

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENE  
U.S.T.H.B



*Faculté de Génie Mécanique & Génie des Procédés*

## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du Grade de :

**MAGISTER EN GENIE DES PROCEDES**

**Option : Energétique des Procédés**

Par :

**Mlle ZOUBIRI Safia**

Thème

*Comparaison entre les solutions analytique et numérique  
de l'équation de l'énergie qui régit le transfert thermique à  
travers les ailettes rectangulaires*

Soutenu publiquement, le 03 / 07 / 2006, devant le jury composé de :

Mme K. BOUHADF  
M. Y. K. BENKAHLA  
M. N.M. BOUAZIZ  
M. Y. OULD AMER

Professeur, USTHB  
Maître de Conférence, USTHB  
Maître de Conférence, MEDEA  
Maître de Conférence, USTHB

Président  
Directeur de thèse  
Examineur  
Examineur

*Juillet 2006*

*Quand j'étais gosse, haut comme trois pommes,  
Je parlais bien fort pour être un homme,  
Je disais, Je sais, Je sais, Je sais, Je sais.*

*C'était le début, c'était le printemps,  
Mais quand j'ai eu mes 18 ans,  
J'ai dit, Je sais, ça y est, cette fois Je sais.*

*Et aujourd'hui, les jours où je me retourne,  
Je regarde la Terre où j'ai quand même fait les 100 pas,  
Et je ne sais toujours pas comment elle tourne !*

*C'est encore ce qui m'étonne dans la vie,  
Moi qui suis à l'automne de ma vie,  
On oublie tant de soirs de tristesse,  
Mais jamais un matin de tendresse !*

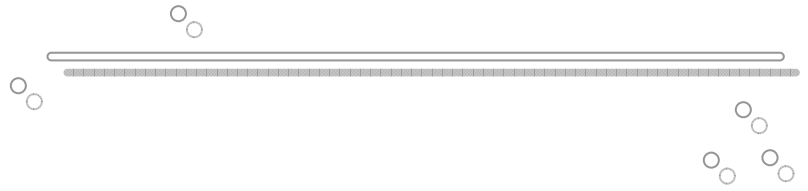
*Toute ma jeunesse, j'ai voulu dire : Je sais,  
Seulement, plus je cherchais, et puis moins je savais.*

*Il y a 60 coups qui ont sonné à l'horloge  
Je suis encore à ma fenêtre, je regarde et je m'interroge,*

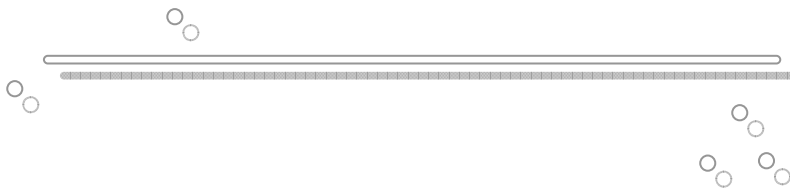
*Maintenant, Je sais qu'on ne sait jamais !*

*La vie, l'amour, l'argent, les amis et les roses,  
On ne sait jamais le bruit ni la couleur des choses,  
C'est tout ce que Je sais mais ça Je le sais !*

*Jean Gabin*



# *REMERCIEMENTS*



## *REMERCIEMENTS*

Dans mon imaginaire, l'écriture de cette page était loin de représenter autant de choses : la joie immense d'avoir mener ce projet a bien mais aussi la tristesse qui se cache toujours derrière le mot fin. Seule, rien n'aurait été possible. Par cette simple phrase, cette page prend ici tout son sens et la peur d'oublier quelqu'un qui aurait pu, ne serait ce que par un mot, changer le cours des choses, devient réelle. A tous ceux la, MERCI.

Je tiens à remercier, en premier lieu, vivement Monsieur **Y. K. Benkahla**, Maître de conférences et responsable de l'équipe : Simulation Numérique des Ecoulements de la FGM et GP de l'USTHB, pour avoir accepté d'encadrer ce travail, pour avoir su me supporter dans les moments de doute comme dans les moments d'allégresse, pour son enthousiasme permanent et ses implications tant humaines que scientifiques.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait Madame **K. BOUHADF**, Professeur à l'USTHB, d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur **M. N. BOUAZIZ**, Maître de Conférence à l'Université de MEDEA et Monsieur **Y. OULD AMER** Maître de Conférence à l'UTHB, qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail.

Je remercie Mademoiselle **S. MIMOUNE**, pour toutes les heures que nous avons passées ensemble mais aussi et surtout pour ses qualités humaines et scientifiques toujours en toute modestie, sa passion du métier qu'elle sait rendre contagieuse et la confiance qu'elle a bien voulu m'accorder tout au long de ce travail.

J'exprime toute ma gratitude Monsieur **S. RECHAK**, Professeur à l'ENP, pour avoir été pour partie l'instigateur de ce projet ainsi que pour ses remarques constructives.

Je tiens à exprimer tous mes plus vifs remerciements à Mademoiselle **M.LARFI**, qui m'a secouru par ses précieux conseils et surtout son soutien constant.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **M. DAHMANI**, Président Directeur Général de l'EPE MOUBYDAL et Monsieur **KHETTAR**, Directeur des Ressources Humaines et toute la structure de l'entreprise, pour m'avoir accueillie au sein du centre de recherche et pour leur aide constante et leur patience.

Parce que la thèse est aussi une grande aventure humaine, je tiens à remercier les nombreuses personnes que j'ai côtoyées, qui ont bien voulu m'intégrer et qui ont dû me supporter lors de ces années, qu'ils soient stagiaires, permanents ou doctorants, de l'USTHB, l'EIBIAPCU, l'UBFSI ou de l'ENP.

Enfin, les mots les plus forts étant les plus simples, j'adresse ici toute mon affection à ma mère et à mon père. Malgré mon éloignement depuis de trop nombreuses années, leur confiance, leur tendresse, leur amour n'ont cessé de me porter et de me guider. Est ce le meilleur endroit pour vous dire ce genre de choses ? Je n'en connais, en tout cas, pas de mauvais. Je vous aime.

## RESUME

Le concept d'augmenter les performances de conduction de chaleur d'un corps en lui attachant des ailettes en tant que surfaces prolongées est bien connu, mais il y a une certaine confusion concernant l'évaluation des profils de température et des écoulements de la chaleur correspondants.

La conductivité thermique est considérée souvent constante pour que le modèle mathématique correspondant au problème posé soit résolu du fait de la linéarité des équations. Cependant, la plage de variation des températures n'est pas toujours réduite et par conséquent dans certains cas, une dépendance de ce paramètre avec la température n'est pas à ignorer.

L'existence d'un coefficient non uniforme de transfert thermique a été établie théoriquement et expérimentalement observée. Ces non uniformités ont un impact sur le taux de dissipation thermique des ailettes. Cependant, la nature réelle de la variation du coefficient de transfert thermique peut être obtenue par analyse conjuguée de la conduction dans l'ailette avec la convection dans le fluide adjacent.

Dans ce cadre, le présent travail a pour but de résoudre analytiquement l'équation de l'énergie qui régit le transfert thermique à travers une ailette annulaire de section droite rectangulaire. En effet, après avoir comparé la solution analytique et numérique, nous avons représenté l'évolution du rendement analytique fonction du paramètre caractéristique de l'ailette. Quant aux graphiques des flux thermiques spécifiques, ils sont représentés en fonction du rayon réduit.

Notons tout de même que l'étude entreprise a été menée en considérant la variation simultanée du coefficient de transfert de chaleur  $h$  et de la conductivité thermique,  $k$ . Le but de ce travail est de déterminer l'effet des conditions non simplifiées sur le rendement des ailettes annulaires rectangulaires ainsi que sur les propriétés optimales de ces dernières.

De plus, nous avons proposé de généraliser le problème, ceci en admettant une géométrie annulaire et une section droite non déterminée. Espérer trouver une solution analytique pour un tel problème, en fonction de la constante de forme  $n$ , demeure non évident. Pour cela, plusieurs considérations simplificatrices s'avèrent indispensables afin de solutionner un tel problème. Une fois les hypothèses posées et validées, la solution analytique était approchée et son domaine de validité était déterminé en confrontant les résultats analytiques aux résultats numériques associés aux différentes géométries d'ailettes.

En définitive, ce travail nous a permis d'aboutir, non seulement à une solution analytique pour l'ailette annulaire rectangulaire mais le problème annulaire général, peu importe le profil de l'ailette, était interprété par une solution approchée dont le domaine de validité était indiqué.

### **Mots clés :**

Ailette rectangulaire, ailette annulaire, solution numérique, solution analytique, transfert thermique, rendement, flux thermique.

## *ABSTRACT*

The concept to increase the performances of conduction of heat of a body by attaching fins as prolonged surfaces to him is well known, but there is a certain confusion relating to the evaluation of the temperature profiles and the corresponding heat flows.

Thermal conductivity is considered often constant so that the mathematical model corresponding to the problem arising is solved because of the equations linearity. However, the beach of temperatures variation is not always reduced and consequently in certain cases, a dependence of this parameter with temperature is not to be unaware of.

The existence of a non-uniform heat transfer coefficient was theoretically established and experimentally observed. These non-uniformities have an impact on the fin heat dissipation. However, the real nature of the variation of this coefficient can be obtained by combined analysis of conduction in the fin with the convection in the adjacent fluid.

Within this framework, the purpose of this work is to solve analytically the equation of energy which governed the thermal transfer through an annular fin of rectangular cross-section. Indeed, after having compared the analytical to the numerical solution, we represented the evolution of the analytical effectiveness function of the characteristic parameter of the fin. As for the graphs of the specific heat dissipation, they are represented according to the reduced ray.

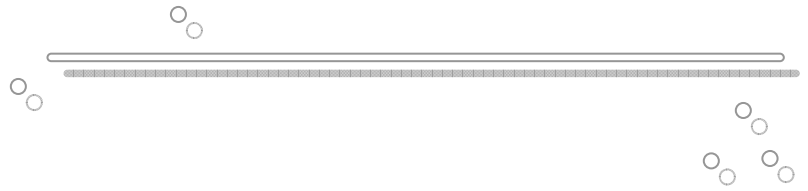
Let us note all the same that the study undertaken at summer carried out by considering the simultaneous variation of the heat transfer coefficient  $h$  and of the thermal conductivity  $k$ , the goal of this work is to determine the effect of the not simplified conditions on the annular rectangular fin efficiency like on the her optimal properties.

Moreover, we proposed to generalize the problem, this by admitting an annular geometry and a non uniform cross-section. To hope to find an analytical solution to this problem, according to the constant of form  $n$ , remains non-obvious. For that, several simplifying considerations prove to be essential in order to solve this problem. Once the assumptions posed and validated, the analytical solution was approximate and its field of validity was given by confronting the analytical results with the numerical results associated the various geometries of fins.

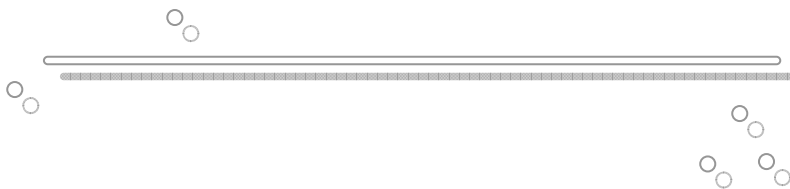
Ultimately, this work enabled us to succeed, not only with one analytical solution for the annular rectangular fin but for the general annular problem, it does not matter the profile of the fin, was interpreted by an approximate analytical solution whose her validity field was indicated.

### **Key words:**

Rectangular fin, annular fin, numerical solution, analytical solution, heat transfer, effectiveness, heat flux.



# *SOMMAIRE*



# SOMMAIRE

Introduction générale	1
-----------------------	---

## Chapitre I : Revue Bibliographique

I.1 Introduction	3
I.2 Généralités sur les ailettes	3
I.2.1 Conception d'ailette	4
I.2.2 Classification des ailettes	5
I.2.4 Hypothèses entreprises par les auteurs	7
I.3 Synthèse bibliographique	10
I.3.1 Conductivité thermique	11
I.3.2 Coefficient d'échange	12
I.3.3 Dimensions de l'ailette	15
I.3.4 Profil de l'ailette	16
I.3.5 Nature du matériau	19
I.3.6 Régime instationnaire	20
I.3.7 Ailette humide	21
I.3.8 Ailette radiative	22
I.4 Conclusion	23

## Chapitre II : Formulation et Résolution Mathématique du Problème

II.1 Introduction	25
II.2 Hypothèses du problème	25
II.2.1 Mise en équations	26
II.2.2 Equation de l'énergie d'une ailette annulaire rectangulaire	30
II.2.3 Conditions aux limites	31
II.3 Résolution numérique de l'équation de l'énergie	31
II.3.1 Champ thermique réduit d'une ailette rectangulaire	33
II.3.2 Rendement de l'ailette	33
II.3.3 Flux de chaleur adimensionnel ou Taux de dissipation thermique	34
II.3.4 Algorithme calculant le champ thermique, le rendement et le flux de chaleur	35
II.4 Résolution analytique de l'équation de l'énergie	38
II.4.1 Approximations admises	39
II.4.2 Solution analytique approchée	40
II.4.3 Ecarts entre la solution analytique la solution numérique	41
II.5 Conclusion	44

## Chapitre III : Ailette Annulaire Rectangulaire

III.1 Introduction	45
III.2 Solution Analytique	45
III.2.1 Caractéristique de L'ailette	46
III.2.2 Coefficient de Température	48
III.2.3 Régime d'écoulement	51
III.2.4 Ecart de température	55
III.2.5 Masse réduite de l'ailette	58
III.2.6 Conclusion	60
III.3 Uniformité et variabilité des coefficients de transfert	60
III.3.1 Uniformité de h et de k	61
III.3.2 Uniformité de h et variabilité de k	66
III.3.3 Uniformité de k et variabilité de h	68
III.3.4 Conclusion	70
III.4 Conclusion et perspectives	71

## Chapitre IV : Ailette Annulaire

IV.1 Introduction	72
IV.2 Hypothèses du problème	72
IV.2.1 Mise en équations	73
IV.2.2 Conditions aux limites	73
IV.3 Résolution numérique de l'équation de l'énergie	74
IV.3.1 Champ thermique réduit d'une ailette annulaire	75
IV.3.2 Rendement de l'ailette	76
IV.3.3 Algorithme de calcul du rendement	76
IV.4 Résolution analytique de l'équation de l'énergie	80
IV.4.1 Considération amir pour une solution analytique approchée	81
IV.4.2 Solutions analytiques approchés	83
IV.4.3 Ecart entre les solutions analytique et numérique	90
IV.4.4 Expression analytique du Rendement	94
IV.5 Conclusion	96
Conclusion générale	97

Références bibliographiques

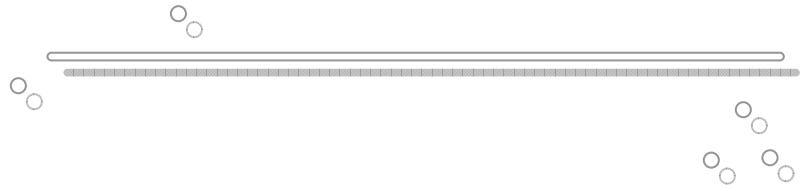
Annexe

## NOMENCLATURE

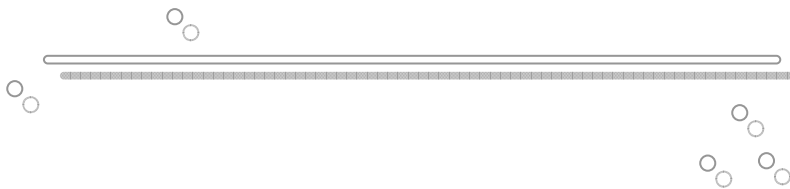
- $a_i, b_i, c_i, d_i, f_i, e_i, g_i, h_i, V_i, W_i, P_i$  et  $G_i$  : Coefficients obtenus dans la procédure numérique [-] ;  
 $A(r)$  : Section droite verticale de l'ailette annulaire à la position radiale  $r$  [ $L^2$ ] ;  
 $Bi_0$  : Nombre de Biot défini par  $(2h_0r_1/k_0)$  [-];  
 $C_1$  et  $C_2$  : Constantes d'intégration [-] ;  
 $dl$  : Longueur élémentaire de l'ailette [ $L$ ] ;  
 $h(T)$  : Coefficient de transfert de chaleur variant en fonction de la température [ $MT^{-3}^{\circ}C$ ] ;  
 $h(\phi)$  : Coefficient de transfert de chaleur exprimé en fonction de la température réduite  $\phi$  [ $MT^{-3}^{\circ}C$ ] ;  
 $h_0$  : Coefficient de transfert de chaleur à la température ambiante  $T_{\infty}$  [ $MT^{-3}^{\circ}C$ ] ;  
 $i, j$  : Nombre de nœuds ou d'itérations [-] ;  
 $J$  : Fonction Bessel du premier ordre [-] ;  
 $k$  : Conductivité thermique du matériau considéré ;  
 $k(T)$  : Coefficient de conductivité thermique variant en fonction de la température [ $MLT^{-3}^{\circ}C$ ] ;  
 $k(\phi)$  : Coefficient de conductivité thermique exprimé en fonction de la température réduite  $\phi$  [ $MLT^{-3}^{\circ}C$ ] ;  
 $k_0$  : Conductivité thermique du matériau pris à la température ambiante  $T_{\infty}$  [ $MLT^{-3}^{\circ}C$ ] ;  
 $k_1$  : Coefficient déterminant la nature du métal [ $^{\circ}C^{-1}$ ] ;  
 $L$  : Longueur de l'ailette annulaire [ $L$ ] ;  
 $m_f(\phi)$  : Paramètre caractéristique de l'ailette [-] ;  
 $M$  : Masse de l'ailette annulaire [ $M$ ] ;  
 $\bar{M}$  : Masse réduite de l'ailette [-] ;  
 $n$  : Constante de forme [-] ;  
 $q_{cd}$  : Flux de chaleur par conduction quittant la base de l'ailette [ $ML^2T^{-3}$ ] ;  
 $q_{cv}$  : Flux de chaleur dissipé par convection quand toute la surface de l'ailette est portée à la température de la base [ $ML^2T^{-3}$ ] ;  
 $r$  : Direction radiale de l'ailette [ $L$ ] ;  
 $r_1$  : Rayon du tube sur lequel est rattachée l'ailette annulaire [ $L$ ] ;  
 $r_2$  : Rayon du tube ailette [ $L$ ] ;  
 $\bar{R}$  : Rayon réduit de l'ailette  $r_2/r_1$  [-] ;  
 $R_a$  : Constante de forme [-] ;  
 $S$  : Terme source [-] ;  
 $S(r)$  : Surface latérale de l'ailette à la position radiale  $r$  [ $L^2$ ] ;  
 $T_{\infty}$  : Température du fluide environnant [ $^{\circ}C$ ] ;  
 $T_0$  : Température de rattachement de l'ailette au tube [ $^{\circ}C$ ] ;  
 $T(r)$  : Température locale de l'ailette [ $^{\circ}C$ ] ;  
 $\Delta T_0$  : Ecart de température entre la surface de l'ailette et le milieu environnant ( $T_0 - T_{\infty}$ ) [ $^{\circ}C$ ] ;  
 $x$  : Rayon adimensionnel  $r/r_1$  [-] ;  
 $Y$  : Fonction Bessel du deuxième ordre [-].

**Symbol grec :**

- $\delta(r)$  : Épaisseur locale de l'ailette [L] ;  
 $\delta_0$  : Épaisseur de la base de l'ailette [L] ;  
 $\bar{\delta}$  : Épaisseur réduite de l'ailette [-] ;  
 $\phi$  : Température adimensionnelle [-] ;  
 $\eta$  : Rendement thermique de l'ailette [-] ;  
 $\lambda$  : Coefficient de température [-] ;  
 $\nu$  : Coefficient de dépendance de h avec la température [-] ;  
 $\rho$  : Masse volumique du matériau de l'ailette [ML<sup>-3</sup>].



# *INTRODUCTION GENERALE*



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'attachement de rangées d'ailettes annulaires à des tubes ronds est un procédé commun dans des dispositifs d'échangeurs de chaleur en vue d'augmenter le transfert thermique à partir des surfaces primaires des tubes aux jets adjacents de gaz. Des applications typiques sont trouvées dans les moteurs refroidis à l'air notamment ceux des motos, des automobiles et dans les échangeurs de chaleur liquide-gaz dans les équipements de réfrigération.

Une analyse précise du transfert thermique dans les ailettes est devenue cruciale étant donné la demande croissante en terme de rendement. En effet, la meilleure configuration consisterait à atteindre des rendements élevés pour lesquels les coûts sont faibles.

Dans l'industrie, en particulier, frigorifique le développement est tel que les constructeurs réservent des budgets de plus en plus importants à la recherche d'un pouvoir d'échange thermique maximal et d'une compacité élevée. L'évolution bénéfique de cette augmentation en surface d'échanges par les ailettes mène à des surcoûts d'étude vus à la voie expérimentale. En définitive, quelque soit l'axe d'intérêt choisi, la connaissance précise des conditions physiques et thermiques est primordiale en ingénierie pour l'obtention de résultats probants et précis.

De nombreuses recherches ont été conduites en tenant compte de la variabilité des paramètres thermiques. Ainsi, **Razelos** et **Imre** [1] ont considéré la variation avec la température du coefficient de transfert de chaleur le long de l'ailette, **Hung** et **Appl** [2] ont présenté les performances d'une ailette longitudinale tout en considérant la dépendance vis à vis de la température de la conductivité thermique alors que **Jany** et **Bejan** [3] ont étudié la forme optimale pour des ailettes longitudinales pour lesquels la variation de la conductivité thermique en fonction de la température est également prise en considération.

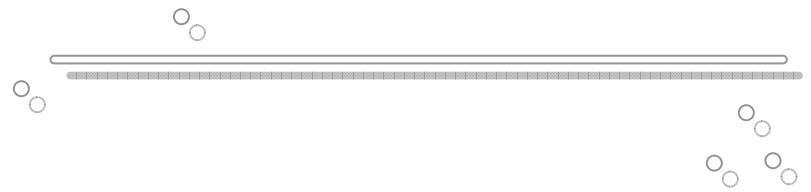
Dans la pratique, s'agissant du dimensionnement des échangeurs, le rendement de l'ailette est déduit sur la base de modèles analytiques reposant sur un ensemble d'hypothèses idéales s'écartant le plus souvent des considérations réelles. **Haseler** [4], par exemple, utilise la théorie classique des ailettes pour calculer la conduction transversale dans les échangeurs multi courants. La déduction du rendement s'effectue à partir des formules de **Gardner** [5] et des expressions simplifiées de **Churchill** [6]. **Ullman** et **Kalman** [7] ont présenté des abaques pour les ailettes annulaires à partir des mêmes hypothèses simplificatrices et dans une perspective d'optimisation du profil. **Shah** [13] insiste fortement sur la détermination précise de l'efficacité car l'impact énergétique d'une sous ou surévaluation de dix pourcent de ce paramètre se traduit par une perte ou par un gain du dixième de la production mondiale de pétrole [9].

Les études qui s'intéressent à l'amélioration du processus de transfert thermique par le biais d'ailettes sont assez nombreuses, les paramètres étudiés le sont aussi. Pour cela, nous sommes proposés d'étudier dans un premier lieu, au Chapitre un, les travaux effectués jusqu'à ce jour, en les regroupant en fonction des paramètres considérés lors de ces différentes études.

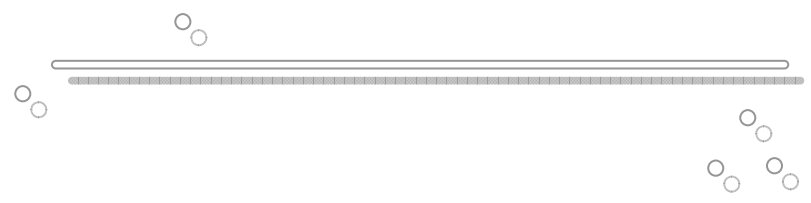
Dans le Chapitre deux, nous exposons la problématique de notre sujet en tenant compte de la non uniformité du coefficient de transfert et de la conductivité thermique. Ce Chapitre se scinde en deux, la première partie est consacrée à la résolution numérique de l'équation de l'énergie développée pour le cas d'une ailette annulaire de section droite variable. La discrétisation de l'équation différentielle se fait moyennant la méthode des différences finies. Dans la deuxième partie, la résolution analytique a été abordée en procédant à certaines considérations simplificatrices. Enfin, afin d'examiner la validité de la solution analytique proposée, ce chapitre comporte, en plus, une étude comparative entre les deux solutions : numérique et analytique, pour estimer les écarts occasionnés par l'approximation adoptée.

L'étude de l'effet des différents paramètres présents dans la solution trouvée, sur le rendement, la dissipation thermique et surtout sur les caractéristiques optimales de l'ailette fera l'objet de la première partie du chapitre trois. La considération d'une uniformité de  $h$ , de  $k$  ou des deux simultanément entraîne par voie de conséquence, des écarts dans les valeurs du rendement et du flux transféré entre le cas non uniforme et les cas cités précédemment. Ces écarts traduisent l'erreur relative commise suite à la considération entreprise. La deuxième partie estime ces erreurs par rapport au cas où  $h$  et  $k$  varieraient en fonction de la température.

Enfin, le chapitre quatre expose le problème associé pour une section droite variable où la solution analytique sera approchée pour différentes géométries annulaires. Cette dernière partie envisage une étude comparative qui confronte les résultats analytiques des différentes sections droites aux résultats numériques afin d'apprécier la justesse de cette solution approchée.



*CHAPITRE I :*  
*REVUE BIBLIOGRAPHIQUE*



# REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

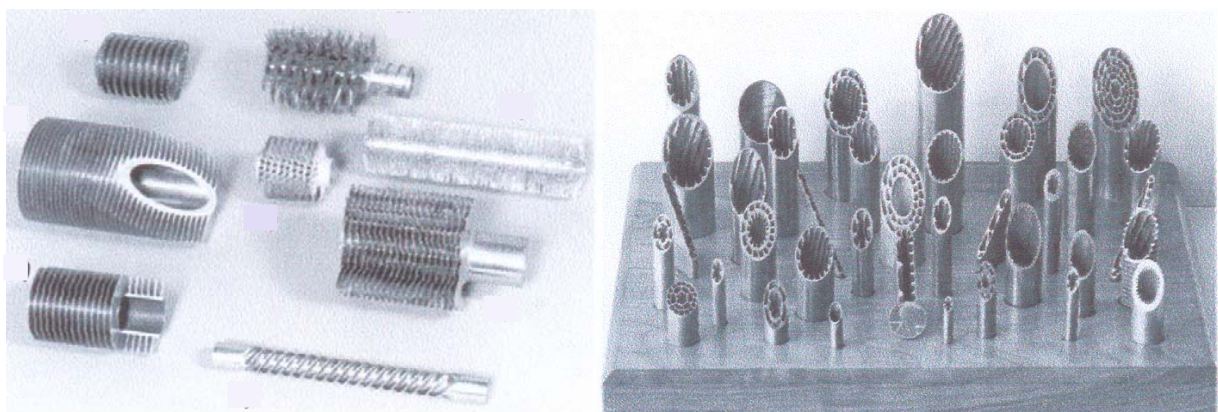
## I.1 Introduction

Les ailettes ou les surfaces prolongées sont largement répandues dans une grande variété d'équipements dans le but d'augmenter le taux de transfert thermique à partir de la surface primaire vers le milieu ambiant. L'emploi d'ailettes comme moyen d'accroissement des échanges thermiques se justifie dans des domaines aussi divers que le nucléaire, l'aéronautique, l'aérospatial et l'électronique.

Ce chapitre a pour objet l'analyse du transfert thermique à travers les ailettes. Nous commencerons par des généralités, puis nous passerons en revue les travaux qui ont été menés sur ce sujet.

## I.2 Généralités sur les ailettes

L'élimination de la chaleur d'une surface, par convection, peut être sensiblement améliorée si nous mettons des prolongements sur cette dernière. Ces prolongements peuvent prendre diverses formes. La figure (I.1) expose les différentes manières dont la surface de la tuyauterie commerciale d'échangeur de chaleur peut être prolongée avec des saillies que nous appelons ailettes.



1. Huit exemples de tubes extérieurement ailettés ;
2. Une rangée de tuyauterie intérieurement ailettés.

**Figure I.1** : Quelques variétés de tubes ailettés [10].

### I.2.1 Conception d'ailette

Deux mesures de base pour la détermination des performances des ailettes sont utilisées dans la conception : le rendement et l'efficacité.

- Le rendement est défini comme étant le rapport entre le flux de chaleur transférée par l'ailette par celui transféré en considérant toute la surface de cette dernière maintenue à la température de la base [6,7,10]. Son expression s'écrit comme suit :

$$\eta \equiv \frac{\text{Chaleur transférée par l'ailette}}{\text{Chaleur transférée quand l'ailette est portée à la température de la base}} \quad (\text{I.1})$$

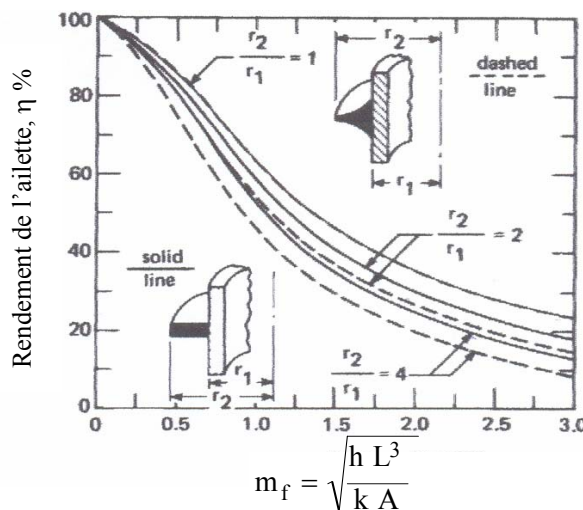
- La définition de l'efficacité est traduite par la relation (I.2) qui montre que c'est le quotient du flux de chaleur quittant la base de l'ailette à celui qui quitterait la même surface s'il n'y avait pas d'ailette en considérant une température de base identique [7,10].

$$\varepsilon \equiv \frac{\text{Chaleur transférée par la surface ailetée}}{\text{Chaleur transférée par la surface non ailetée}} \quad (\text{I.2})$$

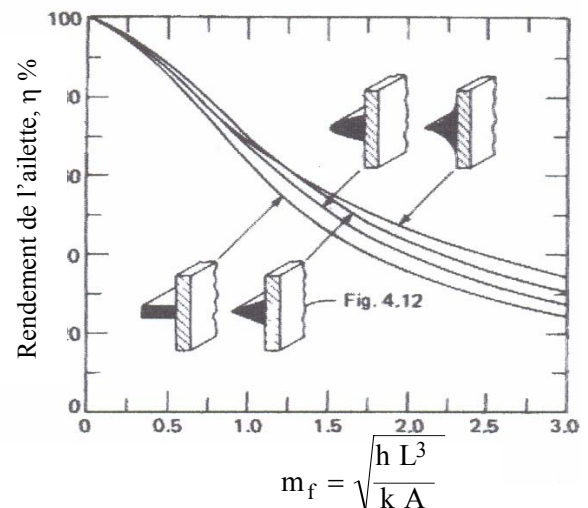
En fait, l'efficacité peut être calculée à partir du rendement selon l'expression suivante :

$$\varepsilon \equiv \eta \frac{\text{Surface de l'ailette}}{\text{Surface de la section droite de l'ailette}} \quad (\text{I.3})$$

Les figures (I.2.1) et (I.2.2) exposent l'évolution du rendement pour plusieurs géométries d'ailette en fonction du paramètre caractéristique de l'ailette  $m_f$ .



1. Ailettes annulaires

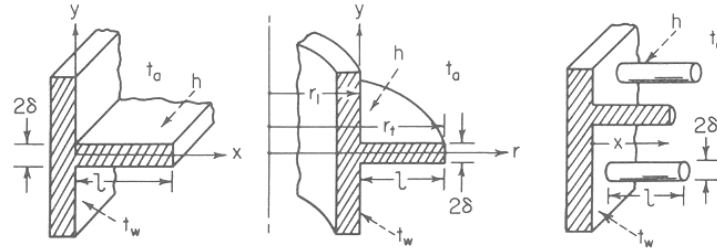


2. Ailettes longitudinales

**Figure I.2 :** Efficacité de différentes ailettes de sections droites variables [10].

### I.2.2 Classification des ailettes

Nous pouvons classer les surfaces prolongées, tenant compte leurs forme géométrique, en trois grandes familles comme le montre la figure (I.3).



1. Ailette longitudinale

2. Ailette annulaire

3. Ailette épine

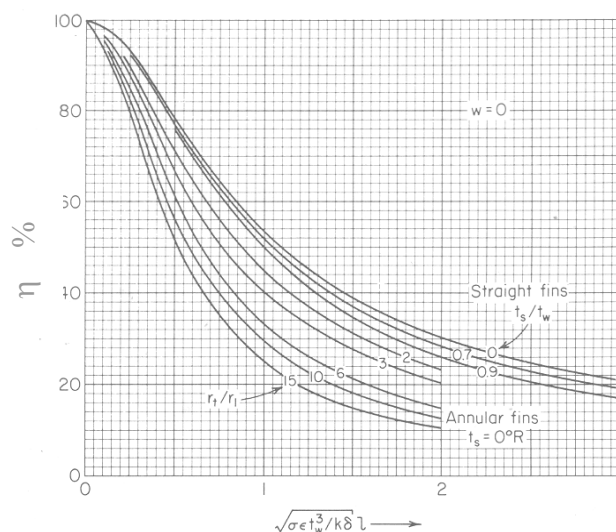
**Figure I.3 :** L'ailette rectangulaire sous les différentes formes géométriques [11].

De plus, nous pouvons considérer deux modes d'évacuation de la chaleur, donc deux types d'ailettes :

- **Ailettes convectives :** Notons à ce sujet que le fluide est caractérisé par un coefficient de transfert uniforme et une température ambiante constante. Quant à l'ailette, elle est dotée d'une conductivité extrêmement grande ce qui confère à l'ailette un transfert axial ; à cet effet et dans ces conditions, nous établissons dans le tableau ci-joint les différentes expressions du rendement pour les trois classes d'ailette déjà étudiées par la figure (I.3).
- **Ailettes radiatives :** Dans ce deuxième type d'ailette le mode de transfert se fait par rayonnement. En effet, la chaleur transmise par rayonnement, d'un d'élément de largeur dx caractérisé par une émissivité ε, est donnée par la relation suivante :





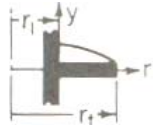

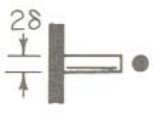



$$dq = 2\sigma\epsilon l (T^4 - T_s^4) dx \quad (1.4)$$

Les rendements d'une ailette rectangulaire longitudinale et annulaire sont comparés dans la figure (I.4).



**Figure I.4 :** Rendement des ailettes rectangulaires radiatives [11].

**Tableau I.1 : Rendement pour les ailettes convectives [11].**

<b>Ailette longitudinale</b>	1) Rectangulaire		$\eta = \frac{1}{mL} \tanh mL \quad , \quad m = \sqrt{\frac{h}{k \delta}}$
	2) Parabolique		$\eta = \frac{1}{m_1 L} \frac{I_2(\frac{4}{3} m_1 L)}{I_{-\frac{1}{3}}(\frac{4}{3} m_1 L)} \quad , \quad m_1 = \sqrt{\frac{h}{k \delta_1}}$
	3) Triangulaire		$\eta = \frac{1}{m_1 L} \frac{I_1(2m_1 L)}{I_0(2m_1 L)}$
	4) Hyperbolique		$\eta = \frac{2}{\sqrt{4(m_1 L)^2 + 1 + 1}}$
<b>Ailette annulaire</b>	5) Rectangulaire		$\eta = \frac{2}{mL(r_2 - r_1)} \left[ \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_2)K_1(mr_1) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)} \right]$
	6) Hyperbolique		$\eta = \frac{2}{m_1 L \left( \frac{r_2}{r_1} + 1 \right)} \left[ \frac{I_{-\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_1) I_{-\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_2 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}) - I_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}) I_{-\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_2)}{I_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_1) I_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_2 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}) - I_{-\frac{2}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}) I_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3} m_1 r_2)} \right]$
<b>Epine</b>	7) Rectangulaire		$\eta = \frac{1}{\sqrt{2} mL} \tanh \sqrt{2} mL$
	8) Parabolique		$\eta = \frac{2}{\frac{4}{3} \sqrt{2} m_1 L} \frac{I_1(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_1 L)}{I_0(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_1 L)}$
	9) Triangulaire		$\eta = \frac{4}{2\sqrt{2} m_1 L} \frac{I_2(2\sqrt{2} m_1 L)}{I_1(2\sqrt{2} m_1 L)}$
	10) Hyperbolique		$\eta = \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{9}(m_1 L)^2 + 1 + 1}}$

En plus des deux grandes classes d'ailettes, il existe d'autres types d'ailettes. La figure (I.9) illustre certaines photographies donnant la forme des différentes ailettes utilisées dans les applications de refroidissement électronique. Ces ailettes ne sont, évidemment, pas unidimensionnelles, il est clair donc qu'elles ne peuvent pas être caractérisées avec une simple coordonnée.



**Figure I.5 :** Quelques arrangements d'ailettes utilisées dans les applications de refroidissement électronique [12].

#### **I.2.4 Hypothèses entreprises par les auteurs**

Dans ce qui suit, nous allons citer les différentes hypothèses posées par les auteurs et nous étudierons les conséquences qui en découlent lors de l'adaptation de ces dernières. Notons, tout de même, que l'installation d'ailettes n'augmentera pas nécessairement le taux de transfert de chaleur. En effet, si la valeur du coefficient de convection,  $h$ , est grande, comme dans le cas des fluides à haute vitesse ou les liquides en ébullition, l'ailette peut produire une réduction du transfert thermique étant donné que la résistance de conduction oppose une plus grande résistance à l'écoulement de la chaleur en comparaison avec la résistance de convection.

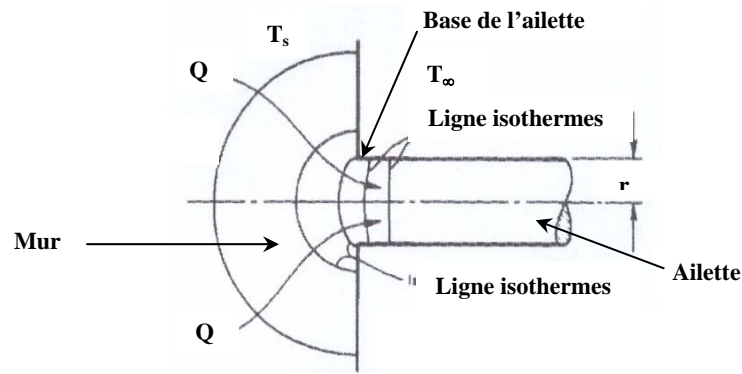
Pour illustrer ce phénomène, considérons une épave en acier inoxydable de conductivité thermique  $k$  égal à  $16 \text{ W/m}^\circ\text{C}^{-1}$ , longueur  $L$  égale à  $10 \text{ cm}$ , d'épaisseur  $\delta$  égale à  $1 \text{ cm}$ , exposée à une eau bouillante. Le coefficient de convection est pour cette configuration égale à  $5000 \text{ W/m}^2\text{C}$ . Le rendement, dans ce cas, est calculé par l'équation suivante :

$$\frac{q_{\text{avec ailette}}}{q_{\text{sans ailette}}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{hA/kp}} = 1,13 \quad (1.5)$$

Ceci nous permet de conclure que cette ailette, pour ces conditions de travail, augmente le transfert de chaleur de seulement  $13 \%$ .

