

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse : Systèmes Dynamiques

Par

OUKIL Walid

THÈME

ASPECTS DYNAMIQUES DES TRANSFORMATIONS
UNIFORMÉMENT DILATANTES

Soutenu publiquement, le 05/11/2007, devant le jury composé de :

Mr.	A. AISSANI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	A. KESSI	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	A. BENMEZAI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mme.	H. GUERBYENNE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr.	H. BELBACHIR	Chargé de Cours	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **A. Amroun** de l'Université d'Orsay (France) pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé et pour son encadrement pendant nos années du travail.*

*Je suis également reconnaissant pour Monsieur **A. Kessi**, Professeur à l'U.S.T.H.B. mon Directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée pour réaliser ce travail.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **A. Aissani**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je remercie vivement Monsieur **A. Benmezai**, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. et Madame **H. Guerbyenne**, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. qui ont bien voulu faire partie du jury.*

*Un remerciement très particulier à Monsieur **H. Belbachir**, Chargé de Cours à l'U.S.T.H.B., pour son soutien pendant toutes mes années de Poste-Graduation et qui a aussi bien voulu faire partie du jury.*

*Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin dans ma formation universitaire entre eux Monsieur **S. Berouanne** du Département de Probabilité et Statistiques de l'U.S.T.H.B.*

Mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents pour leur soutien tout au long de mes études.

Aux petits choux :
Imane, Thinhinane et Yacine.

Aspects Dynamiques Des Transformations Uniformément Dilatantes

Mots clés : *Théorie ergodique, Systèmes Hyperboliques, Théorie de la mesure, Probabilités et Statistiques, Théorie spectrale, Analyse fonctionnelle.*

Table des matières

Présentation du travail	1
1 Quelques rappels d'analyse	3
1.1 Généralités sur la théorie ergodique	3
1.1.1 Motivation et définitions	3
1.1.2 Récurrence de Poincaré et Théorème de Birkhoff	6
1.1.3 Fractions continues	8
1.2 Fonctions à variations bornées	9
1.2.1 Propriétés des fonctions à variations bornées	10
1.2.2 Mesure de Borel complexe associée à une fonction à variation bornée	10
1.2.3 Fonction à variation bornée associée à une mesure de Borel complexe	12
1.3 Ensemble des mesures de Borel complexes	12
1.4 Fonctions à variations bornées dans $L^1(m)$	15
2 Mesure de probabilité invariante par une transformation uniformément dilatante	22
2.1 Transformations uniformément dilatantes	22
2.1.1 Exemples	23
2.2 Résultat principal	24
2.3 Preuve du résultat principal	26
2.3.1 Opérateur de Perron-Frobenius	26
2.3.2 La mesure invariante μ_h	29
2.3.3 Exemples et remarques	38

3	Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (I.T.M)	42
3.1	Application du Théorème ITM	44
3.2	Construction des opérateurs ϕ_{λ_i}	46
3.3	Décomposition de l'opérateur ϕ_T	51
3.4	Conclusion	56
4	Méthode des cônes invariants et application	58
4.1	Définitions et résultats	59
4.1.1	Relation d'ordre associée à un cône	60
4.2	Mesure invariante	63
4.3	Décroissance des corrélations	73
	Conclusion générale	80
	Annexe	82
	Bibliographie	87

PRESENTATION DU TRAVAIL

Ce travail concerne l'étude des comportements asymptotiques des transformations uniformément dilatantes de l'intervalle (*Expanding maps*) qui représentent une classe très importante des systèmes dynamiques *hyperboliques*. Dans ce cadre, cette étude est basée sur les différents résultats de la théorie ergodique : Existence d'une mesure de probabilité invariante, Ergodicité, Décroissance des corrélations, Mélange exponentiel, Récurrence de Poincaré, Théorème de Birkhoff, ... etc.

