

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Génie Mathématiques

Par : LABBI Wafaa

Sujet

**ORDONNANCEMENT SUR MACHINES PARALLELES
IDENTIQUES AVEC TEMPS DE PREPARATION**

Soutenu le 08/04/2009, devant le jury composé de :

M. BERRACHEDI Abdelhafid,	Professeur,	U.S.T.H.B.,	Président
M. BOUDHAR Mourad,	Maître de conférences,	U.S.T.H.B.,	Directeur de thèse
M. MOULAI Mustapha,	Professeur,	U.S.T.H.B.,	Examineur
Mlle HANED Amina,	Maître Assistante,	U. d'Alger,	Invitée

Remerciements

Il est impossible de remercier tous ceux qui m'ont appris, aidé, pendant ces années de formation à la recherche. Je décernerai seulement quelques mentions spéciales.

Je tiens tous d'abord à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Mourad BOUDHAR, mon directeur de thèse, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B., pour son implication à la réalisation de ce travail de recherche et pour le support qu'il m'a apporté. Sa patience, sa disponibilité et la pertinence de ses conseils m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ce travail.

Ma reconnaissance va ensuite aux personnes qui me font l'honneur de composer ce jury :

Monsieur Abdelhafid BERRACHEDI, Professeur à l'U.S.T.H.B., pour avoir accepté de présider ce jury.

Monsieur Mustapha MOULAI, Professeur à l'U.S.T.H.B., et Mademoiselle Amina HANED, Maître Assistante à l'Université d'Alger d'avoir accepté d'être les examinateurs de mon travail.

Je remercie sans limite ma mère qui, par son encouragement et son soutien, m'a permis d'aller de l'avant dans mes projets.

Mes derniers mots seront pour : ma soeur, mes frères, mes tantes et oncles ainsi que mes ami(e)s, leur présence durant ces années a été fort appréciée.

Enfin, ce travail est dédié à la mémoire de mon père Abdellah.

Résumé

Nous adressons dans ce mémoire, le problème de minimisation de la longueur d'ordonnement de n tâches indépendantes et non préemptives sur m machines parallèles identiques en présence de k ouvriers spécialisés. Dans notre contexte, la présence d'ouvriers spécialisés est nécessaire pour la préparation des machines et des tâches, donc chaque tâche T_i ($i=\overline{1,n}$) nécessite un temps de traitement p_i et un temps de préparation S_i . Nous proposons une méthode exacte qui consiste à modéliser mathématiquement le problème et nous montrons que le problème général est NP-difficile.

Un sous-problème facile ainsi qu'une série d'heuristiques sont présentés avec des expérimentations numériques.

Mots clés : Ordonnancement, machines parallèles, temps de préparation, makespan, heuristique, complexité.

Abstract

In this thesis, we address the problem of minimizing the makespan of n independent jobs on m parallel machines, no preemption is allowed in presence of k specialized workers. In this context, the presence of specialized workers is necessary to prepare the machines and jobs, so, each job T_i ($i=\overline{1,n}$) requires a processing time p_i and a preparation time S_i . We present an approximation algorithm based on linear programming formulations, and we prove the NP-hardness of the general problem.

Polynomial subproblem, also, heuristic algorithms are presented with numerical experiments.

Keywords : Scheduling, parallel machines, preparation times, makespan, heuristic algorithms, complexity.

Table des matières

Introduction	7
1 Généralités sur l’ordonnancement	10
1.1 Introduction	10
1.2 Diagramme de Gantt	11
1.3 Enoncé d’un problème d’ordonnancement	11
1.3.1 <i>Tâches</i>	11
1.3.2 <i>Liens entre tâches</i>	12
1.3.3 <i>Ressources</i>	12
1.3.4 <i>Critères</i>	13
1.4 Caractérisation d’ateliers	13
1.4.1 <i>Machine unique</i>	14
1.4.2 <i>Machines parallèles</i> (parallel machines)	14
1.4.3 <i>Le problème d’atelier à cheminement quelconque</i>	14
1.4.4 <i>Le problème d’atelier à cheminement unique</i>	14
1.4.5 <i>Le problème d’atelier à cheminement multiples</i>	14
1.5 Approche pour la prise en compte des temps de préparation	15
1.5.1 <i>Modèles pour la préparation des ressources</i>	15
1.5.2 <i>Descripteur</i>	16
1.6 Etat de l’art des méthodes de résolution	19
1.6.1 <i>Complexité</i>	19
1.6.2 <i>Réduction entre problème d’ordonnancement</i>	20
1.6.3 <i>Méthodes classiques de résolution</i>	21
2 Position du problème et étude de la complexité	26
2.1 Introduction	26
2.2 Etat de l’art	26
2.3 Présentation du problème	31
2.4 Exemple illustratif	31
2.5 Modélisation mathématique	32
2.5.1 <i>Les variables</i>	33

2.5.2	<i>Les contraintes</i>	33
2.5.3	<i>Le critère à optimiser</i>	33
2.5.4	<i>Taille du modèle</i>	34
2.6	Etude de la complexité	35
3	Résolution	37
3.1	Introduction	37
3.2	Calcul des bornes	37
3.3	Sous problème polynomial	38
3.4	Algorithmes approchés	40
3.4.1	Description de l'heuristique H1	41
3.4.2	Description de l'heuristique H2	42
3.4.3	Description de l'heuristique H3	43
3.4.4	Description de l'heuristique H4	44
3.4.5	Description de l'heuristique H5	45
3.4.6	Description de l'heuristique H6	45
4	Expérimentations numériques	47
4.1	Introduction	47
4.2	Génération de problèmes tests	47
4.2.1	Première série de tests	48
4.2.2	Deuxième série de tests	63
4.2.3	Troisième série de tests	76
4.2.4	Quatrième série de tests	90
4.3	Analyse des résultats	105
	Conclusion	107
	Bibliographie	108

Liste des tableaux

2.1	Les temps de traitement et de préparation de l'exemple 2.1	31
3.1	durées de traitement et de préparation de l'exemple 3.2	41
4.1	Tests pour $p_i \in [1, 10]$ et $S_i \in [1, 5]$	58
4.2	Tests pour $p_i \in [1, 20]$ et $S_i \in [1, 10]$	72
4.3	Tests pour $p_i \in [1, 50]$ et $S_i \in [1, 20]$	86
4.4	Tests pour $p_i \in [1, 100]$ et $S_i \in [1, 50]$	100
4.5	Comportement des heuristiques	105

Table des figures

1.1	Exemple d'un diagramme de Gantt	11
1.2	Différents modèles de temps de préparation(S_i étant le temps de montage tage	16
1.3	Hierarchie de complexité entre différents problèmes	20
2.1	Exemple 2.1 : solution	32
3.1	Exemple 3.1 : solution générée par l'algorithme A	39
3.2	Exemple 3.2 : solution générée par l'heuristique $H1$	42
3.3	Exemple 3.3 : solution générée par l'heuristique $H2$	43
3.4	Exemple 3.4 : solution générée par l'heuristique $H3$	44
3.5	Exemple 3.5 : solution générée par l'heuristique $H4$	44
3.6	Exemple 3.6 : solution générée par l'heuristique $H5$	45
3.7	Exemple 3.7 : solution générée par l'heuristique $H6$	46
4.1	Comportement de l'heuristique H5 par rapport à la borne inférieure	62
4.2	Comportement de l'heuristique H5 par rapport à la borne inférieure	76
4.3	Comportement de l'heuristique H5 par rapport à la borne inférieure	90
4.4	Comportement de l'heuristique H5 par rapport à la borne inférieure	104

Introduction

La recherche opérationnelle, appelée aussi science du management ou science de la décision, est une discipline relativement récente, elle apparaît principalement dans les années 1940, motivée par des applications militaires. Elle s'inscrit aujourd'hui pleinement dans le cadre de la compétitivité économique.

La recherche opérationnelle a pour but d'apporter une démarche scientifique à la résolution de problèmes de décision complexe issus du monde réel. Sa vocation scientifique est alors de construire des modèles formels d'aide à la décision, en particulier les modèles liés à des problèmes d'optimisation et de proposer des méthodes de résolution efficace de ces modèles. L'efficacité de ces méthodes nécessite une connaissance approfondie des caractéristiques du problème réel, leur évaluation se mesure à la fois sur leur efficacité (complexité, taille des problèmes résolus,...) et sur l'implémentation pratique des solutions obtenues.

L'intérêt pour la théorie de l'ordonnancement a surgi dans les années 1950 et n'a pas cessé d'augmenter ces dernières années, peut-être du fait de son applicabilité à une multitude croissante de problèmes et de sa difficulté qui intéresse les chercheurs. Parmi les problèmes d'optimisation combinatoire, les problèmes d'ordonnancement sont probablement les plus liés au monde industriel puisqu'il s'agit de concilier, de façon optimale, des ressources limitées avec des activités dans le temps.

La théorie de l'ordonnancement étudie des problèmes qui ont souvent la caractéristique d'avoir un nombre fini de solutions réalisables. En principe, les solutions optimales d'un tel problème pourraient être déterminées par une simple énumération, en pratique, c'est souvent impossible, spécialement pour les problèmes qui modélisent des situations réelles, car le nombre de solutions à énumérer est trop grand.

Un des objectifs de la théorie de l'ordonnancement est de déterminer une solution optimale ou une bonne solution en un temps raisonnable.

L'immense impact de la théorie de la complexité est basé sur l'hypothèse, largement convenue, que définir l'appartenance d'un problème à la classe des problèmes qui se ré-

solvent en temps polynomial, la classe P, est une manière mathématique appropriée de formaliser le concept empirique des problèmes qui se résolvent bien en pratique. En conséquence, la question est comment aborder les problèmes NP-difficiles qui ne peuvent pas efficacement être résolus à l'optimalité, à moins que $P=NP$.

Les réponses possibles à cette questions sont :

- Les algorithmes de liste qui construisent de façon itérative une solution.
- Les procédures par séparation et évaluation.
- Les méthodes heuristique.
- Les méthodes par relaxation de contraintes, etc.

Bien que l'intérêt pour les problèmes d'ordonnancement à une seule machine soit encore très important, les problèmes à machines parallèles sont de plus en plus étudiés dans la littérature. En effet, ils reflètent des environnements de production où, pour des raisons de rapidité, plusieurs ressources sont disponibles pour effectuer les tâches.

Ce travail de mémoire vise à étudier un problème d'ordonnancement de tâches indépendantes sur des machines parallèles identiques pour minimiser la date de fin de traitement de l'ensemble des tâches. Nous supposons qu'il existe un temps de préparation, où les tâches doivent être préparées par des ouvriers spécialisés avant leur exécution.

Ce problème d'ordonnancement (noté $Pm/S_i, k/C_{max}$) est prouvé NP-difficile. Ce pourquoi, nous avons choisi, tout d'abord, d'étudier de façon fine une solution exacte utilisant la modélisation mathématique. Puis, nous nous sommes attachés à développer un certain nombre d'heuristiques.

Le présent mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre présente les éléments essentiels qui introduisent et préparent la formulation du problème étudié. Nous commençons par introduire les problèmes d'ordonnancement ainsi que les notations utilisées dans la suite de ce mémoire. Il est à noter que le domaine d'application des problèmes d'ordonnancement ne concerne pas exclusivement les problèmes relatifs à la gestion de production, mais est beaucoup plus large. En effet, la théorie de l'ordonnancement s'applique dès qu'un ensemble de ressources est à utiliser pour réaliser un ensemble de tâches. Nous donnons également un bref rappel pour la prise en compte des temps de préparation, et nous présentons aussi une classification des problèmes d'ordonnancement, leur complexité et quelques méthodes de résolution.

Nous proposerons, au chapitre2, un état de l'art sur l'ordonnancement de machines parallèles en insistant sur le cas des machines parallèles identiques. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée au problème d'ordonnancement que nous avons étudié. Dans

un premier temps, nous décrivons ce problème, ainsi les différentes notations nécessaires. Nous exposons une modélisation mathématique et nous terminons par une étude de la complexité.

Le troisième chapitre, la détermination des bornes inférieure et supérieure ainsi des heuristiques de résolution en $O(n \log n)$, n étant le nombre de tâches à ordonnancer, seront proposées.

Le dernier chapitre, sera consacré à des expérimentations pour mettre en évidence les performances de ces heuristiques.

Une conclusion générale récapitule et commente les résultats de ce travail puis introduit quelques nouvelles directions de recherche qu'il nous semble intéressant de suivre.

Chapitre 1

Généralités sur l’ordonnancement

1.1 Introduction

La théorie de l’ordonnancement est une branche de la recherche opérationnelle qui s’intéresse au calcul de dates d’exécution optimales de tâches. De façon plus précise, un problème d’ordonnancement consiste à organiser dans le temps la réalisation de tâches, compte tenu de contraintes temporelles (délais, contraintes d’enchaînement, etc.) et de contraintes portant sur la disponibilité des ressources requises. Un ordonnancement est défini par le planning d’exécution des tâches et l’allocation des ressources et vise à satisfaire un ou plusieurs objectifs. Plus précisément, Carlier et Chrétienne [10] proposent la définition suivante :

Définition 1.1. *Ordonnancer c’est programmer l’exécution d’une réalisation en attribuant les ressources aux tâches et en fixant leur dates d’exécution. La réalisation peut être, par exemple, un programme informatique ou le carnet de commandes d’un atelier. Alors les tâches sont des processeurs informatiques ou des traitements à appliquer à certaines pièces par des machines. Les ressources sont alors des processeurs et de la mémoire ou des machines et du personnel. Établir un ordonnancement revient à coordonner l’exécution de toutes les tâches, en utilisant au mieux les ressources disponibles.*

Les problèmes d’ordonnancement sont des problèmes souvent rencontrés dans l’industrie ou l’ingénierie. Dans un système d’exploitation, le noyau doit gérer les priorités et l’organisation des processus qui s’exécutent en même temps, ce qui correspond à un problème d’ordonnancement. De même, nous avons des exemples dans beaucoup d’autres disciplines. La gestion de production et le fonctionnement des atelier d’une industrie sont régis par des règles d’ordonnancement, et même la réalisation d’un emploi du temps y fait appel.

Les problèmes d'ordonnancement sont communément représentés par des diagrammes nommés diagramme de Gantt.

1.2 Diagramme de Gantt

Ce type de diagramme a été mis au point par un américain Henry Gantt. Ceux-ci indiquant, selon une échelle temporelle, l'occupation des machines par les différentes tâches, les temps mort, et les éventuelles indisponibilités des machines dues aux changements entre produits, par exemple (voir exemple fig 1.1).

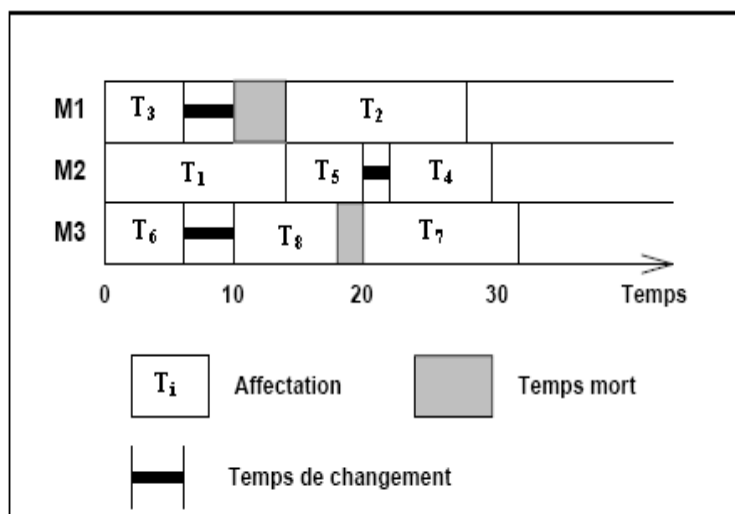


FIG. 1.1 – Exemple d'un diagramme de Gantt

1.3 Enoncé d'un problème d'ordonnancement

Regardons plus en détails comment s'énonce classiquement un problème d'ordonnancement, il faut fixer à la fois les caractéristiques des tâches, les liens entre elles, les caractéristiques des ressources, le critère d'optimalité.

1.3.1 Tâches

Une tâche est une entité élémentaire localisée dans le temps par une date de début ou fin dont la réalisation nécessite une durée et qui consomme un moyen selon une certaine intensité.

Une tâche notée T_i est définie par ses caractéristiques temporelles :

- p_i : le temps de traitement de la tâche T_i .
- S_i : le temps de préparation de la tâche T_i .

- r_i : la date de disponibilité de la tâche T_i .
- d_i : la date échue de la tâche T_i .
- C_i : la date de fin de traitement de la tâche T_i .
- w_i : un poids associé à la tâche T_i .
- $l_i = C_i - d_i$: tardivité de la tâche T_i .
- $t_i = \max \{l_i, 0\}$: retard de la tâche T_i .
- U_i : indicateur de retard de la tâche $T_i = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i > d_i \text{ si la tâche } T_i \text{ est en retard} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $f_i = C_i - r_i$: une durée de flow (flow time).

Définition 1.2. *Un mode de traitement est dit préemptif ou avec préemption si l'exécution d'une tâche (ou opération dans le cas de machines spécialisées) peut être interrompue puis reprise sur la même machine ou sur une autre. Il est dit non préemptif ou sans préemption lorsqu'une tâche est commencée, elle doit être terminée avant de pouvoir exécuter une autre tâche sur la même machine.*

1.3.2 Liens entre tâches

Les tâches sont fréquemment liées par des contraintes de précédence, ces contraintes peuvent apparaître dans le cas d'une seule machine ou d'environnement avec machines en parallèles lorsqu'une ou plusieurs tâches doivent être terminées avant le début d'une autre tâche. Il y a plusieurs types de contraintes de précédence ; si chaque tâche a au plus un prédécesseur et un successeur, la contrainte est appelée *chaîne*. Si chaque tâche a au plus un successeur ou un prédécesseur, la contrainte est respectivement de type *intree* ou *outtree*.

1.3.3 Ressources

Une ressource est un moyen technique ou humain destiné à être utilisé pour la réalisation d'une tâche. Il existe deux principaux types de ressources :

les ressources renouvelables

Elles sont disponibles en quantité constante tout au long de l'exécution des tâches, ce sera le cas des machines (ces machines peuvent être regroupées au centre de production dits souvent ateliers), des processeurs, d'ouvriers spécialisés, etc.

Les ressources consommables

Comme de juste, sont consommées par les tâches en une certaine quantité et elles sont plus disponibles après utilisation, c'est le cas des matières premières et de l'énergie par exemple.

1.3.4 Critères

Un problème d'ordonnancement n'est pas nécessairement exprimé comme un problème d'optimisation. Néanmoins, la notion de critère d'optimisation, ce qui n'est rien d'autre qu'une fonction analytique des données du problème posé, est toujours présente.

Les critères que l'on peut vouloir optimiser sont nombreux. Parmi les critères les plus répondus, on trouve :

Soit $X_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$, $\sum X_i = \sum_{i=1}^n X_i$, $\sum w_i X_i = \sum_{i=1}^n w_i X_i$ avec $X \in \{C, F, L, D, U\}$.

- C_{max} : date de fin de traitement de l'ensemble des tâches (makespan).
- $\sum C_i$: la somme des dates de fin de traitement.
- $\sum w_i C_i$: la somme pondérée des dates de fin de traitement .
- D_{max} : le grand retard.
- L_{max} : la grande tardivité.
- F_{max} : le grand temps de flow.
- $\sum U_i$: le nombre de tâches en retard.
- $\sum w_i U_i$: la somme pondérée du nombre de tâches en retard.
- d'autres critères peuvent être définis.

Dans ce mémoire, le critère étudié est le makespan.

Définition 1.3. *On parle de critère régulier si pour deux ordonnancements différents S_1 et S_2 , le fait que chaque tâche de S_1 se termine au plus tard en même temps que la tâche correspondante de S_2 entraîne que la valeur du critère pour S_1 est meilleure que la valeur du critère pour S_2 .*

1.4 Caractérisation d'ateliers

Parmi les problèmes fréquemment rencontrés dans la littérature, on trouve les problèmes d'ateliers classiques, on peut les classer en cinq catégories :

1.4.1 *Machine unique*

Dans ce problème une seule machine est disponible pour exécuter toutes les tâches.

1.4.2 *Machines parallèles (parallel machines)*

Ce problème consiste à ordonnancer un ensemble de n tâches sur m machines parallèles de telle sorte qu'une tâche nécessite pour son exécution une et une seule machine à choisir parmi les m machines.

Un double problème d'affectation des tâches aux machines et d'ordonnancer des tâches sur les machines est aussi défini, On distingue :

Le problème à machines identiques (identical machines)

Pour ces machines, Les vitesses de traitement des tâches sont toutes égales.

Le problème à machines uniformes (uniform machines)

Chaque machine a sa propre vitesse qui ne dépend pas de la tâche exécutée

Le problème à machines générales (unrelated machines)

Contrairement au cas précédent, la vitesse d'exécution dépend de la machine et de la tâche exécutée.

1.4.3 *Le problème d'atelier à cheminement quelconque*

(Open shop)

Consiste à ordonnancer un ensemble de n tâches sur un ensemble de m machines. Les opérations de chaque tâche doivent être exécutées sur des machines différentes mais dans un ordre quelconque.

1.4.4 *Le problème d'atelier à cheminement unique*

(Flow shop)

Les tâches doivent être traitées par toutes les machines, et l'ordre des opérations est fixé et est le même pour toutes les tâches.

1.4.5 *Le problème d'atelier à cheminement multiples*

(Job shop)

L'ordre du traitement sont arbitraires, mais doivent être spécifiés à l'avance.

1.5 Approche pour la prise en compte des temps de préparation

1.5.1 *Modèles pour la préparation des ressources*

La préparation des ressources peut être modélisée par deux composantes :

- Le temps de préparation (setup time).
- Le coût de préparation (setup cost).

1.5.1.1. Temps de préparation

Les temps de préparation des ressources incluent les tâches nécessaires à effectuer sur les machines ou les processus de production avant de commencer la production proprement dite. Ces travaux de préparation peuvent être de différentes natures. A titre d'exemple, on peut citer le débranchement, le démontage, le nettoyage, etc.

Le temps de préparation est un temps immobilisant la ressource préalablement ou suite à l'exécution d'une opération. On distingue :

- le temps de montage indépendant de la séquence (non sequence dependent setup times).
- le temps de démontage indépendant de la séquence (non sequence dependent removal times).
- le temps de préparation dépendant de la séquence (sequence dependent setup times).

Certaines tâches sont parfois regroupées par caractéristiques communes de préparation. Le temps de préparation par lot ou par famille (batch ou family setup time) est un cas fréquemment rencontré. Chaque tâche est supposée appartenir à une famille ou batch. Aucun temps de préparation n'est nécessaire entre deux tâches de la même famille (ou batch). Ce temps dépend soit uniquement de la famille de tâches (batch) qui le suit, soit celle qui le précède, soit dépendant de la séquence des familles (batch).

Le temps de préparation majeur (noté maj) est le temps de préparation nécessaire entre deux opérations de familles différentes alors qu'un temps de préparation mineur (noté min) est un temps nécessaire entre deux opérations de la même famille.

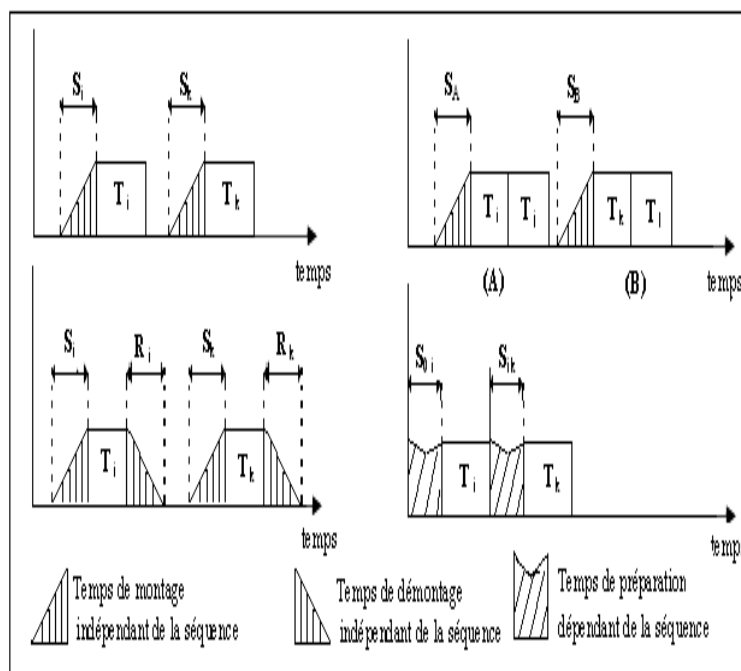


FIG. 1.2 – Différents modèles de temps de préparation (S_i étant le temps de montage et R_i le temps de démontage)

Le critère à minimiser lié aux temps de préparations le plus utilisé est le temps total de préparation.

1.5.1.2. Coût de préparation

Le coût de préparation noté C est un coût associé à la préparation d'une ressource préalablement ou suite à l'exécution d'une opération. On distingue :

- Le coût de préparation dépendant de la séquence.
- Le coût de préparation indépendant de la séquence.

Le coût de préparation indépendant de la séquence n'a de sens que dans le cas des problèmes d'ordonnancement par famille (batch). Si les coût de préparation sont prise en compte, ils sont obligatoirement inclus dans le critère à optimiser, on considère souvent le coût total de préparation.

1.5.2 Descripteur

Pour des raisons de clarté et de compréhension, il est important d'adopter un descripteur qui soit basé sur l'existant et homogénéisant les notations actuelles.

La notion $(\alpha/\beta/\gamma)$ introduite par Graham et al. [20] est couramment utilisée pour distinguer les différents problèmes d'ordonnancement entre eux et les classer.

Champ α

Renseigne les informations relatives aux ressources, à savoir le nombre de machine, type de machines, et type d'atelier. Il est composé de deux sous champs et désigné par $\alpha_1\alpha_2$:

- $\alpha_1 \in \{1, P, Q, R, F, O, J\}$
 - 1 : machine unique.
 - P : machine parallèle identique.
 - Q : machine parallèle uniforme.
 - R : machine parallèle générale.
 - F : flow shop.
 - O : open shop.
 - J : job shop.
- $\alpha_2 \in \{\phi, m\}$
 - Lorsque $\alpha_2 = \phi$, le nombre de machines est variable, tandis que lorsque $\alpha_2 = m$, le nombre de machines est égal à m .

Champ β

Permet d'obtenir des informations sur les contraintes prises en compte aussi bien sur les tâches qui doivent être ordonnancées. Il est composé de 7 sous champs $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7$:

- $\beta_1 \in \{\phi, pmtn\}$
 - $\beta_1 = \phi$: la préemption n'est pas autorisée.
 - $\beta_1 = pmtn$: la préemption est autorisée.
- $\beta_2 \in \{\phi, \text{préc}, \text{tree}, \text{chain}\}$
 - $\beta_2 = \phi$: pas de contraintes de précédence.
 - $\beta_2 = \text{préc}$: les contraintes de précédence sont quelconques.
 - $\beta_2 = \text{tree}$: les contraintes de précédence sont données sous forme d'arbres.
 - $\beta_2 = \text{chain}$: les contraintes de précédence sont données sous forme de chaînes.
- $\beta_3 \in \{\phi, r_i\}$
 - $\beta_3 = \phi$: toutes les dates de disponibilité sont nulles.

$\beta_3 = r_i$: il existe des dates de disponibilité pour les tâches.

– $\beta_4 \in \{\phi, p_i = p, \underline{p} \leq p_i \leq \bar{p}\}$

$\beta_4 = \phi$: les temps de traitement des tâches sont quelconques.

$\beta_4 = p_i = p$: les temps de traitement des tâches sont égaux à p .

$\beta_4 = \underline{p} \leq p_i \leq \bar{p}$: le temps de traitement de chaque tâche est compris entre $\underline{p}$ et $\bar{p}$.

– $\beta_5 \in \{\phi, d_i, \tilde{d}_i\}$

$\beta_5 = \phi$: il n'y a pas des dates échues pour les tâches, ou il existe des dates échues pour les tâches dans le cas où le critère d'optimisation est en fonction de ces derniers.

$\beta_5 = d_i$: il existe des dates échues pour les tâches.

$\beta_5 = \tilde{d}_i$: il existe une date limite pour chaque tâche.

– $\beta_6 \in \{\phi, k\}$

$\beta_6 = \phi$: il n'existe pas d'ouvriers spécialisés.

$\beta_6 = k$: le nombre d'ouvriers spécialisés est égal à k .

– $\beta_7 \in \{\phi, S_i\}$

$\beta_7 = \phi$: il n'existe pas de temps de préparation.

$\beta_7 = S_i$: s'il existe un temps de préparation.

Champ γ

Le troisième champ γ décrit le critère d'optimalité. On cherche à minimiser γ avec $\gamma \in \{C_{max}, \sum C_i, \sum w_i C_i, D_{max}, L_{max}, F_{max}, \sum U_i, \sum w_i U_i, \dots\}$.

Exemple 1.1. Soient les exemples suivants :

1. Le problème à une machine pour ordonnancer un ensemble de tâches indépendantes avec prise des temps de préparations indépendante de la séquence, l'objectif est la minimisation de la grande tardivité est noté : $1/S_i/L_{max}$.
2. Traiter un ensemble de tâches indépendantes sur des machines parallèles identiques où les tâches sont préemptibles et caractérisées par des temps de préparation indépendante de la séquence est noté : $P/pmtn, S_i/C_{max}$.

1.6 Etat de l'art des méthodes de résolution

1.6.1 Complexité

Nous nous intéressons dans cette sous-section au cadre mathématique dans lequel les problèmes peuvent être classés en problèmes faciles ou difficiles.

Un problème de décision est un problème qui peut se formuler comme une question à laquelle la réponse est soit "oui" soit "non".

Un algorithme est dit efficace ou encore polynomial lorsque le nombre total d'opérations élémentaires (opérations mathématique, comparaison) effectuées pour aboutir à la solution est borné par un polynôme en la taille du problème en entrée. Donc un problème est dit polynomial s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Il est dit pseudo-polynomial si sa complexité est bornée par un polynôme en fonction de la taille de la plus grande instance du problème.

Pour la plupart des problèmes d'optimisation combinatoires que l'on connaît on ne dispose pas d'algorithmes de résolution efficaces. On dit alors que ces problèmes sont difficiles ou de façon équivalentes qu'il n'existe pas d'algorithmes polynomiaux pour les résoudre.

Un problème de décision est dans la classe P s'il peut être décidé par un algorithme déterministe en temps polynomial.

Un problème de décision est dans la classe NP (non deterministic polynomial) si la réponse "oui" peut être décidée par un algorithme non déterministe (un algorithme est dit non déterministe s'il comporte des instructions de choix) en temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

Définition 1.4. *Un problème de décision $D1$ est dit réductible à un autre problème de décision $D2$ (noté $D1 \leq D2$) s'il existe une fonction polynomiale f qui transforme chaque énoncé de $D1$ en un autre énoncé de $D2$ de telle manière que la réponse pour $D1$ est oui si, et seulement si, la réponse pour $D2$ est oui.*

Alors, on dit qu'un problème de décision D est NP-complet si tout problème de la classe NP est réductible polynomialement en ce problème. Il s'en suit que l'existence d'un algorithme polynomial pour résoudre un problème NP-complet entraînerait l'existence d'un algorithme polynomial pour tout problème dans la classe NP.

Un problème d'optimisation est un problème pour lequel la réponse à une instance est une solution ayant une valeur optimale pour une fonction objectif définie. Il est toujours possible de faire correspondre un problème d'optimisation à un problème de décision.

Dans le cas, par exemple, de la minimisation d'une fonction objectif, le problème peut être posé de la façon suivante : le problème admet-il une solution dont la fonction objectif est inférieure ou égale à un seuil défini y , de même dans le cas de maximisation d'une fonction objectif. Ainsi, un problème d'optimisation est dit NP-difficile si le problème de décision qui lui correspond est NP-complet.

1.6.2 Réduction entre problème d'ordonnancement

Nous donnons ci-dessous quelque réduction (transformations polynomiales) entre problèmes d'ordonnancement. Une flèche de X à Y signifie que la résolution d'un modèle avec le paramètre Y est plus difficile que celle du même modèle avec le paramètre X , ces relations nous aide à déterminer la complexité des problèmes.(fig 1.3).