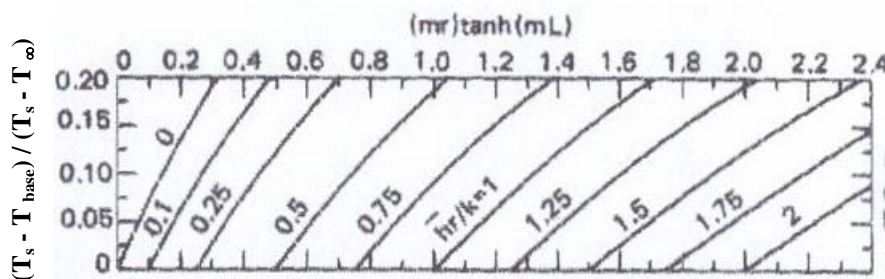
#### **a) Choix de la température de la base d'une ailette**

La température de la base de l'ailette est, dans la plupart des cas, une donnée de départ. Cependant, si l'on fixe une ailette sur un mur du même matériau, figure (I.5), il est clair que pour qu'il y ait un écoulement de chaleur à travers l'ailette, un gradient de température doit exister à proximité de la base.



**Figure I.5 :** Le transfert de la chaleur à la base de l'ailette

Considérons la situation où la température du mur est égale à  $T_s$ , cette température étant supérieure à la température du fluide environnant. Le rendement de l'ailette est calculé en utilisant cette température. Ce problème a été analysé par **Hennecke's** et **Sparrow** [13], La figure (I.6) est le résultat de l'étude entreprise par ces auteurs, obtenu pour une ailette cylindrique circulaire.



**Figure I.6 :** Prédiction de l'écart entre la température à la base de l'ailette et la température locale résultante de la distribution de la température au voisinage de la base [13].

### b) Dépendance conductivité thermique vis à vis de la température

Signalons que l'hypothèse prise dans les exemples précédents est telle que la conductivité thermique demeure uniforme. Cependant, la pratique révèle une dépendance de cette propriété vis à vis de la température, ce constat peut être visualisé, dans le cas de la fonte, par les valeurs énumérées dans le tableau ci-dessous.

**Tableau I.2 :** Valeurs de la conductivité thermique de la fonte 0,5 % en fonction de la température

T (°C)	0	100	200	400	600	1000
k (W/m°C)	55	52	48	42	35	29

Bien que la variation de la conductivité thermique en fonction de la température n'est pas linéaire dans le domaine de température illustré à travers l'exemple précédent, il est cependant raisonnable d'attribuer une variation linéaire pour des gammes limitées de température, expression (I.6).

$$k = k_0(1 + C_0T) \quad (1.6)$$

Où, les valeurs de  $C_0$  et  $k_0$  sont tabulées pour différents domaines de température.

Dans l'exemple précédent, pour une température comprise entre 100 et 200 °C, on a :  $k_0 = 56$  W/m°C et  $C_0 = - 0,0007143$  °C<sup>-1</sup>.

En calculant le flux de chaleur transféré à travers une épaisseur de 2 mm du métal précédent, pour une variation de température comprise entre 100 et 200 °C, on obtient en ignorant cette dépendance une erreur relative de 8%. Cette valeur peut devenir significative dans certains cas.

### c) La dépendance coefficient de convection-température

Le coefficient d'échange entre la surface de l'ailette et l'environnement peut être estimé soit par un calcul analytique ou numérique, soit par voie expérimentale, en traçant le nombre de Nusselt en fonction d'un produit de nombres adimensionnels.

Le tableau (I.3) donne les équations simplifiées, obtenues expérimentalement, pour le coefficient de convection en considérant l'air à la pression atmosphérique. Ces expressions peuvent être utilisées pour des différentes pressions, en les multipliant par les facteurs suivants :

$$\left(\frac{p}{101,32}\right)^{1/2} : \quad \text{Pour le cas laminaire}$$

$$\left(\frac{p}{101,32}\right)^{2/3} : \quad \text{Pour le cas turbulent}$$

**Tableau 1.3 :** Equations simplifiées pour la convection libre en régime laminaire et turbulent [11-12, 14].

Surface	Laminaire $10^4 < GrPr < 10^9$	Turbulente $GrPr > 10^9$
Plaque ou cylindre vertical	$h = 1,42 \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1,31 (\Delta T)^{1/3}$
Cylindre horizontal	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4}$	$h = 1,24 (\Delta T)^{1/3}$
Plaque horizontale chauffée à sa base ou refroidie a son bout	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1,52 (\Delta T)^{1/3}$
Plaque horizontale chauffée à son bout ou refroidie a sa base	$h = 0,59 \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	
Tube chauffé	$h = 1,052 \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	

Où :

- h : Coefficient de transfert de chaleur, en  $W/m^2\text{°C}$  ;
- $\Delta T$  : Différence de température entre la base de l'ailette et le milieu ambiant en  $\text{°C}$  ;
- L : Dimension verticale ou horizontale ;
- d : Diamètre de la conduite en mètre.

Le terme h peut être considéré comme le terme fondamental de la thermique. Il permet de simplifier l'extérieur et de ne résoudre l'équation de la chaleur qu'à l'intérieur du domaine.

### I.3. Synthèse bibliographique

Augmenter les performances de conduction de chaleur d'un corps en lui attachant des ailettes en tant que surfaces prolongées est une technique bien connue, mais il y a une certaine confusion concernant l'évaluation des profils de température et des écoulements de la chaleur correspondants. Plusieurs modèles mathématiques ont été présentés dans la littérature pour décrire l'écoulement unidimensionnel, chacun ayant ses propres caractéristiques, **Stones** [15] a fourni une revue étendue. **Wood et al** [16] ont réuni plusieurs modèles, les plus communs pour l'écoulement stationnaire, en vue de produire une comparaison quantitative des profils de température prévus et des taux de transfert thermique donnés par chaque modèle.

Les études avancées sont assez nombreuses. Elles remédient aux approches primaires dont les résultats sont souvent infirmés par les mesures expérimentales, conduites par **Hu et Jacobi** [9] et par **Shah** [8] qui a signalé que cette simplification de modèles est non valide si le rendement est inférieur à 0,8 %. Ces travaux se caractérisent par un traitement sélectif vis à vis des hypothèses et s'appuient généralement sur des schémas théoriques à solutions le plus souvent analytiques. **Look** [17] ainsi que **Yu et Chou** [18] se sont intéressés à l'ailette bidimensionnelle en considérant un coefficient d'échange variable. Une conductivité thermique dépendant de la température est prise en compte pour les ailettes longitudinales supposées par **Aziz et Na** [19]. De même, **Zubair et al.** [20] considère cette dernière condition dans une étude concernant l'optimisation des dimensions optimales de l'ailette. Plusieurs études telles que celles de **Han et Lefkowitz** [21], **Unal** [22-23], **Laor et Kalman** [24], ont été développées en prenant en compte la variation du coefficient d'échange. Une approche différente est tentée par **Sparrow et Chyu** [25], **Sparrow et Acharya** [26], **Huang et Chen** [27], sous forme de problèmes conjugués de condition-convection. Le cas d'une ailette présentant une source interne de chaleur a été traité par **Minkler et Rouleau** [28], par **Aziz** [29], par contre, **Unal** [30] a présenté des expressions analytiques à ce problème. Enfin, **Cotta et Ramos** [31] ont proposé une solution hybride sous quelques hypothèses non simplifiées puis **Huang et Shan** [32] ont conclu, pour une ailette rectangulaire, que supposer le coefficient d'échange uniforme mène à de grosses erreurs.

Dans ce qui suit, nous représentons une synthèse bibliographique concernant le transfert thermique au sein des ailettes et ce, en prenant en compte tout les cas de figure étudiés. Cette synthèse sera structurée en fonction de la variation d'un certain nombre de paramètres et qui seront cités ci après.

### I.3.1 Conductivité thermique

Dans la plupart des études, la conductivité thermique est considérée souvent uniforme pour que le modèle mathématique correspondant au problème posé soit simplement résolu, du fait de la linéarité des équations. Cependant, la pratique révèle que la plage de variation des températures n'est pas toujours réduite et que par conséquent dans certains cas, une dépendance de ce paramètre avec la température n'est pas à ignorer. Par exemple, pour les échangeurs de type plaques ailetées utilisés en cryogénie, il a été constaté que l'évolution de la conductivité est très importante pour une légère variation de la température. Ainsi, l'expression de la conductivité thermique peu se limiter à une expression linéaire.

$$\ln k(T) = C_0 + C_1 T \quad (1.7)$$

La valeur du coefficient  $C_1$ , de la formule précédente, impose la présence de deux cas de figures. On obtiendra, une amélioration des rendements selon que la valeur de  $C_1$  soit positive. Cette constatation peut être faite à partir des données expérimentales [33].

Dans le même ordre d'idée, **Bouaziz et al.** [34] ont trouvé que pour les ailettes de grande conductivité thermique la valeur du coefficient  $C_1$  est faible et que l'usage des conductivités moyennes arithmétique est une bonne approximation.

Notons, cependant, que la non-uniformité de la conductivité thermique impose, dans la plupart des cas, une procédure numérique dans la résolution des équations de bilans. **Aziz** [29] et **Krane** [35] ont employé cette procédure de résolution en considérant l'ailette longitudinale à extrémité convective. Tandis qu'une approche alternative était employée par **Muzzio** [36] pour obtenir des solutions analytiques approximatives.

Au cours de ces dernières années, l'arrangement de décomposition d'Adomian [37], une méthode qui fournit une solution analytique sous forme d'une série entière infinie, a émergé comme une méthode alternative pour résoudre un éventail de problèmes mathématiques [38-39]. Cette méthode a l'avantage d'assurer la convergence des solutions ainsi établies pour l'équation déterminée qu'elle soit linéaire et non linéaire.

Dans ce contexte, **Ching-Huang Chu** et **Cha'o-Kuang Chen** [40-41] ont appliqué la méthode précédente à une équation de bilan de chaleur non-linéaire avec une conductivité thermique dépendant de la température, pour obtenir une solution analytique approximative. Ces auteurs ont trouvé que, pour un  $\varepsilon$  supérieur à zéro, la conductivité thermique de l'ailette augmente avec l'augmentation de la température. Inversement, pour un  $\varepsilon$  inférieur à zéro, la conductivité thermique diminue avec la diminution de la température.

$$\varepsilon = \frac{k_b - k_a}{k_a} \quad (1.8)$$

où :

- $k_b$  : Conductivité thermique de l'ailette prise à la température de la base ;
- $k_a$  : Conductivité thermique de l'ailette prise à la température ambiante ;

Ces auteurs ont constaté, de plus, que le rendement augmente à mesure que  $\varepsilon$  augmente. Ceci peut être expliqué par le fait que l'augmentation avec la température de la conductivité thermique ( $\varepsilon > 0$ ), entraîne l'augmentation du taux de transfert thermique à l'augmentation. Les résultats obtenus sont comparés avec la solution numérique. La plus grande erreur observée n'excède jamais 0,2 %.

De leur côté, **Tszeng** et **Saraf** [42] ont étudié les effets des thermocouples sur la température mesurée, quand ces derniers sont montés directement sur la surface de l'objet. Un thermocouple est une manière très commode servant à mesurer la température de surface, cependant, la conduction de la chaleur du fil du thermocouple change la température locale aux jonctions. Par conséquent, la FEM apparaissant sur les bornes du thermocouple ne correspond pas à la température de surface réelle. Dans cette étude les caractéristiques générales du chauffage/refroidissement augmenté par la présence d'ailettes liées aux thermocouples montés à la surface sont en premier lieu passées en revue. Un modèle informatique inclus est alors développé de sorte que l'on puisse l'employer en même temps qu'un modèle régulier de FEM pour le calcul multidimensionnel du chauffage ou du refroidissement d'une pièce. Ce modèle donne un calcul très précis offrant la température réelle à la jonction du fil du thermocouple.

### I.3.2 Coefficient d'échange

L'existence d'un coefficient non-uniforme de transfert thermique a été établie théoriquement et expérimentalement observée. **Kraus** [43] a regroupé les résultats des recherches, qui ont considéré le coefficient de transfert thermique non uniforme le long de la surface de l'ailette. Il a conclu que cette non uniformité influence le taux de dissipation thermique des ailettes.

Compte tenu des expériences de **Ghai** [44], qui a démontré que le coefficient de transfert augmentait en allant vers l'extrémité, avec une valeur minimale à la base de l'ailette, **Gardner** [45] a prouvé que la variation du coefficient de transfert thermique sur la longueur de l'ailette pouvait être exprimée sous forme d'une équation. Ces résultats ont été discutés, par la suite, par **Kraus** [46]. Ceci a déclenché, par la suite, un certain nombre de considérations une loi linéaire [47], de puissance [21] et une variation exponentielle [48] du coefficient de transfert thermique.

Cependant, l'évolution réelle de la variation du coefficient de transfert thermique peut être obtenue par l'analyse conjuguée de la conduction dans l'ailette avec la convection dans le fluide adjacent. De telles études ont été entreprises par plusieurs auteurs. **Stachiewicz** [49], **Sparrow** et **Acharya** [26] ont observé une diminution du coefficient de transfert thermique près de la base et une augmentation au bout pour des ailettes prises dans les conditions d'une convection naturelle. Simultanément, des solutions au problème ont été également proposées par **Advin** et **Sukhatme** [50], **Garg** et **Velusamy** [51], **Unal** [22] et **Yeh** [52].

Notons que, **Razelos** et **Imre** [53] ont étudié l'effet de la variation du coefficient de transfert thermique et celui de la variation de la conductivité thermique sur les dimensions optimales des ailettes radiales pour la géométrie trapézoïdale. Signalons qu'à ce sujet **Netrakanti** et **Huang** [54] ont résolu le problème pour une géométrie différente.

**Razelos** [55] a essayé d'optimiser la masse des ailettes convectives. Quant à **Natarajan et Shnoy** [56], ils ont déterminé le profil optimum des épines coniques en considérant une loi de puissance pour décrire la dépendance coefficient de transfert thermique en fonction de la température. **Yeh** [52] a optimisé la dimension de l'ailette longitudinale sous forme d'épine pour des coefficients de transfert thermique dépendants de la température.

Dans le but de proposer une solution analytique susceptible d'optimiser l'ailette, **Kudnu et Das** [57] ont suggéré une méthode pour la linéarisation pour une ailette longitudinale, radiale et trapézoïdale en considérant deux cas de figure : une ailette à extrémité isolée puis non isolée. Un coefficient de transfert de chaleur variable sur la surface d'ailette a été considéré.

Ces auteurs ont constaté que le rapport du coefficient de transfert thermique de la base à celui de l'extrémité de l'ailette, noté  $\varepsilon$ , avait un effet notable sur les performances des ailettes. Le rendement des trois types d'ailettes augmentait avec l'augmentation de ce rapport. Cependant, le taux d'augmentation est plus important pour les valeurs intermédiaires de  $\varepsilon$ . Pour un volume donné de l'ailette le taux de dissipation thermique augmentait également avec l'augmentation de  $\varepsilon$ .

Dans le souci d'étudier le transfert thermique en fonction du régime d'écoulement, **R.Karvinen** [58] a étudié le transfert thermique en considérant le cas d'une convection naturelle puis forcée à partir d'ailettes longitudinales de sections droites variables. En comparant les solutions issues de cette étude à celles de la littérature utilisant des coefficients moyens de transfert thermique, il constate que pour le cas de la convection naturelle il y a une différence apparente. Quant à la convection forcée, la différence est faible.

**Bouaziz** [34, 59] montre qu'un coefficient de transfert variable a une très grande influence, puisqu'il conditionne les distributions de température, ces dernières gouvernent à leur tour les rendements. Il présente des résultats de simulation pour deux cas pratiques en considérant une loi de variation du coefficient d'échange de la forme :

$$h(T) = h_c T^v \quad (1.9)$$

où,  $v$  est pris égal à 0,25 pour un écoulement non forcé du fluide autour de l'ailette et 0,33 pour un écoulement forcé du fluide autour de l'ailette.

Il constate que les rendements calculés, dans le cas où l'on adopterait un coefficient d'échange uniforme, peuvent subir une perte importante par rapport aux cas où l'on adopterait l'expression (1.8) car pour un coefficient d'échange dépendant de la température la résistance spécifique surfacique de convection est moins importante ce qui justifie la perte en rendement.

**Wong** [60] a montré que, pour la géométrie annulaire, le coefficient de transfert thermique variait radialement et tangentielllement le long de la surface latérale de l'ailette, ce qui est confirmé expérimentalement [61].

**Heggs et al** [62], dans leur note, ont abouti à une solution analytique pour la distribution de la température dans les ailettes annulaires de section droite triangulaire en tenant compte de la variation en fonction de la température du coefficient de transfert thermique. Le rendement correspondant est alors comparé aux résultats expérimentaux. Ces auteurs constatent que la valeur minimale du coefficient de transfert thermique se localise à la base de l'ailette et que la variation linéaire de ce coefficient réduit le rendement de l'ailette, en effet, la réduction maximale est estimée à 30 % par rapport au cas uniforme.

Dans le même ordre d'idées et sur la base d'une étude analytique et expérimentale combinée, **Yudin et Tokhatarova** [61] ont trouvé une expression qui lie le rendement calculé pour un coefficient de transfert variable à celui mesuré pour un coefficient uniforme, en considérant l'ailette annulaire de section droite rectangulaire. Ils proposent :

$$\eta_{h \text{ variable}} = \left(1,0 - 0,058 \frac{l}{t} \text{Bi}^{1/2}\right) \eta_{h \text{ constant}} \quad (1.10)$$

avec :

- l : la longueur de l'ailette annulaire
- t : la demi-épaisseur de l'ailette.

Le rendement de l'ailette annulaire de section droite triangulaire [62] est en accord avec les résultats obtenus par la relation précédente [61], avec un écart de 3 %. D'après ces auteurs [61], il est inutile de mettre en application des variations d'ordre plus grand car les investigations expérimentales ont confirmé la possibilité d'utiliser cette variation linéaire.

D'autres études sur le transfert thermique le long des ailettes de géométrie circulaire ont été menées afin d'établir le champ thermique. Les solutions pour une ailette longitudinale ont été obtenues par **Sparrow et Acharya** [26] pour une convection naturelle et par **Sparrow et Chyu** [25] pour une convection forcée. Les problèmes correspondant aux géométries cylindrique ont été étudiés par **Huang et Chen** [27]. L'ensemble de ces études ont conclu que le coefficient local de transfert thermique n'est pas constant et change le long de l'ailette. D'après **Gill et al.** [63], il est plus raisonnable de laisser le coefficient de transfert thermique non spécifié et le traiter en tant qu'élément de la solution.

L'analyse numérique faite par **Rizos N. Krikkis** [64] a solutionné le problème pour des ailettes longitudinales siège d'un transfert thermique par ébullition. L'analyse thermique ne peut plus être étudiée indépendamment du fluide de fonctionnement puisque le coefficient de transfert thermique est dépendant de la température. Le procédé de transfert thermique est modélisé en utilisant la conduction unidimensionnelle de la chaleur avec une ailette isolée au bout. En outre, cinq profils d'ailette sont considérés : épaisseur constante, trapézoïdale, le triangulaire et notamment le profil parabolique convexe et concave. Les effets de la différence de la température, des paramètres de Conduction-Convection et du nombre de Biot sont analysés et présentés à travers plusieurs diagrammes.

Les interactions radiantes ailette-ailette et ailette-base ont été étudiés par **Rizos** et **Razelos** [65], ils ont étudié, de plus, les dimensions optimales des ailettes rectangulaires et triangulaires de section droite circulaires. Les équations régissant ont été résolues numériquement. Les dimensions d'ailettes d'optimales, l'épaisseur et la taille, ont été présentées sous la forme adimensionnelle et des corrélations explicites ont été données pour les paramètres optimaux. Les résultats ont été analysés et rapportés dans des diagrammes qui donnent la perspicacité aux caractéristiques opérationnelles du mécanisme de rejet de chaleur.

**Sakalis** et **Hatzikonstantinou** [66] ont étudié l'écoulement laminaire, incompressible, entièrement développé et en développement thermique dans les conduits droits de coupe carrée, avec des ailettes internes. Le mur de la conduite et les ailettes sont soumises successivement à une température constante. Les résultats numériques donnent la distribution de la température et le nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale et de la taille de l'ailette. Ces résultats sont en bon accord avec les valeurs déjà publiées. Ainsi, ces résultats démontrent que la région en développement thermique est caractérisée par coefficient de transfert élevé. De plus, le Nusselt dans la région thermiquement développée augmente en fonction de la taille de l'ailette jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur critique près de la position correspondante à 0,73 fois la longueur  $L$  de l'ailette.

### I.3.3 Dimensions de l'ailette

**Bouaziz** [34], lors de la comparaison entre les configurations bidimensionnelle et unidimensionnelle, n'a pas trouvé de variation dans les distributions des températures. Ainsi, le rendement calculé est identique à celui du modèle unidimensionnel. Dans tous les cas, une différence absolue de l'ordre de  $10^{-5}$  est observée entre les deux considérations. De plus, le rendement diminuait sensiblement à mesure que l'épaisseur de l'ailette rectangulaire augmentait.

Dans le même ordre d'idées, **Wan** et **Tan** [67] prouvent que l'erreur dans le taux de transfert thermique pour la considération unidimensionnelle est très faible, en effet, l'utilisation des ailettes est économiquement justifiée seulement si le nombre de Biot est inférieur à 0,1.

**Antonio Campo** et **Biagio Morrone** [68] ont trouvé que la plus grande valeur du rapport entre le rayon externe et interne, employé dans la conception pratique des tubes à ailettes annulaires pour les échangeurs de chaleur, est prise égale à 5. Pour ce faire, la méthode des différences finies a été utilisée pour étudier le profil de température à travers les ailettes annulaires de profil hyperbolique.

L'étude des performances thermiques des surfaces ailettées à l'intérieur des canaux plats ou circulaires a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux et numériques qui ont abouti à des corrélations permettant de prévoir l'échange thermique. Cependant, ces travaux se sont généralement intéressés, d'une part, à des configurations où la longueur des ailettes reste faible devant le diamètre des conduites dans lesquelles elles sont implantées et, d'autre part, aux coefficients d'échange moyens, c'est-à-dire supposés constants le long de l'ailette.

Que deviennent ces résultats lorsque la longueur des ailettes est plus importante ? Dans ce cas, l'espace libre situé au-dessus du sommet des ailettes apparaît comme une zone de survitesse caractérisée par une moindre résistance à l'avancement du fluide. Les études de **Martin et al.** [69], consacrées à ce type de configuration, montrent qu'en milieu confiné la présence d'ailettes induit une distribution de vitesse telle que la densité de flux échangée présente des variations très importantes le long de leurs longueurs.

Dans les paragraphes suivants nous énumérons d'autres paramètres étudiés concernant le transfert de thermique au sein de différentes géométries d'ailettes. La partie concernant la géométrie de l'ailette, (I.3.4), fera l'objet du chapitre quatre, les parties restantes seront recensées dans ce travail pour faire l'objet d'études ultérieures.

### I.3.4 Profil de l'ailette

Différentes formes d'ailettes ont évolué suivant l'application et la géométrie de la surface primaire. **Kern et Kraus** [70] ont identifié les géométries principales d'ailettes. Ce sont les ailettes longitudinales, radiales ou circulaires et goupillon ou dites épines (cf. Tableau I.1). Quelle que soit la géométrie de l'ailette, celles présentant un profil uniforme, où l'épaisseur est constante, sont celles que l'on choisit car elles peuvent être fabriquées facilement.

La détermination de la distribution thermique dans une ailette d'épaisseur uniforme est également relativement simple. Cependant, dans n'importe quel type d'ailette, la température diminue en passant de la base de l'ailette à son extrémité. En conséquence, une économie de matériel peut être obtenue en diminuant progressivement la section droite de l'extrémité de l'ailette. Ceci a lancé beaucoup d'exercices pour la détermination des formes optimales d'ailettes de sorte que son volume soit minime pour un taux de dissipation thermique maximal.

**Schmidt**, en 1926, propose pour la première fois les critères caractérisant la forme optimale de l'ailette dans des conditions convectives. Plus tard, **Duffin**, en 1959, justifie les critères de **Schmidt**. Ces deux auteurs ont estimé la superficie de l'ailette en négligeant la courbure du profil. La méthode LAI (Length of Arc Idealization) a été employée pour optimiser les formes d'ailettes dans le mode de convection, de rayonnement, et de convection-rayonnement pour des ailettes avec génération de la chaleur tout en considérant la conductivité thermique variable [57].

Cependant, dans son analyse, **Maday**, en 1974, propose une formulation pour optimiser l'ailette longitudinale en utilisant la méthode précédente. Il obtient un profil qui diffère de celui de **Duffin**. En 1975, Gucer et Maday ont étendu cette analyse pour les ailettes radiales. Cependant, les formes déterminées par le procédé ci-dessus sont complexes et difficiles à concevoir [57].

Par ailleurs, **Aziz** [71] a discuté dans son exposé les procédures d'optimisation de l'ailette quand la forme de cette dernière est indiquée. Il a ainsi présenté les dimensions optimales pour les ailettes longitudinales (paraboliques concaves et triangulaires), les épines (cylindrique, conique, concave et convexe) et les ailettes radiales (rectangulaire, des profils trapézoïdaux et

triangulaires). Enfin il a discuté l'effet de la perte de chaleur par l'extrémité de l'ailette, de la non uniformité du coefficient de transfert, des propriétés physiques dépendantes de la température et de la génération interne de la chaleur sur les dimensions optimales de quelques ailettes spécifiques.

Quant à l'effet de la courbure sur les dimensions optimales des ailettes, cette étude a été entreprise par **Chung et Kan** [72]. Ces auteurs ont considéré l'ailette longitudinale de profil triangulaire et parabolique concave et convexe. **Razelos et Satyaprakash** [73] ont présenté une analyse pour l'ailette longitudinale de section trapézoïdale en considérant une perte de chaleur négligeable à l'extrémité de l'ailette, ils suggèrent une corrélation pour les critères d'optimisation.

Cependant, la contribution de **Li** [74] consiste à améliorer la forme optimale de l'ailette goupillon optimisée précédemment par **Sonn et Bar-Cohen** [75]. **Chung et Kan** [72] ont déterminé les dimensions optimales des épines ayant un profil parabolique (cylindrique, conique, concave et convexe) à partir d'une formulation généralisée en utilisant une procédure numérique.

Dans son article, **Razelos** [55] a analysé le transfert thermique à partir des épines convectives. Quant à **Ulmann et Kalman** [7], ils ont résolu l'équation de l'énergie pour les ailettes radiales de différents profils (rectangulaire, hyperbolique, triangulaire et parabolique) numériquement pour calculer ensuite le taux de dissipation thermique. Ils ont obtenu la dimension optimale d'ailette pour chacun des profils pour la valeur maximale de la dissipation thermique.

La méthodologie d'analyse et d'optimisation thermique des ailettes longitudinales a été discutée par **Kundu et Das** [57]. En effet, la technique adoptée à ce sujet est généralisée car elle présente une formulation commune, pour les trois types principaux d'ailettes, à savoir l'ailette longitudinale, épine et l'ailette annulaire. Ils considèrent une variation linéaire du coefficient de transfert thermique le long de l'ailette. En utilisant la série d'extension de Frobenius, l'équation généralisée obtenue a été résolue analytiquement et une expression simple a été prévue pour la distribution de la température.

**Bouaziz** [34] a établi une comparaison entre les profils rectangulaire, triangulaire et parabolique convexe en les considérant de même dimension, longueur  $L$  et épaisseur à la base  $\delta_0$ , à chaque étape de calcul. La classification des rendements est conforme à celle des ouvrages classiques, mais des différences sont observées :

- Les courbes sont plus rapprochées les unes des autres :
- Le profil parabolique convexe se confond avec le profil triangulaire pour  $\xi \leq 0,2$  (paramètre de l'ailette) et au-delà de cette valeur avec le profil rectangulaire ;

$$\xi = L^{1,5} \left( \frac{h}{k L \delta_0} \right)^{0,5} \quad (1.11)$$

- Le profil triangulaire est plus performant que les autres. La supériorité de ce profil est mise en évidence par plusieurs auteurs. **Mikk** [76] déduit ce résultat dans une approche de minimisation de masse des ailettes.

Bien que les ailettes longitudinales à profil uniforme soient les plus utilisées en raison des avantages de fabrication, celles à profil variable sont aussi d'un grand intérêt pratique, étant donné la minimisation du poids de matière utilisée.

**M.Martin** [69] a établi une comparaison des performances dynamiques et thermiques de l'extension de la surface d'échange réalisée au moyen des trois types d'ailettes. La configuration étudiée peut simuler le circuit de réchauffage de l'air dans l'espace annulaire d'un récupérateur de fumées. Cette comparaison montre que l'adjonction d'ailettes permet de diminuer la résistance au transfert d'un facteur supérieur au rapport des surfaces d'échange. L'augmentation correspondante de l'échange thermique nécessite cependant une puissance de pompage au moins sept fois plus grande.

Par ailleurs, La configuration des ailettes rectangulaires soudées réalise le meilleur compromis entre l'accroissement du transfert et celui des pertes de charge. Cette étude montre le rôle thermique de l'emplacement de la zone ailetée dans le récupérateur. Ainsi, il est recommandé :

- d'assurer un bon contact thermique entre l'ailette et sa base ;
- d'implanter les ailettes à l'extrémité aval du récupérateur ;
- de répartir celles-ci en plusieurs éléments d'une douzaine de rangées chacun, et de séparer ces derniers par des zones de surface lisse dont la longueur est de l'ordre de deux fois celle de chaque élément aileté.

Dans ces conditions, le gain de transfert est sensiblement égal à l'accroissement relatif de la surface d'échange. Cette étude montre que l'amélioration du rendement du récupérateur passe également par une réduction de la résistance thermique de la face exposée à l'écoulement des fumées.

Des études ont été entreprises sur le refroidissement électronique dans les années 80, y compris des validations expérimentales des conceptions optimales, ont été étudiées par **Phillips** en 1987, et **Knight et al** en 1991. Des examens plus étendus ont été conduits par **Incropera** en 1988 et **Peterson et Ortega** en 1990. L'optimisation des ailettes bidimensionnelles plates a été traitée également par **Bar-Cohen et Jelinek** en 1985. **Tuckerman et Pease** en 1981, **Tuckerman** en 1984, **Knight et al** en 1991. **Bejan et Morega**, en 1993, ont conclu que la géométrie de l'ailette (épaisseur et espacement dans le canal) peut être choisie d'une manière qui permet de réduire au minimum la résistance thermique entre la surface de l'ailette et l'écoulement forcé à travers cette dernière [77].

Parmi les ailettes annulaires, le profil hyperbolique est peut-être la configuration la plus importante dans la conception des tubes ronds ailetés pour des dispositifs d'échange thermique.

D'un point de vue optimisation, l'ailette annulaire au profil hyperbolique s'avère être une première forme qui peut être fixée aux tubes ronds parce que cette forme ressemble à l'ailette annulaire optimale découverte à l'origine par **Schmidt**.

### I.3.5 Nature du matériau

Les recherches actuelles s'intéressent à l'utilisation des tubes de polymère pour des faisceaux de tubes d'échangeurs de chaleur. Cette considération trouve son intérêt pour plusieurs applications où la corrosion, l'habillage minéral et/ou le poids sont importants. Le défi à relever est de surmonter la basse conductivité thermique des polymères qui peut être relevé en utilisant beaucoup de tubes de faible diamètre et à parois minces de polymère et cette direction est investie par l'industrie.

**Zhihua Li et al** [78] ont proposé l'utilisation de tubes de forme unique en utilisant des matériaux polymères. Les tubes formés sont améliorés en maintenant le passage d'écoulement intérieur circulaire. La distribution de la température le long de la surface externe des tubes formés est non-uniforme. Un traitement spécial est exigé pour prévoir les taux de transfert de chaleur par convection. Les corrélations développées pour le nombre de Nusselt moyen en convection forcée, pour ces tubes non-circulaires, ne peuvent être employées directement pour déterminer le taux de transfert thermique. Dans cet article, le taux de transfert thermique des tubes formés est caractérisé en considérant les tubes comme des tubes circulaires auxquels sont fixées des ailettes longitudinales. La solution numérique du bilan énergétique sur l'ailette, fournit la distribution de température de surface et l'efficacité du tube pour déterminer la résistance convective de l'extérieur. L'approche est d'illustrée pour des formes d'ailettes améliorées de profil lenticulaire et ovale. La présentation accentue les effets de la géométrie et du nombre de Biot sur l'efficacité du tube et sur l'amélioration du transfert thermique. Le transfert de chaleur par convection est augmenté pour le tube de forme ovale pour des valeurs de Reynolds comprises entre 2000 et 20000 pour un nombre de Biot inférieur à 0,3. Pour les matériaux polymères, le nombre de Biot dans la plupart des applications devra être pris supérieur à 0,3.

L'utilisation des ailettes perméables est très avantageuse quand les taux élevés de transfert thermique sont nécessaires. Ceci est le cas dans les composants électroniques de densité de puissance élevée. Pour cette considération, **Bassam** [79] a étudié numériquement le problème de la convection naturelle laminaire en considérant un cylindre horizontal où l'on place sur sa surface externe des ailettes équidistantes de conductivité thermique élevée. L'effet de plusieurs combinaisons du nombre et de la taille des ailettes sur le nombre de Nusselt moyen a été étudié sur un éventail du nombre de Rayleigh. Cet auteur a constaté que les ailettes perméables fournissent des taux beaucoup plus élevés de transfert thermique comparé aux ailettes pleines, pour une configuration semblable. Le rapport du nombre de Nusselt entre le cas perméable et plein augment avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, du nombre d'ailettes utilisées et de la taille de l'ailette. Ce rapport est supérieur à 8,4 pour un nombre de Rayleigh de  $10^6$ , une longueur adimensionnelle d'ailette de 2,0 et un nombre d'ailettes équidistantes égal à 11.

### I.3.6 Régime instationnaire

Il y a un certain nombre de travaux sur le comportement des ailettes en régime instationnaire. La plupart d'entre eux sont des résultats analytiques. Généralement, les études analytiques tiennent compte des hypothèses suivantes :

- Transfert thermique unidimensionnel ;
- Coefficient de transfert thermique uniforme ;
- Extrémité de l'ailette isolée ;
- Propriétés du matériau de l'ailette constantes.

**Chapman**, en 1959, a rapporté un travail analytique sur le rendement de l'ailette en régime transitoire mais il n'a pas donné de résultat, par contre des recommandations, pour des travaux futurs, ont été faites. **Yang**, en 1972, a développé des expressions analytiques pour caractériser le transfert thermique instationnaire et pour la détermination du rendement moyen pour des ailettes longitudinales en considérant des conditions de base transitoires. **Aziz**, en 1975, a développé la même analyse pour des ailettes annulaires.

**Suryanarayana**, en 1975-1976, a étudié le transfert de chaleur en régime instationnaire à travers les ailettes longitudinales.

**Young et al**, en 1982, ont développé une technique analytique pour prévoir les performances des ailettes, **Eslinger et Chung**, 1979, ont présenté une solution numérique qui se base sur les éléments finis, pour le transfert thermique à travers des ailettes longitudinales convectives et rayonnantes en considérant une température de base variable en fonction du temps. **Mujahid** a étudié analytiquement et expérimentalement, en 1987, le cas où l'on considère le flux de la chaleur à la base de l'ailette ainsi que la température de l'environnement variable en fonction du temps. **Didenko et Lipovetskaya**, en 1988, ont présenté une technique pour évaluer le transfert thermique conjugué à partir d'une ailette de section transversale et de taille arbitraire avec une température de base qui varie avec du temps.

Des expériences ont été entreprises par **Mutlu et Al-Shemmeri** [80] pour une rangée d'ailettes longitudinales refroidies et enveloppées selon le mode de convection forcée. Les paramètres changés pendant l'expérience sont le débit d'air et la puissance fournie. Les valeurs moyennes d'équilibre, le rendement et le nombre de Nusselt moyen, ont été calculées au cours du temps et comparées. Expérimentalement, il s'est avéré que le rendement moyen de l'ailette en régime instationnaire est relativement inférieur aux valeurs correspondantes pour le régime stationnaire avec une différence qui augmente avec l'augmentation de la puissance fournie et diminue avec l'augmentation du débit massique d'air. Ces travaux vérifient expérimentalement les études analytiques précédemment développées.

La plupart des résultats des travaux analytiques disponibles dans la littérature sont, cependant, inapplicables pour un large éventail de problèmes de transfert thermique, car le coefficient de transfert thermique est considéré constant.

Dans l'étude [80], le coefficient de transfert thermique et la température changent en fonction du temps. Une conséquence pratique importante de ce travail expérimental est l'impossibilité d'employer des données de coefficient de transfert obtenues dans des conditions stationnaires pour des calculs dans le régime instationnaire.

### I.3.7 Ailette humide

Une étude numérique a été entreprise, par **Kazeminejad et al.** [81], pour analyser les caractéristiques du transfert thermique en considérant la convection et la convection-conduction à travers une ailette rectangulaire verticale au-dessus de laquelle on fait circuler de l'air humide. L'effet des divers paramètres sur les caractéristiques du transfert thermique a été étudié. En général on a constaté que le flux local de la chaleur, la température et le rendement de l'ailette ont été affectés par la non uniformité du coefficient de transfert thermique et du paramètre notée CCP et exprimé par l'équation (1.12). Une réduction significative du rendement de l'ailette se produit quand la quantité de l'humidification est augmentée.

$$CCP = \left( \frac{k_f L}{k \delta_0} \right) Re^{1/2} \quad (1.12)$$

Où,  $k_f$ : Conductivité thermique du fluide.

De leur côté **Kundu et Das** [82] ont développé une méthode analytique basée sur l'expansion de série entière de Frobenius pour l'optimisation des ailettes entièrement humides. Des ailettes de différentes géométries, à savoir, longitudinal, annulaire et sous forme d'épine ayant des profils trapézoïdaux et triangulaires ont été considérés. Le rendement des ailettes humides dépend de la température de la base de l'ailette et de l'humidité relative de l'air ambiant.

Un critère généralisé a été déterminé pour l'optimisation des ailettes humides ayant les géométries citées ci-dessus. Une méthode pour construire des courbes de conception pour les ailettes optimales a été également proposée.

**Moore et al.** [83] ont examiné le refroidissement par un liquide d'une rangée d'ailettes en forme de goupillon. Trois tailles d'ailettes ont été étudiées expérimentalement, pour rapports de diamètre s'étendant de 0,5 à 1,1. Les rangées ont été exposées à un flux de chaleur uniforme de 0,02 à 0,26 W/mm<sup>2</sup> et refroidies avec de l'eau en considérant des nombres de Reynolds de 200 à 10000. Le transfert de chaleur, à travers l'extrémité de la goupille, été trouvé compris entre 0 et 25%. Les taux de transfert thermique moyens et la chute de pression à travers la rangée d'ailettes ont été déterminés et des corrélations empiriques ont été proposées.

**Abram Dorfman** [84] a étudié le transfert thermique instationnaire entre une plaque chaude semi-infinie et un film liquide mince circulant sur sa surface. Pour étudier le transfert thermique instationnaire, des solutions décrivant les champs de température des parties sèches et humides de la plaque sont conjuguées.

Le processus de refroidissement est régi par un paramètre adimensionnel appelé le nombre de Leidenfrost, qui est le rapport entre le nombre de Biot et le nombre de Pecleté au carré. La température de plaque, la vitesse du film liquide ainsi que le temps au bout duquel on atteint la température de mouillage ont été calculés.

Signalons qu'une étude expérimentale concernant la performance d'une ailette rectangulaire sèche et humide a été effectuée par **Yur-Tsai Lin** [85]. L'observation visuelle du phénomène d'humidification met en évidence quatre régions, y compris l'état entièrement sec, l'état d'une gouttelette très fine, une gouttelette, et le film liquide. Les résultats expérimentaux qui ressortent de cette étude ont montré que le rendement dans les conditions d'une ailette sèche est d'environ de 15 à 25% supérieur à celui de l'ailette humide.

