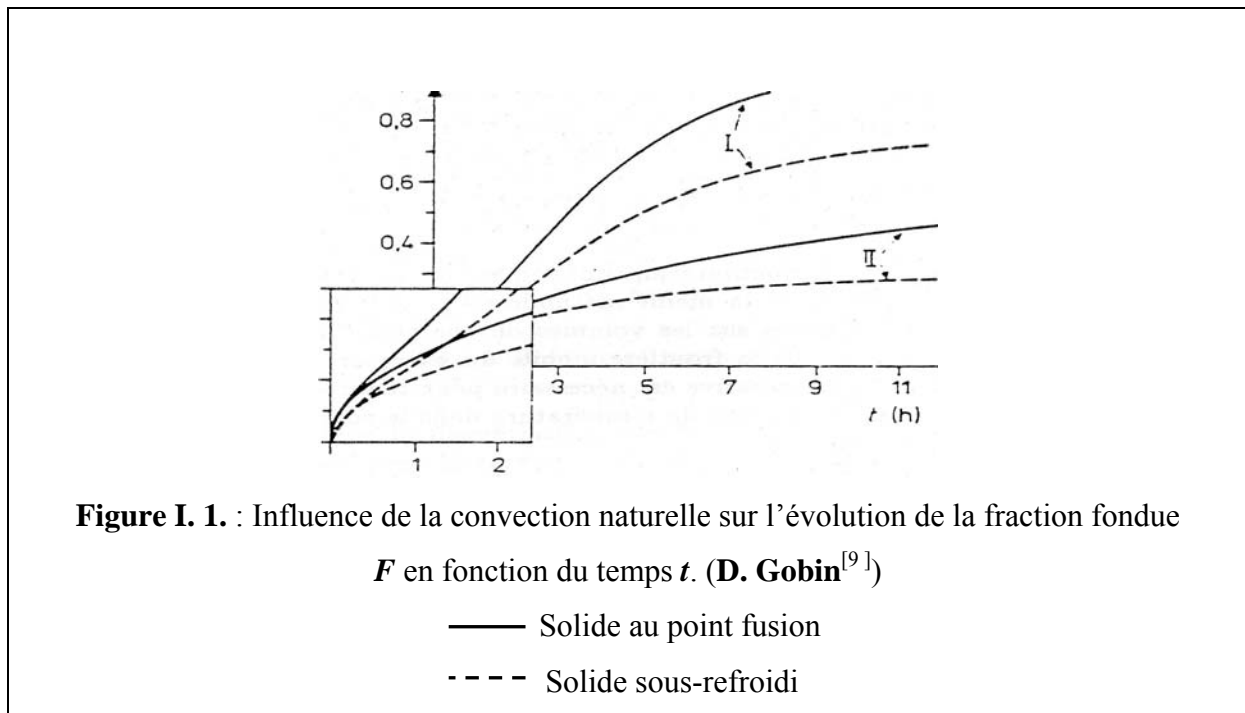
$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$$

où β représente le coefficient de dilatation thermique du fluide, et T_0 la température de référence dont le choix dépend du matériau. Dans le cadre du problème qui nous intéresse la température de référence est naturellement la température de fusion du matériau concerné. Bien que le cycle fusion –solidification apparaisse comme réversible, l'influence de la convection naturelle dans la phase liquide, du point de vue de la cinétique, est différente suivant qu'il s'agisse de fusion ou de solidification.

Dans le cas de la fusion, la phase liquide qui se forme entre la surface active et la phase initiale encore solide est le siège de transferts de chaleur par conduction et dans de nombreux cas par convection naturelle. Ce qui se traduit par une augmentation sensible du transfert et donc une cinétique de fusion plus rapide. L'influence de la convection naturelle est donc importante pour la cinétique des transferts de l'énergie.

Dans le cas de la solidification, le liquide se refroidit progressivement jusqu'à la température de solidification, les phénomènes convectifs qui se produisent pendant un temps relativement court au début de la solidification jouent un rôle relativement faible devant les transferts par

conduction. Le modèle numérique développé par **D. Gobin [I.1]** montre que la convection naturelle lors de la fusion a pour effet de, pratiquement, doubler le volume fondu (Figure I.1).



L'influence différenciée de la convection naturelle sur la fusion et la solidification a été mise en évidence par **D. Delaunay [10]** à travers des mesures expérimentales (Figures I.2 et I.3)

La cellule de mesure utilisée par **D. Delaunay [10]** se compose d'un réservoir parallélépipédique disposé verticalement rempli de matériau fusible. La cellule de mesure présente un plan de symétrie à travers une même condition de température constante imposée sur chacune des faces verticales opposées.

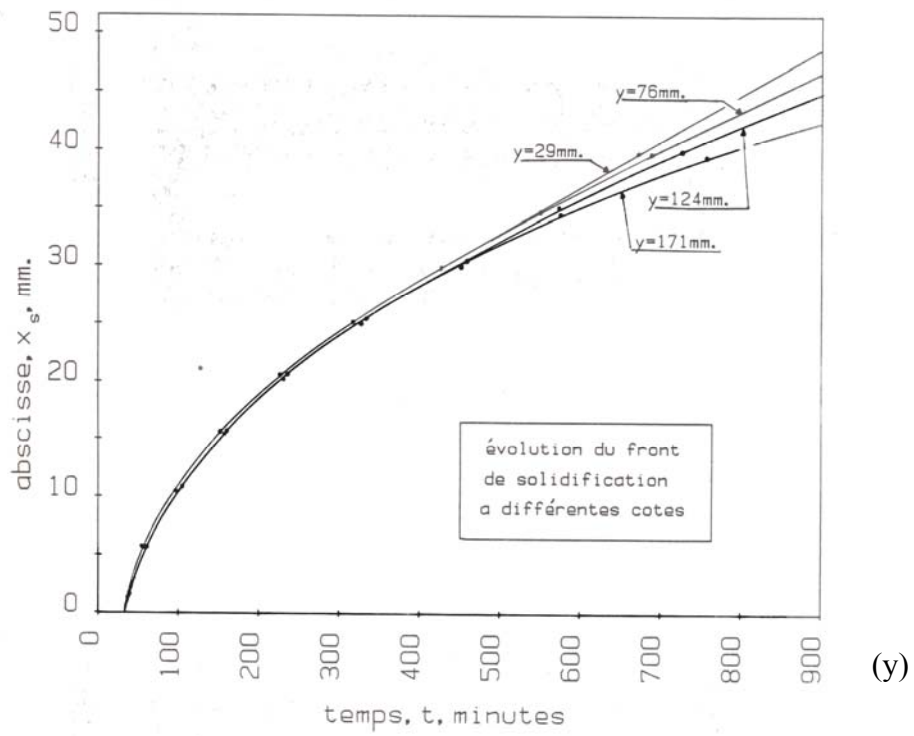


Figure I.2 Evolution du front de solidification à différentes cotes(y) (D. Delaunay)

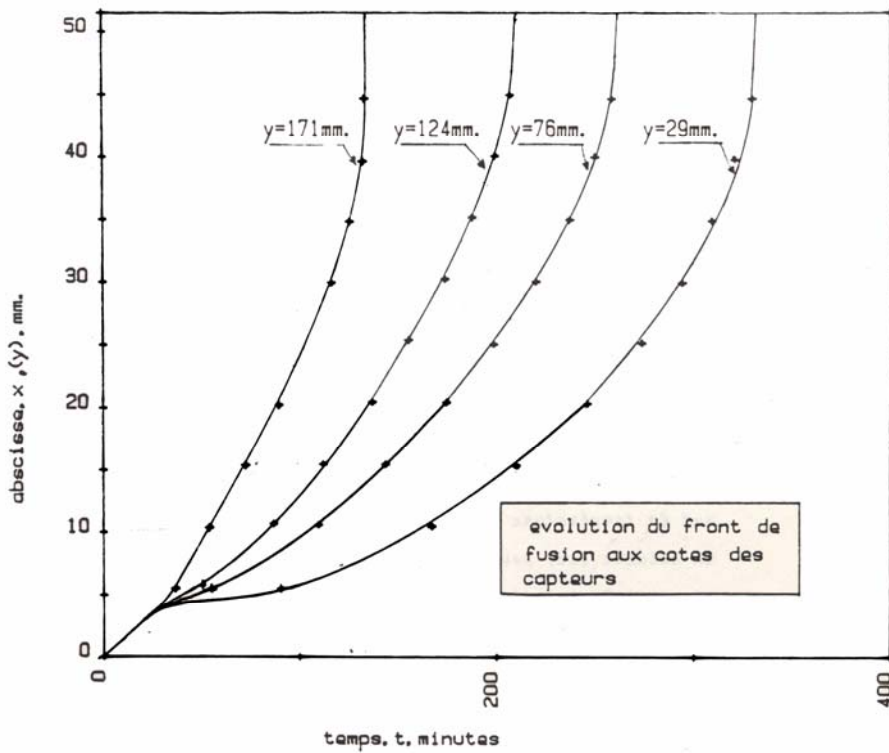


Figure I.3 Evolution du front de fusion à différentes cotes(y) (D. Delaunay)

Les évolutions des fronts en fonction des cotes, dans les cas de solidification et fusion, diffèrent très sensiblement. En conclusion, l'influence de la convection naturelle dans le phénomène de changement de phase est différente selon qu'il s'agisse de fusion ou de solidification. Dans le cas de changement de phase périodique, le couplage transfert de chaleur–convection naturelle est intimement lié à l'écart de température. Il existe diverses manières d'aborder un problème de transfert de chaleur avec changement de phase.

I.3. Les diverses méthodes d'approche

Les phénomènes de changement de phase ont fait l'objet de travaux expérimentaux, analytiques et numériques. Ces diverses méthodes sont présentées succinctement ci-après.

I.3.1. Méthodes expérimentales

Trois techniques expérimentales sont à retenir pour suivre l'interface solide –liquide:

- détection par contact tels les thermocouples,
- détection à distance par l'utilisation des sondes ultrasonores
- techniques optiques

Il est à noter que l'enregistrement photographique ne peut s'appliquer qu'à des enceintes transparentes et dans le cas d'un matériau transparent en phase liquide et opaque en phase solide telles que l'eau et la paraffine. Cette technique, bien que non intrusive, se trouve réduite dans son domaine d'application par le choix du matériau fusible utilisé. Elle peut, par contre, être utilisée comme procédure témoin pour d'autres méthodes de mesure.

Les sondes à ultrason composées d'un bi- palpeur émetteur-récepteur nécessitent la connaissance de la vitesse de propagation du son dans le matériau considéré afin de localiser le front de solidification. Cette technique précise, non intrusive, à faible temps de réponse présente malheureusement une zone dite "morte" où l'écho de retour provoque des fluctuations rendant ainsi les mesures imprécises. De plus, son coût financier important constitue un frein supplémentaire à son utilisation.

I.3.2.Methode analytique

Les problèmes de transfert de chaleur avec changement de phase se prêtant à une résolution analytique exacte sont extrêmement rares et constituent souvent une idéalisation du phénomène réel.

Les transferts de chaleur dans les phases solide et liquide sont régis par l'équation de diffusion instationnaire de Fourier, écrite dans les deux phases :

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \text{div} \left(k_i \overline{\text{grad} T_i} \right) \quad i = \ell, s \quad (\text{I.1})$$

où t , ρ , c et k sont respectivement le temps, la masse volumique, la capacité calorifique et la conductivité thermique. L'indice i représente la phase liquide (ℓ) et la phase solide (s) respectivement.

Ces équations sont couplées au niveau de l'interface par la condition de continuité de la température d'une part et par le bilan thermique (condition de saut) d'autre part. La première condition suppose un contact parfait des deux phases et se traduit par la relation :

$$T_s(M, t) = T_\ell(M, t) = T_m \quad (\text{I.2})$$

Le bilan thermique établit une relation entre les flux de chaleur traversant l'interface et celui généré par le changement de phase sous forme de chaleur latente et s'écrit :

$$k_s \overline{\text{grad} T_s}(M, t) - k_\ell \overline{\text{grad} T_\ell}(M, t) = \rho_\ell L \frac{d\overline{OM}}{dt} \quad (\text{I.3})$$

Dans le problème de Stefan, un matériau pur, de température de solidification T_m , est considéré dans un milieu semi-fini initialement liquide et isotherme à une température $T_0 \geq T_m$ (figure). A l'instant initial, la paroi est portée à la température $T_p < T_m$.

La formulation adimensionnelle des équations (I.1-I.3) par le choix de grandeurs de références conduit dans le cas de la solidification à :

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \eta^2} \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{\partial \theta_\ell}{\partial \tau} = \alpha_r \frac{\partial^2 \theta_\ell}{\partial \eta^2} \quad (\text{I.5})$$

$$\left[\frac{\partial \theta_s}{\partial \eta} \right]_{\delta^+} - k_r \phi \left[\frac{\partial \theta_l}{\partial \eta} \right]_{\delta^-} = \frac{\rho_r}{Ste} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \quad (I.6)$$

α_r , k_r et ρ_r sont la diffusivité, la conductivité thermique et la densité relative respectivement.

Dans son analyse (unidimensionnel), **Neumann [7]** a montré que l'équation de Stefan (I.3) n'est satisfaite, à tout instant, que si la position δ , de l'interface, évolue en racine carrée du temps à savoir :

$$\delta(t) = 2\lambda \sqrt{\alpha_s t}$$

où λ représente la constante de solidification.

Les problèmes étudiés, bien que relativement éloignés des applications pratiques, révèlent de façon explicite l'influence de paramètres tels le nombre de Stefan (**Ste**) et le facteur de surchauffe (ϕ) sur l'évolution de l'interface.

I.3.3 Méthodes numériques

Pour des géométries complexes ou des processus plus élaborés, les méthodes numériques deviennent incontournables. Ces dernières sont classées en méthodes explicites dans le cas de la mise en évidence de la position de l'interface ou en méthodes implicites si la localisation de la frontière mobile n'est plus une priorité.

1.3.3.1. Méthode explicite (suivi de l'interface)

Dans la méthode explicite, qui est une méthode proche du phénomène physique, chacune des phases est décrite à travers un système d'équations indépendant. [I.1-2]. Les deux systèmes sont ensuite couplés à travers une condition de saut et une relation de continuité de la température [I.3-4]. Dans les cas simples, l'interface solide-liquide a une forme irrégulière qui évolue dans le temps. Les phases solide et liquide peuvent occuper des domaines irréguliers, avec une condition de Dirichlet à l'interface liquide solide. Le suivi de l'interface à chaque instant nécessite l'utilisation, pour chaque phase, de transformations algébriques des coordonnées [11] (**P.G.Kroeger** et **S.Ostrach**). Ceci rend la méthode à deux

phases très complexe [12] (E.M. **Sparrow** et coll.). Lorsque l'une des phases n'existe plus, les équations deviennent singulières. Dans ces cas, des conditions supplémentaires doivent être introduites dans les phases initiale et finale du processus.

Dès lors que le problème est unidimensionnel, il existe des techniques numériques permettant le calcul de la position de l'interface [13] (**Crank**). Dans les autres cas, le calcul de la position de l'interface devient très complexe et les méthodes de déformation de l'interface ou d'immobilisation de celle-ci nécessitent l'utilisation de ressources informatiques importantes.

1.3.3.2. Méthode implicite

Pour contourner le coût important engendré par la méthode explicite, de nombreux auteurs ont développé des techniques qui évitent la localisation de l'interface. Cette procédure, désignée également par méthodes enthalpiques ou à une phase, privilégie la détermination du champ thermique au front de changement de phase. Les traitements numériques développés rendent implicite la non linéarité du problème en remplaçant la condition non linéaire à la frontière mobile (équation de Stefan) par un terme source de chaleur latente. Le modèle mathématique est donné par une seule équation (I.7), valable dans tout le domaine et exprimée en termes de température ou d'enthalpie ou des deux simultanément.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}T}) \quad (\text{I.7})$$

Celle-ci est résolue sans connaître au préalable la position de l'interface qui est déduite à partir des distributions de température ou d'enthalpie par la localisation de l'isotherme ou de l'enthalpie de changement de phase.

Trois formulations existent dans la littérature: la formulation classique, la méthode de la capacité calorifique apparente ou la technique du terme source.

a-. Méthode enthalpique Classique

La formulation enthalpique classique consiste à exprimer l'équation de diffusion de la chaleur en termes de variables mixtes enthalpie-temperature volume et température :

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{I.8})$$

où $H = (h - cT_m) / c(T_{ref} - T_m)$ est l'enthalpie volumique adimensionnelle. Son

expression est déduite de la définition de l'enthalpie

a-1. Définition en escalier

Le saut d'enthalpie, à l'interface, est explicité par une formulation de l'enthalpie volumique adimensionnelle sous la forme suivante :

$$H = H_{ref} + \int_1^\theta d\theta + \frac{\delta(\theta)}{Ste} \quad (I.9)$$

En introduisant la fonction de Dirac $\delta(\theta)$, le terme $\frac{\delta(\theta)}{Ste}$ exprime l'enthalpie de changement de phase volumique adimensionnelle ; H et θ s'expriment alors comme :

$$H = \begin{cases} \theta; & \theta > 0 \\ \theta - \frac{1}{Ste}; & \theta \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{cases} H; & H > 0 \\ 0; & 0 \geq H \geq \frac{1}{Ste} \\ H + \frac{1}{Ste}; & H < -\frac{1}{Ste} \end{cases} \quad (I.10)$$

a-2. Approximation linéaire

Dans l'approximation linéaire, le changement de phase est étalé sur une plage de températures ΔT [$T_m - (\Delta T/2), T_m + (\Delta T/2)$] sur laquelle l'enthalpie est supposée évoluer linéairement. L'enthalpie ainsi que la température adimensionnelles dans l'ensemble du modèle s'expriment:

$$H = \begin{cases} \theta; & \theta > \varepsilon_l/2 \\ (1 + \frac{1}{\varepsilon_l Ste})\theta - \frac{1}{2Ste}; & -\varepsilon_l/2 \leq \theta \leq \varepsilon_l/2 \\ \theta - \frac{1}{Ste}; & \theta < -\varepsilon_l/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{cases} H; & H > \varepsilon_l/2 \\ (H + \frac{1}{2Ste})(1 + \frac{1}{\varepsilon_l Ste})^{-1}; & -\varepsilon_l/2 \leq H \leq \varepsilon_l/2 \\ H + \frac{1}{Ste}; & H < -\varepsilon_l/2 \end{cases} \quad (I.11)$$

$$\text{Avec} \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta T}{T_m - T_{ref}}$$

Cette approximation linéaire dépend de l'intervalle de température. On notera que son caractère non dérivable aux frontières est à l'origine d'instabilités numériques. **Yao** et col[14] ont montré que dans le cas d'une solidification isotherme (franche), la précision des résultats

dépend fortement du paramètre ε et que celle-ci reste satisfaisante pour des valeurs de ε comprises entre 10^{-2} et 10^{-1} .

a-3. Approximation homographique

Les discontinuités, apparaissant sur le domaine de définition des modèles précédents, sont sources de fluctuations des solutions numériques. Le choix d'une fonction, approximation, continue et dérivable dans l'ensemble du domaine de calcul peut palier à cet inconvénient. L'approximation homographique, à un paramètre ε_h , répond aux critères de continuité et dérivabilité en définissant une évolution de l'enthalpie volumique adimensionnelle sous forme :

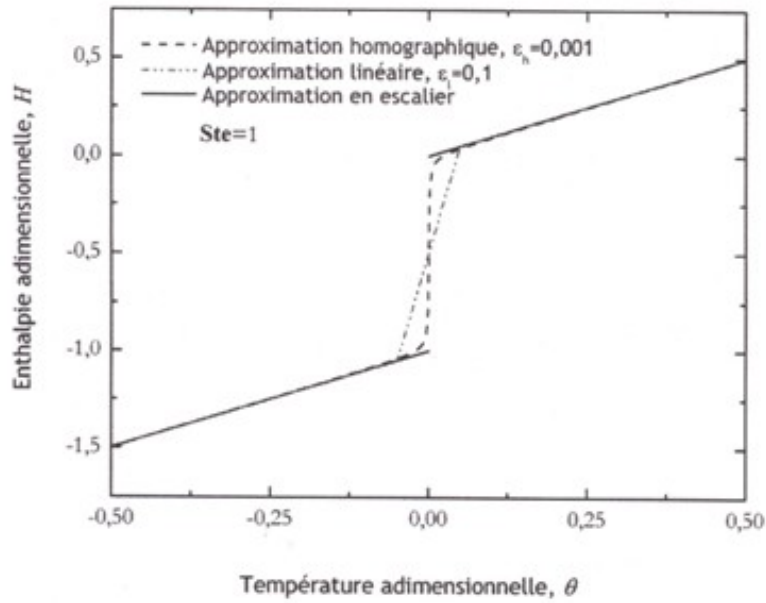
$$H = \theta + \frac{1}{2Ste} \left(1 + \frac{\theta}{\varepsilon_h + |\theta|} \right) \quad (\text{I.12})$$

Avec :

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta T}{T_m - T_{ref}}$$

Ainsi que la température en fonction de l'enthalpie :

$$\theta = \left(H + \frac{1}{2Ste} \right) / \left(1 + \frac{1}{2Ste} \frac{1}{\varepsilon_h + |\theta|} \right) \quad (\text{I.13})$$



b- Méthode de la capacité équivalente

La formulation enthalpique classique consiste à exprimer l'équation de la chaleur en termes de variables mixtes enthalpie-temperature, par :

$$C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{I.14})$$

$C(\theta)$ est la capacité calorifique équivalente adimensionnelle déduite de la définition de l'enthalpie.

b-1. Définition en escalier

$$C = \begin{cases} 1; & \theta > 0 \\ 1 - \frac{1}{2Ste}; & \theta \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

b-2. Définition linéaire

$$C = \begin{cases} 1; & \theta > \frac{\varepsilon}{2} \\ 1 - \frac{1}{2Ste}; & -\frac{\varepsilon}{2} \leq \theta \leq +\frac{\varepsilon}{2} \\ 1 & \theta < -\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

b-3. Définition homographique

La capacité calorifique s'exprime de façon unique dans tout le domaine sous la forme :

$$C = \left(1 + \frac{1}{2Ste} \frac{1}{\varepsilon_h + |\theta|}\right) \quad (I.15)$$

Cette formulation est, sur le plan numérique, plus simple à mettre en œuvre

c. Méthode du terme source

Un terme source peut également être introduit dans l'équation de diffusion pour prendre en considération le saut d'enthalpie à l'interface. Pour ce faire l'évolution de l'enthalpie est exprimée à travers une fonction $g(T)$ qui prend en considération l'évolution de la fraction liquide (solide) à l'interface. L'équation de transfert se présente alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{Ste} \frac{\partial g}{\partial \tau} \quad (I.16)$$

La fonction $g(T)$ peut prendre la forme :

- en escalier	$g = \begin{cases} 0; & \theta < 0 \\ 1; & \theta \geq 0 \end{cases}$
- linéaire	$g = \begin{cases} 0; & \theta < -\frac{\varepsilon_h}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\theta}{\varepsilon_h}; & -\frac{\varepsilon_h}{2} \leq \theta \leq \frac{\varepsilon_h}{2} \\ 1; & \theta > \frac{\varepsilon_h}{2} \end{cases}$
Ou, homographique	$g = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\varepsilon_h + \theta }\right)$

I.4. Etudes comparatives et orientations possibles

I.4.1 Etude bibliographique

Stefan est le premier qui, en 1891, a cherché à modéliser la fusion de la calotte glacière. Il publia une série d'articles sur le problème de solidification. Ses études ont porté sur le problème généralisé de **Neumann [7]**, étudié par **Lamé et Clapeyron [6]**, pour étendre par la suite sa méthode au problème de contact de deux milieux semi-infinis contenant deux phases d'un même matériau, l'un liquide à une température plus importante que celle de fusion et l'autre solide à une température plus faible que cette dernière. D'autres chercheurs se sont intéressés au dessalement de l'eau, de même qu'à la description de l'évolution du "permafrost" dans le grand nord. Ainsi tous les problèmes de transfert où apparaît une surface mobile sont connus sous le nom de "problèmes de Stefan".