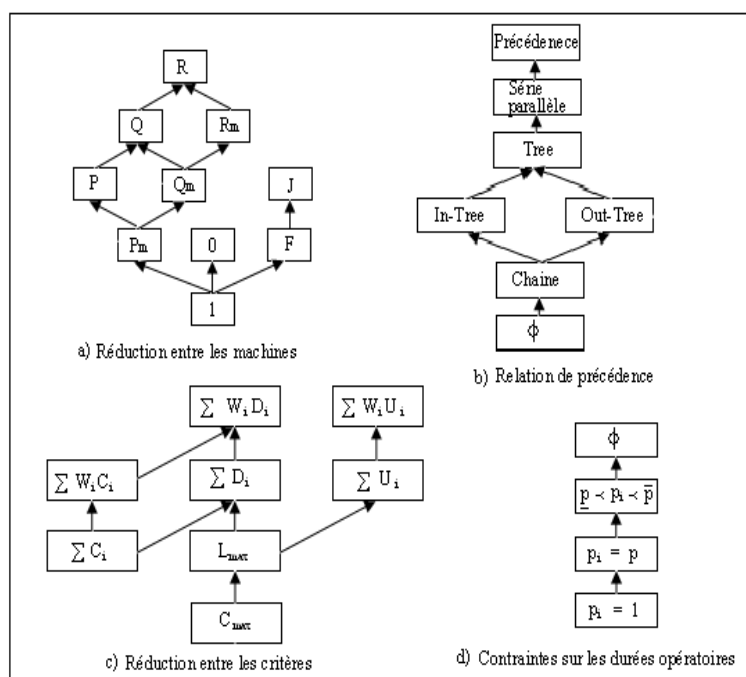


FIG. 1.3 – Hiérarchie de complexité entre différents problèmes

Il est intéressant de voir comment la modification d'un seul élément de la classification d'un problème peut affecter sa complexité, la figure précédente représente certaines réductions :

- le cas a) représente les réduction entre les machines. Le cas le plus simple est le cas à une machine, le système devient plus complexe dans le cas de plusieurs machines en parallèle, la difficulté augmente encore, si le nombre de machines est non borné.

- le cas b) indique les réductions entre les contraintes de précédence, le cas le plus simple est le cas où on a aucune contrainte de précédence.
- le cas c) donne la relation existant entre les principaux critères d'optimisation.
- le cas d) représente les réductions entre les durées de traitement.

Exemple 1.2. *Le problème $P//C_{max}$ est un cas particulier du problème $Q//C_{max}$ où toutes les machines auraient la même vitesse. Tout algorithme développé pour $Q//C_{max}$ peut être appliqué au problème $P//C_{max}$.*

1.6.3 Méthodes classiques de résolution

Nous avons déjà vu qu'il existe des problèmes d'ordonnancement de complexité différente. Le choix de la méthode de résolution à mettre en oeuvre dépendra souvent de la complexité du problème, suivant sa complexité le problème pourra ou non être résolu de façon optimale. Pour les problèmes appartenant à la classe P des algorithmes polynomiaux ont été mis en évidence, il suffit donc de les utiliser. Ces algorithmes sont spécifiques aux problèmes à résoudre.

Les problèmes d'ordonnancement sont des problèmes d'optimisation combinatoire, la plus part d'entre eux appartient à la classe des problèmes NP-difficile qui ne peuvent être résolus au moyen d'un algorithme polynomial. Ainsi, à côté des algorithmes classiques de l'optimisation combinatoire ont été développés un grand nombre d'heuristiques, algorithmes approchés souvent polynomiaux, qui permettent d'obtenir un ordonnancement pour lequel la valeur du critère n'est pas très éloignée de la valeur optimale. Les méthodes exactes et les heuristiques sont successivement présentées.

1.6.3.1 Méthodes exactes

Les trois familles de méthodes exactes sont : la résolution à partir d'une modélisation analytique, la programmation dynamique et la méthode de séparation et évaluation. Ces méthodes se caractérisent par un temps de calcul exponentiel, ce qui explique qu'elles ne sont utilisables que sur des problèmes de petite taille.

1.6.3.1.1 Modélisation analytique et résolution

La modélisation analytique d'un problème permet, non seulement de mettre en évidence l'objectif et les différentes contraintes du problème, mais également de le résoudre. L'idéal est de modéliser le problème sous la forme d'un programme linéaire dont les variables sont réelles. Dans ce cas, il existe un nombre de solveurs permettant de le résoudre. Les modèles deviennent plus difficiles à résoudre si on utilise des variables entières, et lorsque le modèle n'est pas linéaire.

1.6.3.1.2 La programmation dynamique

Cette méthode d'énumération implicite est applicable uniquement si le problème est décomposable en phase, et si le critère possède certaines propriétés. En générale, à partir d'un ordonnancement partiel, une formulation donne la valeur du critère comme une fonction récurrente, on trouve la valeur optimale en énumérant un ensemble d'ordonnancement partiel, qu'on complète à chaque étape par une opération (décision). Grâce à cette formulation, on réduit l'énumération.

1.6.3.1.3 Procédures par séparation et évaluation

Cette méthode est basée sur une énumération implicite et intelligente de l'ensemble des solutions réalisables. La séparation consiste à décomposer l'ensemble des solutions en plusieurs sous-ensembles qui sont décomposés à leur tour selon une démarche itérative. Ce processus peut se visualiser sous la forme d'un arbre d'énumération ; les noeuds de l'arbre correspondent aux sous-ensembles et les feuilles correspondent à des solutions réalisables. Pour accélérer la recherche de la solution optimale en évitant l'exploration inutile de certains noeuds, on utilise une procédure d'évaluation qui calcule, à chaque niveau de l'arbre, la valeur de chaque noeud et permet ainsi de décider du noeud à décomposer. Par exemple, dans le cas d'un problème de minimisation, cela revient à calculer la borne inférieure pour tous les noeuds fils du niveau considéré et la descente dans l'arbre est poursuivie avec le noeud donnant la borne inférieure. Par ailleurs, une borne supérieure de la solution optimale est calculée et est utilisée pour éviter l'exploration de noeuds dont la valeur de la borne inférieure est supérieure à la valeur de la borne supérieure. Cette borne supérieure est réactualisée lorsqu'une solution réalisable de valeur inférieure est atteinte.

Enfin des remontées et descentes par d'autre noeuds de l'arbre sont effectuées tant que la borne calculée est inférieure ou égale à la valeur actualisée de la borne supérieure.

Ainsi, l'exploration de certaines branches de l'arbre est évitée, ce qui permet de ne pas énumérer toutes les solutions réalisables.

1.6.3.2 Méthodes heuristiques constructives

Pour des problèmes NP-difficiles de grande taille, les méthodes exactes sont peu envisageables à cause de leur temps de calcul. Il est alors possible d'utiliser des méthodes approximatives qui donnent des solutions certes sous optimales, mais en un temps de calcul raisonnable. La performance de telles méthodes est généralement calculée par le rapport entre la valeur de la solution fournie et la valeur de la solution optimale. Si la solution optimale est non calculable, il est possible d'étudier expérimentalement le comportement de l'heuristique en comparant ses performances soit à celles d'autres heuristiques, soit à

des bornes inférieures de la solution optimale.

Ces méthodes par construction progressive sont des méthodes itératives, où à chaque itération, une solution partielle est complétée. La plupart de ces méthodes sont des algorithmes gloutons car elles considèrent les éléments (travaux ou processeurs) dans un certain ordre sans jamais remettre en question un choix une fois qu'il a été effectué. Ces méthodes permettent de trouver une solution rapidement.

Un premier type de telles méthodes consiste à établir une liste initiale qui donnera l'ordre de prise en compte des éléments. Cette liste construite à priori, à partir d'un critère bien défini, la deuxième phase de l'algorithme se réduit à considérer les éléments dans l'ordre de la liste construite pour l'ordonnancement.

Un deuxième type de méthode consiste à choisir, au cours de la construction, l'affectation d'un travail à une machine en utilisant des règles de priorité.

1.6.3.3 Méthodes amélioratrices

Ces méthodes sont initialisées par une solution réalisable, calculée soit aléatoirement soit à l'aide de l'une des heuristiques constructives. Elles recherchent à chaque itération, une amélioration de la solution courante par des modifications locales. Cet examen se poursuit jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. L'utilisation de ces heuristiques itératives suppose que l'on puisse définir, pour toute solution S , un voisinage de solution $N(S)$ contenant les solutions voisines. En général, le voisinage d'une solution est généré en appliquant plusieurs fois et de façon différente une petite transformation. Ce voisinage est ensuite évalué et comparé à la solution courante. Nous présentons ci-dessous les méthodes amélioratrices les plus connues :

1.6.3.3.1 Méthode de descente

Cette méthode se caractérise par le fait qu'elle ne considère, à chaque itération, que des solutions évoluant dans le sens de l'amélioration. Cette méthode ne conduit pas en général au minimum absolu mais seulement au minimum local qui constitue la meilleure des solutions accessibles compte tenu de la solution initial. Pour améliorer l'efficacité, on peut l'appliquer plusieurs fois avec des conditions initiales différentes et retenir comme solution finale le meilleur des minimums locaux obtenus, cette procédure augmente sensiblement le temps de calcul de l'algorithme et ne garantit pas de trouver la configuration optimale.

1.6.3.3.2 Recuit simulé

Cette méthode est due aux physiciens Kirkpatrick, Gellat et Vecchi, elle s'inspire des méthodes de simulation de Métropolies en mécanique statique. Les inconvénients du recuit simulé résident d'une part dans les réglages, comme la gestion de la décroissance par palier de la température. D'autre part, les temps de calcul peuvent devenir selon les cas très importants. Par contre, les méthodes de recuit simulé ont l'avantage d'être souples et rapidement implémentables lorsque l'on veut résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire, le plus souvent de grande taille. Cette méthode a l'intérêt d'admettre une preuve de la convergence, aussi lorsque certaines conditions sont vérifiées, on a la garantie d'obtenir la solution optimale.

1.6.3.3.3 Recherche tabou

La principale particularité de la méthode tient dans la mise en oeuvre de mécanismes inspirés de la mémoire humaine dont le but est de tirer les leçons du passé.

Le principe de base de la méthode tabou est simple, à partir d'une solution initiale quelconque, la méthode tabou engendre une succession de solutions ou configurations qui doit aboutir à une solution optimale. A chaque itération le mécanisme de passage d'une configuration (s) à la suivante (t) est le suivant :

- On construit l'ensemble des voisins de s, c'est-à-dire l'ensemble des configurations accessibles en un seul mouvement élémentaire à partir de s, soit $V(s)$ l'ensemble de ces voisins.
- On évalue la fonction objectif f du problème pour chacune des configurations appartenant à $V(s)$. La configuration t, qui succède à s dans la chaîne construite par tabou est la configuration de $V(s)$ pour laquelle f prend la valeur minimale.

La procédure ne fonctionne généralement pas car il y a un risque de retourner à une configuration déjà retenue lors d'une itération précédente, ce qui provoque un cyclage. Pour éviter ce phénomène on tient à jour à chaque itération une liste taboue de mouvements interdits, cette liste circulaire contient m mouvements inverses. La recherche du successeur de la configuration courante se restreint alors aux voisins de s qui peuvent être atteints sans utiliser de mouvement de la liste tabou. La procédure est stoppée dès qu'on a effectué un nombre donné d'itérations sans améliorer la meilleure solution courante.

1.6.3.3.4 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont des techniques de recherche inspirées de l'évolution biologique des espèces et basées sur une imitation des phénomènes d'adaptation des êtres vivants. On part d'une population initiale sur laquelle des opérations de reproduction vont être réalisées dans l'objectif d'exploiter au mieux les caractéristiques et les propriétés de

cette population. Un algorithme génétique consiste à faire évoluer progressivement, par génération successive la composition de cette population en maintenant sa taille constante.

Chapitre 2

Position du problème et étude de la complexité

2.1 Introduction

La majorité des problèmes d'ordonnancement considèrent le temps de préparation des ressources comme négligeable, ou faisant partie de la durée opératoire. Bien que cette hypothèse soit justifiable dans certains cas, on est obligé dans d'autres cas pratiques de les traiter séparément. En séparant les temps de préparations des durées opératoires, deux cas peuvent être distingués, le premier cas, où la préparation dépend seulement de la tâche à effectuer, est appelé temps de préparation indépendant de la séquence. Dans le deuxième cas, la préparation dépend de la tâche à effectuer et de la tâche qui la précède, est appelé temps de préparation dépendant de la séquence.

Dans le cas d'un atelier de machines parallèles identiques, chaque tâche est constituée d'une seule opération qui peut être exécutée sur n'importe quelle machine. Ce type d'atelier a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs en ordonnancement par son intérêt pratique, des méthodes performantes ont été proposées pour sa résolution.

2.2 Etat de l'art

Nous présentons dans cette section une revue des différents problèmes d'ordonnancement qui traitent des machines parallèles identiques.

Dans le cas de machines parallèles identiques sans contraintes de préparation, le problème de minimisation de la date de fin de traitement C_{max} est largement étudié. Ce dernier est NP-difficile puisque même le problème restreint à deux machines $P2//C_{max}$ a été démontré comme étant NP-difficile par une réduction du problème de bi-partitionnement

par Karp [21].

En relaxant la contrainte de non préemption, McNaughton (1959) a prouvé que le problème $P/pmtn/C_{max}$ est facilement solvable, il a établi un algorithme pour l'affectation de tâches interruptibles sur des machines parallèles en se basant sur un résultat qui permet de calculer une borne inférieure M^* sur la durée totale de traitement qui est calculée comme suit :

$$M^* = \max\left[\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{m}, \max_{i=1}^n \{p_i\}\right]$$

L'algorithme établit les affectations sur la première machine jusqu'à atteinte de la borne M^* , ensuite on interrompt la tâche et on affecte le reste de la tâche au début de la deuxième machine et ainsi de suite jusqu'à l'affectation de toutes les tâches.

Une classe d'heuristiques est composée d'algorithmes de liste où les tâches sont affectées aux machines suivant l'ordre d'une liste construite à partir d'un certain critère. Graham (1969) [19] propose la règle LPT (Longest Processing Time), elle trie d'abord la liste des tâches à ordonnancer par ordre décroissant des durées opératoires, ensuite affecte les tâches sur les machines disponibles au plus tôt en respectant l'ordre des tâches, elle est de complexité $O(n \log n)$, elle est simple et efficace. En notant par m le nombre de machines, L la solution réalisable et L^* la solution optimale, la règle LPT possède la borne suivante par rapport à l'optimalité :

$$\frac{L}{L^*} \leq \frac{4}{3} - \frac{1}{3m} \text{ (pour toute instance)}$$

Nous citons également l'algorithme de MULTIFIT issue de l'analogie entre le problème $P//C_{max}$ et le problème de sac à dos (Coffman et al. (1978) [13]), cette heuristique détermine une valeur M comme capacité maximal des machines comprise entre la borne de McNaughton M^* et $\frac{4M^*}{3}$. Ensuite, on trie les tâches en ordre décroissant des durées opératoires puis on affecte chaque tâche à la première machine capable de la terminer avant la valeur cible M . Si toutes les tâches ont été affectées avec succès, on refait une autre itération de la méthode depuis le début mais en réduisant la valeur cible M d'une unité du temps. Les itérations se succèdent jusqu'à ce qu'en affectant une tâche à une machine on dépasse la valeur cible M . La procédure s'arrête ainsi et la valeur du C_{max} est la valeur de M qui correspond à l'avant dernière itération.

Mokotoff et al. (2001) [25] compare le degré de performance des différentes heuristiques existants pour l'ordonnancement sur des machines parallèles identiques ($P//C_{max}$), et propose une heuristique basée sur les procédures de listes. Cette heuristique définit une variable de décision qui dépend des temps d'exécution des tâches.

En 2003 Mokotoff [24] propose un algorithme de coupe exacte, où des inégalités valides sont obtenues à partir des temps de fin de traitement maximums fixes. Dans cet algorithme, elle utilise la relaxation linéaire, et itération après itération, elle rajoute ces inégalités. La relaxation est résolue jusqu'à ce qu'elle trouve une solution réalisable. Si après un certain nombre d'itération la solution n'est pas entière, un algorithme de séparation et d'évaluation progressive est utilisé pour compléter la recherche.

Un algorithme de programmation dynamique été proposé pour $P//C_{max}$ par Rothopt [27], il permet de trouver la solution optimale en un temps $O(nC^m)$, il ne peut être utilisé que pour de petites valeurs de m et C .

Nous présentons dans cette partie quelques recherches portant sur des variantes du problème classique des machines parallèles $P//C_{max}$:

Dell'Amico et Martello (2004) [14] étudie le cas classique des machines parallèles pour minimiser le makespan avec la condition que chaque machine ne doit traiter qu'un certain nombre limité de tâches. Ce problème trouve une application pratique sur les lignes d'assemblage des plaques de circuits imprimés. Dans cet article, les auteurs résolvent ce cas noté $P/\# \leq K/C_{max}$, en faisant le lien avec le problème classique $P//C_{max}$ au niveau des limites inférieures et supérieures.

Gharbi et Haouari (2002) [17] traite des machines parallèles identiques avec des dates de disponibilité et des délais de livraison sur les commandes. Le problème est résolu à l'aide d'un algorithme de séparation et évaluation progressive.

Cochran et al. (2003) [12] résout un problème d'ordonnancement sur machines parallèles pour un critère d'optimalité multi objectifs. Ce critère englobe le makespan, la somme des temps de fin de traitement pondérée et le retard total pondéré. Les auteurs proposent un algorithme génétique en deux étapes.

Boustta (2003) [8] traite un problème d'ordonnancement sur machine à injection avec réglage multiples, il a assimilé la configuration de l'atelier étudié à un atelier classique de machine parallèle identique.

Ghosh (1994) [18] traite le cas de machine unique et des machines parallèles pour la minimisation du makespan dans une configuration de familles pour les tâches. Cette configuration engendre des réglages si une tâche d'une famille est traitée après une autre tâche d'une autre famille, alors qu'il n'existe pas de temps de réglage au sein d'une même famille. Ce problème a été résolu à l'aide de la programmation dynamique.

Gupta et al. (1999) [3] fait une revue des recherches sur les problèmes d'ordonnancement qui prennent en considération les temps de réglages. La revue est répartie sur quatre types de réglage : les réglages qui dépendent de la séquence des tâches et dépend de leurs familles, les réglages qui dépendent de la séquence des tâches mais ne dépend pas de leurs familles, les réglages qui ne dépendent pas de la séquence des tâches mais dépend de leurs familles, et les réglages qui ne dépendent ni de la séquence des tâches ni de leurs familles.

Pour les problèmes avec des temps de préparation indépendant de la séquence, Bet-tayeb, Adjllah, et Kacem [6] ont étudié le problème de gestion de tâches de maintenance préventive d'un système réparti sur plusieurs sites, ils proposent qu'un temps de préparation est nécessaire lorsque une ressource passe d'un site à un autre et que ce temps est indépendant de la séquence. Ils ont proposé trois heuristiques, les deux premières sont basées sur des algorithmes de liste avec des améliorations et la troisième est une heuristique constructive.

Koulamas [22] a traité le problème d'ordonnancement de deux machines parallèles Semi-automatiques pour minimiser le temps mort résultant de l'indisponibilité du robot avec la condition que ces deux machines partagent le même serveur(robot) pour la préparation des tâches. Il a démontré que ce dernier (noté $P2/n/setup/IT$) est NP-difficile au sens fort, aussi il a développé une procédure de réduction pour le transformer en un problème plus petit.

Abdelkhodae et Wirth [1] ont étudiés le problème à deux machines parallèles identiques avec la présence d'un seul serveur pour la préparation des tâches dont l'objectif est de minimiser la date de fin de traitement des tâches. Ils ont montrés que le problème général est NP-difficile au sens fort et ils ont proposés une formulation mathématique en nombres entiers. Deux cas particulier étudier ainsi deux heuristiques en $O(n \log n)$ sont présentés avec des expérimentations numériques.

M. dupuy [15] a traité le problème d'ordonnancement à machines parallèles flexibles, où une opération ne peut être réalisée que sur un sous ensemble des machines. Le critère qui à été retenu est de minimiser la somme des retards des tâches.

Melloli, Sadfi, Kacem et Chu [23] traitent l'ordonnancement sur machine parallèle en présence de périodes d'indisponibilité pour minimiser la somme des dates de fin des travaux, ils proposent trois méthodes exactes, des règles de dominance et des heuristiques basées sur la règle SPT (Shortest Processing Time) qui range les tâches dans l'ordre croissant de leur temps de traitement et la règle MSPT qui consiste à améliorer le résultat

de l'algorithme SPT en le complétant par la recherche d'un échange optimal entre deux tâches de part et d'autre de la période d'indisponibilité.

Zouba, Baptiste et Rebain [30] ont étudié le problèmes d'ordonnancement de jobs non préemptif sur deux machines parallèles identiques en présence d'un seule opérateur pour minimiser le makespan. Le problème consiste à déterminer des intervalles de temps d'utilisation des différentes affectations de l'opérateur pour ordonnancer les jobs sur les deux machines.

Y. A. R. Solis [26] traite des problèmes d'ordonnancement sur machines parallèles avec un critère d'optimisation 'Juste-à-temps', les tâches sont pénalisées si elle finissent en avance ou en retard par rapport à une date d'échue fixé.

2.3 Présentation du problème

Il s'agit d'ordonnancer un ensemble de n tâches $T_1, T_2, \dots, T_n$ sur m machines parallèles identiques $M_1, M_2, \dots, M_m$ pour optimiser le makespan qui correspond à la date de fin de traitement de l'ensemble des tâches. Chaque tâche nécessite avant son traitement une préparation ayant une durée non nulle. Pour cette préparation on dispose de k ouvriers spécialisés, il est donc impossible de faire plus de k préparations en même temps. Ce problème sera noté :

$$Pm/S_i, k/C_{max}.$$

Toutes les tâches sont disponibles (pour la préparation et le traitement) à $t = 0$, par ailleurs, la préemption des tâches est interdite et chaque machine ne peut traiter qu'une seule tâche à la fois.

Dans ce qui suivra, nous définissons les variables suivantes du problème :

T : ensemble des tâches $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

M : ensemble des machines $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$.

p_i : temps de traitement de la tâche $T_i, i = \overline{1, n}$.

S_i : temps de préparation de la tâche $T_i, i = \overline{1, n}$.

C_i : date de fin de traitement de la tâche T_i .

k : nombre d'ouvriers.

C_{max} : le makespan.

2.4 Exemple illustratif

Pour bien illustrer le problème défini dans le paragraphe précédent, considérons l'exemple 2.1.

Exemple 2.1. *Nous disposons de 6 tâches indépendantes $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ à traiter sur deux machines parallèles identiques M_1 et M_2 avec un ouvrier spécialisé ($k = 1$). Les temps de traitement et de préparation des tâches sont donnés dans le tableau 2.1.*

T_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
p_i	6	3	4	4	5	3
S_i	1	2	1	2	1	1

TAB. 2.1 – Les temps de traitement et de préparation de l'exemple 2.1

L'ordonnancement optimal est représenté par la figure 2.1.

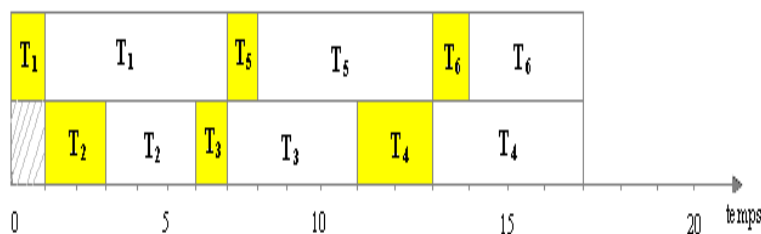


FIG. 2.1 – Exemple 2.1 : solution

$$C_{max}=17.$$

Ce type de problème peut trouver des applications dans les opérations d'assemblage de petites usines où un robot est monté entre deux lignes d'assemblage de sorte qu'il peut servir les deux lignes. Ce dernier peut trouver aussi des applications dans les systèmes de fabrication flexibles (FMSs) tel qu'un atelier flexible est un environnement de fabrication souple et automatisé, il se compose généralement en trois éléments principaux : un système de fabrication, un système de manutention (ou de transport) et un système d'information. Il peut être rencontré aussi dans le cas d'un atelier de fabrication cellulaire où on a une ou plusieurs cellules constituées de machines, et entre les cellules, un ou plusieurs robots sont chargés de transporter les tâches.

2.5 Modélisation mathématique

La programmation linéaire en nombre entier permet de modéliser rapidement les problèmes d'ordonnancement. Par contre même avec un code commercial puissant, le problème reste suffisamment complexe pour ne pas être résolu optimalement pour toutes les instances, et surtout celles de grande taille.

Dans cette section, une modélisation mathématique est proposée :

2.5.1 Les variables

Considérons les variables bivalentes X_{ijt} telles que :

$$X_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{si la tâche } T_i \text{ débute sa préparation (ensuite son traitement) sur la machine} \\ & M_j \text{ à l'instant } t; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$ et $t = \overline{0, H-1}$ avec H un temps limite qu'on peut estimer à la borne supérieure.

2.5.2 Les contraintes

(1)- Contraintes de traitement : Cette contrainte assure que l'on assigne une tâche à une machine et une seule.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^{H-1} X_{ijt} = 1 \quad \text{pour } i = \overline{1, n}.$$

(2)- Contraintes de non chevauchement : Dans l'intervalle du temps $[t, t+S_i+p_i-1]$ on ne peut traiter qu'au plus une seule tâche.

$$\sum_{y=t}^{t+S_i+p_i-1} X_{ijy} \leq 1 \quad \text{pour } j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}; t = \overline{0, H-1}.$$

(3)- Contraintes de capacité de préparation : Cette contrainte indique qu'on ne peut pas faire plus de k préparations à un instant t donné.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{y=\max\{0, t-S_i+1\}}^t X_{ijy} \leq k \quad \text{pour } t = \overline{0, H-1}.$$

(4)- La contrainte suivante indique que la date de fin de traitement de chaque tâche doit être inférieure ou égale à C_{max} .

$$(\sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^{H-1} t X_{ijt}) + S_i + p_i \leq C_{max} \quad \text{pour } i = \overline{1, n}.$$

2.5.3 Le critère à optimiser

On veut minimiser la date de fin de traitement de l'ensemble des tâches notée μ .

Le modèle mathématique ainsi développé s'écrit :

Min μ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^{H-1} X_{ijt} = 1 & i = \overline{1, n} \quad (1) \\ \sum_{y=t}^{t+S_i+p_i-1} X_{ijy} \leq 1 & j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}; t = \overline{0, H-1} \quad (2) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{y=\max\{0, t-S_i+1\}}^t X_{ijy} \leq k & t = \overline{0, H-1} \quad (3) \\ (\sum_{j=1}^m \sum_{t=0}^{H-1} tX_{ijt}) + S_i + p_i \leq \mu & i = \overline{1, n} \quad (4) \\ X_{ijt} \in \{0, 1\} & j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}; t = \overline{0, H-1} \quad (5) \\ \mu \in IR & \quad (6) \end{array} \right.$$

2.5.4 Taille du modèle

Le nombre de variables et le nombre de contraintes d'un modèle mathématique linéaire, sont deux indices par lesquels on peut mesurer la dimension et l'efficacité de la modélisation donnée.

Le modèle mathématique précédant a :

- $(nmH+1)$ variables.
- n contraintes de type (1).
- (mnH) contrainte de type (2).
- H contraintes de type (3).
- n contraintes de type (4).

Le modèle mathématique associé requiert $(nmH+1)$ variables et $(2n+(mnH)+ H)$ contraintes.

Par exemple : pour $n=3$, $m=2$ et $H=5$, on a 31 variables et 41 contraintes.

Les tests réalisés avec le LINGO sur des instances de petites tailles, confirme l'efficacité de notre modélisation.

Compte tenu de la complexité d'un tel modèle, sa résolution à l'aide d'un logiciel commercial ne semble possible que pour des problèmes de petit taille.

Pour remédier à ce manque d'efficacité, nous proposons dans la suite une approche de résolution heuristique.

2.6 Etude de la complexité

Le problème à deux machines $P2/S_i, k/C_{max}$ est NP-difficile, car le problème $P2//C_{max}$ en est un cas particulier en prenant $S_i = 0$.

Théorème 2.1. *Le problème $P2/p_i = p, S_i, k = 2/C_{max}$ est NP-difficile.*

Preuve

Considérons le problème de décision NP-complet suivant connu sous le nom de 2-partition :
 ” Etant donnés n entiers positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$. Existe-t-il un sous-ensemble $A_1 \subseteq A$ ($A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$) tel que : $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus A_1} a_i$? ”.

Montrons que ce problème se réduit polynomialement au problème de décision suivant :

Etant données n tâches $T_1, T_2, \dots, T_n$ indépendantes et non morcelables avec des temps de traitement $p_i = p = 0$, le temps nécessaire pour la préparation d'une tâche est $S_i = a_i$, $k=2$ et $Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$.

Existe-t-il un ordonnancement de ces n tâches sur deux machines de durée inférieure ou égale à Y ?

Ce problème appartient à la classe NP, car on peut vérifier en un temps polynomial qu'une affectation des tâches aux machines vérifie toutes les contraintes.

Il est clair que la réduction précédente est polynomiale ($O(n)$). Nous prouvons que le problème 2-partition a une solution si et seulement si le problème d'ordonnancement a une solution.

Si le problème 2-partition a une solution, alors, il existe un sous-ensemble $A_1 \subseteq A$ avec la propriété désirée : $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus A_1} a_i$. Nous construisons une solution pour le problème d'ordonnancement comme suit : on prépare les tâches qui appartiennent à l'ensemble A_1 sur la machine M_1 et les tâches restantes, on les prépare sur la machine M_2 . Donc, la durée de l'ordonnancement est égale à $Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$.

Si le problème d'ordonnancement a une solution de durée inférieure ou égale à Y , alors, chaque tâche n'est préparée que sur l'une des deux machines. Donc le problème 2-partition a une solution, en posant A_1 comme étant l'ensemble de tâches préparées sur la machine M_1 et $A \setminus A_1$ l'ensemble de tâches préparées sur la machine M_2 . $\square$

Théorème 2.2. *Le problème $P2/S_i = s, k = 2/C_{max}$ est NP-difficile.*

Preuve

Soit le problème de décision suivant de 2-partition :

” Etant données n entiers positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$. Existe-t-il un sous-ensemble $A_1 \subseteq A$ ($A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$) tel que : $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus A_1} a_i$?”.

Montrons que ce problème se réduit polynomialement au problème à deux machines parallèles identiques, étant données n tâches $T_1, T_2, \dots, T_n$ indépendantes et non morcelables avec des temps de préparation $S_i = s = 0$ et $k=2$, chaque tâche T_i a un temps de traitement $p_i = a_i$, et un nombre $Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$.

Existe-t-il un ordonnancement de ces n tâches sur deux machines de durée inférieure ou égale à Y ?

Ce problème appartient à la classe NP, car on peut vérifier en un temps polynomial qu’une affectation des tâches aux machines vérifie toutes les contraintes.

Il est clair que la réduction précédente est polynomiale ($O(n)$). Nous prouvons que le problème 2-partition a une solution si et seulement si le problème d’ordonnancement a une solution.

Supposons que le problème 2-partition a une solution, donc il existe un sous-ensemble $A_1 \subseteq A$ avec $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus A_1} a_i$. Alors, on peut construire un ordonnancement pour le problème $P2/S_i = s, k=2 /C_{max}$, en traitant les $|A_1|$ tâches sur la machine M_1 et les $|A \setminus A_1|$ tâches restantes, on les traite sur la machine M_2 . Donc, la durée de l’ordonnancement est égale à Y .

Supposons maintenant que le problème d’ordonnancement a une solution de durée inférieure ou égale à Y , alors, chaque tâche n’est affectée qu’à l’une des deux machines, tel que A_1 est l’ensemble des tâches affectées à la machine M_1 et $A \setminus A_1$ l’ensemble des tâches affectées à la machine M_2 . Donc le problème 2-partition a une solution. $\square$

Théorème 2.3. *Le problème $P2/S_i, k = 1/C_{max}$ est NP-difficile au sens fort.*

Preuve

La preuve de ce théorème a été donnée dans [1]. Nous proposons une preuve plus facile : il suffit de constater que ce problème est équivalent au problème défini dans [21] par C. P. Koulamas où il cherche à minimiser le temps mort résultant de l’indisponibilité du robot. Or, minimiser le temps mort revient à minimiser le makespan.