Par ailleurs, notons que l'effet de l'humidité relative sur le rendement de l'ailette entièrement humide est faible. Pour la surface partiellement humide, une influence considérable de l'humidité relative sur le rendement de l'ailette est produite. Ces résultats sont conformes à certaines études mais sont en désaccord avec d'autres. L'auteur a attribué la cause principale à ce désaccord à la formulation de la relation qui lie l'humidité à la température de l'ailette. Il a trouvé, de plus, que le rendement de l'ailette entièrement humide diminue sobrement avec l'augmentation de la température de la base de l'ailette. Cependant, l'effet de la température de base sur le rendement de l'ailette sèche est relativement faible.

**Korte et Jacobi** [86] ont étudié la conservation du condensât pour des échangeurs de chaleur équipés de tubes ailettés, dont les ailettes sont pleines. Une expérience dans laquelle la masse du condensât est mesurée. Le traitement des résultats, flux de chaleur et débits du condensât, a permis l'établissement d'un nouveau modèle pour prévoir la masse du condensât maintenue pour des conditions relativement restreintes.

### **I.3.8 Ailette radiative**

Généralement, les ailettes radiantes sont utilisées dans les vaisseaux spatiaux pour rejeter la chaleur produite par divers composants vers l'espace froid. Puisque la réduction de poids est importante pour ces véhicules, il est nécessaire d'obtenir exactement les taux de transfert thermique des radiateurs pour réaliser la conception optimale.

**Gallinan et Berggren**, en 1959, ont discuté les divers critères de conception des radiateurs pour le véhicule spatial. L'analyse a été le sujet de recherche d'un certain nombre d'auteurs. Cependant, une grande partie s'est limitée à l'étude des ailettes radiantes isolées.

Cependant, seulement quelques chercheurs ont considéré la conception optimale d'une rangée d'ailettes radiantes en tenant compte des interactions mutuelles ailette-ailette. **Sparrow et al.** en 1961 et **Sparrow et Eckert** en 1962 ont présenté la conception optimale des ailettes longitudinales radiatives en tenant compte des interactions ailette-ailette. **Karlekar et Chao**, en 1963, ont refait l'étude pour les ailettes trapézoïdales, **Love et Francis**, en 1979, ont représenté une analyse qui a abouti à une solution approximative pour des ailettes radiatives-convectives.

**Chung et Zhang** [87-88] ont déterminé la forme optimale et le poids minimal de l'ailette radiante. **Krishnaprakas** [89] a présenté la forme optimale de l'ailette rectangulaire longitudinale. Une optimisation thermodynamique a été discutée par **Balaji et al.** [90].

**Krishnaprakas et Narayana** [91] ont évalué l'émittance apparente d'un système comprenant des ailettes longitudinales, l'angle d'ouvert ainsi que l'interaction radiante ailette-ailette. L'équation gouvernant le problème est une équation compliquée. Cette dernière est résolue en utilisant la méthode de Gauss Jacobi orthogonal collocation GJOCM. Enfin, la masse minimale de l'ailette est déterminée.

**Sasikumar et Balaji** [92] ont analysé une rangée d'ailettes convectives-radiatives, placée verticalement en dehors d'une conduite rectangulaire horizontale. L'écoulement turbulent entièrement développé est considéré à l'intérieur de la conduite. Cette étude tient compte de la variation de la température du liquide le long de la conduite, chose ignorée dans la plupart des études précédentes. L'équation unidimensionnelle régissant la distribution de la température le long de l'ailette est résolue pour toutes les ailettes de la rangée. Le taux de transfert thermique par masse du système, le taux de génération d'entropie et la taille optimale de l'ailette sont évalués. Ces quantités sont alors corrélées comme fonctions des paramètres géométriques et de l'écoulement pour trois types de profil d'ailette. Les solutions optimales sont basées sur : le taux maximum de dissipation thermique par unité de masse du système et le taux minimum de génération d'entropie. Un procédé pour combiner ces deux optimums est également discuté afin d'obtenir un optimum appelé "holistique".

**Rizos et Razelos** [93] ont déterminé, dans leur étude, les dimensions optimales des ailettes rectangulaires et triangulaires longitudinales radiatives. Les hypothèses de base sont la conduction unidirectionnelle de la chaleur et le rayonnement extérieur. Les équations sont résolues numériquement afin de suivre le procédé de minimisation. Les dimensions optimales de l'ailette, l'épaisseur et la taille, sont présentées sous la forme adimensionnelle généralisée, des corrélations sont fournies afin d'aider les concepteurs de systèmes thermiques des vaisseaux spatiaux.

Les résultats sont analysés et exprimés sous forme de corrélations explicites. Plusieurs diagrammes, également inclus, donnent les caractéristiques opérationnelles du mécanisme de rejet de la chaleur. D'ailleurs, une particulière attention est donnée à l'analyse d'erreur des méthodes numériques employées, puisque l'exactitude et la fiabilité des algorithmes utilisés pour la solution sont importantes pour le calcul de la dissipation thermique à la base de l'ailette ainsi que pour l'optimisation.

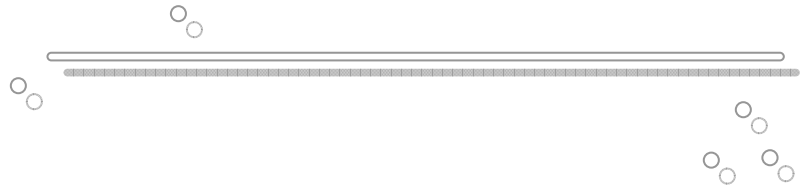
#### **I.4 Conclusion**

L'un des secteurs d'intérêt courant de l'étude des ailettes est la prévision de leurs performances pour des conditions thermiques variables. De telles conditions sont souvent produites dans les applications telles que les capteurs solaires, les composants électroniques, les moteurs à combustion interne, les outils de coupe etc.

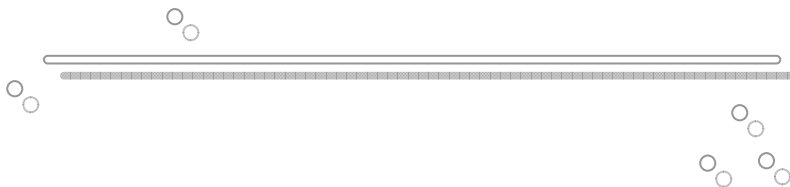
Ce premier chapitre nous a permis de classer les différents types d'ailettes et ce, suivant la géométrie considérée et selon le mode d'évacuation de la chaleur, pour ensuite représenter pour chaque classe d'ailette sa propre expression du rendement. Il nous a permis, de plus, d'examiner les études littérales et de calculer les écarts qu'engendrent les différentes hypothèses posées par les auteurs dans leurs études de surface ailetées

Bien que conjugué des problèmes de transfert thermique ont été beaucoup traités dans la littérature, seulement quelques articles sur les ailettes ont pris en compte l'association entre la convection et la conduction. Il semblerait que l'étude du transfert thermique dans les ailettes avec des paramètres thermiques variables est indispensable.

Nous exposons dans le chapitre suivant le problème de l'ailette annulaire en tenant en compte la non uniformité du coefficient de transfert de chaleur  $h$ , la conductivité thermique  $k$  est considérée aussi non-uniforme. Cette étude considère une ailette annulaire de profil rectangulaire.



*CHAPITRE II :*  
*FORMULATION ET RESOLUTION*  
*MATHEMATIQUE DU PROBLEME*



# FORMULATION ET RESOLUTION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

## II.1 Introduction

La synthèse des études antérieures a révélé que le coefficient d'échange thermique est non uniforme le long de l'ailette et que la dépendance algébrique entre la conductivité et la température est exprimée selon un modèle linéaire.

Dans ce chapitre nous analysons le transfert de chaleur à travers une ailette annulaire de section droite rectangulaire en admettant une non uniformité du coefficient de transfert et une variation linéaire de la conductivité thermique.

## II.2 Hypothèses du problème

Nous schématisons à travers la figure (II.1) une ailette, annulaire, de section droite rectangulaire, d'épaisseur  $\delta_0$  et de longueur  $L$ , attachée à un tube de rayon  $r_1$ . Le bilan énergétique pris sur un élément de volume de celle-ci est exprimé en tenant compte des considérations ci-dessous :

- Le transfert de chaleur est stationnaire ;
- La conduction de chaleur est unidirectionnelle ;
- La température du fluide environnant  $T_\infty$ , est constante ;
- Les transferts par l'extrémité de l'ailette sont négligeables,
- Le coefficient de transfert convectif ainsi que la conductivité thermique sont pris non uniformes.

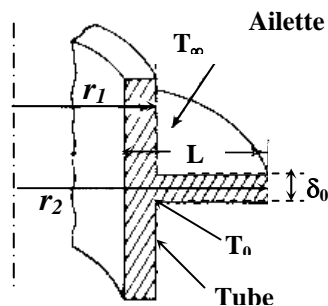


Figure II.1 : Ailette annulaire de profil rectangulaire

Dans ce qui suit nous commençons, par l'établissement de l'équation de l'énergie d'une ailette annulaire en fonction de son profil géométrique, notons que celle-ci aide à effectuer le classement de l'ailette rectangulaire parmi les autres formes géométriques.

### II.2.1 Mise en équations

Afin d'établir l'équation générale qui régie l'écoulement de chaleur à travers une ailette annulaire de section droite variable, en régime stationnaire et en considérant le coefficient de convection et la conductivité thermique du matériau variables, nous effectuons un bilan énergétique sur le volume élémentaire de la figure II.2 :

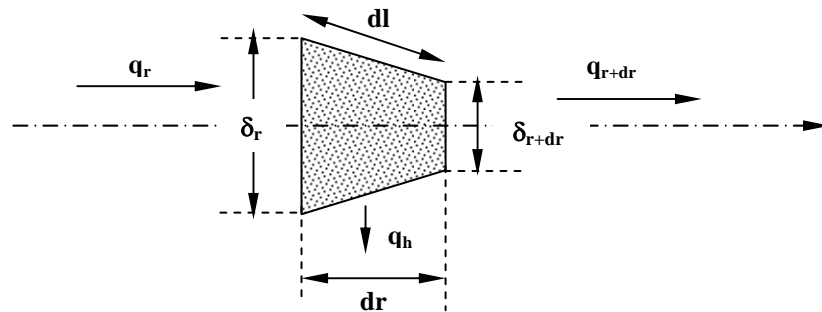
$$q(r) = q(r+dr) + q_h \quad (\text{II.1})$$

Notons que :

- $q_r$  et  $q_{r+dr}$  : Flux de chaleur conductif entrant et sortant d'un volume élémentaire de longueur  $dr$  de l'ailette ;
- $q_h$  : Flux de chaleur transféré par convection pour toute l'étendue de la surface latérale  $S$ .

En vertu des lois de transfert de chaleur, l'expression (II.1) s'écrit comme suit:

$$\left( -k(T)A \frac{dT}{dr} \right)_r = \left( -k(T)A \frac{dT}{dr} \right)_{r+dr} + h(T)S(T-T_\infty) \quad (\text{II.2})$$



**Figure II.2 :** Élément de volume pris au sein d'une ailette annulaire de section droite variable

Où :

$$A(r) = 2 \pi r \delta(r) \quad (\text{II.2.1})$$

$$dS = 2 [2 \pi r dl] \quad (\text{II.2.2})$$

$$dl = dr \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{d\delta}{dr} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.2.3})$$

Avec :

- $k(T)$  : Coefficient de conductivité thermique variant en fonction de la température ;
- $A(r)$  : Section droite de l'ailette à la position radiale  $r$  ;
- $T(r)$  : Température locale de l'ailette ;
- $r$  : Direction radiale de l'ailette ;
- $h(T)$  : Coefficient de transfert de chaleur variant en fonction de la température ;
- $S(r)$  : Surface latérale de l'ailette jusqu'à la position  $r$  ;
- $T_\infty$  : Température du fluide environnant ;
- $\delta(r)$  : Epaisseur locale de l'ailette ;
- $dl$  : Longueur élémentaire de l'ailette.

En rapportant les expressions (II.2.1), (II.2.2) et (II.2.3) dans l'équation (II.2) nous obtenons l'expression formelle suivante :

$$\frac{(r+dr) \delta(r+dr) \left( \frac{dT}{dr} \right)_{r+dr} - r \delta \left( \frac{dT}{dr} \right)_r}{dr} = \frac{2 h(T)}{k(T)} r \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{d\delta}{dr} \right)^2 + 1} (T - T_\infty) \quad (\text{II.3})$$

En substituant  $T - T_\infty$  par  $\Delta T$  l'expression (II.3) devient :

$$\frac{d}{dr} \left( r \delta \frac{d\Delta T}{dr} \right)_r = \frac{2 h(T)}{k(T)} r \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{d\delta}{dr} \right)^2 + 1} \Delta T \quad (\text{II.4})$$

Afin de généraliser notre étude et s'affranchir des variables de références, nous introduisons les variables caractéristiques suivantes pour normaliser l'expression (II.4) :

$$\phi = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}, \quad x = \frac{r}{r_1}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad \bar{R} = \frac{r_2}{r_1}$$

Posons :

$$m_f(\phi) = L \sqrt{\frac{2 h(\phi)}{k(\phi) \delta_0}}, \quad L = (r_2 - r_1)$$

Où :

- $\Delta T$  : Ecart de température entre la surface de l'ailette et le milieu environnant ;
- $\phi$  : Température adimensionnelle ;
- $\Delta T_0$  : Différence de température entre la base de l'ailette et le fluide environnant ;
- $x$  : Rayon adimensionnel ;
- $\bar{\delta}$  : Épaisseur réduite de l'ailette ;
- $\bar{R}$  : Rayon réduit de l'ailette ;
- $m_f(\phi)$  : Paramètre caractéristique de l'ailette ;

- $k(\phi)$  : Coefficient de conductivité thermique exprimé en fonction de la température réduite  $\phi$  ;  
 $h(\phi)$  : Coefficient de transfert de chaleur convectif exprimé en fonction de la température réduite  $\phi$  ;  
 $L$  : Longueur de l'ailette annulaire.

L'équation (II.4) se transforme comme suit :

$$\frac{d}{dx} \left( x \bar{\delta} \frac{d\phi}{dx} \right) - \left[ \frac{m_f^2(\phi)}{(\bar{R}-1)^2} x \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{d\bar{\delta}}{dx} \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + 1} \right] \phi = 0 \quad (\text{II.5})$$

En définitive l'expression (II.5) se simplifie à :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{dx} \right) \frac{d\phi}{dx} - \left[ \frac{m_f^2(\phi)}{(\bar{R}-1)^2} \frac{1}{\bar{\delta}} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{d\bar{\delta}}{dx} \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + 1} \right] \phi = 0 \quad (\text{II.6})$$

En fait, la variation de l'épaisseur réduite le long de l'ailette est fonction des constantes de forme, notées  $n$  et  $R_a$ , et peut être formulée par une expression généralisée [7] :

$$\bar{\delta} = \left( \frac{R_a - x}{R_a - 1} \right)^n \quad (\text{II.7})$$

Le tableau (II.1) répertorie les constantes de forme  $n$  et  $R_a$ , selon le profil choisi, pour l'ailette annulaire :

**Tableau II.1** : Valeurs des constantes de formes pour diverses formes d'ailettes annulaires.

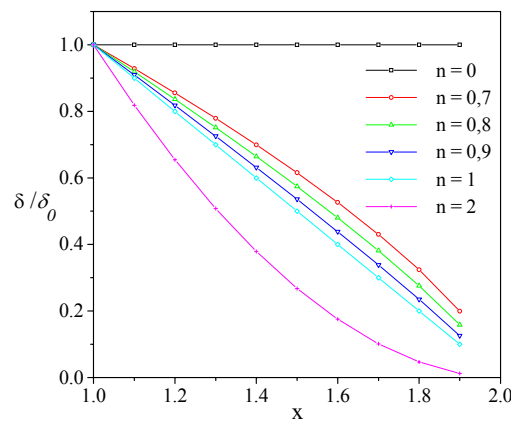
Profil	$n$	$R_a$
Rectangulaire	0	$\bar{R}$
Hyperbolique	-1	0
Autres	$n$	$\bar{R}$

Ainsi l'équation de l'énergie réduite pour l'ailette annulaire de profil quelconque sera donnée par l'expression ci-après :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{R_a - x} \right) \frac{d\phi}{dx} - \frac{m_f^2(\phi)}{(\bar{R}-1)^2} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{n}{R_a - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{R_a - 1}{R_a - x} \right)^{2n}} \phi = 0 \quad (\text{II.8})$$

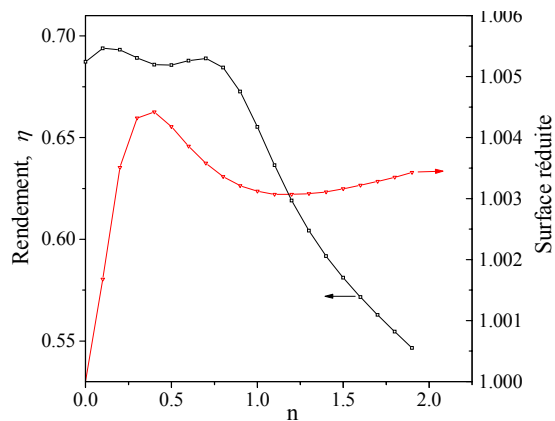
Dans ce qui suit, nous effectuerons une étude détaillée sur les ailettes annulaires afin de déterminer la forme la plus performante ; notons que cette dernière est fonction de deux caractéristiques déterminantes, à savoir, le rendement et la surface d'échange. Pour se faire nous commençons par présenter géométriquement l'évolution de la forme de la section droite verticale suivant la direction axiale. En effet, chaque forme géométrique de l'ailette annulaire est liée à une valeur spécifique de la constante de forme  $n$  et ceci est réalisé grâce à un programme établi préalablement et qui sera exploité ultérieurement.

Ainsi, la figure (II.3) illustre l'évolution de l'épaisseur réduite de l'ailette, notée  $(\delta/\delta_0)$ , en fonction du rayon réduit  $x$  pour les différentes formes de section droite étudiées (Equation II.7). D'après cette figure, toutes les formes géométriques choisies (hormis  $n = 0$ ) se traduisent par la diminution de leur épaisseur lorsque  $n$  augmente.



**Figure II.3 :** Evolution de l'épaisseur réduite en fonction de rayon pour un  $\bar{R} = 2$

Sur la figure (II.4) nous représentons l'évolution de deux caractéristiques déterminantes dans le choix d'une ailette annulaire, valeurs déterminées par le biais d'un programme préliminaire qui sera exploité ultérieurement ; il s'agit respectivement du rendement et de la section d'échange en fonction du profil de l'ailette (noté  $n$ ). En effet, nous constatons, pour un rayon réduit  $\bar{R}$  et une caractéristique d'ailette  $m_0$  égaux respectivement à 2 et 1, que l'ailette rectangulaire est l'une des formes géométriques les plus performantes d'un point de vue rendement. En revanche sa surface latérale est la plus faible.



**Figure II.4 :** Evolution du rendement et de la surface de l'ailette en fonction de la constante de forme  $n$  pour un  $\bar{R} = 2$ ,  $m_0 = 1$  et  $\delta_0 = 1$  mm.

## II.2.2 Equation de l'énergie de l'ailette annulaire rectangulaire

Compte tenu de la comparaison faite, à travers la figure (II.4) entre les différentes sections droites, il en ressort que le profil rectangulaire est l'une des formes les plus efficace. L'équation de l'énergie associée à ce profil ( $n = 0, R_a = \bar{R}$ ) s'écrit, en injectant les valeurs de  $n$  et  $R_a$  dans l'équation (II.8), comme suit :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} - \frac{m_f^2(\phi)}{(\bar{R}-1)^2} \phi = 0 \quad (II.9)$$

Où :

$$m_f(\phi) = L \sqrt{\frac{2 h(\phi)}{k(\phi) \delta_0}} \quad (II.10)$$

Dans le groupement adimensionnel établi en (II.10), nous avons considéré une non uniformité des propriétés thermophysiques  $h$  et  $k$ . En effet, leurs lois de variation s'expriment selon les modèles cités ci-dessous :

$$h(\phi) = h_0 \Delta T_0^v \phi^v \quad (II.11)$$

$$k(\phi) = k_0 [1 + \lambda \phi] \quad (II.12)$$

Dans l'expression (II.11) l'exposant, noté  $v$ , détermine le régime d'écoulement, tant dis que la valeur du coefficient  $\lambda$  dans l'expression (II.12) détermine la nature du métal.

De ce fait, l'expression de  $m_f(\phi)$  se présente alors comme suit :

$$m_f(\phi) = L \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{k_0 \delta_0} \frac{\Delta T_0^v \phi^v}{1 + \lambda \phi}} \quad (II.10.1)$$

Posons :

$$m_0 = L \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{k_0 \delta_0}} \quad (II.10.2)$$

Rapportons les expressions ainsi établies (II.10.1) et (II.10.2) dans l'équation (II.9), ce qui donne :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} - \left[ \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^v \phi^v}{1 + \lambda \phi} \right] \phi = 0 \quad (II.13)$$

La résolution de cette équation (II.13) nécessite deux conditions aux limites.

### II.2.3 Conditions aux limites

D'après les données tant théoriques que géométriques, le problème est à une dimension relevant de la seule variable  $x$ . Il s'agit donc d'une ailette rectangulaire, son étendue physique est confinée entre ses deux extrémités :

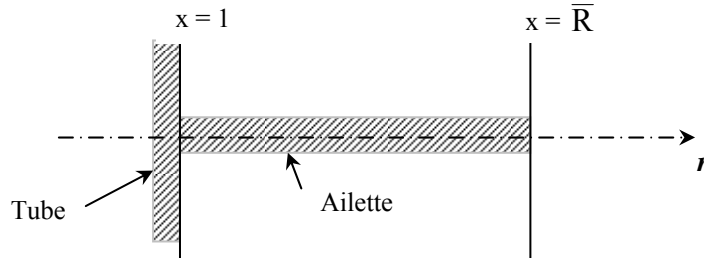


Figure II.5.1 : Etendue physique (coupe longitudinale).

Au niveau de la base de l'ailette, nous supposons un contact parfait entre le tube et l'ailette, la surface frontière est caractérisée alors par une homogénéité du champ thermique. Par conséquent, elle vérifie la condition de Dirichlet qui s'écrit, en variables réduites, comme suit :

$$x = 1; \quad \phi(1) = 1 \quad (\text{II.13.1})$$

Par contre, l'extrémité libre est caractérisée par une faible surface d'échange que nous quantifions par un flux thermique négligeable. La condition de Newman homogène qui s'écrit sous forme adimensionnelle comme suit :

$$x = \bar{R}; \quad \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\bar{R}} = 0 \quad (\text{II.13.2})$$

Le problème ainsi posé, correspond à une équation différentielle du second ordre non linéaire qui ne peut être intégrée qu'en ayant recours à une procédure numérique.

### II.3 Résolution numérique de l'équation de l'énergie

L'étendue physique de l'ailette étant rectiligne, l'application de la méthode des différences finies est certainement la plus commode dans ce cas. Nous avons mené les calculs avec un maillage uniforme.

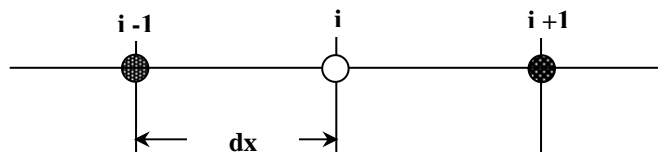


Figure II.5.2 : Schémas de discrétisation d'un nœud intérieur.

En effet, moyennant les schémas régressif et progressif qui découlent des développements de Taylor, nous exprimons la dérivée première et seconde apparaissant dans l'équation (II.13) :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (\text{II.13.3})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (\text{II.13.4})$$

Notons que le troisième terme de l'équation (II.13) représente le terme source, nous reprenons l'écriture de la partie renfermant la température réduite séparément :

$$S(\phi) = -\frac{\Delta T_0^v \phi^{v+1}}{1 + \lambda \phi} \quad (\text{II.13.5})$$

En effet, en vue d'une résolution complète de (II.13) nous procédons par une linéarisation de l'expression ci-dessus et ceci en utilisant la méthode de la tangente, qui nous confère une forme linéaire, qui s'écrit comme suit :

$$S(\phi) = S^* + \left(\frac{dS}{d\phi}\right)^* (\phi_p - \phi_p^*) \quad (\text{II.13.6})$$

Où :

$S^*$  et  $\phi_p^*$  indiquent les valeurs de  $S(\phi)$  et  $\phi_p$  à l'itération précédente.

En définitive, nous obtenons une forme discrétisée qui s'écrit sous la forme suivante :

$$b_i \phi_i = a_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (\text{II.14})$$

avec :

$$a_i = \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{x} \quad (\text{II.14.1})$$

$$b_i = \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{m_0^2}{(R-1)^2} \left(\frac{dS}{d\phi}\right)^* \quad (\text{II.14.2})$$

$$c_i = \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{x} \quad (\text{II.14.3})$$

$$d_i = S^* + \frac{m_0^2}{(R-1)^2} \left(\frac{dS}{d\phi}\right)^* \phi_p^* \quad (\text{II.14.4})$$

### II.3.1 Champ thermique réduit d'une ailette rectangulaire

La résolution de l'expression algébrique ainsi établie peut se faire par l'algorithme de Tomas, par balayage ligne par ligne. Son application sur le premier nœud donne l'expression suivante :

$$\phi_1 = \frac{a_1}{b_1} \phi_2 + \frac{c_1 \phi_0 + d_1}{b_1} \quad (\text{II.14.5})$$

En posant :

$$P_1 = \frac{a_1}{b_1} \quad (\text{II.14.6})$$

$$G_1 = \frac{c_1 \phi_0 + d_1}{b_1} \quad (\text{II.14.7})$$

Nous aboutissons à la forme suivante :

$$\phi_1 = P_1 \phi_2 + G_1 \quad (\text{II.14.8})$$

Par récurrence, nous aboutissons aux expressions généralisées suivantes :

$$P_i = \frac{a_i}{b_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{II.14.9})$$

$$G_i = \frac{c_i (G_{i-1} + d_i)}{b_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{II.14.10})$$

En substituant les expressions généralisées ci-dessus, nous aboutissons à l'expression du champ de température réduite pour tous les nœuds recouvrant le domaine d'étude :

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + G_i \quad (\text{II.15})$$

Une fois le champ thermique établi, nous envisageons le calcul du rendement de l'ailette ainsi que le flux thermique. La procédure de calcul est illustrée à travers le paragraphe (II.3.4).

### II.3.2 Rendement de l'ailette

L'expression du rendement est définie par le rapport entre le flux de chaleur transféré par l'ailette à celui transféré en considérant toute la surface de cette dernière maintenue à la température de la base :

$$\eta = \frac{q_{cd}(r = r_1)}{q_{cv}} \quad (\text{II.16})$$

où:

$\eta$  : Représente le rendement thermique de l'ailette;

$q_{cd}$  : Flux de chaleur quittant la base de l'ailette par conduction;

$q_{cv}$  : Flux de chaleur dissipé par convection quand toute la surface de l'ailette est portée à la température de la base.

Notons que les expressions des flux, indiquées dans l'équation (II.16), s'expriment de la manière suivante :

$$q_{cd} = -2\pi k(\phi) \delta_0 \Delta T_0 \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=1} \quad (\text{II.16.1})$$

$$q_{cv} = h(\phi) S \Delta T_0 \quad (\text{II.16.2})$$

avec :

$$S = 2 \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr = 2\pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (\text{II.16.3})$$

En vertu des relations établies ci-dessus, l'expression du rendement thermique d'une ailette rectangulaire s'écrit comme suit :

$$\eta = - \frac{2(\bar{R}-1)^2 \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=1}}{(\bar{R}^2-1) m_f^2} \quad (\text{II.17})$$

### II.3.3 Flux de chaleur adimensionnel ou Taux de dissipation thermique

Le flux de chaleur adimensionnel est défini par le rapport du flux de chaleur conductif  $q$  au flux maximal convectif donné par la quantité  $(2h\pi r_1^2 \Delta T_0)$  rapporté à la masse réduite de l'ailette  $\bar{M}$ . Par conséquent, le flux adimensionnel s'écrit comme suit :

$$\frac{\bar{q}}{\bar{M}} = - \frac{2}{(\bar{R}^2-1) \pi \text{Bi}(\phi)} \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=1} \quad (\text{II.18})$$

avec :

$$\text{Bi}(\phi) = \left( \frac{2h(\phi) r_1}{k(\phi)} \right) = \text{Bi}_0 \frac{\Delta T_0 \phi^v}{1 + \lambda \phi} \quad (\text{II.19.1})$$

où :

$\text{Bi}_0$  : Nombre de Biot (à  $T = T_0$ ) et est défini par  $(2h_0 r_1 / k_0)$  ;

$\bar{M}$  : Masse réduite de l'ailette définie par l'expression suivante ;

$$\bar{M} = \frac{M}{\rho \cdot r_1^3} = \frac{\pi \delta_0 (\bar{R}-1)}{r_1} \quad (\text{II.19.2})$$

$\rho$  : Masse volumique du matériau de l'ailette.

### II.3.4 Algorithme calculant le champ thermique, le rendement et le flux de chaleur

Dans ce qui suit nous présentons l'algorithme général qui définit le calcul respectif du champ thermique, du rendement et notamment du flux de chaleur. En effet, nous commençons par définir l'étendue physique du domaine en répartissant un nombre de nœuds noté  $Q$ . Le calcul est initialisé par un choix de l'épaisseur de l'ailette, notée  $\delta_0$ , ainsi que de la valeur du rayon  $r_1$  du tube. Le calcul est poursuivi, pour la détermination des valeurs de rendement et notamment de flux de chaleur, pour différentes valeurs de  $m_0$  et de  $\bar{R}$ .

#### a) Critère de convergence

Lorsque les itérations ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs numériques de la température réduite, nous pouvons dire que le processus itératif a atteint sa convergence. Néanmoins, à la fin de chaque itération nous devons appliquer un test de convergence appelé aussi critère de convergence.

Ainsi la convergence sera constatée grâce à la valeur calculée à partir de l'équation suivante :

$$|\phi_i^{j+1} - \phi_i^j| \leq 10^{-4}$$

où  $\phi_i^{j+1}$  et  $\phi_i^j$  sont les températures adimensionnelles au nœud  $i$  pour l'itération  $j+1$  et  $j$ , respectivement.

#### b) Maillage optimal

Afin de choisir le maillage optimal, en terme de nombre de nœuds, nous représentons sur la figure (II.6) l'évolution du rendement  $\eta$  en fonctions du nombre de nœud  $Q$ , pour une ailette annulaire de section droite rectangulaire en tenant compte des données suivantes à savoir :  $m_0 = 0,5$  ;  $\bar{R} = 2$  ;  $\delta_0/r_1 = 0,01$ .

Notons que quatre configurations physiques sont envisagées à l'étude :

- Uniformité de  $h$  et de  $k$  :  $\nu = 0$  et  $\lambda = 0$  ;
- Non-uniformité de  $h$  avec  $k$  uniforme :  $\nu = 0,25$  et  $\lambda = 0$  ;
- Uniformité de  $h$  et non uniformité de  $k$  :  $\nu = 0$  et  $\lambda = 0,1$  ;
- Non-uniformité de  $h$  et de  $k$  :  $\nu = 0,25$  et  $\lambda = 0,1$  ;

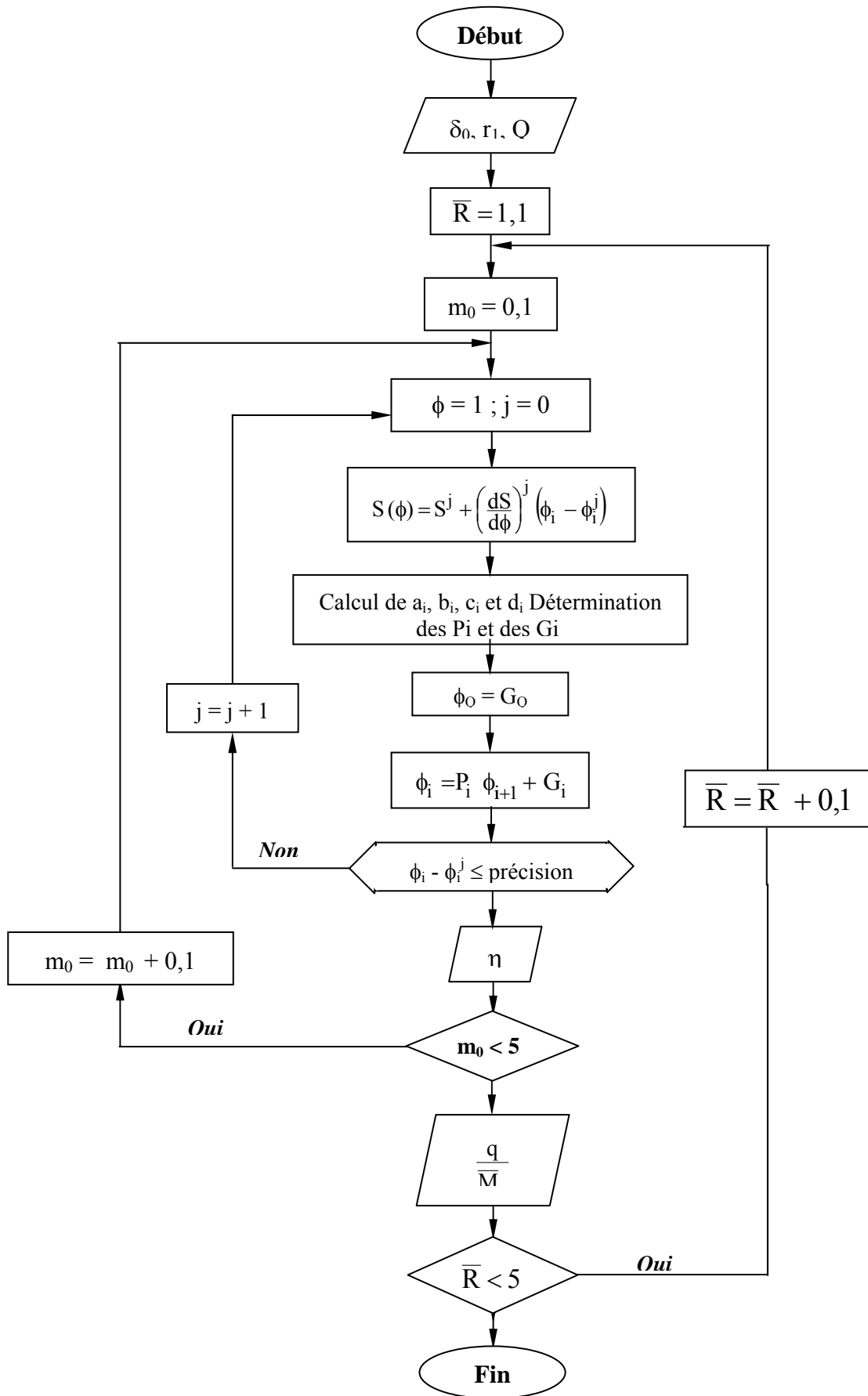
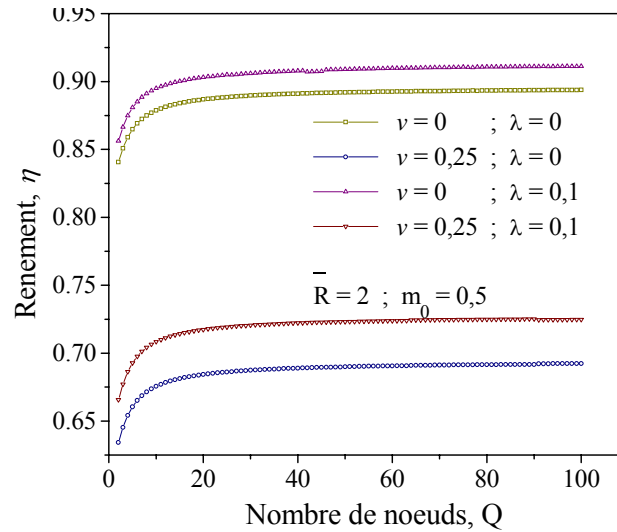


Figure II.5.3: Organigramme de calcul.



**Figure II.6** : Unicité de la solution.

Nous ressortons de ces courbes une valeur optimale de nombre de nœuds égale à 50, au-delà de laquelle le rendement demeure constant quelle que soit la configuration physique. Ainsi, nous recommandons ce nombre de nœuds car tenter de prendre une valeur supérieure à celle-ci entraînerait l'augmentation du temps de calcul et l'encombrement de la mémoire de travail.

### c) Validation du programme numérique

Nous avons résolu un problème général caractérisé par des propriétés non uniformes, malheureusement, la solution numérique ainsi trouvée se prête mal à une éventuelle validation car, les travaux antérieurs que la littérature propose n'abordent pas ce cas. Cependant, nous avons pensé à comparer la solution numérique avec des cas limites, déjà établis et disponibles dans la littérature.

En effet, après avoir confronté les résultats obtenus aux données de la littérature décrivant les cas physiques limites à savoir :

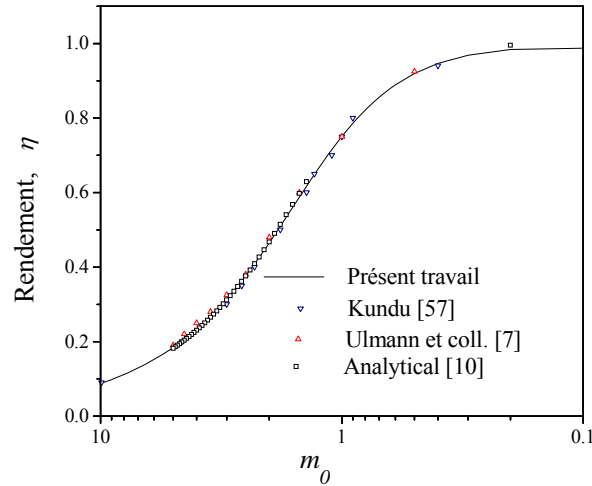
- o Une uniformité des propriétés thermophysiques [7, 11] et ;
- o Une variation du coefficient de dissipation latérale  $h$  [57] en considérant le cas où ces auteurs prennent un rapport  $\varepsilon = 1$  pour une épaisseur uniforme le long de l'ailette, où :

$$\varepsilon = \frac{h_{r1}}{h_{r2}}$$

avec :

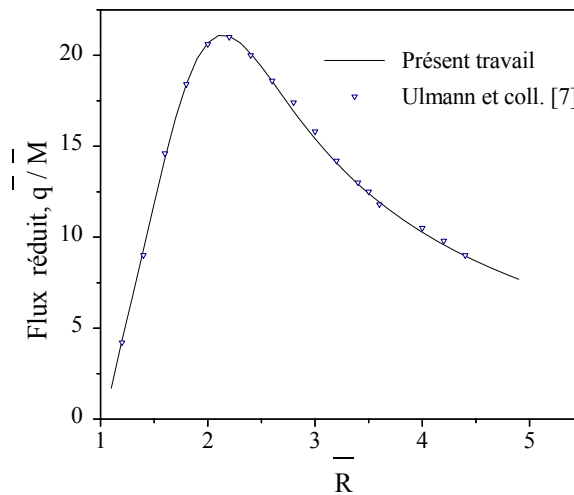
- $h_{r1}$  : Coefficient de transfert de chaleur à la base de l'ailette ;
- $h_{r2}$  : Coefficient de transfert de chaleur à l'extrémité de l'ailette.

Dans la figure (II.7.1), nous avons quantifié les écarts associés au rendement. Il est à noter que dans l'ensemble cet écart ne dépasse pas 2%. En effet, par rapport au premier cas, [7], il est estimé à 1,95 %. Par rapport au second, [11], sa valeur vaut 1,06 % et enfin, par rapport au troisième cas, [57], sa valeur ne dépasse pas 1,75 %.



**Figure II.7.1** : Validation de l'évolution du rendement en fonction de  $m_0$ .

De même, en ce qui concerne le flux thermique réduit, figure (II.7.2), l'écart estimé est de 1,35% par rapport à l'étude faite par **Ulmann et coll.** [7].