La modélisation des phénomènes thermiques dans lesquelles interviennent les transitions de phases solide- liquide est un sujet de grande actualité.

Stefan est, le premier, à poser le problème mathématique, il y a de cela plus d'un siècle (1891) ; **Neumann [7]** a proposé une solution analytique dans le cas unidimensionnel.

En 1947, **London et Seban [15]** ont analysé le processus de formation de la glace dans le cas de différentes géométries (cylindre, sphère, et plaque plane) en considérant le transfert de chaleur par conduction unidimensionnelle.

K.A Rathjen [16] a étendu cette solution pour étudier certains cas bidimensionnels. De nombreux auteurs généralisent encore ces solutions analytiques à des cas plus complexes (dépendance des propriétés physiques avec la température) comme **L.N Tao, D.Fredrick** et **R.Greif**, ainsi que **D.L.R Oliver et J.E Sunderland [17-19]**. Quoiqu'il en soit, ces solutions analytiques ne concernent qu'un nombre restreint de problèmes. D'autres auteurs se sont intéressés, plus tard aux problèmes de l'ablation des matériaux qui sont liés à la rentrée des fusées dans l'atmosphère ou aux avions supersoniques.

Riley et ses collaborateurs ont effectué une étude analytique de la solidification d'un liquide contenu dans un cylindre initialement à la température de fusion T_f , la surface extérieure subit une brusque baisse de température à un niveau inférieur à T_f .

D'autres applications peuvent être citées à savoir la congélation des tissus biologiques, la conservation des aliments ou la sécurité des réacteurs nucléaires.

Cependant, ces dernières décennies, l'intérêt est devenu extrêmement grand en raison des applications au stockage de l'énergie sous forme de chaleur latente de changement de phase.

L'étude de **Delaunay [10]** est une simulation de stockage et déstockage d'énergie sous forme de chaleur latente dans un module de forme parallélépipédique. C'est une modélisation expérimentale et numérique d'un problème cyclique traité sur une période de solidification/fusion. Dans son modèle les échanges thermiques avec le milieu extérieur se font de façon symétriques, à travers deux surfaces d'échange verticales et opposées dont la température est une fonction sinusoïdale du temps. Une modélisation simplifiée fondée sur un bilan globale d'enthalpie est développée en considérant l'épaisseur de la couche solide uniforme sur toute la hauteur.

Les problèmes de transfert de chaleur avec changement de phase, lorsqu'ils sont abordés de façon explicite présentent des difficultés liées à leur caractère non linéaire. Dans le cas général, le front de changement de phase ne garde pas la même forme le long du processus de changement de phase. Dans ce cas, le calcul de la position de l'interface devient très complexe et les diverses techniques utilisées nécessitent l'utilisation de ressources informatiques importantes. Pour ces raisons de nombreux auteurs ont développé des techniques qui évitent d'isoler le front dans l'espace pendant le changement de phase. Le problème est réduit à un problème à une région. Dans la méthode à une région, l'évolution de la chaleur latente pendant le changement de phase est incluse dans un flux local d'enthalpie. Ce qui satisfait automatiquement les conditions à l'interface. Sous cette formulation, il n'est plus nécessaire de traiter séparément les deux phases. Un seul système d'équations peut être appliqué à l'ensemble du domaine physique, en incluant l'interface.

Voller [20] sépare la chaleur latente de la chaleur sensible, de sorte que la chaleur latente soit une fonction continue à travers l'interface liquide solide. Dans cette technique, le processus de changement d'état est anisotherme; il se déroule sur un intervalle de température. D'après **Voller [20]**, la zone de mélange (pâteuse) est nécessaire pour éviter que le champ de température ne présente des plateaux artificiels après le passage du front de changement de phase.

Cependant, la prise en compte de la convection dans une modélisation à une phase entraîne quelques difficultés, du fait que les deux phases ne sont pas différenciées et que la convection n'apparaît que dans la phase liquide. Un gradient de vitesse existe dans le liquide à cause de la condition d'adhérence, alors que le champ de vitesse est identiquement nul dans le solide. Il est nécessaire, dans l'équation de quantité de mouvement, d'annuler les vitesses

dans la phase solide. Le même auteur recommande de considérer les éléments où les deux phases sont en présence, comme des éléments d'un milieu poreux dont la porosité dépend de l'enthalpie locale. Cette formulation présente l'avantage, lors de la solidification de mélange binaire de prendre en compte la zone pâteuse en agissant sur des paramètres numériques représentant la raideur du changement de phase.

Bennou et Incropera [21] ont intégré des lois semi empiriques dans la théorie classique des mélanges. La zone pâteuse est considérée comme milieu poreux, en posant que la perméabilité a une valeur positive finie dans la zone pâteuse et dépendante de la fraction liquide. La valeur de la perméabilité est zéro dans la phase solide et devient infinie dans le liquide.

Brent [22] propose la technique enthalpie-porosité par traitement de la zone pâteuse comme un milieu poreux.

Des études comparatives des deux méthodes peuvent être trouvées dans un travail pionnier réalisé par **Sparrow et al. [12]** de la fusion autour d'un cylindre vertical. Il montra que la convection naturelle ne pouvait pas être ignorée dans des problèmes de fusion.

Plus tard **Yao et Chen [14]** déterminèrent une solution approchée pour la fusion autour d'un cylindre horizontal à température constante en utilisant la technique des perturbations. Ils étudièrent l'effet de la convection sur le processus de fusion et conclurent qu'elle dépendait fortement du nombre de Rayleigh.

I.4.2 Formulation et objectif

La littérature concernant les méthodes développées autour de la formulation en une seule région ne font que se développer, la plupart d'entre elles posent de sérieuses difficultés de calculs qui viennent de la formulation de l'évolution de la chaleur latente à l'interface.

Pour cela, la formulation du saut d'enthalpie à l'interface à travers une approximation homographique à un paramètre du taux de la fraction liquide, a été adoptée dans le présent travail. La validité de l'approximation homographique a déjà été prouvée [1] dans le cas de la solidification d'une plaque plane. L'effet de la convection naturelle n'est pas pris en compte en choisissant un faible facteur de forme. Par contre les effets de bord sont pris en considération à travers un échange convectif avec le milieu ambiant. Dans ce cas, l'interface n'est pas régulière, sa forme évolue dans le temps et dans l'espace. Le souci premier est de montrer que l'utilisation de la méthode enthalpique, adaptée aux cas de changement de phase

étalé, est applicable au changement de phase isotherme. Une nouvelle approche du saut d'enthalpie à l'interface est utilisée, à travers une approximation homographique du taux de la fraction liquide à la traversée de l'interface. Ceci par comparaison des évolutions de la température pour différentes valeurs du paramètre intervenant dans l'expression de l'approximation utilisée, et ce, dans le cas d'un échelon de température à la paroi.

Chapitre II.

Formulation du Problème

Chapitre II.

Formulation du Problème

II.1. Introduction

Le présent chapitre considère à travers un modèle physique simplifié, l'étude de la solidification-fusion isotherme et bidimensionnelle contrôlée par la conduction. Il est établi dans un premier temps un modèle explicite qui met en évidence à travers l'équation du bilan thermique à l'interface la complexité du problème. En introduisant la fonction homographique, pour modéliser la forte variation de l'enthalpie à l'interface, il est établi ainsi un modèle implicite qui permet de contourner la détermination de la position et la forme de l'interface.

II.2. Modèle Physique

Soit un matériau fusible, de température uniforme T_0 , contenu dans une enceinte de forme cylindrique disposé verticalement comme indiqué dans la figure II.1 où R et Z représentent respectivement le rayon de la section droite et la hauteur du module (enceinte). Il est supposé que T_0 est supérieure à la température de fusion T_m . Le module baigne dans un milieu ambiant dont la température T_a varie périodiquement en fonction du temps t . Ce système pourrait être considéré comme un module de stockage et destockage d'énergie sous forme de chaleur latente. Durant la période fraîche (nuit), le matériau fusible se solidifie et dégage de l'énergie emmagasinée durant le jour par le phénomène de fusion.

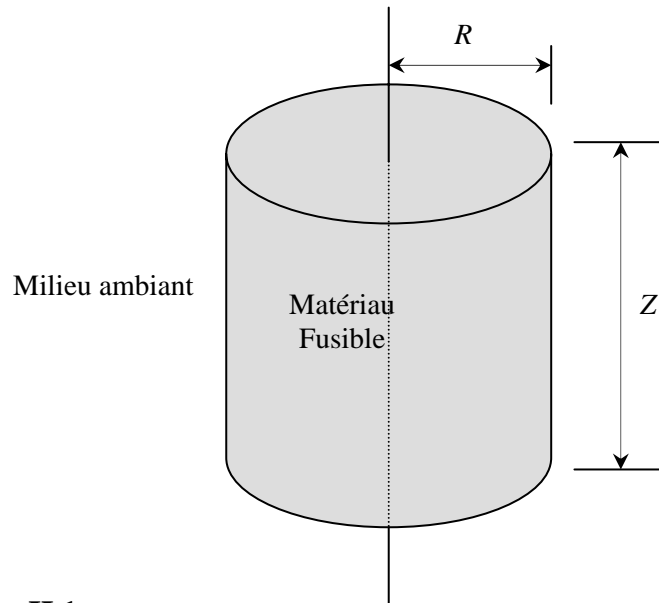


Figure. II.1. : Modèle physique schématisant un module cylindrique de stockage et de destockage d'énergie à l'aide d'un matériau fusible.

Le processus de solidification-fusion fait, en général, intervenir des phénomènes très complexes. Néanmoins, certaines hypothèses simplificatrices s'avèrent nécessaires mettant en relief ainsi la dominance d'un phénomène par rapport à un autre. En effet, quand l'épaisseur du module est petite devant sa hauteur, les rouleaux convectifs n'ont pas d'espace pour se développer et les effets de ce mode de transfert deviennent réduits devant ceux de la conduction. De plus, les écarts de température observés dans le cycle diurne et nocturne ne favorisent pas le développement de la convection naturelle. A ce titre, on supposera, dans ce qui suit, que :

- i).* Le facteur de forme (ou d'aspect) du module, représenté par le rapport de son rayon sur sa hauteur est petit devant 1 ;
- ii).* Le milieu ambiant est considéré comme un puits de chaleur de température homogène ;
- iii).* Le matériau fusible est pur et présente un changement de phase parfaitement isotherme ;
- iv).* Les propriétés thermophysiques du matériau fusible sont constantes. Les variations de volume sont négligeables ;
- v).* Le contact des deux phases solide et liquide est parfait et l'interface est supposée lisse et mécaniquement stable ;

- vi*). Les transferts thermiques dans la phase liquide sont dominés par la conduction. Les déformations de l'interface sont dues uniquement aux effets de bords ;
- vii*). On admet que la conduction microscopique est parfaitement décrite par la loi de Fourier ;
- viii*). Le matériau est opaque pour négliger les transferts radiatifs.

II.3. Modèles mathématiques

II.3.1. Introduction

Différentes modélisations sont développées dans la littérature pour étudier les phénomènes incluant les changements de phases. Elles peuvent être catégorisées en deux classes : les modèles implicites et explicites. Dans les premiers, la position de l'interface n'est pas nécessaire pour suivre les échanges thermiques dans le système. Celle-ci est déduite de l'évolution de la distribution de température ou d'enthalpie par des procédures d'interpolation. Par contre, dans le cas des modèles explicites, la connaissance de la forme et de la position de l'interface est indispensable pour la solution du problème.

II.3.2. Modèle explicite

Le modèle considère les domaines liquide et solide séparément. Ainsi deux équations phasiques gouvernant les transferts thermiques sont obtenues et couplées par des conditions de saut à l'interface. Cette dernière se traduit par la continuité de la température et par le bilan thermique au niveau de l'interface.

Le modèle se simplifie davantage en considérant les symétries de la géométrie de l'enceinte d'une part et les phénomènes qui s'y produisent d'autre part. En effet, la forme cylindrique et l'uniformité et l'homogénéité de la température du milieu ambiant permet de considérer l'axe du cylindre, Oz , comme axe de symétrie. Les surfaces de bases du module sont de surcroît soumises aux mêmes conditions d'échange avec le milieu ambiant, et compte tenu de l'absence des courants de convection, la section droite située à mi-distance des bases peut être considérée comme surface de symétrie. Ainsi, la modélisation mathématique se simplifie et peut être obtenue en considérant le domaine schématisé dans la figure 2.2. Le phénomène est décrit par une conduction bidimensionnelle et transitoire dans le domaine défini par $0 \leq z \leq Z/2$ et $0 \leq r \leq R$.

En désignant la chaleur spécifique, la densité et la conductivité par c, ρ et k respectivement, ces équations sont données par :

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \text{div} \left(k_i \vec{\text{grad}} T_i \right) \quad (\text{II-1})$$

$i=1, s$ selon la phase considérée

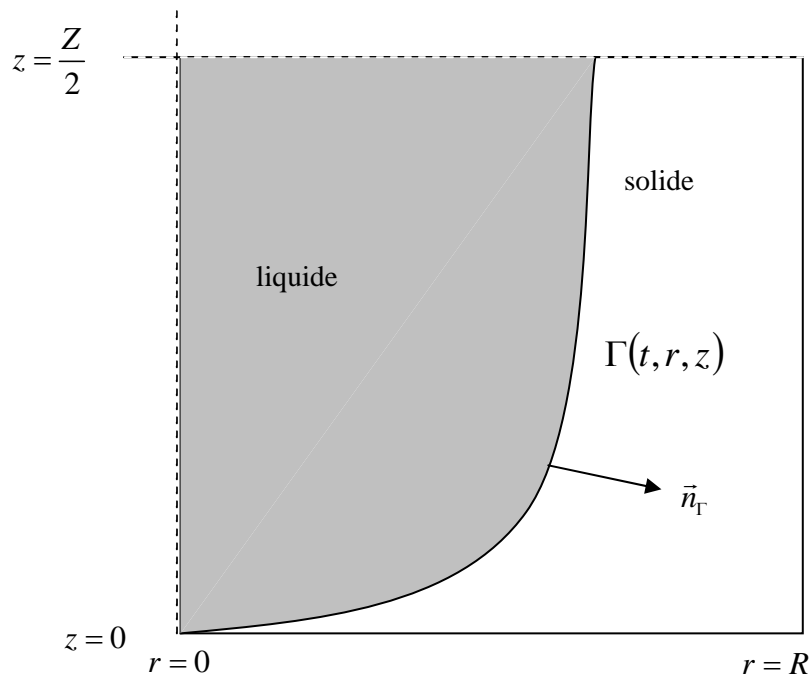


Figure II.2. : Modèle physique simplifié considéré dans la modélisation mathématique du phénomène.

Durant la solidification, le domaine liquide est contenu dans un volume limité par l'interface solide liquide représentée par $\Gamma := \{ \delta(r, z, t) = 0 \}$. Les transferts de chaleurs sont régis par l'équation de diffusion instationnaire de la chaleur écrite dans chacune des phases.

Où c, ρ et k désignent respectivement la chaleur spécifique, la densité et la conductivité. L'indice (l ou s) se réfère à la phase concernée.

Conditions initiales et aux limites

Deux conditions initiales sont à considérer. La première concerne la distribution de température et la seconde la position initiale de l'interface solide-liquide.

Initialement, $t=0$, le matériau fusible est supposé être entièrement à l'état liquide ou solide à la température uniforme, T_i .

$$T(r, z, t = 0) = T_i \quad \text{pour} \quad \left(0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq \frac{Z}{2} \right)$$

Les conditions de symétrie se traduisent par une condition de flux nul sur l'axe du modèle et sur le plan de symétrie.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(r=0, z)} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(r, z/2)} = 0$$

Les conditions aux différentes frontières délimitant le domaine considéré, la frontière latérale et le fond horizontal se réduisent à des conditions mixte (Cauchy)

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_f} = h(T_P - T_a) \quad \text{et} \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=Z_f} = h(T_P - T_a)$$

A ces conditions, s'ajoutent les conditions à l'interface qui est une frontière intérieure, partageant le domaine en deux régions l'une solide et l'autre liquide (conditions de Stefan).

Condition de Stefan

Le transfert de chaleur à l'interface solide liquide répond au principe de conservation de l'énergie au niveau de celle-ci

$$k_l \overline{\text{grad}T_l \cdot \vec{n}} \Big|_{\Gamma} - k_s \overline{\text{grad}T_s \cdot \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = \rho L v_n \quad (\text{II.2})$$

L'équation de l'interface est donnée sous forme implicite par une fonction $\delta(r, z, t) = 0$. Comme l'interface est une isotherme, la composante normale de la vitesse de l'interface peut s'exprimer sous les formes suivantes.

$$\begin{aligned}
v_n &= \vec{v}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma = -\frac{\partial \delta}{\partial t} \frac{1}{|\overrightarrow{\text{grad}} \delta|} \\
&= -\frac{\partial T_s|_\Gamma}{\partial t} \frac{1}{|\overrightarrow{\text{grad}} T_s|_\Gamma|} \\
&= -\frac{\partial T_l|_\Gamma}{\partial t} \frac{1}{|\overrightarrow{\text{grad}} T_l|_\Gamma|}
\end{aligned} \tag{II.3}$$

Et la constance de la température sur l'interface isotherme se traduit par :

$$T_\delta(r, z, t) = T_m$$

La forme et la position de l'interface étant en évolution dans l'espace et le temps selon les apports thermiques, la position du front est calculée explicitement à partir du bilan d'énergie à l'interface

Deux méthodes numériques sont exploitées :

- Utiliser un maillage fixe :

Dans ce cas des nœuds mobiles coïncidant avec l'interface se déplacent à l'intérieur du maillage (Goudrich).

- Lier le maillage à l'interface : Deux possibilités se présentent

* le domaine physique est transformé en un domaine de calcul de forme géométrique plus simple et de nouveaux termes, liés à la courbure et au déplacement de l'interface, sont introduits dans les équations.

* le maillage est généré à chaque pas de temps dans le domaine physique, ce qui implique le calcul à nouveau du champ de température aux divers nœuds. Les équations sont alors résolues dans un système de coordonnées transformées dans lequel l'interface est immobile.

Il convient cependant de noter que pour modéliser les transferts dans la phase solide, il faut considérer les deux étapes successives, selon que le front de fusion atteint ou pas l'axe de symétrie (Figure II.3), vu que les frontières du domaine sont différentes.

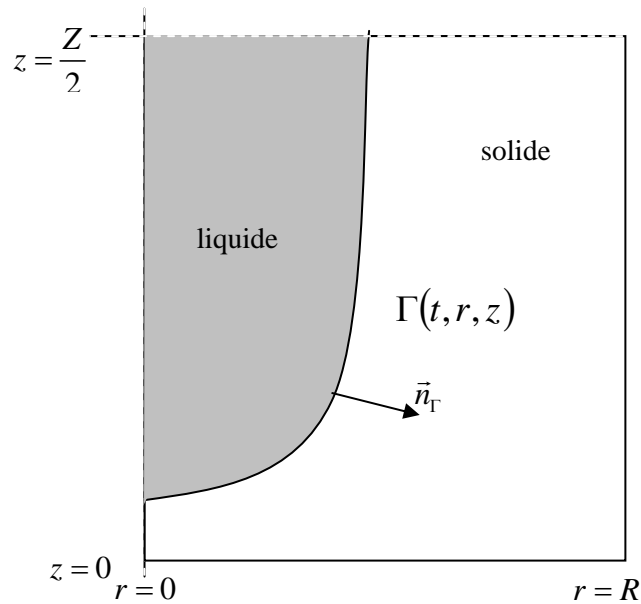


Figure II.3. : Modèle physique avec singularité.

Les méthodes développées, telle que les transformations de type Fourier pour se ramener à une interface plane ne sont plus valables dans le cas où l'interface atteint l'axe de symétrie les différents auteurs qui utilisent cette méthode considèrent comme valables

II.3.2. Modèle implicite

Contrairement au modèle explicite sus indiqué, proche du modèle physique, la modélisation implicite traite le domaine comme une seule phase en incluant la source de chaleur dans une équation d'énergie valable dans la totalité du domaine.

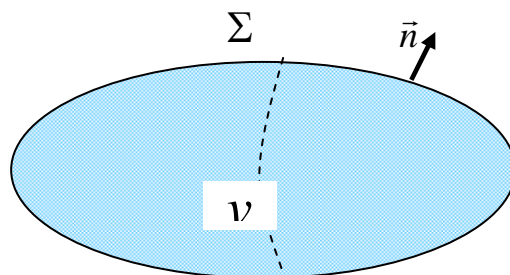


Figure II.4. Volume contenant les deux phases dans la modélisation mathématique du phénomène

Le bilan d'énergie appliqué à ce volume, dans le cas où la conduction est le seul mode de transfert de la chaleur, s'écrit :

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dv + \int_V \dot{Q} dv = \int_{\Sigma} -\vec{q} \cdot \vec{ds} \quad (\text{II.4})$$

Par application de la loi de Fourier et du théorème de Gauss le bilan se transforme en :

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dv + \int_V \dot{Q} dv = \int_V \overline{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}T})} \quad (\text{II.5})$$

Le transfert de chaleur dans le milieu est donné localement par l'équation suivante :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{Q} = \text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}T}) \quad (\text{II.6})$$

L'expression de la source \dot{Q} est donnée, en fonction de la chaleur latente de changement de phase, L , et de la fraction locale liquide par unité de volume $g(T)$ par :

$$\dot{Q} = \rho L \frac{\partial g}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Et l'équation de bilan peut s'écrire sous une nouvelle forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho c T + \rho L g(T)] = \overline{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}T})} \quad (\text{II.8})$$

Le terme entre crochets représente l'énergie interne du système liquide-solide

II.3.2.1. Définition de l'enthalpie

Le terme enthalpie dans l'équation est définie comme la somme de deux termes[20], un terme de chaleur sensible, H_c , et un terme de chaleur latente associée au changement de phase, H_L .

$$H(T) = H_c(T) + H_L(T) \quad (\text{II.9})$$

Où les deux termes $H_c(T)$ et $H_L(T)$ s'écrivent respectivement :

$$H_c(T) = \int_{T_{ref}}^T \rho c d\theta \quad \text{et} \quad H_L = \rho L g(T) \quad (\text{II.10})$$

II.3.2.2. Modèle à une phase

Cette formulation a été établie initialement pour les changements de phase étalés. Les phases solide et liquide sont, dans ces cas, séparées par une phase intermédiaire, dite aussi phase de mélange dans laquelle les deux phases existent.