Chapitre 3

Résolution

3.1 Introduction

Résoudre exactement des problèmes d'optimisation combinatoire NP-difficiles est très ardu. En effet, pour de tels problèmes, les méthodes exactes requièrent un effort calculatoire qui croît exponentiellement avec la taille des instances du problème et, rapidement, les heuristiques ou metaheuristiques deviennent l'unique moyen d'obtenir une bonne solution en un temps raisonnable.

Cependant, même pour des problèmes les plus difficiles, les méthodes exactes demeurent très efficaces pour de petites tailles d'instance, la solution optimale étant trouvée et prouvée en un temps très court.

Le problème $Pm/S_i, k/C_{max}$ est prouvé être difficile. Ce pourquoi, nous allons développer un certain nombre d'heuristiques pour sa résolution.

3.2 Calcul des bornes

Proposition 3.1. $\overline{M} = \max\{\lceil \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (p_i + S_i) \rceil, \max_{i=1}^n \{p_i + S_i\}\}$ est une borne inférieure.

Preuve

Montrons par l'absurde :

Si $\overline{M} < \max_{i=1}^n \{p_i + S_i\}$, la tâche ayant le plus grand temps nécessaire pour son traitement ($p_i + S_i$) sera traitée sur au moins deux machines simultanément, contradiction avec les hypothèses qu'à chaque instant, une tâche peut être exécuter que par une seule machine au plus, et à chaque instant, une machine ne peut exécuter qu'une seule tâche à la fois. D'où $\overline{M}$ est une borne inférieure pour le C_{max} .

Si $\overline{M} < \max\{\lceil \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (p_i + S_i) \rceil, \max_{i=1}^n \{p_i + S_i\}\}$, contradiction du fait que le C_{max} ne peut pas prendre

une valeur inférieure à la somme des temps de traitement et les temps de préparation des tâches divisée par le nombre de machines. $\square$

Si toutes les tâches sont traitées sur la même machine, on aura comme borne supérieure $\overline{S}$, tel que : $\overline{S} = \sum_{i=1}^n (p_i + S_i)$.

3.3 Sous problème polynomial

Dans cette section nous allons donner un sous problème polynomial et un algorithme de résolution en temps polynomial.

Problème $P2/p_i = p, S_i = s, k \leq 2/C_{max}$

Pour ce problème le fait que les temps de traitement et de préparation des tâches sont constants cela nous permet de proposer un algorithme polynomial pour le résoudre.

Algorithm A ;

Début

$$\overline{M'} = \begin{cases} \frac{n(p+S)}{2} & \text{si } n \text{ est pair et } k = 2; \\ \frac{n(p+S)}{2} + S & \text{si } n \text{ est pair et } k = 1 \text{ avec } S \leq p; \\ n.S + p & \text{si } n \text{ est pair et } k = 1 \text{ avec } S > p; \\ \frac{(n+1)(p+S)}{2} & \text{si } n \text{ est impair et } k = 2; \\ \frac{(n+1)(p+S)}{2} & \text{si } n \text{ est impair et } k = 1 \text{ avec } S \leq p; \\ n.S + p & \text{si } n \text{ est impair et } k = 1 \text{ avec } S > p; \end{cases}$$

$t := 0; \quad :=; \quad j :=; \quad l := 1;$

Répéter

Si $((t + p_i + S_i) \leq \overline{M'})$ **alors**

Affecter la préparation de la tâche T_i à l'ouvrier l et la traiter sur la machine

M_j à l'instant t ;

$t := t + p_i + S_i$;

$i := i + 1$

sinon **Si** $(k = 1)$ **alors** $t := S$; $j := j + 1$

Sinon $t := 0$; $l := l + 1$; $j := j + 1$;

fSi;

fSi ;
jusqu'à $i = n$;
Fin.

Exemple 3.1. On veut traiter 9 tâches $T_1, \dots, T_9$ de temps de traitement égal à 5 et de temps de préparation égal à 2 sur 2 machines M_1 et M_2 et $k = 2$.

L'ordonnancement optimal est donné à la figure 3.1 avec $C_{max} = 35$.

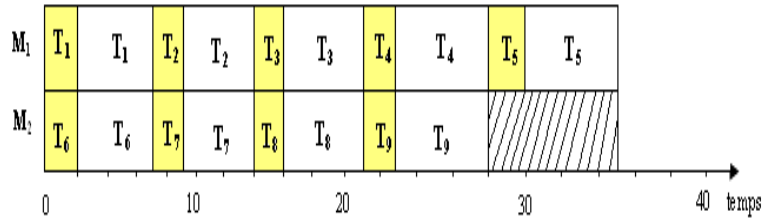


FIG. 3.1 – Exemple 3.1 : solution générée par l'algorithme A

Théorème 3.1. L'algorithme A résout le problème $P2/p_i = p, S_i = s, k \leq 2/C_{max}$ en $O(n)$.

Preuve

La valeur $\overline{M'}$ constitue une borne inférieure pour la solution optimale. Comme les temps de traitement et les temps de préparation sont constants et égaux à p et s respectivement, on a :

Pour $k = 2$ et d'après la borne inférieure énoncée dans la proposition 3.1 précédente, nous avons $\overline{M'} = \max\{\lceil \frac{1}{2}n(p+S) \rceil, p+S\} = \lceil \frac{1}{2}n(p+S) \rceil = \frac{n(p+S)}{2}$ si n est pair. Si n est impair, alors $C_{max} = \frac{(n-1)(p+S)}{2} + (p+S) = \frac{(n+1)(p+S)}{2}$ qui vient du fait que la préemption des tâches n'est pas autorisée. Il suffit donc de considérer le cas pair et d'ajouter le traitement de la n -ième tâche à la fin de l'ordonnancement.

Pour $k = 1$, nous avons un seul ouvrier. Donc la préparation simultanée de deux tâches n'est pas possible. Ainsi, la seconde machine sera libre pendant S unités de temps au début de l'ordonnancement.

Si le temps de préparation est supérieur au temps de traitement ($S \geq p$), alors la préparation des différentes tâches se fera en alterné sur les deux machines et chaque tâche sera traitée entre deux préparations successives. On obtient donc $n.S$ comme temps totale de préparation de l'ensemble des tâches. Finalement, on obtient $C_{max} = n.S + p$.

Si le temps de préparation est inférieur au temps de traitement ($S < p$), alors les tâches seront traitées comme dans le cas où $k = 1$ avec un décalage de S unités de temps sur la deuxième machine (la préparation de la deuxième tâche commence à $t = S$ sur la deuxième machine). On obtient donc, $C_{max} = \frac{n(p+S)}{2} + S$ dans le cas où n est pair et $C_{max} = \frac{(n+1)(p+S)}{2}$ dans le cas où n est impair (la deuxième machine sera libre pendant p unités de temps à la fin de l'ordonnancement). $\square$

3.4 Algorithmes approchés

Dans cette partie, nous allons proposer six heuristiques pour résoudre le problème considéré. Pour cela, on définit la procédure A1 comme suit :

Cette procédure suppose qu'à l'instant $t = 0$ tous les ouvriers et toutes les machines sont disponibles, et tant que l'ensemble des tâches n'est pas encore vide, on sélectionne une tâche T_i de cet ensemble et l'affecter au premier ouvrier libre pour la traiter sur la première machine disponible à l'instant $t = 0$. Ensuite, on élimine cette tâche de l'ensemble des tâches et la préparation et le traitement de la tâche qui la suit commence à $t := \max\{\min\{O_l\}, \min\{C_j\}\}$. L'objectif de cette procédure est de déterminer à quel instant et par quel ouvrier et sur quelle machine on lance la préparation et le traitement d'une tâche.

la procédure A1 est la suivante :

Procédure A1 ;

Début

$t := 0 ;$

$O_l := 0 ;$

// O_l représente la date de disponibilité de l'ouvrier l

$C_j := 0 ;$

// C_j représente la date de disponibilité de la machine j

Tantque $T \neq \emptyset$

Faire

Prendre la première tâche T_i de la liste et l'affecter au premier ouvrier libre (soit l) pour la traiter sur la première machine (soit M_j) disponible à l'instant t ;

$O_l := t + S_i ;$

$C_j := O_l + p_i ;$

$T := T \setminus \{T_i\} ;$

$t := \max\{\min\{O_l\}, \min\{C_j\}\} ;$

Fait ;

Fin.

La complexité de cette procédure est de $O(n)$.

3.4.1 Description de l'heuristique H1

La première phase de cette heuristique consiste à ranger les tâches selon l'ordre LPT des temps de traitement (noté LPT_{p_i}). Ensuite, on fait appel à la procédure A1.

Algorithme H1 ;

Début

- Ranger les tâches suivant la règle LPT_{p_i} ;
- Appliquer la procédure A1 ;

Fin.

Cette heuristique résout le problème en $O(n \log n)$.

Exemple 3.2. On désire traiter 10 tâches indépendantes sur 4 machines parallèles identiques dont les temps de traitement et les temps de préparation des tâches sont donnés dans le tableau 3.2. avec $k = 2$.

T_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
p_i	4	10	3	8	12	4	15	2	7	6
S_i	2	5	7	3	4	9	2	5	3	6

TAB. 3.1 – durées de traitement et de préparation de l'exemple 3.2

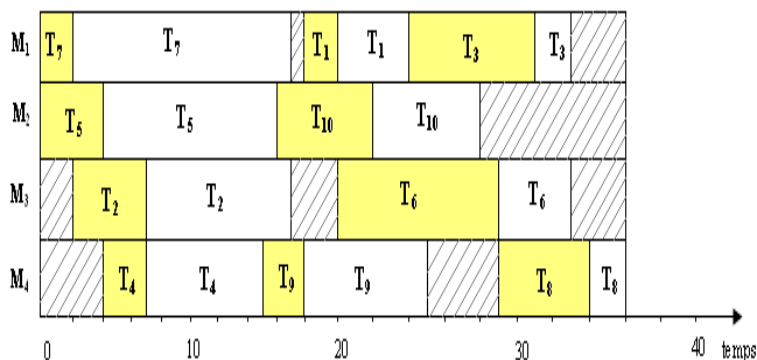
La borne inférieure $\overline{M} = \max\{\lceil \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (p_i + S_i) \rceil, \max_{i=1}^n \{p_i + S_i\}\}$
 $\overline{M} = \max\{30, 17\} = 30$.

La borne supérieure $\overline{S} = \sum_{i=1}^n (p_i + S_i) = 117$

En rangeant les tâches suivant la règle LPT_{p_i} , on obtient la liste de tâches :

$$\{T_7, T_5, T_2, T_4, T_9, T_{10}, T_1, T_6, T_3, T_8\}$$

L'application de l'algorithme H1 fournit la solution représentée par la figure 3.2 avec $C_{max} = 36$.

FIG. 3.2 – Exemple 3.2 : solution générée par l'heuristique $H1$

3.4.2 Description de l'heuristique H2

Cette heuristique a le même principe que l'heuristique $H1$, la différence réside dans le fait que les tâches sont rangées selon l'ordre SPT des temps de traitement (noté SPT_{p_i}), ensuite, appliquer la procédure $A1$.

Algorithme H2 ;

Début

- Ranger les tâches suivant la règle SPT_{p_i} ;
- Appliquer la procédure $A1$;

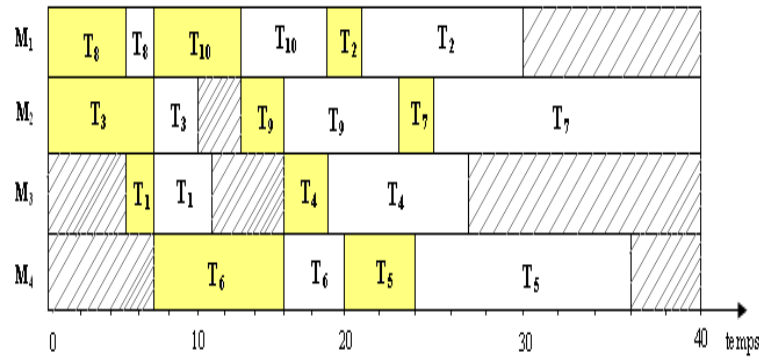
Fin.

Cette heuristique peut être implémenté en $O(n \log n)$.

Exemple 3.3. Reprenons l'exemple précédent. La liste des tâches rangée selon la règle SPT_{p_i} est :

$$\{T_8, T_3, T_1, T_6, T_{10}, T_9, T_4, T_2, T_5, T_7\}$$

La solution est représentée par la figure ci-dessous et la valeur du C_{max} est égale à 40.

FIG. 3.3 – Exemple 3.3 : solution générée par l'heuristique $H2$

3.4.3 Description de l'heuristique $H3$

La règle LPT_{S_i} range les tâches dans l'ordre décroissant de leurs temps de préparation. Nous donnons ci-dessous l'heuristique $H3$ qui consiste à ranger les tâches suivant la règle LPT_{S_i} , ensuite faire appel à la procédure $A1$.

Algorithme $H3$;

Début

- Ranger les tâches suivant la règle LPT_{S_i} ;
- Appliquer la procédure $A1$;

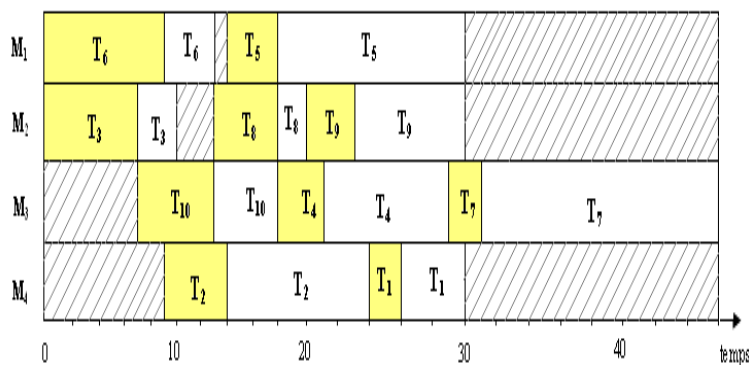
Fin.

Cette heuristique donne une solution en $O(n \log n)$.

Exemple 3.4. En appliquant cette heuristique à notre exemple, on obtiendra la liste des tâches suivante :

$$\{T_6, T_3, T_{10}, T_2, T_8, T_5, T_4, T_9, T_1, T_7\}$$

La solution représentée par la figure 3.4 et la valeur du C_{max} est égale à 46.

FIG. 3.4 – Exemple 3.4 : solution générée par l'heuristique $H3$

3.4.4 Description de l'heuristique $H4$

La règle SPT_{S_i} range les tâches dans l'ordre croissant de leurs temps de préparation. La quatrième heuristique est l'heuristique $H4$ qui range les tâches selon l'ordre SPT_{S_i} , ensuite appliquer la procédure $A1$.

Algorithme $H4$;

Début

- Ranger les tâches suivant la règle SPT_{S_i} ;
- Appliquer la procédure $A1$;

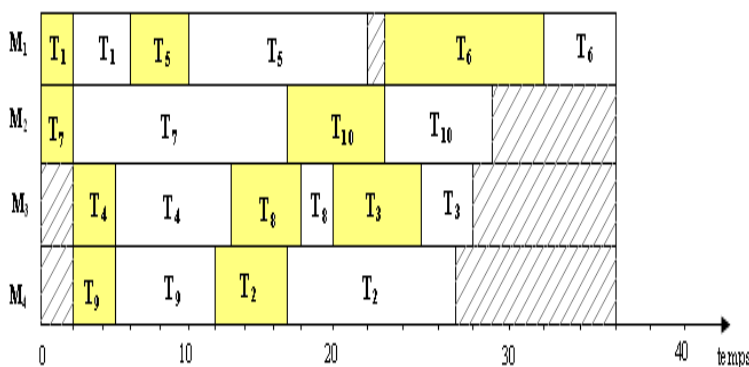
Fin.

Cette heuristique génère une solution en $O(n \log n)$.

Exemple 3.5. On prend le même exemple, la liste des tâches rangées est :

$$\{T_1, T_7, T_4, T_9, T_5, T_2, T_8, T_{10}, T_3, T_6\}$$

La solution est représentée par la figure 3.5 avec C_{max} égale à 36.

FIG. 3.5 – Exemple 3.5 : solution générée par l'heuristique $H4$

3.4.5 Description de l'heuristique H5

Soit la règle $LPT_{S_i+p_i}$ qui range les tâches dans l'ordre décroissant de leurs temps de traitement et de préparation.

Nous donnons ci-dessous l'heuristique $H5$ qui range les tâches suivant la règle $LPT_{S_i+p_i}$, ensuite faire appel à la procédure $A1$.

Algorithme H5 ;

Début

- Ranger les tâches suivant la règle $LPT_{S_i+p_i}$;
- Appliquer la procédure $A1$;

Fin.

Cette heuristique génère une solution en $O(n \log n)$.

Exemple 3.6. On prend toujours le même exemple traité précédemment, la liste des tâches rangées est :

$$\{T_7, T_5, T_2, T_6, T_{10}, T_4, T_3, T_9, T_8, T_1\}$$

La solution est représentée par la figure 3.6 avec C_{max} égale à 35.

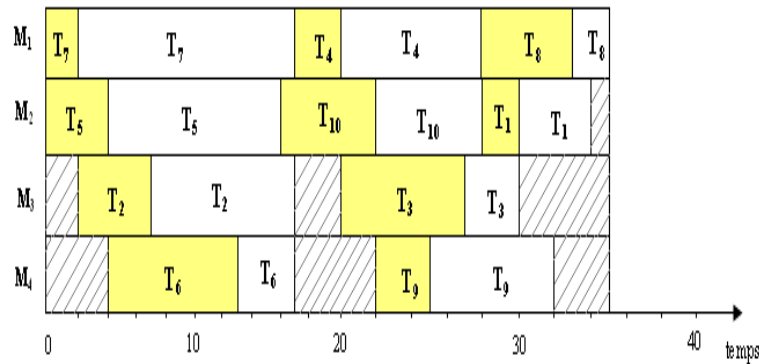


FIG. 3.6 – Exemple 3.6 : solution générée par l'heuristique $H5$

3.4.6 Description de l'heuristique H6

Soit la règle $SPT_{S_i+p_i}$ qui range les tâches dans l'ordre croissant de leurs temps de traitement et de préparation.

La dernière heuristique est l'heuristique $H6$ qui range les tâches selon l'ordre $SPT_{S_i+p_i}$, ensuite appliquer la procédure $A1$.

Algorithme H6 ;**Début**

- Ranger les tâches suivant la règle $SPT_{S_i+p_i}$;
- Appliquer la procédure A1 ;

Fin.

Cette heuristique génère une solution en $O(n \log n)$.

Exemple 3.7. *En appliquant cette heuristique à notre exemple, on obtiendra la liste des tâches suivante :*

$$\{T_1, T_8, T_9, T_3, T_4, T_{10}, T_6, T_2, T_5, T_7\}$$

La solution est représentée par la figure 3.7 avec C_{max} égale à 38.

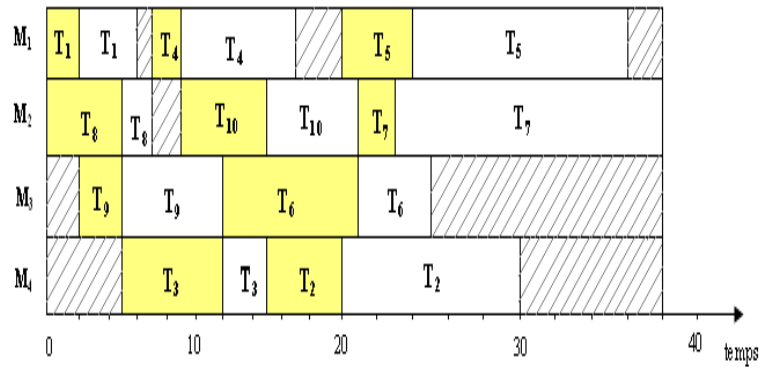


FIG. 3.7 – Exemple 3.7 : solution générée par l'heuristique H6

Chapitre 4

Expérimentations numériques

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'évaluation numérique de la performance des heuristiques développées au chapitre précédent. Une banque de problèmes tests nous permettra de valider ces heuristiques et d'analyser leur comportement.

Dans la section suivante nous détaillerons le bassin de problèmes sur lesquels l'étude a été faite.

4.2 Génération de problèmes tests

Afin de tester les heuristiques développées nous avons généré des problèmes tests possédant différentes caractéristiques. Par ailleurs, chaque instance est caractérisée par un triplet (machines, tâches, ouvriers) tel que nous fixons le nombre de machines à $m = 2, 3, 5, 10$, le nombre de tâches à $n = 10, 20, 50, 100, 1000$, et le nombre d'ouvriers à $k = \overline{1, m}$.

Les temps de traitement des tâches ainsi que les temps de préparation seront distribués aléatoirement selon la loi uniforme en prenant plusieurs intervalles.

Pour chaque nombre de machines nous avons fait varier le nombre de tâches, et pour chaque nombre de tâches nous avons fait varier le nombre d'ouvriers. Nous avons ainsi testé 100 instances différentes pour chaque problème.

Pour chaque combinaison de nombre de machines, nombre de tâches et nombre d'ouvriers on compte le nombre de fois où l'heuristique H donne de meilleurs solutions, aussi le nombre de fois où elle donne des solutions égales à la borne inférieure.

Pour évaluer les six heuristiques, nous avons utilisé l'indicateur de performance de chaque heuristique par rapport à la borne inférieure. Ce dernier appelé aussi déviation et est donné par le quotient $\frac{(H-BI)}{BI}$ avec H la valeur du critère donnée par l'heuristique et BI la borne inférieure.

Pour avoir des résultats exploitables, on génère aléatoirement 100 instances et on calcule la moyenne de $\frac{(H-BI)}{BI}$.

4.2.1 Première série de tests

Les temps d'exécution des tâches p_i sont uniformément tirés de l'intervalle $[1, 10]$ et les temps de préparation S_i sont tirés de la distribution uniforme sur $[1, 5]$.

Ci-joint un tableau des tests réalisés. La première colonne du tableau fournie le nombre de machines, la deuxième et la troisième colonne spécifient le nombre de tâches et le nombre d'ouvriers respectivement. La première ligne indique le nombre de fois où l'heuristique H donne de meilleurs solutions et la deuxième ligne le nombre de fois où la solution trouvée est égale à la borne inférieure. Après on distingue trois lignes successives qui spécifient le temps moyen de calcul sur les 100 tests, ainsi que les déviations moyennes (Dév-moy) et les déviations maximales (Dév-max) :

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	10	1	C_{max}	49	11	16	15	60	3
			Opt	1	0	0	0	8	0
			Durée-moy	0.47	0.15	0.15	0.15	0.16	0.32
			Dév-moy	0.10	0.13	0.16	0.14	0.08	0.21
			Dév-max	0.17	0.23	0.27	0.22	0.15	0.28
		2	C_{max}	54	19	23	17	83	3
			Opt	39	13	17	13	63	2
			Durée-moy	0.16	0.15	0.15	0.15	0.15	0.78
			Dév-moy	0.015	0.051	0.054	0.062	0.04	0.14
			Dév-max	0.060	0.090	0.140	0.140	0.060	0.22
	20	1	C_{max}	41	15	20	13	76	0
			Opt	0	0	0	0	10	0
			Durée-moy	0.32	0.48	0.78	0.31	0.32	1.09
			Dév-moy	0.10	0.13	0.11	0.11	0.07	0.15
			Dév-max	0.17	0.18	0.14	0.17	0.14	0.21
		2	C_{max}	44	15	25	19	88	0
			Opt	39	13	24	17	84	0
			Durée-moy	0.46	0.31	0.32	0.78	0.16	0.63
			Dév-moy	0.008	0.041	0.014	0.031	0.002	0.09
			Dév-max	0.021	0.083	0.033	0.081	0.020	0.13

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	50	1	C_{max}	33	7	23	13	94	0
			Opt	2	0	0	0	11	0
			Durée-moy	1.4	0.92	1.27	1.26	1.24	1.71
			Dév-moy	0.075	0.080	0.080	0.085	0.070	0.102
			Dév-max	0.110	0.110	0.120	0.110	0.090	0.130
		2	C_{max}	36	11	26	16	99	0
			Opt	5	15	23	14	60	0
			Durée-moy	1.42	1.42	1.57	1.71	1.57	2.95
			Dév-moy	0.0031	0.0031	0.0141	0.0083	0.0022	0.0234
			Dév-max	0.0090	0.0301	0.0210	0.0204	0.0091	0.0412
	100	1	C_{max}	31	11	14	10	88	0
			Opt	2	0	2	8	15	0
			Durée-moy	4.21	4.56	4.88	3.90	3.77	4.15
			Dév-moy	0.091	0.095	0.093	0.093	0.061	0.111
			Dév-max	0.120	0.124	0.113	0.122	0.103	0.133
		2	C_{max}	38	14	17	14	100	0
			Opt	34	13	17	13	98	0
			Durée-moy	4.54	5.61	5.27	5.34	5.75	4.28
			Dév-moy	0.00141	0.00601	0.00322	0.00440	0.00004	0.01105
			Dév-max	0.00451	0.01222	0.00711	0.01152	0.00410	0.01833
	1000	1	C_{max}	40	19	27	21	93	0
			Opt	3	2	1	15	20	0
			Durée-moy	52.18	54.05	53.76	52.16	53.09	54.45
			Dév-moy	0.080	0.081	0.075	0.075	0.062	0.093
			Dév-max	0.085	0.090	0.085	0.084	0.080	0.093
		2	C_{max}	59	22	36	28	100	0
			Opt	34	11	26	14	64	0
			Durée-moy	62.64	61.23	60.12	61.77	61.98	61.58
			Dév-moy	0.0002	0.0005	0.0003	0.0004	0.00008	0.0011
			Dév-max	0.0007	0.0011	0.0009	0.0009	0.0004	0.0024
3	10	1	C_{max}	55	0	5	9	62	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.16	0.31	0.94	0.47	0.32	0.77
			Dév-moy	0.26	0.40	0.36	0.30	0.26	0.51
			Dév-max	0.35	0.48	0.46	0.53	0.29	0.81
		2	C_{max}	62	3	5	11	61	0
			Opt	3	0	0	0	8	0
			Durée-moy	0.32	0.62	0.94	0.46	0.46	0.94
			Dév-moy	0.07	0.16	0.14	0.13	0.10	0.27
			Dév-max	0.15	0.25	0.22	0.18	0.18	0.37
		3	C_{max}	66	7	14	8	76	0
			Opt	29	0	7	3	37	0
			Durée-moy	0.48	0.62	0.79	0.47	0.31	1.09
			Dév-moy	0.05	0.13	0.09	0.11	0.04	0.19
			Dév-max	0.09	0.26	0.18	0.23	0.09	0.27

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
3	20	1	C_{max}	12	0	0	11	86	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.92	0.64	1.71	0.93	1.28	1.53
			Dév-moy	0.30	0.38	0.32	0.32	0.26	0.45
			Dév-max	0.46	0.52	0.52	0.44	0.27	0.60
		2	C_{max}	82	0	5	11	46	0
			Opt	6	0	0	0	1	0
			Durée-moy	0.93	1.68	0.80	1.75	1.54	1.27
			Dév-moy	0.031	0.111	0.094	0.075	0.050	0.141
			Dév-max	0.051	0.141	0.150	0.133	0.070	0.150
		3	C_{max}	48	3	27	21	75	0
			Opt	16	1	10	6	20	0
			Durée-moy	0.78	0.78	2.32	1.26	1.25	2.04
			Dév-moy	0.016	0.074	0.045	0.041	0.021	0.111
			Dév-max	0.051	0.134	0.094	0.070	0.092	0.302
	50	1	C_{max}	1	0	0	3	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.2	2.49	3.89	3.6	2.68	3.76
			Dév-moy	0.24	0.27	0.27	0.27	0.21	0.35
			Dév-max	0.32	0.38	0.33	0.32	0.31	0.44
		2	C_{max}	96	0	2	3	20	0
			Opt	3	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.72	2.96	3.61	3.16	4.09	3.56
			Dév-moy	0.008	0.051	0.044	0.041	0.022	0.091
			Dév-max	0.020	0.065	0.070	0.065	0.025	0.131
		3	C_{max}	44	4	18	7	88	0
			Opt	30	1	10	3	57	0
			Durée-moy	3.94	2.59	3.31	3.88	2.83	2.97
			Dév-moy	0.005	0.022	0.022	0.031	0.003	0.044
			Dév-max	0.011	0.045	0.045	0.050	0.007	0.060
	100	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	7.21	7.35	7.34	6.23	7.23	7.6
			Dév-moy	0.22	0.23	0.24	0.24	0.19	0.30
			Dév-max	0.28	0.27	0.27	0.27	0.19	0.34
		2	C_{max}	98	0	0	0	12	0
			Opt	8	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.94	7.78	6.89	6.56	7.49	7.99
			Dév-moy	0.008	0.044	0.031	0.044	0.011	0.061
			Dév-max	0.101	0.051	0.040	0.052	0.020	0.37
		3	C_{max}	45	4	15	10	99	0
			Opt	27	1	5	4	54	0
			Durée-moy	7.21	7.51	7.16	6.7	8.31	7.17
			Dév-moy	0.004	0.011	0.011	0.013	0.001	0.043
			Dév-max	0.007	0.020	0.020	0.020	0.003	0.050

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
3	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	68.16	81.67	83.63	79.52	79.25	80.33
			Dév-moy	0.25	0.24	0.23	0.23	0.18	0.30
			Dév-max	0.25	0.25	0.25	0.15	0.19	0.31
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	3	0	0	0	0	0
			Durée-moy	98.25	98.67	97.34	97.90	98.51	100.00
			Dév-moy	0.0006	0.026	0.023	0.023	0.006	0.051
			Dév-max	0.0007	0.030	0.023	0.022	0.008	0.150
		3	C_{max}	29	2	7	4	94	0
			Opt	20	0	5	2	73	0
			Durée-moy	114.52	113.79	112.66	113.75	114.06	112.79
			Dév-moy	0004	0011	0007	0022	0.00009	0.012
			Dév-max	0.0007	0.0020	0.0015	0.0034	0.000030	0.0.012
5	10	1	C_{max}	84	0	3	4	66	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.32	0.15	0.46	0.77	0.15	0.32
			Dév-moy	0.83	1.30	1.02	1.11	0.86	1.42
			Dév-max	0.94	1.81	1.56	1.68	1.31	1.80
		2	C_{max}	87	0	2	1	46	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.16	0.15	0.47	0.32	0.47	0.46
			Dév-moy	0.20	0.42	0.45	0.41	0.25	0.52
			Dév-max	0.31	0.60	0.63	0.47	0.26	0.68
		3	C_{max}	77	1	2	4	68	0
			Opt	2	0	0	0	2	0
			Durée-moy	0.16	0.15	0.15	0.32	0.46	0.16
			Dév-moy	0.11	0.36	0.31	0.32	0.13	0.48
			Dév-max	0.26	0.53	0.43	0.36	0.21	0.60
		4	C_{max}	50	2	2	1	91	0
			Opt	8	0	0	0	21	0
			Durée-moy	0.15	0.32	0.15	0.16	0.15	0.32
			Dév-moy	0.09	0.30	0.30	0.31	0.09	0.40
			Dév-max	0.16	0.46	0.64	0.50	0.14	0.53
		5	C_{max}	55	1	7	2	100	0
			Opt	10	0	1	0	34	0
			Durée-moy	0.79	0.31	0.16	0.31	0.31	0.32
			Dév-moy	0.07	0.23	0.24	0.31	0.04	0.24
			Dév-max	0.17	0.50	0.41	0.47	0.16	0.41
	20	1	C_{max}	68	0	0	16	58	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.30	0.16	0.32	0.47	0.76	1.12
			Dév-moy	0.75	0.97	0.90	0.91	0.74	1.01
			Dév-max	0.87	1.16	1.03	1.10	0.86	1.20