Pour de telles transformations, les premiers résultats concernant l'existence d'une mesure de probabilité invariante ont été prouvés en 1973 par Lasota et Yorke [12]. L'idée de ces deux auteurs était d'utiliser ces transformations dans la modélisation du forage pétrolier. L'existence de telles mesures est une question importante en systèmes dynamiques. A priori sans condition sur la transformation il peut exister une infinité de mesures invariantes ou pas du tout (Voir [9]). Dans le cas où il en existe, il s'agit de construire des mesures invariantes privilégiées : celles qui expliquent le mieux les aspects stochastiques du système dynamique (qui est déterministe) comme la récurrence et le comportement asymptotiques, l'ergodicité et le mélange sont des notions centrales de la théorie.

Le but de ce travail est de présenter une classe de systèmes dynamiques qui admettent une mesure invariante ergodique et mélangeante. La méthode permet de construire une mesure invariante absolument continue par rapport à une mesure de référence (ici la mesure de Lebesgue). Nous présentons deux méthodes. La première est basée sur l'étude d'un opérateur qui permet de traduire le problème en une étude spectrale. La deuxième utilise la technique des métriques projectives de Hilbert. L'avantage de cette dernière est qu'elle permet de montrer qu'il y a convergence exponentielle vers la mesure invariante est qu'en particulier on a un mélange exponentiel.

On rappelle au premier chapitre les notions de base de la théorie ergodique, où on donne l'exemple des "*Fractions continues*" qui montre l'utilité de cette théorie. Quelques rappels d'analyse (Fonction à variation bornée, Mesures de Borel,...etc.) sont introduit dans le même chapitre. Dans le deuxième chapitre, on définit la classe des transformations uniformément dilatantes qu'on va étudier. Le but de ce chapitre est de montrer l'existence

d'une mesure de probabilité invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela on va étudier l'opérateur de transfert associé à une transformation uniformément dilatante, appelé aussi "L'opérateur de Perron-Frobenius", le problème posé par cet opérateur est la possibilité d'existence de transformations, qui rendent l'espace des fonctions continues instable sous l'action de cet opérateur. Le choix de l'espace fonctionnel et de la norme, où on fait agir cet opérateur, joue un rôle principal pour avoir les résultats souhaités. Un bon choix nous permet d'avoir des résultats plus précis. Plusieurs auteurs ont introduit de différentes notions de variation bornée ([10], [20], [16]). Un point fixe de cet opérateur est la densité d'une mesure invariante. Dans le troisième chapitre, on montre le Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu; ce théorème nous donnera la décomposition spectrale de l'opérateur de Perron-Frobenius sur l'espace des fonctions à variations bornées. Ainsi, on peut déduire dans quels cas on peut avoir l'ergodicité de la mesure invariante et la décroissance exponentielle des corrélations. En outre, ce théorème montre bien la difficulté d'avoir de tels résultats. Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à une classe particulière de transformations uniformément dilatantes. Avec la méthode des cônes invariants (ou de la métrique projective), basée sur *l'inégalité de Birkhoff*, on montre l'existence d'une mesure de probabilité invariante et équivalente à la mesure de Lebesgue, et la décroissance exponentielle des corrélations, qui implique un mélange exponentiel et en particulier l'ergodicité du système.

Chapitre 1

Quelques rappels d'analyse

1.1 Généralités sur la théorie ergodique

La notion d'ergodicité a été initialement introduite par les physiciens, sous forme d'hypothèse supposée vraie [11], dans l'étude du comportement à long terme d'évolution d'un système physique donné. Cette hypothèse, qui porte le nom d'*Hypothèse ergodique*, a été formulée pour la première fois en 1871 par Boltzmann d'une manière intuitive, pour les besoins de sa théorie cinétique des gaz, et reprise par d'autres physiciens pour justifier le fondement de la mécanique statistique. De ce temps, la confirmation de cette hypothèse est devenue un travail des mathématiciens, basé principalement sur les travaux de Birkhoff datés de 1931, ce qui a donné par conséquence, la naissance de la théorie ergodique. Grâce aux travaux de Kolmogorov et Sinaï, le domaine d'application de la théorie ergodique, s'est élargit actuellement, à la théorie de l'information pour le codage et le décodage entre autres.