Dans le cas où l'effet convectif, dans le milieu liquide, est négligeable, la formulation du problème en terme d'enthalpie et de température se réduit à une seule équation :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div} \left(k \overline{\text{grad} T} \right) \quad (\text{II.11})$$

Dans la formulation ci dessus, l'enthalpie totale du matériau, $H(T)$, apparaît comme une variable ne dépendant que de la température. Le problème se réduit à l'étude d'un modèle à une phase ou seul la donnée de l'évolution d'enthalpie du matériau en fonction de la température et éventuellement d'autres paramètres est nécessaire.

Les conditions d'isothermie et de conservation de l'énergie à l'interface Solide-liquide (conditions de Stefan) ne sont plus nécessaires. Différentes façons d'exprimer le terme d'enthalpie dans l'équation de diffusion existent.

II.3.2.3. Conditions initiales et aux limites

Initialement, $t = 0$, le matériau fusible est supposé être entièrement à l'état liquide à la température uniforme, T_i .

$$T(r, z, t = 0) = T_i \quad \text{pour} \quad \left(0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq \frac{Z}{2} \right)$$

Les conditions de symétrie se traduisent par une condition de flux nul sur l'axe du modèle et sur le plan de symétrie.

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{(r=0, z)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{(r, z=Z/2)} = 0$$

Les conditions aux différentes frontières délimitant le domaine considéré, la frontière latérale et le fond horizontal, se réduisent à des conditions mixte (Cauchy)

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_f} = h(T_P - T_a) \quad \text{et} \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z_f} = h(T_P - T_a)$$

II.4. Modèle implicite réduit

La mise sous forme adimensionnelle de l'équation qui régit le transfert de chaleur permet de faire ressortir le paramètre qui joue un rôle important dans le processus de changement de phase à savoir le nombre de Stefan (Ste)

II.4.1. Variables réduites

Les grandeurs de références utilisées, pour rendre adimensionnelles les variables sont : la hauteur du modèle, Z et l'écart de température, ($\Delta T_{ref} = T_m - T_0$), ou T_m et T_0 sont respectivement la température de changement de phase et la température à $t=0$.

Les variables adimensionnelles obtenues sont :

$$\tilde{r} = \frac{r}{Z}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{Z} \quad : \text{Coordonnées adimensionnelles}$$

$$\theta = \frac{T - T_m}{T_m - T_0} \quad : \text{Température adimensionnelle dans le domaine}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{Z^2} \quad : \text{Temps adimensionnel}$$

Le terme α représente la diffusivité thermique

II.4.2. Equations adimensionnelles

Le système d'équations (III.8- 9) est réécrit sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\left[\tilde{\rho} \tilde{c} + \tilde{\rho} \frac{1}{Ste} \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (\text{II.12})$$

La fonction $g(\theta)$ est la fonction approximation exprimée en température adimensionnelle qui se présente sous la forme suivante :

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta}{\tilde{\eta} + |\theta|} \right) \quad (\text{II.13})$$

Les conditions aux frontières associées à ce système, se réduisent à :

$$\text{Symétrie axiale} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0, \tilde{z}} = 0$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{R}, \tilde{z}} = Bi (\theta_P - \theta_a) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{z}=0, \tilde{Z}} = Bi (\theta_P - \theta_a)$$

- Pour $t = 0$ par la condition initiale que nous rappelons ci-après :

$$\theta(\tilde{r}, \tilde{z}, \tau = 0) = \theta_{in} \quad ; \quad (0,0) \leq (\tilde{r}, \tilde{z}) \leq (\tilde{R}, \tilde{Z})$$

L'équation ainsi formulée fait apparaître un terme de capacité calorifique équivalente adimensionnelle ou parait explicitement la dérivée de la fraction liquide :

$$\tilde{C}_{equi.} = \left[\tilde{\rho} \tilde{c} + \tilde{\rho} \frac{1}{Ste} \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right] \quad (\text{II.14})$$

L'approximation utilisée pour la fraction liquide étant continue, dérivable et valable dans la totalité du domaine considéré, la discontinuité due au saut d'enthalpie à l'interface est ainsi dissipé.

II.5. Conclusion

La complexité des phénomènes qui se déroulent, notamment dues à l'existence de deux phases séparées par une frontière libre, nécessite d'importants moyens de calcul informatique particulièrement dans le cas de l'approche explicite.

La formulation en termes de variables mixtes : enthalpie-temperature réduit le problème à la résolution d'une seule équation aux dérivées partielles. La condition de saut à l'interface est exprimée à travers une approximation homographique de la fraction liquide.

Le système d'équations sous sa forme adimensionnelle fait apparaître deux groupements caractéristiques : les nombres de Stefan (Ste) et de Biot (Bi).

Chapitre III.
Approche Numérique

Chapitre III.

Approche numérique

III.1.Introduction

Nous avons établi, au chapitre précédent, les équations régissant le transfert de chaleur dans le modèle. Pour la résolution nous avons opté pour une formulation aux volumes finis que nous présenterons brièvement au début de ce chapitre.

Les équations aux dérivées partielles sont transformées, par la méthode aux volumes finis, en un système d'équations algébriques. Cette forme se prête mieux à une résolution numérique à l'aide des algorithmes existant dans la littérature.

III.2. Formulation aux volumes finis

En général, les méthodes numériques consistent à substituer à un problème exact, un problème approché en dimension finie par discrétisation des opérateurs différentiels.

L'analyse numérique fournit plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites décrivant un phénomène quelconque, parmi lesquelles nous pouvons citer la méthode de différences finies, la méthode des éléments finis et enfin la méthode des volumes finis.

Dans la méthode des différences, les opérateurs différentiels sont approchés par des développements tronqués en séries de Taylor. Dans la seconde méthode, les variables auxquelles sont appliquées les opérateurs différentiels, sont approchés par des séries de puissance ; leur substitution dans les équations différentielles fournit des résidus qu'il faudrait minimiser.

Dans la troisième méthode enfin, pour laquelle nous avons opté dans ce travail, le domaine d'étude est divisé en volumes de contrôles ou cellules et les équations du problème sont intégrées sur chaque cellule constituant le domaine. Ce qui fait, que la solution résultant de

cette formulation permet de satisfaire au principe de conservation au sein des volumes élémentaires et par conséquent du domaine en entier [23,24]

La mise en œuvre de la méthode aux volumes finis se fait en différentes étapes :

- i).* Génération du maillage : le domaine (d'analyse) de calcul est divisé en volumes finis, de sorte à constituer des sous domaines adjacents appelés volumes de contrôle ou cellules. Chaque volume étant construit autour d'un nœud. Les surfaces de contact de ces sous-domaines sont appelées faces du volume de contrôle.
- ii).* L'intégration formelle des équations sur tous les volumes de contrôle : les équations différentielles aux dérivées partielles sont intégrées sur chaque volume de contrôle.
- iii).* Afin d'évaluer les dérivées partielles aux faces de contact des volumes de contrôle adjacents, des profils de variation sont choisis pour les variables dépendantes.
- iv).* La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative.

L'intégration sur le volume de contrôle, fait la distinction entre la méthode des volumes finis et tous les autres techniques numériques. Le résultat de l'intégration exprime la conservation exacte de la grandeur physique sur chaque volume de contrôle.

Cette relation claire entre l'algorithme numérique et le principe de conservation physique détermine la principale attraction de la méthode des volumes finis et son concept devient plus facile à comprendre que le concept de la méthode des éléments finis.

III.3.Maillage

Le maillage est obtenu à partir de la discrétisation du domaine. Il a été opté dans le présent travail pour un maillage uniforme par couches suivant les directions radiale et verticale. Compte tenu de l'axisymétrie du problème, les volumes de contrôle seront des volumes élémentaires annulaires d'épaisseur $\Delta\tilde{r}$ et de hauteur $\Delta\tilde{z}$.

La paroi est supposée de faible épaisseur et de forte conductivité par rapport au matériau utilisé ; dans ce cas le domaine d'étude se réduit ainsi au volume occupé par le milieu fusible. En raison de la symétrie axiale le domaine d'étude se réduit à la seule région du demi-plan azimutal (Fig.III.1)

La valeur de la variable dépendante est représentée par celle du nœud intérieur, placé au centre du volume de contrôle.

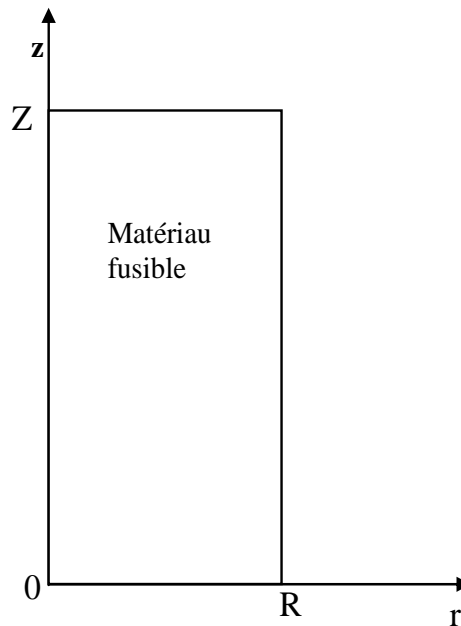


Figure III. 1 : Schéma du domaine de discrétisation

III.3.1. Milieu fusible

Le domaine de discrétisation considéré est divisé en $N * M$ volumes de contrôles d'égale épaisseur et d'égale hauteur. Les conditions aux limites se subdivisent en deux types :

- La condition de symétrie axiale qui est une condition de Neumann (second type) et s'identifie à un flux radial nul sur cet axe ($r=0, z$). L'axe de symétrie est choisi comme faces des volumes de contrôle du milieu fusible (fig. III.1) et les premiers nœuds seront donc localisés à mi-épaisseur de celui-ci.
- Les autres frontières, [(R, z) ; $(r, z=0)$ et (r, Z)], sont soumises à un échange convectif avec le milieu ambiant ce qui correspond à une condition mixte, flux et température. Les points nodaux seront placés sur celle-ci.

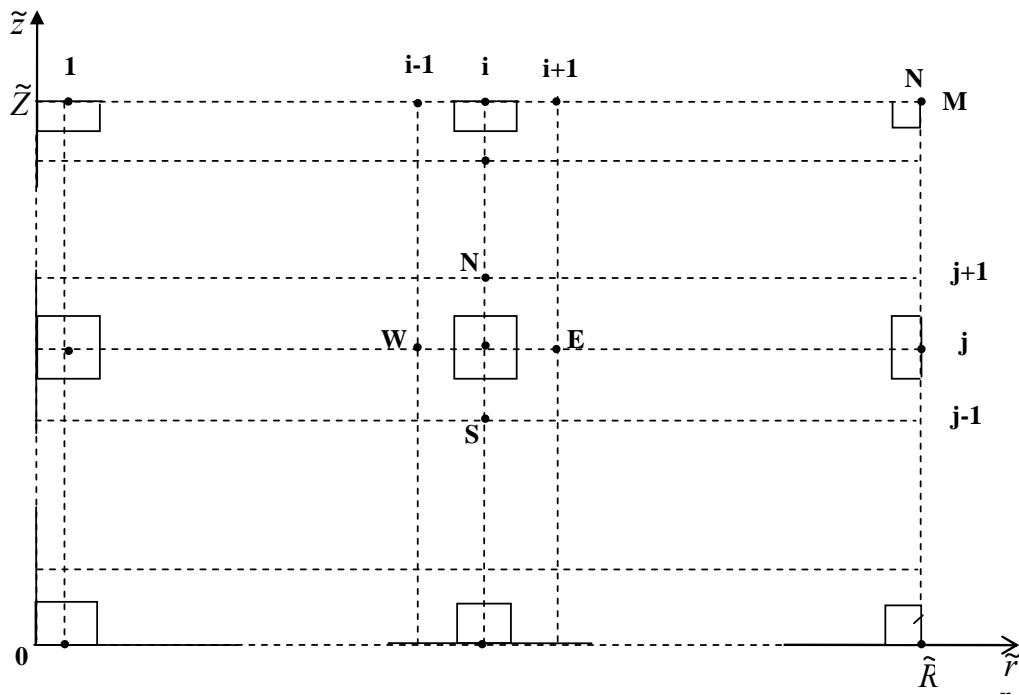


Figure III.2 Discretisation du domaine

Les dimensions des volumes de contrôle $\Delta\tilde{r}$, $\Delta\tilde{z}$ et les coordonnées $(\tilde{r}_i, \tilde{z}_j)$ des nœuds sont données respectivement par :

$$\Delta\tilde{r} = \frac{\tilde{R}}{N - 0.5} \quad , \quad \tilde{r}_{i,j} = (i - 0.5)\Delta\tilde{r} \quad \text{(III.1)}$$

$$\Delta\tilde{z} = \frac{\tilde{Z}}{M} \quad , \quad \tilde{z}_{i,j} = (j - 1)\Delta\tilde{z} \quad \text{(III.2)}$$

III.4.Integration des équations.

III.4.1.Intoduction

Dans le cas général la conductivité thermique n'est pas constante, elle varie en fonction de la position et/ou de la température. Dans la formulation en volumes finis, il est nécessaire de déterminer la conductivité thermique sur les frontières des différents volumes de contrôle, en

fonction des paramètres aux nœuds voisins immédiats. Ceci est possible à travers un bilan thermique à l'interface en tenant compte de la géométrie du problème.

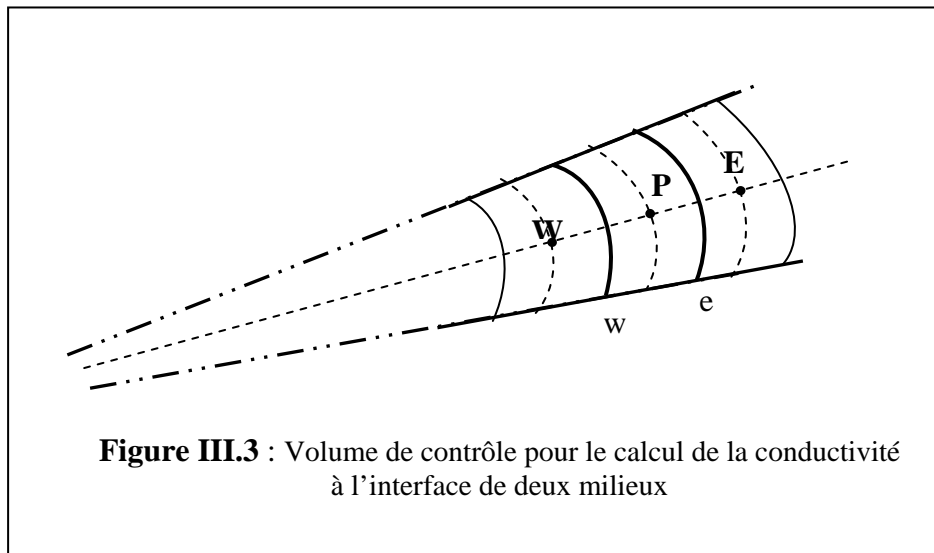
III.4.2. Conductivité inter-faciale

Le problème traité dans le cadre de cette thèse est bidimensionnel présentant un axe de symétrie suivant z .

Dans ce cas de figure l'expression pour la conduction inter-faciale obtenue dans un volume de contrôle, est différente selon les deux axes. La détermination des conductivités concernées se fera donc suivant la direction radiale, ensuite suivant la direction verticale.

III.4.2.1. Direction radiale

Considérons deux volumes de contrôle, d'épaisseurs $\Delta\tilde{r}_P$ et $\Delta\tilde{r}_E$ autour des points nodaux P et E (Fig. : III. 5) et soient \tilde{k}_P , \tilde{k}_E les conductivités nodales respectives. Soient $\Delta\tilde{r}_{Pe}$ et $\Delta\tilde{r}_{eE}$ les distances séparant les nœuds P et E de la face commune, e , des deux cellules de contrôle considérées [25].



L'expression de la conductivité thermique, \tilde{k}_e sur la surface de contact, e, peut être obtenue à travers la continuité des flux de chaleur de part et d'autre de la face de contact

$$\tilde{q}_- = \tilde{q}_e = \tilde{q}_+$$

$$\tilde{q}_- = -\tilde{k}_P \frac{\theta_e - \theta_P}{Ln \frac{\tilde{r}_e}{\tilde{r}_P}} \quad (\text{III.7 -a})$$

$$\tilde{q}_+ = -\tilde{k}_E \frac{\theta_E - \theta_e}{Ln \frac{\tilde{r}_E}{\tilde{r}_e}} \quad (\text{III.7 -b})$$

En absence de termes source ou puits de chaleur au niveau de cette surface ; l'expression du flux en e, donnée en fonction des paramètres nodaux, est déduite des expressions (III.7 -a) et (III.7 -b)

$$\tilde{q}_e = -\frac{\theta_E - \theta_P}{\frac{1}{\tilde{k}_P} Ln \frac{\tilde{r}_e}{\tilde{r}_P} + \frac{1}{\tilde{k}_E} Ln \frac{\tilde{r}_E}{\tilde{r}_e}} \quad (\text{III.7 -c})$$

Sous forme classique ce flux peut s'écrire

$$\tilde{q}_e = -\tilde{k}_e \frac{\theta_E - \theta_P}{Ln \frac{\tilde{r}_E}{\tilde{r}_P}} \quad (\text{III. 8})$$

Par identification, l'expression de la conductivité inter- faciale \tilde{k}_e en fonction des températures et des conductivités des nœuds voisins, s'exprime :

$$\tilde{k}_e = \tilde{k}_P \cdot \tilde{k}_E \frac{Ln \frac{\tilde{r}_E}{\tilde{r}_P}}{\tilde{k}_E Ln \frac{\tilde{r}_e}{\tilde{r}_P} + \tilde{k}_P Ln \frac{\tilde{r}_E}{\tilde{r}_e}} \quad (\text{III.9a})$$

Cas d'une discrétisation centrée :

Cette expression peut être écrite sous forme initialisée, valable pour un pas constant et des points nodaux centrés :

$$\tilde{k}_e = \tilde{k}_P \cdot \tilde{k}_E \frac{Ln \frac{i + \frac{1}{2}}{2}}{i - \frac{1}{2}} \quad (III.9b)$$

$$\tilde{k}_E Ln \frac{i}{i - \frac{1}{2}} + \tilde{k}_P Ln \frac{i + \frac{1}{2}}{i}$$

en procédant de façon similaire une expression analogue pour \tilde{k}_w , la conductivité de la face ouest de la cellule de contrôle construite autour du noeud P ,est obtenue

$$\tilde{k}_w = \tilde{k}_W \cdot \tilde{k}_P \frac{Ln \frac{\tilde{r}_P}{\tilde{r}_W}}{\tilde{k}_P Ln \frac{\tilde{r}_w}{\tilde{r}_W} + \tilde{k}_W Ln \frac{\tilde{r}_P}{\tilde{r}_w}} \quad (III.10)$$

III.4.2.2.Direction verticale

Considérons le volume de contrôle construit autour du noeud P, de hauteur $\Delta\tilde{z}_P$; ainsi que le volume de contrôle voisin supérieur, construit autour du point N et de hauteur $\Delta\tilde{z}_N$.Soient \tilde{k}_P et \tilde{k}_N les conductivités thermiques en P et N respectivement. Les distances séparant respectivement les noeuds P et N, de la face commune **n**, sont désignées par $\Delta\tilde{z}_{Nn}$ et $\Delta\tilde{z}_{Pn}$ respectivement.

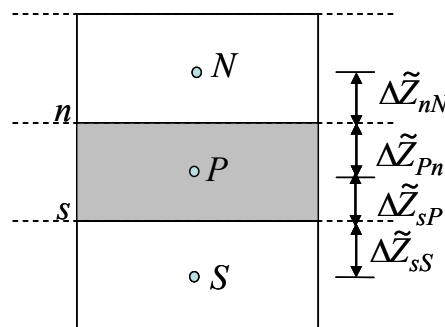


Figure III.4 Volume de contrôle pour le calcul de la conductivité à l'interface de deux milieux

L'expression de la conductivité \tilde{k}_n de la face de contact **n** entre ces deux milieux est obtenue en considérant la continuité du flux de chaleur qui traverse l'interface **n**. En supposant une variation linéaire entre l'interface et chacun des deux nœuds, les flux s'expriment en fonction des températures nodales et inter-faciale respectivement θ_p , θ_N et θ_n par :

$$\tilde{q}_+ = -\tilde{k}_N \frac{\theta_N - \theta_n}{\Delta\tilde{z}_{nN}} \quad (\text{III.11-a})$$

$$\tilde{q}_- = -\tilde{k}_P \frac{\theta_n - \theta_P}{\Delta\tilde{z}_{Pn}} \quad (\text{III.11-b})$$

En absence des termes sources et puits au niveau de celle-ci, le bilan thermique se traduit par l'égalité entre ces flux et on déduit à partir des relations ci-dessus, l'expression du flux à travers l'interface :

$$\tilde{q}_n = -\frac{\theta_N - \theta_P}{\frac{\Delta\tilde{z}_{nN}}{\tilde{k}_N} + \frac{\Delta\tilde{z}_{Pn}}{\tilde{k}_P}} \quad (\text{III.11-c})$$

La conductivité inter-faciale \tilde{k}_n , s'exprime aussi sous la forme classique suivante :

$$\tilde{q}_n = -\tilde{k}_n \frac{\theta_N - \theta_P}{\Delta\tilde{z}_{nN} + \Delta\tilde{z}_{Pn}} \quad (\text{III.12})$$

En procédant par identification, l'expression de la conductivité inter-faciale \tilde{k}_n en fonction des températures et des conductivités des nœuds voisins, se traduit par :

$$\tilde{k}_n = f_N \left(1 + \frac{\Delta\tilde{z}_{Pn}}{\Delta\tilde{z}_{nN}} \right) \tilde{k}_N \quad (\text{III.13})$$

avec:

$$f_N = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{k}_N}{\tilde{k}_P} \frac{\Delta\tilde{z}_{Pn}}{\Delta\tilde{z}_{nN}}} \quad (\text{III.14})$$

En utilisant la même procédure une expression analogue pour k_s est obtenue :

$$\tilde{k}_s = f_S \left(1 + \frac{\Delta\tilde{z}_{Ps}}{\Delta\tilde{z}_{sS}} \right) \tilde{k}_S \quad (\text{III.15})$$

Avec :

$$f_S = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{k}_S \Delta\tilde{z}_{Ps}}{\tilde{k}_P \Delta\tilde{z}_{sS}}} \quad (\text{III.16})$$

Où \tilde{k}_S est la conductivité thermique du volume de contrôle construit autour du nœud S et $\Delta\tilde{z}_{Ps}$ et $\Delta\tilde{z}_{sS}$ sont les distances séparant respectivement les nœuds P et S de la face commune aux deux volumes de contrôle(s).