**Figure II.7.2** : Validation de l'évolution du flux réduit en fonction du rayon réduit.

## II.4 Résolution analytique de l'équation de l'énergie

Généralement, les phénomènes de transfert sont régis par des équations aux dérivées partielles. Les solutions analytiques de ces dernières sont, de façon générale, restreintes à des géométries et à de conditions aux limites relativement simples. Pour les cas complexes, la solution analytique n'existe pas, le recours aux méthodes approchées basées sur le calcul numérique s'avère nécessaire.

Dans ce travail, la démarche suivie pour aboutir à une solution analytique se fait par une hypothèse approximative, (II.20), qui s'avère être nécessaire à la linéarisation de l'équation (II.13). En effet, en introduisant cette approximation, on peut espérer trouver une solution analytique approchée du problème qui sera validée en la comparant à la solution numérique établie et validée précédemment.

#### II.4.1 Approximations admises

La résolution analytique de l'équation (II.13) demeure non évidente à cause de la non linéarité du coefficient de  $\phi$ , terme mis entre crochets. (II.13) linéaire impose l'adoption de l'approximation suivante :

$$\left[ \frac{\Delta T_0^y \phi^v}{1 + \lambda \phi} \right] \rightarrow \left[ \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \right] \quad (\text{II.20})$$

Notons que cette hypothèse est adoptée après recours au développement limité de ce coefficient autour de 1.

$$\frac{\Delta T_0^y \phi^v}{1 + \lambda \phi} = \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} + \frac{\Delta T_0^y v - \frac{\Delta T_0^y \lambda}{-1 + \lambda}}{1 + \lambda} (\phi - 1) + \frac{\frac{1}{2} \Delta T_0^y v (v - 1) - \frac{\Delta T_0^y (-v + v\lambda - \lambda) \lambda}{(-1 + \lambda)^2}}{1 + \lambda} (\phi - 1)^2 + \theta (\phi - 1)^3$$

S'arrêter au premier terme nécessite une confirmation qui se fera ultérieurement.

Posons à présent :

$$f_1 = \frac{\Delta T_0^y \phi^v}{1 + \lambda \phi} \quad (\text{II.20.1})$$

$$f_2 = \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \quad (\text{II.20.2})$$

En effet, remplacer le coefficient  $f_1$  par  $f_2$  revient à simplifier complètement ce coefficient. Afin de valider cette éventualité nous représentons l'écart interprété par l'expression (II.20.3) entre ces deux coefficients.

$$\text{Ecart} = 100 \frac{f_1 - f_2}{f_1} \quad (\text{II.20.3})$$

En calculant cet écart pour les deux régimes étudiés ( $v = 0,25$  et  $0,33$ ), en fixant le coefficient de température  $\lambda = 0,2$  et  $\Delta T_0 = 100$  °C ; nous constatons que l'écart ne dépasse pas 2 % pour une température réduite  $\phi$  comprise entre 1 et 0,7. ( $\phi$  voisin de 1)

Notons, de plus, que l'hypothèse (b) énumérée dans le paragraphe (II.1) révèle que la faible valeur du nombre de Biot impose une distribution de température telle que les valeurs de  $\phi$  demeurent voisines de 1, nous avons constaté tout de même, que tant que  $\phi$  est inférieur à 0,9 l'erreur reste inférieure à 0,5 %. Ceci nous permet de valider, pour un premier temps, l'approximation faite.

La validation définitive sera réalisée par comparaison de la solution analytique trouvée avec la solution numérique.

#### II.4.2 Solution analytique approchée

Compte tenu de la considération posée et validée ci-dessus, l'équation aux dérivées partielles (II.13) peut donc être ramenée à une équation différentielle linéaire qui s'écrit selon l'expression suivante :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} - \bar{m}_0^2 \phi = 0 \quad (\text{II.21})$$

avec :

$$\bar{m}_0^2 = \left[ \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^v}{1 + \lambda} \right] \quad (\text{II.21.1})$$

Cette équation admet pour solution une distribution de température réduite qui s'écrit comme suit :

$$\phi(x) = C_1 \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0 x) + C_2 \text{BesselY}(0, \bar{m}_0 x) \quad (\text{II.22})$$

Par ailleurs, compte tenu des conditions aux limites (II.13.1) et (II.13.2) décrivant le problème, nous pouvons calculer les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$ . Celles-ci se forment comme suit :

$$C_1 = \frac{-\text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})}{\text{BesselY}(0, \bar{m}_0) \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) - \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) \text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})} \quad (\text{II.23})$$

$$C_2 = \frac{\text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R})}{\text{BesselY}(0, \bar{m}_0) \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) - \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) \text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})} \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, en substituant les deux expressions ci-dessus dans l'équation (II.22), nous obtenons la solution explicite pour une ailette annulaire de profil rectangulaire :

$$\phi(x) = \frac{-\text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0 x) + \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselY}(0, \bar{m}_0 x)}{\text{BesselY}(0, \bar{m}_0) \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) - \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) \text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})} \quad (\text{II.25})$$

### II.4.3 Ecarts entre la solution analytique et la solution numérique

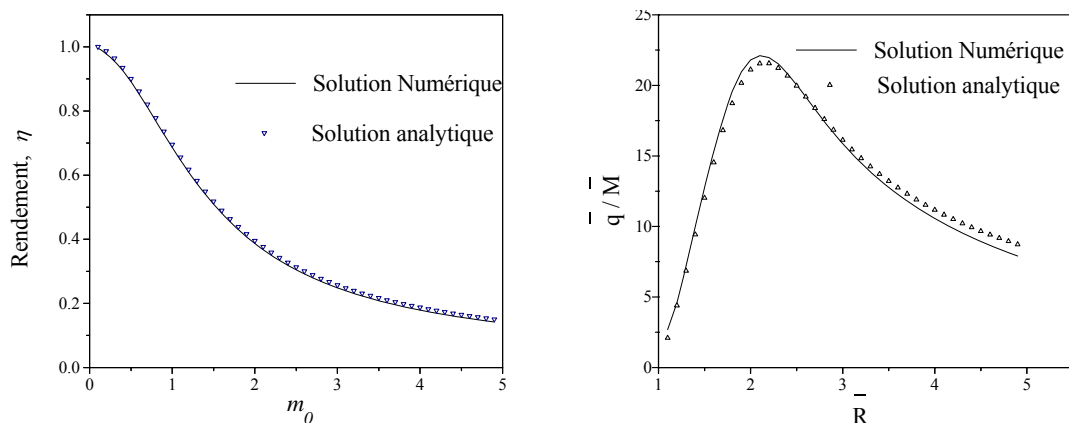
Dans le but d'estimer l'écart entre la solution approchée et la solution numérique nous représentons l'évolution du rendement et du rapport entre le flux thermique réduit  $\bar{q}$  et la masse réduite de l'ailette  $\bar{M}$  en examinant différents cas de figure à savoir :

- Uniformité des propriétés thermophysiques ( $h$  et  $k$ ) ;
- Loi de variation exponentielle du coefficient de transfert  $h$  et la conductivité thermique  $k$  étant maintenu uniforme ;
- Variation linéaire de la conductivité thermique  $k$  pour un coefficient de transfert  $h$  uniforme.
- Variation exponentielle et linéaire attribuée respectivement au coefficient de transfert  $h$  et à la conductivité thermique  $k$ .

Les graphiques du rendement, pour les deux solutions, analytique et numérique, sont tracés en considérant un écart de température  $\Delta T_0 = 100$  °C et un  $\bar{R} = 2$ . Quant aux graphiques des flux thermiques spécifiques ( $\bar{q}/\bar{M}$ ) ; ils sont représentés fonction du rayon réduit, pour les différents cas cités ci-dessus, et ce en choisissant une masse réduite  $\bar{M}$  égale à 0,1.

#### a) Uniformité de $k$ et $h$

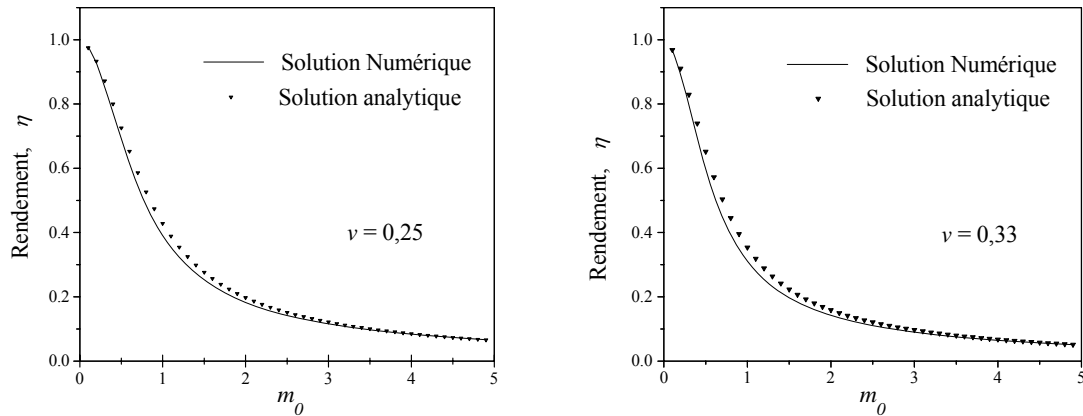
La figure (II.8) quantifie l'écart entre les solutions numérique et analytique pour le rendement et le flux spécifique respectivement. En effet, celui-ci est estimé à 1,06% pour la courbe du rendement en fonction du paramètre caractéristique  $m_0$ . Pour la courbe qui trace ( $\bar{q}/\bar{M}$ ) en fonction de  $\bar{R}$ , l'écart n'est que de 0,78 %.



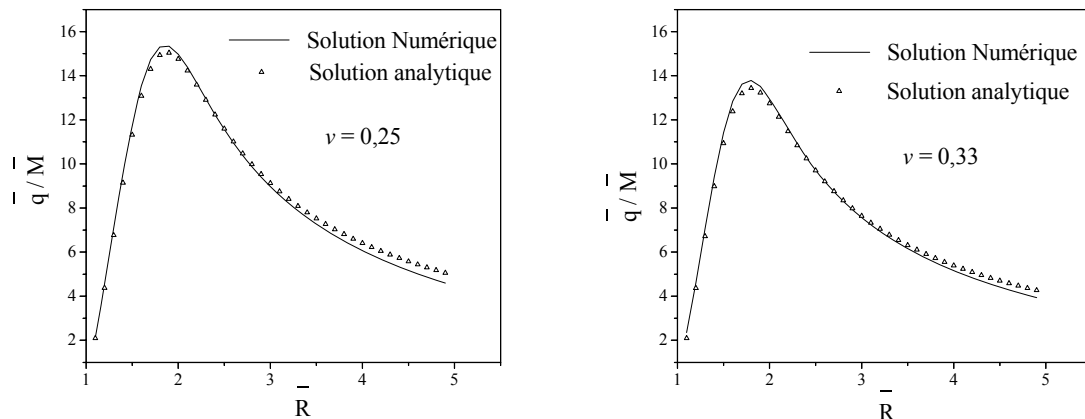
**Figure II.8 :** Validation de la solution approchée pour le cas où  $h$  et  $k$  sont uniformes

### b) Non uniformité de h et k uniforme

L'écart entre les solutions établies en termes de rendement est égal à 3,34 % et 2,89 % pour le régime laminaire ( $\nu = 0,25$ ) et turbulent ( $\nu = 0,33$ ) respectivement, figure (II.9.1). L'erreur commise lors de l'établissement des deux solutions en termes de flux spécifique vaut 1,71 % et 1,17 % en reconsidérant les deux cas précédant respectivement. Figures (II.9.2).



1) Rendement de l'ailette rectangulaire ;



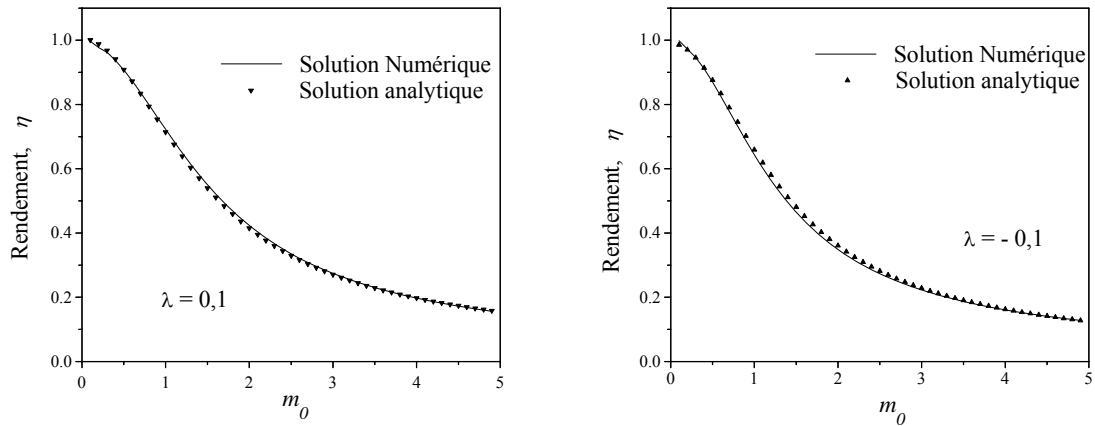
2) Flux adimensionnel pour de l'ailette rectangulaire.

**Figure II.9 :** Validation de la solution pour un coefficient de transfert h variable en fonction de la température

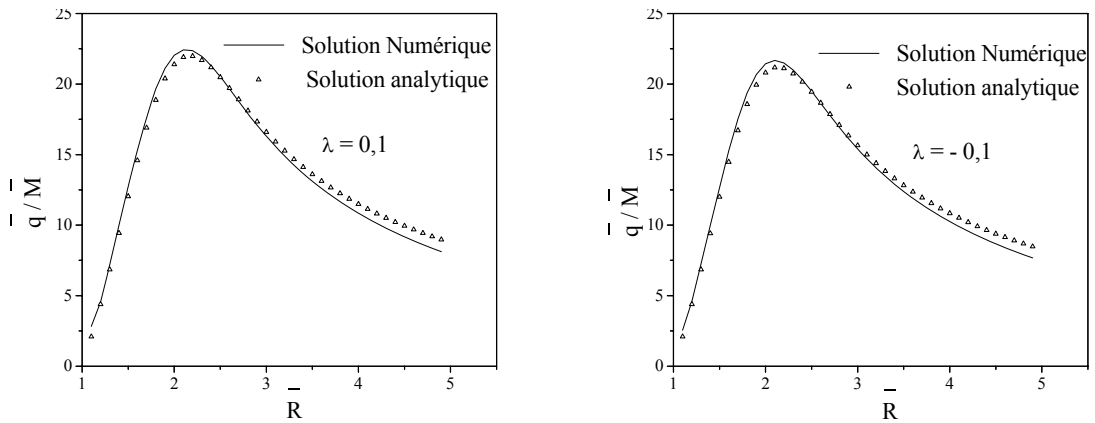
### c) Non uniformité de k et h uniforme

Dans cette partie de l'étude, on s'est proposé de traiter le problème en considérant des valeurs positif et négatif du coefficient de température  $\lambda$ . En effet, nous la fixons égales à + 0,1 et - 0,1. Figure (II.10).

Pour le rendement, les deux cas étudiés présentent un écart calculé, entre la solution numérique et la solution analytique, égal à 0,83 % et 1,87 % respectivement. Ces écarts sont estimés à 1,49 % et 1,40 %, respectivement, pour le flux spécifique.



1) Rendement de l'ailette rectangulaire ;

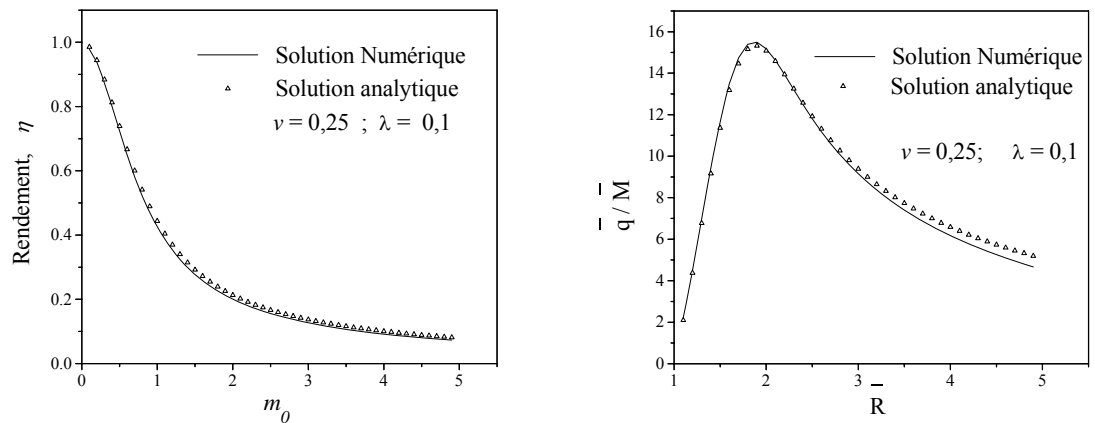


2) Flux adimensionnel pour l'ailette rectangulaire.

**Figure II.10 :** Validation de la solution pour une conductivité thermique  $k$  non-uniforme

**d) Non-uniformité de  $k$  et de  $h$**

Cette étude est menée en considérant un  $\nu$  égal à 0,25 et un  $\lambda$  égal à 0,1. La figure (II.11) montre un écart de 3,90 % et 2,55 % en termes de rendement et de flux spécifique respectivement.



**Figure II.11 :** Validation de la solution pour le cas où  $h$  et  $k$  varient en fonction de la température

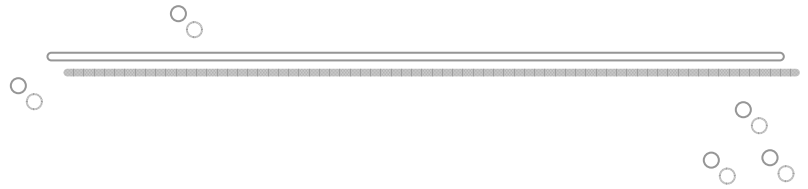
## II.5 Conclusion

La résolution de l'équation de l'énergie, qui régit le transfert thermique à travers une ailette annulaire de section droite rectangulaire par voie numérique, nous permet de confirmer la validité de la solution analytique approchée, vu que les écarts ne dépassent pas 4% pour le rendement et 3% pour le flux réduit.

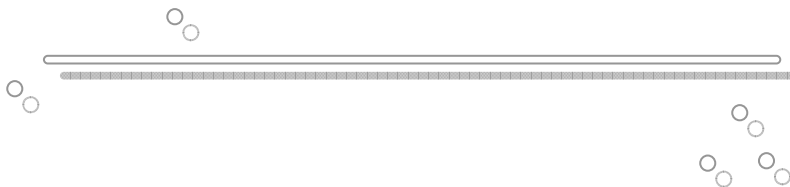
**Tableau II.2** : Validation de la solution analytique approchée.

	Ecart par rapport à la solution numérique en (%)	
	Rendement	Flux réduit
h et k uniformes	1,10	0,80
h variable, k uniforme	4,00	2,00
k variable, h uniforme	2,00	1,50
h et k variables	4,00	3,00

Nous pouvons dire, à présent, que cette étude nous a permis de proposer une solution analytique qui nous permettra, dans ce qui suit, de suivre l'évolution du rendement et du flux spécifique **analytiques** en fonction des différents paramètres présents dans la solution. Nous pouvons, de plus, calculer les erreurs que nous pourrions causer en admettant l'uniformité de l'un des coefficients de transfert h et/ou k ce qui fera l'objet de la deuxième partie du chapitre suivant.



*CHAPITRE III :*  
*AILETTE ANNULAIRE RECTANGULAIRE*



## *AILETTE ANNULAIRE RECTANGULAIRE*

### III.1 Introduction

Partant de la solution analytique déjà validée (II.25), une série d'expérimentations analytiques a été conduite dans le cas d'une ailette annulaire de section droite rectangulaire. Nous analysons dans un premier temps, la sensibilité du rendement et du flux transféré à la variation des paramètres thermophysiques. L'effet de la caractéristique de l'ailette  $m_0$  et  $\bar{R}$ , l'écart de température entre la base de l'ailette et le milieu environnant et la masse réduite de l'ailette ont également été pris en considération.

Dans un deuxième temps, nous examinons l'influence de l'uniformité des paramètres thermophysiques  $h$  et/ou  $k$  sur le rendement et le flux spécifique ; Les écarts entre le cas non uniforme et les cas uniformes ont été calculés afin d'évaluer les erreurs occasionnées lors de l'adaptation d'une uniformité quelconque.

### III.2 Solution analytique

La solution analytique approchée pour la distribution radiale de la température est donnée par l'expression suivante :

$$\phi(x) = \frac{-\text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0 x) + \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselY}(0, \bar{m}_0 x)}{\text{BesselY}(0, \bar{m}_0) \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) - \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) \text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})} \quad (\text{III.1})$$

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux évolutions du rendement  $\eta$  et du flux spécifique ( $\bar{q}/\bar{M}$ ). Ces derniers seront traduits à partir du champs de température, par le biais des fonctions Bessel [annexe], en fonction de  $\bar{R}$  et  $\bar{m}_0$ . On obtient alors respectivement :

$$\eta = \bar{m}_0 \frac{2(\bar{R}-1)^2}{(\bar{R}^2+1)} \frac{\text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) - \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselY}(0, \bar{m}_0)}{\text{BesselY}(0, \bar{m}_0) \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) - \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) \text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})} \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\bar{q}}{\bar{M}} = \frac{2\bar{m}_0}{\pi \text{Bi} (\bar{R}^2-1)} \frac{\text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) - \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) \text{BesselY}(0, \bar{m}_0)}{\text{BesselY}(0, \bar{m}_0) \text{BesselJ}(1, \bar{m}_0 \bar{R}) - \text{BesselJ}(0, \bar{m}_0) \text{BesselY}(1, \bar{m}_0 \bar{R})} \quad (\text{III.3})$$

avec :

$$\bar{m}_0^2 = \frac{m_0^2}{(\bar{R} - 1)^2} \frac{\Delta T_0^v}{1 + \lambda} \quad (a)$$

$$m_0 = (\bar{R} - 1) \sqrt{\frac{\pi Bi_0 (\bar{R}^2 - 1)}{\bar{M}}} \quad (b)$$

$$\bar{Bi} = \left( \frac{2h(\phi) r_i}{k(\phi)} \right) = Bi_0 \frac{\Delta T_0^v}{1 + \lambda} \quad (c)$$

De là, nous énumérons, à travers les cinq points suivants, les six paramètres influençant la valeur du rendement et de la dissipation thermique de l'ailette :

- Caractéristique de l'ailette : rayon réduit  $\bar{R}$  et paramètre de l'ailette  $m_0$  ;
- Le coefficient de température  $\lambda$  ;
- Le régime d'écoulement à travers la valeur du coefficient  $\nu$  ;
- L'écart de température entre la base de l'ailette et le milieu environnant  $\Delta T_0$  ;
- La masse réduite de l'ailette  $\bar{M}$ .

Les évolutions présentées dans les parties ci-après sont tracées suite à une programmation sur Maple puis représentées graphiquement par Origin. Le programme est structuré comme suit :

- Introduction de la valeur des cinq paramètres supposés constants ;
- Ecriture de l'expression de la variable à calculer, rendement ou dissipation thermique, en fonction du sixième paramètre restant ;
- Calcul et affichage de la valeur numérique du paramètre choisi ainsi que la valeur de la variable correspondante, rendement ou dissipation thermique.

### III.2.1 Caractéristique de l'ailette

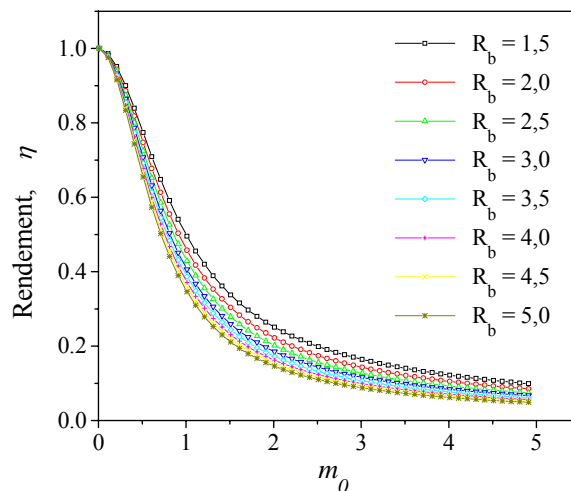
Nous avons suivi l'évolution du rendement et du flux spécifique de chaleur en fonction de  $m_0$  et  $\bar{R}$ . En fait,  $m_0$  peut être considéré comme une expression d'un nombre de Biot modifié alors que  $\bar{R}$  est défini comme étant le rayon (tube + ailette) rapporté au rayon du tube sur lequel l'ailette est fixée.

#### • Rendement de l'ailette

Dans un premier volé, nous suivons l'évolution du rendement en fonction du paramètre  $m_0$  pour différents rayons réduits en considérant un régime laminaire ( $\nu = 0,25$ ) et un coefficient de température égal à 0,1. Figure (III.1).

L'allure générale de ces courbes montre que l'augmentation de la valeur de  $m_0$  provoque la diminution du rendement de l'ailette. La diminution de la valeur du rendement depuis la valeur initiale ( $\eta = 1$ ) est très prononcée aux faibles valeurs de  $m_0$ .

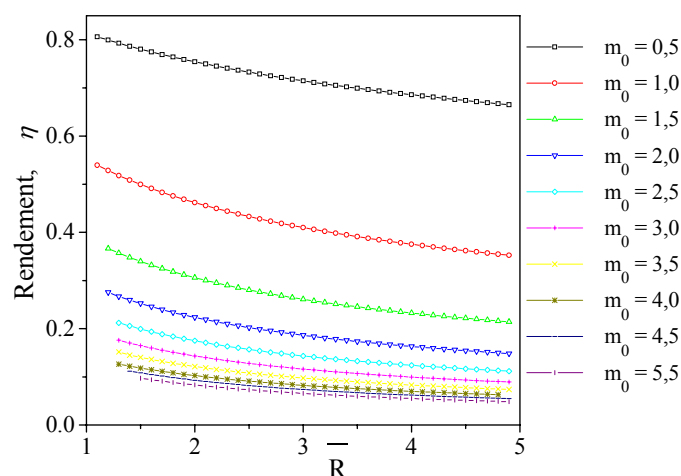
Au delà de 2, cette chute de rendement se ralentit et semble tendre vers une valeur asymptotique aux grandes valeur de  $m_0$  ( $m_0 = 5$ ).



**Figure III.1 :** Influence de la variation de  $m_0$  sur le rendement de l'ailette pour un régime laminaire  $\nu = 0,25$  et un coefficient de température  $\lambda = 0,1$

L'augmentation de  $m_0$  peut traduire une augmentation de la longueur de l'ailette voire une augmentation de l'aire convective ; elle peut interpréter aussi une augmentation dans la valeur du nombre de Biot, donc une diminution de la résistance de convection. Ces deux conséquences conduisent à une diminution dans les valeurs de rendement.

Dans le second volé, l'effet de la variation du rayon réduit  $\bar{R}$  est présenté sur la figure (III.2). Ces évolutions montrent qu'une augmentation dans la valeur de  $\bar{R}$  fait diminuer le rendement de l'ailette contre l'augmentation de l'aire convective. On constate de plus que l'augmentation de la valeur de  $m_0$  entraîne une diminution du rendement en rétrécissant son domaine de variation. Ceci confirme les résultats discutés précédemment.

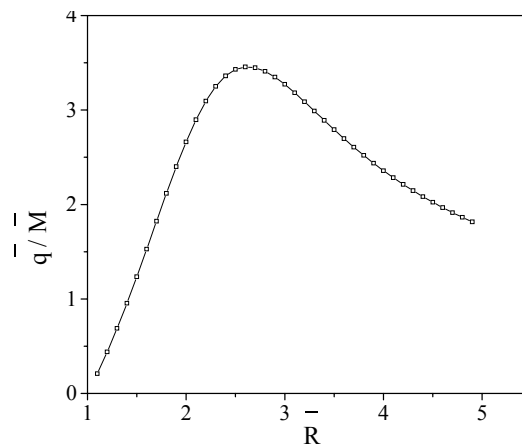


**Figure III.2 :** Effet de la variation  $\bar{R}$  sur le rendement de l'ailette rectangulaire pour un régime laminaire  $\nu = 0,25$  et un coefficient de température  $\lambda = 0,1$

- **Dissipation thermique**

La figure (II.3) définit l'évolution du flux spécifique en fonction du rayon réduit en régime laminaire, pour un coefficient de température égal à 0,1 et, une masse réduite égale à l'unité. Cette figure révèle une augmentation dans la valeur du flux spécifique suite à l'augmentation de la valeur du rayon réduit, pour atteindre une valeur critique de 3,44 pour un rayon réduit de 2,7. Au-delà de cette valeur, le flux spécifique diminue progressivement.

Cette représentation nous permet, à partir de la valeur maximale du flux atteinte, la détermination de la longueur optimale de l'ailette annulaire rectangulaire, pour ces conditions de travail.



**Figure III.3 :** Influence de la variation  $\bar{R}$  sur le flux spécifique pour un régime laminaire  $\nu = 0,25$ , un coefficient de température  $\lambda = 0,1$  et une masse réduite de un

### III.2.2 Coefficient de température

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la conductivité thermique  $k$ , propriété physique qui traduit l'aptitude d'un matériau à conduire de la chaleur. L'ordre de grandeur de cette dernière à 20°C est donné comme suit :

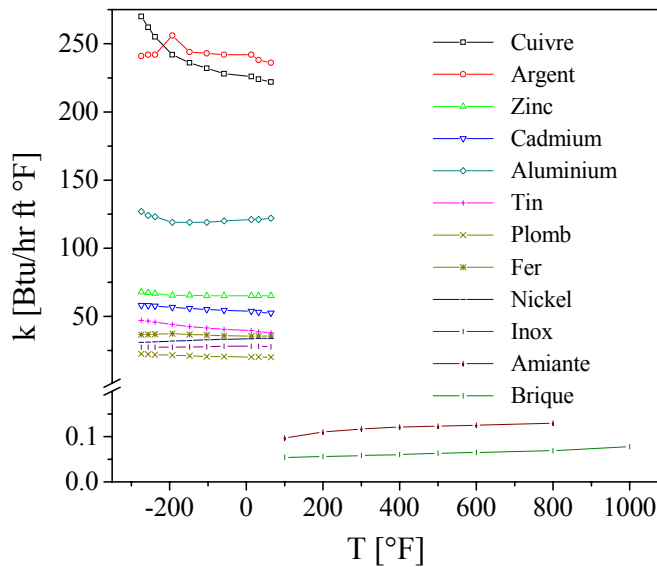
- Métaux purs : 20 à 400 Wm-1K-1 ;
- Alliages métalliques : 10 à 150 Wm-1K-1, varie peu avec la température sauf à très basse température ;
- Matériaux isolants : 0,025 à 0,25 Wm-1K-1.

Le coefficient de température  $\lambda$  défini par l'expression (III.4) exprime d'une manière adimensionnelle la nature du matériau, définie généralement par l'entité  $k_1$ .  $k_1$  est positif pour de nombreux matériaux isolants et négatifs pour la plupart des métaux et alliages, à l'exception de l'aluminium et du laiton. La Figure (III.4) traduit les résultats tabulés d'**Eckert** et **Drake** [94] pour la conductivité thermique.

$$\lambda = \left(\frac{dk}{dT}\right) \frac{\Delta T_0}{k_0} = k_1 \Delta T_0 \tag{III.4}$$

avec :

- $\lambda$  : Coefficient de température ;
- $k_1$  : Coefficient déterminant la nature du métal ;
- $k$  : Conductivité thermique du matériau considéré ;
- $k_0$  : Conductivité thermique du matériau pris à la température ambiante  $T_\infty$  ;
- $T$  : Température du matériau ;
- $\Delta T_0$  : Ecart de température entre la température du matériau et celle du milieu environnant.



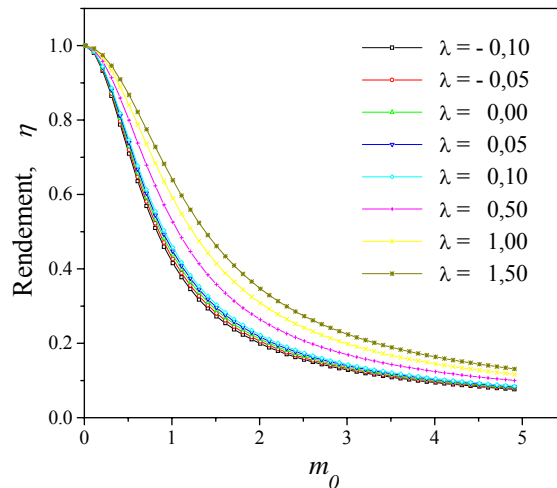
**Figure III.4 :** Evolution de la conductivité thermique  $k$  en fonction de la température pour différents matériaux.

Dans cette partie de l'étude, on se propose de traiter le problème en faisant varier la valeur du coefficient de température  $\lambda$ , de  $-0,10$  à  $+1,50$  et de suivre l'évolution du rendement et du flux thermique spécifique pour ces différentes valeurs du coefficient de température, et ce, en considérant un écoulement laminaire ( $\nu = 0,25$ ).

• **Rendement de l'ailette**

La figure (III.5) illustre l'évolution du rendement pour différentes valeurs de  $\lambda$ , en fonction de  $m_0$  pour un rayon réduit  $\bar{R}$  égal à 2 et un écart de température  $\Delta T_0$  de 100 K. Cette figure révèle dans l'ensemble une allure identique quelque soit la valeur prise par le coefficient  $\lambda$ .

Notons néanmoins, que l'augmentation du coefficient de température  $\lambda$  peut entraîner une amélioration de 2,72 % dans la valeur du rendement ceci en passant de  $\lambda = 0$  à  $+0,1$  pour un  $m_0$  de 0,5. Cette amélioration est de 2,42 % en passant cette fois-ci de  $\lambda = -0,1$  à 0 pour la même valeur de  $m_0$ .

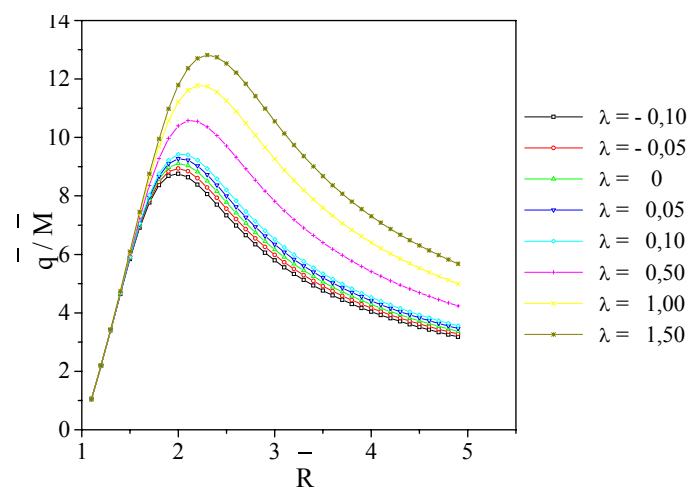


**Figure III.5 :** Influence du coefficient de température  $\lambda$  sur le rendement pour un  $\bar{R}=2$  ;  $\nu=0,25$  ;  $\Delta T_0$  de 100 K et  $\bar{M}=0,2$ .

Signalons que la comparaison faite entre les rendements obtenus pour les valeurs positives et négatives de  $\lambda$ , avec le cas limite  $\lambda = 0$ , est faite séparément. En effet, passer d'une valeur positive de  $\lambda$  à une valeur négative implique un changement dans la classification du métal. Par conséquent, la comparaison dans un domaine où le coefficient  $\lambda$  change de signe, est erronée étant donné qu'on procèdera alors à la comparaison entre deux groupes de matériaux de nature complètement différente.

- **Flux thermique**

La Figure (III.6), pour sa part, traduit l'évolution du taux de dissipation thermique spécifique pour différents matériaux.



**Figure III.6 :** Influence du coefficient de température  $\lambda$  sur le flux spécifique pour un  $\nu=0,25$  ;  $\Delta T_0$  de 100 K et  $\bar{M}=0,2$ .

D'un point de vue qualitatif, nous constatons une allure similaire quelle que soit la nature du matériau. Néanmoins, nous notons une valeur critique du flux thermique spécifique qui diffère en fonction de la nature du matériau. Marquons que l'augmentation du coefficient de température entraîne une augmentation dans les valeurs du flux de chaleur spécifique en déplaçant le maximum de chaleur spécifique transférée vers les grandes valeurs du rayon réduit  $\bar{R}$ .

Sachant que l'augmentation de la conductivité thermique a pour conséquent la diminution de la résistance par conduction qui se traduit, dans cette étude, par une augmentation du flux de chaleur transféré. De plus, le déplacement du maximum en terme de flux spécifique vers les grandes valeurs de  $\bar{R}$  signifie que l'augmentation du coefficient de température conduit à l'augmentation de la longueur optimale de l'ailette annulaire rectangulaire à l'augmentation.

### III.2.3 Régime d'écoulement

Les échanges de chaleur par convection, qu'elle soit forcée ou naturelle, sont la conséquence de mouvements du fluide provoqués respectivement par une action extérieure ou une différence de densité entre les parties chaudes et froides du fluide. C'est le mode de transfert entre la surface solide et le fluide. Il comprend des phénomènes de conduction auxquels se superpose un transport de matière. Les molécules fluides viennent se réchauffer ou se refroidir au contact du milieu solide.

Le concept de coefficient de transfert repose sur la proportionnalité entre les flux échangés entre les phases et les différences de leurs températures. Ainsi, la densité surfacique de flux de chaleur convectée entre deux phases solide et fluide à deux températures moyennes différentes s'écrit selon la loi de Newton. Le coefficient d'échange  $h$ , traduit donc de manière empirique les échanges de chaleur du solide avec le fluide. Il représente une conductance par analogie avec le transfert de chaleur par conduction.

Cette notion de coefficient d'échange convectif est très controversée. En effet, il faut remarquer que les considérations concernant ce coefficient d'échange sont uniquement valables en régime établi. Généralement, les valeurs du coefficient d'échange  $h$  dépendent des conditions hydrodynamiques et thermiques de la phase fluide en présence (viscosité, conductivité, chaleur volumique, vitesse d'écoulement et température).

Il constitue ainsi une grandeur d'un emploi commode mais pas totalement significative du point de vue physique. En effet, l'évolution de ce paramètre est une réplique fidèle de l'évolution de l'état physique des surfaces d'échange. [95]

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de température, on dit que la **convection** est **naturelle** ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé **convection forcée**.

Lorsqu'un fluide se trouve en contact avec un corps chaud, sa température augmente et sa masse volumique diminue, et il se déplace (il monte) par rapport au corps chaud. Cet écoulement de fluide le long de ce corps chaud entraîne un phénomène de convection que l'on appelle naturelle ou libre. Si le fluide est plus chaud que le corps, l'écoulement se fera vers le bas mais il y aura toujours de la convection.

La recherche de la loi de la convection naturelle est guidée par l'analyse dimensionnelle. Seulement, cette fois, le nombre de Reynolds doit être remplacé par un autre nombre sans dimensions.

En convection naturelle, la vitesse du fluide dépend indirectement des conditions du problème. Il convient donc de trouver une expression qui représente cette vitesse. En convection libre comme en convection forcée, l'écoulement peut être laminaire ou turbulent et dépend de la distance du bord d'attaque, des propriétés du fluide, de la force de pesanteur et de l'écart de température entre la surface et le fluide. Le champ de température en convection naturelle est identique à celui observé en convection forcée. De ce fait l'interprétation physique du nombre de Nusselt peut être utilisée. Cependant, pour les applications pratiques l'équation (III.5) est utilisée.

$$u_m = \frac{\rho \beta \theta g D^2}{\mu} \quad \text{(III.5)}$$

Où :

- $u_m$  : Vitesse d'écoulement du fluide ;
- $\rho$  : Masse volumique du fluide ;
- $\beta$  : Coefficient de dilatation thermique traduit par les expressions (III.6) ;
- $\theta$  : Ecart de température ( $T_0 - T_\infty$ ) ;
- $g$  : accélération de la pesanteur ;
- $D$  : Dimension caractéristique ;
- $\mu$  : Viscosité du fluide.

$$\beta = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)} \quad \text{(III.6.1)}$$

Dans le cas d'un gaz parfait ce coefficient prend la forme :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad \text{(III.6.2)}$$

En remplaçant l'expression de la vitesse (III.5) dans le nombre de Reynolds, on définit un nouveau nombre sans dimension appelé nombre de Grashof :

$$Gr = \frac{\rho^2 \beta \theta g D^3}{\mu^2} \quad \text{(III.7)}$$

Ainsi la loi gouvernant le mode de **convection naturelle** serait de la forme générale suivante :

$$Nu = a (Gr \cdot Pr)^n = a \cdot Ra^n \tag{III.8}$$

Ra étant le nombre de Rayleigh.