1.1.1 Motivation et définitions

Un système dynamique (X, T) est la donnée d'un espace X et une transformation T dans le temps. Un point x de l'espace X désigne l'état du système au temps $t = 0$. Sous l'action de la transformation le point $T(x)$ désigne l'état du système au temps $t = 1$, d'une manière générale $T^n(x)$ désigne l'état du système au temps $t = n$. On appelle l'ensemble $\{x, T(x), \dots, T^n(x), \dots\}$ *l'orbite* du point x . L'étude d'un système dynamique consiste à prévoir son comportement futur sous l'action de la transformation T .

Lorsque la transformation T est connue, on dit que le système est "*déterministe*". La question qu'on peut poser est la suivante :

Si on choisit deux conditions initiales voisines, est-ce-que leurs orbites gardent la même propriété ?

La réponse à cette question est la classification des systèmes dynamiques en deux classes : *Système Dynamiques chaotiques et non-chaotiques*. La deuxième classe répond positivement à notre question, ce qui n'est pas le cas pour la première. En effet, dans un système chaotique, deux conditions (points) initiales assez proches peuvent présenter deux orbites complètement différentes. Ce type de comportement est l'obstacle principal dans l'étude de l'évolution du système chaotique, en l'étudiant orbite par orbite. Cela motive l'étude probabiliste de l'évolution du système, qui, par contre, s'intéresse à l'étude du comportement futur des sous-ensembles de l'espace considéré.

Définition 1.1. Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $T : X \rightarrow X$ une application (transformation) mesurable.

μ est dite T -invariante (on dit aussi T préserve la mesure μ), si pour tout ensemble mesurable A de $\mathcal{B}$ on a :

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A),$$

où $T^{-1}A = \{x \in X \mid T(x) \in A\}$.

C'est encore équivalent à :

$$\int_X f \circ T \, d\mu = \int_X f \, d\mu \quad \text{pour tout } f \text{ dans } L^\infty(\mu).$$

Définition 1.2. Si μ et ν sont deux mesures définies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$, alors μ est dite absolument continue par rapport à ν si $\forall B \in \mathcal{B}$ tel que $\nu(B) = 0$ alors $\mu(B) = 0$. Si ν est aussi absolument continue par rapport à μ , on dit que μ et ν sont équivalentes.

Dans un système dynamique du type $([a, b], T)$, où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et T une application de $[a, b]$ dans lui-même, on peut toujours rencontrer des points fixes. Supposons alors, qu'il existe un point fixe $x_0 \in [a, b]$.

Nous remarquons, dans ce cas, que la mesure de Dirac δ_{x_0} centrée en x_0 , est un exemple d'une mesure de probabilité invariante par T . Or tout sous-ensemble de $[a, b]$ ne contenant pas le point x_0 est de mesure nulle par rapport à la mesure δ_{x_0} , ce qui montre qu'on peut pas avoir assez d'informations sur notre système. Pour cela on exige que la mesure invariante soit absolument continue par rapport à une mesure de référence (Par exemple : mesure de Lebesgue).

Définition 1.3. Soit (X, T, μ) un espace de probabilité avec μ T -invariante :

(X, T, μ) est dit ergodique si pour tout ensemble mesurable A de X ,

$$T^{-1}A = A \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1.$$

L'ergodicité est encore équivalente à la condition suivante :

Pour tout A et B mesurables,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu((T^{-i}A) \cap B) = \mu(A) \mu(B).$$

(Voir [21])

Définition 1.4. La transformation T est dite mélangeante si pour tout A et B mesurables on a :

$$\mu((T^{-n}A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A) \mu(B).$$

Dynamique d'une transformation mélangeante

Si T est mélangeante alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu((T^{-n}A) \cap B)}{\mu(B)} = \mu(A),$$

pour tout sous-ensemble mesurable A et B .