Les deux approches de la conductivité inter-faciale, ainsi obtenues, satisfont à la conduction nulle dans le cas d'un isolant thermique, ce qui est un avantage dans le traitement de conditions adiabatiques aux frontières. Il est à noter que ces relations se simplifient pour une discrétisation centrée

III.4.3. Intégration de l'Equation de l'Energie

- **Cas d'un nœud interne**

L'intégration dans le cas général où les volumes de contrôle sont de dimensions différentes et constitués de différents matériaux est considérée. En outre, les nœuds ne sont pas localisés au centre des volumes de contrôle. Cependant, il est supposé que pour chaque volume de contrôle, la température et les propriétés thermophysiques sont uniformes et représentées par celles du nœud correspondant.

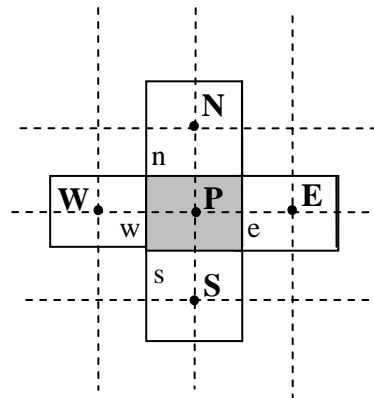


Figure III.5 : Volume de contrôle considéré

Considérons un volume de contrôle interne construit autour d'un nœud P, et limité des cotés ouest, est, sud et nord par les faces w, e, s et n. Ces dernières constituent ses surfaces d'échange avec les quatre volumes de contrôle voisins construits autour des nœuds W, E, S et N. La figure ci-dessus (Fig. III.5) donne une représentation de ces volumes et montre les notations utilisées. Les propriétés relatives à chaque volume de contrôle seront indiquées par la lettre affectée à chaque nœud correspondant.

L'intégration de l'équation de l'énergie sur tout le volume P et de l'instant τ à l'instant $\tau + \Delta\tau$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{r_w}^{r_e} \int_{z_s}^{z_n} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(\rho c + \rho \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\eta + |\theta|)^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau r dr dz = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\iint \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr dz + \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) r dr dz \right] d\tau \tag{III.17}$$

Cette équation exprime sous forme intégrale, la conservation de l'enthalpie dans le volume considéré P, pendant l'intervalle de temps $\Delta\tau$. Le membre de gauche donne la variation de l'enthalpie totale (chaleur sensible et latente) du volume de contrôle entre les deux instants τ et $\tau + \Delta\tau$. Celui de droite, exprime la variation, entre ces deux instants, de l'écart entre les flux rentrant par les surfaces w, e, s et n.

Les deux membres de l'équation sont évalués séparément,

En introduisant un terme de capacité calorifique adimensionnelle équivalente \tilde{C} , tenant compte de la chaleur latente de changement de phase, le membre de gauche s'écrit comme suit :

$$\int_{\tilde{r}_w}^{\tilde{r}_e} \int_{\tilde{z}_n}^{\tilde{z}_s} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(\tilde{\rho} \tilde{c} + \tilde{\rho} \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\eta + |\theta|)^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{z} = \tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P \left[\tilde{C}(\theta_P^1) \theta_P^1 - \tilde{C}(\theta_P^0) \theta_P^0 \right] \quad (\text{III.18})$$

Où le terme de capacité calorifique équivalente est donné par l'expression suivante :

$$\tilde{C}(\theta_P) = \tilde{\rho}_P \left(\tilde{c}_P + \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\eta + |\theta|)^2} \right) \quad (\text{III.19})$$

En introduisant les conductivités inter faciales dont les expressions en fonction de celles des points nodaux ont été données précédemment (III.4.2) ; l'intégration du membre de droite sur le volume de contrôle P donne :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\iint \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \right) d\tilde{r} d\tilde{z} + \iint \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \right) \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{z} \right] d\tau = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left\{ \left(\tilde{k}_e \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_e - \tilde{k}_w \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_w \right) \Delta \tilde{z}_P + \left(\tilde{k}_n \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_n - \tilde{k}_s \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_s \right) \tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \right\} d\tau \quad (\text{III.20})$$

Et les flux de chaleur aux faces **e**, **w**, **n** et **s** s'expriment à travers les développements suivants :

$$\tilde{k}_e \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_e = \tilde{k}_e \frac{\theta_E - \theta_P}{Ln \frac{\tilde{r}_E}{\tilde{r}_P}} \quad ; \quad \tilde{k}_w \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_w = \tilde{k}_w \frac{\theta_P - \theta_W}{Ln \frac{\tilde{r}_P}{\tilde{r}_W}}$$

$$\tilde{k}_n \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_n = \tilde{k}_n \frac{\theta_N - \theta_P}{\Delta \tilde{z}_{NP}} \quad ; \quad \tilde{k}_s \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_s = \tilde{k}_s \frac{\theta_P - \theta_S}{\Delta \tilde{z}_{SP}}$$

Ces flux peuvent être exprimés en fonction des conductivités nodales

$$k_e \frac{\partial \theta}{\partial r / r} \Big|_e = \ddot{f}_E k_E (\theta_E - \theta_P) \quad ; \quad \tilde{k}_w \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_w = \ddot{f}_W \tilde{k}_W (\theta_P - \theta_W)$$

$$\tilde{k}_n \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_n = \frac{\tilde{k}_N f_N}{\Delta \tilde{z}_{nN}} (\theta_N - \theta_P) \quad ; \quad \tilde{k}_s \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \Big|_s = \frac{\tilde{k}_S f_S}{\Delta \tilde{z}_{sS}} (\theta_P - \theta_S)$$

Après substitution de ces expressions dans l'équation (III.20) et en introduisant des termes de conductance, \mathbf{a} , cette dernière se met sous la forme simple suivante :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \{ a_E \theta_E + a_N \theta_N - a_P \theta_P + a_W \theta_W + a_S \theta_S \} d\tau \quad (\text{III.21})$$

où les coefficients a_E, a_N, a_W et a_S représentent les conductances du milieu entre le nœud P et respectivement, les nœuds E, N, W et S. Ils sont définis par :

$$a_E = \ddot{f}_E \tilde{k}_E \Delta \tilde{z}_P$$

$$a_W = \ddot{f}_W \tilde{k}_W \Delta \tilde{z}_P$$

$$a_S = f_S \left(1 + \frac{\Delta \tilde{z}_{Ps}}{\Delta \tilde{z}_{sS}} \right) \tilde{k}_S \frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P}{\Delta \tilde{z}_{PS}}$$

$$a_N = f_N \left(1 + \frac{\Delta \tilde{z}_{Pn}}{\Delta \tilde{z}_{nN}} \right) \tilde{k}_N \frac{r_P \Delta \tilde{r}_P}{\Delta \tilde{z}_{PN}}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

Pour évaluer l'intégrale il est nécessaire de faire un choix d'évolution de la température en fonction du temps. Après l'introduction d'un coefficient de pondération α , compris entre 0 et 1, l'évaluation de l'intégrale par rapport à la variable dépendante τ est obtenue à l'aide de l'approche générale suivante :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Phi d\tau = \left[\alpha \Phi^1 + (1-\alpha) \Phi^0 \right] \Delta\tau \quad (\text{III.22})$$

ou Φ est une variable dépendante quelconque. Le facteur α permet de choisir la nature du schéma numérique, les valeurs 0 ; 0.5 et 1 correspondent respectivement aux schémas classique explicite, semi implicite (Crank-Nicolson) et implicite.

* Equation du bilan nodal :

Ainsi, compte tenu des équations précédentes (III.18 à 22), l'équation III.17 donne une relation entre la température du nœud P et celles de ses voisins immédiats

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_E \theta_E^1 + a_W \theta_W^1 + a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1) + b_P \quad (\text{III.23})$$

ou :

$$a_P^1 = \frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1-\alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1-\alpha) (a_E \theta_E^0 + a_W \theta_W^0 + a_N \theta_N^0 + a_S \theta_S^0)$$

L'équation (III.23) est l'expression algébrique du bilan thermique écrite au nœud interne **P** la non linéarité de cette équation apparaît explicitement dans l'expression du coefficient a_P^1 , qui met en relief sa dépendance en terme de θ_P^1 .

- **Cas des nœuds frontaliers**

Les conditions aux limites sont de type flux imposé (type Neumann) et mixte (Cauchy). Il est nécessaire d'intégrer l'équation sur l'ensemble des volumes en y incluant les différentes frontières et les nœuds singuliers, afin de former le système d'équations final à résoudre.

(i) Axe de symétrie

La symétrie axiale se traduit par une condition d'interface adiabatique, et l'expression obtenue pour la conductivité inter-faciale aboutit à une interface adiabatique si l'un des milieux est un isolant. Il suffit d'associer au volume de contrôle construit autour d'un nœud fictif **W** une conductivité nulle, dans l'équation (III.23) du bilan nodale obtenu pour un nœud interne. Avec ces considérations, l'équation du bilan thermique du premier nœud s'écrit :

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_E \theta_E^1 + a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1) + b_P \quad (\text{III.24})$$

$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$a_P = a_E + a_N + a_S$$

$$b_P = \left[\frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_E \theta_E^0 + a_N \theta_N^0 + a_S \theta_S^0)$$

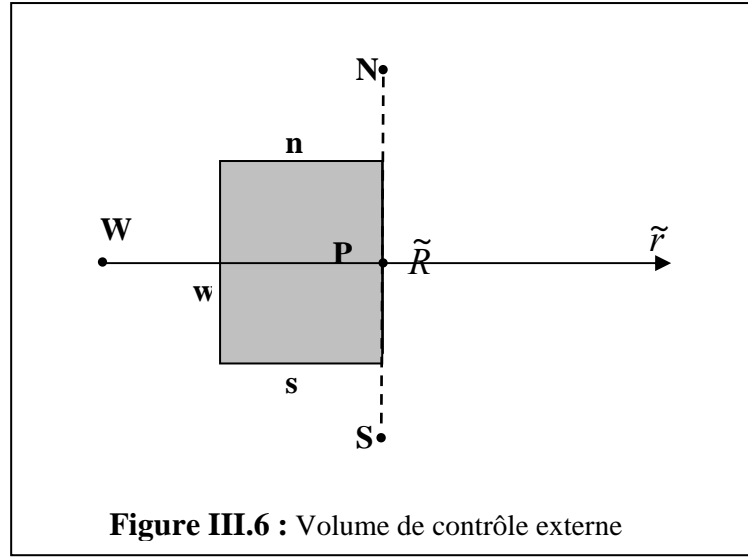
(ii) Frontière latérale externe

Dans ce cas le nœud **P** est localisé sur la frontière. Le volume de contrôle est construit à gauche du nœud **P**. L'intégration de l'équation de l'énergie sur le volume de contrôle entre t et $t + \Delta t$, aboutit à l'équation discrétisée suivante :

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_W \theta_W^1 + a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1) + b_P \quad (\text{III.25})$$

$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \bar{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \bar{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_W \theta_W^0 + a_N \theta_N^0 + a_S \theta_S^0)$$



$$\text{Avec : } \bar{r}_p = \tilde{r}_p - \frac{\Delta \tilde{r}_p}{2}; \quad \Delta \tilde{r}_p = \Delta \tilde{r}_{wP}; \quad a_p = a_w + a_n + a_s + \tilde{R} \Delta \tilde{z} Bi$$

(iii) Frontière horizontale externe supérieure

Dans ce cas le nœud **P** est localisé sur la frontière. Le volume de contrôle est construit en dessous du nœud **P**. L'intégration de l'équation de l'énergie sur le volume de contrôle et de l'instant t à $t + \Delta t$, aboutit à l'équation discrétisée suivante :

$$a_p^1 \theta_p^1 = \alpha (a_E \theta_E^1 + a_w \theta_w^1 + a_s \theta_s^1) + b_p \quad (\text{III.26})$$

$$\text{ou : } a_p^1 = \frac{\tilde{r}_p \Delta \tilde{r}_p \Delta \tilde{z}_p}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_p^1) + \alpha a_p$$

$$b_p = \left[\frac{\tilde{r}_p \Delta \tilde{r}_p \Delta \tilde{z}_p}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_p^0) - (1 - \alpha) a_p \right] \theta_p^0 + (1 - \alpha) (a_E \theta_E^0 + a_w \theta_w^0 + a_s \theta_s^0)$$

$$\text{avec : } \Delta \tilde{z}_p = \Delta \tilde{r}_{sP}, \quad a_p = a_E + a_w + a_s + \tilde{r}_p \Delta \tilde{r}_p Bi$$

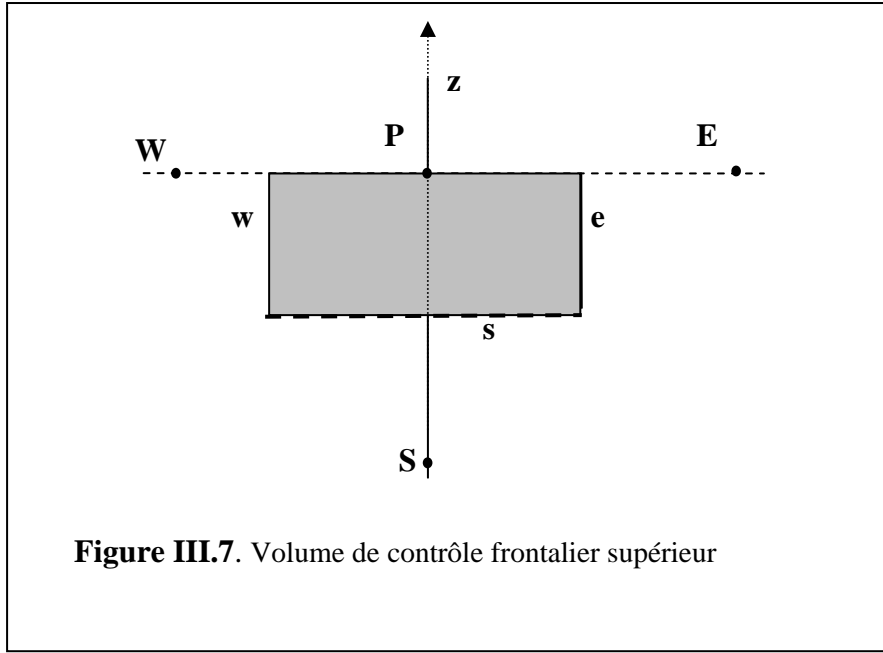


Figure III.7. Volume de contrôle frontalier supérieur

(iv) Frontière horizontale externe inférieure

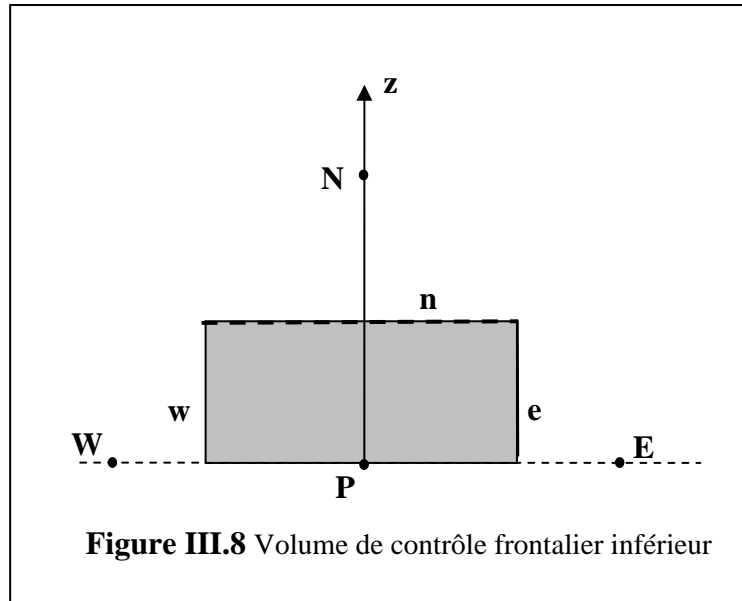
En procédant de la même manière que précédemment le noeud **P** est localisé sur la frontière et le volume de contrôle est construit au haut du noeud **P**. L'intégration de l'équation de l'énergie sur le volume de contrôle entre t et $t + \Delta t$, aboutit à l'équation discrétisée suivante :

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_E \theta_E^1 + a_W \theta_W^1 + a_N \theta_N^1) + b_P \quad (\text{III.27})$$

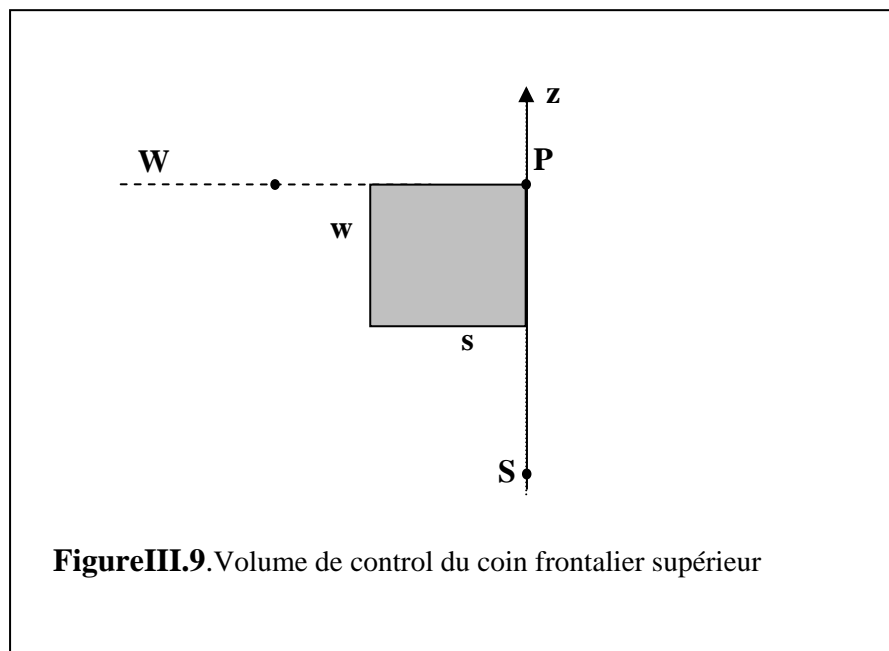
$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_E \theta_E^0 + a_W \theta_W^0 + a_N \theta_N^0)$$

$$\text{avec : } \Delta \tilde{z}_P = \Delta \tilde{z}_{Pn}, \quad a_P = a_E + a_W + a_N + \tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P Bi$$



(v) Coin supérieure droit



Dans ce cas le noeud **P** est localisé à l'intersection des frontières horizontale et verticale. Le volume de contrôle est construit à gauche et en dessous du noeud **P**. L'intégration de

l'équation de l'énergie sur le volume de contrôle entre l'instant t et $t + \Delta t$, aboutit à l'équation discrétisée suivante :

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_W \theta_W^1 + a_S \theta_S^1) + b_P \quad (\text{III.28})$$

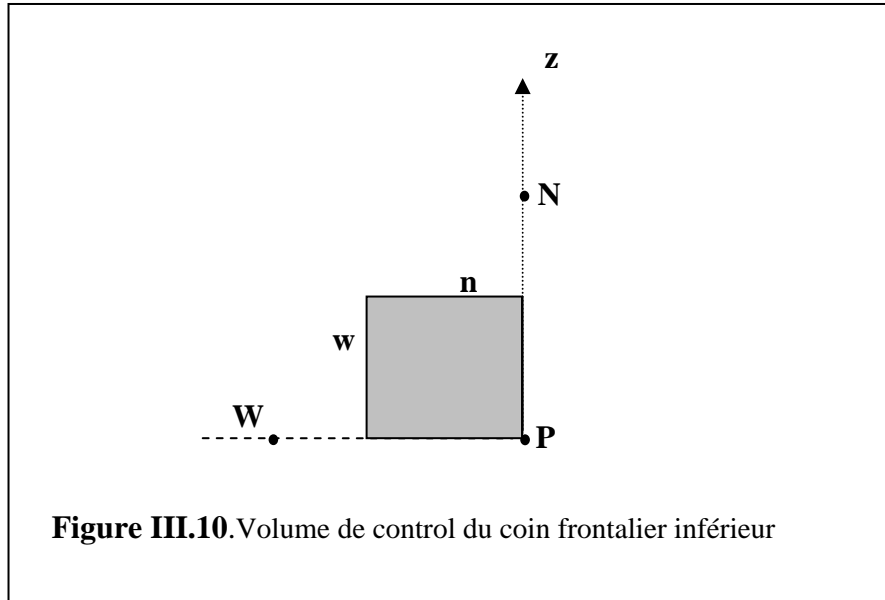
$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_W \theta_W^0 + a_S \theta_S^0)$$

$$\text{avec : } \Delta \bar{z}_P = \Delta \bar{r}_{SP}, \quad \bar{r}_P = \bar{r}_p - \frac{\Delta \bar{r}_p}{2}, \quad \Delta \bar{r}_P = \Delta \bar{r}_{WP};$$

$$a_P = a_W + a_S + \bar{r}_P \Delta \bar{r}_P Bi + R \Delta \bar{z}_P Bi$$

(vi) Coin inférieur droit



Dans ce cas le noeud **P** est localise à l'intersection des frontières horizontale et verticale. Le volume de contrôle est construit à droite et au haut du nœud **P**. L'intégration de l'équation de l'énergie sur le volume de contrôle entre l'instant t et $t + \Delta t$, aboutit à l'équation discrétisée suivante :

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_W \theta_W^1 + a_N \theta_N^1) + b_P \quad (\text{III.29})$$

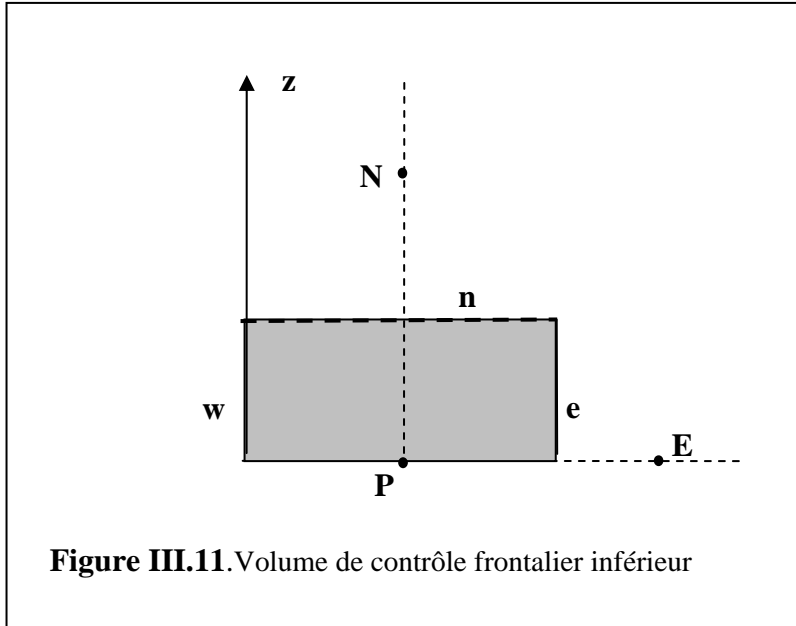
$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_W \theta_W^0 + a_N \theta_N^0)$$

$$\text{avec : } \Delta \bar{z}_P = \Delta \tilde{z}_{Pn}, \quad \bar{r}_P = \tilde{r}_P - \frac{\Delta \tilde{r}_P}{2}, \quad \Delta \bar{r}_P = \Delta \tilde{r}_{wP};$$

$$a_P = a_W + a_N + \bar{r}_P \Delta \bar{r}_P Bi + R \Delta \bar{z}_P Bi$$

(vii) Coin axial inférieur



$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_E \theta_E^1 + a_N \theta_N^1) + b_P \quad (\text{III.30})$$