Les valeurs des coefficients **a** et **n** déterminent le régime de l'écoulement, elles sont données dans le tableau suivant pour les trois cas rencontrés dans la littérature [95-96].

**Tableau III.1** : La convection naturelle

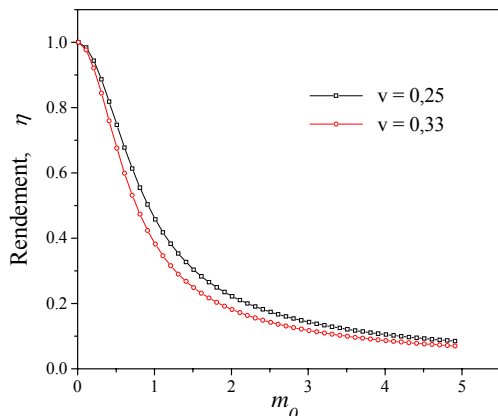
<b>Gr.Pr</b>	<b>a</b>	<b>n (ou <math>\nu</math>)</b>
de $10^{-3}$ à $10^2$	1,18	1/8
de $5 \cdot 10^2$ à $10^7$	0,54	1/4
de $2 \cdot 10^7$ à $10^{13}$	0,135	1/3

Dans notre travail, la prise en compte du mode de **convection naturelle** est considérée respectivement en : laminaire :  $\nu = 0,25$  et turbulent :  $\nu = 0,33$ . La loi expérimentale donnant la variation de h en fonction de la température réduite est traduite par l'expression (II.11), (cf.II.2.2).

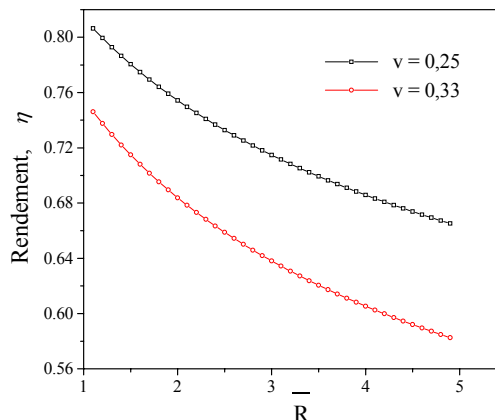
- **Rendement de l'ailette**

La figure (III.7.1) montre l'évolution du rendement en fonction du paramètre caractéristique  $m_0$  pour un rayon réduit égale à 2 et, un coefficient de température de 0,1 ; Ceci en représentant les deux régimes d'écoulement : le régime laminaire ( $\nu = 0,25$ ) et le régime turbulent ( $\nu = 0,33$ ). Pour les deux régimes et en considérant le même coefficient de température, la figure (III.7.2) illustre l'évolution du rendement en fonction, cette fois-ci, du rayon réduit  $\bar{R}$  pour  $m_0$  valant 0,5.

Ces évolutions montrent qu'un changement dans le régime d'écoulement du fluide influe sur la valeur résultante du rendement. Ceci se traduit par une diminution dans les valeurs de ce dernier, suite au basculement du régime laminaire au régime turbulent.



1) Evolution du rendement en fonction de  $m_0$  pour un  $\bar{R} = 2$



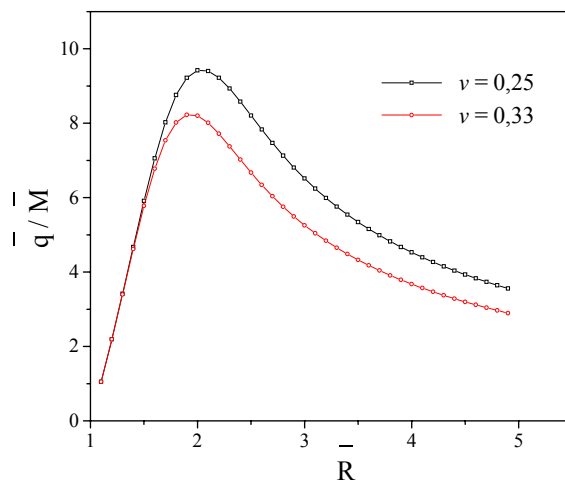
2) Evolution du rendement en fonction du rayon réduit pour un  $m_0 = 0,5$

**Figure III.7 :** Influence du régime d'écoulement sur le rendement de l'ailette annulaire rectangulaire pour  $\lambda = 0,1$

• **Dissipation thermique**

Nous représentons sur la figure (III.8) l'évolution du flux spécifique en fonction du rayon réduit, pour les deux régimes d'écoulement pris en compte, en gardant la même valeur du coefficient de température  $\lambda$  et en considérant une masse réduite de 0,2.

A priori, les deux courbes semblent qualitativement similaires, cependant, nous constatons que le passage du régime laminaire ( $\nu = 0,25$ ) au régime turbulent ( $\nu = 0,33$ ) entraîne une diminution notable dans les valeurs du flux de chaleur spécifique ainsi que celle de la longueur caractéristique optimale de l'ailette.



**Figure III.8 :** Influence du régime d'écoulement sur le flux spécifique pour  $\lambda = 0,1$  ;  $\Delta T_0 = 100$  K et  $\bar{M} = 0,2$ .

Comme le transfert d'énergie par convection est intimement lié au mouvement du fluide, il est nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement hydrodynamique du fluide avant d'examiner celui de l'écoulement de chaleur.

Un des plus importants aspects de l'étude hydrodynamique est d'établir si le mouvement du fluide est **laminaire** ou **turbulent**. Lorsqu'un fluide s'écoule en **régime laminaire** le long d'une surface dont la température est différente de celle du fluide, la chaleur est transmise strictement que par conduction, aussi bien à l'intérieur du fluide qu'à l'interface entre le fluide et la surface solide. Par contre, dans un **écoulement turbulent**, le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits volumes de fluide, en se mélangeant avec d'autres, jouent le rôle de porteur d'énergie. Par conséquent, un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection.

Ceci nous permet d'expliquer la diminution du rendement et du flux spécifique de chaleur conductif suite au passage de  $\nu = 0,25$  à  $\nu = 0,33$ , valeurs déterminant le mode de convection naturelle laminaire et turbulente respectivement.

### III.2.4 Ecart de température

Dans cette partie de l'étude, nous nous sommes intéressés à l'effet de l'écart de température entre la base de l'ailette et le milieu environnant sur le rendement et sur la dissipation thermique de l'ailette ceci en se plaçant dans le cas d'un régime laminaire et en considérant un rayon réduit égal à 2, une masse réduite de 5 et, un matériau défini par  $k_1$  égal à  $10^{-3}$  K.

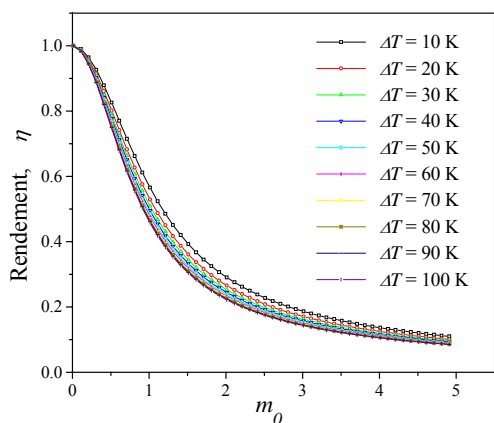
- **Rendement de l'ailette**

La figure (III.9.1) traduit l'évolution du rendement en fonction de  $m_0$  pour différents écarts de température  $\Delta T_0$ . Cette figure présente des évolutions similaires, cependant, pour apprécier l'effet de ce paramètre, nous avons tracé l'évolution du rendement en fonction de l'écart de température pour quatre valeurs de  $m_0$  : 0,5 ; 1,0 ; 1,5 et 2,5. Figure (III.9.2)

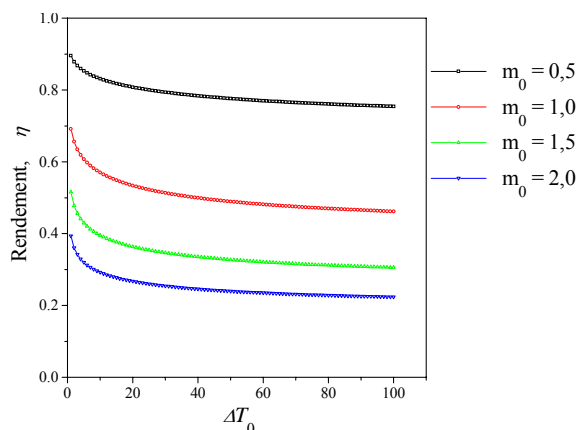
Les courbes (III.9.1) montrent que l'augmentation de l'écart de température implique la diminution du rendement. Cette dernière s'intensifie avec l'augmentation de  $m_0$  pour atteindre son maximum pour des valeurs de  $m_0$  voisine de 0,5. La deuxième schématisation de ces courbes est donnée sur la figure (III.9.2) qui montre que l'augmentation de l'écart de température provoque une diminution en rendement pour les valeurs de  $\Delta T_0$  inférieures à 30K, au-delà une décroissance moins prononcée est remarquée, en particulier pour  $m_0$  supérieur à 1 où une allure quasi-uniforme s'installe.

Par ailleurs, la figure (III.9.3), pour sa part, traduit l'évolution du rendement en fonction, cette fois-ci, de  $\bar{R}$  pour  $m_0 = 0,5$ . Là aussi, l'augmentation de l'écart de température s'accompagne d'une diminution du rendement.

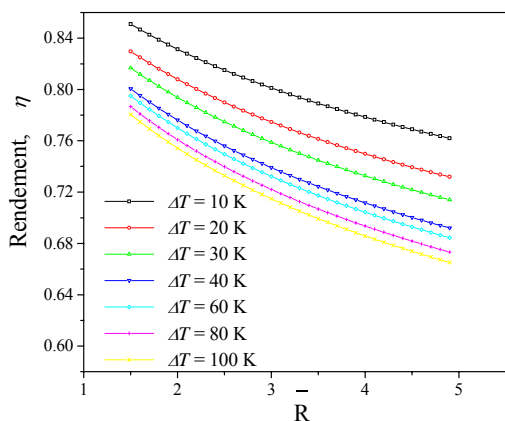
Cependant, la deuxième représentation de ces courbes, figure (III.9.4) représente l'évolution du rendement en fonction de l'écart de température pour quatre valeurs de rayon réduit, ces courbes expliquent que l'effet de  $\Delta T_0$  est non négligeable, et ce, dans tout le domaine étudié avec chute du rendement suite à l'augmentation de  $\bar{R}$ .



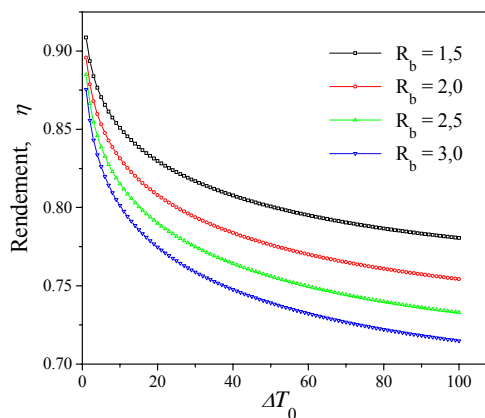
1) Evolution du rendement en fonction de  $m_0$  différentes  $\Delta T_0$  et  $\bar{R} = 2$



2) Evolution du rendement en fonction de  $\Delta T_0$  pour différents  $m_0$  et  $\bar{R} = 2$



3) Evolution du rendement en fonction de  $\bar{R}$  pour différents  $\Delta T_0$  avec  $m_0 = 0,5$



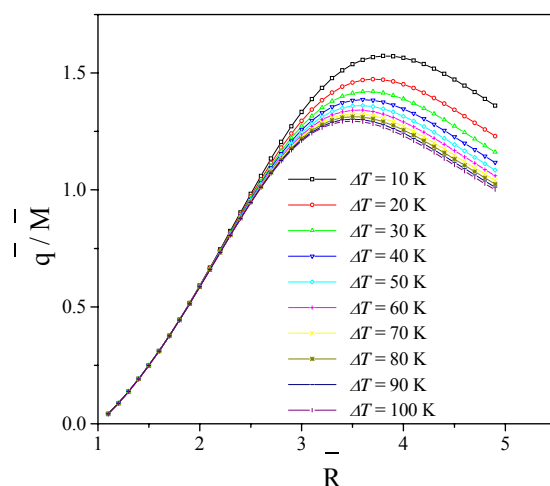
4) Evolution du rendement en fonction de  $\Delta T_0$  pour différents  $\bar{R}$  avec  $m_0 = 0,5$

**Figure III.9 :** Influence de l'écart de température sur le rendement pour  $\nu = 0,25$  et  $k_1 = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

### • Dissipation thermique

Le suivi, sur la figure (III.10), de l'évolution du flux spécifique en fonction du rayon réduit en considérant différents écarts de température, figure (III.10), montre que pour les valeurs de rayon réduit inférieures à 2,5, le flux spécifique n'est pas influencé par la variation de l'écart de température  $\Delta T_0$ . Au-delà de 2,5, le flux spécifique diminue lorsqu'on augmente  $\Delta T_0$ . Cette diminution se maintient constante à partir de  $\Delta T_0 = 60$  K, la diminution n'est plus significative et est quasi-inexistante.

De même, étant donné que le maximum du flux spécifique diminue lorsqu'on augmente l'écart de température  $\Delta T_0$ , la longueur optimale de l'ailette annulaire rectangulaire s'amointrit en conséquence.



**Figure III.10 :** Influence de l'écart de température sur le flux spécifique pour  $k_1 = 10^{-3}$  K,  $\nu = 0,25$  et  $\bar{M} = 5$ .

Notons que les échanges thermiques peuvent se produire par conduction et convection. La chaleur va ainsi cheminer au travers du matériau ou du fluide.

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. C'est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz.

Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules de fluide. Ensuite, les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas, l'écoulement transporte le fluide et l'énergie. L'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules de fluide et est transportée sous l'effet de leur mouvement.

L'augmentation de l'écart de température entraîne donc, dans le fluide, une agitation plus ou moins importante des molécules fluides qui transportent la chaleur. Ce phénomène conduit à la réduction de la résistance convective, ce qui explique les résultats observés en figures (III.9) et (III.10).

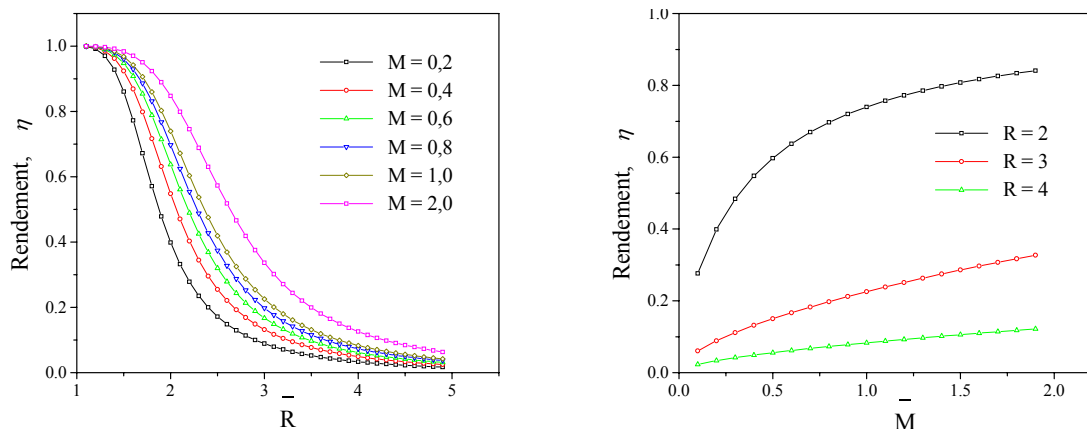
### III.2.5 Masse réduite de l'ailette

Nous terminons cette étude paramétrique par l'analyse de l'effet de la masse réduite sur le rendement et sur le flux spécifique. Pour ce faire, nous avons suivi l'évolution de ces deux paramètres en se plaçant dans les conditions suivantes : régime laminaire, coefficient de température de 0,1 et, un écart de température  $\Delta T_0 = 100$  K.

- **Rendement de l'ailette**

Dans un premier temps, le rendement de l'ailette est représenté sur la figure (III.11.1) en fonction du rayon réduit pour différentes valeurs de  $\bar{M}$ . Dans un second temps, la figure (III.11.2) rend compte de la variation du rendement en fonction de  $\bar{M}$  pour trois valeurs de rayon réduit 2, 3 et 4.

En effet, nous constatons que l'augmentation de la masse réduite de l'ailette entraîne une élévation de la valeur du rendement correspondant. Cet accroissement se manifeste clairement pour des valeurs de rayon réduit comprises entre 1,5 et 3,5.



1) Evolution du rendement en fonction de  $\bar{R}$  pour différents  $\bar{M}$

2) Evolution du rendement en fonction de  $\bar{M}$  pour différents  $\bar{R}$

**Figure III.11 :** Influence de la masse réduite sur le rendement de l'ailette pour un régime laminaire  $\nu = 0,25$  et, un coefficient de température  $\lambda = 0,1$

Il est à noter que pour tracer ces évolutions nous remplaçons dans l'expression du rendement,  $m_0$  par le terme défini par l'expression (III.9), où la valeur du nombre de  $Bi_0$  est fixée et prise égale à 0,01.

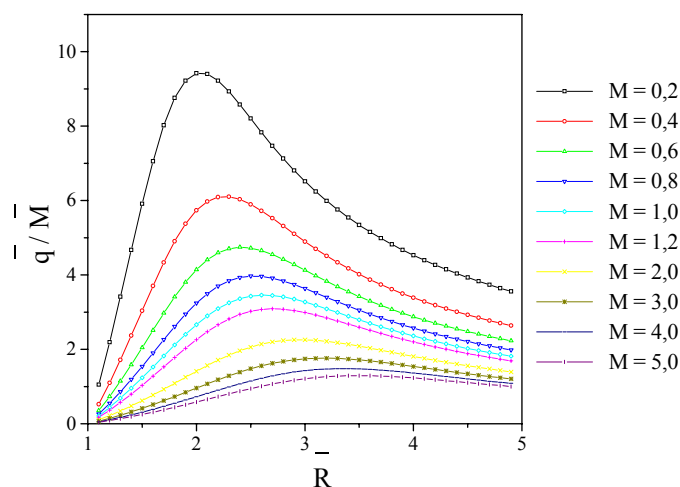
$$m_0 = (\bar{R} - 1) \sqrt{Bi_0 \frac{\Delta T_0^v}{1 + \lambda}} \tag{III.9}$$

Il y apparaît, à travers (III.9), qu'une augmentation dans les valeurs de la masse réduite  $\bar{M}$  fait chuter la valeur de  $m_0$  qui à son tour fait augmenter la valeur du rendement. (cf. Figure III.2)

• **Dissipation thermique**

La représentation du flux spécifique, en fonction du rayon réduit pour différentes masses réduites est indiquée sur la figure suivante.

Ces évolutions montrent une augmentation de la valeur du flux spécifique conductif en fonction du rayon réduit jusqu'à l'atteinte d'un maximum qui voit sa valeur diminuer avec l'augmentation de la masse réduite de l'ailette, ce qui se traduit par une augmentation de la dimension caractéristique optimale de cette dernière.



**Figure III.12 :** Influence de la masse réduite sur le flux spécifique pour un régime laminaire  $\nu = 0,25$  et, un coefficient de température  $\lambda = 0,1$

L'augmentation de la masse réduite  $\bar{M}$  de l'ailette a pour conséquence la diminution du flux spécifique. En effet, à  $Bi_0$  et  $\delta_0$  donnés, l'augmentation de la masse réduite  $\bar{M}$  se traduit par l'augmentation de la longueur caractéristique de l'ailette (III.10). Il en résulte une surface convectif plus grande, une résistance convectif plus faible et en conséquence une dissipation thermique qui voit sa valeur diminuer avec l'augmentation de la masse réduite.

$$\bar{R} - 1 = \frac{L}{r_1} = \frac{\bar{M} r_1}{\pi \delta_0} \tag{III.10}$$

### III.2.6 Conclusion

La fiabilité et l'espérance de vie d'un composant électronique sont directement liées à son régime thermique. Les pannes sont souvent dues à une température excessive, entre 85 °C et 125 °C au maximum, et aux variations de température dans celui-ci, au stress et à la fatigue thermique.

En guise de conclusion de cette partie de résultats, l'étude paramétrique nous a permis de percevoir l'effet des différents paramètres de la solution analytique sur le rendement de l'ailette annulaire rectangulaire, sur sa dissipation thermique ainsi que sur ses caractéristiques optimales à savoir : le flux spécifique maximal et la longueur caractéristique optimale.

Dans le paragraphe suivant, nous envisageons l'estimation des écarts occasionnés entre le cas non-uniforme étudié précédemment, à propriétés thermophysique variables (cas réel), et les cas où l'on considère une uniformité de ces paramètres,  $h$  et/ou  $k$ , afin d'évaluer les erreurs engendrées lors de l'adoption de l'une ou de l'ensemble de ces hypothèses.

### III.3 Erreurs commises suite à la considération d'une uniformité des coefficients de transfert

L'un des secteurs d'intérêt courant d'étude des ailettes est la prévision de leurs performances pour des conditions thermiques variables. De telles conditions sont souvent produites dans les applications telles que les capteurs solaires, les composants électroniques, les moteurs à combustion interne, les outils de coupe etc.

Bien que conjugué des problèmes de transfert thermique ont été beaucoup traités, seulement quelques travaux sur les ailettes ont pris en compte l'association entre la convection et la conduction. Il semblerait que l'étude du transfert thermique aux seins des ailettes, avec paramètres thermiques variables soit indispensable.

Le présent paragraphe a pour but de mettre en évidence, le transfert thermique à travers une ailette annulaire, de section droite rectangulaire. En effet, après avoir représenté l'évolution des rendements en fonction du paramètre caractéristique de l'ailette dans la partie précédente (cf.III.2), nous allons confronter les résultats obtenus pour lesquels  $h$  et  $k$  subissent des variations en fonction de la température avec ceux obtenues en assumant une uniformité des coefficients de transfert et ce, afin d'estimer les écarts occasionnés.

L'étude entreprise à été menée en considérant trois cas de figures, à savoir : uniformité de la conductivité thermique  $k$  ainsi que celle du coefficient d'échange  $h$ , variation du coefficient de convection suivant une loi exponentielle et enfin, pour le dernier cas, de la conductivité thermique suivant une loi linéaire.

La supposition de l'uniformité de  $h$  et/ou de  $k$  entraîne systématiquement des écarts par rapport à la solution réelle en matière de rendement et de flux thermique et qui influent sur les caractéristiques optimales de l'ailette.

Nous définissons à présent l'écart, appelé aussi erreur relative commise, par la relation suivante :

$$\text{Ecart} = 100 \frac{G_{nu} - G_u}{G_{nu}} \quad (\text{III.11})$$

avec :

- $G$  : Grandeur calculée : rendement ou flux spécifique ;
- $G_{nu}$  : Grandeur calculée pour  $h$  et  $k$  variables en fonction de la température ;
- $G_u$  : Grandeur calculée pour l'un des trois cas cités ci-dessus,  $h$  et/ou  $k$  uniformes.

### III.3.1 Uniformité de $h$ et de $k$

Pour cette configuration qui consiste à supposer une conductivité thermique et un coefficient de transfert uniformes, donc l'exposant  $\nu$  et le coefficient de température  $\lambda$  sont nuls.

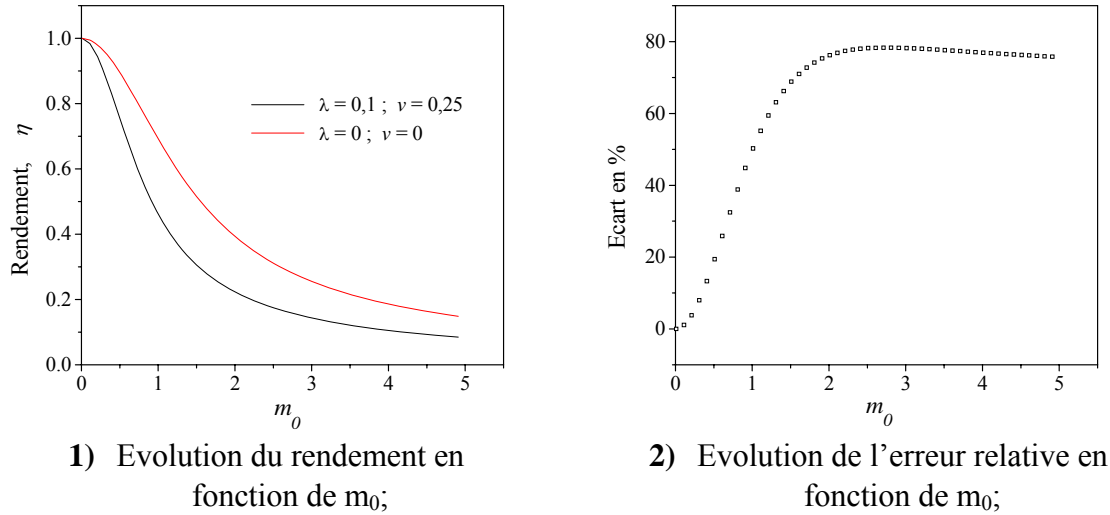
Donc, dans ce qui suit nous comparons par rapport au cas de référence (celui qui tient compte de la variabilité simultanée de  $h$  et  $k$ ) l'évolution du rendement et celle du flux spécifique de chaleur lorsque les coefficients  $h$  et  $k$  sont pris tous deux prix uniformes.

- **Rendement de l'ailette**

Dans cette partie de l'étude nous envisageons de suivre l'évolution du rendement en fonction des deux caractéristiques de l'ailette : le nombre de Biot modifié  $m_0$  et le rayon réduit  $\bar{R}$ .

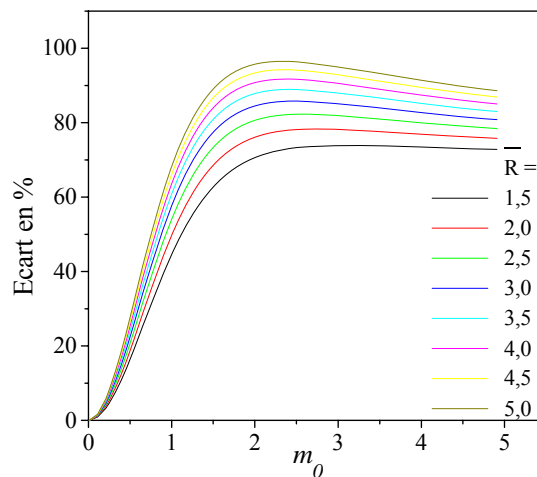
La figure (III.13.1) rend compte des variations du rendement en fonction de  $m_0$  pour un rayon réduit  $\bar{R}$  égal à 2. Elle compare, par rapport au cas de référence ( $\nu = 0,25$  ;  $\lambda = 0,1$ ), la configuration pour laquelle  $h$  et  $k$  sont uniforme ( $\nu = 0$  ;  $\lambda = 0$ ).

La figure (III.13.2), pour sa part, exprime l'évolution de l'écart existant entre les deux configurations schématisées à travers la figure (III.13.1) et ce dans tout le domaine de  $m_0$  étudié.



**Figure III.13 :** Evolution du rendement et de l'erreur relative en fonction de  $m_0$  en supposant  $h$  et  $k$  uniformes pour  $\bar{R}=2$  et  $\Delta T_0 = 100$  K

Nous constatons que l'erreur commise, représentée par l'écart en pourcentage, augmente suite à l'augmentation de  $m_0$ . Elle prend comme valeur moyenne, moyennée sur tout le domaine étudié, 63,21 % pour un rayon réduit égal à 2. Pour les autres valeurs de rayon réduit, l'écart est illustré en fonction de  $m_0$  à travers la figure (III.14) suivante, sa valeur sera moyennée sur tout le domaine de  $m_0$  et sera tabulée ci-après.



**Figure III.14 :** Evolution de l'erreur relative commise en fonction de  $m_0$  pour différents rayons réduits, en supposant  $h$  et  $k$  uniforme.

Sur cette dernière figure, il y apparaît que pour les faibles valeurs de  $m_0$  (inférieures à 0,3), l'écart relatif reste toujours inférieur à 10 % et ce, pour les différentes valeurs du rayon réduit étudiés. Par contre, nous mesurons une augmentation considérable de cette erreur au fur et à mesure de l'augmentation de  $m_0$ . Cette élévation est moins influencée par l'augmentation du rayon réduit.

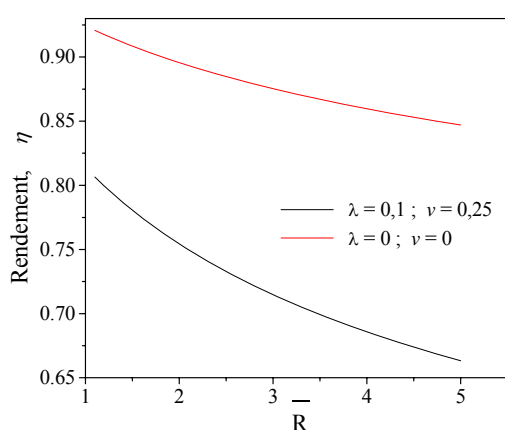
Les erreurs moyennées sur tout le domaine de  $m_0$  étudié, pour les différents rayons réduits, sont représentées sur le tableau suivant.

**Tableau III.2 :** Erreurs relatives commises sur le rendement en supposant  $h$  et  $k$  uniforme dans l'estimation de la valeur du rendement pour différentes valeurs de rayon réduit

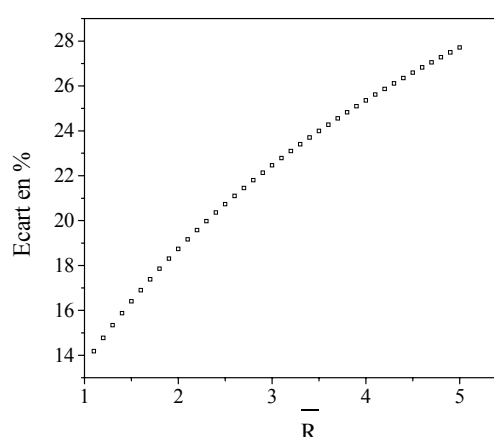
$\bar{R}$	Ecart moyen %
1,5	59,24
2,0	63,21
2,5	66,58
3,0	69,52
3,5	72,10
4,0	74,40
4,5	76,47
5,0	78,36

Nous constatons que l'écart moyen est, dans tous les cas, supérieurs à 50 % et qu'une augmentation de 0,5 dans la valeur du rayon réduit fait augmenter l'erreur moyennée d'une valeur qui ne dépasse pas 4 %.

Examinons de près l'effet du rayon réduit sur le rendement calculé. A cet effet, l'évolution du rendement est représentée, sur la figure (III.15.1), en fonction du rayon réduit pour un nombre de Biot modifié  $m_0$  égal à 0,5. L'évolution de l'écart occasionné, suite à cette considération, est aussi représentée en fonction du rayon réduit sur la figure (III.15.2).



1) Evolution du rendement en fonction du rayon réduit ;

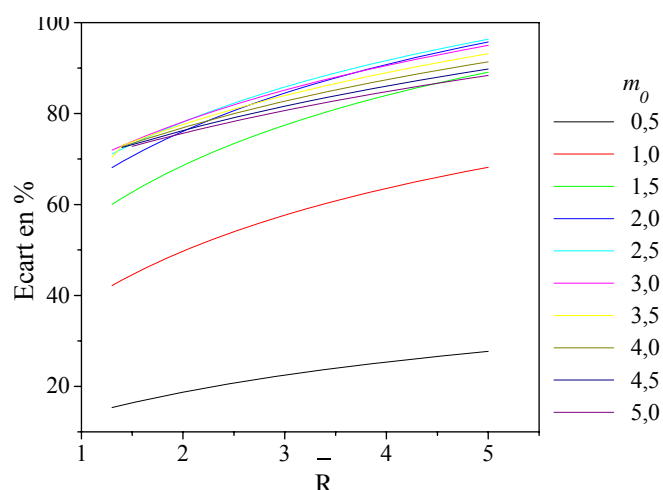


2) Evolution de l'erreur commise en fonction du rayon réduit ;

**Figure III.15 :** Evolution en fonction de  $\bar{R}$  du rendement et de l'erreur relative en supposant  $h$  et  $k$  uniformes pour  $m_0 = 0,5$  et  $\Delta T_0 = 100$  K

La figure (III.15.2) montre que l'écart (ou l'erreur) est en constante augmentation suite à l'augmentation du rayon réduit. Notons qu'une augmentation du rayon réduit de 5 unités amplifie l'erreur de 14 %. Cette dernière moyennée sur tout le domaine de variation du rayon réduit [1, 5] pour un  $m_0 = 0,5$  est estimée égale à 22,06 %.

Nous terminons cette partie de l'étude par le calcul des erreurs commises pour différentes valeurs de  $m_0$ . Les résultats pour des valeurs de  $m_0$  comprises entre 0,5 et 5 en fonction du rayon réduit sont représentés sur la figure (III.16) et les erreurs moyennées, sur tout le domaine de  $\bar{R}$  étudié, sont réunies dans le tableau (III.3).



**Figure III.16 :** Evolution de l'erreur relative en fonction du rayon réduit pour différentes valeurs de  $m_0$  pour  $h$  et  $k$  uniformes

Ces évolutions montrent bien que la variation de  $m_0$  influe considérablement sur l'erreur relative commise. En effet, elle passe d'une valeur moyenne de 22,06 % pour  $m_0 = 0,5$  à 57,46% pour  $m_0 = 1,0$ . En revanche, comme vu précédemment (cf. Tab III.3), la variation du rayon réduit n'entraîne pas d'aussi importants écarts.

**Tableau III.3 :** Erreurs relatives commises sur l'évolution du rendement en fonction de  $\bar{R}$  pour différentes valeurs de  $m_0$  pour  $h$  et  $k$  uniformes

$m_0$	Ecart moyen %
0,5	22,06
1,0	57,46
1,5	77,20
2,0	84,32
2,5	85,74
3,0	85,15
3,5	83,98
4,0	83,14
4,5	82,06
5,0	81,38

Ainsi, nous concluons que l'hypothèse concernant l'uniformité des propriétés thermophysiques ( $h$  et  $k$ ) induit des erreurs qui peuvent dépasser 80 %. Ces écarts sont accentués pour les valeurs de  $m_0$  supérieures à 0,5 %.

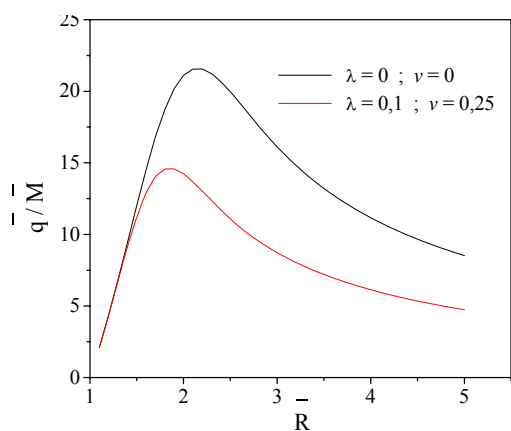
En effet, l'augmentation de la valeur de  $m_0$  implique une augmentation de la valeur du nombre de Biot qui entre dans l'expression du rendement et qui varie de façon spectaculaire avec la température.

• **Dissipation thermique**

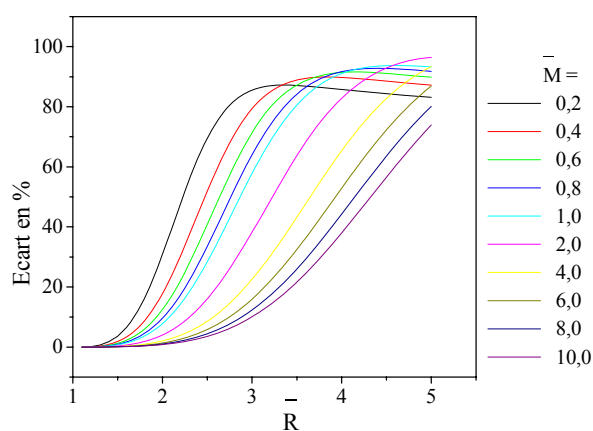
Le flux spécifique adimensionnel pour les deux configurations précédentes est également représenté en fonction du rayon réduit sur la figure (III.17.1) ci-après et ce, pour une masse réduite égale à 0,1.

Nous constatons que pour des valeurs de rayon réduit inférieurs à 1,5 l'erreur commise est minimale, par contre, elle avoisine 64,27 % pour les valeurs supérieures. De plus, la longueur optimale de l'ailette est augmentée de 17,39 % en adoptant l'approximation prescrite.

La figure (III.17.2) montre les écarts relatifs obtenus en fonction du rayon réduit et ceci pour des masses réduites comprises entre 0,2 et 10. Le tableau (III.4) résume les valeurs moyennées de ces erreurs.



1) Evolution du flux adimensionnel en fonction du rayon réduit pour une masse réduite égale à 0,1



2) Evolution de l'erreur relative commise en fonction du rayon réduit pour différente masse réduite

**Figure III.17 :** Influence de l'uniformité  $h$  et de  $k$  sur le flux spécifique

Nous remarquons que l'erreur moyennée tend à diminuer avec l'augmentation de la masse réduite. Notons, tout de même, que ces erreurs restent toujours non négligeables et que l'effet de l'augmentation de la masse réduite se manifeste ici en diminuant l'erreur commise par sa variation qui demeure importante.

**Tableau III.4 :** Erreurs relatives commises en considérant  $h$  et  $k$  uniformes lors de l'estimation du flux spécifique adimensionnel pour différentes valeurs de masse réduite

$\bar{M}$	Ecart moyen %
0,2	62,10
0,4	58,82
0,6	56,21
0,8	53,98
1,0	52,02
2,0	44,48
4,0	35,01
6,0	29,02
8,0	24,83
10,0	21,72

### III.3.2 Uniformité de $h$ et variabilité de $k$

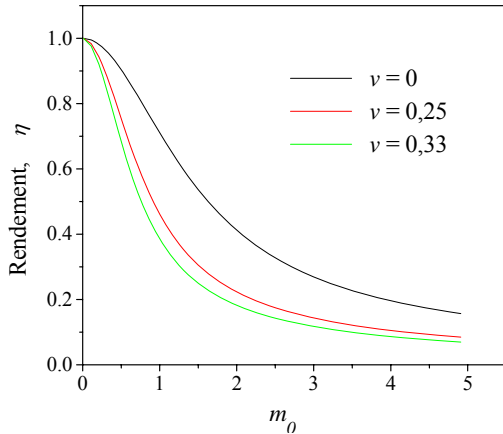
Pour cette deuxième configuration nous suivons l'évolution du rendement en fonction de  $m_0$  pour une seule valeur de rayon réduit prise égale à 2, où seule la conductivité thermique varie avec la température. Pour cela, prenons un coefficient de température  $\lambda$  égal à 0,1.

Dans ce qui suit, nous présentons aussi bien pour le rendement ( $\bar{R} = 2$ ) que pour la dissipation thermique par unité de masse ( $\bar{M} = 0,1$ ), les écart relevé entre la configuration pour laquelle le coefficient de transfert  $h$  a été pris uniforme et celle où la variabilité de ce dernier est prise en compte, selon que l'on trouve en régime laminaire ( $\nu = 0,25$ ) ou turbulent ( $\nu = 0,33$ ).