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	20	2	C_{max}	92	0	0	4	23	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.30	0.15	0.16	0.80	0.78	1.60
			Dév-moy	0.12	0.32	0.27	0.26	0.18	0.38
			Dév-max	0.15	0.43	0.32	0.31	0.25	43
		3	C_{max}	69	0	2	6	70	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.16	0.46	0.46	0.79	0.92	1.42
			Dév-moy	0.07	0.21	0.15	0.15	0.07	0.25
			Dév-max	0.11	0.31	0.19	0.22	0.09	0.27
		4	C_{max}	32	0	2	2	95	0
			Opt	2	0	0	0	15	0
			Durée-moy	0.31	0.47	0.80	1.23	0.46	0.94
			Dév-moy	0.05	0.15	0.10	0.15	0.03	0.17
			Dév-max	0.09	0.25	0.15	0.22	0.05	0.27
		5	C_{max}	27	1	7	1	96	0
			Opt	6	0	2	0	53	0
			Durée-moy	0.32	0.79	0.62	1.10	0.62	0.48
			Dév-moy	0.05	0.11	0.10	0.12	0.02	0.13
			Dév-max	0.08	0.15	0.18	0.19	0.06	0.18
	50	1	C_{max}	52	0	0	2	91	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.18	1.88	2.97	1.56	1.88	2.33
			Dév-moy	0.80	0.90	0.90	0.87	0.80	1.00
			Dév-max	1.05	1.17	1.14	1.10	1.05	1.20
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.32	2.05	2.52	2.48	2.02	2.04
			Dév-moy	0.80	0.90	0.90	0.87	0.80	1.00
			Dév-max	1.05	1.17	1.14	1.10	1.05	1.20
		3	C_{max}	83	0	1	2	51	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.66	1.4	2.02	3.00	4.04	2.82
			Dév-moy	0.026	0.091	0.084	0.072	0.041	0.131
			Dév-max	0.040	0.120	0.112	0.101	0.053	0.161
		4	C_{max}	35	1	0	3	95	0
			Opt	3	0	0	0	2	0
			Durée-moy	2.64	3.16	2.02	3.57	3.31	3.43
			Dév-moy	0.024	0.060	0.050	0.050	0.021	0.102
			Dév-max	0.060	0.111	0.071	0.100	0.033	0.120
		5	C_{max}	22	0	1	0	100	0
			Opt	13	0	1	0	76	0
			Durée-moy	2.22	2.77	2.50	4.25	3.58	2.95
			Dév-moy	0.021	0.062	0.041	0.052	0.003	0.071
			Dév-max	0.040	0.095	0.070	0.081	0.010	0.090

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	100	1	C_{max}	18	0	0	0	94	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.85	6.56	6.24	6.06	6.60	6.71
			Dév-moy	0.80	0.81	0.83	0.82	0.75	0.86
			Dév-max	0.86	0.93	0.95	0.94	0.85	0.96
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.72	5.92	6.20	6.90	8.75	6.28
			Dév-moy	0.04	0.16	0.14	0.13	0.09	0.21
			Dév-max	0.05	0.19	0.15	14	0.17	0.24
		3	3	95	0	0	1	29	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	8.05	5.31	5.81	10.03	4.87	6.41
			Dév-moy	0.02	0.05	0.05	0.04	0.02	0.10
			Dév-max	0.03	0.08	0.07	0.06	0.03	0.13
		4	C_{max}	29	1	4	4	92	0
			Opt	1	0	0	0	1	0
			Durée-moy	4.07	4.42	7.94	3.45	5.61	8.25
			Dév-moy	0.015	0.032	0.021	0.030	0.008	0.064
			Dév-max	0.021	0.050	0.030	0.040	0.011	0.081
		5	C_{max}	4	0	0	0	100	0
			Opt	4	0	0	0	94	0
			Durée-moy	4.64	6.37	4.70	4.22	5.69	2.64
			Dév-moy	0.011	0.021	0.020	0.023	0.0006	0.033
			Dév-max	0.023	0.040	0.044	0.051	0.006	0.050
	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	57.41	52.95	55.60	53.00	57.16	52.06
			Dév-moy	0.80	0.80	0.81	0.81	0.76	0.84
			Dév-max	0.83	0.83	0.86	0.86	0.81	0.88
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	69.56	67.92	67.21	70.49	66.22	65.32
			Dév-moy	0.03	0.13	0.11	0.11	0.08	0.18
			Dév-max	0.03	0.14	0.12	0.12	0.09	0.19
		3	C_{max}	100	0	0	1	2	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	81.14	77.84	66.52	83.36	79.19	58.00
			Dév-moy	0.005	0.033	0.020	0.021	0.008	0.060
			Dév-max	0.007	0.034	0.020	0.020	0.010	0.070
		4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	95.98	87.02	97.51	90.70	95.88	102.03
			Dév-moy	0.005	0.007	0.005	0.004	0.002	0.031
			Dév-max	0.006	0.009	0.006	0.005	0.002	0.034

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	1000	5	C_{max}	7	0	1	1	100	0
			Opt	7	0	1	1	99	0
			Durée-moy	112.18	111.56	111.28	111.77	111.08	109.47
			Dév-moy	0.0008	0.0034	0.0022	0.0030	0.000006	0.021
			Dév-max	0.0020	0.00041	0.0040	0.0050	0.0006	0.022
10	10	1	C_{max}	100	0	1	2	74	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.31	0.32	0.47	0.32	0.77	0.16
			Dév-moy	1.61	2.21	2.05	1.93	1.65	2.36
			Dév-max	2.00	2.61	2.61	2.53	2.08	2.69
		2	C_{max}	80	0	1	0	63	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
			Durée-moy	0.74	0.16	0.32	0.31	0.46	0.32
			Dév-moy	0.32	0.82	0.74	0.72	0.36	0.98
			Dév-max	0.006	0.009	0.006	0.005	0.002	0.034
		3	C_{max}	95	0	4	0	48	0
			Opt	56	0	4	0	39	0
			Durée-moy	0.32	0.64	0.32	0.15	0.32	0.15
			Dév-moy	0.04	0.51	0.38	0.41	0.10	0.62
			Dév-max	0.17	0.63	0.73	0.54	0.21	0.73
		4	C_{max}	93	0	7	0	97	0
			Opt	83	0	7	0	84	0
			Durée-moy	0.47	0.32	0.15	0.31	0.31	0.31
			Dév-moy	0.020	0.37	0.23	0.28	0.024	0.44
			Dév-max	0.07	0.50	0.31	0.40	0.08	0.61
		5	C_{max}	98	0	17	4	98	0
			Opt	95	0	17	4	95	0
			Durée-moy	1.12	0.32	0.16	0.48	0.31	0.32
			Dév-moy	0.011	0.23	0.09	0.18	0.010	0.35
			Dév-max	0.03	0.32	0.23	0.25	0.03	0.37
		6	C_{max}	99	0	50	7	99	0
			Opt	98	0	50	6	99	0
		7	C_{max}	100	1	65	10	100	0
			Opt	100	1	65	10	100	0
		8	C_{max}	99	21	88	18	100	0
			Opt	99	21	88	18	100	0
		9	C_{max}	100	52	98	64	100	0
			Opt	98	52	98	64	100	0
		10	C_{max}	100	100	100	100	100	100
			Opt	100	100	100	100	100	100
	20	1	C_{max}	100	0	0	9	50	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.47	0.31	1.25	1.26	0.76	0.62
			Dév-moy	2.73	3.26	3.09	3.07	2.76	3.42
			Dév-max	3.40	4.00	3.66	3.68	3.40	4.20

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	20	2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.40	0.94	0.78	0.62	0.30	0.48
			Dév-moy	0.65	1.38	1.30	1.24	0.98	1.54
			Dév-max	0.87	1.69	1.75	1.50	1.17	1.76
		3	C_{max}	100	0	0	2	16	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.77	1.10	0.77	0.78	0.62	1.26
			Dév-moy	0.30	0.68	0.68	0.61	0.38	0.80
			Dév-max	0.50	1.05	0.89	0.83	0.66	1.22
		4	C_{max}	25	0	0	5	88	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.46	1.09	0.63	0.46	0.78	0.77
			Dév-moy	0.29	0.62	0.54	0.45	0.23	0.67
			Dév-max	0.39	0.73	0.61	0.75	0.35	0.81
		5	C_{max}	32	0	0	4	92	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.95	0.31	1.23	0.79	0.95	1.08
			Dév-moy	0.24	0.49	0.37	0.34	0.17	0.48
			Dév-max	0.31	0.53	0.53	0.59	0.23	0.65
		6	C_{max}	34	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	36	0	0	0	93	0
			Opt	0	0	0	0	4	0
		8	C_{max}	24	0	1	0	98	0
			Opt	1	0	0	0	16	0
		9	C_{max}	21	1	0	3	98	0
			Opt	0	0	0	0	22	0
		10	C_{max}	23	0	1	0	100	0
			Opt	2	0	0	0	33	0
	50	1	C_{max}	99	0	0	5	81	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.59	3.28	3.11	2.03	2.86	1.71
			Dév-moy	2.53	2.74	2.67	2.67	2.53	2.82
			Dév-max	2.77	3.00	2.92	3.00	2.77	3.10
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.51	3.13	3.77	2.78	2.95	3.46
			Dév-moy	0.42	93	0.98	0.97	0.85	1.13
			Dév-max	0.006	0.009	0.006	0.005	0.002	0.034
		3	C_{max}	100	0	0	0	1	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.65	4.22	3.45	2.93	2.04	4.23
			Dév-moy	0.18	0.47	0.44	0.44	0.28	0.57
			Dév-max	0.24	0.55	0.55	0.56	0.39	0.64

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	50	4	C_{max}	21	0	0	2	96	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.40	3.12	3.43	1.71	4.24	4.43
			Dév-moy	0.16	0.27	0.24	0.23	0.12	0.36
			Dév-max	0.22	0.36	0.32	0.27	0.13	0.43
		5	C_{max}	28	1	2	3	97	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.19	4.35	3.58	2.66	4.09	3.12
			Dév-moy	0.12	0.21	0.13	0.17	0.09	0.28
			Dév-max	0.14	0.27	0.22	0.21	0.10	0.40
		6	C_{max}	28	0	0	4	94	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	27	0	0	0	97	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	15	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	4	0
		9	C_{max}	12	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	29	0
		10	C_{max}	9	0	0	0	99	0
			Opt	3	0	0	0	58	0
	100	1	C_{max}	94	0	0	7	96	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.24	4.71	3.59	3.91	6.03	3.73
			Dév-moy	2.49	2.60	2.58	2.54	2.49	2.64
			Dév-max	0.2.68	2.72	2.79	2.73	2.68	2.83
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.23	4.05	4.12	4.44	4.21	4.17
			Dév-moy	0.33	0.79	0.87	0.86	0.78	0.97
			Dév-max	0.41	0.91	0.99	1.01	87	1.09
		3	C_{max}	100	0	0	0	2	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.15	5.35	5.30	5.18	4.10	5.30
			Dév-moy	0.16	0.37	0.37	0.36	0.26	0.49
			Dév-max	0.20	0.46	0.44	0.44	0.32	0.57
		4	C_{max}	1	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.32	6.07	6.21	6.30	4.39	7.19
			Dév-moy	0.14	0.19	0.16	0.16	0.10	0.26
			Dév-max	0.18	0.25	0.20	0.21	0.15	0.32
		5	C_{max}	11	0	0	3	97	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.21	5.64	6.55	5.45	5.28	5.77
			Dév-moy	0.07	0.12	0.09	0.09	0.05	0.19
			Dév-max	0.09	0.14	0.13	0.12	0.07	0.22

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	100	6	C_{max}	23	0	0	4	96	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	32	0	0	1	93	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	23	0	1	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
		9	C_{max}	10	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	32	0
		10	C_{max}	2	0	0	0	100	0
			Opt	1	0	0	0	74	0
	1000	1	C_{max}	88	0	0	5	99	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	61.90	47.19	47.45	47.04	47.20	49.80
			Dév-moy	2.53	2.54	2.54	2.53	2.52	2.55
			Dév-max	2.66	2.67	2.67	2.66	2.66	2.69
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
			Durée-moy	58.57	59.66	57.80	57.85	58.31	60.26
			Dév-moy	0.28	0.69	0.81	0.81	0.76	0.85
			Dév-max	0.30	0.72	0.84	0.83	0.80	0.89
		3	C_{max}	100	0	0	0	1	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	71.73	69.54	70.01	70.96	71.51	71.37
			Dév-moy	0.12	0.29	0.30	0.29	0.23	0.36
			Dév-max	0.13	0.31	0.31	0.31	0.25	0.40
		4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	83.36	81.75	84.50	74.52	84.11	84.89
			Dév-moy	0.12	0.12	0.09	0.09	0.07	0.18
			Dév-max	0.13	0.13	0.11	0.11	0.08	0.19
		5	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	98.11	89.03	97.63	97.86	99.46	87.76
			Dév-moy	0.050	0.06	0.032	0.032	0.02	0.10
			Dév-max	0.054	0.06	0.035	0.04	0.024	0.11
		6	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	0	0	1	1	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	1	0	0	2	99	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	4	0	0	0	100	0
			Opt	1	0	0	0	0	0
		10	C_{max}	2	0	0	0	100	0
			Opt	2	0	0	0	93	0

m	k	n		H1	H2	H3	H4	H5	H6
Total1				5138	349	794	556	7515	106
Total2				1111	240	580	315	2167	102

TAB. 4.1 – Tests pour $p_i \in [1, 10]$ et $S_i \in [1, 5]$

A la lecture du tableau 4.1, il apparaît clairement que les deux heuristiques $H1$, $H5$ sont plus intéressantes que d'autres. Nous remarquons que la longueur de l'ordonnancement dépend fortement du nombre de machines, nombre de tâches et du nombre d'ouvriers.

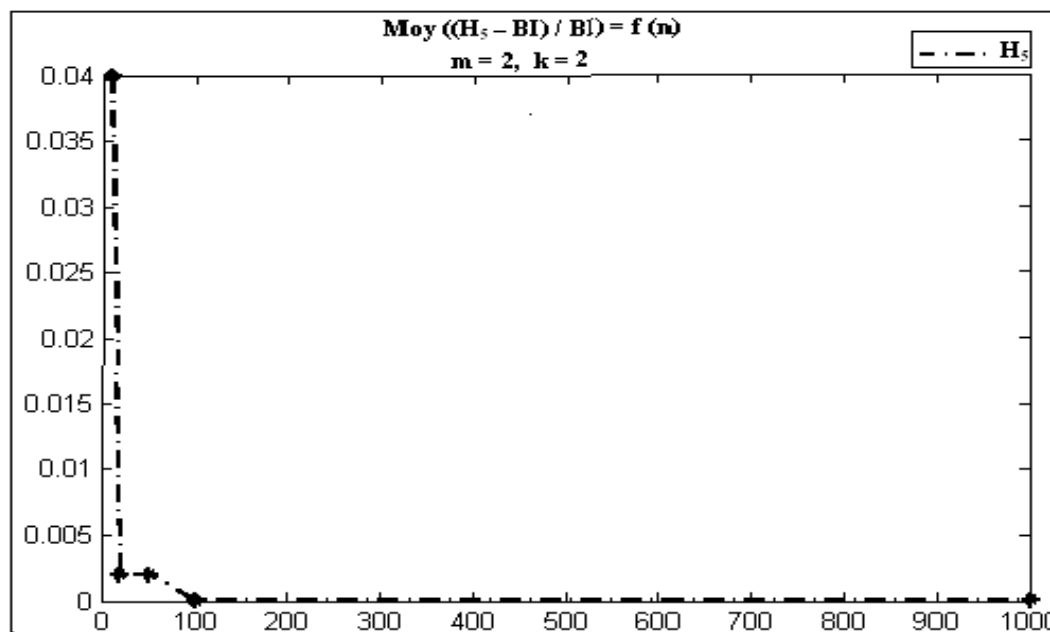
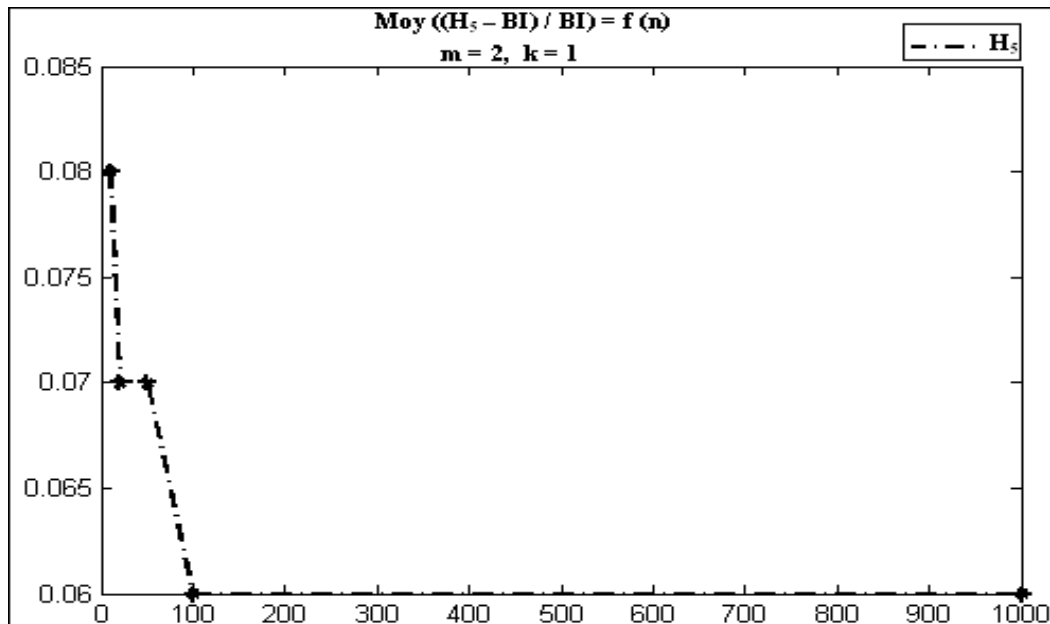
L'heuristique $H1$ se montre efficace dans la résolution de quelques problèmes en un temps ne dépassant pas une seconde. Pour $m = 3$, $n = 50, 100, 1000$, $k = 2$, elle fournit de meilleurs résultats avec 96%, 98%, 100% respectivement, quant à l'indicateur moyen prend respectivement les valeurs suivantes : 0.008%, 0.008% et 0.0006%.

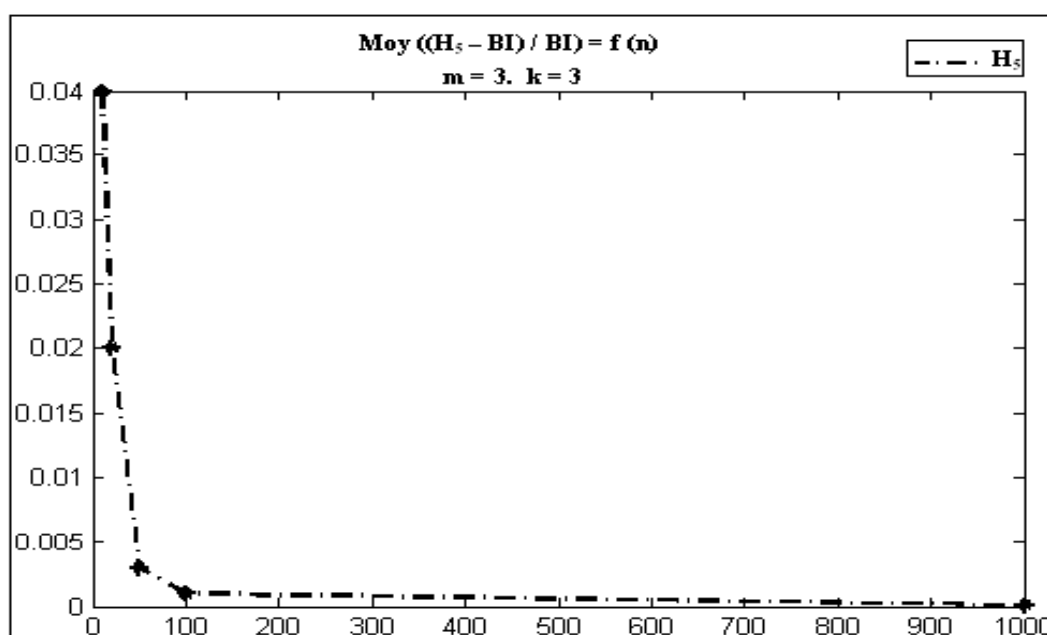
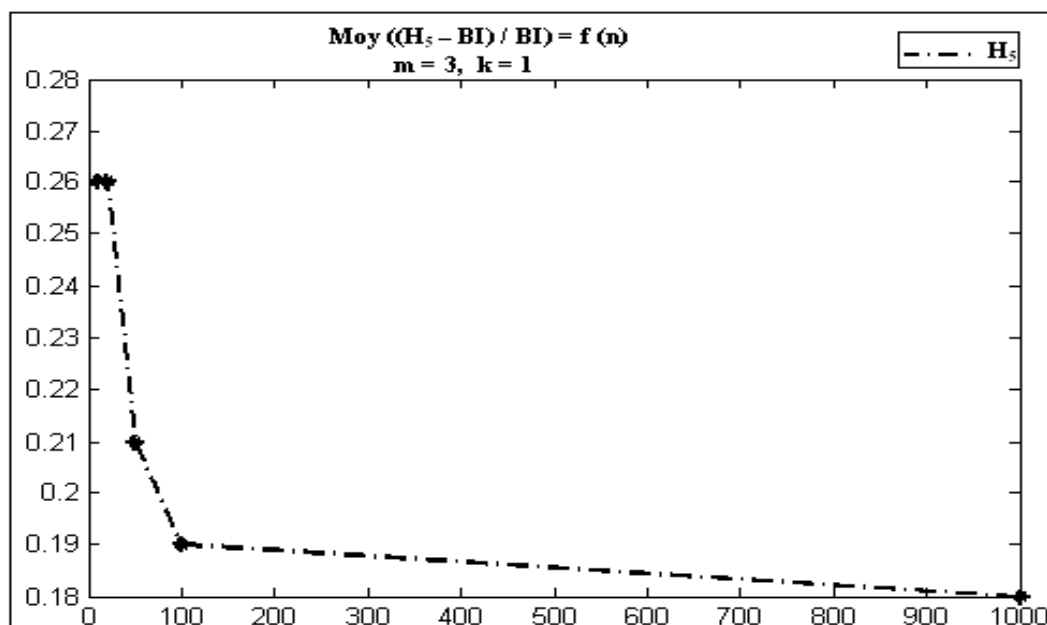
Dans le cas de 5 machines, c'est aussi l'heuristique $H1$ qui donne de meilleures solutions pour $n = 10, 20, 50, 100, 1000$ tâches et $k = 2, 3$ avec des indicateurs moyens : 0.20%, 0.12%, 0.06%, 0.04% et 0.03% pour le cas de deux ouvriers. Pour $k = 3$, l'indicateur moyen prend les valeurs : 0.11%, 0.07%, 0.026%, 0.02% et 0.005% respectivement.

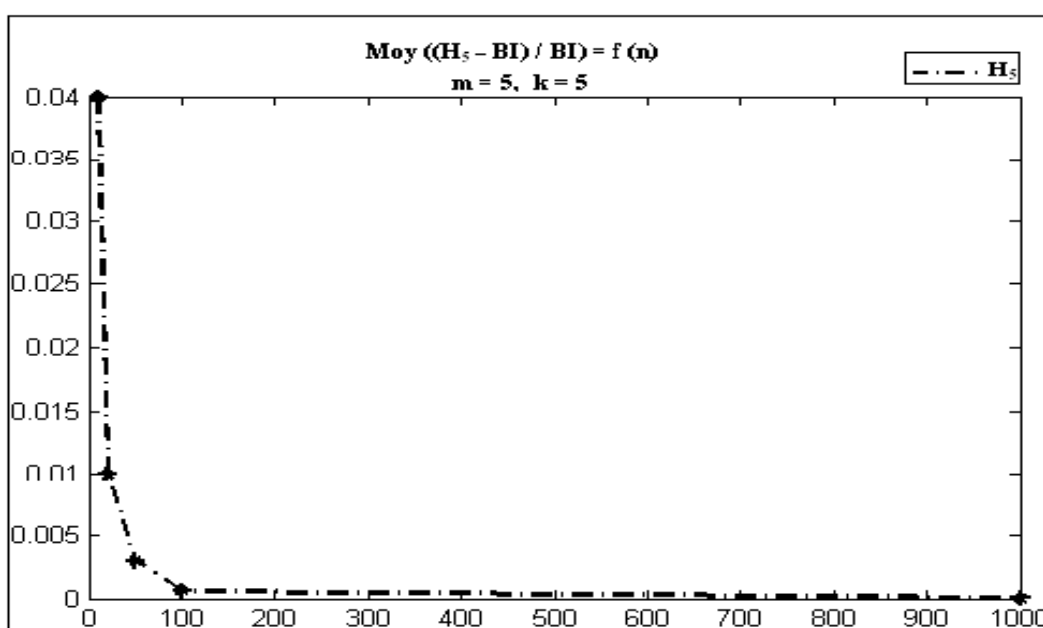
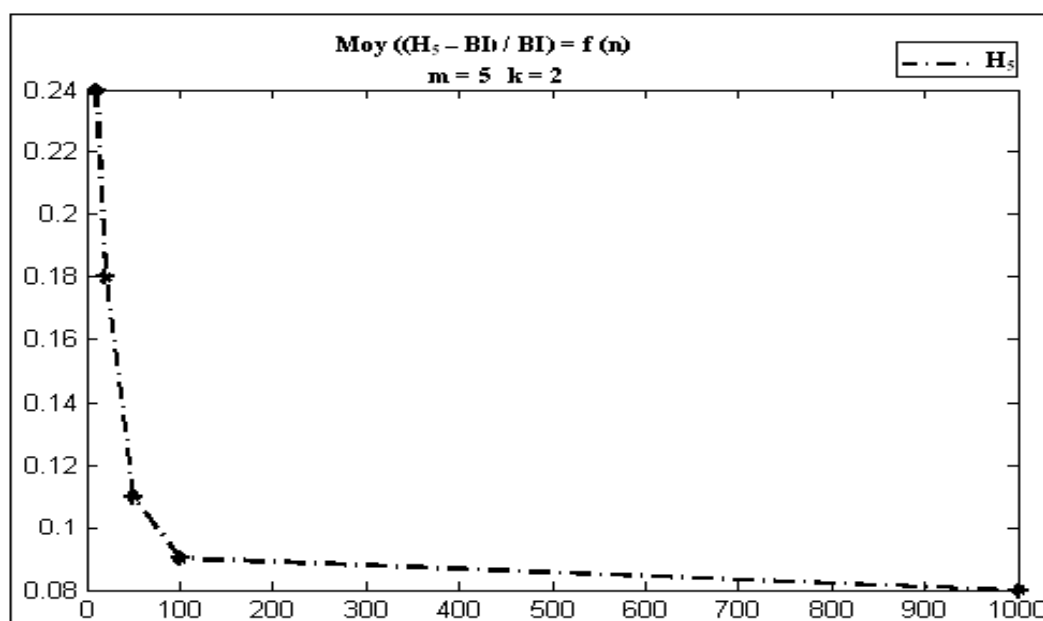
Nous pouvons observer de nouveau que pour 10 machines, $k = 1, 2, 3$, $H1$ fournit de bons résultats avec des pourcentages importants mais rien ne garantit que ces résultats sont optimaux.

Pour les autres cas, c'est $H5$ qui procure une solution réalisable dans 7515 cas et une solution optimale dans 2167 cas avec un temps moyen de calcul inférieure à une seconde. On peut ainsi conclure sur l'importance de considérer le nombre d'ouvriers.

Pour une meilleure lisibilité la figure 4.1 transcrit quelques résultats trouvés par l'heuristique $H5$.







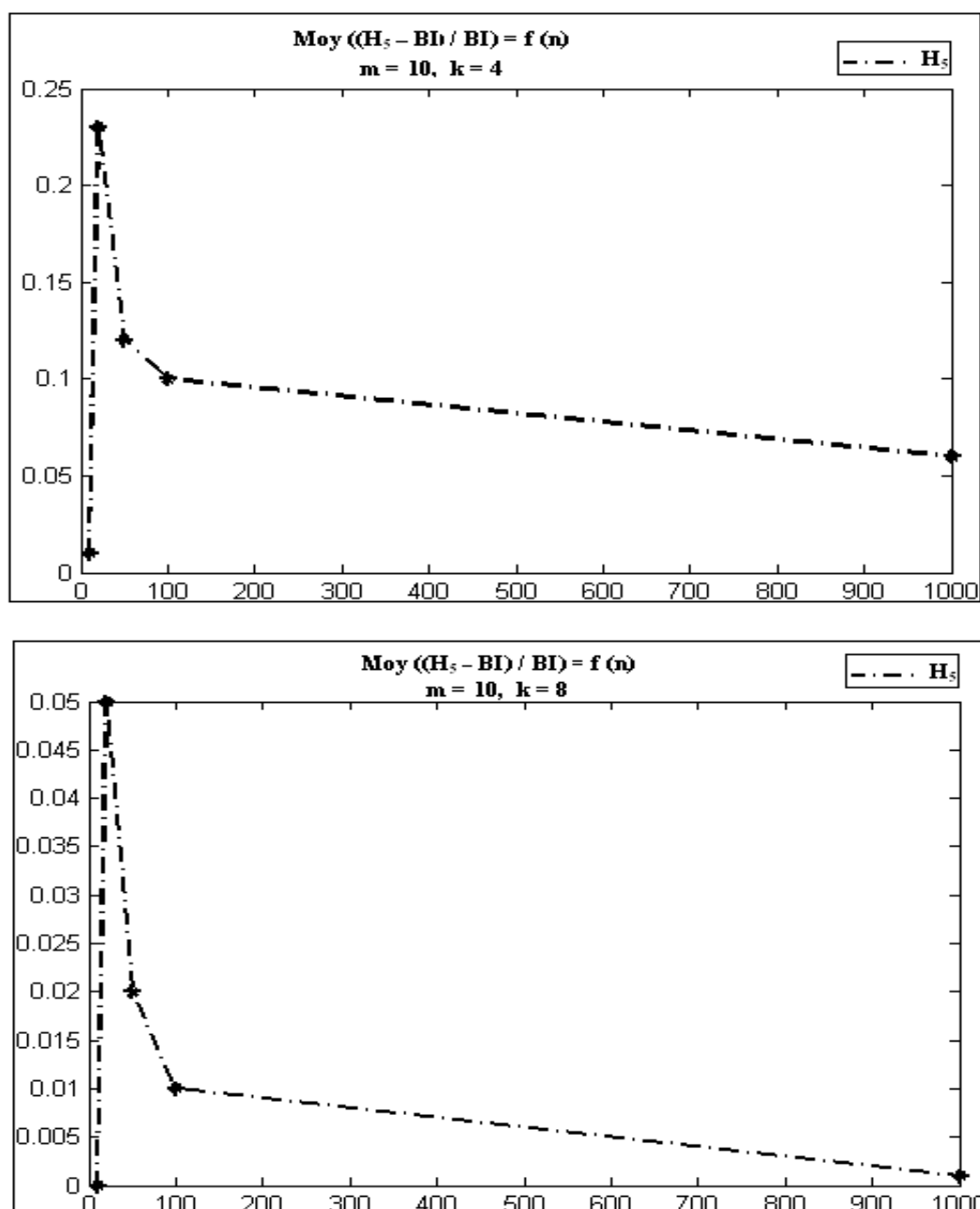


FIG. 4.1 – Comportement de l'heuristique H5 par rapport à la borne inférieure

La première remarque qui nous inspire ces figures est que très rapidement la solution converge vers 0 lorsque le nombre d'ouvriers est égale au nombre de machines.

On remarque aussi que l'augmentation du nombre de tâches dégrade généralement la performance de l'heuristique H5.

4.2.2 Deuxième série de tests

Un autre test a été réalisé dans le cas où les temps de traitement et les temps de préparation des tâches prennent leurs valeurs dans $[1, 20]$, $[1, 10]$ respectivement. Le tableau 4.2 reporte les résultats.