$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{\bar{r}_P \Delta \bar{r}_P \Delta \bar{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{(\Delta \tilde{r}_P)^2 \Delta \bar{z}_P}{2 \Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_E \theta_E^0 + a_N \theta_N^0)$$

$$\text{avec : } \Delta \bar{z}_P = \Delta \tilde{z}_{Pn}, \quad a_P = a_E + a_W + a_N + \frac{1}{2} (\Delta \tilde{r}_P)^2 Bi$$

(viii) Coin axial supérieur

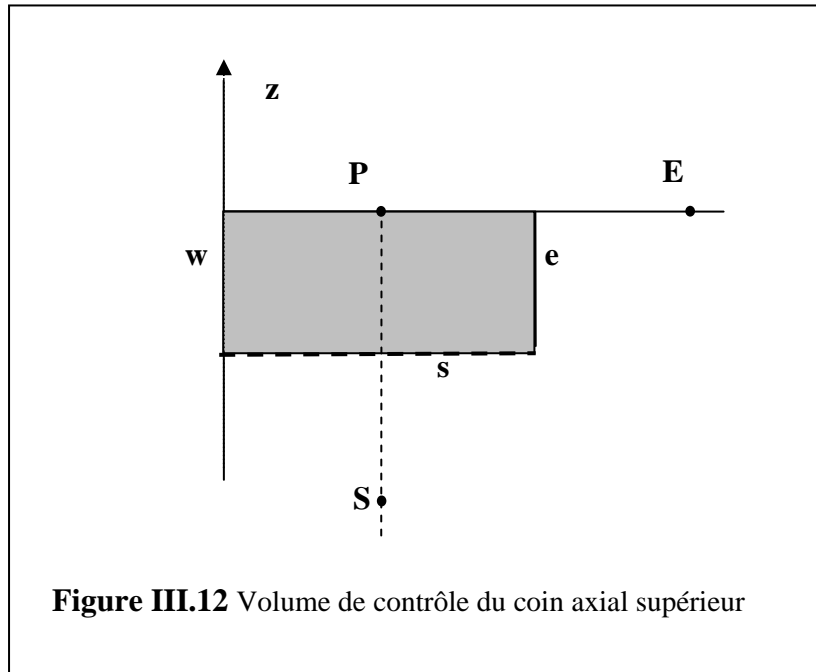


Figure III.12 Volume de contrôle du coin axial supérieur

$$a_P^1 \theta_P^1 = \alpha (a_E \theta_E^1 + a_S \theta_S^1) + b_P \quad (\text{III.31})$$

$$\text{ou : } a_P^1 = \frac{(\Delta \tilde{r}_P)^2 \Delta \tilde{z}_P}{2 \Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^1) + \alpha a_P$$

$$b_P = \left[\frac{\tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \Delta \tilde{z}_P}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_P^0) - (1 - \alpha) a_P \right] \theta_P^0 + (1 - \alpha) (a_E \theta_E^0 + a_S \theta_S^0)$$

$$\text{avec : } \Delta \tilde{z}_P = \Delta \tilde{r}_{SP}, \quad a_P = a_E + a_W + a_S + \frac{1}{2} (\Delta \tilde{r}_P)^2 Bi$$

III.5.Methode de résolution

Le bilan thermique sur le nœud **P** est représenté par une équation algébrique non linéaire comprenant cinq (5) inconnues (le nœud **P** et ses voisins **W**, **E**, **N** et **S**). L'ensemble des points nodaux du maillage forme un système fortement non linéaire, une méthode itérative de résolution est donc incontournable.

Le cas d'une épaisseur de paroi négligeable est considérée avec une conductivité du matériau composant la paroi très importante devant celle du matériau fusible. Le système est mis sous une forme qui tient compte de la numérotation des nœuds, afin de faciliter le développement de la méthode de résolution. En notant les coefficients des équations algébriques par **A**, **B**, **C**, **D**, **G** et **R** le système s'écrit :

$$A_{i,j}\theta_{i,j}^1 = B_{i,j}\theta_{i-1,j}^1 + C_{i,j}\theta_{i+1,j}^1 + D_{i,j}\theta_{i,j-1}^1 + G_{i,j}\theta_{i,j+1}^1 + R_{i,j} \quad (\text{III.32})$$

Pour : $2 \leq i \leq N - 1$
 $2 \leq j \leq M - 1$

$$A_{i,j} = \frac{\tilde{r}_{i,j} \Delta \tilde{r}_{i,j} \Delta \tilde{z}_{i,j}}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_i^1) + (B_{i,j} + C_{i,j} + D_{i,j} + G_{i,j})$$

$$C_{i,j} = \alpha \ddot{f}_{i+1,j} \tilde{k}_{i+1,j} \Delta \tilde{z}_{i,j}$$

$$B_{i,j} = \alpha \ddot{f}_{i-1,j} \tilde{k}_{i-1,j} \Delta \tilde{z}_{i,j}$$

$$D_{i,j} = \alpha f_{i,j-1} \left(1 + \frac{\Delta \tilde{z}_{PS}}{\Delta \tilde{z}_{sS}}\right) \tilde{k}_{i,j-1} \frac{\tilde{r}_{i,j} \Delta \tilde{r}_{i,j}}{\Delta \tilde{z}_{PS}}$$

$$G_{i,j} = \alpha f_{i,j+1} \left(1 + \frac{\Delta \tilde{z}_{PN}}{\Delta \tilde{z}_{nN}}\right) \tilde{k}_{i,j+1} \frac{\tilde{r}_{i,j} \Delta \tilde{r}_{i,j}}{\Delta \tilde{z}_{PN}}$$

$$R_{i,j} = \left[\frac{\tilde{r}_{i,j} \Delta \tilde{r}_{i,j} \Delta \tilde{z}_{i,j}}{\Delta \tau} \tilde{C}(\theta_{i,j}^0) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} (B_{i,j} + C_{i,j} + D_{i,j} + G_{i,j}) \right] \theta_{i,j}^0 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} (C_{i,j} \theta_{i-1,j}^0 + B_{i,j} \theta_{i+1,j}^0 + G_{i,j} \theta_{i,j+1}^0 + D_{i,j} \theta_{i,j-1}^0)$$

Les conditions aux limites représentées par la symétrie axiale et les conditions sur les frontières donnent des équations supplémentaires (III.24-31) complètent le système d'équations à résoudre. Ce système d'équations algébrique non- linéaire constitue le modèle numérique régissant les transferts thermiques dans le modèle.

Vu la structure des différents coefficients du système (III.32), le facteur de pondération dans l'évaluation de l'intégrale par rapport à la variable temps ne peut être pris comme nul

(schéma explicite). Le schéma semi implicite (Crank-Nicolson), inconditionnellement stable, est adopté.

La complexité de ce type de système d'équation dépend de la dimensionnalité du problème, le nombre de nœuds du maillage et de la discrétisation. Ensuite, toute procédure valable peut être utilisée pour résoudre le système d'équations algébriques, les ressources en moyens de calcul restant une contrainte importante.

III.5.1. Algorithme de résolution

La résolution de systèmes algébriques non linéaires se fait impérativement à travers une méthode itérative. Ces méthodes itératives sont basées sur une application répétée de l'algorithme relativement simple aboutissant à une convergence éventuelle après - parfois - un nombre important de répétitions. L'exemple bien connu est la méthode d'itération de Gauss Seidel.

Afin d'éviter la construction de systèmes matriciels de dimension importante, la méthode de résolution ligne par ligne a été adoptée. Le système est ramené à un système unidimensionnel sur une ligne ou une colonne et il est procédé à une résolution itérative par balayage successif. Dans cette méthode, l'information aux frontières de la ligne (colonne) est transmise instantanément à l'intérieur du domaine quel que soit le nombre de nœuds.

Dans le but d'accélérer la propagation de l'information contenue sur les frontières à l'intérieur du domaine, les directions d'application de l'algorithme sont alternées (ligne colonne).

La valeur du coefficient $A_{i,j}$ source de la non linéarité dans le système d'équations (II.32) et les températures adimensionnelles sur les lignes (colonnes) voisines de la ligne (colonne) où s'effectue la résolution sont celles de l'itération précédente. Le procédé itératif est répété jusqu'à convergence et la même procédure est appliquée au pas de temps suivant.

Il est à noter que, au vu de la géométrie considérée, les pas d'espace adimensionnel suivant les directions radiale et axiale ont des valeurs constantes mais différentes sur la totalité du domaine. Le nombre de nœuds choisi suivant les directions radiale et axiale, sont respectivement $N=100$ et $M=200$. Les tests de calculs préliminaires ont motivés le choix du pas de temps adimensionnel égale à 0.01.

III.5.2. Critère de convergence

Théoriquement un processus itératif prend fin lorsque les solutions recherchées n'évoluent plus. Numériquement, ce modèle n'est jamais atteint en raison des erreurs du modèle lui-même, erreurs d'arrondis, Néanmoins, après un certain nombre d'itérations qui dépend du taux de convergence, les écarts relatifs observés sur la variable dépendante $\theta_{i,j}$ ($i=1,n ; j=1,m$) ,entre deux itérations successives ,deviennent insignifiants. En pratique, le processus itératif est arrêté dès que la variation relative maximale produite entre deux itérations successives est inférieure à une valeur tolérée. Le problème considéré est traité sous sa forme réduite, les valeurs nulles de la variable sont des valeurs importantes, elles correspondent à celles de l'interface. Pour cela un critère local de convergence, correspondant à un test en chaque point du maillage, est considéré à travers un écart maximum $\varepsilon = 10^{-6}$ entre deux itérations successives, tel que :

$$\left| \theta_{i,j}^{(k+1)} - \theta_{i,j}^{(k)} \right| \leq \varepsilon$$

Un test sur la capacité calorifique équivalente n'apporte rien à la précision du calcul d'autant qu'elle est écrite explicitement en termes de températures.

:

Chapitre IV.
Résultats et Discussion

Chapitre IV.

Résultats et Discussion

IV.1.Introduction

Les chapitres précédents ont été consacrés au développement d'un algorithme permettant l'étude du changement de phase isotherme, solide /liquide, dans le cas d'un modèle présentant une symétrie axiale. L'approche implicite, à capacité calorifique équivalente a été privilégiée. Le saut d'enthalpie à l'interface est considéré à travers l'approximation homographique à une variable ε_h de la fraction liquide. Contrairement aux approximations en escalier et linéaire, l'approximation retenue est continue, dérivable et de plus valable dans la totalité du domaine. Ces propriétés particulières doivent participer à dissiper les fluctuations numériques observées avec les autres formulations citées.

Dans la méthode des volumes finis, méthode choisie dans ce travail, le domaine est divisé en cellules sur lesquelles sont intégrées les équations. Cette méthode repose sur le calcul des flux aux interfaces, ce qui nécessite la connaissance des conductivités sur les surfaces adjacentes de cellules voisines qui seront exprimées à partir de celles des nœuds. Du fait de l'axisymétrie, les surfaces des cellules évoluent suivant la direction radiale différemment de l'évolution axiale. Les déterminations des conductivités sur les surfaces adjacentes, suivant les directions radiale et axiale, seront ainsi différenciées.

Afin de valider le code de calcul développé, un problème possédant des similitudes avec le problème étudié et dont la solution analytique est admise, est dans un premier temps considéré. Une étude paramétrique rapide sur l'approximation homographique orientera le choix de la valeur du paramètre ε_h dans le cas d'une transformation isotherme. L'analyse du changement de phase dans un modèle cylindrique est ensuite abordée. Dans le cadre d'une application au stockage sous forme de chaleur latente de changement de phase l'intérêt a été porté sur le cas où l'ambient est un puit de température homogène en évolution dans le temps.

IV.2. Validité du modèle numérique

Les performances de la méthode numérique développée dans ce travail ainsi que le degré de validité sont estimés à travers un problème de conduction avec solidification dont la solution analytique est admise [26,28]. A ce titre et par conformité au cas étudié la solidification autour d'un puits de chaleur est étudié (géométrie cylindrique, conduction dans les deux phases et surchauffe de la phase initiale)

IV.2.1. Solidification cylindrique autour d'un puits de chaleur

Le problème idéal, de la solidification autour d'un puits de chaleur linéique est considéré. Le puits placé au centre (en $r=0$) est entouré d'un milieu supposé de dimensions importantes, se trouvant initialement à la température uniforme T_i supérieure à son point de fusion T_m .

Le transfert est supposé se faire uniquement par conduction. Les caractéristiques thermophysiques sont prises constantes mais différentes pour les deux phases désignées respectivement par les indices l et s.

Le problème est alors formulé par la donnée de deux équations de conduction instationnaire, une pour chacune des phases liquide et solide respectivement :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) ; \quad 0 < r < \delta(t) \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \alpha_l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) ; \quad r > \delta(t) \quad (\text{IV.2})$$

Où α est la diffusivité thermique et $\delta(t)$ la position de l'interface. Ces équations sont couplées à l'interface solide /liquide, $\delta(t)$, par les conditions de Stefan, qui expriment la continuité de la température et du bilan thermique :

$$T_l(\delta^-(t), t) = T_s(\delta^+(t), t) = T_M \quad (\text{IV.3})$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_{\delta^-(t)} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{\delta^+(t)} = \rho_s L \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (\text{IV.4})$$

Ces équations sont aussi soumises respectivement aux conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r k_s \frac{\partial T_s}{\partial r}) = Q \quad (\text{IV.5})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T_l(r,t) = T_i \quad (IV.6)$$

Les propriétés physiques du solide et du liquide peuvent être différentes, mais elles sont considérées constantes. Les distances et le temps sont adimensionnés respectivement, par le choix d'une longueur de référence L_{ref} et un temps de référence L_{ref}^2 / α_s .

Par référence à la phase solide les paramètres suivants sont introduits $\alpha_r = \frac{\alpha_l}{\alpha_s}$ et $k_r = \frac{k_l}{k_s}$

Le système d'équations du problème ainsi adimensionné est celui de la conduction dans les deux phases, et s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \theta_s}{\partial \tilde{r}} \right) ; \quad 0 < \tilde{r} < \tilde{\delta}(\tau) \quad (IV.7)$$

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial \tau} = \alpha_r \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \theta_l}{\partial \tilde{r}} \right) ; \quad \tilde{r} \geq \tilde{\delta}(\tau) \quad (IV.8)$$

$$\theta_s(\tilde{\delta}^-(\tau), \tau) = \theta_l(\tilde{\delta}^+(\tau), \tau) = \theta_m \quad (IV.9)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{\delta}^-(\tau)} - k_r \frac{\partial \theta_l}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{\delta}^+(\tau)} = \frac{1}{Ste} \frac{d\tilde{\delta}(\tau)}{d\tau} \quad (IV.10)$$

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} \left(\tilde{r} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right) = \tilde{Q} \quad (IV.11)$$

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \theta(\tilde{r}, \tau) = 1 \quad (IV.12)$$

IV.2.1.1. Solution exacte

En introduisant la variable de similitude, $\tilde{\eta}$, définie par :

$$\tilde{\eta} = \frac{\tilde{r}}{2\pi k_s \sqrt{\tau}}$$

Le problème est alors décrit par deux équations différentielles ordinaires de second ordre. Compte tenu des conditions aux frontières ces dernières admettent la distribution de température suivante :

$$\theta = \begin{cases} \tilde{Q} \left\{ E_i \left(-\frac{\tilde{r}^2}{4\tau} \right) - E_i \left(-\lambda^2 \right) \right\} & ; \quad 0 < \tilde{r} < 1 \\ \frac{E_i \left(-\tilde{r}^2 / 4\alpha_r \tau \right)}{E_i \left(-\lambda^2 / \alpha_r \right)} - 1 & ; \quad \tilde{r} > 1 \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

La substitution de ce profil de température dans les équations de couplage à l'interface, montre que celles-ci ne sont satisfaites, à tout instant, que si la position du front de solidification varie en racine carré du temps. Ainsi en posant :

$$\tilde{\delta}(\tau) = 2\lambda\sqrt{\tau}$$

où λ est la constante de solidification, l'équation du bilan thermique à l'interface solide /liquide, $\delta(t)$, se transforme en équations transcendante suivante :

$$\tilde{Q}e^{-\lambda^2} - \frac{\phi}{E_i(-\lambda^2 / \alpha_r)} e^{-(\lambda^2 / \alpha_r)} = \frac{\lambda^2}{Ste} \quad (\text{IV.14})$$

Le problème se réduit à la solution de l'équation ci-dessus. Où ϕ est le facteur de surchauffe.

$$\phi = \frac{k_l(T_i - T_m)}{k_s(T_m - T_a)}$$

IV.2.1.2.Solution numérique

La méthode des volumes finis développée dans ce chapitre est appliquée à la résolution de ce problème. En variable mixte, enthalpie-temperature le problème se réduit à la résolution d'une seule équation valable dans la totalité du domaine, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right); \quad r > 0 \quad (\text{IV.15})$$

Où le terme d'enthalpie est donné, en fonction de la température, par l'approximation homographique, à un paramètre, sous la forme suivante :

$$H(T) = \rho c T + \frac{\rho L}{2} \left(1 + \frac{T - T_m}{\varepsilon_h + |T - T_m|} \right) \quad (\text{IV.16})$$

Les équations écrites sous leurs formes adimensionnelles (Chapitre III) sont intégrées sur chaque volume de contrôle du maillage (Fig.IV.1). Le pas d'espace est pris constant et le premier nœud est localisé à mi-épaisseur de la cellule adjacente au puits linéique.

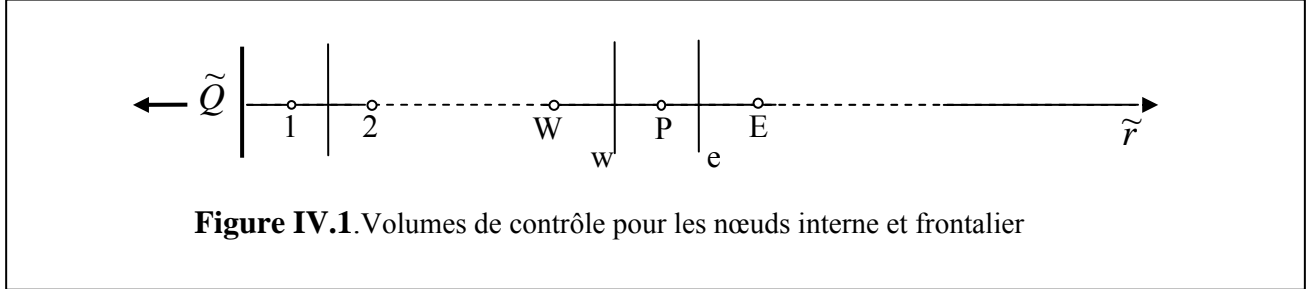


Figure IV.1. Volumes de contrôle pour les nœuds interne et frontalier

$$\int_{\tilde{r}_w}^{\tilde{r}_e} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(\tilde{\rho} \tilde{c} + \tilde{\rho} \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\eta+|\theta|)^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau \tilde{r} d\tilde{r} = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\int \left(\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \right) d\tilde{r} \right] d\tau$$

Soit :

$$\int_{\tilde{r}_w}^{\tilde{r}_e} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(\tilde{\rho} \tilde{c} + \tilde{\rho} \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\eta+|\theta|)^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau \tilde{r} d\tilde{r} = \tilde{r}_P \Delta \tilde{r}_P \left[\tilde{C}(\theta_P^1) \theta_P^1 - \tilde{C}(\theta_P^0) \theta_P^0 \right] \quad (IV.17)$$

Où le terme de capacité calorifique équivalente a la forme suivante :

$$\tilde{C}(\theta_P) = \tilde{\rho}_P \left(\tilde{c}_P + \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\varepsilon_h + |\theta|)^2} \right) \quad (IV.18)$$

En introduisant les conductivités interfaciales, dont les expressions en fonction de celles des points nodaux sont données au paragraphe précédent (III.4.2), l'intégration du second membre sur le volume de contrôle entourant le noeud P donne :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\int \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \right) d\tilde{r} \right] d\tau = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left\{ \left(\tilde{k}_e \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_e - \tilde{k}_w \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r} / \tilde{r}} \Big|_w \right) \right\} d\tau$$

En portant ces expressions dans le membre de droite de l'équation et en introduisant des termes de conductance, a , ce dernier se met sous la forme simple suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \{ a_E \theta_E - a_P \theta_P + a_W \theta_W \} dt$$

Les coefficients a_E et a_N représentent, respectivement, les conductances du milieu entre le nœud P et les nœuds E et N. Ils sont définis par :

$$a_E = \ddot{f}_E k_E$$

$$a_W = \ddot{f}_W k_W$$

Pour évaluer l'intégrale il est nécessaire de faire un choix d'évolution de la température en fonction du temps. Soit α un coefficient de pondération, compris entre 0 et 1, l'évaluation de l'intégrale, par rapport à la variable τ , est obtenu à l'aide de l'approche générale suivante :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Phi d\tau = [\alpha \Phi^1 + (1-\alpha)\Phi^0] \Delta\tau$$

ou Φ est une variable dépendante quelconque. Le facteur α permet de choisir la nature du schéma numérique, les valeurs 0, 0.5 et 1 correspondent respectivement aux schémas classique explicite, semi implicite (Crank-Nicolson) et implicite.