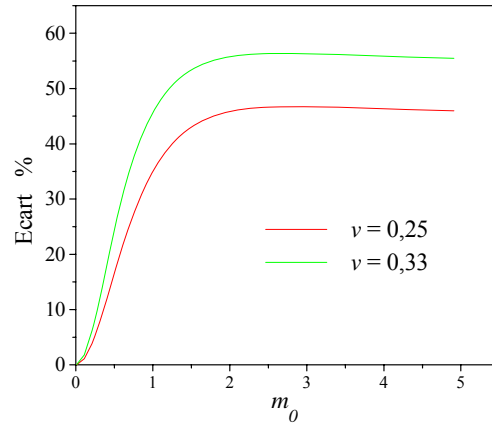
- **Rendement de l'ailette**

La figure (III.18) montre que pour la configuration pour laquelle  $h$  est uniforme les valeurs du rendement sont, quelle que soit la valeur de  $m_0$ , supérieures à celle trouvées que ce soit en régime laminaire ( $\nu = 0,25$ ) qu'en régime turbulent ( $\nu = 0,33$ ) en particulier.

Nous enregistrons des écarts inférieurs à 10 % pour les deux régimes étudiés et ceci, pour des valeurs de  $m_0$  qui restent inférieures à 0,3. Cette erreur augmente par la suite, au fur et à mesure de l'augmentation de  $m_0$ , pour avoisiner 45 % pour le régime laminaire et 55 % pour le régime turbulent pour des valeurs de  $m_0$  supérieurs à 2.



1) Evolution du rendement en fonction de  $m_0$  ;



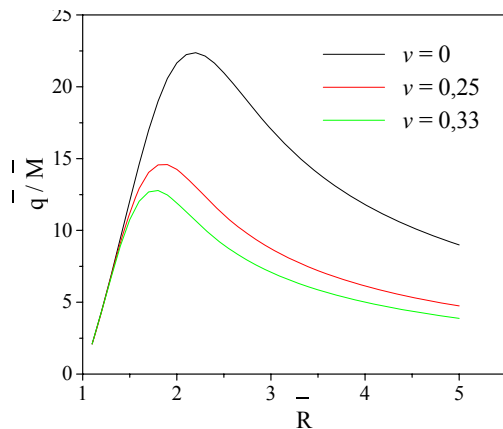
2) Evolution de l'erreur relative commise en fonction de  $m_0$  ;

**Figure III.18 :** Influence de l'uniformité de  $h$  sur le rendement pour  $\bar{R}=2$ ,  $\lambda=0,1$  et  $\Delta T_0=100$  K.

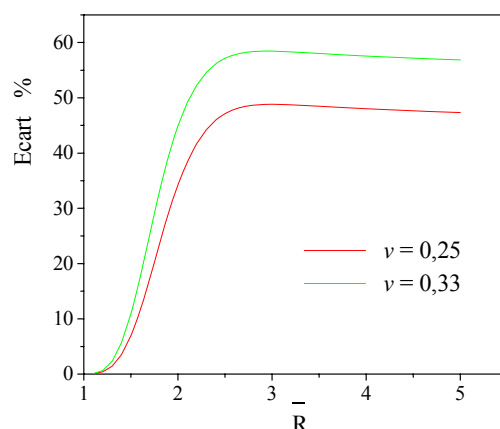
• **Dissipation thermique**

Le flux spécifique, représenté sur la figure (III.19.1), reçoit une très forte augmentation dans ses valeurs et ce, suite à l'adoption d'un  $h$  uniforme ( $\nu=0$ ). Les écarts relatifs mesurés, moyennés sur tout le domaine étudié de  $\bar{R}$ , atteignent 47 % et 58 % en comparant, respectivement, le cas uniforme avec le cas laminaire et le cas turbulent.

De même, en passant du cas uniforme au cas laminaire on assiste à une diminution de 15,78 % dans la longueur caractéristique optimale de l'ailette. Cette dernière, atteint 22,22 % pour le cas turbulent.



1) Evolution du flux adimensionnel en fonction du rayon réduit;



2) Evolution de l'erreur relative commise en fonction du rayon réduit;

**Figure III.19 :** Influence de l'uniformité de  $h$  sur le flux spécifique pour  $\bar{M}=0,1$ ,  $\lambda=0,1$  et  $\Delta T_0=100$  K.

Remarquons que les écarts trouvés, pour cette deuxième configuration ( $h$  uniforme), sont moins importants que ceux relevés dans la première configuration où  $h$  et  $k$  étaient uniformes, mais ils restent toujours importants. (cf. III.3.1)

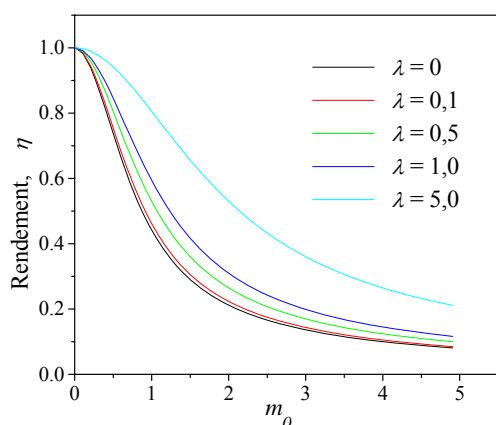
### III.3.3 Uniformité de $k$ et variabilité de $h$

Dans cette dernière configuration, nous présentons les courbes de rendement en fonction de  $m_0$  et de dissipation thermique en fonction de  $\bar{R}$  en faisant varier uniquement  $h$  et où la conductivité thermique est uniforme ( $\lambda = 0$ ). Afin d'apprécier la validité de cette hypothèse, nous procédons, comme pour les deux premières configurations, à la comparaison systématique avec les cas de référence, des solutions pour lesquelles la conductivité thermique varie avec la température. Pour cela, nous avons pris quatre valeurs de  $\lambda$  pour prendre en compte cette variation.

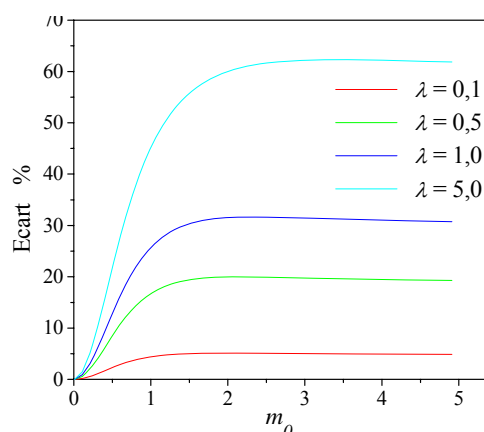
- **Rendement**

Nous représentons sur la figure (III.20), l'évolution du rendement et les écarts correspondants entre les solutions de référence et le cas choisi, en fonction de  $m_0$  en régime laminaire et ce pour un rayon réduit égal à 2.

L'examen des évolutions des écarts de la figure (III.20.2), montre que ces derniers augmentent avec l'augmentation du coefficient de température. Nous constatons de plus que les erreurs commises, pour des valeurs de  $m_0$  inférieures à 0,3, ne dépassent pas 10 % quelle que soit la valeur du coefficient de température. Par contre, cet écart subit une augmentation considérable suite à l'augmentation de  $m_0$  pour se stabiliser pour des  $m_0$  supérieures à 2,5.



1) Evolution du rendement en fonction de  $m_0$



2) Evolution de l'erreur relative commise en fonction de  $m_0$

**Figure III.20 :** Influence de l'uniformité de  $k$  sur le rendement pour différentes valeurs de  $\lambda$ , en régime laminaire,  $\bar{R} = 2$  et  $\Delta T_0 = 100$  K.

Les erreurs commises moyennées, sur l'intervalle de variation de  $m_0$   $[0, 5]$ , sont regroupées dans le tableau ci-dessous. Toutefois, nous remarquons que ces écarts sont beaucoup moins importants que ceux mesurés dans les deux configurations précédentes.

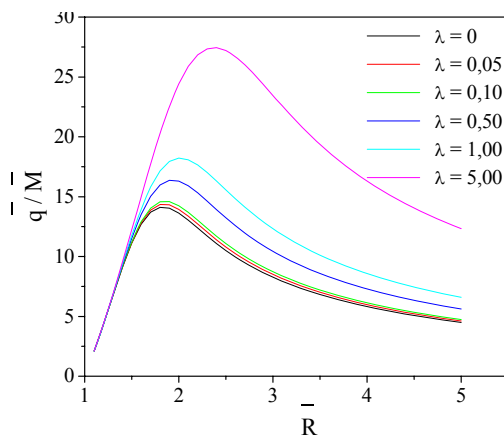
**Tableau III.5 :** Erreurs relatives commises en prenant  $k$  uniforme ( $\lambda = 0$ ) lors de l'estimation du rendement pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

$\lambda$	Ecart moyen %
0,1	4,39
0,5	17,12
1,0	27,02
5,0	52,10

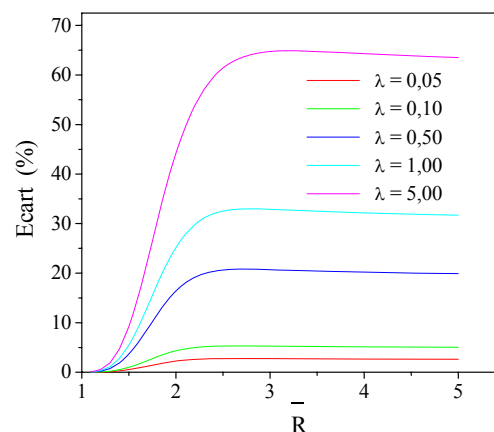
### • Dissipation thermique

Les figures (III.22) traduisent l'évolution du flux spécifique et de l'erreur relative commise dans les conditions de la troisième configuration, et ce, fonction du rayon réduit en régime laminaire et pour une masse réduite de 0,1.

Notons que le flux réduit, suite à l'augmentation du coefficient de température subit, un accroissement ne dépassant pas 10 % tant que le rayon réduit reste inférieur à 1,5. Ces erreurs s'amplifient avec l'augmentation du rayon réduit pour se stabiliser aux valeurs de rayon réduit supérieures à 2,5. Ces erreurs sont regroupées dans le tableau (III.6).



1) Evolution du flux adimensionnel en fonction du rayon réduit ;



2) Evolution de l'erreur relative commise en fonction du rayon réduit ;

**Figure III.22 :** Influence de l'uniformité de  $k$  sur le flux spécifique pour différentes valeurs de  $\lambda$ , en régime laminaire,  $\bar{M}=0,1$  ;  $\nu = 0,25$  ;  $\Delta T_0 = 100$  K

Notons également que la longueur caractéristique optimale de l'ailette étudiée est aussi affectée par la non prise en compte de la variation de la conductivité thermique ( $\lambda = 0$ ). Ces erreurs sont moyennées sur l'intervalle de variation de  $\bar{R}$  [1, 5] pour les différents coefficients de température.

**Tableau III.6 :** Erreurs relatives commises en prenant  $k$  uniforme ( $\lambda = 0$ ) lors de l'estimation du flux adimensionnel et la longueur caractéristique de l'ailette.

$\lambda$	Ecart moyen % ( $\bar{M} = 0,1$ )	
	Flux réduit	Longueur caractéristique
0,05	2,23	2,70
0,10	4,29	5,26
0,50	16,75	7,69
1,00	26,46	10,00
5,00	51,33	25,00

### III.3.4 Conclusion

Le tableau suivant résume les erreurs relatives relevées en comparant avec la solution réelle ( $h$  et  $k$  variables avec la température) les trois configurations étudiées précédemment :  $h$  et  $k$  uniformes,  $h$  uniforme et  $k$  variable ( $\lambda = 0,1$ ) et enfin  $k$  uniforme et  $h$  variable ( $\nu = 0,25$ ).

**Tableau III.7 :** Erreurs relatives commises dans l'estimation du rendement, du flux spécifique et de la longueur caractéristique de l'ailette annulaire rectangulaire pour les trois configurations étudiées.  $\bar{M} = 0,1$  et  $\Delta T_0 = 100$  K

Considération	Erreurs commises (%)		
	Rendement $\bar{R} = 2$	Flux réduit $\bar{M} = 0,1$	Longueur caractéristique $\bar{M} = 0,1$
Uniformité de $h$ et de $k$	63,21	66,70	17,39
Uniformité de $h$ pour $\lambda = + 0,1$	45	47	15,78
Uniformité de $k$ pour $\nu = 0,25$	4,39	4,29	5,26

Nous constatons que les plus faibles erreurs relatives commises sont celles correspondant à la troisième configuration, à savoir  $k$  uniforme et  $h$  variable ( $\nu = 0,25$ ). Néanmoins et dans l'ensemble, maintenir uniforme l'une ou les deux propriétés thermophysiques engendre des écarts non admissibles dans la détermination du rendement, du flux spécifique et de la longueur caractéristique de l'ailette annulaire rectangulaire, en particulier lorsque les deux sont uniformes.

### **III.4 Conclusion et perspectives**

Tenant compte de l'indispensabilité de l'association entre la convection et la conduction dans l'analyse du transfert thermique à travers l'ailette, nous avons, dans un premier temps, analysé numériquement le transfert de chaleur à travers l'ailette annulaire de profil rectangulaire pour pouvoir ensuite valider la solution analytique approchée suite à l'adoption de certaines considérations simplificatrices justifiées par des écarts ne dépassant pas 2%.

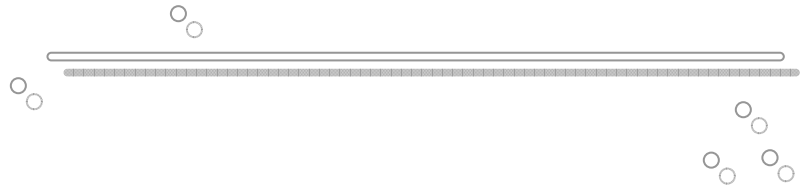
Le second volé, étudie l'effet des différents paramètres présents dans la solution approchée sur le rendement, le flux thermique et notamment sur la longueur caractéristique de l'ailette.

Les erreurs occasionnées par la considération d'une uniformité de la conductivité thermique et/ou dans des valeurs du coefficient de convection sont calculées par rapport au cas non uniforme. Ces écarts sont aussi importants que cette considération d'uniformité, des propriétés thermophysiques, devient intolérable.

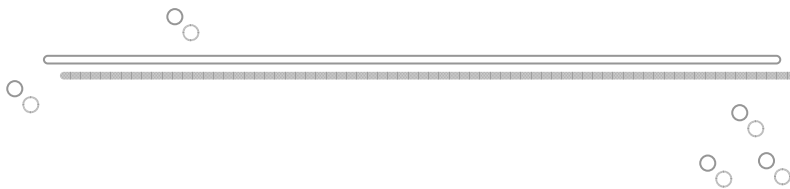
En fin, nous proposons de généraliser le problème, ceci en admettant une géométrie annulaire et une section droite variable. Espérer trouver une solution analytique pour un tel problème, en fonction de la constante de forme  $n$ , demeure non évident. Pour cela, plusieurs considérations simplificatrices s'avèrent indispensables afin de solutionner analytiquement un tel problème.

Une fois les hypothèses posées et validées, la solution analytique sera approchée et son domaine de validité sera déterminé en confrontant les résultats analytiques aux résultats numériques associés aux différentes géométries d'ailettes.

En définitive, ce travail nous permettra d'aboutir, non seulement à une solution analytique pour l'ailette annulaire rectangulaire mais également à celle de l'ailette annulaire, en général, quelle que soit la variation radiale de l'épaisseur de l'ailette.



*CHAPITRE IV :*  
*AILETTE ANNULAIRE*



## *L'AILETTE ANNULAIRE*

### **IV.1 Introduction**

Nous exposons dans cette dernière partie la résolution de la problématique généralisée de l'ailette annulaire, ceci en admettant une géométrie annulaire de section droite variable. Pour cela, plusieurs considérations simplificatrices s'avèrent indispensables afin de solutionner analytiquement un tel problème. Une fois les hypothèses posées et validées, la solution analytique sera approchée et son domaine de validité sera déterminé en confrontant les résultats analytiques aux résultats numériques associés aux différentes géométries d'ailettes.

De ce fait, cette étude résout le problème, dans un premier temps, numériquement pour ensuite passer à l'adoption d'hypothèses simplificatrices, justifiées par des écarts minimes afin de se rapprocher de la solution analytique adéquate. Partant de là, une résolution numérique du problème est impérative pour pouvoir, par la suite, lui confronter la solution analytique reposant sur les approximations suivantes.

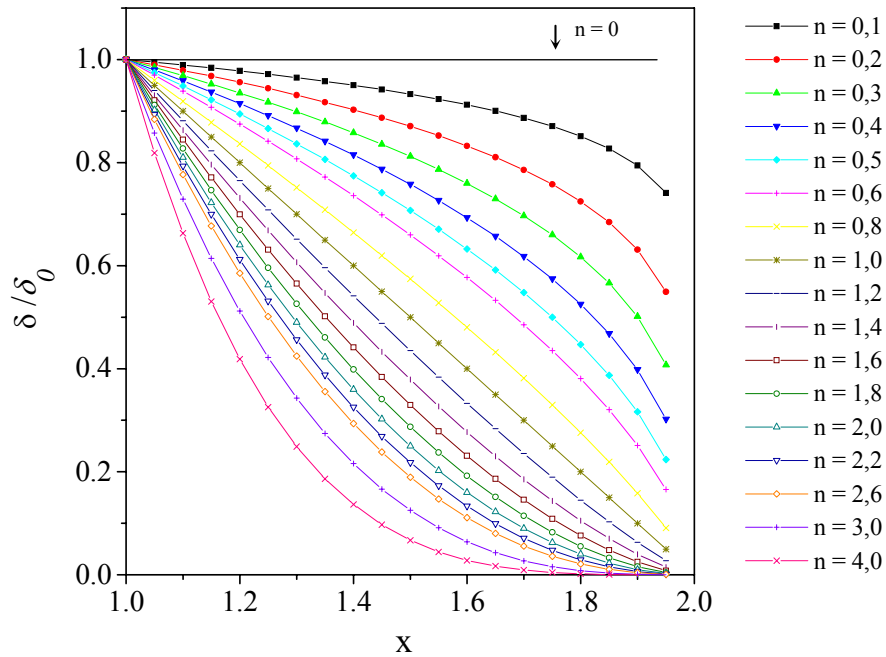
### **IV.2 Hypothèses du problème**

Les hypothèses adoptées restent identiques à celles posées dans la partie II.2, par contre nous exprimons l'épaisseur réduite de l'ailette annulaire en fonction de la constante de forme  $n$  :

$$\bar{\delta} = \left( \frac{\bar{R} - x}{\bar{R} - 1} \right)^n \quad (IV.1)$$

La figure (IV.1) traduit l'évolution radiale de la demi-épaisseur réduite de l'ailette pour un rayon réduit égale à 2. Elle représente différentes formes possibles pour une constante de forme  $n$  comprise entre 0,1 et 4. Notons que nous progressons de l'hyperbolique convexe ( $0 < n < 1$ ) à l'hyperbolique concave ( $n > 1$ ) en passant par l'ailette de section droite triangulaire ( $n = 1$ ).

Il est à noter que l'augmentation de la constante de forme  $n$  entraîne la diminution de l'épaisseur réduite de l'ailette, ce qui a pour conséquence une augmentation de la surface convective et une diminution de la masse du métal constituant cette dernière.



**Figure IV.1 :** Evolution radiale de la section droite de l'ailette annulaire pour diverses valeurs de n pour  $\bar{R}$  égal à 2

### IV.2.1 Mise en équation

L'équation de l'énergie adimensionnelle pour l'ailette annulaire de profil non uniforme, est donnée par l'expression reformulée, de l'équation (II.8), établie en chapitre II.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{\bar{R} - x} \right) \frac{d\phi}{dx} - \left[ \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^v \phi^v}{1 + \lambda \phi} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{n}{\bar{R} - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n}} \right] \phi = 0 \quad (IV.2)$$

$$m_0 = L \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{k_0 \delta_0}} \quad (IV.2.1)$$

### IV.2.2 Conditions aux limites

Partant des mêmes données théoriques et géométriques, le problème admet les mêmes conditions aux limites que celles prises dans le problème rectangulaire :

➤ La condition de Dirichlet qui s'écrit sous forme réduite, comme suit :

$$x = 1; \quad \phi(1) = 1 \quad (IV.2.2)$$

➤ La condition de Newman homogène qui s'écrit sous forme adimensionnelle comme suit :

$$x = \bar{R}; \quad \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\bar{R}} = 0 \quad (\text{IV.2.3})$$

Le problème ainsi posé, est régi par une équation simplement différentielle non linéaire, qui ne peut être intégrée, tel quelle, qu'en ayant recours à une procédure numérique.

### IV.3 Résolution numérique de l'équation de l'énergie

L'application de la méthode des différences finies reste commode dans ce cas. Nous avons mené les calculs avec un maillage uniforme. En effet, moyennant les schémas régressif et progressif qui découlent des développements de Taylor, nous exprimons la première et la seconde dérivée de l'équation (IV.2) comme suit :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (\text{IV.2.3})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (\text{IV.2.4})$$

L'écriture du terme source, de la partie renfermant la température réduite et de la constante de forme, représenté par le troisième terme de l'équation (IV.2), est reprise séparément :

$$S(\phi) = \frac{\Delta T_0^v \phi^{v+1}}{1 + \lambda \phi} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{n}{\bar{R} - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n}} \quad (\text{IV.2.5})$$

En effet, la linéarisation de l'expression ci-dessus, et ceci en utilisant la méthode de la tangente, reste indispensable pour une résolution complète de (IV.2). La forme discrétisée de ce terme s'écrit comme suit :

$$S(\phi) = S^* + \left( \frac{dS}{d\phi} \right)^* (\phi_p - \phi_p^*) \quad (\text{IV.2.6})$$

Où :  $S^*$  et  $\phi_p^*$  indiquent les valeurs de  $S(\phi)$  et  $\phi_p$  à l'itération précédente.

En substituant les expressions ainsi établies, nous obtenons une forme discrétisée qui s'écrit :

$$f_i \phi_i = e_i \phi_{i+1} + g_i \phi_{i-1} + h_i \quad (\text{IV.3})$$

avec :

$$e_i = \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{R-x} \right) \quad (\text{IV.3.1})$$

$$f_i = \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{m_0^2}{(R-1)^2} \left( \frac{dS}{d\phi} \right)^* \quad (\text{IV.3.2})$$

$$g_i = \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{R-x} \right) \quad (\text{IV.3.3})$$

$$h_i = S^* + \frac{m_0^2}{(R-1)^2} \left( \frac{dS}{d\phi} \right)^* \phi_p^* \quad (\text{IV.3.4})$$

### IV.3.1 Champ thermique réduit d'une ailette annulaire

L'algorithme de Tomas (balayage ligne par ligne) résoud l'expression algébrique ainsi établie. En effet, son application sur le premier nœud donne l'expression suivante :

$$\phi_1 = \frac{e_1}{f_1} \phi_2 + \frac{g_1 \phi_0 + h_1}{f_1} \quad (\text{IV.3.5})$$

Posons :

$$V_1 = \frac{e_1}{f_1} \quad (\text{IV.3.6})$$

$$W_1 = \frac{g_1 \phi_0 + h_1}{f_1} \quad (\text{IV.3.7})$$

Injectons (IV.3.2) et (IV.3.3) dans (IV.3.5) nous aboutissons à la forme suivante :

$$\phi_1 = V_1 \phi_2 + W_1 \quad (\text{IV.3.8})$$

Par récurrence, nous aboutissons aux expressions généralisées suivantes :

$$V_i = \frac{e_i}{f_i - g_i V_{i-1}} \quad (\text{IV.3.9})$$

$$W_i = \frac{g_i \phi_0 (W_{i-1} + h_i)}{f_i - g_i V_{i-1}} \quad (\text{IV.3.10})$$

En substituant les expressions généralisées ci-dessus, nous aboutissons à l'expression de la température réduite pour tous les nœuds recouvrant le domaine de l'étude.

$$\phi_1 = V_1 \phi_{1+1} + W_1 \quad (\text{IV.4})$$

Une fois le champ thermique établi, nous envisageons le calcul du rendement de l'ailette. La procédure de calcul est illustrée dans le paragraphe (IV.3.3).

### IV.3.2 Rendement de l'ailette

L'expression du rendement est formulée en s'appuyant sur a définition, donnée dans le premier chapitre et interprétée dans le second. L'expression générale du rendement thermique d'une ailette annulaire, en fonction de la constante de forme, s'écrit comme suit :

$$\eta = - \frac{\pi \delta_0 r_1^2 (\bar{R}-1) \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=1}}{2S(n) m_f^2(\phi)} \quad (\text{IV.5})$$

où :

$$S(n) = \int_1^{\bar{R}} 4 \pi r_1^2 x \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{n}{\bar{R}-1} \right) \left( \frac{\bar{R}-x}{\bar{R}-1} \right)^{n-1} \right]^2 \right]^{1/2} dx \quad (\text{IV.6})$$

et :

$$m_f^2(\phi) = \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^v \phi^v}{1 + \lambda \phi} \quad (\text{IV.7})$$

### IV.3.3 Algorithme de calcul du rendement

Dans ce qui suit, nous élaborons l'algorithme général qui permet le calcul du rendement pour une ailette annulaire en fonction de sa forme géométrique.

En effet, nous commençons par définir l'étendue physique en répartissant un nombre de nœuds noté Q, le calcul est initialisé par un choix de l'épaisseur de l'ailette noté  $\delta_0$  à son point de rattachement ainsi que le rayon du tube  $r_1$  en gardant un rapport  $(\delta_0/r_1)$  égal à 0,01. Le calcul est poursuivi pour la détermination des valeurs de rendement pour différentes constantes de forme n, en considérant un rayon réduit égal à 2.

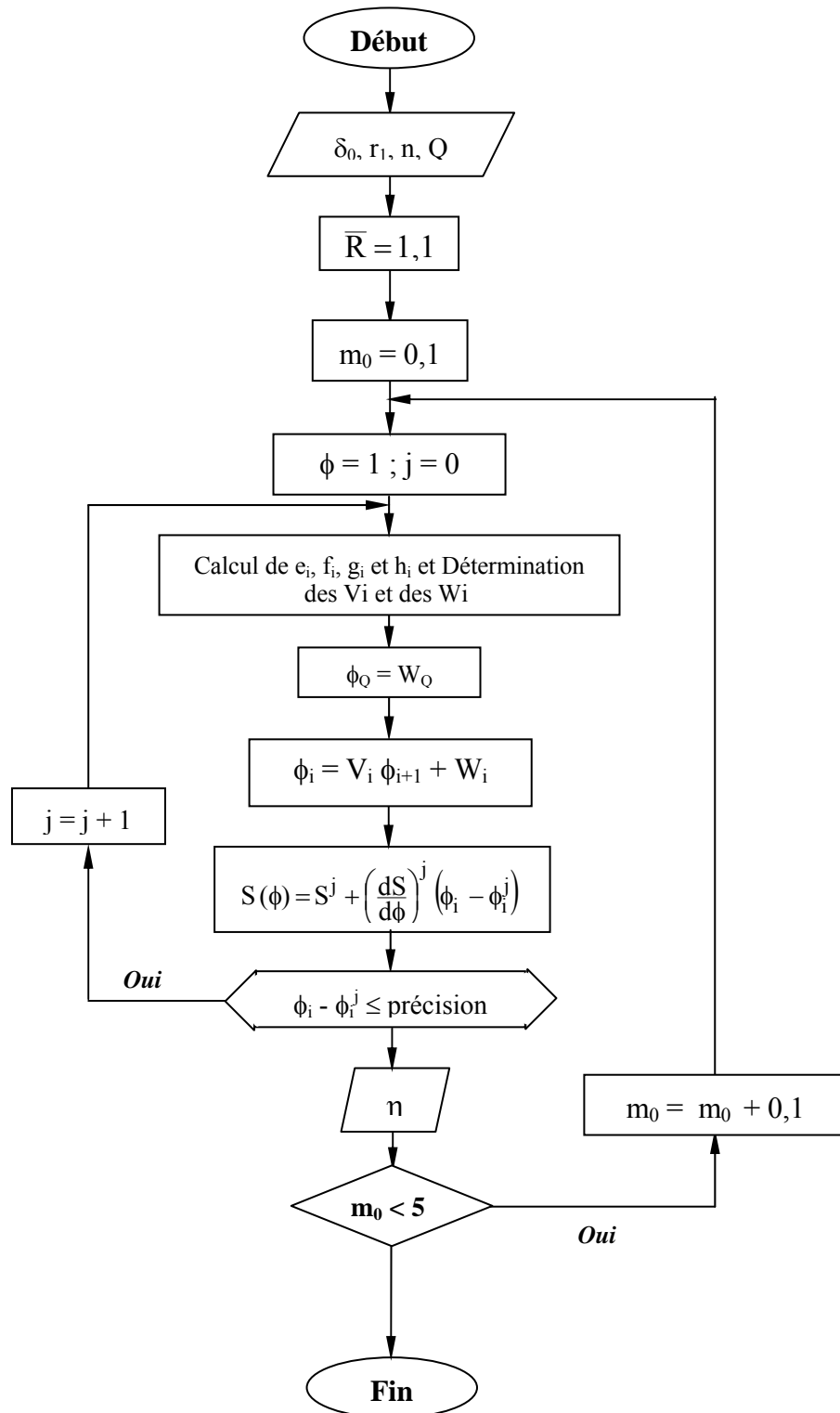


Figure IV.2: Procédure de calcul

Nous choisissons, dans cette étude, de travailler dans un régime laminaire et de considérer un coefficient de température égal à 0,1 et, une masse réduite prise égale à 0,1.

**b) Critère de convergence**

Lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs numériques obtenues pour la distribution de la température adimensionnelle, nous pouvons dire que le processus itératif a atteint sa convergence. Néanmoins, à la fin de chaque itération nous devons appliquer un test de convergence appelé aussi critère de convergence calculé à partir de l'équation suivante :

$$|\phi_i^{j+1} - \phi_i^j| \leq 10^{-4} \tag{IV.8}$$

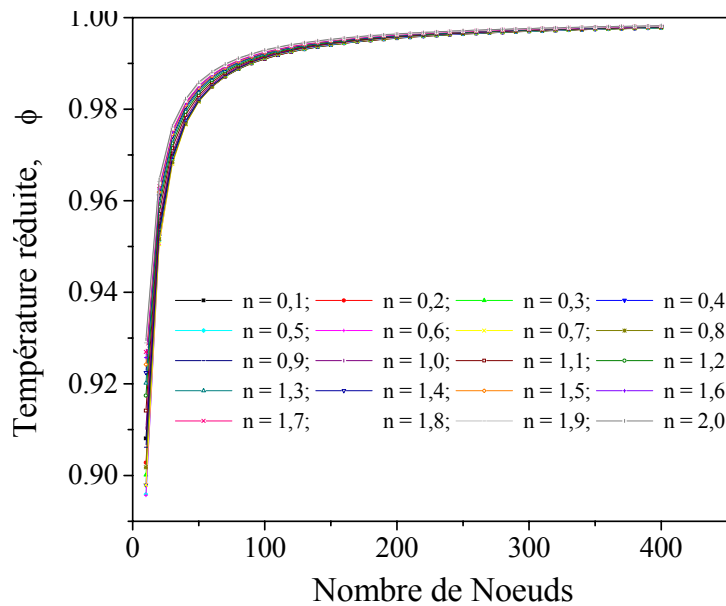
Où :

- $\phi_i^{j+1}$  : Température adimensionnelle actuelle au nœud i ;
- $\phi_i^j$  : Température adimensionnelle pour l'itération j précédente pour le nœud i.

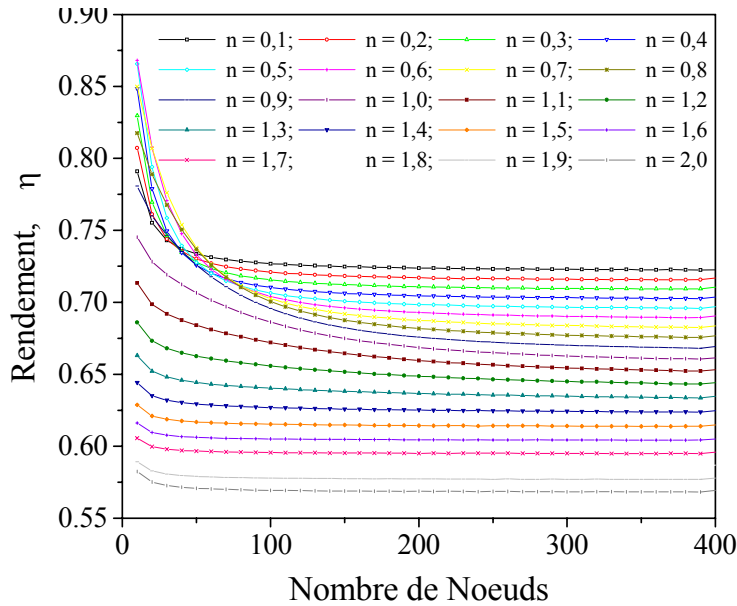
**d) Maillage optimal**

Afin de choisir le maillage optimal, nous représentons sur la figure (IV.3) l'évolution de la température réduite  $\phi$  et du rendement  $\eta$  en fonctions du nombre de nœuds pour un régime laminaire et un coefficient de température égal à 0,1 en choisissant un rayon réduit égal à 2 et  $m_0$  valant 0,5.

Notons que toutes les configurations physiques envisagées correspondent à une constante de forme n variant de 0,1 à 2.



1) Variation de la distribution de température en fonction du nombre de nœuds



2) Variation du rendement en fonction du nombre de nœuds

**Figure IV.3** : Unicité de la solution fonction de la constante de forme pour  $n$  allant de 0,1 à 2.  $\bar{R} = 2$  ;  $m_0 = 0,5$  ;  $\lambda = 0,1$  et  $\nu = 0,25$ .

D'après cette figure, l'augmentation du nombre de nœuds entraîne une diminution du rendement, néanmoins, nous retrouvons sur ces courbes (IV.3), une valeur optimale du nombre de nœuds égale à 300 au-delà de laquelle, la température réduite ainsi que le rendement demeurent constants quelle que soit la valeur de la constante de forme.

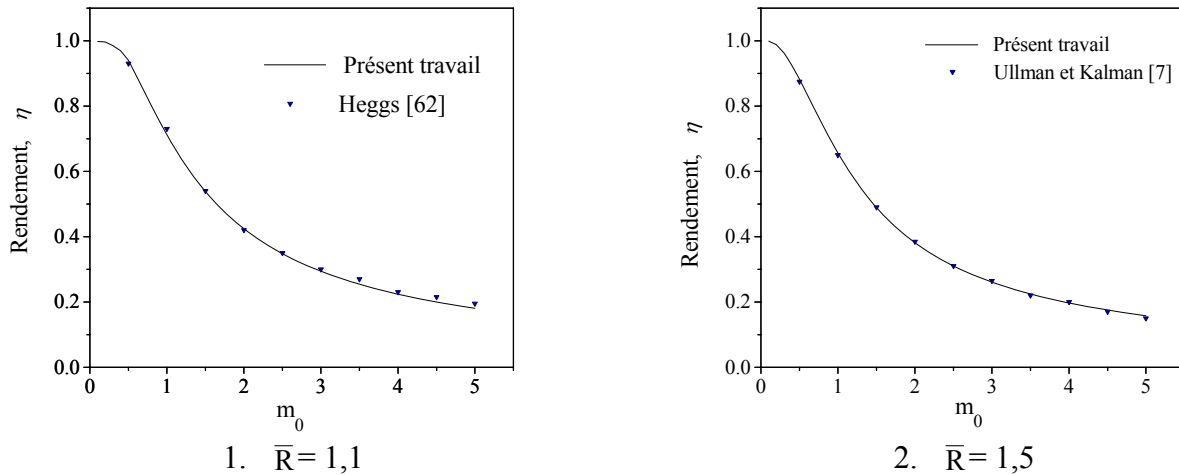
Ainsi, nous recommandons ce nombre de nœuds car il donne des solutions justes et physiquement interprétables pour tout le domaine définissant la constante de forme  $n$ .

### e) Validation du programme numérique

Ce problème général, caractérisé par des propriétés non-uniformes se prête mal à une éventuelle validation car la littérature n'a pas abordé ce cas. Cependant, nous comparons la solution numérique obtenue avec un cas limite de la littérature.

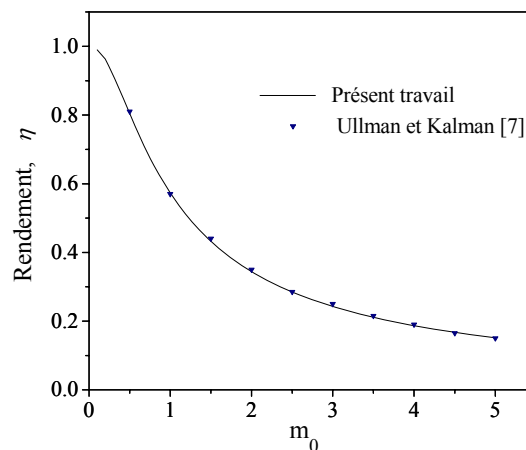
En comparant les résultats obtenus à ceux établis pour une géométrie triangulaire ( $n = 1$ ), la figure (IV.4) montre que l'écart en terme de rendement ne dépasse pas 3 %.

En ce qui concerne le travail de **Heggs** [62], l'écart estimé est de 2,72 % ; Mieux encore, l'écart ne dépasse guère 0,836 % en comparant avec le travail de **Ulmann** et **Kalman** [7].



**Figure IV.4 :** Validation de la solution numérique pour une ailette triangulaire ( $n = 1$ ) pour laquelle  $h$  et  $k$  sont uniformes.

La figure (VI.5), pour sa part, montre que l'écart entre le rendement numérique de l'ailette annulaire ayant une constante de forme égale à 2 et celui obtenu par **Ullman** et **Kalman** [7] n'est que de 0,77 %.



**Figure IV.5 :** Validation de la solution numérique pour une ailette parabolique ( $n = 2$ ) pour laquelle  $h$  et  $k$  sont uniformes.

Les faibles écarts calculés ci-dessus peuvent nous permettre de continuer notre étude en admettant que la solution numérique établie servira de référence pour ce qui vient après.

#### IV.4 Résolution analytique de l'équation de l'énergie

Aboutir à une solution analytique exige l'adoption de certaines approximations afin d'approcher la solution trouvée. Dans cette partie de l'étude, en plus de l'hypothèse admise et validée dans le paragraphe (II.4.1) nous procédons à la simplification des deux coefficients  $K_1$  et  $K_2$  de l'équation (IV.9).