On remarque que :

$$\frac{\mu((T^{-n}A) \cap B)}{\mu(B)} = \mu((T^{-n}A) / B) \text{ n'est que la probabilité conditionnelle sachant } B.$$

Cela signifie que la dynamique de $T^{-n}A$ devient asymptotiquement indépendante de tout sous-ensemble mesurable B .

Remarque 1.1. Toute transformation mélangeante est ergodique.

Exemple 1. Soit l'application $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec $T(x) = 2x \bmod 1$.

On remarque dans la figure 1.1, que chaque ensemble A donne par image inverse deux ensembles de longueur égale à la moitié de la longueur de A . Donc la mesure de Lebesgue est invariante.

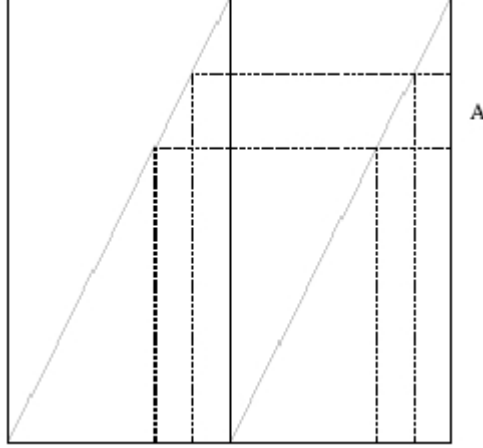


Figure 1.1: $T(x) = 2x \bmod 1$

1.1.2 Récurrence de Poincaré et Théorème de Birkhoff

La Récurrence de Poincaré et le Théorème de Birkhoff (Voir [21]), figurent parmi les principaux résultats de la théorie ergodique. Ainsi plusieurs informations (Dynamiques, statistiques,...etc.), concernant le système dynamique étudié, peuvent être déduites.

Théorème de Récurrence de Poincaré

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et T une transformation qui préserve μ .

Soit $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$ alors,

$\exists F \subset A$ avec $\mu(F) = \mu(A)$ tel que $\forall x \in F$, il existe une suite $\{n_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

$$T^{n_i(x)}(x) \in A \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Théorème de Birkhoff (Le Théorème Ergodique)

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré tel que μ soit σ -finie (i.e., $\exists \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ telle que $\mu(A_i) < \infty$ et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = X$) et T une transformation qui préserve μ , alors :

$\forall f \in L^1(\mu)$ la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge μ -presque partout vers une fonction $f^* \in L^1(\mu)$.

Et on a, $f^* \circ T = f^*$ μ -presque partout. Si $\mu(X) < \infty$ alors $\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu$.

Remarque 1.2. (i) Si T est ergodique alors f^* est constante μ -presque partout, et si de plus $\mu(X) < \infty$ alors,

$$f^* = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \quad \mu\text{-presque partout.}$$

(ii) Si de plus $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité et T est ergodique alors,

$$\forall f \in L^1(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int_X f \, d\mu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \text{ dans } X.$$

Dynamique d'une transformation et le Théorème de Birkhoff

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité, T une transformation qui préserve μ , B un élément de $\mathcal{B}$ et x un élément de X .

En remplaçant dans les résultats du Théorème de Birkhoff la fonction f par la fonction indicatrice $\mathbf{1}_B$ de B , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_B(T^i(x)) = f^*.$$

Or,

$$\mathbf{1}_B(T^i(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } T^i(x) \notin B \\ 1 & \text{si } T^i(x) \in B \end{cases}$$

Donc le terme $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_B(T^i(x))$ signifie la proportion (ou la fréquence relative) des éléments de l'ensemble $\{x, T^1(x), \dots, T^{n-1}(x)\}$ qui sont dans B . En passant à la limite, ça sera la proportion (ou la fréquence relative) de tout les éléments de l'orbite de x qui sont dans B .