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	10	1	C_{max}	35	3	8	17	58	0
			Opt	0	0	0	0	5	0
			Durée-moy	0.46	0.15	0.15	0.31	0.47	0.32
			Dév-moy	0.12	0.16	0.14	0.12	0.09	0.20
			Dév-max	0.23	0.26	0.26	0.17	0.15	0.29
		2	C_{max}	57	12	18	15	90	0
			Opt	23	6	10	11	55	0
			Durée-moy	0.32	0.15	0.16	0.15	0.62	0.46
			Dév-moy	0.024	0.061	0.041	0.050	0.010	0.081
			Dév-max	0.060	0.152	0.090	0.070	0.060	0.131
	20	1	C_{max}	32	12	22	22	73	0
			Opt	0	0	0	0	8	0
			Durée-moy	0.16	0.30	0.32	1.42	1.24	0.46
			Dév-moy	0.13	0.15	0.13	0.12	0.08	0.18
			Dév-max	0.17	0.22	0.17	0.18	0.15	0.22
		2	C_{max}	47	8	27	16	86	0
			Opt	15	4	9	9	71	0
			Durée-moy	0.65	0.47	0.47	0.63	0.62	0.46
			Dév-moy	0.008	0.051	0.020	0.021	0.003	0.070
			Dév-max	0.020	0.084	0.0690	0.050	0.010	0.090
	50	1	C_{max}	14	3	4	20	92	0
			Opt	0	0	0	0	3	0
			Durée-moy	2.04	0.92	2.82	0.79	2.79	1.25
			Dév-moy	0.11	0.11	0.09	0.09	0.07	0.13
			Dév-max	0.17	0.16	0.13	0.13	0.09	0.19
		2	C_{max}	61	12	36	18	94	0
			Opt	23	7	14	8	42	0
			Durée-moy	1.86	2.18	2.19	1.43	2.00	2.04
			Dév-moy	0.004	0.041	0.011	0.010	0.002	0.030
			Dév-max	0.010	0.024	0.020	0.020	0.011	0.040
	100	1	C_{max}	18	7	21	30	93	0
			Opt	0	0	0	0	3	0
			Durée-moy	4.07	4.84	4.36	3.75	4.85	4.05
			Dév-moy	0.08	0.10	0.08	0.08	0.06	0.11
			Dév-max	0.12	0.12	0.10	0.11	0.10	0.14
		2	C_{max}	53	13	27	13	94	0
			Opt	26	10	11	7	50	0
			Durée-moy	5.20	5.30	4.52	4.80	5.15	4.40
			Dév-moy	0.002	0.008	0.004	0.007	0.0009	0.014
			Dév-max	0.004	0.014	0.012	0.014	0.003	0.024

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	1000	1	C_{max}	10	5	29	34	98	0
			Opt	0	0	0	0	5	0
			Durée-moy	51.91	50.83	52.63	50.19	52.49	50.59
			Dév-moy	0.08	0.08	0.07	0.07	0.06	0.09
			Dév-max	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.11
		2	C_{max}	63	14	31	11	94	0
			Opt	27	2	16	5	52	0
			Durée-moy	64.08	62.18	62.56	62.30	62.34	63.29
			Dév-moy	0.0002	0.0006	0.0003	0.0001	0.00007	0.0011
			Dév-max	0.0004	0.0010	0.0009	0.0020	0.0005	0.0021
3	10	1	C_{max}	50	1	2	3	55	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.78	0.32	0.62	0.62	0.77	0.62
			Dév-moy	0.30	0.50	0.40	0.50	0.27	0.61
			Dév-max	0.45	0.70	0.50	0.60	0.43	0.79
		2	C_{max}	58	3	5	7	55	0
			Opt	0	0	0	0	46	0
			Durée-moy	0.62	1.25	0.31	0.63	0.92	0.64
			Dév-moy	0.06	0.17	0.15	0.17	0.10	0.30
			Dév-max	0.11	0.28	0.28	0.26	0.14	0.44
		3	C_{max}	40	1	7	5	79	0
			Opt	15	0	3	0	35	0
			Durée-moy	0.15	0.62	0.64	0.94	0.31	1.09
			Dév-moy	0.04	0.16	0.10	0.14	0.02	0.20
			Dév-max	0.13	0.26	0.22	0.31	0.07	0.28
	20	1	C_{max}	32	0	0	18	75	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.63	1.57	1.24	1.09	1.57	1.56
			Dév-moy	0.28	0.36	0.34	0.30	0.26	0.40
			Dév-max	0.40	0.47	0.46	0.41	0.33	0.57
		2	C_{max}	64	0	3	13	26	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.40	0.79	1.39	1.41	0.95	1.09
			Dév-moy	0.03	0.13	0.08	0.11	0.04	0.26
			Dév-max	0.05	0.20	0.12	0.16	0.05	1.20
		3	C_{max}	48	1	10	4	67	0
			Opt	10	0	2	0	16	0
			Durée-moy	1.09	2.02	0.76	1.11	1.40	1.89
			Dév-moy	0.02	0.07	0.03	0.07	0.01	0.09
			Dév-max	0.05	0.11	0.07	0.12	0.03	0.12
	50	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	14	0
			Durée-moy	2.67	3.12	3.47	3.42	3.28	4.20
			Dév-moy	0.26	0.30	0.26	0.25	0.19	0.36
			Dév-max	0.33	0.34	0.32	0.31	0.24	0.42

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
3	50	2	C_{max}	93	0	0	1	14	0
			Opt	2	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.58	3.43	3.76	3.30	3.89	3.27
			Dév-moy	0.013	0.040	0.052	0.040	0.021	0.080
			Dév-max	0.015	0.060	0.060	0.051	0.022	0.110
		3	C_{max}	33	1	16	6	93	0
			Opt	20	0	1	1	43	0
			Durée-moy	2.81	3.46	4.07	2.94	3.44	2.85
			Dév-moy	0.008	0.031	0.015	0.023	0.002	0.051
			Dév-max	0.015	0.050	0.021	0.040	0.007	0.070
		100	1	C_{max}	0	0	0	100	0
				Opt	0	0	0	0	0
				Durée-moy	7.28	7.37	8.31	6.75	7.82
				Dév-moy	0.23	0.25	0.24	0.23	0.19
				Dév-max	0.31	0.32	0.30	0.30	0.35
			2	C_{max}	100	0	0	4	0
				Opt	1	0	0	0	0
				Durée-moy	8.64	6.75	6.52	7.03	7.96
				Dév-moy	0.008	0.041	0.035	0.041	0.020
				Dév-max	0.016	0.045	0.040	0.047	0.020
			3	C_{max}	18	1	3	87	0
				Opt	6	0	3	56	0
				Durée-moy	8.86	6.22	8.46	7.46	7.22
				Dév-moy	0.004	0.013	0.011	0.020	0.001
				Dév-max	0.009	0.020	0.021	0.020	0.003
	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	85.20	83.86	84.20	85.33	85.74	83.35
			Dév-moy	0.24	0.24	0.23	0.23	0.18	0.30
			Dév-max	0.25	0.25	0.24	0.24	0.19	0.31
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	1	0	0	0	0	0
			Durée-moy	91.94	102.58	103.33	104.23	103.46	105.72
			Dév-moy	0.0007	0.023	0.020	0.020	0.007	0.051
			Dév-max	0.001	0.031	0.020	0.020	0.010	0.051
		3	C_{max}	24	0	3	3	96	0
			Opt	11	0	3	1	53	0
			Durée-moy	119.22	120.16	120.32	121.57	118.14	121.26
			Dév-moy	0.0003	0.0011	0.0007	0.0012	0.00009	0.0141
			Dév-max	0.0005	0.0021	0.0010	0.0020	0.0002	0.022
5	10	1	C_{max}	87	0	1	3	55	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.32	0.46	0.63	0.31	0.31	0.32
			Dév-moy	0.86	0.95	1.19	1.19	0.89	1.44
			Dév-max	1.31	1.89	1.48	1.76	1.31	2.03

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	10	2	C_{max}	81	0	0	3	35	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.63	0.15	0.16	0.94	0.31	0.31
			Dév-moy	0.22	0.49	0.47	0.44	0.25	0.63
			Dév-max	0.33	0.66	0.63	0.63	0.36	0.90
		3	C_{max}	67	1	0	2	53	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.47	0.61	0.46	0.48	0.32	0.47
			Dév-moy	0.11	0.30	0.30	0.34	0.11	0.42
			Dév-max	0.22	0.43	0.40	0.48	0.17	0.61
		4	C_{max}	54	1	7	2	88	0
			Opt	3	0	1	0	7	0
			Durée-moy	0.31	0.62	0.78	0.31	0.31	0.32
			Dév-moy	0.16	0.26	0.32	0.35	0.11	0.42
			Dév-max	0.30	0.43	0.53	0.50	0.15	0.56
		5	C_{max}	47	1	9	1	97	0
			Opt	3	0	2	0	9	0
			Durée-moy	0.15	0.32	0.16	0.31	0.94	0.15
			Dév-moy	0.08	0.34	0.23	0.33	0.06	0.33
			Dév-max	0.16	0.46	0.48	0.53	0.11	0.43
	20	1	C_{max}	50	0	0	6	64	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.09	0.62	0.46	0.77	0.79	0.79
			Dév-moy	0.74	1.01	0.97	0.91	0.76	1.06
			Dév-max	1.11	1.31	1.20	1.20	1.00	1.27
		2	C_{max}	90	0	0	0	12	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.25	0.95	0.32	0.46	0.95	1.08
			Dév-moy	0.12	0.35	0.27	0.19	0.18	0.38
			Dév-max	0.13	0.50	0.38	0.41	0.23	0.53
		3	C_{max}	73	0	1	4	47	0
			Opt	0	0	0	1	0	0
			Durée-moy	0.93	0.62	1.41	0.78	0.31	0.80
			Dév-moy	0.06	0.25	0.17	0.18	0.08	0.27
			Dév-max	0.09	0.40	0.26	0.31	0.11	0.33
		4	C_{max}	28	0	2	2	85	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
			Durée-moy	0.94	0.63	0.31	1.09	0.94	1.09
			Dév-moy	0.06	0.18	0.13	0.17	0.04	0.21
			Dév-max	0.10	0.28	0.23	0.22	0.05	0.24
		5	C_{max}	19	0	2	0	94	0
			Opt	3	0	2	0	20	0
			Durée-moy	0.78	1.09	0.46	0.79	0.93	1.10
			Dév-moy	0.05	0.16	0.11	0.12	0.01	0.13
			Dév-max	0.08	0.23	0.15	0.31	0.04	0.15

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	50	1	C_{max}	42	0	0	1	71	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.09	1.10	0.46	0.79	1.41	1.10
			Dév-moy	0.76	0.88	0.86	0.85	0.75	0.97
			Dév-max	1.02	1.14	1.07	1.14	1.00	1.25
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.50	3.12	2.80	1.73	1.89	2.03
			Dév-moy	0.06	0.21	0.19	0.18	0.12	0.28
			Dév-max	0.09	0.27	0.21	0.21	0.14	0.31
		3	C_{max}	86	0	0	2	25	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.10	1.23	3.61	1.87	3.29	3.59
			Dév-moy	0.034	0.090	0.071	0.064	0.040	0.166
			Dév-max	0.05	0.12	0.10	0.10	0.05	0.19
		4	C_{max}	26	0	1	2	85	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.57	2.80	3.14	2.48	3.13	2.97
			Dév-moy	0.03	0.07	0.06	0.07	0.02	0.12
			Dév-max	0.04	0.12	0.07	0.10	0.02	0.13
		5	C_{max}	9	0	1	0	100	0
			Opt	2	0	0	0	53	0
			Durée-moy	2.81	2.35	4.54	2.65	2.17	2.97
			Dév-moy	0.02	0.05	0.05	0.065	0.003	0.07
			Dév-max	0.03	0.09	0.09	0.10	0.01	0.09
	100	1	C_{max}	11	0	0	0	94	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.92	6.53	5.80	4.70	5.53	7.63
			Dév-moy	0.72	0.76	0.79	0.77	0.69	0.85
			Dév-max	0.78	0.81	0.81	0.86	0.73	0.92
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.58	6.21	7.03	5.77	6.29	5.77
			Dév-moy	0.05	0.18	0.16	0.14	0.09	0.24
			Dév-max	0.06	0.20	0.20	0.16	0.14	0.33
		3	C_{max}	95	0	0	1	11	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.59	5.63	7.32	6.84	5.94	5.49
			Dév-moy	0.02	0.07	0.052	0.050	0.02	0.11
			Dév-max	0.022	0.08	0.06	0.06	0.03	0.12
		4	C_{max}	17	0	0	3	95	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.02	6.56	4.56	5.18	4.72	5.89
			Dév-moy	0.014	0.041	0.034	0.023	0.009	0.080
			Dév-max	0.017	0.062	0.040	0.030	0.012	0.101

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	100	5	C_{max}	6	0	0	1	99	0
			Opt	3	0	0	0	62	0
			Durée-moy	5.34	4.37	4.82	6.41	4.22	5.31
			Dév-moy	0.011	0.033	0.024	0.031	0.001	0.050
			Dév-max	0.012	0.040	0.031	0.050	0.003	0.060
		1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	55.26	57.85	55.27	56.11	55.59	57.26
			Dév-moy	0.75	0.77	0.80	0.80	0.73	0.84
			Dév-max	0.81	0.81	0.84	0.84	0.78	0.89
	1000	2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	70.52	70.74	70.91	71.17	70.43	71.71
			Dév-moy	0.032	0.14	0.11	0.11	0.07	0.19
			Dév-max	0.04	0.15	0.12	0.12	0.09	0.20
		3	C_{max}	100	0	0	1	2	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	84.93	86.08	85.72	85.76	84.97	86.44
			Dév-moy	0.006	0.034	0.021	0.020	0.010	0.070
			Dév-max	0.007	0.040	0.025	0.027	0.012	0.070
		4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	100.91	99.55	102.18	101.59	100.72	101.63
			Dév-moy	0.006	0.008	0.004	0.005	0.002	0.032
			Dév-max	0.008	0.009	0.005	0.006	0.002	0.037
		5	C_{max}	2	0	0	1	100	0
			Opt	2	0	0	0	99	0
			Durée-moy	115.81	113.93	117.01	115.19	116.98	116.85
			Dév-moy	0.0012	0.0033	0.0026	0.0031	0.000006	0.021
			Dév-max	0.0017	0.0050	0.0050	0.0051	0.0003	0.023
10	10	1	C_{max}	100	0	3	3	53	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.46	0.46	0.45	0.31	0.80	0.16
			Dév-moy	1.27	1.87	1.68	1.66	1.30	2.03
			Dév-max	1.86	2.41	1.93	2.04	1.68	2.68
		2	C_{max}	91	0	1	0	21	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.62	0.16	0.31	0.32	0.31	0.31
			Dév-moy	0.17	0.79	0.69	0.71	0.28	0.95
			Dév-max	0.28	1.07	0.96	1.07	0.63	1.34
		3	C_{max}	97	0	4	0	47	0
			Opt	69	0	4	0	45	0
			Durée-moy	0.31	0.78	0.48	0.16	0.78	0.30
			Dév-moy	0.03	0.42	0.36	0.36	0.05	0.52
			Dév-max	0.13	0.52	0.46	0.52	0.17	0.69

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	10	4	C_{max}	88	0	16	1	95	0
			Opt	83	0	16	1	87	0
			Durée-moy	0.46	0.31	0.30	0.32	0.47	0.31
			Dév-moy	0.025	0.33	0.22	0.25	0.010	0.43
			Dév-max	0.05	0.40	0.52	0.34	0.04	0.50
		5	C_{max}	96	0	38	4	96	0
			Opt	94	0	36	4	95	0
			Durée-moy	1.10	0.16	0.15	0.48	0.31	0.16
			Dév-moy	0.016	0.20	0.08	0.15	0.012	0.33
			Dév-max	0.04	0.35	0.28	0.25	0.03	0.36
		6	C_{max}	100	0	52	4	100	0
			Opt	100	0	52	4	100	0
		7	C_{max}	100	0	65	11	100	0
			Opt	100	0	65	11	100	0
		8	C_{max}	100	18	90	19	100	0
			Opt	100	18	90	19	100	0
		9	C_{max}	100	60	99	79	100	0
			Opt	100	60	99	79	100	0
		10	C_{max}	100	100	100	100	100	100
			Opt	100	100	100	100	100	100
	20	1	C_{max}	97	0	0	6	41	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.62	1.26	0.78	0.77	1.26	0.16
			Dév-moy	2.47	3.03	2.90	2.67	2.52	3.17
			Dév-max	3.10	3.29	3.34	3.45	3.10	3.51
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.78	0.62	0.48	0.78	1.08	0.32
			Dév-moy	0.64	1.36	1.27	1.11	0.97	1.58
			Dév-max	0.86	1.61	1.54	1.68	1.25	1.82
		3	C_{max}	100	0	0	0	8	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.75	0.63	0.46	0.30	0.79	0.94
			Dév-moy	0.35	0.71	0.83	0.72	0.45	0.97
			Dév-max	0.45	1.07	1.12	1.03	0.55	1.19
		4	C_{max}	28	0	0	2	87	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.63	1.55	0.32	0.79	0.92	0.63
			Dév-moy	0.31	0.57	0.48	0.48	0.25	0.61
			Dév-max	0.34	0.63	0.61	0.59	0.33	0.80
		5	C_{max}	21	0	0	0	92	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.25	0.94	0.63	0.61	0.63	0.63
			Dév-moy	0.23	0.47	0.36	0.37	0.18	0.56
			Dév-max	0.27	0.73	0.50	0.53	0.22	0.62

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	20	6	C_{max}	18	0	0	0	92	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	19	0	0	0	92	0
			Opt	0	0	0	0	3	0
		8	C_{max}	12	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
		9	C_{max}	11	0	0	0	97	0
			Opt	0	0	0	0	6	0
		10	C_{max}	10	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	9	0
	50	1	C_{max}	99	0	0	2	50	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.37	1.73	1.88	2.79	2.19	1.55
			Dév-moy	2.42	2.65	2.59	2.55	2.43	2.72
			Dév-max	2.70	2.93	2.85	2.91	2.69	3.03
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.82	1.42	1.82	1.25	1.40	3.25
			Dév-moy	0.34	0.92	0.97	0.94	0.77	1.08
			Dév-max	0.41	1.09	1.13	1.14	0.96	1.27
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.30	2.16	1.42	1.27	3.41	2.97
			Dév-moy	0.19	0.49	0.46	0.47	0.28	0.61
			Dév-max	0.24	0.66	0.68	0.59	0.42	0.67
		4	C_{max}	19	0	0	2	91	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.22	3.89	4.07	2.51	1.71	2.03
			Dév-moy	0.20	0.29	0.27	0.24	0.13	0.41
			Dév-max	0.25	0.35	0.37	0.34	0.21	0.52
		5	C_{max}	25	0	0	3	89	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.54	2.65	2.96	2.22	1.10	2.79
			Dév-moy	0.10	0.23	0.19	0.17	0.09	0.30
			Dév-max	0.17	0.28	0.24	0.27	0.13	0.41
		6	C_{max}	23	0	0	0	88	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	21	0	0	0	95	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	11	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	7	0	0	0	97	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	49	0

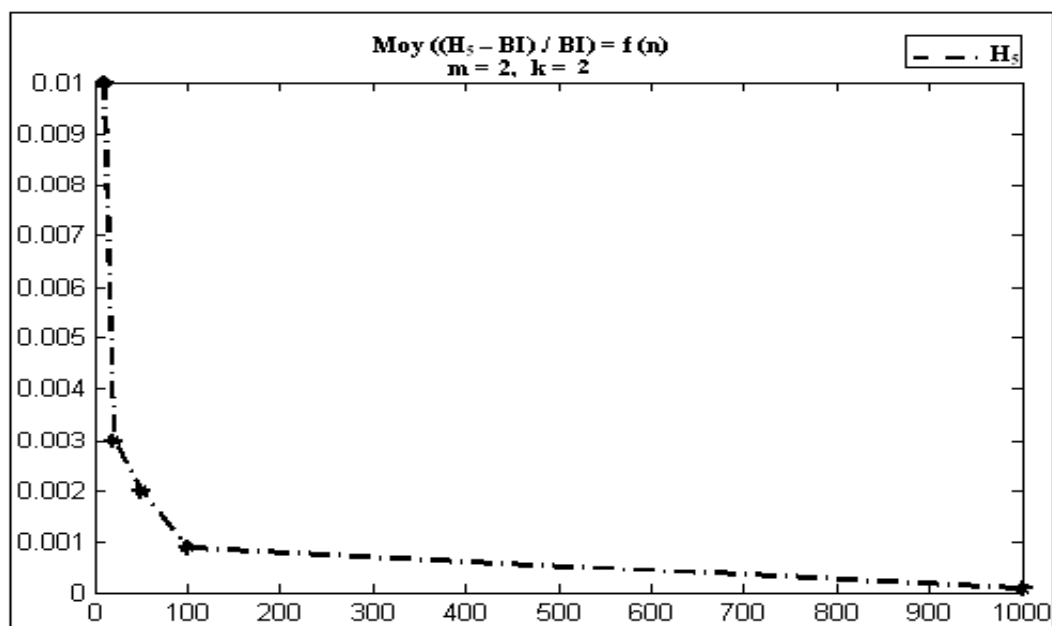
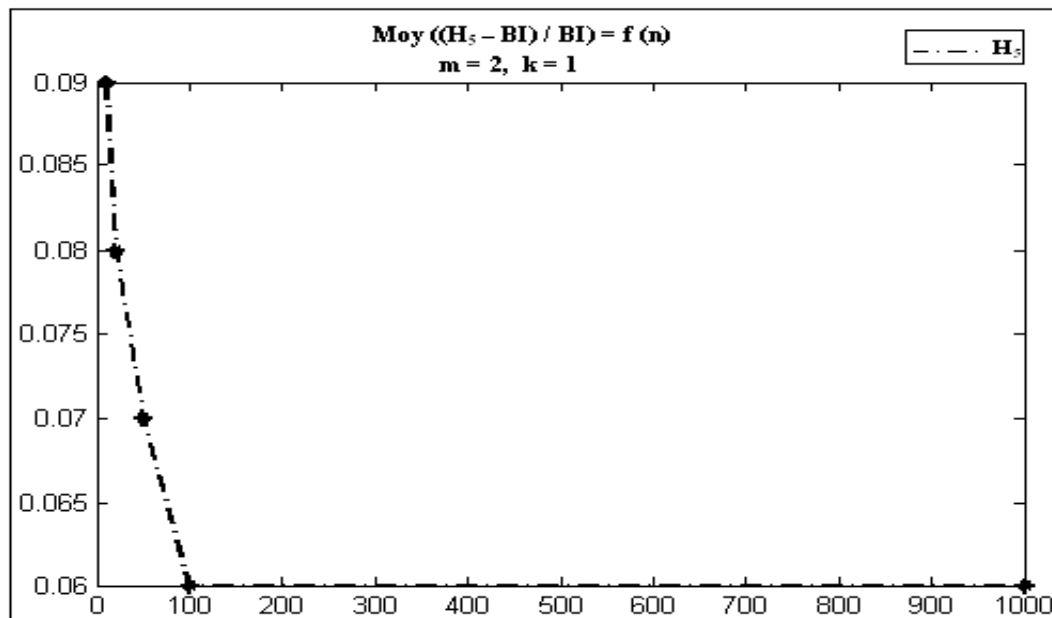
m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	100	1	C_{max}	98	0	0	1	64	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.44	5.50	4.39	6.22	6.06	5.15
			Dév-moy	2.43	2.55	2.55	2.54	2.45	2.62
			Dév-max	2.68	2.81	2.79	2.67	2.69	2.84
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.15	6.08	6.12	6.92	5.34	6.79
			Dév-moy	0.32	0.71	0.86	0.85	0.72	0.92
			Dév-max	0.37	0.84	0.93	0.94	0.79	1.03
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.64	6.11	4.09	5.42	2.72	6.15
			Dév-moy	0.14	0.37	0.36	0.37	0.23	0.47
			Dév-max	0.18	0.42	0.41	0.45	0.30	0.55
		4	C_{max}	2	0	0	2	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.11	5.18	4.72	5.00	6.36	4.03
			Dév-moy	0.14	0.21	0.17	0.17	0.09	0.29
			Dév-max	0.19	0.23	0.22	0.25	0.13	0.34
		5	C_{max}	8	0	0	3	96	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.70	5.91	4.99	5.51	5.30	5.63
			Dév-moy	0.07	0.15	0.10	0.09	0.05	0.20
			Dév-max	0.10	0.17	0.13	0.11	0.06	0.22
		6	C_{max}	22	0	0	1	94	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	25	0	0	1	89	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	22	0	0	0	95	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	4	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	10	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	43	0
	1000	1	C_{max}	91	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	57.13	57.62	58.89	55.96	57.19	57.71
			Dév-moy	2.39	2.41	2.43	2.45	2.38	2.47
			Dév-max	2.57	2.58	2.58	2.57	2.57	2.61
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
			Durée-moy	70.44	69.25	68.99	71.41	70.37	71.06
			Dév-moy	0.27	0.67	0.77	0.77	0.70	0.81
			Dév-max	0.28	0.69	0.79	0.79	0.72	0.84

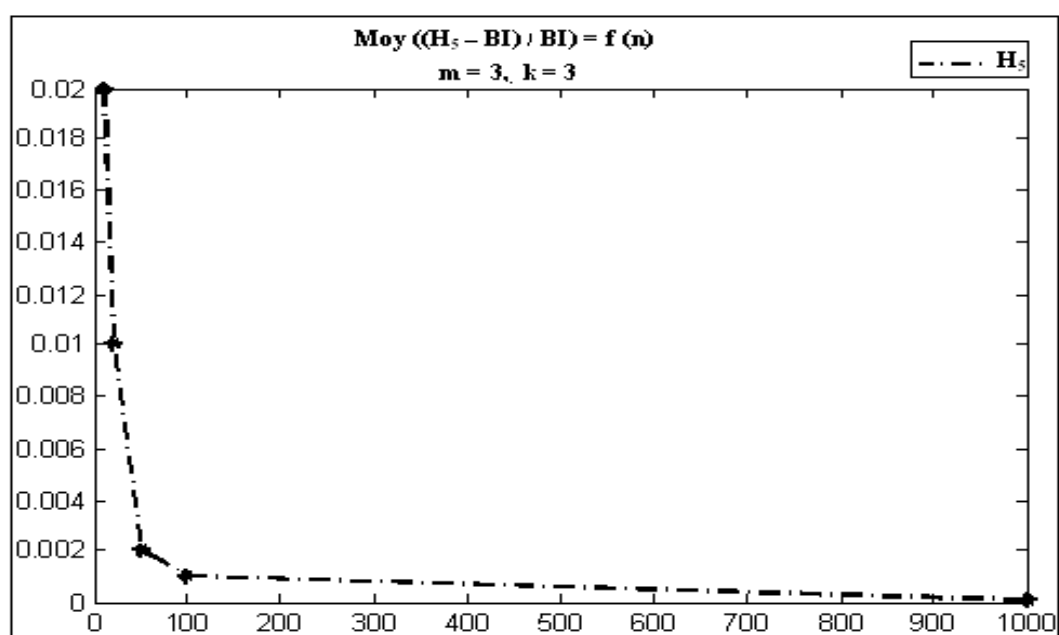
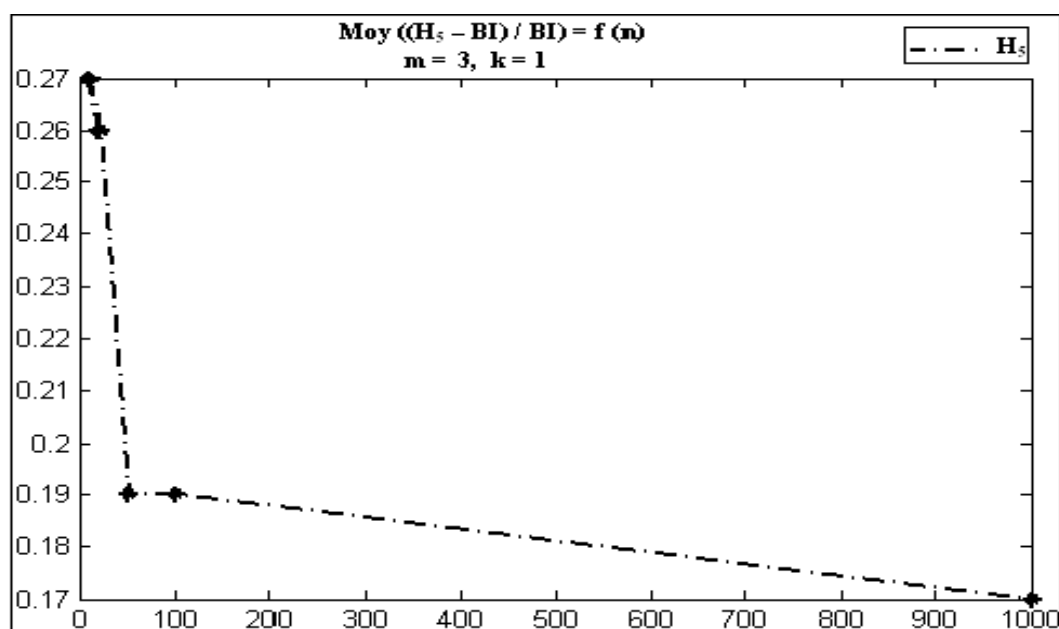
m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	1000	3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	86.10	83.87	86.76	85.05	85.37	85.52
			Dév-moy	0.12	0.29	0.29	0.29	0.22	0.36
			Dév-max	0.13	0.32	0.32	0.32	0.25	0.38
		4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	100.35	103.12	102.18	103.88	104.10	101.54
			Dév-moy	0.11	0.12	0.09	0.09	0.06	0.19
			Dév-max	0.13	0.13	0.10	0.10	0.10	0.20
		5	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	116.35	115.70	115.54	117.66	117.33	115.67
			Dév-moy	0.06	0.06	0.036	0.033	0.021	0.11
			Dév-max	0.06	0.07	0.04	0.036	0.022	0.12
		6	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	1	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	3	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	4	0	0	0	100	0
			Opt	1	0	0	0	2	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	99	0
Total1				4745	278	762	534	7101	100
Total2				1001	207	537	262	1759	100

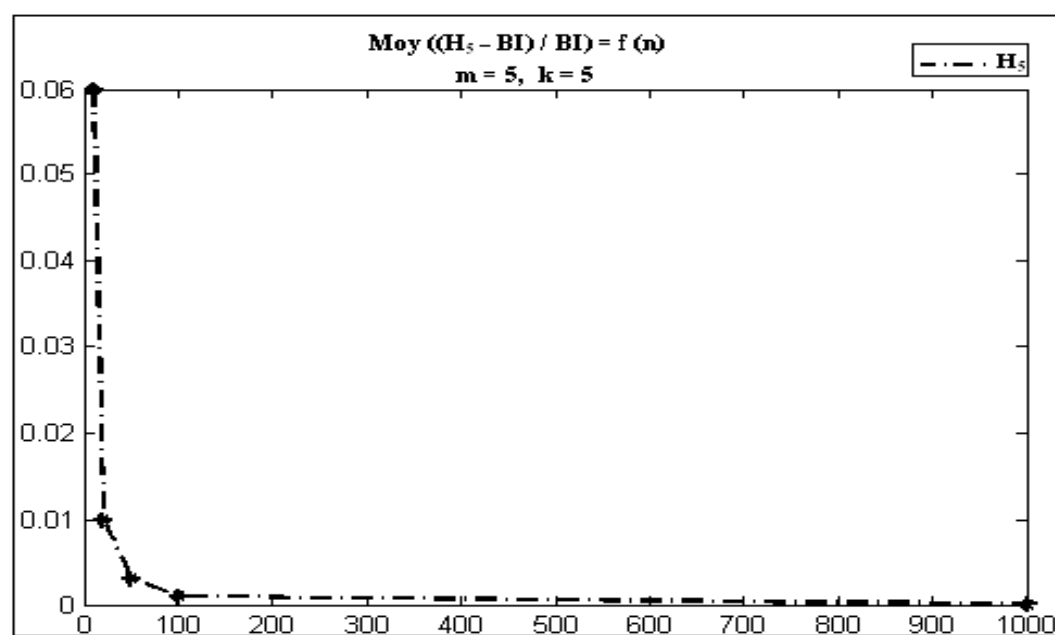
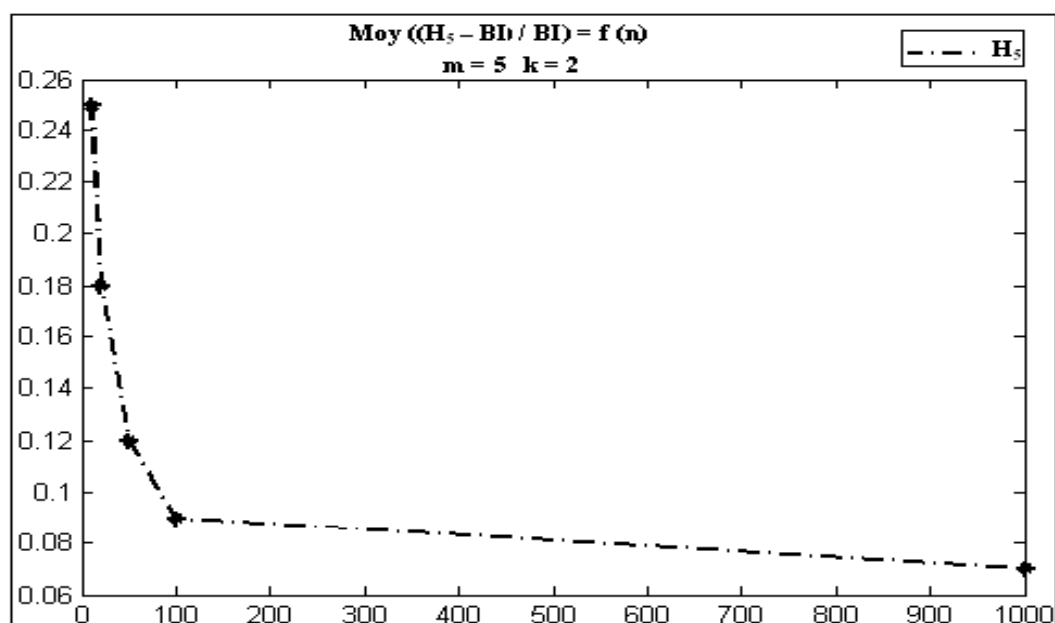
TAB. 4.2 – Tests pour $p_i \in [1, 20]$ et $S_i \in [1, 10]$