En suivant la procédure décrite précédemment, et dans le cas d'un maillage uniforme, le système d'équations discrétisées suivant est obtenu :

$$\theta_i^1 = \frac{1}{A_i} (B_i \theta_{i-1}^1 + C_i \theta_{i+1}^1 + D_i) \quad i \geq 1$$

Avec pour $i=1$

$$B_1 = 0$$

$$D_1 = \left\{ \tilde{r}_1 \frac{\Delta \tilde{r}}{\Delta t} \tilde{C}(\theta_1^0) - (1-\alpha)\tilde{k} \right\} \theta_1^0 + (1-\alpha)k\theta_2^0 - \frac{\tilde{Q}}{2\pi}$$

Et pour $i > 1$;

$$B_i = \alpha \frac{Ln \frac{i-1/2}{i-3/2}}{Ln \frac{i-1}{i-3/2} + Ln \frac{i-1/2}{i-1}} \tilde{k}$$

$$C_i = \alpha \frac{Ln \frac{i+1/2}{i-1/2}}{Ln \frac{i}{i-1/2} + Ln \frac{i+1/2}{i}} \tilde{k}$$

$$A_i = \tilde{r}_i \frac{\Delta \tilde{r}}{\Delta t} \tilde{C}(\theta_i^1) + (B_i + C_i)$$

$$D_i = \left\{ \tilde{r}_i \frac{\Delta r}{\Delta t} \tilde{C}(\theta_i^0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} (B_i + C_i) \right\} \theta_i^0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} (B_i \theta_{i-1}^0 + C_i \theta_{i+1}^0)$$

$$\text{Avec } \tilde{C}(\theta) = \tilde{\rho} \left\{ \tilde{c} + \frac{1}{Ste} \frac{\eta}{2(\varepsilon_h + |\theta|)^2} \right\}$$

IV.2.1.3. Choix du schéma numérique

- Discrétisation temporelle

Nous avons considéré le schéma numérique de **Crank-Nicolson** qui présente l'avantage d'être inconditionnellement stable pour n'importe quelle valeur du pas de temps Δt . Ce qui nous permet d'augmenter si nécessaire la valeur de celui-ci pour tenir compte du ralentissement du transfert thermiques dus au phénomène de solidification.

- Choix du facteur de sur-relaxation

Il n'existe pas de règle bien établie pour le choix de la valeur optimum du facteur de sur-relaxation ω . Pour une procédure itérative donnée, la valeur de ω qui permet la convergence de la procédure itérative en un minimum d'itérations, dépend du pas d'incrément et la nature du problème.

Les calculs test, effectués pour la détermination de la valeur optimum du facteur de sur-relaxation, ont montré que le nombre d'itérations est minimal, en moyenne, quand celui-ci est voisin de 1,4.

IV.2.1.4. Deroulement des calculs

Pour mettre en œuvre le calcul il est indispensable de fixer au préalable le nombre de nœuds donc l'épaisseur du milieu. Nous sommes ici, en présence d'un cas de solidification d'un milieu infini, pour cela il est nécessaire de s'entourer de certaines précautions.

En effet, les résultats obtenus par la mise en œuvre du code de calcul seront valables, pour le cas d'un milieu infini, tant que l'influence de la frontière externe du milieu sur le transfert thermique demeure négligeable. L'inertie thermique du matériau fait que l'amplitude de la perturbation s'amortit progressivement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source et ne s'annule qu'à l'infini. Il est cependant admis qu'un milieu fini, chauffé par l'une de ses frontières, présente le même comportement qu'un milieu semi infini tant que la perturbation thermique n'a pas atteint le milieu de son épaisseur.

IV.2.1.5. Resultats

Dans les calculs effectués deux paramètres ont été considérés la quantité de chaleur extraite par le puits et le nombre de Stefan (chaleur latente).

Afin de mettre en relief les performances du modèle dans le cas les plus défavorables il a été examiné les cas où les chaleurs extraites sont importantes ($\tilde{Q} = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$) d'une part et d'autre part de grands nombre de Stefan ($Ste = 100, 10, 1$) (chaleurs latentes faibles), ceci. En effet, dans les cas considérés, les gradients et les variations de température sont considérables et devraient être à l'origine d'erreurs de troncature très importantes.

Le mouvement du front de solidification, déduit à partir des évolutions de températures nodales est représenté sur la figure suivante (IV.2.) pour quatre valeurs différentes de la quantité de chaleur extraite. Dans les différents cas considérés, le mouvement du front obtenu à partir de la solution numérique s'identifie, qualitativement, au mouvement réel de celle-ci.

Cependant, un examen quantitatif des résultats à travers les erreurs relatives sur la position de l'interface (figure en médaillon), montre que le modèle numérique surestime la position du front d'une part et d'autre part révèle des écarts importants entre la solution numérique et exacte au début du processus de solidification.

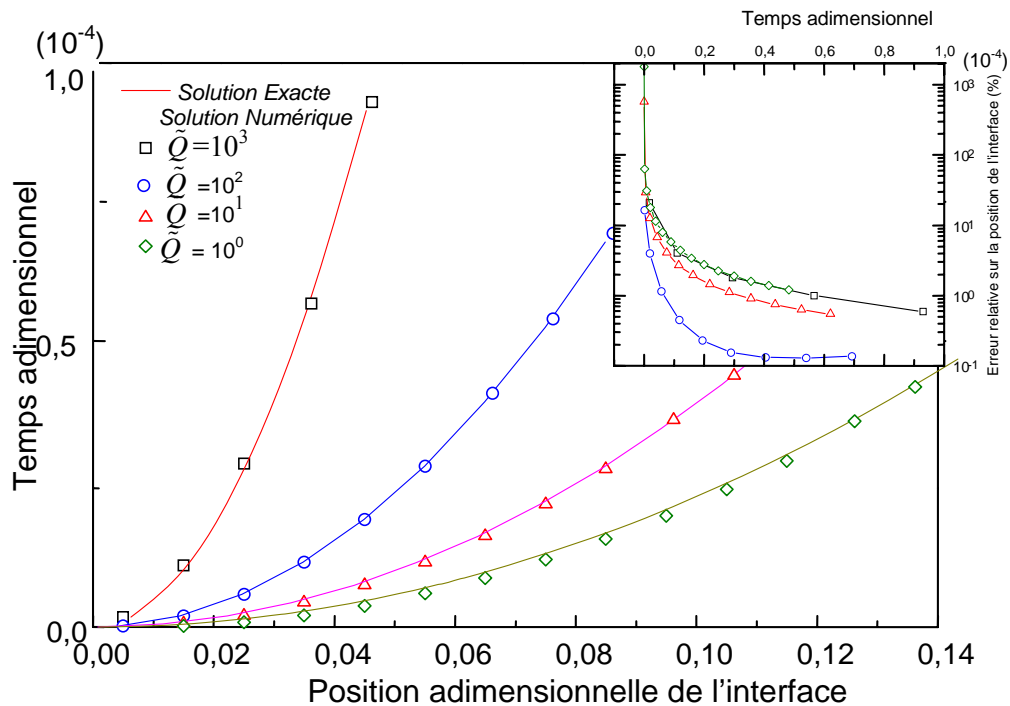


Figure IV.2. Evolution du front de solidification donnée par les modèles numérique et exacte pour trois cas de refroidissement et écarts relatifs des résultats des deux modèles

Cet écart, qui est d'autant plus considérable que le taux de refroidissement est important, se réduit rapidement pour s'annuler pratiquement par la suite. Ceci peut s'expliquer par la nature de la condition imposée à la frontière interne (puits).

Une seconde série de calcul, à été menée cette fois ci pour différents nombres de Stefan (chaleur latente) et dans le cas le plus défavorable précédent. Toujours, dans le but de préciser les performances du modèle numérique, trois nombres de Stefan relativement importants ont été choisis (faible chaleurs latentes).

Le mouvement du front se solidification pour les différents cas choisis, est représenté sur la figure ci- dessous (IV.3).

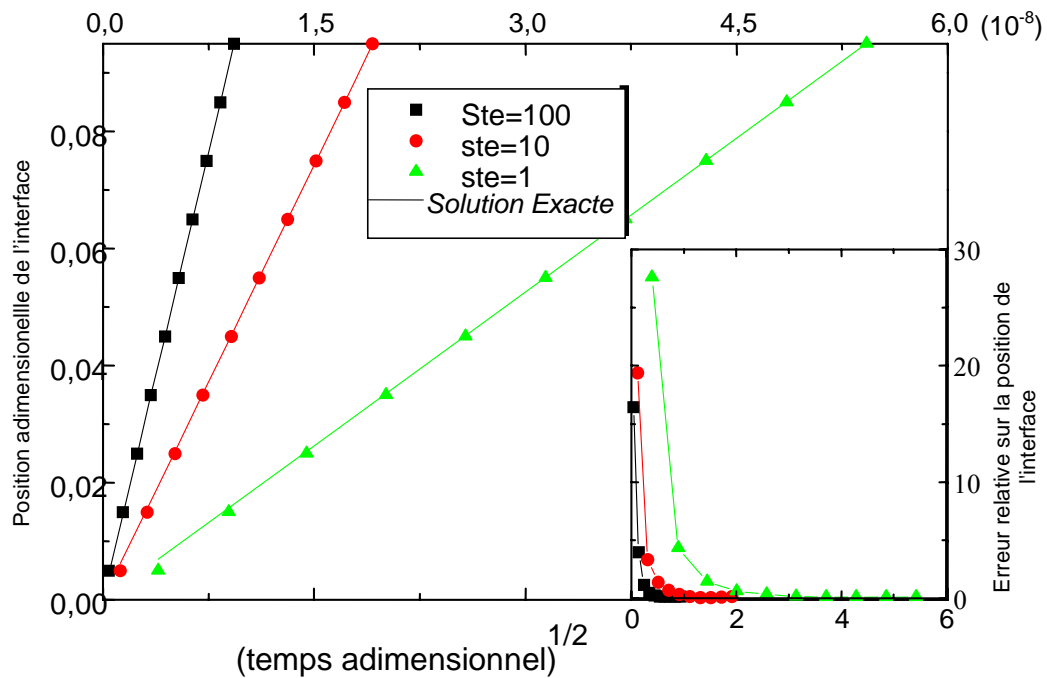


Figure IV.3. Evolution des fronts de solidification pour différentes chaleurs latentes pour le cas de refroidissement le plus défavorable

Les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites dans le cas présent concernant les concordances qualitatives des résultats numériques et analytiques.

La présentation des écarts relatifs (Fig. IV. 3. médaillon) montre des écarts importants pour les grandes valeurs de la chaleur latente, au début du processus pour s'annuler rapidement par la suite. Ceci est normal vu que nous sommes dans des cas défavorables et le choix d'un pas constant qui s'avère important proche du puits linéique.

IV.2.2. Conclusion

A la lumière de ces résultats, il est légitime de conclure que le code numérique, construit sur la base de la méthode développée dans ce travail fournirait des résultats satisfaisants dans le cas où il est utilisé pour modéliser le changement de phase dans un modèle cylindrique dans le cas d'une sollicitation de flux variable à la paroi extérieure. D'autant plus, que dans le cas qui nous concerne, les gradients et les variations de température sont beaucoup moins importants que ceux observés dans le cas d'un puits de chaleur.

La sollicitation thermique à la paroi est provoquée par l'injection ou l'extraction d'un flux de chaleur à partir d'un milieu fluide homogène et dont la température est en évolution dans le temps. La température des frontières varie dans le temps et son évolution sera étroitement liée à l'intensité du flux à la paroi et aux caractéristiques thermophysiques du matériau. Le coefficient d'échange thermique par convection est pris constant, ne dépendant ni de la température ni du temps.

IV.3.L'interface solide-liquide

Dans le cas de problèmes unidimensionnel où apparaît un changement de phase, l'interface évolue en gardant la même forme. Dans les cas de géométrie rectangulaire l'interface est un plan en mouvement de translation et dans les cas de géométrie axiale, suivant des cylindres concentriques qui migrent suivant la direction radiale.

Les phénomènes pris en compte dans ce modèle axisymétrique sont : la conduction dans le milieu fusible et l'échange convectif aux parois. La convection naturelle dans la phase liquide n'est pas considérée et les échanges convectifs aux différentes parois ne sont pas différenciés.

La considération du flux convectif à travers la totalité de la paroi conduit à un problème bidimensionnel. Dans ce cas, le phénomène de changement de phase prend naissance au niveau des parois, lorsque la température de celles-ci atteint la valeur de la température de fusion/solidification. Au début du phénomène l'interface épouse parfaitement la géométrie du modèle. Au fur et à mesure de son évolution cette dernière va changer de forme avec la disparition des bords tranchants en faveur de profils plus arrondis (Fig. IV.4)

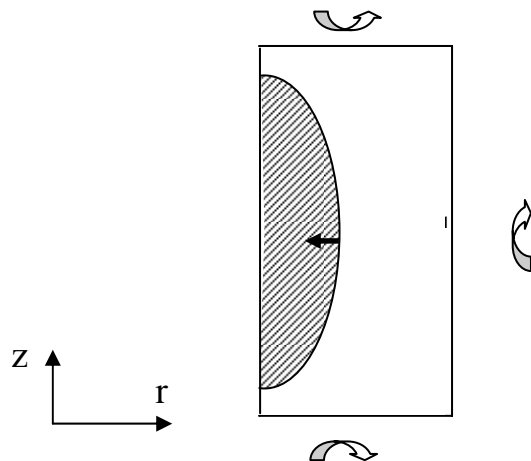


Figure IV.4 Vue schématique de l'interface en évolution

Les échanges convectifs au niveau des parois n'étant pas différenciées, en plus de la symétrie axiale (matériau homogène), les solutions présenteront une symétrie par rapport au plan horizontale médian. Cette hypothèse simplificatrice n'a pas été incluse. D'éventuelles distorsions numériques inhérentes à un mauvais choix du pas de temps ou d'espace peuvent altérer la symétrie des résultats.

IV.4.L'approximation homographique

La simplicité de mise en œuvre et l'économie en moyens de calcul de l'approche numérique implicite ont été mis en relief au chapitre précédent. Dans les problèmes bi ou tri dimensionnels la géométrie de l'interface est complexe et le suivi de l'interface difficile. Il implique l'utilisation de différentes méthodes de résolution pour le suivi de cette dernière (maillage fixe, maillage variable par transformation des coordonnées).

Il est à noter que la principale caractéristique du changement de phase d'un matériau pur est que le dégagement (ou absorption) de la chaleur latente de transformation se passe à une température bien précise [fig.IV.5]. Stefan est l'un des premiers à étudier ce type de problème (modélisation de la fusion de la calotte glacière en 1831).

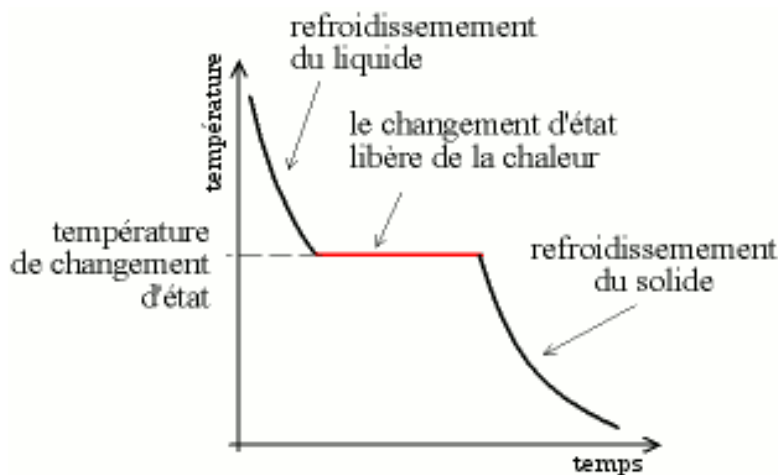


Figure IV.5 Solidification d'un corps pur

La figure IV.5 schématise l'évolution de la température lors de la solidification d'une substance pure, entre la température initiale du liquide (T_0) et la température de paroi (T_p).

Pour les changements de phase anisotherme diverses approches implicites ont été développées. Dans ces cas là, le processus de changement de phase met en œuvre une zone

intermédiaire séparant les régions solide et liquide dans laquelle coexistent les deux phases : la zone dite « pâteuse » ou de mélange (voir Fig. IV-6). En effet le changement de phase se fait de façon continue sur un intervalle de température délimité par deux températures le solidus et le liquidus, il n'y a donc pas d'interface entre la zone liquide et la zone solide. Dans la zone de mélange peuvent intervenir des transformations complexes, comme le transfert de matière par la formation d'une zone d'échange sous forme cellulaire ou dendritique

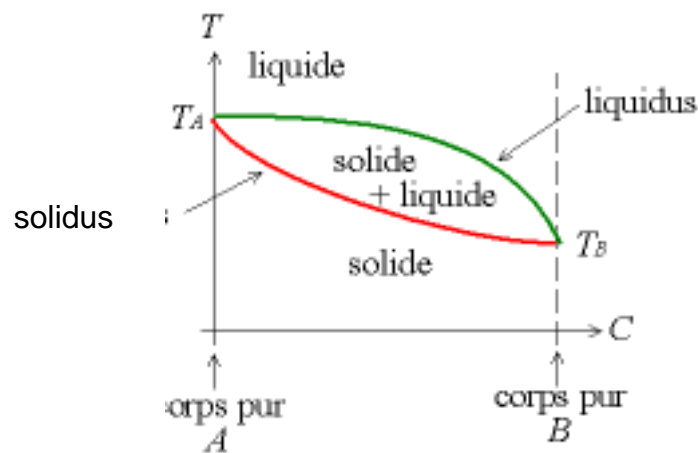


Figure IV.6 Changement de phase d'un alliage (A+B)

L'utilisation de l'approche numérique à travers les formulations implicites, dans le traitement de problèmes de changement de phase isotherme, s'est heurtée au saut brusque d'enthalpie à l'interface, discontinuité qui induit des fluctuations numériques à l'approche de celle-ci. Dans ce travail, une formulation nouvelle du saut d'enthalpie à l'interface est introduite à travers une approximation homographique de la fraction liquide.

Le changement de phase n'est étudié ici que d'un point de vue exclusivement thermique. Les solutions présentées sont basées uniquement sur l'équation classique du transfert de la chaleur par conduction. La solidification est simplifiée comme étant l'inverse de la fusion. Les phénomènes plus complexes comme la cinétique de cristallisation (croissance cristalline), les réactions chimiques et le transfert de masse ne sont pas considérés. Dans un matériau subissant un changement de phase non isotherme à conduction dominante, l'équation qui régit la conservation de l'énergie dans le matériau s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla(k \nabla T)$$

où H est l'enthalpie et k la conductivité thermique .

Soit g la fraction liquide locale du matériau concerné . Cette fraction évolue de 0 à 1 en traversant la zone « pâteuse » de la phase solide vers la phase liquide. Dans la zone « pâteuse », l'enthalpie est définie sous la forme générale :

$$H = (1 - g) \int_{T_{ref}}^T \rho_s c_s dt + g \int_{t_{ref}}^T \rho_l c_l dt + g \rho_l L$$

Et la conductivité thermique, k , du matériau définie par :

$$k = (1 - g)k_s + gk_l$$

La définition de la fraction liquide locale, g , est le paramètre essentiel dans le développement des méthodes de résolution. En général la fraction liquide, dans la zone de mélange, dépend de la nature du changement de phase et peut être fonction d'autres paramètres (température, vitesse de solidification, ...)

Il est observé que dans le cas du changement de phase isotherme la fraction liquide ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 respectivement dans les phases solide et liquide.

La transition entre les deux phases étant la température de changement de phase T_m , la fraction liquide prend la forme d'une fonction en escalier de la température :

$$g(T) = \begin{cases} 0; & T < T_m \\ 1; & T > T_m \end{cases}$$

La fonction en escalier modélise mieux le saut d'enthalpie au niveau de l'interface solide-liquide. Cette formulation se traduit par une discontinuité de la fonction enthalpie $H(T)$ et un pic pour la fonction capacité calorifique $c(T)$ au niveau de l'isotherme. Cette discontinuité est à l'origine des instabilités des schémas numériques construits sur la formulation implicite.

D'autres formulations pour la fonction, $g(T)$ sont donc à rechercher, formulations permettant de réduire ou dissiper ces instabilités numériques.

Tenant compte de l'existence d'une zone « pâteuse » l'évolution de la valeur de la fraction liquide $g(T)$ doit s'affranchir de la discontinuité dans la région d'application. Le choix d'une évolution linéaire dans la zone « pâteuse » ne répond pas pour autant à cette condition, l'existence de discontinuités aux limites de la zone pâteuse induit des instabilités numériques. Les seules fonctions pouvant être concernées sont les fonctions continues et dérivables dans le domaine d'application. L'approximation homographique, est une fonction qui répond aux critères de continuité, de dérivabilité et de surcroît elle est définie dans l'ensemble du domaine. L'approximation homographique utilisée est une fonction à un paramètre (ε_h) exprimée par :

$$g(T) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T - T_m}{\varepsilon_h + |T - T_m|} \right)$$

La valeur de ce paramètre (ε_h) est liée à l'étalement de la zone de mélange. La question est de vérifier dans quelles conditions la formulation choisie est applicable aux changements de phase isothermes. Pour ce faire il est nécessaire de considérer une zone de mélange « fictive » d'épaisseur suffisamment faible. L'approximation homographique utilisée est une fonction à un paramètre, ε_h et la valeur de ce paramètre est liée à l'étalement de la zone de mélange. Le modèle de la solidification sera basé sur le choix du paramètre (ε_h) dont l'efficacité est testée ci-après dans un problème bidimensionnel.

IV.5. Application à la solidification

Le modèle numérique développé est appliqué au cas de la solidification d'un matériau à température initiale supérieure à sa température de changement de phase soumis à la paroi à un refroidissement brusque. La comparaison des résultats des calculs effectués pour différentes valeurs du paramètre (ε_h) permet de cerner le cas correspondant à un phénomène isotherme.

Les solutions donnant l'évolution de la température en un point du modèle proche de l'axe montre des évolutions fortement influencées par le choix de la valeur du paramètre ε_h .

Le changement de phase isotherme se caractérise par la constance de la température à l'interface solide-liquide. Lorsque le matériau atteint la température de solidification l'énergie mise en jeu est uniquement sous forme de chaleur latente de changement de phase, en absence totale de chaleur sensible.