Si le système (T, μ) est ergodique, alors d'après le Théorème de Birkhoff, cette proportion est égale à :

$$\int_X \mathbf{1}_B \, d\mu = \mu(B).$$

En physique statistique, la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ est appelée "la moyenne temporelle" et $\int_X f \, d\mu$ est appelé "la moyenne spatiale".

Dans le cas où le système (T, μ) est ergodique, la remarque (1.2.) montre que les deux moyennes sont égales. Cette égalité est appelée "l'Hypothèse ergodique". Souvent, la fonction f représente une énergie extérieure qui agit sur le système.

1.1.3 Fractions continues

L'étude de la transformation "*Fractions continues*", appelée aussi : *Transformation de Gauss*, joue un rôle important en théorie des nombres.

La transformation "Fractions continues" (Figure 1.2) est définie par :

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \rightarrow \begin{cases} T(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ T(x) = \frac{1}{x} \bmod 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

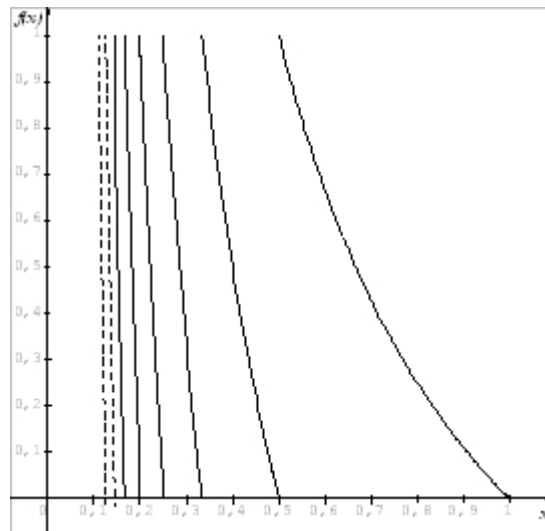


Figure 1.2: $T(x) = 1/x \bmod 1$

Soit x un nombre irrationnel dans $[0, 1]$. Le n^{eme} nombre naturel figurant dans la partie fractionnelle de x est donné par (Voir [21], [14]) :

$$a(T^n(x)),$$

où l'application a est définie par :

$$a :]0, 1[\rightarrow \mathbb{Z}, \quad y \rightarrow a(y) = \left[\frac{1}{y} \right]$$

($\left[\frac{1}{y} \right]$ est la partie entière de $\frac{1}{y}$).

T preserve la mesure de Gauss μ définie par :

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x} dm.$$

(Voir [6],[14] et [3]).

La mesure de Gauss μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m . D'après le Théorème de Birkhoff cité, ci-dessus, on en déduit que pour presque tout x dans $[0, 1]$ (relativement à la mesure de Lebesgue m), la fréquence relative d'un nombre naturel k dans la partie fractionnelle de x est :

$$\frac{1}{\log 2} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+x} dm = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

1.2 Fonctions à variations bornées

Dans toute la suite on note I l'intervalle $[0, 1]$, m la mesure de Lebesgue et par $L^1(m)$ l'espace quotient des fonctions Lebesgue intégrables de I à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur le groupe $H = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} / \int_I |f| dm = 0\}$ muni de la norme usuelle $\|f\|_1 = \int_I |f| dm$.

On note $f = g \ m - p.p$ si $\|f - g\|_1 = 0$.

Définition 1.5. Soit f une application de I dans $\mathbb{C}$.

La variation totale de f sur I est le nombre

$$v_*(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| : N \in \mathbb{N}^*, a_1 = 0 < \dots < a_N = 1 \right\}$$

où on prend le supremum sur l'ensemble des subdivisions finies de I .

On dit que f est à variation bornée si $v_*(f)$ est fini.

Il est à noter que toute fonction constante sur I est de variation totale nulle.

Soient $J_1 = [a_1, b_1] \subset I$, $J_2 = [a_2, b_2] \subset I$ et $\sigma : J_1 \rightarrow J_2$ une application continue strictement monotone alors :

$$v_*(f \circ \sigma, J_1) = v_*(f, J_2)$$

où $v_*(f \circ \sigma, J_1)$ est la variation totale de $f \circ \sigma$ sur l'intervalle J_1 et $v_*(f, J_2)$ est la variation totale de f sur l'intervalle J_2 (voir [7]).