La simplification est faite ici en effectuant le développement limité de chacune des expressions des deux coefficients en prenant le maximum de termes possible permettant d'aboutir à une solution analytique juste.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + K_1 \frac{d\phi}{dx} - K_2 \phi = 0 \quad (IV.9)$$

avec :

$$K_1 = \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{\bar{R} - x} \right) \quad (IV.9.1)$$

$$K_2 = \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^v \phi^v}{1 + \lambda \phi} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{n}{\bar{R} - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n}} \quad (IV.9.2)$$

$$m_0 = L \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{k_0 \delta_0}} \quad (IV.9.3)$$

#### IV.4.1 Considération admise pour une solution analytique approchée

La résolution analytique demeure non évidente à cause de la non linéarité du coefficient  $K_2$ . Rendre l'équation précédente linéaire impose l'adoption de l'approximation précédemment prises et justifiée par un écart ne dépassant pas 2 % pour une température réduite  $\phi$  comprise entre 1 et 0,7. (cf. II.4.1)

$$\frac{\Delta T_0^v \phi^v}{1 + \lambda \phi} \approx \frac{\Delta T_0^v}{1 + \lambda} \quad (IV.10)$$

$K_2$  sera alors donné par l'expression simplifiée suivante :

$$K_2 = \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^v}{1 + \lambda} \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{n}{\bar{R} - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n}} \quad (IV.9.2.1)$$

Cependant, cette approximation reste insuffisante pour solutionner analytiquement le problème. Nous nous sommes alors intéressés à l'ordre de grandeur des termes présents sous la racine carrée. En effet :

$$\frac{1}{4} \left( \frac{n}{\bar{R} - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n} = \left( \frac{1}{4} \left( \frac{n}{\bar{R} - x} \right)^2 \left( \frac{\delta_0}{r_1} \right)^2 \left( \frac{\bar{R} - x}{\bar{R} - 1} \right)^{2n} + 1 \right) \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n}$$

Sachant que :

1.  $\frac{\delta_0}{r_1} \approx 10^{-2}$
2.  $1 < x < \bar{R} \Rightarrow \left( \frac{\bar{R} - x}{\bar{R} - 1} \right) < 1$

Le terme sous la racine carrée peut être approché par :

$$\left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^{2n} \tag{IV.11}$$

La nouvelle expression de  $K_2$  sera donnée par :

$$K_2 \approx \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \left( \frac{\bar{R} - 1}{\bar{R} - x} \right)^n \tag{IV.9.2.3}$$

Avec ces deux approximations, le problème reste toujours relativement compliqué. Pour cela, nous procédons au développement en série de deux coefficients  $K_1$  et  $K_2$ , et en prenant en considération le maximum de termes.

$$K_1 = \frac{1}{x} - \frac{n}{(\bar{R}-x)} = \left( 1 - \frac{n}{(\bar{R}-1)} \right) - \left( 1 + \frac{n}{(\bar{R}-1)^2} \right) (x-1) + \left( 1 - \frac{n}{(\bar{R}-1)^3} \right) (x-1)^2 - \left( 1 + \frac{n}{(\bar{R}-1)^4} \right) (x-1)^3 + \left( 1 - \frac{n}{(\bar{R}-1)^5} \right) (x-1)^4 + o((x-1)^5) \tag{IV.9.1.1}$$

$$K_2 = \left( \frac{\bar{R}-1}{\bar{R}-x} \right)^n = \left\{ 1 + \frac{n}{\bar{R}-1} (x-1) + \left( \frac{n}{(\bar{R}-1)^2} + \frac{n(n-1)}{(\bar{R}-1)^2} \right) (x-1)^2 + \left( \frac{n}{(\bar{R}-1)^3} + \frac{n(n-1)}{(\bar{R}-1)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6(\bar{R}-1)^3} \right) (x-1)^3 + \left( \frac{n}{(\bar{R}-1)^4} + \frac{3n(n-1)}{2(\bar{R}-1)^4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(\bar{R}-1)^4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24(\bar{R}-1)^4} \right) (x-1)^4 + o((x-1)^5) \right\} \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \tag{IV.9.2.3}$$

En effet, remplacer les coefficients (IV.9.1.1) et (IV.9.2.3) dans l'équation (IV.9) revient à simplifier complètement cette dernière. Pour trouver une solution approchée, il s'avère qu'on doit s'arrêter au nième terme pour le coefficient  $K_1$  et au mième terme pour le coefficient  $K_2$ . Toutefois, fixer la valeur de  $n$  et de  $m$  nous permet la suggestion de différentes solutions possibles. Les expressions des coefficients  $K_1$  et  $K_2$ , pour les différentes solutions, sont représentées dans le tableau ci-après.

**Tableau IV.1** : Expressions des coefficients  $K_1$  et  $K_2$ 

		$K_1$	$K_2$
Combinaisons	C1	$1 - \frac{n}{(R-1)}$	$\frac{m_0^2}{(R-1)^2} \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \left\{ 1 + \frac{n}{R-1} (x-1) \right\}$
	C2	$1 - \frac{n}{(R-1)}$	$\frac{m_0^2}{(R-1)^2} \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \left\{ 1 + \frac{n}{R-1} (x-1) + \left( \frac{n}{(R-1)^2} + \frac{n(n-1)}{(R-1)^2} \right) (x-1)^2 \right\}$
	C3	$\left( 1 - \frac{n}{(R-1)} \right) - \left( 1 + \frac{n}{(R-1)^2} \right) (x-1)$	$\frac{m_0^2}{(R-1)^2} \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda}$
	C4	$\left( 1 - \frac{n}{(R-1)} \right) - \left( 1 + \frac{n}{(R-1)^2} \right) (x-1)$	$\frac{m_0^2}{(R-1)^2} \frac{\Delta T_0^y}{1 + \lambda} \left\{ 1 + \frac{n}{R-1} (x-1) \right\}$

S'arrêter à des termes d'ordres inférieurs n'est pas intéressant d'un point de vu physique, de même, développer  $K_1$  et  $K_2$  jusqu'à atteindre des ordres supérieurs nous prive d'une résolution analytique.

Afin de valider ces combinaisons nous avons confronté, plus loin, les résultats analytiques aux résultats numériques et les écarts trouvés (IV.12) confirmeront la validité (ou non) de ces approximations.

$$\text{Ecart} = 100 \frac{G_{\text{Num}} - G_{\text{Anal}}}{G_{\text{Num}}} \quad (\text{IV.12})$$

#### IV.4.2 Solutions analytiques approchées

Compte tenu des considérations posées ci-dessus, l'équation aux dérivées partielles (VI.9) peut donc être ramenée à une équation différentielle linéaire qui s'écrit, en fonction respectivement des combinaisons (C1, C2, C3 et C4) du tableau (IV), comme suit :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( 1 - \frac{n}{(R-1)^2} \right) \frac{d\phi}{dx} - \bar{m}_0^2 \left\{ 1 + \frac{n}{R-1} (x-1) \right\} \phi = 0 \quad (\text{VI.13.1})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( 1 - \frac{n}{(R-1)^2} \right) \frac{d\phi}{dx} - \bar{m}_0^2 \left\{ 1 + \frac{n}{R-1} (x-1) + \left( \frac{n}{(R-1)^2} + \frac{n(n-1)}{(R-1)^2} \right) (x-1)^2 \right\} \phi = 0 \quad (\text{VI.13.2})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( \left( 1 - \frac{n}{(R-1)} \right) - \left( 1 + \frac{n}{(R-1)^2} \right) (x-1) \right) \frac{d\phi}{dx} - \bar{m}_0^2 \phi = 0 \quad (\text{VI.13.3})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left( \left( 1 - \frac{n}{(R-1)} \right) - \left( 1 + \frac{n}{(R-1)^2} \right) (x-1) \right) \frac{d\phi}{dx} - \bar{m}_0^2 \left\{ 1 + \frac{n}{R-1} (x-1) \right\} \phi = 0 \quad (\text{VI.13.4})$$

avec :

$$\bar{m}_0^2 = \frac{m_0^2}{(\bar{R}-1)^2} \frac{\Delta T_0^\nu}{1 + \lambda} \quad (\text{VI.14})$$

Ces équations admettent pour solution des distributions de température réduite qui s'écrivent respectivement comme suit :

**a) Combinaison C1**

L'équation (VI.13.1) admet comme solution l'expression (VI.13.1.1) interprétée par le biais des fonctions "AiryAi" et "AiryBi" (voir Annexe).

$$\phi(x) = C_1 e^{g(x)} \text{AiryAi}(f(x)) + C_2 f(x) e^{g(x)} \text{AiryBi}(f(x)) \quad (\text{VI.13.1.1})$$

avec :

$$f(x) = - \left( - \frac{m_0^2 \Delta T_0^\nu n}{(\bar{R}-1)^3 (1+\lambda)} \right)^{1/3} \left\{ 4x m_0^2 n + \Delta T_0^\nu \left[ \bar{R}^3 - 3\bar{R}^2 - 2n + 4n \bar{R} \lambda + \bar{R}^3 \lambda + 3\bar{R} - 2n \bar{R}^2 \lambda - 4m_0^2 n - 3\bar{R}^2 \lambda + \bar{R} \lambda n^2 + 3\bar{R} \lambda - 2n \lambda - 4m_0^2 \Delta T_0^\nu (\bar{R}-1) - 1 - \lambda - 2n \bar{R}^2 + 4n \bar{R} - n^2 (1+\lambda) + n^2 \bar{R} \right] \right\} / 4m_0^2 n$$

$$g(x) = \frac{n - \bar{R} + 1}{2(\bar{R}-1)} x$$

La détermination des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  fait appel aux conditions aux limites (VI.2.2) et (VI.2.3) ceci en résolvant un système de deux équations à deux inconnues. Nous obtenons les expressions suivantes :

$$C_1 = \frac{C_{1.1}}{C_{1.2} - C_{1.3}} \quad (\text{VI.13.1.2})$$

$$C_2 = \frac{C_{2.1}}{C_{1.2} - C_{1.3}} \quad (\text{VI.13.1.3})$$

avec :

$$C_{1.1} = - \frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{AiryBi}(f(\bar{R})) + \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) \text{AiryBi}(1, f(\bar{R}))$$

$$C_{1.2} = e^{g(1)} \text{AiryAi}(f(1)) \left\{ \frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{AiryBi}(f(\bar{R})) + \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) \text{AiryBi}(1, f(\bar{R})) \right\}$$

$$C_{1.3} = e^{g(1)} \text{AiryBi}(f(1)) \left\{ \frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{AiryAi}(f(\bar{R})) + \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) \text{AiryAi}(1, f(\bar{R})) \right\}$$

et :

$$C_{2,1} = -\frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{AiryAi}(f(\bar{R})) + \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) \text{AiryAi}(1, f(\bar{R}))$$

Mentionnons de plus que :

$$f(1) = -\left( -\frac{m_0^2 \Delta T_0^\nu n}{(\bar{R}-1)^3 (1+\lambda)} \right)^{1/3} \left\{ 4m_0^2 n + \Delta T^{-\nu} \left[ \bar{R}^3 - 3\bar{R}^2 - 2n + 4n\bar{R}\lambda + \bar{R}^3 \lambda + 3\bar{R} - 2n\bar{R}^2 \lambda - 4m_0^2 n - 3\bar{R}^2 \lambda + \bar{R} \lambda n^2 + 3\bar{R} \lambda - 2n\lambda - 4m_0^2 \Delta T_0^\nu (\bar{R}-1) - 1 - \lambda - 2n\bar{R}^2 + 4n\bar{R} - n^2 (1+\lambda) + n^2 \bar{R} \right] \right\} / 4m_0^2 n$$

$$\frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) = -\left( -\frac{m_0^2 \Delta T_0^\nu n}{(\bar{R}-1)^3 (1+\lambda)} \right)^{1/3}$$

$$\frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) = g(1) = \frac{n - \bar{R} + 1}{2(\bar{R}-1)}$$

### b) Combinaison C2

La solution de l'équation (VI.13.2) nécessite le recours à la fonction "hypergeom" (voir Annexe) dans son écriture :

$$\phi(x) = C_1 e^{\psi(x)} \text{hypergeom}([A], [B_1], [f(x)]) + C_2 g(x) e^{\psi(x)} \text{hypergeom}([A], [B_2], [f(x)]) \quad (\text{VI.13.2.1})$$

avec :

$$\psi(x) = -\frac{-2(1+n)^{3/2} (\bar{R}-1)(n+1-\bar{R}) \sqrt{1+\lambda} + \sqrt{2} \left[ (2\bar{R}+6+2x)n^{3/2} + (-2+x)n^{5/2} + \sqrt{n}(x-4+2\bar{R}) \right] \sqrt{\Delta T_0^\nu} m_0}{4(1+n)^{3/2} \sqrt{1+\lambda} (\bar{R}-1)^2} x$$

$$A = \frac{4\sqrt{n} m_0 (1+n)^{3/2} (1+\lambda)^{3/2} + \sqrt{2} \left[ (\lambda+1)^2 (1+n)(n+1-\bar{R})^2 \Delta T_0^{-2\nu} + 2m_0^2 \lambda (n+2) \Delta T_0^{-\nu} \right]}{16\sqrt{n} (1+n)^{3/2} (1+\lambda)^{3/2}}$$

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{3}{2}$$

$$g(x) = n(x-1) + x - 2 + \bar{R}$$

$$f(x) = \frac{\Delta T_0^{3\nu} m_0 \sqrt{2n}}{2(\bar{R}-1)^2 (1+n)^{3/2} \sqrt{1+\lambda}} g(x)^2$$

Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminés en ayant recours aux conditions aux limites et ceci en résolvant un système deux équations à deux inconnues.

Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$C_1 = \frac{C_{1.0} + C_{1.1}}{C_{1.2} - C_{1.3} + C_{1.4} + C_{1.5} + C_{1.6}} \quad (\text{VI.13.2.2})$$

$$C_2 = \frac{C_{2.1}}{C_{1.2} - C_{1.3} + C_{1.4} + C_{1.5} + C_{1.6}} \quad (\text{VI.13.2.3})$$

avec :

$$C_{1.0} = B_1 B_2 \frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{hypergeom}([A],[B_2],f(\bar{R})) + A g(\bar{R}) \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) \text{hypergeom}([A+1],[B_2+1],f(\bar{R}))$$

$$C_{1.1} = -B_2 A \text{hypergeom}([A+1],[B_1+1],f(\bar{R})) \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) + B_1 B_2 \text{hypergeom}([A],[B_1],f(\bar{R})) \frac{d}{d\bar{R}} \psi(\bar{R})$$

$$C_{1.2} = -e^{\psi(1)} B_2 A g(1) \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) \text{hypergeom}([A+1],[B_1+1],f(\bar{R})) \text{hypergeom}([A],[B_2],f(1))$$

$$C_{1.3} = B_1 B_2 g(1) \frac{d}{d\bar{R}} \psi(\bar{R}) \text{hypergeom}([A],[B_1],f(\bar{R})) \text{hypergeom}([A],[B_2],f(1))$$

$$C_{1.4} = B_1 B_2 \frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{hypergeom}([A],[B_2],f(\bar{R})) \text{hypergeom}([A],[B_1],f(1))$$

$$C_{1.5} = B_1 A g(\bar{R}) \frac{d}{d\bar{R}} g(\bar{R}) \text{hypergeom}([A+1],[B_2+1],f(\bar{R})) \text{hypergeom}([A],[B_1],f(1))$$

$$C_{1.6} = B_1 B_2 g(\bar{R}) \frac{d}{d\bar{R}} \psi(\bar{R}) \text{hypergeom}([A],[B_2],f(\bar{R})) \text{hypergeom}([A],[B_1],f(1))$$

et :

$$C_{2.1} = -B_2 A \text{hypergeom}([A+1],[B_1+1],f(\bar{R})) \frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) + B_1 B_2 \text{hypergeom}([A],[B_1],f(\bar{R})) \frac{d}{d\bar{R}} \psi(\bar{R})$$

avec :

$$f(1) = -\frac{m_0 \Delta T^{4v/3} \sqrt{2n}}{(n+1)^{3/2}}$$

$$f(\bar{R}) = -\frac{m_0 \Delta T^{4v/3} (n+2)^2 \sqrt{2n}}{(n+1)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{d\bar{R}} f(\bar{R}) = -\frac{2m_0 \Delta T^{4v/3} (n+2) \sqrt{2n}}{(\bar{R}-1) \sqrt{n+1}}$$

$$\psi(1) = -\frac{-2(1+n)^{3/2}(\bar{R}-1)(n+1-\bar{R})\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{2}\left[(2\bar{R}+6+2x)n^{3/2} - n^{5/2} + \sqrt{n}(-3+2\bar{R})\right]\sqrt{\Delta T_0^v} m_0}{4(1+n)^{3/2}\sqrt{1+\lambda}(\bar{R}-1)^2}$$

$$\psi(\bar{R}) = -\frac{-2(1+n)^{3/2}(\bar{R}-1)(n+1-\bar{R})\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{2}\left[(4\bar{R}+6)n^{3/2} + (-2+\bar{R})n^{5/2} + \sqrt{n}(3\bar{R}-4)\right]\sqrt{\Delta T_0^v} m_0}{4(1+n)^{3/2}\sqrt{1+\lambda}(\bar{R}-1)^2} \bar{R}$$

$$\frac{d}{d\bar{R}}\psi(\bar{R}) = \frac{2(1+n)^{3/2}(\bar{R}-1)(n+1-\bar{R})\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{2}\left[4n^{3/2} - n^{5/2} + 3\sqrt{n}\right](\bar{R}-1)\sqrt{\Delta T_0^v} m_0}{4(1+n)^{3/2}\sqrt{1+\lambda}(\bar{R}-1)^2}$$

$$g(\bar{R}) = (\bar{R}-1)(n+1)$$

$$g(1) = (\bar{R}-1)$$

$$\frac{d}{d\bar{R}}g(\bar{R}) = (n-1)$$

### c) Combinaison C3

La solution de l'équation (VI.13.3) se présente en faisant appel à la fonction "Kummer" (voir Annexe) :

$$\phi(x) = C_1 \text{KummerM}[A, B, f(x)] + C_2 \text{KummerU}[A, B, f(x)] \quad (\text{VI.13.3.1})$$

avec :

$$f(x) = \frac{(\bar{R}+n-1)x + 2(\bar{R}-1)}{2(\bar{R}+n-1)(\bar{R}-1)}$$

$$A = \frac{m_0^2 \Delta T^v}{(\bar{R}-1)[(\bar{R}-1)\lambda + n(\lambda+1)]}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

En résolvant le système deux équations à deux inconnues, nous aboutissons au résultat suivant :

$$C_1 = \frac{C_{1,1}}{C_{1,2} + C_{1,3} + C_{1,4} + C_{1,5}} \quad (\text{VI.13.3.2})$$

$$C_2 = \frac{C_{1,2}}{C_{1,2} + C_{1,3} + C_{1,4} + C_{1,5}} \quad (\text{VI.13.3.3})$$

avec :

$$C_{1.1} = (f(\bar{R}) + A - B) \text{KummerU} [A, B, f(\bar{R})] - \text{KummerU} [A - 1, B, f(\bar{R})]$$

$$C_{1.2} = f(\bar{R}) \text{KummerM} [A, B, f(1)] \text{KummerU} [A, B, f(\bar{R})]$$

$$C_{1.3} = \text{KummerM} [A, B, f(1)] \{ (A - B) \text{KummerU} [A, B, f(\bar{R})] - \text{KummerU} [A - 1, B, f(\bar{R})] \}$$

$$C_{1.4} = \text{KummerM} [A, B, f(\bar{R})] \{ (B - A) \text{KummerU} [A, B, f(1)] - f(\bar{R}) \text{KummerU} [A, B, f(1)] \}$$

$$C_{1.5} = (A - B) \text{KummerM} [A - 1, B, f(\bar{R})] \text{KummerU} [A, B, f(1)]$$

et :

$$C_{2.1} = (A - B - f(\bar{R})) \text{KummerM} [A, B, f(\bar{R})] - (B - A) \text{KummerM} [A - 1, B, f(\bar{R})]$$

Notons de plus que :

$$f(\bar{R}) = \frac{(\bar{R} + n - 1) \bar{R} + 2(\bar{R} - 1)}{2(\bar{R} + n - 1)(\bar{R} - 1)}$$

$$f(1) = \frac{(\bar{R} + n - 1) + 2(\bar{R} - 1)}{2(\bar{R} + n - 1)(\bar{R} - 1)}$$

#### d) Combinaison C4

Cette considération nous permet d'aboutir à une solution pour l'équation (VI.13.4) qui se présente, elle aussi, en faisant appel à la fonction "Kummer" :

$$\phi(x) = C_1 e^{g(x)} \text{KummerM} [A, B, f(x)] + C_2 e^{g(x)} \text{KummerU} [A, B, f(x)] \quad (\text{VI.13.4.1})$$

avec :

$$f(x) = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2}{\alpha_3}$$

$$g(x) = \frac{m_0^2 \Delta T^v n x}{(\bar{R} - 1)^2 (\bar{R} - 1 + n) (1 + \lambda)}$$

$$A = \frac{\beta_1 (\beta_2 + \beta_3)}{\beta_4 \beta_5}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

avec :

$$\alpha_1 = (\lambda+1) \left[ (\bar{R}-1)^3 + (2n\bar{R}+2n+n^2\bar{R}) \right] + 2n\bar{R} - 6n\bar{R} + 1$$

$$\alpha_2 = 2m_0^2 \Delta T^\nu n + 2\lambda (\bar{R}-1)^3 + 2n (\lambda+1) (\bar{R}-1) + 2n\bar{R} + 6\bar{R} (\bar{R}-1)$$

$$\alpha_3 = (1+\lambda) (\bar{R}-1)^4 (\bar{R}-1+n)^3$$

et :

$$\beta_1 = m_0^2 \Delta T^\nu$$

$$\beta_2 = \lambda (n^2\bar{R}^2 + 6\bar{R}^2 - 4\bar{R} + n^2 + 9n\bar{R} + 1 + 9n\bar{R}^2 - n^3\bar{R} + 3n\bar{R}^2 - 2n^2\bar{R}^2 + 3n^3 - 3n - 4\bar{R}^3 + \bar{R}^4 - 4\bar{R})$$

$$\beta_3 = 6\bar{R}^2 + \bar{R} + 1 + 9n\bar{R} - 2n_2\bar{R} - 9n\bar{R}^2 + n\bar{R}^2 + n^2\bar{R}^2 - n^3\bar{R} - m_0^2 n^2 \Delta T^\nu - 4\bar{R} + n^3 - 3n + n^2 + 3n\bar{R}^3$$

$$\beta_4 = 2 (\lambda+1) (\bar{R}+n-1) \left[ (\bar{R}+1)^2 + n(\bar{R}-1) \right]$$

$$\beta_5 = n (\lambda+1) (\bar{R}-1)^5$$

Ainsi, nous calculons les constantes d'intégration C1 et C2 qui s'écrivent comme suit :

$$C_1 = \frac{C_{1.1} + C_{1.2}}{e^{g(1)} \sum_{j=3}^{j=8} C_{1,j}} \tag{VI.13.4.2}$$

$$C_2 = \frac{C_{2.1} + C_{2.2}}{e^{g(1)} \sum_{j=3}^{j=8} C_{1,j}} \tag{VI.13.4.3}$$

avec :

$$C_{1.1} = \left[ \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} + \frac{dg(\bar{R})}{d\bar{R}} \right] \text{KummerU} [A, B, f(\bar{R})] f(\bar{R}) + \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} (A-B) \text{KummerU} [A, B, f(\bar{R})]$$

$$C_{1.2} = - \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} \text{KummerU} [A-1, B, f(\bar{R})]$$

$$C_{1.3} = - \left[ \frac{dg(\bar{R})}{d\bar{R}} + \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} \right] f(\bar{R}) \text{KummerM} [A, B, f(\bar{R})] \text{KummerU} [A, B, f(1)]$$

$$C_{1.4} = [B-A] \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} \text{KummerM} [A, B, f(\bar{R})] \text{KummerU} [A, B, f(1)]$$

$$C_{1.5} = [A - B] \frac{df(\bar{R})}{d(\bar{R})} \text{KummerM}[A-1, B, f(\bar{R})] \text{KummerU}[A, B, f(1)]$$

$$C_{1.6} = \left[ \frac{df(\bar{R})}{d(\bar{R})} + \frac{dg(\bar{R})}{d(\bar{R})} \right] f(\bar{R}) \text{KummerU}[A, B, f(\bar{R})] \text{KummerM}[A, B, f(1)]$$

$$C_{1.7} = [A - B] \frac{df(\bar{R})}{d(\bar{R})} \text{KummerU}[A, B, f(\bar{R})] \text{KummerM}[A, B, f(1)]$$

$$C_{1.8} = -\frac{df(\bar{R})}{d(\bar{R})} \text{KummerU}[A-1, B, f(\bar{R})] \text{KummerM}[A, B, f(1)]$$

et :

$$C_{2.1} = -\left[ \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} + \frac{dg(\bar{R})}{d\bar{R}} \right] \text{KummerM}[A, B, f(\bar{R})] f(\bar{R}) + \frac{df(\bar{R})}{d\bar{R}} [A-B] \text{KummerM}[A, B, f(\bar{R})]$$

$$C_{2.2} = [B-A] \frac{dg(\bar{R})}{d\bar{R}} \text{KummerM}[A-1, B, Af(\bar{R})]$$

Notons de plus que :

$$f(1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_3}$$

$$f(\bar{R}) = \frac{\alpha_1 \bar{R} + \alpha_2}{\alpha_3}$$

$$\frac{df(\bar{R})}{d(\bar{R})} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$$

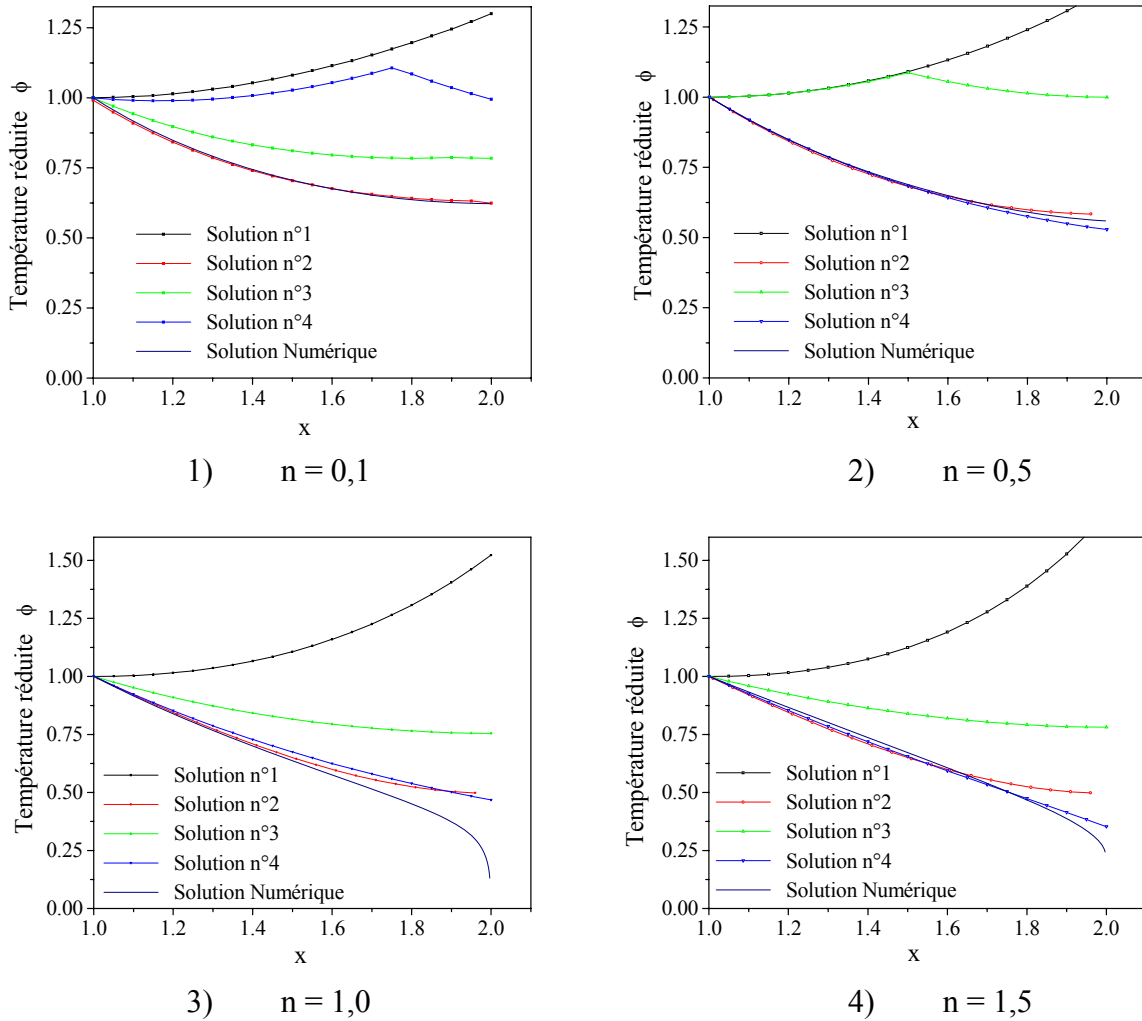
$$g(1) = \frac{m_0^2 \Delta T^v n}{(\bar{R}-1)^2 (\bar{R}-1+n)(1+\lambda)}$$

$$\frac{dg(\bar{R})}{d(\bar{R})} = \frac{m_0^2 \Delta T^v n}{(\bar{R}-1)^2 (\bar{R}-1+n)(1+\lambda)}$$

#### IV.4.3 Ecarts entre les solutions analytique et numérique

Dans le but d'estimer l'exactitude de la conformité des solutions approchées proposées, nous représentons l'évolution radiale de la distribution de température réduite, issue des quatre solutions précitées confrontées à la solution numérique. Figure (VI.6).

Ces graphiques, pour les quatre combinaisons, sont tracés en considérant un écart de température  $\Delta T_0 = 100$  K, un régime laminaire, un coefficient de température égal à 0,1, une caractéristique de l'ailette  $m_0$  égale à 0,5 et un rayon réduit égal à 2. Dans cette étude on s'est proposé de traiter le problème pour deux profils géométriques : concave ( $n > 1$ ), convexe ( $n < 1$ ) ainsi que pour la forme triangulaire ( $n = 1$ ).



**Figure IV.6 :** Distribution de la température réduite le long d’une ailette annulaire de rayon réduit égal à 2 pour quatre valeurs de n.  $\Delta T_0 = 100$  K,  $\nu = 0,25$ ,  $\lambda = 0,1$  et  $m_0 = 0,5$

La figure (IV.6) montre des écarts plus ou moins importants entre les solutions analytiques et la solution numérique, en particulier pour la combinaison C1. Le tableau (IV.2) résume les différentes constatations précédentes à travers lesquelles, il en ressort que c’est la combinaison C2 qui reproduit le mieux la solution numérique et ceci pour les quatre formes représentées.

**Tableau IV.2 :** Validité des solutions approchées pour quatre valeurs de constante de forme

	n = 0,1	n = 0,5	n = 1,0	n = 1,5
Solution n°1	✘	✘	✘	✘
Solution n°2	☑	☑	☑	☑
Solution n°3	✘	✘	✘	✘
Solution n°4	✘	☑	☑	☑

Cette comparaison nous permet, de choisir la solution analytique qui traduit le mieux la distribution de température le long de l'ailette. En effet, bien que la solution n° 4 reproduise les résultats numériques pour quelques constantes de formes, ( $n = 0,5, 1$  et  $1,5$ ) la solution n°2 s'aligne avec la solution numérique pour toutes les formes étudiées avec des écarts plus faibles dans le même domaine de rayon réduit étudié.

La figure (IV.7) met en évidence l'écart entre les deux solutions : analytiques (solution n°2) et numériques, en terme de température réduite pour six constantes de forme ( $n = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 1,5$  et  $2$ ). Ces figures permettent de délimiter le domaine validité de cette solution approchée. Les résultats de cette comparaison, sont donnés sur le tableau IV.3.

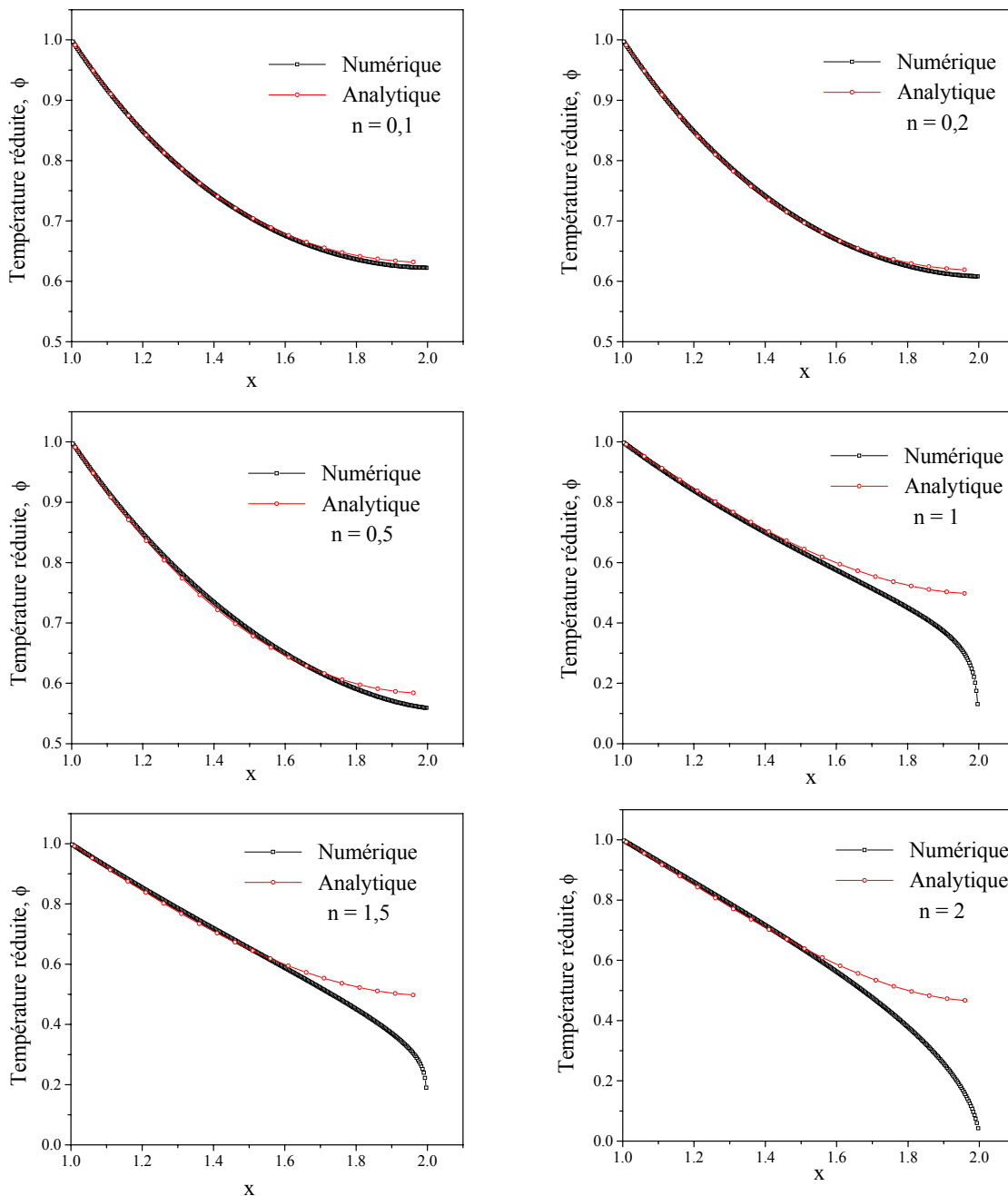


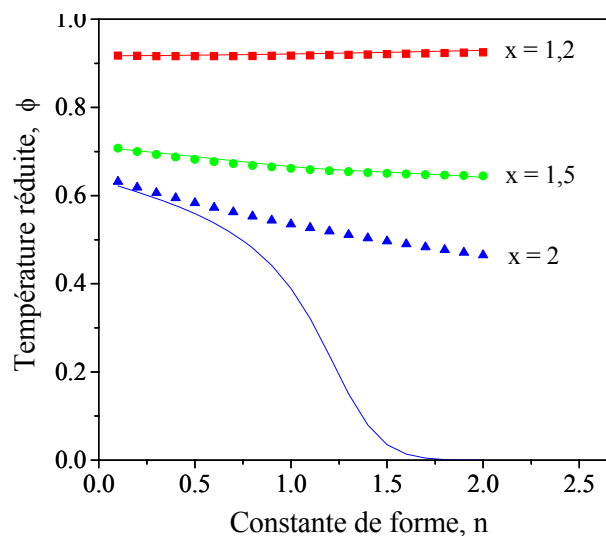
Figure IV.7 : Confrontation de la solution n°2 à la solution numérique

**Tableau IV.3 :** Erreurs commises et domaine de validité de la solution n°2 pour plusieurs constantes de formes n

Constante de forme	Erreur commise en %		
	$1 \leq x \leq 2$	$1 \leq x \leq 1,5$	$1,5 \leq x \leq 2$
n = 0,1	1,895	1,673	2,160
n = 0,2	1,826	1,432	2,141
n = 0,5	1,535	0,977	1,182
n = 1,0	1,895	1,673	2,160
n = 1,5	9,960	1,547	18,300
n = 2,0	22,520	1,705	43,180

Nous constatons que les écarts calculés, pour les valeurs de constante de forme inférieures à 1 et y compris cette dernière, ne dépassent pas 2 % si, l'on considère toute l'étendue de l'ailette ( $1 \leq x \leq 2$ ). En revanche, ces erreurs peuvent dépasser les 10 % pour des constantes de formes supérieures à 1. En réduisant l'étendue de l'ailette en ne considérant que la moitié du domaine, comprise entre la base de l'ailette ( $x = 1$ ) et  $x = 1,5$ , l'erreur relative commise ne dépasse pas 2% pour les six formes étudiées, ce qui est de même pour toutes les constantes de formes intermédiaires. Cette erreur peut dépasser 43% (pour  $n = 2$ ) si l'on avait considéré la seconde moitié du domaine ( $1,5 \leq x \leq 2$ ).

Afin de valider cette approche, nous suivons, sur la figure (IV.8), l'évolution de la température réduite en fonction de la constante de forme pour trois positions : près de la base ( $x = 1,2$ ) ; à la moitié de l'ailette ( $x = 1,5$ ) et à l'extrémité ( $x = 2$ ) pour une ailette dont le rayon réduit est égal à 2.



**Figure IV.8 :** Détermination du domaine de validité de la solution n°2 en fonction de la constante de forme n

Ces tracés montrent des écarts qui ne dépassent 0,5 % pour respectivement les deux premières positions ( $x = 1,2$  et  $x = 1,5$ ). En revanche, à l'extrémité de l'ailette ( $x = 2$ ) les écarts atteignent 4% pour des ailettes pour lesquelles la constante de forme ne dépasse pas 1 voire plus si l'on considère une constante de forme supérieure.

En définitive, ce travail nous a permis la résolution analytique de l'équation de l'énergie régissant l'écoulement de chaleur au sein des ailettes annulaires de section droite variable. En effet, en ayant recours à la combinaison 2 pour la résolution du problème, nous constatons un écart relatif par rapport à la solution numérique qui ne dépasse pas 2% si l'on restreint l'étendue de l'ailette à la moitié du domaine, comprise entre la base de l'ailette (point de rattachement de l'ailette à la surface mère) et  $x = 1,5$ . A delà, l'erreur relative devient importante, mais cela n'a pas une grande importance, étant donné que l'expression du rendement de l'ailette repose sur la valeur du gradient pariétal de température (à la base), valeur indépendante de la distribution spatiale de la température en aval de  $x = 1,5$ .

Nous représenterons, dans ce qui suit, seul l'expression du rendement pour passer ensuite à sa validation.

#### IV.4.4 Expression analytique du Rendement

Ce paramètre, rendement, est donné en fonction de la géométrie de l'ailette (traduite par sa constante de forme  $n$ ) par traduction analytique de la dérivée première de la distribution de la température réduite à la base de l'ailette.