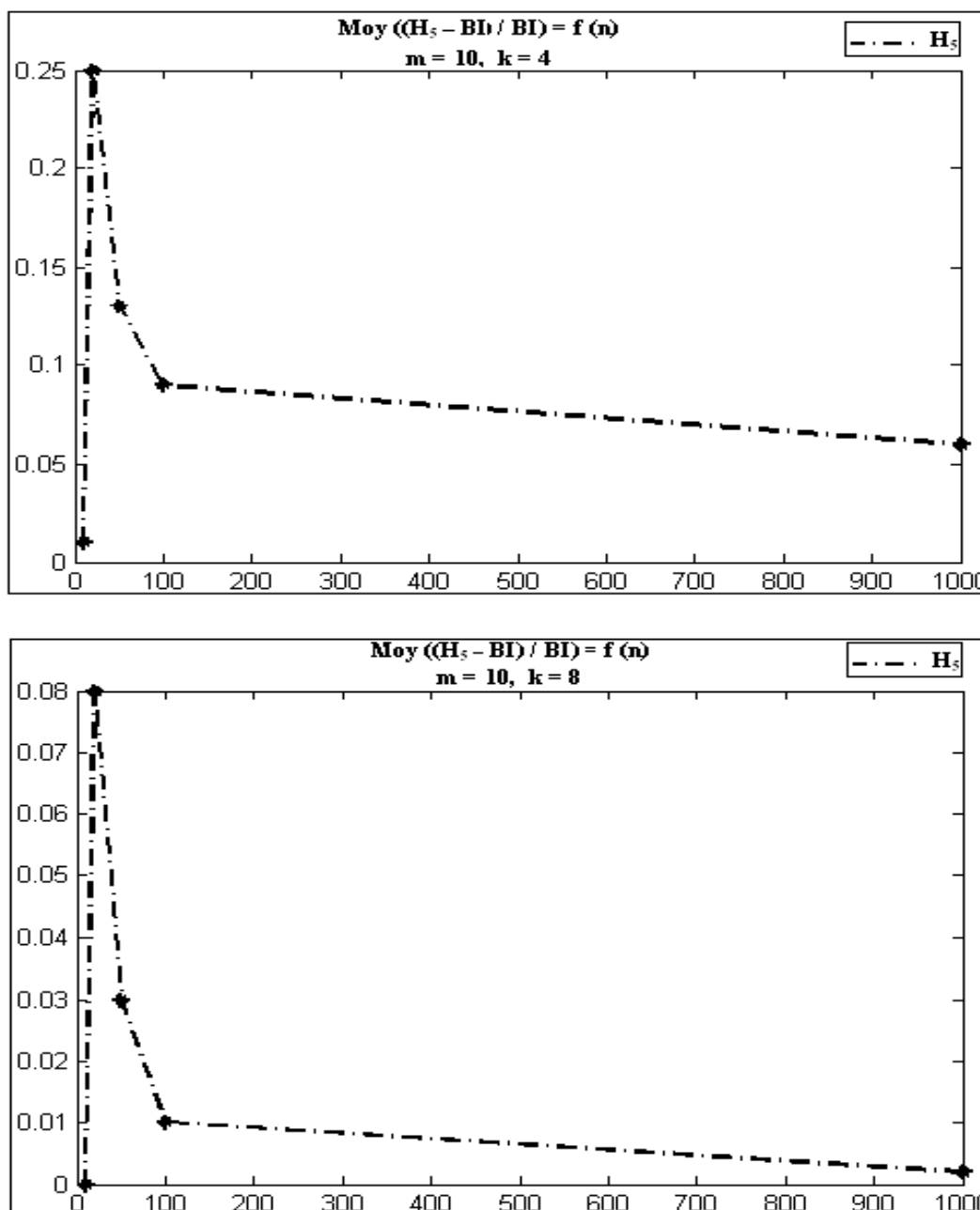
Tout comme dans l'expérience précédente, nous avons comparé les différentes heuristiques pour plusieurs types de problèmes. L'heuristique $H1$ génère de bonnes solutions pour $m = 3$, $n = 20, 50, 100, 1000$ et $k = 2$, de même pour $m = 5$, $n = 10, 20, 50, 100, 1000$, $k = 2, 3$, $m = 10$, $n = 10, 20, 50, 100, 1000$, $k = 1, 2, 3$. Autrement c'est l'heuristique $H5$ qui semble meilleure dans 7101 cas où 1761 cas les solutions sont optimales.

La figure suivante introduit quelques problèmes tests dans un contexte de minimisation du C_{max} .







FIG. 4.2 – Comportement de l’heuristique H_5 par rapport à la borne inférieure

Concernant l’influence de la variation du nombre de tâches, on peut dire que lorsque le nombre de tâches est grand, la performance de l’heuristique H_5 reste constante.

4.2.3 Troisième série de tests

Les temps de traitement des tâches ainsi que les temps de préparation prennent leurs valeurs dans $[1, 50]$, $[1, 20]$ respectivement. Les résultats sont représentés dans le tableau ci-dessous.

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	10	1	C_{max}	39	5	8	14	81	0
			Opt	0	0	0	0	4	0
			Durée-moy	0.30	0.16	0.15	0.48	0.16	0.77
			Dév-moy	0.10	0.16	0.15	0.07	0.06	0.20
			Dév-max	0.18	0.24	0.27	0.18	0.12	0.28
		2	C_{max}	62	6	20	8	92	0
			Opt	13	3	4	2	31	0
			Durée-moy	0.62	0.15	0.16	0.15	0.30	0.79
			Dév-moy	0.016	0.101	0.055	0.070	0.017	1.111
			Dév-max	0.04	0.18	0.12	0.12	0.05	0.14
	20	1	C_{max}	22	0	22	29	82	0
			Opt	0	0	0	0	7	0
			Durée-moy	1.11	0.31	0.77	0.62	0.63	0.63
			Dév-moy	0.075	0.12	0.10	0.07	0.06	0.13
			Dév-max	0.09	0.20	0.14	0.13	0.08	0.13
		2	C_{max}	52	5	22	17	96	0
			Opt	11	1	6	5	34	0
			Durée-moy	0.78	0.15	1.54	0.15	0.79	0.47
			Dév-moy	0.008	0.051	0.020	0.034	0.005	0.070
			Dév-max	0.010	0.08	0.020	0.070	0.010	0.09
	50	1	C_{max}	28	4	20	13	98	0
			Opt	0	0	0	0	8	0
			Durée-moy	2.20	1.55	2.03	1.40	2.52	1.40
			Dév-moy	0.074	0.08	0.076	0.07	0.05	0.10
			Dév-max	0.10	0.12	0.11	0.10	0.07	0.13
		2	C_{max}	53	5	17	11	91	0
			Opt	10	2	4	7	38	0
			Durée-moy	2.16	1.89	2.34	2.36	2.20	1.85
			Dév-moy	0.004	0.016	0.010	0.006	0.002	0.021
			Dév-max	0.008	0.014	0.022	0.024	0.004	0.032
	100	1	C_{max}	16	7	23	14	95	0
			Opt	0	0	0	0	7	0
			Durée-moy	3.87	4.07	4.22	5.36	3.60	3.59
			Dév-moy	0.06	0.07	0.06	0.06	0.05	0.11
			Dév-max	0.08	0.09	0.07	0.07	0.07	0.14
		2	C_{max}	36	4	26	7	99	0
			Opt	8	1	6	4	34	0
			Durée-moy	3.74	5.93	5.43	4.07	5.68	5.01
			Dév-moy	0.0016	0.0063	0.0040	0.0065	0.0007	0.012
			Dév-max	0.0030	0.0121	0.0080	0.0171	0.0040	0.021
	1000	1	C_{max}	1	0	31	35	90	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	51.55	53.79	53.49	49.71	52.38	52.18
			Dév-moy	0.062	0.063	0.06	0.06	0.05	0.10
			Dév-max	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.14

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	1000	2	C_{max}	53	7	27	8	98	0
			Opt	10	0	7	3	33	0
			Durée-moy	66.05	65.01	63.84	65.06	58.37	65.60
			Dév-moy	0.0002	0.0005	0.0005	0.0008	0.00007	0.0010
			Dév-max	0.0004	0.0010	0.0010	0.0010	0.0003	0.0020
3	10	1	C_{max}	43	0	3	14	51	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.06	0.48	0.79	0.93	0.48	0.48
			Dév-moy	0.23	0.41	0.36	0.30	0.19	0.48
			Dév-max	0.35	0.67	0.61	0.37	0.38	0.66
		2	C_{max}	66	0	2	4	44	0
			Opt	0	0	0	0	5	0
			Durée-moy	0.62	0.94	0.61	0.79	0.63	0.47
			Dév-moy	0.035	0.19	0.18	0.16	0.04	0.25
			Dév-max	0.06	0.29	0.29	0.24	0.11	0.44
		3	C_{max}	36	1	5	3	76	0
			Opt	1	0	0	0	29	0
			Durée-moy	0.79	0.78	0.62	0.93	0.63	0.79
			Dév-moy	0.05	0.17	0.12	0.13	0.02	0.20
			Dév-max	0.10	0.28	0.22	0.24	0.08	0.27
	20	1	C_{max}	16	0	0	33	56	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.10	1.71	1.42	0.78	1.70	1.88
			Dév-moy	0.26	0.33	0.29	0.22	0.19	0.36
			Dév-max	0.39	0.49	0.51	0.37	0.30	0.45
		2	C_{max}	69	0	0	12	26	0
			Opt	0	0	0	0	1	0
			Durée-moy	1.73	1.40	1.26	1.86	1.55	1.10
			Dév-moy	0.031	0.10	0.07	0.10	0.035	0.13
			Dév-max	0.05	0.15	0.11	0.14	0.06	0.18
		3	C_{max}	43	0	8	3	74	0
			Opt	3	0	0	0	16	0
			Durée-moy	1.56	1.55	0.80	1.90	1.84	1.25
			Dév-moy	0.02	0.08	0.045	0.07	0.01	0.09
			Dév-max	0.04	0.15	0.10	0.11	0.03	0.10
	50	1	C_{max}	1	0	0	4	93	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.28	4.22	3.56	3.76	2.95	3.48
			Dév-moy	0.20	0.22	0.21	0.20	0.14	0.26
			Dév-max	0.25	0.28	0.28	0.30	0.19	0.34
		2	C_{max}	88	0	0	3	13	0
			Opt	2	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.03	2.35	4.85	2.68	2.67	4.52
			Dév-moy	0.012	0.051	0.044	0.040	0.022	0.080
			Dév-max	0.020	0.070	0.060	0.050	0.032	0.102

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
3	50	3	C_{max}	18	2	8	2	80	0
			Opt	2	0	1	0	36	0
			Durée-moy	2.66	4.06	3.75	3.45	4.03	3.16
			Dév-moy	0.008	0.030	0.021	0.032	0.003	0.050
			Dév-max	0.010	0.060	0.044	0.050	0.005	0.060
		1	C_{max}	0	0	0	2	98	0
			Opt	0	0	0	0	1	0
			Durée-moy	7.93	7.49	8.01	6.75	8.49	6.78
			Dév-moy	0.19	0.20	0.18	0.17	0.13	0.22
			Dév-max	0.23	0.22	0.22	0.22	0.17	0.27
		2	C_{max}	99	0	0	0	1	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	7.73	7.82	6.70	7.98	7.51	7.46
			Dév-moy	0.005	0.033	0.020	0.022	0.015	0.060
			Dév-max	0.010	0.050	0.030	0.031	0.020	0.06
		3	C_{max}	20	0	2	3	88	0
			Opt	7	0	1	0	49	0
			Durée-moy	7.94	8.34	7.96	7.68	9.23	7.15
			Dév-moy	0.002	0.020	0.007	0.012	0.0008	0.032
			Dév-max	0.005	0.030	0.021	0.026	0.003	0.040
	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	80.50	88.62	89.16	78.14	84.00	89.20
			Dév-moy	0.18	0.17	0.16	0.16	0.11	0.21
			Dév-max	0.19	0.19	0.17	0.17	0.13	0.22
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	1	0	0	0	0	0
			Durée-moy	105.84	104.83	107.04	108.27	105.79	105.61
			Dév-moy	0.0006	0.004	0.012	0.012	0.0064	0.040
			Dév-max	0.0010	0.022	0.015	0.016	0.008	0.052
		3	C_{max}	2	0	0	1	100	0
			Opt	1	0	0	0	70	0
			Durée-moy	121.91	123.74	121.45	123.65	120.91	125.46
			Dév-moy	0.0002	0.0020	0.0010	0.0015	0.00002	0.0141
			Dév-max	0.0006	0.0030	0.0020	0.0022	0.00010	0.0160
5	10	1	C_{max}	84	0	1	4	46	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.16	0.15	0.15	0.62	0.63	0.32
			Dév-moy	0.64	1.04	0.89	0.78	0.70	1.19
			Dév-max	1.13	1.70	1.38	1.21	1.15	1.96
		2	C_{max}	82	0	0	0	27	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.31	0.46	0.47	0.15	0.48	0.32
			Dév-moy	0.16	0.48	0.46	0.52	0.23	0.60
			Dév-max	0.20	0.74	0.60	0.68	0.36	0.74

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	10	3	C_{max}	74	0	1	2	51	0
			Opt	6	0	0	0	6	0
			Durée-moy	0.31	0.15	0.15	0.32	0.47	0.620
			Dév-moy	0.08	0.35	0.36	0.39	0.08	0.46
			Dév-max	0.19	0.52	0.65	0.65	0.19	0.61
		4	C_{max}	48	1	3	2	82	0
			Opt	5	0	0	1	12	0
			Durée-moy	0.47	0.15	0.16	0.75	0.62	0.48
			Dév-moy	0.10	0.28	0.34	0.32	0.086	0.33
			Dév-max	0.20	0.35	0.41	0.40	0.17	0.60
		5	C_{max}	44	1	3	0	99	0
			Opt	2	0	1	0	7	0
			Durée-moy	0.15	0.32	1.09	0.15	0.31	0.47
			Dév-moy	0.11	0.30	0.29	0.34	0.10	0.32
			Dév-max	0.21	0.43	0.72	0.65	0.10	0.46
	20	1	C_{max}	28	0	0	3	64	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.62	0.62	0.48	0.94	1.08	0.78
			Dév-moy	0.65	0.89	0.82	0.72	0.61	0.94
			Dév-max	0.82	1.04	1.06	0.95	0.82	1.11
		2	C_{max}	95	0	0	4	5	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.95	0.15	0.15	0.61	1.55	1.43
			Dév-moy	0.103	0.303	0.25	0.21	0.14	0.37
			Dév-max	0.15	0.40	0.34	0.32	0.17	0.53
		3	C_{max}	72	0	0	4	32	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.09	1.25	0.62	0.47	0.32	0.74
			Dév-moy	0.053	0.19	0.15	0.151	0.072	0.26
			Dév-max	0.08	0.34	0.19	0.24	0.09	0.31
		4	C_{max}	13	0	1	1	90	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
			Durée-moy	1.26	0.48	0.63	1.23	0.48	1.08
			Dév-moy	0.053	0.17	0.14	0.17	0.025	0.20
			Dév-max	0.06	0.26	0.21	0.28	0.05	0.23
		5	C_{max}	16	0	0	0	87	0
			Opt	0	0	0	0	8	0
			Durée-moy	1.10	0.95	0.79	0.77	0.93	0.62
			Dév-moy	0.06	0.15	0.13	0.17	0.02	0.16
			Dév-max	0.08	0.20	0.20	0.33	0.04	0.23
	50	1	C_{max}	19	0	0	0	84	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.90	1.85	3.44	1.88	2.18	2.03
			Dév-moy	0.55	0.68	0.68	0.63	0.53	0.74
			Dév-max	0.78	0.84	0.90	0.80	0.69	0.88

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	50	2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.58	2.05	0.92	2.66	3.13	1.26
			Dév-moy	0.0	0.19	0.15	0.14	0.09	0.23
			Dév-max	0.10	0.22	0.22	0.17	0.15	0.27
		3	C_{max}	85	1	0	0	15	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.59	2.82	2.97	2.01	2.82	1.87
			Dév-moy	0.023	0.094	0.09	0.076	0.036	0.14
			Dév-max	0.04	0.13	0.12	0.13	0.05	0.18
		4	C_{max}	28	0	0	1	79	0
			Opt	3	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.19	1.56	2.17	5.33	2.81	2.67
			Dév-moy	0.03	0.07	0.066	0.072	0.017	0.11
			Dév-max	0.03	0.09	0.10	0.11	0.02	0.13
		5	C_{max}	7	0	0	0	97	0
			Opt	0	0	0	0	20	0
			Durée-moy	3.12	2.83	1.87	3.60	3.28	3.42
			Dév-moy	0.02	0.06	0.044	0.07	0.006	0.08
			Dév-max	0.03	0.09	0.07	0.11	0.014	0.09
	100	1	C_{max}	8	0	0	0	97	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.01	6.28	5.95	5.04	6.71	5.15
			Dév-moy	0.56	0.61	0.63	0.62	0.52	0.68
			Dév-max	0.69	0.74	0.72	0.71	0.65	0.83
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.67	6.41	7.07	5.02	6.38	6.10
			Dév-moy	0.033	0.12	0.10	0.10	0.07	0.16
			Dév-max	0.04	0.15	0.12	0.12	0.10	0.18
		3	C_{max}	95	0	0	0	9	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.66	7.07	5.78	5.81	6.40	7.79
			Dév-moy	0.015	0.051	0.043	0.040	0.021	0.10
			Dév-max	0.02	0.07	0.05	0.07	0.024	0.11
		4	C_{max}	31	0	0	0	84	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.54	6.50	4.83	5.62	5.31	5.49
			Dév-moy	0.013	0.034	0.025	0.033	0.009	0.073
			Dév-max	0.020	0.04	0.04	0.05	0.010	0.08
		5	C_{max}	3	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	44	0
			Durée-moy	4.69	5.63	4.55	5.44	4.40	4.04
			Dév-moy	0.0075	0.030	0.023	0.025	0.002	0.044
			Dév-max	0.014	0.040	0.040	0.040	0.006	0.060

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	54.62	54.70	55.20	53.23	57.20	52.32
			Dév-moy	0.54	0.55	0.58	0.58	0.50	0.63
			Dév-max	0.56	0.57	0.60	0.60	0.53	0.65
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	65.66	65.90	64.22	70.14	46.40	65.22
			Dév-moy	0.023	0.10	0.072	0.070	0.050	0.131
			Dév-max	0.03	0.11	0.08	0.08	0.06	0.16
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	80.21	79.87	78.00	81.05	80.10	63.98
			Dév-moy	0.0054	0.027	0.014	0.013	0.007	0.053
			Dév-max	0.006	0.030	0.018	0.017	0.010	0.06
		4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	96.41	87.10	98.13	90.45	96.66	105.05
			Dév-moy	0.0045	0.009	0.004	0.005	0.0015	0.030
			Dév-max	0.005	0.011	0.006	0.008	0.002	0.030
		5	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	86	0
			Durée-moy	113.22	112.56	112.18	111.28	111.02	110.87
			Dév-moy	0.0008	0.0040	0.0021	0.0042	0.00001	0.017
			Dév-max	0.0010	0.0050	0.0030	0.0050	0.0009	0.020
10	10	1	C_{max}	100	0	0	0	49	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.32	0.16	0.46	0.61	0.32	0.31
			Dév-moy	1.14	1.51	1.52	1.36	1.01	1.78
			Dév-max	1.92	2.25	2.23	2.04	1.70	2.32
		2	C_{max}	99	0	0	0	24	0
			Opt	27	0	0	0	15	0
			Durée-moy	0.31	0.63	0.15	0.16	0.48	0.46
			Dév-moy	0.074	0.60	0.59	0.54	0.11	0.78
			Dév-max	0.12	0.89	0.88	0.76	0.26	0.88
		3	C_{max}	94	0	7	1	68	0
			Opt	83	0	7	1	67	0
			Durée-moy	0.16	0.16	0.32	0.45	0.47	0.47
			Dév-moy	0.004	0.40	0.24	0.25	0.021	0.50
			Dév-max	0.020	0.57	0.38	0.327	0.12	0.71
		4	C_{max}	91	0	12	4	96	0
			Opt	90	0	12	4	90	0
			Durée-moy	0.47	0.47	0.78	0.16	0.31	0.31
			Dév-moy	0.031	0.27	0.18	0.20	0.016	0.35
			Dév-max	0.22	0.38	0.38	0.44	0.14	0.58

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	10	5	C_{max}	99	0	31	6	99	0
			Opt	97	0	31	6	99	0
			Durée-moy	0.62	0.31	0.31	0.15	0.16	0.78
			Dév-moy	0.014	0.16	0.06	0.11	0.004	0.26
			Dév-max	0.03	0.20	0.23	0.17	0.020	0.30
		6	C_{max}	100	0	45	10	100	0
			Opt	100	0	45	10	100	0
		7	C_{max}	100	4	58	18	100	0
			Opt	100	4	58	18	100	0
		8	C_{max}	100	14	83	30	100	0
			Opt	100	14	83	30	100	0
		9	C_{max}	100	42	96	59	100	0
			Opt	100	42	96	59	100	0
		10	C_{max}	100	100	100	100	100	100
			Opt	100	100	100	100	100	100
	20	1	C_{max}	98	0	0	2	32	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.64	0.77	0.16	0.94	0.78	0.61
			Dév-moy	1.92	2.53	2.39	2.28	1.93	2.64
			Dév-max	2.69	3.32	2.85	3.04	2.71	3.48
		2	C_{max}	100	0	0	0	2	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.46	0.32	0.46	0.63	1.14	1.39
			Dév-moy	0.38	1.07	0.93	0.78	0.56	1.13
			Dév-max	0.54	1.36	1.24	1.11	0.95	1.39
		3	C_{max}	95	0	0	0	12	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.31	0.48	0.94	0.78	0.78	0.79
			Dév-moy	0.25	0.73	0.50	0.61	0.37	0.82
			Dév-max	0.35	0.91	0.88	0.78	0.40	1.12
		4	C_{max}	31	0	0	0	83	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.07	0.31	0.62	1.26	0.93	0.95
			Dév-moy	0.22	0.52	0.48	0.46	0.22	0.63
			Dév-max	0.34	0.77	0.63	0.72	0.34	0.87
		5	C_{max}	35	0	0	0	77	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.26	1.88	0.61	0.78	0.78	0.16
			Dév-moy	0.18	0.43	0.40	0.33	0.16	0.50
			Dév-max	0.32	0.54	0.49	0.46	0.24	0.56
		6	C_{max}	13	0	0	0	92	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	21	0	0	0	87	0
			Opt	0	0	0	0	3	0
		8	C_{max}	14	0	0	0	96	0
			Opt	0	0	0	0	2	0

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	20	9	C_{max}	13	0	0	0	97	0
			Opt	1	0	0	0	1	0
		10	C_{max}	10	0	0	0	99	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
		50	1	C_{max}	97	0	0	24	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.36	1.40	2.98	2.04	2.64	2.02
			Dév-moy	1.76	2.02	2.02	1.95	1.70	2.03
			Dév-max	2.03	2.31	2.25	2.16	2.04	2.44
			2	C_{max}	100	0	0	0	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.19	3.44	3.12	0.95	2.15	2.38
			Dév-moy	0.27	0.75	0.76	0.76	0.53	0.84
			Dév-max	0.33	0.81	0.86	0.88	0.60	1.02
			3	C_{max}	100	0	0	0	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.72	1.72	1.24	2.34	3.61	4.06
			Dév-moy	0.16	0.39	0.38	0.34	0.21	0.50
			Dév-max	0.20	0.48	0.50	0.49	0.28	0.62
			4	C_{max}	25	0	1	2	81
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.71	2.19	2.64	2.36	2.64	4.37
			Dév-moy	0.15	0.27	0.24	0.20	0.11	0.36
			Dév-max	0.20	0.33	0.35	0.32	0.14	0.45
			5	C_{max}	35	0	0	1	75
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.87	2.83	2.48	3.30	2.19	2.84
			Dév-moy	0.092	0.22	0.19	0.21	0.08	0.23
			Dév-max	0.12	0.32	0.25	0.26	0.09	0.34
			6	C_{max}	35	0	0	1	75
				Opt	0	0	0	0	0
			7	C_{max}	32	0	0	0	83
				Opt	0	0	0	0	0
			8	C_{max}	12	0	0	0	89
				Opt	0	0	0	0	0
			9	C_{max}	7	0	0	0	97
				Opt	0	0	0	0	0
			10	C_{max}	4	0	0	0	99
				Opt	0	0	0	40	0
	100	1	C_{max}	98	0	0	0	32	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.51	5.44	6.12	6.26	4.55	5.31
			Dév-moy	1.82	1.77	1.97	1.91	1.66	1.99
			Dév-max	2.15	2.29	2.30	2.11	2.02	2.33

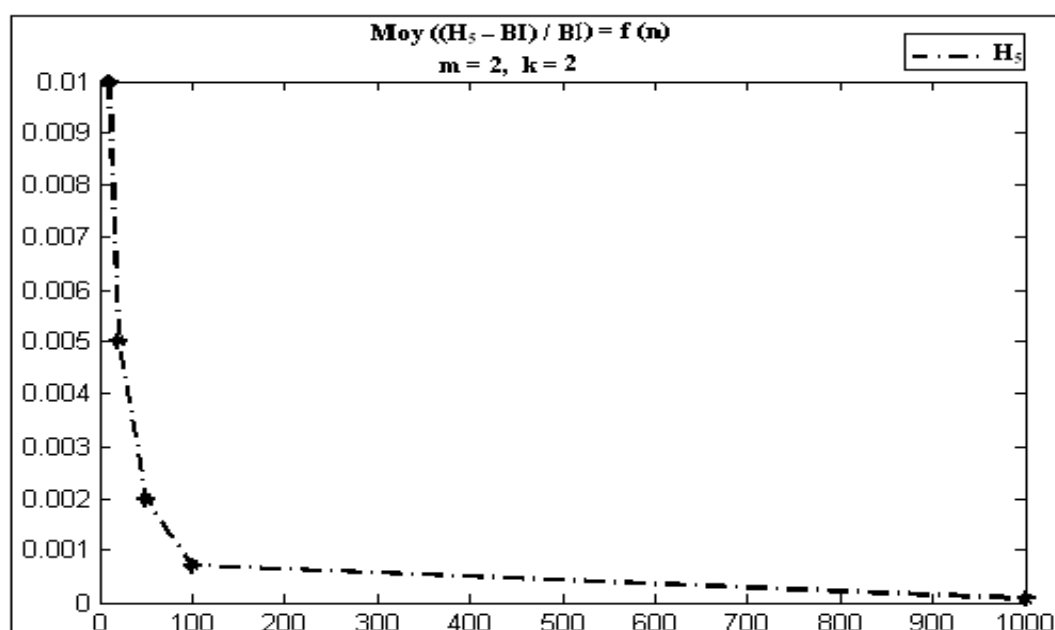
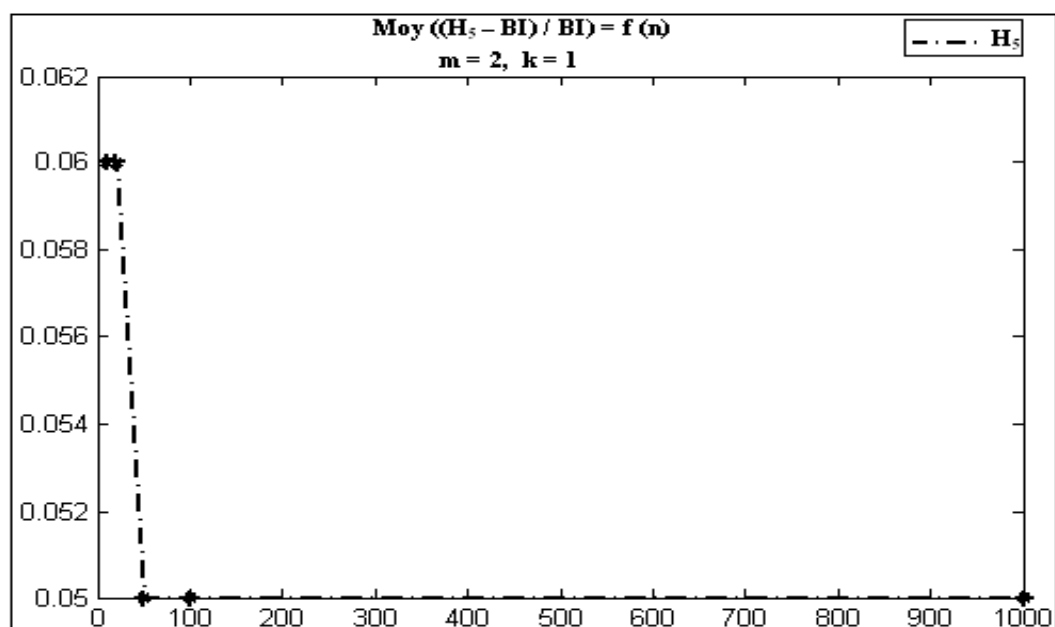
m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	100	2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.16	6.78	6.29	5.14	6.23	7.15
			Dév-moy	0.24	0.53	0.67	0.63	0.50	0.74
			Dév-max	0.29	0.72	0.76	0.76	0.61	0.88
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.61	5.62	4.85	6.28	5.89	7.25
			Dév-moy	0.10	0.29	0.26	0.25	0.16	0.31
			Dév-max	0.13	0.38	0.30	0.28	0.21	0.43
		4	C_{max}	5	0	0	2	95	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.37	5.16	5.54	5.50	6.43	5.74
			Dév-moy	0.10	0.16	0.12	0.10	0.08	0.22
			Dév-max	0.14	0.19	0.17	0.13	0.09	0.26
		5	C_{max}	21	0	0	0	87	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.58	6.91	4.65	5.47	5.95	4.71
			Dév-moy	0.06	0.13	0.094	0.09	0.052	0.17
			Dév-max	0.07	0.15	0.13	0.11	0.08	0.20
		6	C_{max}	40	0	0	0	71	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	30	0	0	0	79	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	16	0	0	0	90	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	3	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	10	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	8	0
	1000	1	C_{max}	86	0	0	0	83	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	60.50	68.63	69.16	68.14	64.00	99.20
			Dév-moy	1.91	1.92	1.75	1.93	1.90	1.95
			Dév-max	2.00	2.02	2.02	2.00	1.92	2.06
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	71.50	78.62	79.22	78.14	74.20	79.23
			Dév-moy	0.19	0.46	0.57	0.57	0.48	0.61
			Dév-max	0.20	0.53	0.60	0.59	0.51	0.65
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	80.55	81.52	89.01	80.32	85.33	78.10
			Dév-moy	0.08	0.19	0.18	0.17	0.12	0.25
			Dév-max	0.09	0.21	0.20	0.19	0.15	0.28