On a les inégalités suivantes (voir : Annexe)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée et $[a, b] \subset I$, alors :

$$(1.2.1) \quad v_*(f \cdot 1_{[a,b]}) \leq v_*(f, [a, b]) + |f(a)| + |f(b)|,$$

où $1_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice de $[a, b]$ et $v_*(f, [a, b])$ est la variation totale de f sur $[a, b]$.

$$(1.2.2) \quad |f(a)| + |f(b)| \leq v_*(f, [a, b]) + 2 \inf_{x \in [a,b]} (|f|(x)).$$

1.2.1 Propriétés des fonctions à variations bornées

Soit f une fonction à variation bornée sur I , on a :

- (i) f admet une limite à gauche et à droite en tout point de I .
 - (ii) l'ensemble des points de discontinuités de f est au plus dénombrable.
- (Voir : [19], [15] et [1])

1.2.2 Mesure de Borel complexe associée à une fonction à variation bornée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée continue à droite en tout point de I .

En prolongeant f sur $\mathbb{R}$ tout entier en lui donnant la valeur 0 sur $\mathbb{R} \setminus I$, on définit une mesure de Borel complexe μ_* de la manière suivante :

Soit

$$\nu([x, y]) = f(y) - f(x) \quad \forall x < y, \quad x, y \text{ dans } \mathbb{R}.$$

ν est une application σ -additive sur le semi-anneau $\{[x, y], x < y, x, y \text{ dans } \mathbb{R}\}$, notons μ_* le prolongement de ν sur les boreliens de $\mathbb{R}$ (Voir le *Théorème de prolongement dans [15]*),

On a les relations suivantes (voir [18]) :

$$\forall 0 \leq a < b \leq 1 :$$

$$\begin{aligned}
 \mu_*([a, b]) &= f(b) - f(a), \\
 \mu_*([a, b[) &= f(b^-) - f(a), \\
 \mu_*([a, b]) &= f(b) - f(a^-), \\
 \mu_*([a, b[) &= f(b^-) - f(a^-), \text{ où } f(x^-) = \lim_{\substack{y < x \\ y \rightarrow x}} f(y).
 \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \mu_*([0]) &= \mu_*([-\infty, 0] \setminus]-\infty, 0[) = \mu_*([-\infty, 0]) - \mu_*([-\infty, 0[) \\
 &= (f(0) - f(-\infty)) - (f(0^-) - f(-\infty)) = f(0), \quad (\text{car } f(0^-) = 0)
 \end{aligned}$$

Un point x_0 de $\mathbb{R}$ est dit *un point de discontinuité de μ_** si $\mu_*([x_0]) \neq 0$.

Remarquons que les points de discontinuités de μ_* sont les points de discontinuités de f , car

$$\mu_*([a]) = f(a) - f(a^-).$$

Comme f est à variation bornée donc le nombre de ses points de discontinuités est au plus dénombrable, on déduit que les points de discontinuités de μ_* est aussi au plus dénombrable.

Donc à chaque fonction définie sur I , à variation bornée et continue à droite, on peut lui associer une mesure de Borel complexe μ sur I qui est la restriction de μ_* sur les boréliens de I . Cette mesure vérifie :

$$\begin{aligned}
 \mu([a, b]) &= f(b) - f(a), \quad \mu([a, b[) = f(b^-) - f(a), \\
 \mu([a, b]) &= f(b) - f(a^-) \text{ et } \mu([a, b[) = f(b^-) - f(a^-) \text{ pour } (a, b) \in I^2.
 \end{aligned}$$

On a

$$\mu([0, x]) = \mu([0] \cup]0, x]) = f(0) + (f(x) - f(0)) = f(x),$$

d'où

$$(1.2.3) \quad \mu([0, x]) = f(x)$$

Donc f peut être vue comme étant la fonction de répartition d'une mesure de Borel complexe.