Reprenons l'expression (IV.5), dans cette dernière nous devons expliciter l'expression du gradient pariétal de température en fonction des résultats issus de la résolution du problème en ayant recours à la combinaison C2.

$$\eta = - \frac{\pi \delta_0 r_1^2 (\bar{R}-1) \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=1}}{2S(n) \bar{m}_0^2} \quad (VI.15)$$

Où :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} \phi(x) \right|_{x=1} &= \frac{C_1 \text{ A hypergeom}([A+1],[B_1+1],f(1)) \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=1} e^{\psi(1)}}{B_1} + C_1 \text{ A hypergeom}([A],[B_1],f(1)) \left. \frac{d}{dx} \psi(x) \right|_{x=1} e^{\psi(1)} \\ &+ \frac{C_2 \text{ A hypergeom}([A+1],[B_2+1],f(1)) \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=1} e^{\psi(x)}}{B_2} + C_2 \text{ hypergeom}([A],[B_2],f(1)) \left. \frac{d}{dx} \psi(x) \right|_{x=1} e^{\psi(x)} \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=1} \\ &+ C_2 \text{ hypergeom}([A],[B_2],f(1)) \left. \frac{d}{dx} \psi(x) \right|_{x=1} e^{\psi(x)} g(1) \left. \frac{d}{dx} \psi(x) \right|_{x=1} \end{aligned} \quad (VI.15.1)$$

Il et à noter que, l'expression de  $S(n)$  peut s'écrire en une seule ligne pour certaine géométrie, elle peut faire appelle à des dizaines de lignes pour d'autres, pour des raisons de forme elle sera représentée comme suit :

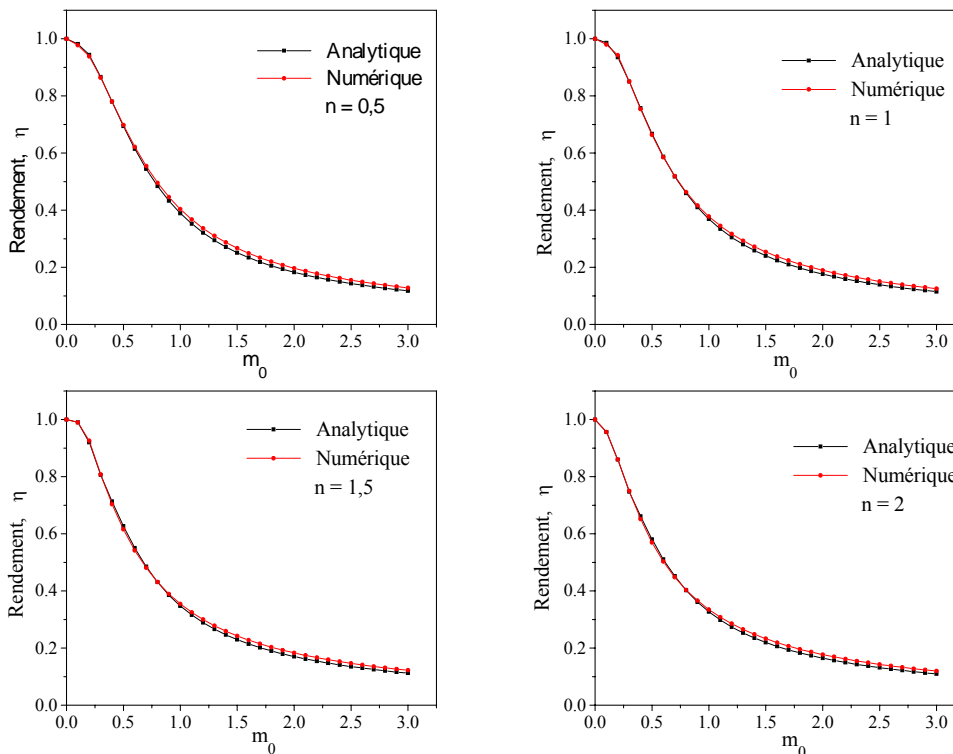
$$S(n) = \lim_{x \rightarrow \bar{R}} \frac{2 \pi r_1 \left( n r_1 (\bar{R}-1)(r_1 x^2 + 1) + n \delta_0 \bar{R}(1-x) + n x^2 \delta_0 - r_1 (x^2 + \bar{R}) - \delta_0 \bar{R}(\bar{R}-x) - \delta_0 n \right) e^{(n-1) \ln \left( \frac{x-\bar{R}}{\bar{R}-1} \right)}}{(n-1)(\bar{R}-1)} \quad (\text{VI.15.2})$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x) &= (n-1) \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{2 \Delta T_0^{4\nu/3} (x + xn - n - 2 + \bar{R}) m_0 \sqrt{2n}}{(\bar{R}-1)^2 \sqrt{1+n}} \\ \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=1} &= \frac{2 \Delta T_0^{4\nu/3} m_0 \sqrt{2n}}{(\bar{R}-1) \sqrt{1+n}} \end{aligned}$$

La représentation du rendement analytique en fonction de la caractéristique de l'ailette  $m_0$  pour les quatre géométries suivantes :  $n = 0,5$  ;  $1$  ;  $1,5$  et  $2$  est comparée au rendement numérique sur la figure (IV.10). Notons, de plus, que cette estimation d'écart est faite en régime laminaire  $\nu = 0,25$  ; un coefficient de température  $\lambda = 0,1$  un écart de température  $\Delta T_0 = 100$  K et un rayon réduit  $\bar{R} = 2$ .

Cette figure nous permet de calculer un écart ne dépassant pas 5%, en comparant la solution analytique à la solution numérique, et ce pour les quatre formes géométriques en moyennant les erreurs calculées sur tout le domaine de  $m_0$ .

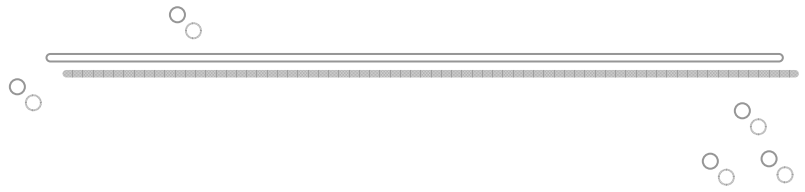


**Figure VI.10** : Ecart entre la solution analytique et la solution numérique pour quatre constantes de forme.  $\bar{R} = 2$  ;  $\Delta T_0 = 100$  K,  $\nu = 0,25$  et  $\lambda = 0,1$

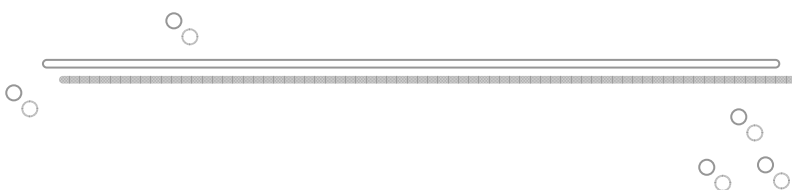
## **VI.6 Conclusion**

Cette étude calcul des écarts ne dépassant pas 2 % en terme de température réduite, et ce en considérant la demi-longueur de l'ailette partant de sa base. Cet écart demeure inférieur à 5 % en terme de rendement, ceci reste vrai sur tout le domaine de la longueur caractéristique de l'ailette  $m_0$  pour les différentes formes géométriques étudiées. Cependant, nous pouvons confirmer la validité de cette solution, donc de la combinaison C2, vu les faibles écarts calculés pour le rendement.

En ce qui concerne la température réduite, nous pouvons dire que pour des constantes de forme inférieures à 1 ( $n < 1$ ) cette solution est adopter pour tout le domaine d'étude par contre, pour les autres formes ( $n > 1$ ), la conformité de la solution n'est forte que pour le domaine comprenant la moitié de l'ailette ( $1 < x < L/2$ ).



## *CONCLUSION GENERALE*



## CONCLUSION GÉNÉRALE

Le concept d'augmenter les performances de conduction de chaleur d'un corps en lui attachant des ailettes en tant que surfaces prolongées est bien connu, mais il y a une certaine confusion concernant l'évaluation des profils de température et des écoulements de la chaleur correspondants.

La conductivité thermique est considérée souvent constante en fonction de la température pour que le modèle mathématique correspondant au problème posé soit résolu simplement du fait de la linéarité des équations. Cependant, la plage de variation des températures n'est pas toujours réduite et par conséquent dans certains cas, une dépendance de ce paramètre vis à vis de la température n'est pas à ignorer.

L'existence d'un coefficient non uniforme de transfert thermique a été établie théoriquement et expérimentalement observée. Ces variations du coefficient ont un impact sur le taux de dissipation thermique produit par les ailettes. Cependant, la nature réelle de la variation du coefficient de transfert thermique peut être obtenue par analyse conjuguée de la conduction dans l'ailette avec la convection dans le fluide adjacent.

Dans ce cadre, le présent travail a pour but la résolution analytique l'équation de l'énergie qui régit le transfert thermique à travers une ailette annulaire de section droite rectangulaire. En effet, après avoir comparé la solution analytique et numérique, écarts ne dépassant pas les 2% entre les deux solutions, nous avons représenté l'évolution du rendement analytique fonction du paramètre caractéristique de l'ailette. Quant aux graphiques des flux thermiques spécifiques, ils sont représentés en fonction du rayon réduit. Ces représentations nous ont permis de suivre l'effet de chaque paramètre sur ces deux entités.

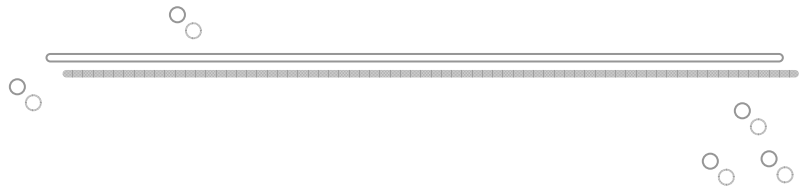
Notons que l'étude entreprise a été menée en considérant la variation simultanée du coefficient de transfert de chaleur  $h$  et de la conductivité thermique  $k$ . Le but de ce travail est de déterminer l'effet de ces variations sur le rendement des ailettes annulaire rectangulaire ainsi que sur les propriétés optimales de ces dernières. Nous avons noté que tenir en compte la variation du coefficient de transfert a plus d'effet par rapport à la considération d'une conductivité thermique constante ceci en engendrant des valeurs de rendement et de flux thermique moins importante que celles calculées en considérant l'influence de la température nulle sur les deux coefficients de transfert.

De plus, nous nous sommes proposés de généraliser le problème, ceci en admettant une géométrie annulaire et une section droite variable. Espérer trouver une solution analytique pour un tel problème, en fonction de la constante de forme  $n$ , demeure non évident. Pour cela, plusieurs considérations simplificatrices s'avèrent indispensables afin de solutionner un tel problème. Une fois les hypothèses posées et validées, la solution analytique a été approchée et son domaine de validité a été déterminé en confrontant les résultats analytiques aux résultats numériques associés aux différentes géométries d'ailettes.

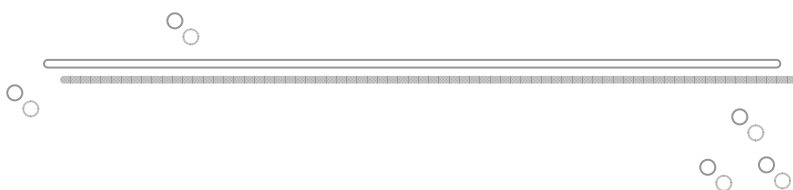
Dans cette dernière partie de l'étude nous calculons des écarts ne dépassant pas 2 % en terme de température réduite, et ce en considérant la demi-longueur de l'ailette partant de sa base. Cet écart demeure inférieur à 5 % en terme de rendement, ceci reste vrai sur tout le domaine de la longueur caractéristique de l'ailette  $m_0$  pour les différentes formes géométriques étudiées. Cependant, nous confirmons la validité de cette solution vu les faibles écarts calculés pour le rendement.

En ce qui concerne la température réduite, nous pouvons dire que pour des constantes de forme inférieures à 1 ( $n < 1$ ) cette solution est adopter pour tout le domaine d'étude par contre, pour les autres formes ( $n > 1$ ), la conformité de la solution n'est forte que pour le domaine comprenant la moitié de l'ailette ( $1 < x < L/2$ ).

En définitive, ce travail nous a permis d'aboutir, non seulement à une solution analytique pour l'ailette annulaire rectangulaire mais le problème annulaire général, et ce quelle que soit l'allure générale de la section droite. Ainsi, une solution approchée a été proposée dont le domaine de validité é été déterminé.



## *REFERENES BIBLIOGRAPHIQUES*



## *REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE*

- [1] P.Razelos, K.Imre, The Optimum Dimension of Circular Fins with Variable Thermal Parameters, *J. Heat Transfer Trans. ASTM* 102 (1980) 420-425.
- [2] H.M.Huang, F.C.Appl, Heat Transfer of Thin Fins with Temperature Dependence Thermal Properties and Internal Heat Generation, *J. Heat Transfer Trans. ASME* 89 (1967) 155-161.
- [3] P.Jany, A.Bejan, Ernst Schmidt's Approach to Fin Optimization: an Extension to Fin with Variable Conductivity and The Design of Duct for Fluid Flow, *Int. Heat Mass Transfer* 31 (8) (1988) 1635-1644.
- [4] L.E.Haseler, Performance Calculation Method for Multi-Stream Plate-Fin Exchangers, McGraw-Hill, New York, 1983.
- [5] K.A.Gardner, Efficiency of Extended Surface, *Trans. ASME* 67 (1945), 621-631.
- [6] S.W.Churchill, Approximations for Efficiency of Fins and pines, *Heat Mass Transfer* 4 (1977) 385-389.
- [7] A.Ullmann and H.Kalman, Efficiency and optimized dimensions of annular fins of different cross-section shapes, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 32, No. 6, pp. 1105-1110, 1989.
- [8] R.K.Shah, Advances in Compact Heat Exchanger Technology and Design Theory, *Int. Heat Transfer*, Vol. 1, 1982, pp. 123-142.
- [9] X.Hu and A.M.Jacobi, Local Heat Transfer Behavior and its impact on single-row annularly finned tube heat exchanger, *J. Heat Transfer* 115 (1993) 66-74.
- [10] Robert H. Perry, Cecil H Chilton, *Chemical Engineers Handbook*, 5th edition, Mc Grow-Hill. (1973).
- [11] J.H.Lienhard IV, J.H.Lienhard V , *A Heat Transfer Textbook*, 3th edition, Phlogiston Press. (2004).
- [12] J.P.Holman, *Heat Transfer*, 9th edition, Mc Grow-Hill. (2002).
- [13] D.K.Hennecke and E.M.Sparrow, Local heat ink on a conductivity cooled surface-application to temperature measurement error. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13 (1970) 287-304.
- [14] Christopher Long, *Essential Heat Transfer*, England. (1999).
- [15] P.R.Stone, Effects of Dimensions on the Heat Flow rate Through Extended Surfaces, Thèse de doctorat, Leeds (1980).

- [16] A.S.Wood, G.E.Tupholme, M.I.H.Bhatti and P.J.Heggs, Steady-State Heat Transfer Through Extended Plane Surfaces, *Int. Com. Heat and Mass Transfer*. Vol. 22, No. 1, pp. 99-109, 1995.
- [17] D.C.Look, Two Dimensional Fin With Non-Constant Root Temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 977-980.
- [18] Y.H.Yu and Y.S.Chou, A New Approach to The Heat Transient Conduction in a 2D Rectangular Fin, *Int. J. Heat Transfer* 32 (1989) 1657-1667.
- [19] A.Aziz, T.A.Na, Periodic Heat Transfer in Fins with Variable Thermal Parameters, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24 (1980) 1397-1404.
- [20] S.M.Zubair, A.Z.Al Garni, J.S.Nizami, The Optimal Dimension of Circular Fins with Variable Profile and Temperature Dependent Thermal Conductivity, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 3431-3440.
- [21] L.S.Han, S.G.Lefkowitz, Constant Cross Section Fin Efficiency For non-uniform Surface Heat Transfer Coefficients, *ASTM paper* (1960) 60-WA-47.
- [22] H.C.Unal, Determination of the Temperature Distribution in an Extended Surface With a non uniform Heat Transfer coefficient, *Int. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 2279-2284.
- [23] H.C.Unal, An Analytic Study of Boiling Heat Transfer From a Fin, *Int. J. Heat Transfer* 30 (1987) 341-349.
- [24] K.Laor, H.Kalman, Performance and Optimum Dimensions of Different Cooling Fins with a Temperature Dependent Heat Transfer Coefficient, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1993-2004.
- [25] E.M.Sparrow, M.K.Chyu, Conjugate Forced Convection-Conduction Analysis of Heat Transfer in a Plate Fin, *J. Heat Transfer* 104 (1982) 204-206.
- [26] E.M.Sparrow, A.Acharya, A Natural Convection with Solution Determined non-monotonically varying Heat Transfer Coefficients, *J. Heat Mass Transfer* 103 (1981) 218-225.
- [27] M.J.Huang, C.K.Chen, Conjugate Mixed Convection and Conduction Heat Transfer Along a Vertical Circular Pin, *Int. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 523-529.
- [28] W.S.Minkler, W.T.Rouleau, The Effects of internal Heat Generation on Heat Transfer in Thin Fins, *Nuclear Sci. Engrg.* 7 (1960) 400-406.
- [29] A.Aziz, Perturbation Solution for Convective Fin with Internal Heat Generation and Temperature-Dependent Thermal Conductivity, *Int. J. Heat Mass Transfer* 20 (1977) 1253-1255.
- [30] H.C.Unal, Temperature Distribution in Fins with Uniform and non Uniform Heat Generation and non Uniform Heat Transfer Coefficient, *Int. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1465-1477.

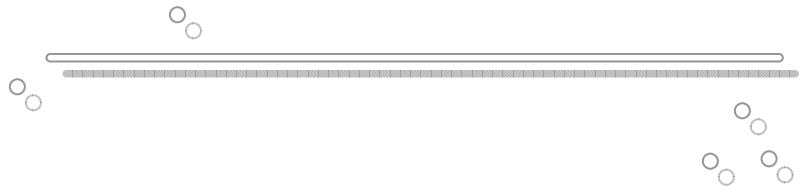
- [31] R.M.Cotta, R.Ramos, Integral Transforms in the Two-dimensional non-linear Formulation of Longitudinal Fins with Variable Profile, *Int. J. Numer. Methods Fluid Flow* 8 (1) (1998) 27-42.
- [32] L.J.Huang, R.K.Shah, Assessment of Calculation Methods For Efficiency of Fins of Rectangular Profile, *Adv. Heat Exchanger Design Radiation Combustion AME HTD* 182 (1991) 19-30.
- [33] E.C.Rosman, P.Carajilescov, F.E.M.Saboya, Performance of One and Two-row Tube and Plate Fin Heat Exchanger, *J. Heat Transfer* 106 (1984) 627-632.
- [34] M. N. Bouaziz et al., Etude des transferts de chaleur non linéaires dans les ailettes longitudinales, *Int. J. Therm. Sci.* (2001) 40, 843-857.
- [35] R.J.Krane, Discussion on a Previously published Paper By A.Aziz and S.M.Euq, *J. Heat Transfer Trans. ASME* 97 (1975) 300-301.
- [36] A.Muzzio, Approximate Solution for Convective Fins with Variable Thermal Conductivity, *J. Heat Transfer Trans. ASTM* 98 (1976) 685-686.
- [37] G.Adomian, A Review of The Decomposition Method in Applied Mathematics, *J. Math. Anal. Appl.* 135 (2) (1988) 501-544.
- [38] G.Adomian, On The Solution of Algebraic by The Decomposition Method, *J. Math. Anal. Appl.* 105 (1) (1985) 141-166.
- [39] G.Adomian, Solving Frontier Problems Modeled by nonlinear partial differential equations, *Comput. Math. Appl.* 22 (8) (1991) 91-94.
- [40] Ching-Huang Chiu, Cha'o-Kuang Chen, A Decomposition Method for Solving The Convective Longitudinal Fins with Variable Thermal Conductivity, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 45 (2002) 2067-2075.
- [41] Ching-Huang Chiu, Cha'o-Kuang Chen, Application of Adomian's Decomposition Procedure to the Analysis of Convective-Radiative Fins, *Journal of Heat Transfer*, April 2003, Volume 125, Issue 2, pp. 312-316
- [42] T.C.Tszeng and V.Saraf, A Study of Fin Effects in the Measurement of Temperature Using Surface-Mounted Thermocouples, *Journal of Heat Transfer*, October 2003, Volume 125, Issue 5, pp. 926-935
- [43] A.D.Kraus, Sixty-Five Years of Extended Surface Technology (1922-1987), *Appl. Mech. Rev.* 41 (1988) 321-364.
- [44] M.L.Ghai, Heat Transfer in Straight Fins, *Proc. Gen. Disc. Heat Transfer*, Institute of Mechanical Engineers, London, 1951, p. 180.
- [45] K.A.Gardner, Discussion on Paper by M.L.Ghai, *Proc. General Discussion On Heat Transfer*, Institute of Mechanical Engineers, London, 1951.

- [46] A.D.Kraus, A.Aziz, J.Welty, Extended Surface Heat Transfer, John & Son Inc., New York, 2001.
- [47] G.B.Melse, Efficacité d'une ailette longitudinale avec variation du coefficient d'échange de chaleur le long de l'ailette, J. Nucl. Energy 5 (3-4) (1957) 285.
- [48] S.Y.Chen, G.L.Zyskowsky, Steady-State Heat Conduction in a Straight Fin with Variable Heat Transfer Coefficient, Sixth National Heat Transfer Conference, Boston, MA, ASME Paper 63-HT-1, American of Mechanical Engineers, New York, 1963.
- [49] J.W. Stachiewicz, Effect of Local Film Coefficients on Fin Performance, J. Heat Transfer 91 (1969) 21.
- [50] C.G.Advani, S.P.Sukhatme, Analysis of a Vertical Rectangular Cross-Section in Fin Losing Heat by Laminar Free Convection, Indian, J. Technol. 11 (3) (1973) 105.
- [51] V.K.Garg, K.Velusamy, Heat Transfer Characteristics for Plate Fin, J. Heat Transfer 108 (1990) 224.
- [52] R.H.Yeh, Optimization of Longitudinal Fins with Temperature-Depended Thermal Parameters, Heat Transfer Eng. 15 (1994) 25-34.
- [53] P.Razelos, K.Imre, Minimum mass Convective Fins with Variable Heat Transfer Coefficients, J. Franklin Ins. 315 (1983) 269-282.
- [54] M.N.Netrakanti, C.L.D.Huang, Optimiation of Annular Fins with Variable Thermal Parameters by Invariant Imbedding, ASME, J. Heat Transfer 107 (1985) 966-968.
- [55] P.Razelos, The Optimum Dimensions of Convective Pin Fins, ASME, J. Heat Transfer 105 (1983) 411-413.
- [56] U.Nataraan, U.V.Shenoy, Optimum Shapes of Convective Pin Fins with Variable Heat Transfer Coefficient, J. Franklin Inst. 327 (1990) 965-982.
- [57] B. Kundu, P. K. Das., Performance analysis and optimization of straight taper fins with variable heat transfer coefficient, J. Heat Transfer 45 (2002) 4739-4751.
- [58] R. Karvinen., Efficiency of straight fins cooled by natural or forced convection, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 26, No. 4, pp. 635-638, 1983.
- [59] N.M.Bouaziz, Modèles des Transferts Thermique Non-linéaires Dans les Ailettes Longitudinales, Thèse de Doctorat (2001).
- [60] P.W.Wong, Mass and Heat Transfer From Circular Finned Cylinders, J. Institution of Heating and Ventilating Engineers, 1966, p. 181-182.
- [61] V.F.Yudin and L.C.Tokhtorova, Investigation of The Correction Factor  $\psi$  for The Theoretical Effectiveness of a Round Fin, Thermal Engineering (1973) 66-68.
- [62] P.J.Hegg, D.B.Ingham and .Manzoor, The Effect of Nonuniform Heat Tranfer From an Annular Fin of Triangular Profile, ASTM, J. Heat Transfer 103 (1981) 184-185.

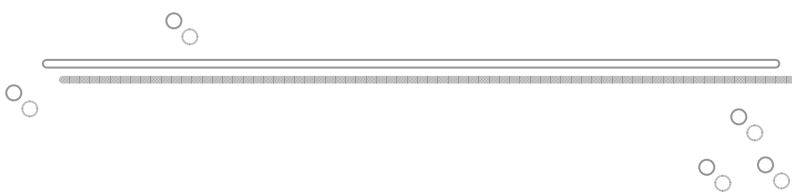
- [63] U.S.Gill, W.J.Minkowycs, Cha'o-Kuang and Chien-Hin Chen, Boundary and Inertia Effects On Conjugate Mixed Convection-Conduction Heat Transfer From a Vertical Cylindrical Fin Embedded in a Porous Medium, Numerical Heat Transfer, Part 1, vol. 21, (1992) 423-441.
- [64] Rizos N. Krikkis, Stratis V. Sotirchos, Panagiotis Razelos, Analysis of Multiplicity Phenomena in Longitudinal Fins Under Multi-Boiling Conditions, Journal of Heat Transfer, February 2004, Volume 126, Issue 1, pp. 1-7
- [65] Rizos N. Krikkis, Panagiotis Razelos, On The Optimization of Circular Radiating Fins With Fin to Fin and Fin to Base Radiant Interaction, Journal of Heat Transfer, February 2004, Volume 126, Issue 1, pp. 134-137
- [66] V. D. Sakalis, P. M. Hatzikonstantinou, Laminar Heat Transfer in the Entrance Region of Internally Finned Square Ducts, Journal of Heat Transfer, December 2001, Volume 123, Issue 6, pp. 1030-1034
- [67] L.Wan and W.C.Tan, Error in One Dimensional Heat Transfer Analysis in Straight and Annular Fins, J. Heat Transfer, 95 (1973) 549-551.
- [68] Antonio Campo et Biagio Morrone, Meshless Approach For Computing The Heat Liberation From Annular Fins of Tapered Cross Section, Applied Mathematics and Computation xxx (2003) xxx-xxx
- [69] M.G.Martin, A.Amokrane et M.Humbert, Etude Expérimentale des Caractéristiques de Surfaces d'Echange Ailetées en Milieu Confiné Application aux Récupérateurs de Fumées, Rev. Gén. Therm. Fr, n° 294-295 (1986) 325-339.
- [70] D.Q.Kern and A.O.Kraus, Extended surface Heat Transfer. McGraw-Hill, New (1972).
- [71] A.Aziz, Optimum Dimensions of Extended Surfaces Operation in a Convective nvironment, App, Mech, Rev. 45 (1992) 155-173.
- [72] B.T.F. Chung, R.W.Kan, The Optimum Dimensions of Convective Straight Fins with Profile Curvature Effect, AIChE, J. 83 (1987) 77-83.
- [73] P.Razelos, B.R.Satyaprakash, Analysis and Optimisation of Convective Trapezoidal Profile Longitudinal Fins, ASTM J. Heat Transfer 115 (1993) 461-463.
- [74] C.H.Li, Optimum Cylindrical Pin Fin, Int. J. Heat Mass Transfer 29 (1983) 1043-1044.
- [75] A.Sonn, A.Bar-cohen, Optimum Cylindrical Pin Fin, ASTM J. Heat Transfer 103 (1981) 411-413.
- [76] I. Mikk, Convective Fin Of Minimum Mass, Int. J. Heat Mass Transfer 23 (1980) 707-711.
- [77] A.Bejan, A.M.Morega, Optimal Array of Pin Fin and Plate Fin in Laminar Forced Convection, J. Heat Transfer 115 (1993) 75-81.
- [78] Zhihua Li, Jane H. Davidson, and Susan C. Mantell, Heat Transfer Enhancement Using Shaped Polymer Tubes: Fin Analysis, Journal of Heat Transfer, April 2004, Volume 126, Issue 2, pp. 211-218

- [79] Bassam A/K Abu-Hijleh, Natural Convection Heat Transfer From a Cylinder With High Conductivity Permeable Fins, *Journal of Heat Transfer*, April 2003, Volume 125, Issue 2, pp. 282-288.
- [80] I.Mutlu and T.T.Al-Shemmeri, Steady-State and Transient Performance of a Shrouded Longitudinal Fin Array, *Int. Com. Heat Mass Transfer* 20 (1993) 133-143.
- [81] H.Kazeminejad, M.A.Yaghoubi and F.Bahri, Conjugate Forced Convection-Conduction Analysis of a Cooling and Dehumidifying Vertical Rectangular Fin, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 36, n°. 14 (1993) 3625-3631.
- [82] **B.Kudnu and P.K.Das, Performance and Optimization Analysis for Fins of Straight Taper with Simultaneous Heat and Mass Transfer.**
- [83] Kevin A. Moores, Yogendra K. Joshi, Effect of Tip Clearance on the Thermal and Hydrodynamic Performance of a Shrouded Pin Fin Array, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 125, Issue 6, (2003) 999-1006.
- [84] Abram Dorfman, Transient Heat Transfer Between a Semi-Infinite Hot Plate and a Flowing Cooling Liquid Film, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 126, Issue 2, (2004) 149-154.
- [85] Yur-Tsai Lin., Kuei-Chang Hsu., Yu-Juei Chang and Chi-Chuan Wang, Performance of Rectangular Fin in Wet Conditions: Visualization and Wet Fin Efficiency, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 123, Issue 5, (2001) 827-836.
- [86] C. Korte and A. M. Jacobi, Condensate Retention Effects on the Performance of Plain-Fin-and-Tube Heat Exchangers: Retention Data and Modeling, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 123, Issue 5 (2001) 926-936.
- [87] B.T.F.Chung, B.X.Zhan, Minimum Mass Longitudinal Fins with Radiation Interaction at the Base, *J. Franklin Inst.* 328 (1) (1991) 143-161.
- [88] B.T.F.Chung, B.X.Zhan, Optimization of Radiating Fin Array Including Mutual Irradiations Between Radiator Element, *ATM, J. Heat Transfer* 113 (1991) 814-822.
- [89] C.K.Krishnaprakas, Optimum Design of Radiating Rectangular Plate Fin Array Extending From a Plane Wall, *ASTM J. Heat Transfer* 118 (1996) 490-493.
- [90] C.Balaji, K.Sri Jayaram, S.P.Ventateshan, Thermodynamic Optimization of Tubular Space Radiators. *AIAA J. Thermophys. Heat Transfer* 10 (9) (1996) 705-707.
- [91] C.K.Krishnaprakas, K.Badari Narayana, Heat Transfer Analysis of Mutually Irradiating Fins, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 761-769.
- [92] M. Sasikumar and C. Balaji, A Holistic Optimization of Convecting-Radiating Fin Systems, *Journal of Heat Transfer*, 124 (6) (2002) 1110-1116.
- [93] Rizos N. Krikkis, Panagiotis Razelos, Optimum Design of Spacecraft Radiators With Longitudinal Rectangular and Triangular Fins, *Journal of Heat Transfer*, 124 (5) (2002) 805-811.

- [94] Warren M. Rohsenow, James P. Hartnett, Hand book of Heat Transfer, p. 2-107, McGraw-Hill (1973).
- [95] Laetitia PEREZ ; Developpement, Etude Des Performances Et Intégration De Sondes Thermiques Pour La Caractérisation De L'encrassement D'échangeurs Tubulaires A Courants Croises, Doctorat, Spécialise : Mécanique; Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Centre de Bordeaux 2003.



*ANNEXE*



## I. Introduction au logiciel Maple

Maple est un système informatique complet pour des mathématiques avancées. Il inclut des équipements pour l'algèbre interactive, le calcul, les mathématiques discrètes, les graphiques, le calcul numérique, et beaucoup d'autres secteurs des mathématiques. Il fournit également un environnement unique pour le développement rapide des programmes mathématiques en utilisant sa vaste bibliothèque des fonctions et des opérations intégrées.

Maple a la capacité de manœuvrer algébriquement des nombres entiers illimités, des nombres raisonnables exacts, de vrais nombres (avec la précision arbitraire), des formules, des polynômes, des ensembles, des listes, des équations, des rangées, des vecteurs, et des matrices symboliques. Il peut résoudre des systèmes des équations, différencier et d'intégrer des expressions.

## II. Fonctions utilisées

Dans ce qui suit, nous représentons les différentes fonctions, énoncées, citées ou utilisés dans notre travail. Cette présentation donne, de plus, des exemples illustratifs sur ces différentes fonctions traitées.

### II.1. Fonctions Bessel

- ↗ Bessel I et Bessel J : Fonctions Bessel du premier et du second type ;
- ↗ Bessel K et Bessel Y : Fonctions Bessel modifiées du premier et du second ordre ;
- ↗ Hankel H1 et HankelH2 : Fonction Hankel (Fonctions Bessel du troisième type).

#### II.1.1. Représentation

- ↗ Bessel I (v, x) ;
- ↗ Bessel J (v, x) ;
- ↗ Bessel K (v, x) ;
- ↗ Bessel Y (v, x) ;
- ↗ Hankel H1 (v, x) ;
- ↗ Hankel H2 (v, x).

#### II.1.2. Paramètres

- ↗ v : Expression algébrique (ordre ou index)
- ↗ x : Expression algébrique (argument)

#### II.1.3. Description

Les fonctions Bessel du premier et second ordre du premier type, **Bessel J** et **Bessel Y**, résolvent le problème satisfaisant l'expression suivante :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$$

Les fonctions Bessel modifiées du premier et second ordre, **Bessel I** et **Bessel K**. Elles résolvent le problème satisfaisant l'expression suivante :

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + v^2) y = 0$$

Les fonctions **HankelH1** et **HankelH2** sont appelées aussi fonctions Bessel du troisième. Elles satisferont aussi l'équation de Bessel et elles sont reliées à Bessel J et Bessel Y par les expressions suivantes :

$$\text{HankelH1}(v, x) = \text{Bessel J}(v, x) + i \text{Bessel Y}(v, x)$$

$$\text{HankelH2}(v, x) = \text{Bessel J}(v, x) - i \text{Bessel Y}(v, x)$$

#### II.1.4. Exemples

♣ **Bessel J** (0,2) = 0,22389771

♣ **Bessel K**(1,-3.) = - 0,04015643113 – 12,41987883 i

♣ **Bessel I** (0,0) = 1

♣ **Bessel Y** (1,5 + i, 3,5 - i) = 0,9566518512 – 1,465483431 i

♣ Dérivé de la fonction **Bessel J** (v, x) :

$$-\text{BesselJ}(v + 1, x) + \frac{v \text{BesselJ}(v, x)}{x}$$

♣ Dérivé de la fonction **HankelH2** :

$$2 \left( -\text{HankelH2}(v + 1, x^2) + \frac{v \text{HankelH2}(v, x^2)}{x^2} \right) x$$

♣ Conversion de **Bessel J** (3,x) en série :

$$\frac{1}{48} x^3 - \frac{1}{768} x^5 + O(x^6)$$

## II.2. Fonctions hypergeom

### II.2.1. Représentation

C'est la fonction hypergéométrique généralisée représentée comme suit :

♣ hypergeom ([n1, n2, ... ], [d1, d2, ... ], z)

♣ hypergeom ([n1, n2, ... ], [d1, d2, ... ], z)

### II.2.2. Paramètres

♣ [n1,n2,...]: Liste des paramètres supérieurs (peut être vide)

♣ [d1,d2,...]: Liste des paramètres inférieurs (peut être vide)

♣ x: Expression (ou fonction de x)

### II.2.3. Description

La fonction **hypergeom** ([**n**], [**d**], **z**) est la fonction hypergéométrique généralisée de la fonction **F(n, d, z)**. Cette fonction est appelée aussi extension de la fonction hypergéométrique de Barnes. Elle est définie comme suit :

$$F(n, d, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \prod_{i=1}^p \frac{\Gamma(n_i + k)}{\Gamma(n_i)} \right) z^k}{\left( \prod_{i=1}^q \frac{\Gamma(d_i + k)}{\Gamma(d_i)} \right) k!}$$

Où :  $\Gamma$  est la fonction Gamma définie pour la partie réelle de  $x$  par l'expression suivante :

$$\Gamma(x) = \int_{t=0}^{t=\infty} t^{x-1} e^{-t}$$

### II.2.4. Exemples

$$\text{Hypergeom}([1, 2], [2, 3], x^2) = 6.199768754$$

$$\text{Hypergeom}([ ], [2], x) = 2.394833099$$

Cette fonction, **hypergeom**, peut être représentée sous une forme plus simple, on faisant appels aux fonctions élémentaires spéciales trouvées dans le **Handbook of Mathematical Functions**, pour cela nous donnons l'exemple suivant :

$$\text{hypergeom}\left([1, 2], \left[\frac{3}{2}\right], x\right) = -\frac{1}{-2 + 2x} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x} \arcsin(\sqrt{x})}{(x-1)^2 \sqrt{x}}$$

## II.3. Fonctions AiryAi, AiryBi

### II.3.1. Représentation

- ↪ AiryAi (**x**)
- ↪ AiryBi (**x**)
- ↪ AiryAi (**n**, **x**)
- ↪ AiryBi (**n**, **x**)

### II.3.2. Paramètres

- ↪ **n** : Expression algébrique (ordre ou index)
- ↪ **x** : Expression algébrique (argument)

### II.3.3. Description

La fonction Airy est une fonction ondulatoire. Les fonctions **AiryAi** et **AiryBi** sont linéairement dépendants de  $w$  dans l'équation suivante :

$$w'' - z w = 0$$

Ces deux fonctions peuvent être représentées sous la forme suivante en fonction de la fonction hypergeom (cf.II.2)

$$\text{AiryAi}(x) = \frac{\frac{1}{6} 2 3^{(1/3)} \text{hypergeom}\left(\left[ \right], \left[ \frac{2}{3} \right], \frac{x^3}{9}\right) - \frac{3 x 3^{(1/6)} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{hypergeom}\left(\left[ 1, \left[ \frac{4}{3} \right], \frac{x^3}{9}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\text{AiryBi}(x) = \frac{\frac{1}{6} 2 3^{(5/6)} \text{hypergeom}\left(\left[ 1, \left[ \frac{2}{3} \right], \frac{x^3}{9}\right)\right) + \frac{3 3^{(2/3)} x \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{hypergeom}\left(\left[ 1, \left[ \frac{4}{3} \right], \frac{x^3}{9}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Les fonctions **AiryAi** et **AiryBi** sont reliées aux fonctions Bessel d'ordre  $n/3$  avec  $n = -2, -1, 1, 2$ . De plus, elles peuvent être représentées sous forme de série. (Voir l'exemple ci-après)

$$\text{AiryAi}(x) = \frac{1}{3} \frac{x \text{Bessell}\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)}{(x^3)^{(1/6)}} + \frac{1}{3} (x^3)^{(1/6)} \text{Bessell}\left(\frac{-1}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)$$

$$\text{AiryBi}(1, x) = \frac{1}{3} \sqrt{3} \left( \frac{x^2 \text{Bessell}\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)}{(x^3)^{(1/3)}} + (x^3)^{(1/3)} \text{Bessell}\left(\frac{-2}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right) \right)$$

$$\text{AiryAi}(x) = \frac{1}{3} \frac{3^{(1/3)}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{2} \frac{3^{(1/6)} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} x + \frac{1}{18} \frac{3^{(1/3)}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} x^3 + O(x^4)$$

### II.3.4. Exemples

Nous donnerons, ci-après, quelques exemples où l'on représente le résultat correspondant pour quatre représentations de ces fonctions.

$$\text{AiryAi}(0) = \frac{1}{3} \frac{3^{(1/3)}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\text{AiryBi}(0) = \frac{1}{3} \frac{3^{(5/6)}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\text{AiryAi}(1.23) = 0.1021992656$$

$$\text{AiryBi}(-3.45 + 2.75 I) = -16.85910551 - 32.61659997 I$$

## II.4. Fonctions Kummer M, Kummer U

### II.4.1. Représentation

➤ **Kummer M** ( $\mu, \nu, z$ )

➤ **Kummer U** ( $\mu, \nu, z$ )

### II.4.2. Paramètres

➤  $\mu$  : Expression algébrique

➤  $\nu$  : Expression algébrique

➤  $z$  : Expression algébrique

### II.4.3. Description

Les fonctions **Kummer**, **Kummer M** ( $\mu, \nu, z$ ) et **Kummer U** ( $\mu, \nu, z$ ), résous l'équation différentielle suivante :

$$z \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + (\nu - z) \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) - \mu y = 0$$

Elles peuvent être converties en série, nous présentons l'exemple de calcul suivant :

$$\begin{aligned} \text{KummerU}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, x\right) &= \frac{3 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} - \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{3} x^{(2/3)}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{9 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x}{2 \pi} - \frac{7 \sqrt{\pi} \sqrt{3} x^{(5/3)}}{10 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\ &+ \frac{81 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x^2}{32 \pi} - \frac{91 \sqrt{\pi} \sqrt{3} x^{(8/3)}}{320 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{405 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x^3}{448 \pi} - \frac{1729 \sqrt{\pi} \sqrt{3} x^{(11/3)}}{21120 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\ &+ \frac{243 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x^4}{1024 \pi} - \frac{1235 \sqrt{\pi} \sqrt{3} x^{(14/3)}}{67584 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{6561 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x^5}{133120 \pi} \\ &- \frac{7657 \sqrt{\pi} \sqrt{3} x^{(17/3)}}{2297856 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + O(x^6) \end{aligned}$$