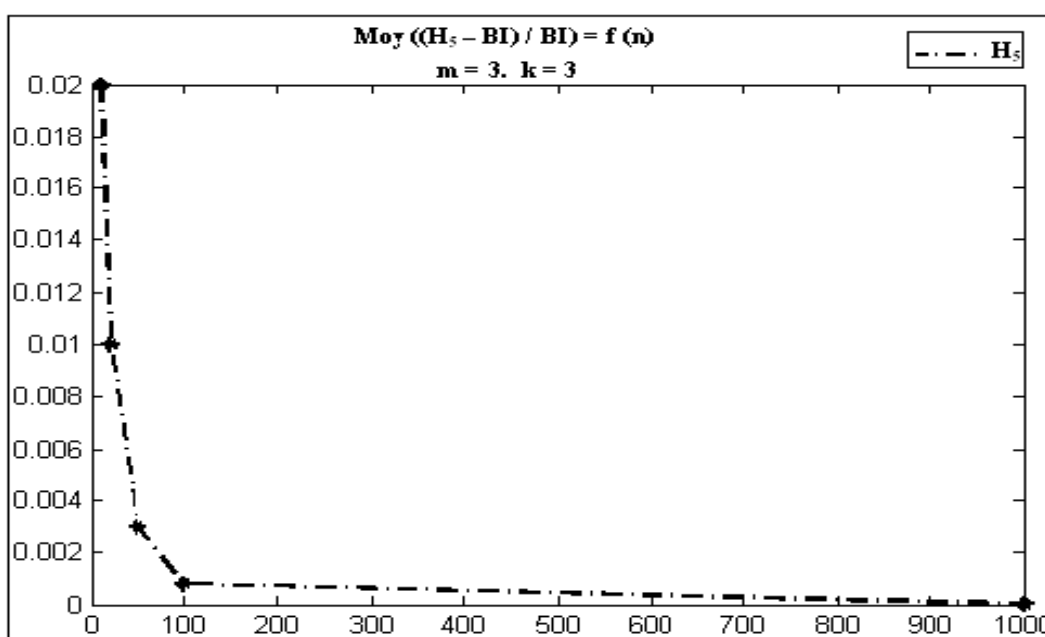
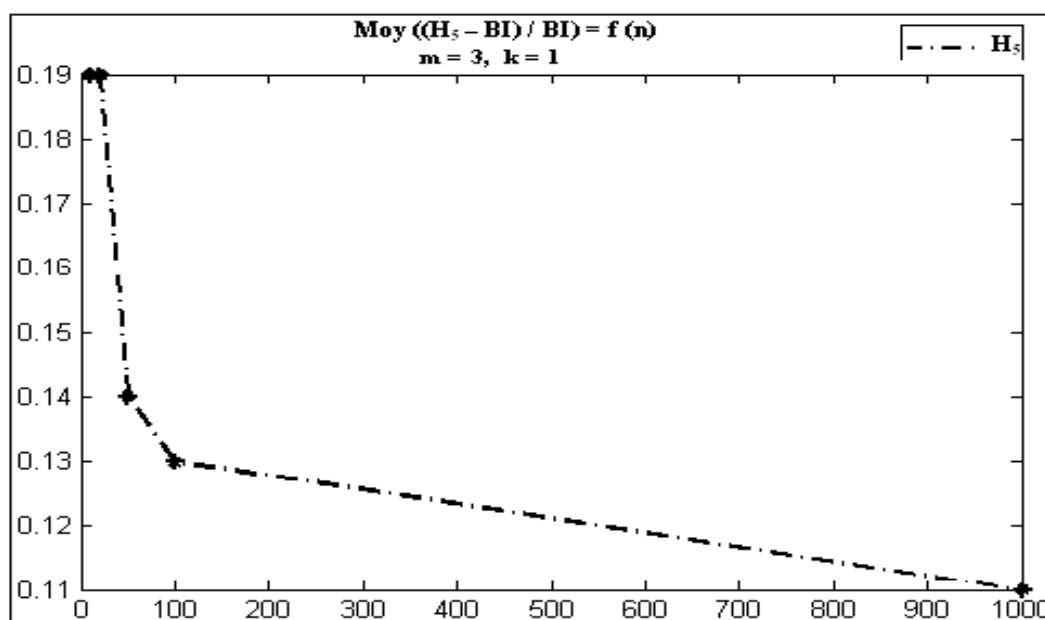
m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	1000	4	C_{max}	0	0	0	5	96	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	92.60	87.22	96.16	90.16	92.53	100.05
			Dév-moy	0.08	0.093	0.06	0.06	0.04	0.13
			Dév-max	0.10	0.11	0.07	0.07	0.06	0.14
		5	C_{max}	0	0	0	3	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	115.11	114.54	114.32	115.26	113.58	113.08
			Dév-moy	0.04	0.05	0.022	0.021	0.017	0.081
			Dév-max	0.05	0.05	0.026	0.023	0.020	0.090
		6	C_{max}	0	1	1	3	99	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	1	0	0	0	0	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	70	0
Total1				4764	210	687	540	6806	100
Total2				878	167	462	250	1446	100

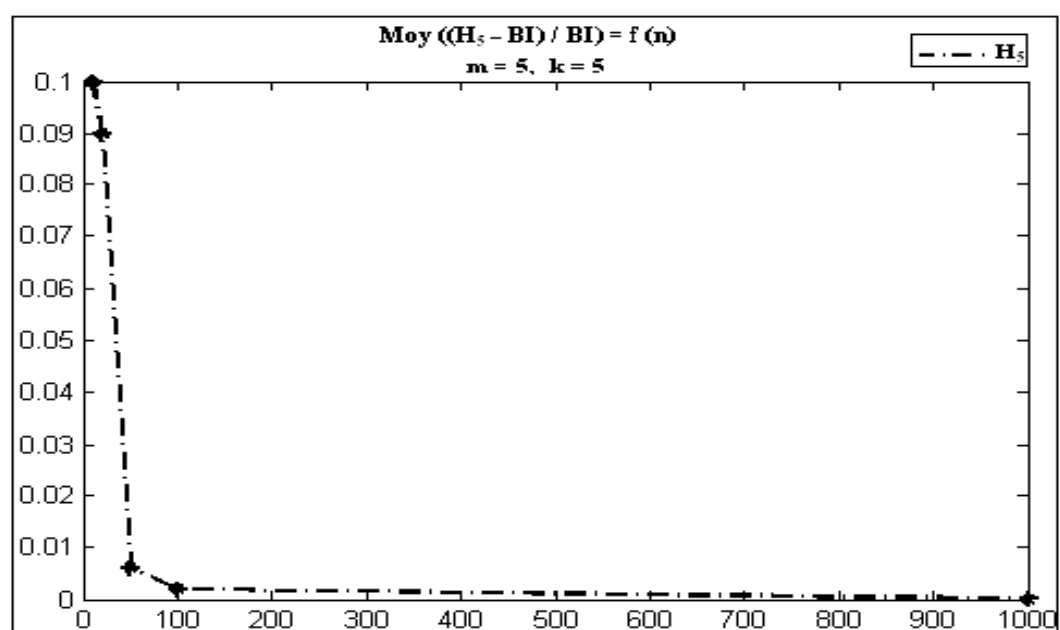
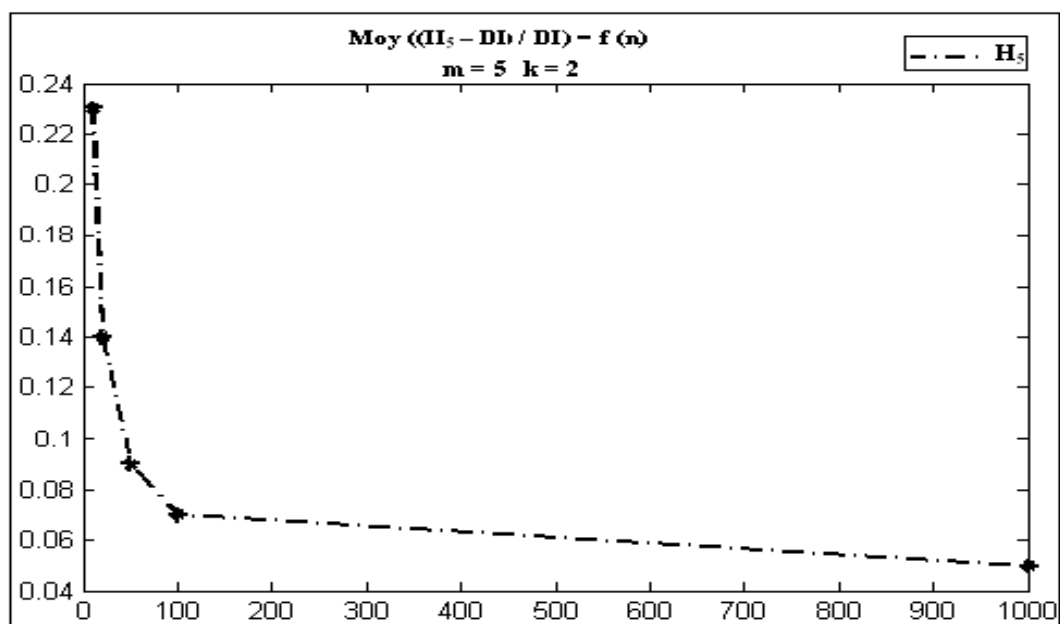
TAB. 4.3 – Tests pour $p_i \in [1, 50]$ et $S_i \in [1, 20]$

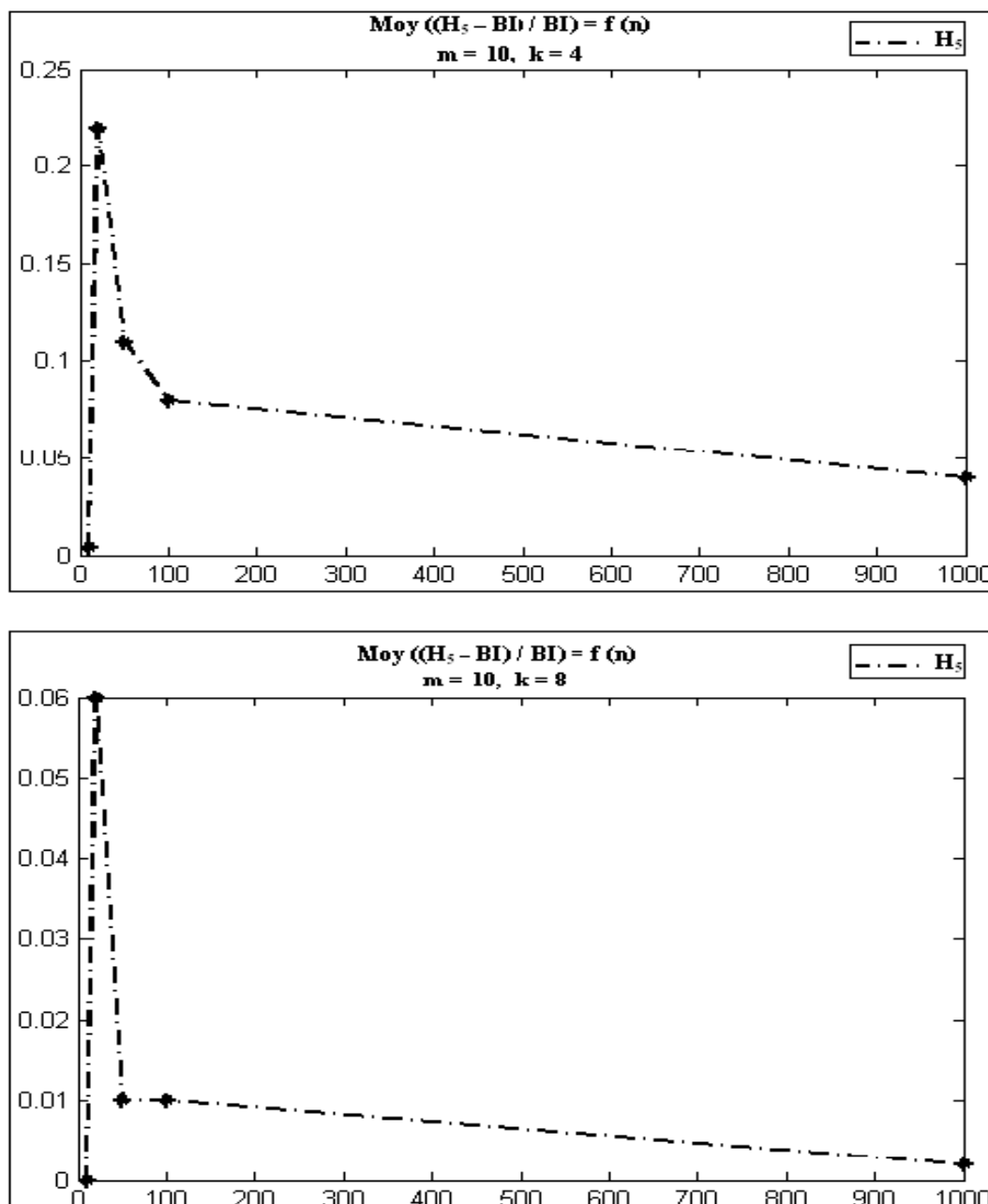
Il apparaît fortement que dans ce cas, l’heuristique $H5$ est la plus appropriée, puisque c’est elle qui fournit le meilleur résultat pour la plupart des instances étudiées.

La figure suivante décrit quelques résultats concernant la performance de l’heuristique $H5$ par rapport à la borne inférieure.







FIG. 4.3 – Comportement de l’heuristique H_5 par rapport à la borne inférieure

Ces figures nous montrent qu’une variation de n dans l’intervalle $[10, 100[$ n’a pas beaucoup d’influence sur la qualité de la solution. Par contre, pour $n \geq 100$, une variation de n a de fortes incidences, en terme de la durée de l’ordonnancement, sur la solution.

4.2.4 Quatrième série de tests

Ici, les temps de traitements des tâches et les temps de préparations ont une distribution uniforme dans $[1, 100]$, $[1, 50]$ respectivement. Les différents résultats sont représentés dans le tableau suivant.

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	10	1	C_{max}	59	6	18	23	70	0
			Opt	0	0	0	0	4	0
			Durée-moy	0.15	0.15	0.16	0.31	0.46	0.30
			Dév-moy	0.10	0.13	0.15	0.12	0.10	0.18
			Dév-max	0.16	0.14	0.27	0.19	0.16	0.22
		2	C_{max}	48	10	20	9	86	0
			Opt	4	0	3	1	20	0
			Durée-moy	0.62	0.15	0.47	0.15	0.16	0.47
			Dév-moy	0.016	0.050	0.060	0.070	0.010	0.10
			Dév-max	0.050	0.10	0.12	0.12	0.020	0.12
	20	1	C_{max}	31	2	25	26	82	0
			Opt	0	0	0	0	6	0
			Durée-moy	0.31	0.47	0.16	0.62	0.94	1.23
			Dév-moy	0.10	0.13	0.13	0.11	0.09	0.15
			Dév-max	0.16	0.16	0.19	0.13	0.13	0.19
		2	C_{max}	43	8	31	17	87	0
			Opt	12	1	9	4	39	0
			Durée-moy	0.64	0.45	0.76	0.64	0.79	0.78
			Dév-moy	0.009	0.040	0.011	0.042	0.003	0.050
			Dév-max	0.014	0.072	0.021	0.080	0.009	0.080
	50	1	C_{max}	25	1	26	17	86	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.58	2.00	1.72	2.05	1.86	1.87
			Dév-moy	0.11	0.12	0.10	0.09	0.08	0.14
			Dév-max	0.16	0.16	0.13	0.12	0.11	0.17
		2	C_{max}	39	6	22	10	87	0
			Opt	4	0	3	1	31	0
			Durée-moy	2.00	1.88	1.88	2.50	2.00	2.06
			Dév-moy	0.007	0.015	0.016	0.015	0.002	0.022
			Dév-max	0.010	0.030	0.020	0.030	0.010	0.030
	100	1	C_{max}	16	3	30	30	91	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.78	4.52	3.91	4.20	4.05	4.84
			Dév-moy	0.09	0.10	0.08	0.09	0.08	0.14
			Dév-max	0.13	0.12	0.09	0.12	0.10	0.18
		2	C_{max}	44	10	11	6	92	0
			Opt	3	2	3	2	35	0
			Durée-moy	4.67	4.86	4.69	4.22	5.30	5.00
			Dév-moy	0.002	0.010	0.004	0.005	0.0009	0.030
			Dév-max	0.003	0.016	0.009	0.010	0.003	0.020
	1000	1	C_{max}	0	0	40	39	92	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	55.20	53.43	53.71	53.29	53.17	54.07
			Dév-moy	0.080	0.090	0.070	0.075	0.070	0.12
			Dév-max	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.16

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
2	1000	2	C_{max}	45	8	22	9	93	0
			Opt	6	4	2	1	35	0
			Durée-moy	65.17	67.02	65.16	66.25	66.17	67.82
			Dév-moy	0.0001	0.0010	0.0002	0.0007	0.00009	0.0013
			Dév-max	0.0002	0.002	0.0006	0.0010	0.0002	0.0020
3	10	1	C_{max}	46	0	3	5	50	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.62	0.47	0.94	0.80	0.78	0.62
			Dév-moy	0.25	0.41	0.38	0.38	0.25	0.50
			Dév-max	0.36	0.56	0.56	0.50	0.33	0.60
		2	C_{max}	66	1	2	8	28	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.64	0.78	0.46	0.78	1.08	0.63
			Dév-moy	0.05	0.19	0.17	0.14	0.07	0.27
			Dév-max	0.09	0.30	0.30	0.25	0.11	0.35
		3	C_{max}	36	1	10	4	69	0
			Opt	2	0	0	0	23	0
			Durée-moy	0.47	1.41	0.77	0.47	1.25	0.31
			Dév-moy	0.03	0.15	0.11	0.11	0.02	0.22
			Dév-max	0.09	0.34	0.22	0.24	0.08	0.40
	20	1	C_{max}	15	0	0	22	70	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.71	1.26	1.07	2.20	1.55	0.80
			Dév-moy	0.27	0.34	0.32	0.28	0.21	0.40
			Dév-max	0.38	0.46	0.44	0.42	0.31	0.52
		2	C_{max}	78	0	0	3	21	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.26	1.57	1.74	0.94	1.70	1.07
			Dév-moy	0.03	0.11	0.084	0.072	0.046	0.14
			Dév-max	0.04	0.072	0.111	0.150	0.070	0.22
		3	C_{max}	22	2	9	4	67	0
			Opt	0	0	0	0	13	0
			Durée-moy	1.72	0.93	1.09	2.20	0.92	1.40
			Dév-moy	0.022	0.084	0.025	0.072	0.020	0.093
			Dév-max	0.040	0.144	0.070	0.14	0.04	0.14
	50	1	C_{max}	0	0	0	1	99	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.29	3.16	4.65	3.88	2.78	4.08
			Dév-moy	0.25	0.29	0.27	0.24	0.20	0.33
			Dév-max	0.33	0.38	0.33	0.32	0.30	0.39
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	2	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.14	4.15	4.98	3.45	3.73	3.74
			Dév-moy	0.012	0.047	0.054	0.046	0.024	0.10
			Dév-max	0.020	0.081	0.090	0.050	0.040	0.14

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
3	50	3	C_{max}	18	1	4	2	82	0
				0	0	0	0	26	0
			Durée-moy	3.16	3.63	4.48	3.14	4.08	3.44
			Dév-moy	0.0083	0.025	0.017	0.030	0.003	0.056
			Dév-max	0.010	0.050	0.050	0.060	0.006	0.070
		1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	1	0
			Durée-moy	8.16	8.12	7.20	7.12	6.57	7.34
			Dév-moy	0.25	0.27	0.24	0.22	0.18	0.32
			Dév-max	0.32	0.33	0.28	0.29	0.23	0.36
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	7.98	7.65	7.97	7.82	7.52	7.45
			Dév-moy	0.006	0.042	0.031	0.030	0.016	0.065
			Dév-max	0.010	0.060	0.050	0.050	0.020	0.070
		3	C_{max}	19	1	2	0	84	0
			Opt	3	0	0	0	49	0
			Durée-moy	8.10	7.33	8.32	6.44	9.37	7.35
			Dév-moy	0.0042	0.011	0.008	0.012	0.0010	0.040
			Dév-max	0.0080	0.020	0.016	0.024	0.0020	0.050
	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	92.64	90.91	91.73	92.82	90.80	93.98
			Dév-moy	0.24	0.24	0.23	0.22	0.17	0.30
			Dév-max	0.26	0.26	0.25	0.24	0.19	0.31
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	1	0	0	0	0	0
			Durée-moy	110.30	107.65	108.94	108.23	108.93	109.38
			Dév-moy	0.00063	0.025	0.020	0.020	0.0076	0.052
			Dév-max	0.0010	0.030	0.021	0.020	0.011	0.050
		3	C_{max}	3	0	0	1	99	0
			Opt	0	0	0	0	53	0
			Durée-moy	107.08	122.46	113.25	113.35	110.90	113.29
			Dév-moy	0.0006	0.0014	0.0009	0.0017	0.00005	0.020
			Dév-max	0.0009	0.0020	0.0021	0.0030	0.0001	0.022
5	10	1	C_{max}	84	0	0	1	51	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.32	0.16	0.46	0.15	0.61	0.32
			Dév-moy	0.70	1.25	1.18	1.17	0.75	1.49
			Dév-max	1.00	1.35	1.33	1.36	1.00	1.90
		2	C_{max}	86	0	0	0	17	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.63	0.46	0.30	0.63	0.15	0.62
			Dév-moy	0.19	0.57	0.51	0.42	0.25	0.67
			Dév-max	0.22	0.92	0.60	0.57	0.37	1.01

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	10	3	C_{max}	71	0	0	0	36	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
			Durée-moy	0.48	0.31	0	0.47	0.15	1.10
			Dév-moy	0.13	0.43	0.32	0.38	0.14	0.46
			Dév-max	0.25	0.61	0.44	0.54	0.25	0.61
		4	C_{max}	45	0	7	1	79	0
			Opt	4	0	3	0	6	0
			Durée-moy	0.62	0.16	0.31	0.15	0.48	0.62
			Dév-moy	0.14	0.37	0.27	0.29	0.11	0.52
			Dév-max	0.21	0.50	0.52	0.41	0.25	1.12
		5	C_{max}	43	1	1	0	97	0
			Opt	3	0	1	0	10	0
			Durée-moy	0.79	0.15	0.16	0.16	0.15	0.16
			Dév-moy	0.13	0.32	0.26	0.35	0.05	0.34
			Dév-max	0.22	0.45	0.53	0.56	0.10	0.45
	20	1	C_{max}	55	0	0	9	47	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.77	1.42	1.25	0.31	0.93	0.16
			Dév-moy	0.782	1.04	1.01	0.92	0.77	1.10
			Dév-max	01.00	0.1.26	1.22	1.25	1.06	1.36
		2	C_{max}	98	0	0	0	3	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.94	0.64	0.77	0.94	1.10	0.46
			Dév-moy	0.12	0.38	0.31	0.302	0.20	0.45
			Dév-max	0.17	0.58	0.47	0.41	0.32	0.67
		3	C_{max}	59	0	0	0	49	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.76	0.32	1.56	0.78	1.10	0.63
			Dév-moy	0.075	0.23	0.17	0.20	0.076	0.27
			Dév-max	0.10	0.32	0.26	0.28	0.10	0.32
		4	C_{max}	10	0	0	2	92	0
			Opt	0	0	0	0	5	0
			Durée-moy	0.94	0.47	0.63	0.63	0.78	1.24
			Dév-moy	0.076	0.13	0.12	0.18	0.042	0.23
			Dév-max	0.09	0.22	0.21	0.22	0.08	0.29
		5	C_{max}	11	0	2	0	91	0
			Opt	1	0	0	0	15	0
			Durée-moy	0.47	1.26	0.47	1.24	0.92	1.255
			Dév-moy	0.062	0.180	0.10	0.16	0.02	0.17
			Dév-max	0.11	0.30	0.17	0.25	0.06	0.26
	50	1	C_{max}	32	0	0	0	70	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.27	2.03	2.35	2.64	1.27	1.25
			Dév-moy	0.76	0.87	0.88	0.87	0.75	0.99
			Dév-max	0.90	1.02	1.04	1.00	0.89	1.11

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	50	2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.32	3.15	3.42	2.19	1.72	1.43
			Dév-moy	0.05	0.19	0.17	0.15	0.10	0.29
			Dév-max	0.07	0.27	0.23	0.21	0.13	0.33
		3	C_{max}	90	0	0	0	10	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.21	5.14	3.31	2.02	1.41	1.24
			Dév-moy	0.024	0.10	0.08	0.06	0.033	0.17
			Dév-max	0.04	0.16	0.12	0.11	0.07	0.20
		4	C_{max}	17	0	0	0	84	0
			Opt	3	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.54	1.09	4.23	3.73	4.22	2.52
			Dév-moy	0.03	0.06	0.043	0.075	0.014	0.09
			Dév-max	0.04	0.09	0.07	0.11	0.02	0.13
		5	C_{max}	5	2	0	0	96	0
			Opt	0	0	0	0	21	0
			Durée-moy	2.19	2.68	3.24	2.67	4.22	2.81
			Dév-moy	0.021	0.07	0.05	0.065	0.008	0.08
			Dév-max	0.03	0.10	0.07	0.09	0.020	0.11
	100	1	C_{max}	10	0	0	0	91	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.46	5.64	6.88	4.228	6.28	6.06
			Dév-moy	0.73	0.78	0.80	0.78	0.698	0.87
			Dév-max	0.85	0.91	0.92	0.90	0.80	1.00
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	7.23	5.64	7.55	5.24	5.58	5.46
			Dév-moy	0.04	0.16	0.12	0.12	0.07	0.23
			Dév-max	0.05	0.22	0.16	0.17	0.11	0.27
		3	C_{max}	96	0	0	0	5	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.35	5.92	3.94	5.86	6.25	5.34
			Dév-moy	0.012	0.07	0.05	0.051	0.022	0.11
			Dév-max	0.020	0.09	0.06	0.07	0.03	0.13
		4	C_{max}	11	0	0	0	90	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.45	4.40	4.55	5.94	4.72	5.16
			Dév-moy	0.011	0.034	0.030	0.035	0.0085	0.08
			Dév-max	0.020	0.050	0.040	0.050	0.010	0.09
		5	C_{max}	3	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	32	0
			Durée-moy	3.91	5.77	5.59	5.62	4.72	7.20
			Dév-moy	0.010	0.025	0.020	0.030	0.002	0.06
			Dév-max	0.020	0.040	0.040	0.050	0.007	0.07

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
5	1000	1	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	50.14	59.24	57.82	60.13	58.31	58.29
			Dév-moy	0.73	0.74	0.78	0.77	0.71	0.83
			Dév-max	0.78	0.79	0.83	0.82	0.76	0.89
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	75.18	74.72	74.59	75.56	75.95	76.07
			Dév-moy	0.032	0.14	0.11	0.11	0.08	0.19
			Dév-max	0.040	0.15	0.12	0.12	0.09	0.21
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	90.76	92.97	91.73	91.84	91.54	94.81
			Dév-moy	0.007	0.040	0.020	0.020	0.011	0.074
			Dév-max	0.008	0.050	0.03	0.03	0.02	0.08
		4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	100.71	88.27	108.56	109.55	97.55	109.90
			Dév-moy	0.0065	0.010	0.0054	0.0051	0.0005	0.042
			Dév-max	0.008	0.015	0.007	0.007	0.003	0.050
		5	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	62	0
			Durée-moy	76.09	128.71	129.34	127.92	145.39	127.35
			Dév-moy	0.0002	0.0032	0.002	0.0025	0.00003	0.002
			Dév-max	0.001	0.005	0.003	0.005	0.00006	0.002
10	10	1	C_{max}	100	0	3	2	40	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.16	0.61	0.32	0.48	0.15	0.46
			Dév-moy	1.15	1.76	1.72	1.44	1.21	1.98
			Dév-max	1.36	2.84	2.64	2.43	2.56	2.97
		2	C_{max}	98	0	0	0	11	0
			Opt	28	0	0	0	9	0
			Durée-moy	0	0.15	1.40	0.32	0.32	0.15
			Dév-moy	0.07	0.61	0.52	0.58	0.26	0.81
			Dév-max	0.21	0.83	0.91	0.73	0.57	1.02
		3	C_{max}	94	0	4	1	49	0
			Opt	74	0	4	1	49	0
			Durée-moy	0.93	0.31	0.47	0.32	0.31	0
			Dév-moy	0.006	0.41	0.31	0.35	0.04	0.55
			Dév-max	0.04	0.57	0.57	0.62	0.14	0.75
		4	C_{max}	84	0	13	2	92	0
			Opt	74	0	13	2	83	0
			Durée-moy	0.31	0.31	0.15	0.16	0.16	1.10
			Dév-moy	0.009	0.29	0.25	0.17	0.024	0.36
			Dév-max	0.009	0.58	0.58	0.44	0.12	0.51

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	10	5	C_{max}	95	0	25	1	95	0
			Opt	91	0	25	1	91	0
			Durée-moy	0.15	0.30	0.15	0.78	0.95	0.161
			Dév-moy	0.016	0.18	0.11	0.11	0.015	0.26
			Dév-max	0.020	0.26	0.27	0.020	0.018	0.35
		6	C_{max}	98	0	48	4	98	0
			Opt	97	0	48	4	96	0
		7	C_{max}	100	2	69	10	100	0
			Opt	100	2	69	10	100	0
		8	C_{max}	100	14	80	20	100	0
			Opt	100	14	80	20	100	0
		9	C_{max}	100	54	99	49	100	0
			Opt	100	54	99	49	100	0
		10	C_{max}	100	100	100	100	100	100
			Opt	100	100	100	100	100	100
	20	1	C_{max}	98	0	0	2	24	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.63	1.08	0.32	1.10	1.10	0.77
			Dév-moy	2.21	2.82	2.64	1.88	2.26	2.93
			Dév-max	2.57	3.18	2.93	2.54	2.55	3.32
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	0.47	0.72	0.63	0.46	1.26	1.25
			Dév-moy	0.49	1.21	1.18	1.05	0.78	1.42
			Dév-max	0.056	1.43	1.42	1.46	1.14	1.87
		3	C_{max}	94	0	0	1	8	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.09	0.15	1.10	0.62	0.81	0.94
			Dév-moy	0.31	0.97	0.76	0.64	0.44	0.85
			Dév-max	0.46	1.13	1.11	0.87	0.60	1.33
		4	C_{max}	18	0	0	0	86	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.23	0.64	1.10	0.63	0.46	1.25
			Dév-moy	0.32	0.61	0.56	0.50	0.27	0.69
			Dév-max	0.46	0.71	0.65	0.63	0.33	0.86
		5	C_{max}	23	0	0	0	81	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.08	0.16	0.92	1.58	0.16	1.41
			Dév-moy	0.21	0.50	0.47	0.41	0.17	0.45
			Dév-max	0.25	0.59	0.60	0.61	0.23	0.67
		6	C_{max}	14	0	0	0	93	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	9	0	0	0	93	0
			Opt	0	0	0	0	3	0
		8	C_{max}	5	0	0	0	94	0
			Opt	0	0	0	0	2	0

m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	20	9	C_{max}	2	0	0	0	99	0
			Opt	1	0	0	0	5	0
		10	C_{max}	5	0	0	0	98	0
			Opt	0	0	0	0	8	0
		50	1	C_{max}	99	0	0	15	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	1.72	2.84	2.32	2.34	1.41	2.19
			Dév-moy	2.357	2.60	2.59	2.53	2.37	2.69
			Dév-max	2.63	3.09	2.73	3.08	2.83	3.18
			2	C_{max}	100	0	0	0	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.13	3.12	1.07	1.25	1.89	1.86
			Dév-moy	0.36	0.73	1.02	0.98	0.79	1.14
			Dév-max	0.45	1.09	1.21	1.08	0.96	1.26
			3	C_{max}	99	0	0	1	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	2.49	2.51	2.95	2.81	1.72	3.13
			Dév-moy	0.18	0.48	0.43	0.40	0.25	0.62
			Dév-max	0.25	0.61	0.54	0.52	0.33	0.76
			4	C_{max}	12	0	1	91	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.14	2.50	2.95	2.81	1.72	3.13
			Dév-moy	0.12	0.22	0.19	0.26	0.14	0.41
			Dév-max	0.23	0.35	0.27	0.36	0.16	0.51
			5	C_{max}	25	0	0	79	0
				Opt	0	0	0	0	0
			Durée-moy	3.61	2.49	2.80	2.36	2.34	3.60
			Dév-moy	0.11	0.24	0.21	0.19	0.094	0.32
			Dév-max	0.16	0.33	0.28	0.31	0.11	0.46
			6	C_{max}	26	0	0	80	0
				Opt	0	0	0	0	0
			7	C_{max}	17	0	0	91	0
				Opt	0	0	0	0	0
			8	C_{max}	8	0	0	95	0
				Opt	0	0	0	0	0
			9	C_{max}	1	0	0	99	0
				Opt	0	0	0	10	0
			10	C_{max}	0	0	0	100	0
				Opt	0	0	0	18	0
	100	1	C_{max}	97	0	0	0	19	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.43	6.56	7.03	4.28	4.68	7.19
			Dév-moy	2.01	2.50	2.35	2.45	2.39	2.56
			Dév-max	2.71	2.84	2.77	2.74	2.72	2.89