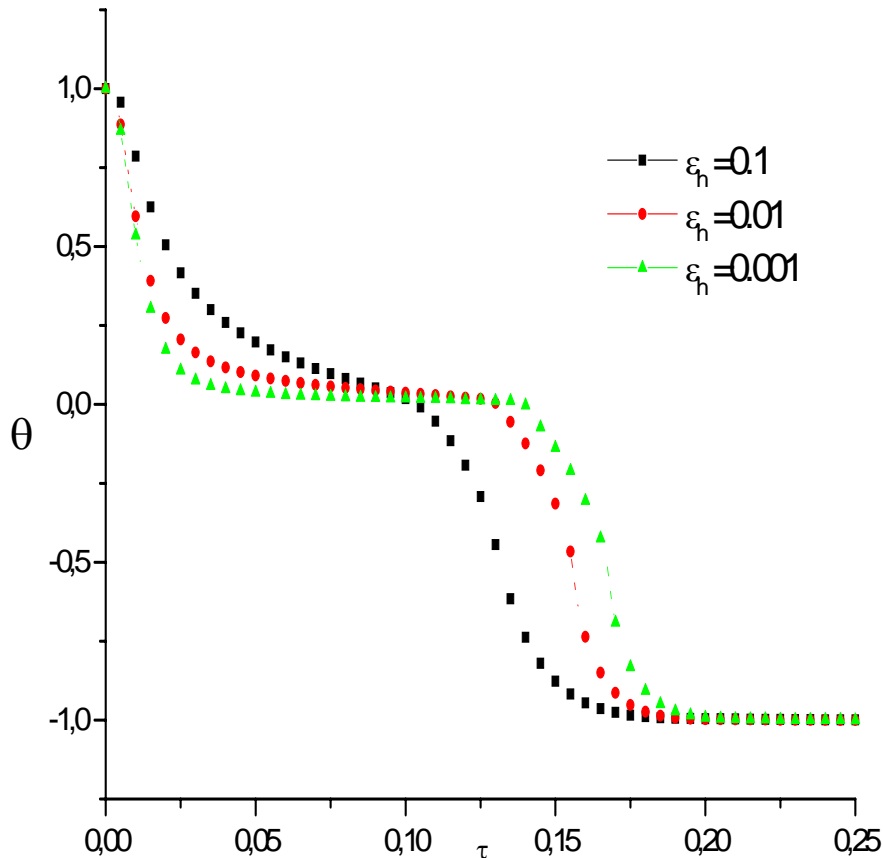


Figure IV.7: Influence du paramètre ϵ_h de l'approximation homographique sur les solutions dans le cas de la solidification. Pour un point proche de l'axe du cylindre

Le graphe ci-dessus (IV.7) présente les évolutions de la température, en un point proche de l'axe, pendant la solidification et pour différentes valeurs du paramètre ϵ_h .

Pour les valeurs $\epsilon_h = 0.1$ et 0.01 les courbes d'évolutions de la température présentent un point d'inflexion à la température de changement de phase, le matériau passe de l'état liquide à l'état solide à la température de changement de phase. Et l'évolution de la température est linéaire dans une zone de température autour de la température de solidification (région pâteuse). Ceci correspond à un changement de phase totalement anisotherme avec une zone

pâteuse où est mis en jeu de la chaleur sensible et de la chaleur latente de changement de phase.

Pour la valeur $\varepsilon_h = 0.001$ l'évolution de la température au point considéré représente une évolution de température qui correspond au cas d'un processus de solidification isotherme : au dessus de la température de solidification il est observé une décroissance de la température par refroidissement par conduction de chaleur dans le matériau (chaleur sensible), puis apparaît un plateau qui correspond à une évolution isotherme où seule la chaleur latente de changement de phase est mise en œuvre (Fig.IV.3).

IV.6.Changement de phase périodique.

Le changement de phase est un processus qui met en œuvre de la chaleur, cette chaleur étant absorbée ou générée selon qu'il s'agisse de fusion ou de solidification. La fusion est un processus endothermique, lorsque la température de changement de phase est atteinte, le matériau commence à fondre en absorbant de la chaleur. Cette énergie calorifique est alors stockée, sous forme de chaleur latente de changement de phase, dans le matériau. La température restant alors constante jusqu'à la fin du processus de fusion pour les corps purs. Le modèle numérique développé dans le chapitre précédant est appliqué dans le cadre de ce travail au cas d'une évolution périodique de la température du puits de chaleur dans lequel plonge le modèle.

IV.6.1 .Considérations des effets de bords :

IV.6.1.1 Influence sur l'évolution de l'interface

.Dans le but de montrer l'influence des effets de bords sur l'évolution de l'interface de fusion, en absence de convection naturelle dans la phase liquide, les évolutions de cette interface sont évaluées dans les deux cas. Le matériau et l'ambiant sont pris à une température initiale, θ_i , inférieure à la température de changement de phase. La température ambiante (du puits) en évolution périodique $\theta_a = \theta_i \cos(2\pi t)$ centrée sur la température de changement de phase ($\theta_m = 0$). L'évolution de l'interface est suivie dans la direction radiale dans le cas où l'échange convectif englobe la totalité de la frontière (effets de bords) et le cas où seule la frontière latérale est active, les autres frontières étant considérées adiabatiques.

Les évolutions de l'interface de fusion au cours du temps dans la direction radiale sont présentées sur la figure (IV.7) ci-dessous dans les cas unidimensionnel et bidimensionnel.

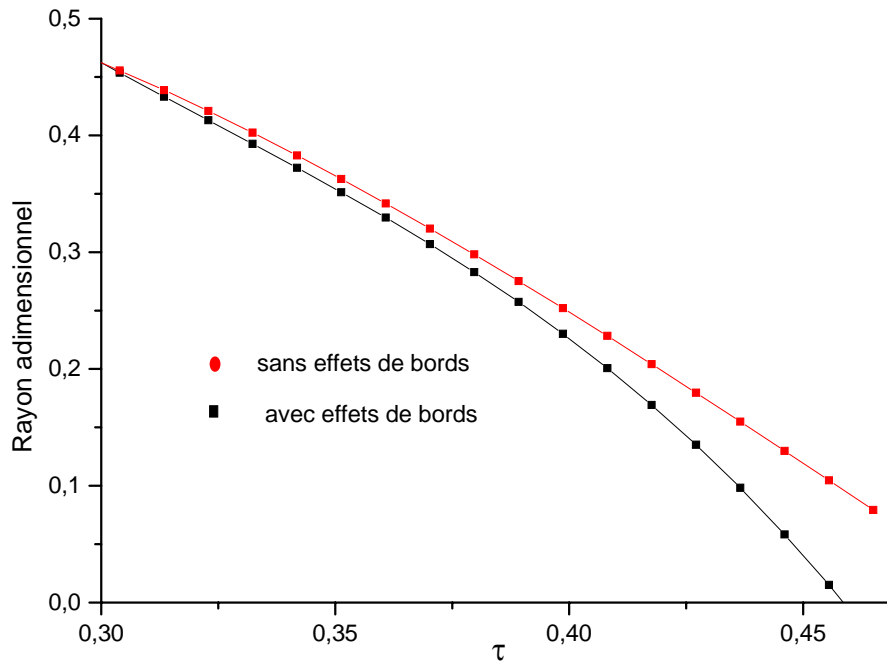


Figure IV. 8: Position des interfaces de fusion, suivant l'axe principal avec et sans effets de bords ($Ste=1$; $Biot=10$)

A l'initiation de la fusion la perturbation introduite par les effets de bords, n'a pas d'effets sur l'instant de démarrage du processus. Au fur et à mesure que la phase liquide augmente le mouvement de l'interface est plus rapide. L'influence des effets de bords se manifeste par l'accélération de la fusion et une forte réduction de la durée de la fusion totale.

IV.6.1.2 Influence sur la forme de l'interface

La forme de l'interface sous l'influence des effets de bords est relativement complexe à représenter géométriquement. Cependant dans le cas où seule la paroi latérale est active et les autres considérées adiabatiques le problème devient unidimensionnel et la température sur les frontières est uniforme et l'interface reste de forme régulière.

Les figures ci-dessous (IV.9 et 10) présentent les températures sur les frontières horizontale et verticale respectivement, dans le cas d'une solidification avec température imposée du milieu extérieur (puits de chaleur). Le refroidissement de la paroi est rapide avant le démarrage de la solidification et la température est uniforme. Au-delà le refroidissement de

la paroi est plus rapide vers les bords ce qui correspond à un épaissement plus important du matériau solide du centre vers les bords.

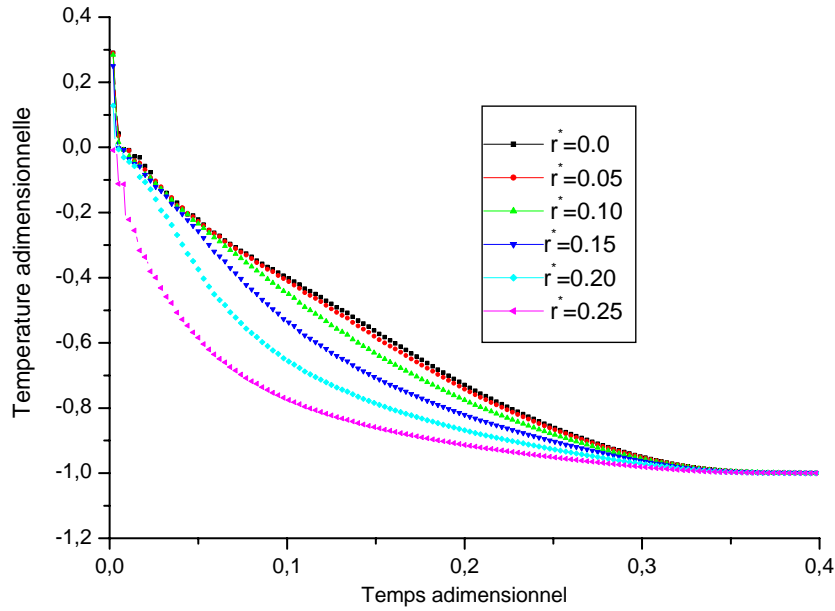


Figure IV. 9: Température de paroi horizontale (Ste=0.1 ; Biot=10)

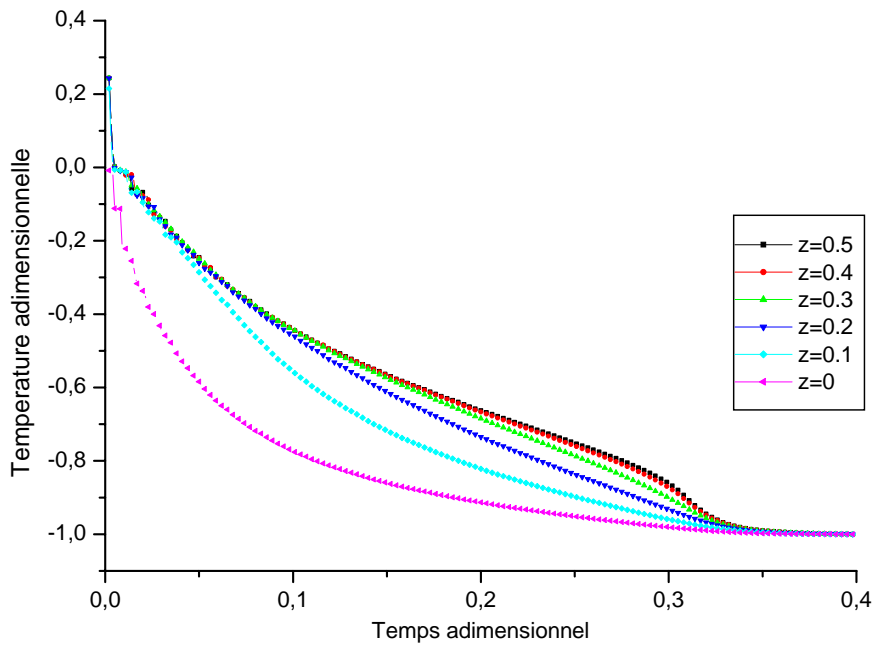


Figure IV.10: Température de paroi verticale (Ste=0.1 ; Biot=10)

IV.6.2. Influence du nombre de Stefan

Le nombre de Stefan est le rapport de la chaleur sensible à la chaleur latente de changement de phase. Le groupement adimensionnel fait intervenir des caractères thermophysiques du matériau et une plage de température de référence qui caractérise le problème à étudier.

L'influence du nombre de Stefan sur l'évolution de l'interface est considérée dans le cas d'un refroidissement périodique de la température du puits de chaleur en prenant $\theta_a = \theta_i \cos(\pi t)$

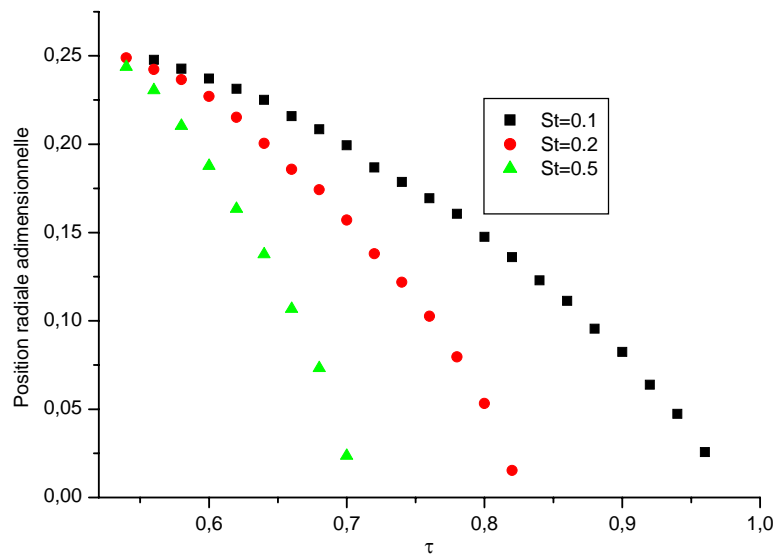


Figure IV.11: Influence du nombre de Stefan sur l'évolution de l'interface

La température initiale est prise supérieure à la température de changement de phase. L'évolution de l'interface de solidification est déterminée de façon explicite par la recherche de la position de l'isotherme θ_m . Les résultats pour trois (3) valeurs du nombre de Stefan, respectivement 0,1, 0,2, 0,5, sont représentés sur le graphe (IV.11) ci-dessus.

La première observation à noter concerne l'instant de démarrage de la solidification qui est fortement liée à la valeur du nombre de Stefan, plus faible est le nombre de Stefan plus le démarrage de la solidification est retardé au niveau des frontières.

L'évolution de l'interface est fortement tributaire des caractéristiques thermodynamiques du matériau. Les fortes valeurs de chaleur latentes correspondent à de faibles valeurs du nombre de Stefan. Il est remarqué que l'évolution de l'interface (fig.IV.11) est ralentie pour les faibles valeurs de Ste ce qui est dû à la prépondérance de la chaleur latente devant la chaleur sensible

La seconde observation concerne l'évolution de l'interface : un nombre de Stefan faible correspond à une évolution plus lente de l'interface. Ceci correspond au cas de chaleur latente est prépondérante devant la chaleur sensible.

Un échange convectif à la frontière relativement faible ($Biot=10$) à été choisi pour mettre en évidence de façon plus significative l'influence du nombre de Stefan

IV.6.3. Influence du nombre de Biot

Il est indispensable de considérer différentes conditions de paroi afin de caractériser leur influence principalement sur l'évolution de l'interface et ce pour un matériau donné.

Dans ce modèle un échange convectif à la paroi est considéré. Cette condition aux limites de type mixte fait intervenir un nombre adimensionnel : le nombre de Biot. Dans l'étude du changement de phase périodique, le milieu extérieur est supposé de température homogène et périodique.

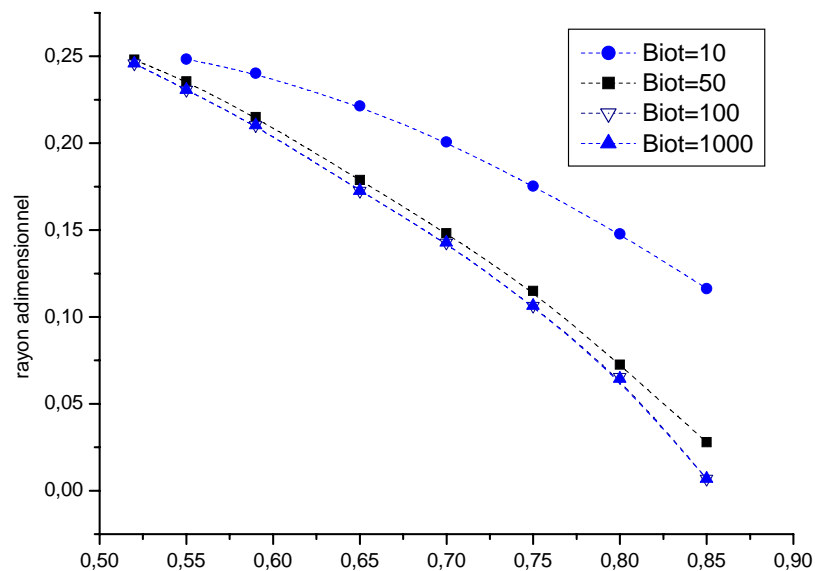


Figure IV.12: Influence du nombre de Biot sur l'évolution de l'interface

Le flux échangé par convection est fonction de la nature du milieu et du champ de vitesse. Pour les faibles valeurs du nombre de Biot l'évolution de l'interface est lente et s'accélère pour des nombres de Biot plus élevés. Il est constaté qu'au delà la de la valeur 100 le nombre

de Biot à une influence qui devient rapidement nulle. La condition à la frontière qui est de type mixte (flux convectif) dégénère vers une condition de type Driehlet (température imposée).

IV.7. Application au stockage d'énergie

IV.7.1. Les formes de stockage de la chaleur

Les moyens de stockage de l'énergie peuvent en général prendre diverses formes, en fonction des systèmes utilisés pour la production de l'énergie. Parmi les principales possibilités de stockage de l'énergie produite il est cité les formes suivantes : électrique (photovoltaïque), thermique et thermochimique [29-31].

- i).* Le stockage thermochimique, est celui qui offre la plus forte capacité de stockage en comparaison aux autres formes. Cependant les études qui concernent ce phénomène ne sont qu'à leur début, et donc en phase de développement.
- ii).* Le stockage sous forme de chaleur sensible utilise la capacité calorifique des matériaux. Cette forme de stockage dépend de l'écart de température et n'est donc efficace que pour de forts écarts de température.
- iii).* Le stockage sous forme de chaleur latente de changement de phase est celui qui a suscité le plus d'intérêt ces dernières décennies. Cette forme de stockage qui s'effectue en générale de façon quasi-isotherme est donc efficace pour une faible plage de températures et offre une forte densité de stockage d'énergie.

Dans le cas de l'énergie solaire où la conversion se fait dans les centrales héliothermiques et les serres, le stockage d'énergie sous forme thermique est celui qui s'impose en premier à l'esprit. Les deux formes d'énergies thermiques (chaleur sensible et chaleur latente) peuvent être utilisées de façons indépendantes ou combinées.

Dans les cas où l'intérêt se porte sur le stockage de l'énergie par changement de phase, il est donc nécessaire d'examiner les phénomènes qui s'y rattachent. Et particulièrement lorsque les conditions aux limites ne sont plus constantes mais en évolution dans le temps.

IV.7.2. Propriétés et avantages

Le phénomène de changement d'état d'un corps initialement liquide et devenant solide s'accompagne d'une dissipation (dégorgement) de chaleur. Le phénomène inverse, c'est-à-dire, son passage de l'état solide à l'état liquide s'accompagne d'une absorption de chaleur.

Dans les systèmes de stockage, les phénomènes de fusion et de solidification se répètent continuellement. Le changement d'état est donc cyclique, ceci restreint à rechercher des matériaux qui présentent une bonne stabilité pour supporter sans altération ces cycles répétés.

Le grand avantage du stockage par chaleur latente, vient du fait que le changement est isotherme pour les corps purs et les alliages eutectiques.

Pour les alliages le changement de phase s'effectue sur une plage de température propre à chaque matériau. L'utilisation de la chaleur latente présente des avantages incontestables sur l'emploi de la seule chaleur sensible :

- i).* L'accumulation et l'extraction de la chaleur s'effectuent à la même température, ce qui permet des rendements thermodynamiques et des capacités de production constantes.
- ii).* La capacité de stockage par unité de poids et surtout de volume nettement plus importantes.

Contrairement au stockage sous forme de chaleur sensible, les fluides caloporteurs ne peuvent pas servir d'accumulateur de chaleur.

Deux principaux avantages sont offerts par ce type de stockage de chaleur : 1- forte densité de stockage pour une faible plage de température 2- le fait que le changement de phase isotherme prend un certain temps pour être total il devient possible de restreindre la plage de températures

On notera que hormis les cas de stockage à basses ou à très hautes températures, les chaleurs latentes de transformation sont de plus en plus utilisées.

Les matériaux retenus pour le stockage de la chaleur sont les paraffines et les sels ou leurs mélanges selon les températures de mise en jeu du stockage thermique. Ces matériaux et leurs mélanges se caractérisent souvent par leur faible conductivité thermique.

Les changements de volume qui accompagnent les changements d'état provoquent des mauvais contacts thermiques entre le réservoir et le matériau, ce qui affecte les échanges thermiques. La géométrie du réservoir et sa conception jouent un rôle essentiel dans la qualité. La qualité essentielle recherchée pour les matériaux utilisés est la stabilité thermique : les corps ne doivent pas se décomposer chimiquement et les parois du réservoir ne doivent pas

être des catalyseurs pour ces transformations .Pour les matériaux eutectiques, les cycles successifs ne doivent pas conduire à une séparation des composants.

Pour éviter les grands écarts de température au stockage et destockage, il faut travailler avec de faibles flux thermiques, c'est-à-dire avec de grandes surfaces d'échange

IV.7.3.Choix des matériaux

Dans un vaste éventail de températures, on cherche surtout à mettre en œuvre, comme moyen de stockage, des corps fusibles à la température de fonctionnement des circuits et des machines considérées ; une certaine marge de sécurité est alors assurée par l'excès de température du corps au-dessus de son point de fusion.

Les chaleurs de changement d'état, de passage d'une forme cristalline à une autre forme cristalline, peuvent également être utilisées ; toutefois, cette forme d'accumulation thermique implique que le corps soit à l'état solide, ce qui réduit considérablement l'intensité des transferts thermiques et l'intérêt du potentiel thermique du stockage.

Le stockage thermique utilisant des corps fusibles présente différents paramètres qui permettent d'optimiser le choix des accumulateurs envisagés.

1. niveau thermique : c'est le paramètre le plus important. Il dépend d'une part du niveau thermique disponible du côté de la source d'énergie, et d'autre part des formes d'énergie et des niveaux thermiques qu'on désire obtenir.
2. propriétés thermiques des corps envisagés : en particulier,
 - i). la chaleur spécifique
 - ii). la chaleur de changement de phase
 - iii). la conductibilité thermique
 - iv). les coefficients de dilatation
 - v). la stabilité thermique
3. caractéristiques pratiques des corps envisagés :
 - i). densité
 - ii). viscosité aux températures envisagées
 - iii). corrosion vis-à-vis des matériaux utilisés
4. échanges thermiques :
5. isolation thermique : nécessaire pour conserver ce corps à l'état déterminé pendant tout le temps du stockage

IV.7.4. Exemple d'application de stockage

Le choix s'est porté sur l'étude de matériaux de grande chaleur latente de changement de phase. La température du puits de chaleur est considérée en évolution périodique sous la forme suivante $\theta_a = \theta_i \cos(2\pi\tau)$

L'intérêt s'est porté sur l'évolution de la température en deux points particuliers du plan médian du modèle, à savoir la paroi et le centre du modèle. L'évolution de la température nous renseigne sur la propagation de la chaleur et du changement de phase.

Les graphes des figures 13 et 14 montrent à travers les évolutions comparées l'influence des conditions aux limites, à travers le nombre de Biot, sur l'efficacité du stockage. Pour un nombre de Stefan 0.1 le stockage n'est efficace que pour les valeurs du nombre de Biot supérieures à 10.