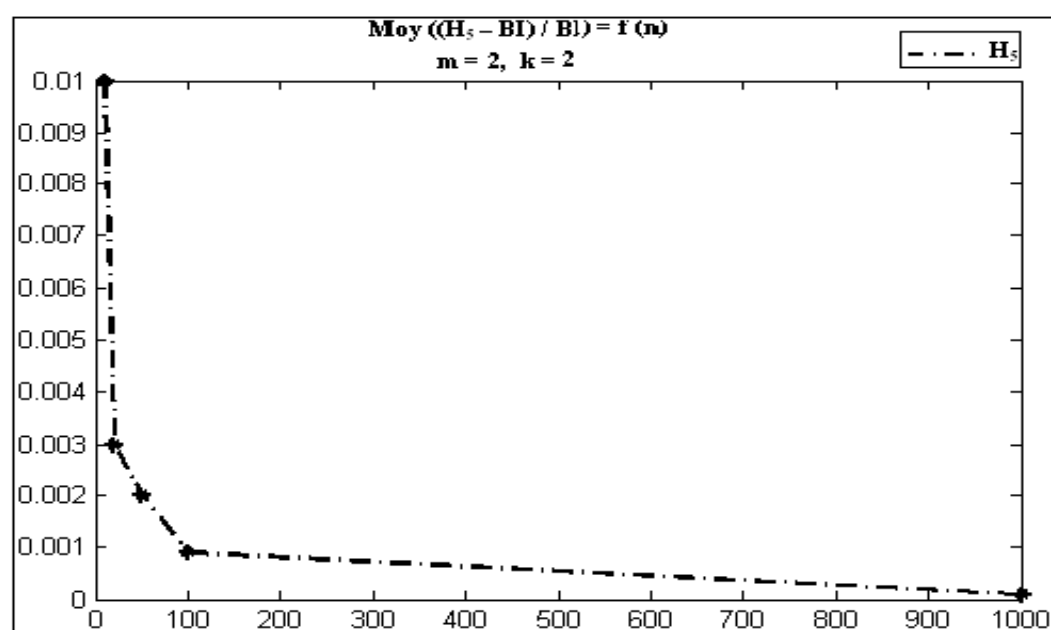
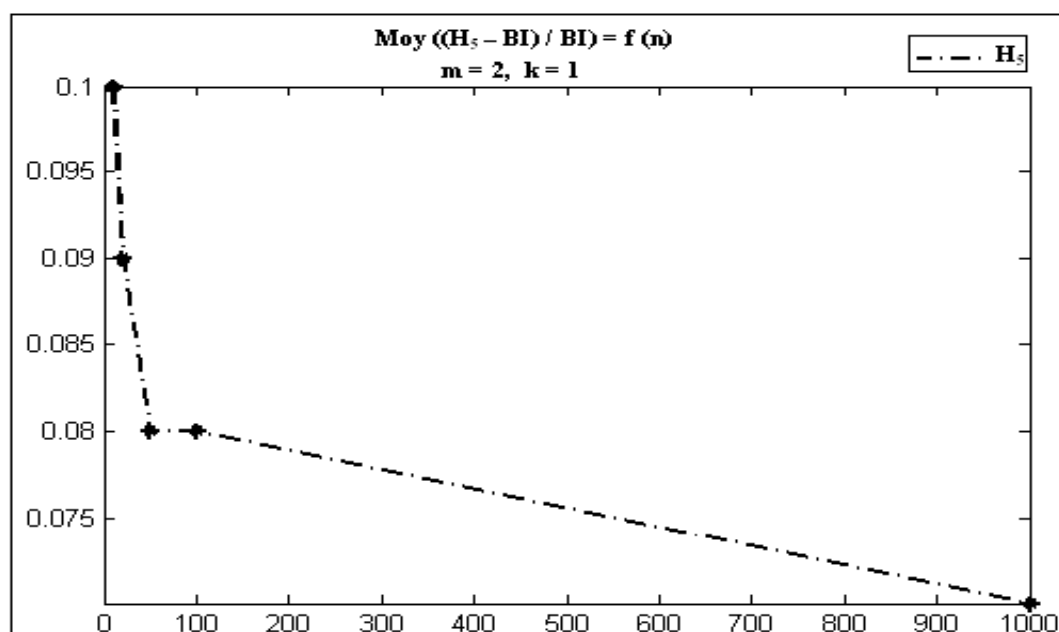
m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	100	2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	6.28	5.98	6.87	5.61	6.48	7.19
			Dév-moy	0.29	0.76	0.85	0.75	0.71	0.94
			Dév-max	0.37	0.84	0.94	0.90	0.77	1.00
		3	C_{max}	99	0	0	0	2	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	7.51	5.52	5.77	6.07	6.71	5.45
			Dév-moy	0.15	0.39	0.38	0.36	0.24	0.48
			Dév-max	0.18	0.49	0.44	0.51	0.32	0.62
		4	C_{max}	1	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	5.44	5.03	5.92	4.48	5.33	6.14
			Dév-moy	0.15	0.22	0.18	0.17	0.12	0.31
			Dév-max	0.18	0.25	0.22	0.22	0.13	0.31
		5	C_{max}	4	0	0	1	98	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	4.52	5.00	5.63	5.31	4.20	6.12
			Dév-moy	0.08	0.14	0.11	0.10	0.054	0.22
			Dév-max	0.10	0.15	0.14	0.12	0.06	0.24
		6	C_{max}	15	0	0	0	88	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	25	0	0	0	76	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	4	0	0	0	96	0
			Opt	0	0	0	0	2	0
		9	C_{max}	1	0	0	0	99	0
			Opt	0	0	0	0	16	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	5	0
	1000	1	C_{max}	99	0	0	0	35	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	54.76	54.88	56.23	57.32	60.02	62.33
			Dév-moy	2.37	2.39	2.41	2.42	2.37	2.43
			Dév-max	2.45	2.46	2.49	2.49	2.45	2.50
		2	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	77.22	74.59	75.32	77.51	75.88	77.09
			Dév-moy	0.25	0.64	0.74	0.75	0.66	0.79
			Dév-max	0.27	0.66	0.76	0.76	0.67	0.81
		3	C_{max}	100	0	0	0	0	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	90.66	92.97	93.55	93.84	90.33	95.72
			Dév-moy	0.12	0.27	0.28	0.28	0.20	0.37
			Dév-max	0.13	0.29	0.30	0.30	0.22	0.39

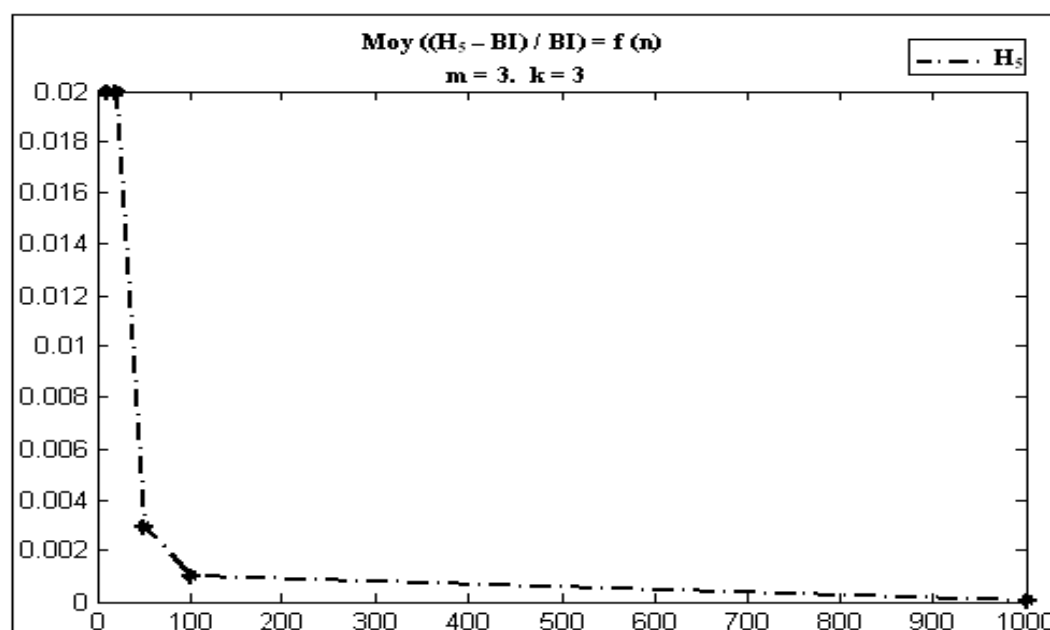
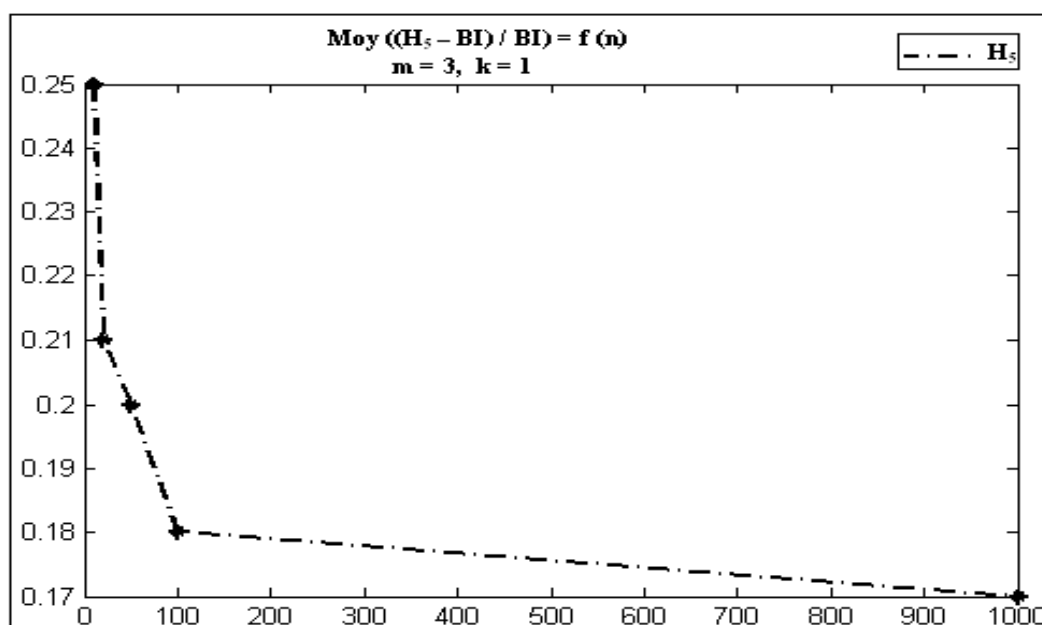
m	n	k		H1	H2	H3	H4	H5	H6
10	1000	4	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	97.78	90.85	100.34	9102.63	99.47	110.21
			Dév-moy	0.12	0.13	0.094	0.094	0.066	0.19
			Dév-max	0.13	0.14	0.11	0.11	0.080	0.20
		5	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
			Durée-moy	91.99	115.28	130.22	129.65	132.66	129.32
			Dév-moy	0.054	0.063	0.035	0.035	0.021	0.11
			Dév-max	0.008	0.050	0.03	0.03	0.02	0.08
		6	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		7	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		8	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	0	0
		9	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	1	0	0	0	0	0
		10	C_{max}	0	0	0	0	100	0
			Opt	0	0	0	0	54	0
Total1				4548	233	726	441	6666	100
Total2				807	177	459	196	1331	100

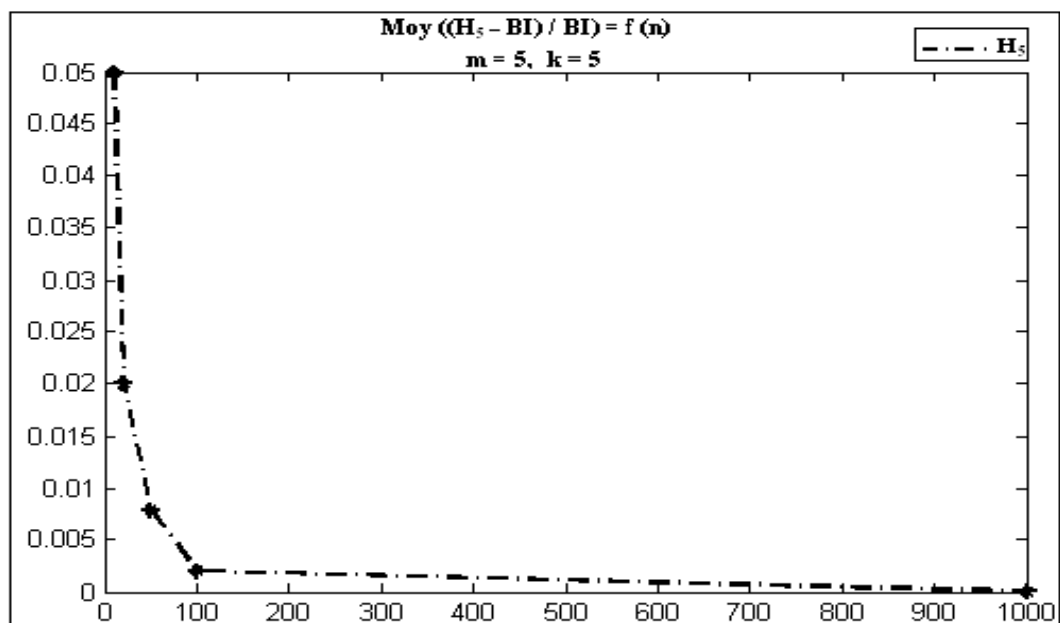
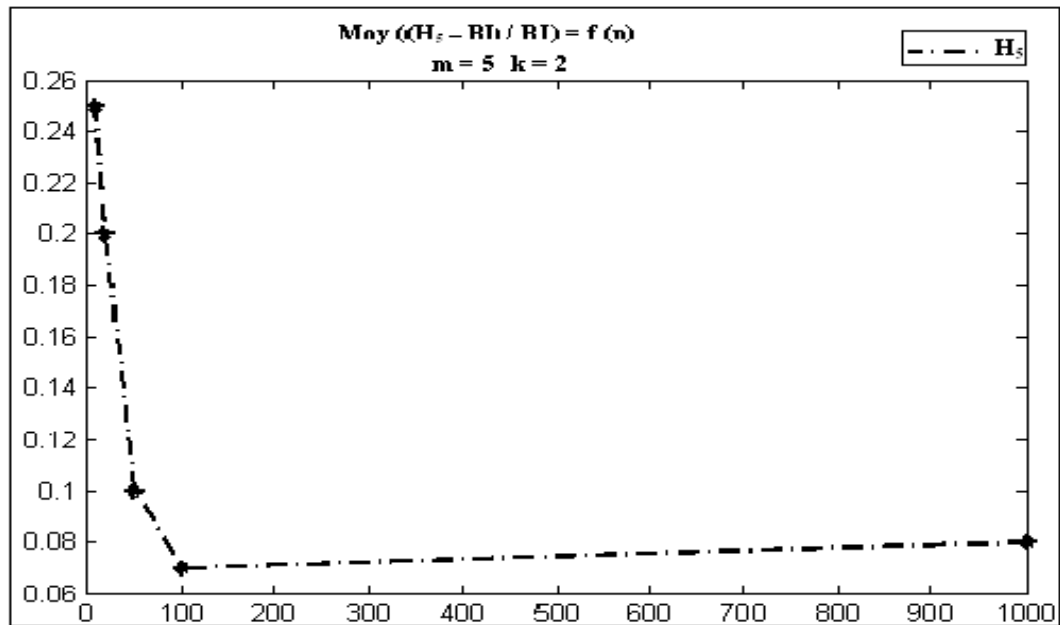
TAB. 4.4 – Tests pour $p_i \in [1, 100]$ et $S_i \in [1, 50]$

D'après les résultats présentés dans le tableau 4.4, les deux heuristiques $H1$ et $H5$ semblent meilleures avec 4548 cas et 6666 cas sur 10000 respectivement.

La figure 4.4 inscrit quelques résultats trouvés par l'heuristique $H5$.







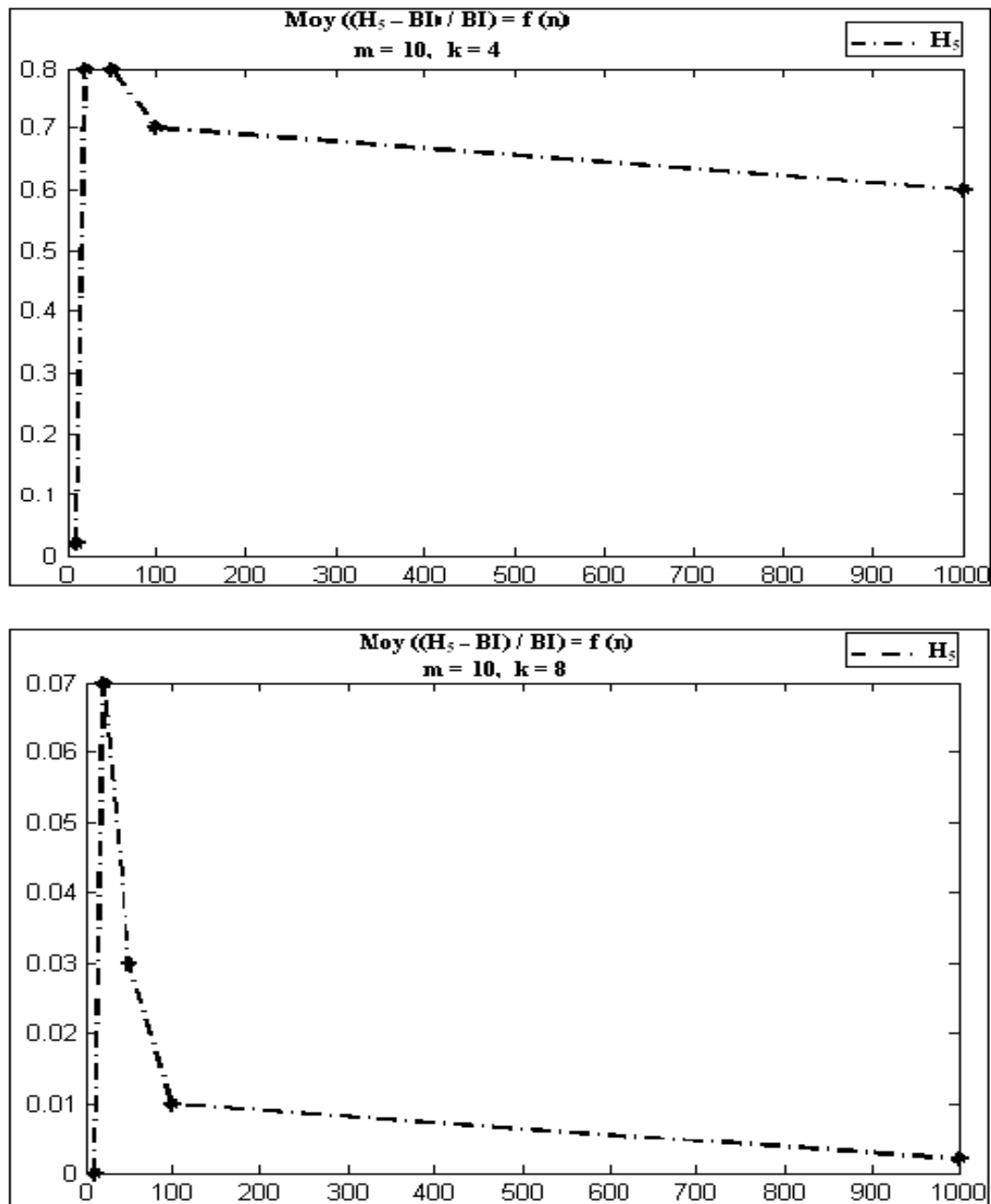


FIG. 4.4 – Comportement de l'heuristique H5 par rapport à la borne inférieure

4.3 Analyse des résultats

Dans cette section nous analysons les résultats obtenus sur l'ensemble des tests effectués (sur un Pentium (4)). Cette analyse est faite en deux étapes. La première étape résume le comportement des heuristiques les unes par rapport aux autres. La deuxième concerne leurs comportements par rapport à la borne inférieure puisque la solution optimale n'est pas disponible. Le tableau 4.5 illustre ces résultats.

Tests		H1	H2	H3	H4	H5	H6
$p_i \in [1, 10]$	H.meilleure	5138	349	794	556	7515	106
$S_i \in [1, 5]$	$C_{max} = \overline{M}$	1111	240	580	315	2167	106
$p_i \in [1, 20]$	H.meilleure	4745	278	762	534	7101	100
$S_i \in [1, 10]$	$C_{max} = \overline{M}$	1001	207	537	262	1761	100
$p_i \in [1, 50]$	H.meilleure	4764	210	687	540	6806	100
$S_i \in [1, 20]$	$C_{max} = \overline{M}$	878	167	462	250	1446	100
$p_i \in [1, 100]$	H.meilleure	4548	233	726	441	6666	100
$S_i \in [1, 50]$	$C_{max} = \overline{M}$	807	177	459	196	1331	100

TAB. 4.5 – Comportement des heuristiques

D'après cette expérimentation, il s'avère que pour tous les problèmes les heuristiques $H1$, $H5$ donnent de meilleures solutions. De plus l'heuristique $H5$ est généralement meilleure que l'heuristique $H1$.

En effet, sur 10000 cas générées (selon la loi uniforme) avec les p_i et les S_i sont tirées de la distribution uniforme $[1, 10]$, $[1, 5]$ respectivement. L'heuristique $H5$ donne une solution réalisable dans 7515 cas et une solution optimale dans 2167 cas ce qui correspond à 75.15% et 21.67%. L'autre heuristique trouve une solution réalisable dans 5138 cas et une solution optimale dans 1111 cas ce qui fait 51.38% et 11.11%.

Nous remarquons que les résultats obtenus sont dépendants du nombre de machines, de tâches et d'ouvriers.

En ce qui concerne la deuxième série de tests où les $p_i \in [1, 20]$, $S_i \in [1, 10]$, l'heuristique $H5$ est meilleure dans 7101 cas contre 4745 cas pour $H1$ et 1761 cas où $H5$ donne la solution optimale contre 1001 cas pour $H1$.

Pour la troisième série de tests où les $p_i \in [1, 50]$, $S_i \in [1, 20]$, l'heuristique $H5$ est optimale pour 1446 cas sur 6806 cas. Et pour la dernière série de tests il y a 1331 cas où elle donne des solutions optimales sur les 6666 cas où elle est meilleure.

En effet, les deux heuristiques $H1$, $H5$ sont efficaces dans la résolution des problèmes de petite taille pour les différentes distributions des temps de traitement et les temps de préparation. Elles sont capables de résoudre à l'optimalité tous les problèmes à 10 machines,

10 tâches et k varie entre 5 et 10 ouvriers.

On remarque que le nombre de solutions trouvées par l'heuristique $H1$ décroît quand le nombre de tâches et le nombre d'ouvriers augmente. Par ailleurs plus le nombre de tâches et le nombre d'ouvriers augmentent, plus l'heuristique $H5$ performe mieux, ce qui vient confirmer l'importance de la présence des ouvriers.

Finalement, d'après cette expérimentation, il apparaît que l'heuristique $H5$ qui range les tâches selon la règle $LPT_{S_i+p_i}$ est très intéressante que d'autres, de plus elle apporte la solution en moins de 16 ms pour les problèmes de petite taille et en moins de 141 ms pour les problèmes de grande taille.

Il semble alors que dans un objectif de minimisation de la durée totale de l'ordonnancement, cette heuristique soit la plus performante.

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire se situe dans le cadre de l'étude d'un problème d'ordonnancement qui se pose dans un environnement à machines parallèles identiques en tenant compte des temps de préparation des tâches. L'objectif de ce mémoire a été de déterminer des méthodes de résolution pour ce problème.

Nous avons, au cours de ce mémoire, présenté rapidement les problèmes d'ordonnancement, nous avons abordé les principaux termes et notions utilisés tout au long de ce mémoire, une approche pour la prise en compte des temps de préparation, ainsi, une classification des problèmes d'ordonnancement. Enfin, un état de l'art des méthodes de résolution.

Au deuxième chapitre, nous avons d'abord réalisé un état de l'art des principaux travaux traités dans la littérature. Nous avons également présenté le problème étudié et nous l'avons modélisé sous forme d'un programme linéaire en variables bivalentes. Une analyse de complexité qui nous a conduit à conclure que le problème est NP-difficile car le problème à deux machines avec des temps de préparation quelconques est NP-difficile.

Au troisième Chapitre, dans un premier temps, nous avons proposé des bornes inférieure et supérieure, comme nous avons développé six heuristiques en utilisant les règles LPT_{p_i} , SPT_{p_i} , LPT_{S_i} , SPT_{S_i} , $LPT_{S_i+p_i}$, $SPT_{S_i+p_i}$.

Finalement, différents tests expérimentaux ont été réalisés sur des instances générées aléatoirement selon la loi uniforme. Après évaluation de ces heuristiques par rapport au nombre de fois où une heuristique l'emporte sur les autres, et le nombre de fois où la solution trouvée est égale à la borne inférieure, nous concluons que l'heuristique basée sur le rangement des tâches selon la règle $LPT_{S_i+p_i}$ est assez performante.

Le rapport de performance $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ de Graham pour $P2//C_{max}$ (règle LPT) reste valable pour le problème $Pm/S_i, k/C_{max}$ pour $k \geq m$ (règle $LPT_{S_i+p_i}$).

La famille des problèmes d'ordonnancement offre un large éventail de recherche. Le problème que nous avons étudié n'en est qu'une petite ramification. Pour approfondir l'étude du problème d'ordonnancement incluant les temps de préparation, il serait intéressant d'étudier l'effet, sur d'autres critères.

Une deuxième perspective intéressante serait non seulement d'améliorer les heuristiques mais également la recherche de nouvelles méthodes de résolution (méthodes exactes de type Branch and Bound ou programmation dynamique, métaheuristiques, etc.)

Bibliographie

- [1] Abdelkhodae, AH., Wirth, A. : Scheduling parallel machines with a single server : some solvable cases and heuristics, Computers and Operations Research 29(3) : 295-315, 2002.
- [2] Allahverdi, A., Cheng, T.C.E., Kovalyov, M.Y. : A survey of scheduling problems with setup times or costs. Departement of Industrial and Management Systems Engineering, Kuwait University, 2006.
- [3] Allahvedi, A., Gupta, ND., Aldowaisan, T. : A review of scheduling research involving setup considerations. OMEGA. International Journal of Management Sciences, 27 : 219-239, 1999.
- [4] Aloulou, M.A., Modélisation et résolution des problèmes d'ordonnancement, Université Paris Dauphine, 2006.
- [5] Artigues, A. : ordonnancement en temps réel d'atelier avec prise en compte des temps de préparation deS ressources, Thèse, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des systèmes de CNRS, 1998.
- [6] Bettayeb, B., Kacem, I., Adjallah, K.H. : Ordonnancement sur machines parallèles identiques avec temps de préparation par famille : Application à la gestion des tâches de maintenance préventive. Université de Technologie de Troyes, 6^{ième} conférence francophone de Modélisation et Simulation -MOSIM'06, 2006.
- [7] Boudhar, M., Tchikou, H. : Problèmes d'ordonnancement avec machines parallèles ordonnées, ROAD, laboratoire LAID3, n°1, U.S.T.H.B, 2006.
- [8] Boustta, M. : Minimisation du temps de fabrication sur une machine à injection avec réglages multiples, Thèse, University Laval. Québec, 2003.
- [9] Bruker, P., Dhaenens-Flipo, C., Knust, S., Kravchenko, S., Werner, F. : Complexity results for parallel machine problems whith a single server. Journal of scheduling, 5 : 429-457, 2002.
- [10] Carlier, J., Chrétienne, P. Problèmes d'ordonnancement : Modélisation / Complexité / Algorithmes, Masson, 1988.
- [11] Chu, C., Proth, J.M. : L'ordonnancement et ses applications, Masson, 1996.

- [12] Cochran, J., Horng, SM., Fowler, J. : A multi- population genetic algorithm to solve multi-objective scheduling problems for parallel machines. *Computer and Operations Research*, 30 : 1087-1102, 2003.
- [13] Coffman, E.G., Garey, M.R. and Johnson, D.S. : An application of bin-packing to multi-processor sheduling. *SIAM Journal of computing*, 17 : 1-17, 1978.
- [14] Dell'Amico, M., Iori, M., Martello, S. : Heuristic Algorithms and Scatter Search for the Cardinality Constrained P//Cmax problem, *journal of Heuristics* 10(2) : 169-204, 2004.
- [15] Dupuy, M. : Contribution à l'analyse des systèmes industriels et aux problèmes d'ordonnancement à machines parallèles flexibles : application aux laboratoires de contrôle qualité en industrie pharmaceutique, Thèse, Centre de Génie Industriel de l'Ecole des Mines d'Albicarmaux, 2005.
- [16] Flipo-Dhaenens, C. : Optimisation d'un réseau de production et de distribution, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.
- [17] Gharbi, A., Haouari, M. : Une nouvelle heuristique pour le problème d'ordonnancement à machines parallèles avec date de disponibilité et temps de latence. *Institu supérieure d'informatique*, Tunisie, 2002.
- [18] Ghosh Jay, B. : Batch scheduling to minimize total completion time. *Operations Research Letters*, 16 : 271-275, 1994.
- [19] Graham, R.L. : Bonds on multiprocessing timing anomalies. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17 : 263-269, 1969.
- [20] Graham, R., Lawler, E., Lenstra, J. et Kan, A.R. : Optimisation and approximation in deterministic sequencing and scheduling. *Annals of Discrete Mathematics*, 4 :287–326, 1979.
- [21] Karp, R. : Complexity of computer computations. R.E. Miller, J.W. Thatcher (eds.), Plenum Press, New-York, 1972.
- [22] Koulamas, CP. : Scheduling two parallel semiautomatic machines to minimize machine interference. *Computers and Operations Research*, 23(10), pp. 945-956, 1996.
- [23] Mellouli, R., Sadfi, C., Kacem, I., Chu, C. : Ordonnancement sur machine parallèles avec contraintes d'indiponibilité. Université de Technologie de Troyes, 6^{ième} conférence francophone de Modélisation et Simulation -MOSIM'06, 2006.
- [24] Mokotoff, E.G. : Scheduling to minimize the makespan on identical parallel machines : An LP-Based algorithm, univrsity of Alcalé, 2003.
- [25] Mokotoff, E.G., Jimeno, JL., Gutiérrez, AI. : List scheduling algorithms to minimize the makespan on identical parallel machines. *Top*, 9 : 243-269, 2001.

- [26] Rios Solis, Y.A. : Ordonnancement avance-retard sur machines parallèles, Thèse, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie, 2007.
- [27] Rothkopf, M. : Sheduling independent tasks on parallel processors. Management Science 12, 347-447, 1966.
- [28] Sanlaville, E. : ordonnancement sous conditions changeantes, Thèse, 2005.
- [29] Sevaux, M., Thomin, P. : Recherche taboue améliorée pour l'ordonnancement sur machines parallèles, Université de Valenciennes, 3^{ième} conférence francophone de Modélisation et Simulation -MOSIM'01, 2001.
- [30] Zouba, M., Baptiste, P., Rebaine, D. : Ordonnancement de jobs sur deux machines parallèles en presence d'un seul opérateur, 6^{ième} conférence francophone de Modélisation et Simulation -Mosim'06, 2006.