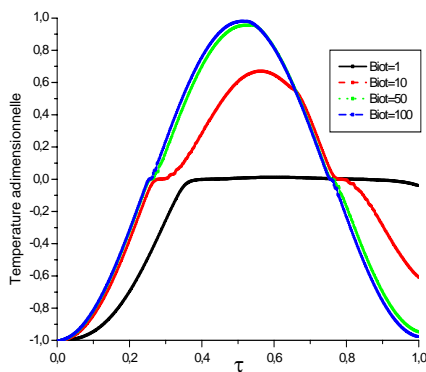


Figure IV.13: Température à la paroi pour différentes valeurs du nombre de Biot (Ste=0.1)

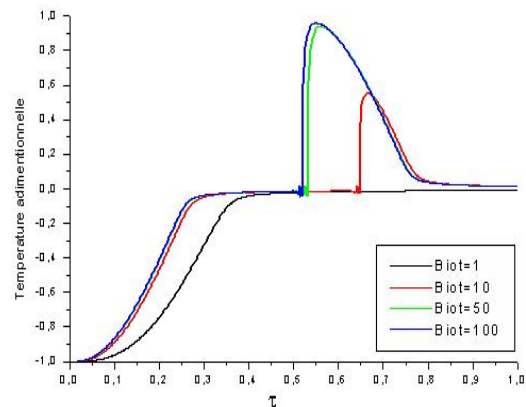


Figure IV.14: Température au centre pour différentes valeurs du nombre de Biot (Ste=0.1)

La méthode numérique utilisée dans ce travail ne permet pas de calculer les températures sur l'axe de symétrie. Les valeurs portées sur le graphe sont déduites par extrapolation.

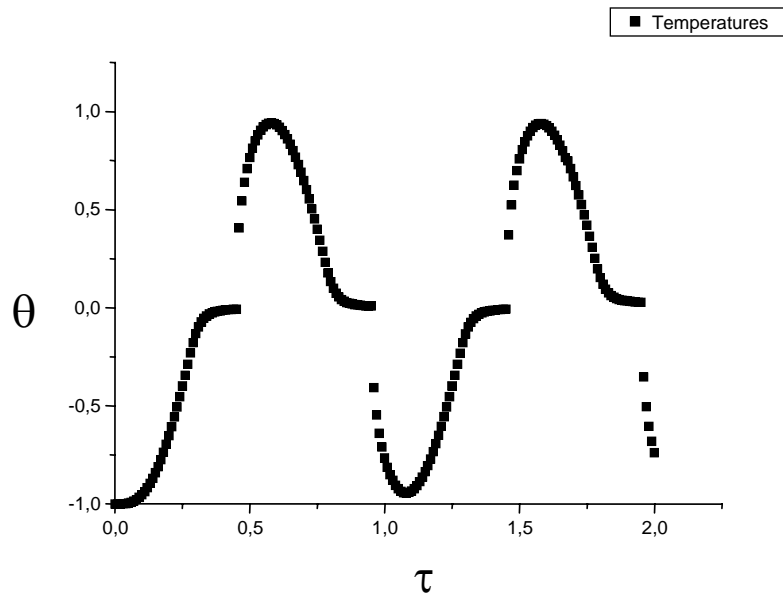
Les conditions de paroi sont pilotées par le nombre de Biot ; il caractérise la résistance thermique à la paroi: plus fort est ce nombre moindre est cette résistance. Les évolutions comparatives des températures, à la paroi et au centre du modèle, calculées et tracées pour différentes valeurs Biot mettent bien en relief l'influence de ce dernier.

Les courbes donnant les topologies radiales des températures à différents instants, pour des nombres de Biot différents, pendant la fusion montre des évolutions de température très différentes dans les deux phases. La progression qualitative de l'interface de fusion est appréciée à travers la position de la cassure des courbes de température. La progression de l'interface est fortement influencée par la valeur du nombre de Biot

Dans le cas de figure correspondant au graphe ci-dessous. L'évolution de la température au centre du modèle est représentée sur deux périodes. Ceci montre la périodicité du cycle fusion (stockage) solidification (restitution) de la chaleur latente de changement de phase.

Il est à noter que les valeurs choisies pour les nombres de Stefan et de Biot ne correspondent pas à un matériau et des conditions de stockage efficace. Cependant, cette évolution nous renseigne sur:

- L'intégralité de la fusion du matériau dans la phase active (évolution de la température du puits de chaleur d'un minimum à un maximum).
- Le retour aux conditions initiales dans la phase passive.
- Le comportement du matériau dans la seconde phase : reproductibilité du phénomène fusion/ solidification.
- L'adaptation du matériau comme moyen de stockage d'énergie, compte tenu des conditions extérieures.



FigureIV.15: Evolution des Températures au centre sur deux périodes ($Ste=1$; $Biot=10$);

IV.7.5 Topographie des températures

Les topographies des températures suivant un rayon principal sont représentées pour différentes valeurs des paramètres Ste et $Biot$.

Pour un échange aux parois correspondant à celui de la convection naturelle ($Biot=10$) la distribution des températures est représentée pendant la période de fusion suivant une direction radiale, pour deux valeurs différentes de Stefan. La température du puits considérée en évolution périodique

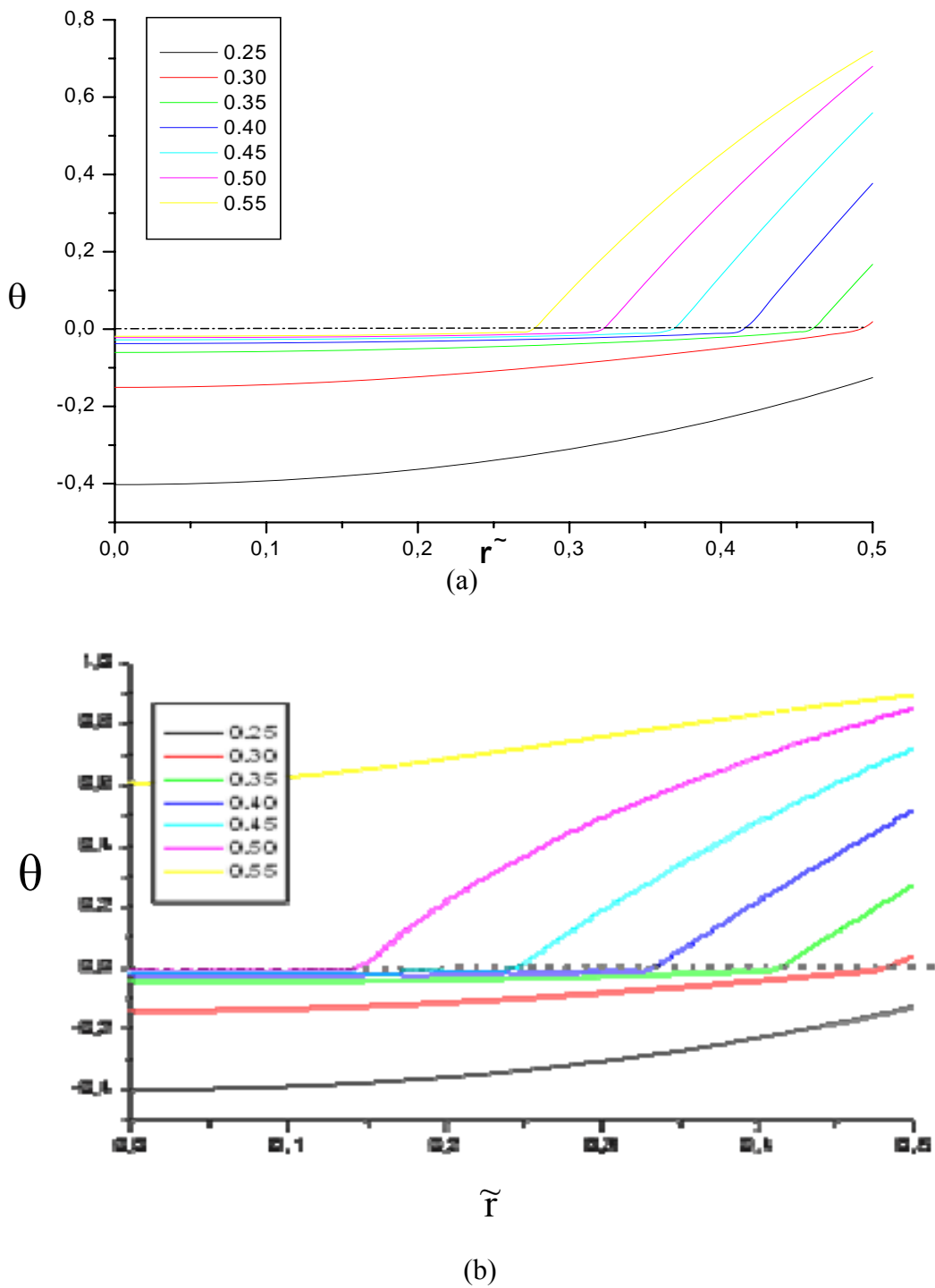


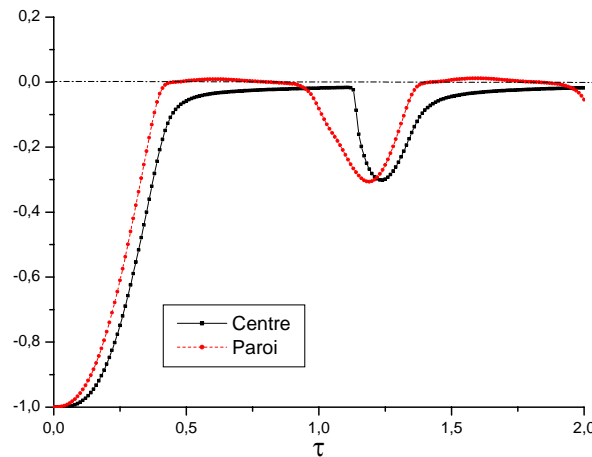
Figure IV.16: Comparaison des évolutions des températures dans la phase de fusion pour $Biot = 10$:
 (a) $Ste = 0.2$; (b) $Ste = 0.5$

Il est observé, suite à l'absorption de la chaleur par le matériau pendant sa fusion, des évolutions différentes dans la phase solide et dans la phase liquide. Le saut d'enthalpie, à

l'interface, entraîne des gradients de température importants dans la phase liquide et de faibles valeurs dans la phase solide. Le point du graphe correspondant à la cassure dans les évolutions correspond exactement à la position de l'interface.

L'influence du nombre de Stefan met en relief que pour les faibles valeurs de ce dernier le changement de phase est ralenti. En effet, la chaleur latente étant plus importante rallonge le temps de changement de phase totale. Par contre, pour de grands nombres de Stefan, avec les mêmes conditions à la paroi, la fusion progresse plus rapidement suite à une meilleure conduction dans la phase solide. L'interface progresse plus rapidement.

Le graphe ci-dessous représente un cas où le matériau utilisé est inefficace pour le stockage d'énergie. Les évolutions de la température de la paroi et du centre montre bien l'absence de productivité du phénomène fusion- solidification



FigureIV.17: Evolution des Températures à la paroi et au centre r ($Ste=0.1$; $Biot=1$);

Les figures ci-dessous montrent les topographies des température pour un matériau de forte chaleur latente de changement de phase, pour un cycle complet fusion- solidification. En tenant compte des distributions de températures obtenues il est constaté que pour un nombre de Biot de 10 (convection libre dans l'air) le changement de phase n'est pas total aussi bien pendant la fusion que la solidification. Ceci signifie que sur une période d'évolution la fusion n'est pas totale (phase de stockage) lorsque la solidification est initiée au niveau de la paroi.

Phase de fusion

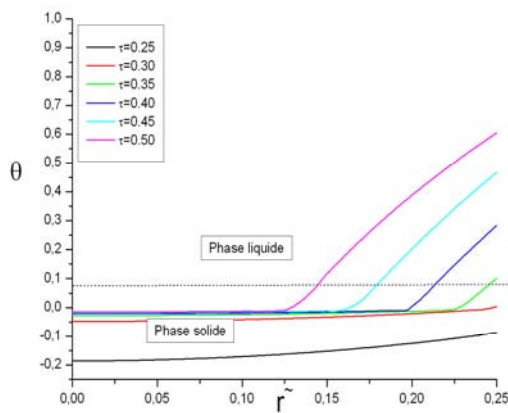


Figure IV.18: Evolution de la Température radiale durant la fusion ($Ste=0.1$; $Biot=10$);

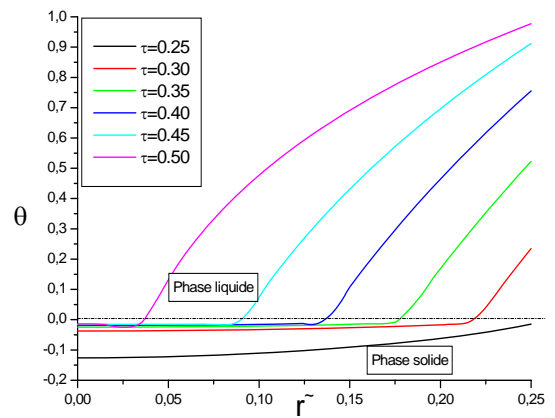


Figure IV.19: Evolution de la Température radiale durant la fusion ($Ste=0.1$; $Biot=100$);

Phase de solidification

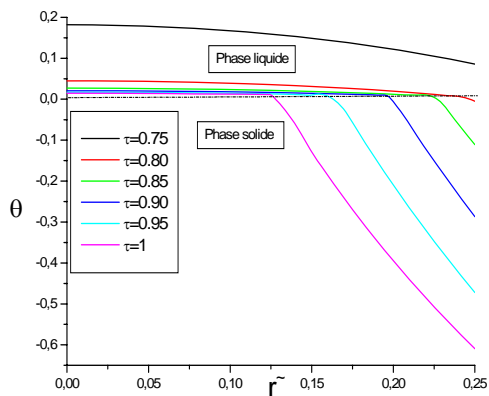


Figure IV.20 : Evolution de la Température radiale durant la solidification ($Ste=0.1$; $Biot=10$);

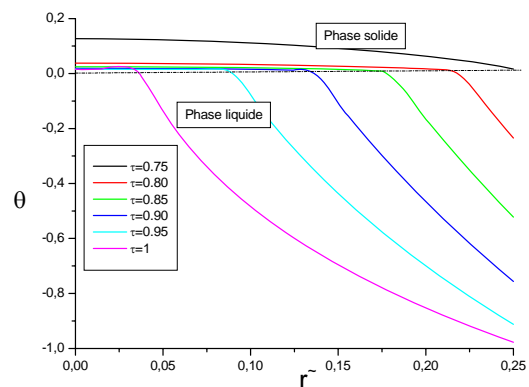


Figure IV.21 : Evolution de la Température radiale durant la solidification ($Ste=0.1$; $Biot=100$);

Ceci ne se produit pas pour un nombre de Biot de 100. Le stockage est donc efficace pour des valeurs du nombre de Biot supérieur à celle-ci

Ainsi le choix du matériau (caractéristiques thermophysiques appropriées), pour le stockage d'énergie sous forme de chaleur latente, est gouverné par le type de système de production d'énergie et des conditions d'utilisation.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Les solutions analytiques et semi-analytiques pour la résolution des problèmes d'interface mobile se limitent à des cas idéaux parfois très éloignés de la réalité physique et pour la majorité à des conditions aux limites constantes. Cependant, ces solutions ont leur intérêt pour les résolutions numériques de problèmes plus complexes, elles sont très utilisées comme solutions de départ.

Le processus de changement de phase solide-liquide est intimement lié à la nature des matériaux. Il est isotherme pour les matériaux purs et les mélanges eutectiques ; mais s'étale sur un certain intervalle de température pour les mélanges. Ceci différencie leurs approches. Les deux approches exposées au chapitre II montrent que l'existence de deux phases séparées par une frontière libre est la principale source de la complexité des phénomènes qui s'y déroulent. La résolution de tels problèmes, particulièrement dans le cas l'approche explicite, exige des moyens de calcul importants.

L'approche implicite utilisée pour les changements de phase étalés nécessite la connaissance du comportement du matériau dans la zone de mélange.

Dans ce travail, le changement de phase isotherme et bidimensionnel, dans une configuration cylindrique est abordé. Dans le but de contourner les contraintes de l'approche explicite, une nouvelle formulation enthalpie-température est utilisée, de sorte à étendre l'application de la méthode enthalpique à un changement de phase isotherme.

Les approximations linéaires et en escalier introduisent des instabilités numériques dues au saut d'enthalpie à l'interface. Le saut d'enthalpie à l'interface est modélisé par une fonction approximation homographique à un paramètre, continue et dérivable. Une méthode aux volumes finis est utilisée pour transformer les équations en un système d'équations algébriques. Cette forme présente l'avantage d'être conservative. La discrétisation tient compte de la variation du rayon, dans la détermination des coefficients de transfert de chaleur au niveau de la surface de deux cellules adjacentes.

La considération d'une condition de paroi en évolution périodique dans le temps conduit à la description successive des phénomènes de fusion et de solidification. Pour cela une condition aux limites en évolution périodique, autour de la température de changement de phase est utilisée. La modélisation considérée fait apparaître deux paramètres caractéristiques qui sont les nombres de Stefan et de Biot liés respectivement aux caractéristiques thermophysiques du

Conclusion générale

matériau et aux conditions aux limites. La gamme de valeurs de ces paramètres s'est limitée aux cas où le changement de phase apparaît, $1 \geq Ste \geq 0.1$ et $Biot \geq 10$.

L'application au stockage et destockage de l'énergie sous forme de chaleur latente de changement de phase a été succinctement abordé mettant en exergue l'importance des propriétés de transport.

Ce travail nécessite une amélioration au niveau du démarrage de la solidification où des erreurs importantes ont été enregistrées. Cela pourrait être le prolongement de cette étude.

Références

Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] **Sadoun N. et Si-Ahmed E.K** “Application de l’approximation homographique à la définition de l’enthalpie pour l’étude de la solidification d’une plaque plane” Premier Congrès National de la Physique et ses Applications –CNPA I, Alger, (1995)
- [2] **Voller V.R et Swaminatha C. R.** “Generalised source based method for solidification phase change” Numerical Heat Transfer pp175-189 (1991)
- [3] **Voller V. R. et Cross M. K** “Accurate solution of moving boundary problems using the enthalpy method.” Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 1981, vol.24, p545-556.
- [4] **Stefan. J** “Über die theorie der eisbildung, insbesondere uber die eisbildung in polarmeer” Ann. Phys. Chemi. , (1891)
- [5] **Sadoun N** “Contribution à l’étude du problème de solidification. Approche Semi-Analytique.” Thèse de magistère, U S T H B, Juillet (2006).
- [6] **G. Lamé et E. Clapeyron** “Mémoire sur la solidification par refroidissement d’un globe liquide. Ann. Chem. Phys. 47: 250-256, 1831.
- [7] **Neumann .F** “ Die partialen differentialgleichungen der Mathematik physique” Reimann – Weber vol.2 p:121, 1912
- [8] **J. Boussinesq** “Théorie analytique de la chaleur” Vol.2, Gauthier Villars (1990)
- [9] **Gobin.D** “Rôle de la convection thermique dans les processus de fusion-solidification” Modélisation numérique et thermique, Atelier de l’Ecole d’été GUT-CET, Institut d’Etudes Scientifiques de Cargèse –France-, 29 Juin- 4 juillet (1992)
- [10] **Delaunay. D** “Etude du couplage convection naturelle - conduction avec changement de phase .Application au stockage périodique de l’énergie” Thèse de Doctorat d’Etat Es Sciences, U.F.R de Sciences de l’Université de Nantes -France, (1985) .
- [11] **Kroeger. PG et Ostrach. S** “ The solution of a two-dimensional freezing problem ” Int. Journal of Heat and Mass Transferpp1191-1207(1973)
- [12] **Sparrow.E.M and al.** “Analysis of two dimensional freezing on the outside of a coolant carrying tube” Int. Journal of Heat and Mass Transfer vol.24 n°8 pp 1345-1357 (1981)
- [13] **Crank J.** “Free and moving boundary problem” Oxford at the Clarendon Press (1983)
- [14] **L.S Yao et F.F. Chen.,** Effects of Natural Convection in the Melted. Region Around a Heated Horizontal Cylinder, Journal of Heat Transfer, 102,. 667(1980).
- [15] **London et Seban** “Rate for ice formation “Transactions of ASME, 65, October 1943 pp771-778
- [16] **Rathjen K.A, Fiji L.M** “Heat conduction with melting or freezing in a corner” ASM Journal of Heat Transfer vol.93 pp101-109 (1973)
- [17] **Tao L.N** “The exact solutions of some Stefan problems with prescribed heat flux” ASM J. Appl. Mech. vol. 48 pp 732-736 (1981).

Références Bibliographiques

- [18] **Fredrick D., Greif R** “A method for the solution of heat transfer problems with a change of phase ” *ASM J. Heat Transfer* vol.107 pp520-526 (1985)
- [19] **Oliver D.L.R, Sunderland J.E** “A phase change problem with temperature dependent thermal conductivity and specific heat” *Int. J. Heat Mass Transfer* vol.30 n° 12 pp2657-2661(1987)
- [20] **Voller V.R** “Fast implicit finite-difference method for the analysis of phase change problems” *IMA Journal of Numerical Analysis*, 5 pp 201-214 (1985)
- [21] **Bennou W. D. et Incropera F. P** “Phase change with convection modelling and validation” *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* vol.30 pp2161-2170 (1987)
- [22] **Brent** “Enthalpy-porosity Technique for Modelling Convection-Diffusion phase change” *Numerical Heat Transfer* vol.13 pp297-318 (1988)
- [23] **Patankar S.V.** “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow” *Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Mc Graw-Hill, (1980).*
- [24] **Versteeg H.K, Malalasekera W.** “Introduction to Computational Fluid Dynamics, An: The Finite Volume Method”, Longman, Harlow, United Kingdom, Publication Date: 1995.
- [25] **Bilir L, Ilken .Z.** “Total solidification time of a liquid phase change material enclosed in cylindrical containers” *Applied Thermal Engineering* n°25 pp 1488-1502 (2005).
- [26] **H.S. Carslaw et J.C. Jaeger** “Conduction of heat in solids” Oxford University Press, New York, 1967
- [27] **Sinha T.K. and Gupta J.P** “Solidification in an annulus” *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* vol.25 n°11 (1982).
- [28] **Cho S. H. et Sunderland J. E.** “Heat conduction problems with melting or freezing” *Transaction of the ASME. Series C, Journal of Heat Transfer*, 1969, vol.91, n°3, p421-426.
- [29] **Bellecci C. and Conti M.** “Phase change thermal storage: transient behaviour analysis of a solar receiver storage module using the enthalpy method” *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* vol.36 n°8 pp 2157-2163 (1993)
- [30] **V. Alexiades, A.D. Solomon** “Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes” *Hemisphere Publishing Corporation, USA, 1993*
- [31] **Zalba B. et al.** ”Review on thermal energy storage with phase change: materials, heat transfer analysis and applications” *Applied Thermal Engineering* 23 pp 251-283 (2003)