Définition 1.6.

Soit A un borélien de I , posons :

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N |\mu|(A_i) \mid \{A_i\}_{1 \leq i \leq N} \text{ partition du borelien } A \right\}$$

on prend le supremum sur l'ensemble des partitions de A

$|\mu|$ est une mesure de Borel positive sur I appelée variation totale de μ .

On a l'égalité suivante :

$$v_*(f) = |\mu|(I).$$

(Voir [19], [15])

1.2.3 Fonction à variation bornée associée à une mesure de Borel complexe

Pour toute mesure de Borel complexe μ sur I , la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \mu([0, x]),$$

est à variation bornée .

En effet, μ est complexe donc l'ensemble d'arrivé est de dimension fini donc sa variation totale est finie.

(Voir [19], [15])

Et comme ce qui précède

$$v_*(f) = |\mu|(I).$$

1.3 Ensemble des mesures de Borel complexes

On note par $M_{\mathbb{C}}(I)$ l'ensemble des mesures de Borel complexes et par $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

Chaque mesure de Borel *complexe* μ est à *variation bornée* :

$$|\mu|(I) < +\infty.$$

(Voir [15]) .

On sait que, la norme définie sur $M_{\mathbb{C}}(I)$ par :

$$\|\mu\|_I = |\mu|(I),$$

rend l'espace $M_{\mathbb{C}}(I)$ un espace de Banach [15].

On définit aussi, sur $M_{\mathbb{C}}(I)$, une topologie appelée "topologie de la convergence faible". On dit qu'une suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $M_{\mathbb{C}}(I)$, converge faiblement vers la mesure μ de $M_{\mathbb{C}}(I)$, si :

$$\forall f \in C(I) : \int_I f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f d\mu.$$

Ainsi si $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une application continue μ -presque partout et $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers la mesure μ , alors,

$$(1.3.1) \quad \int_I g d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I g d\mu.$$

D'autre part, si f est dans $C(I)$ et μ dans $M_{\mathbb{C}}(I)$ alors on a l'inégalité suivante :

$$(1.3.2) \quad \left| \int_I f d\mu \right| \leq \|f\|_{\infty} |\mu|(I).$$

(Voir [15, page 420])

Soit μ dans $M_{\mathbb{C}}(I)$, on considère la forme linéaire sur $C(I)$ définie par

$$L_{\mu} : C(I) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \rightarrow L_{\mu}(f) = \int_I f d\mu.$$

Alors la convergence faible de la suite de mesures $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M_{\mathbb{C}}(I)$ vers la mesure μ , correspond à une convergence des formes linéaires L_{μ_n} vers la forme linéaire L_{μ} dans le dual de $C(I)$, appelée la convergence faible*. Et on a le résultat suivant : (Voir [5]) .

$$\|L_{\mu}\| \leq \liminf_n \|L_{\mu_n}\|.$$

Comme $\forall \mu \in M_{\mathbb{C}}(I) : \|L_{\mu}\| = |\mu|(I)$ (Voir [15]) , alors

$$(1.3.3) \quad |\mu|(I) \leq \liminf_n |\mu_n|(I).$$

.

Proposition 1.1. (Voir [15]) L'ensemble $B = \{\mu \in M_{\mathbb{C}}(I) \mid |\mu|(I) \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible.

On propose la démonstration suivante :

Preuve. Soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de B .

Comme $C(I)$ est séparable donc il admet une partie $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dénombrable dense .

D'après 1.3.2 on a

$$\left| \int_I f_1 d\mu_n \right| \leq \|f_1\|_{\infty} |\mu_n|(I) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme

$$|\mu_n|(I) \leq 1,$$

alors $\left| \int_I f_1 d\mu_n \right| \leq \|f_1\|_{\infty} < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$; et comme $\mathbb{C}$ est localement compact, donc la suite $\int_I f_1 d\mu_n$ qui est bornée admet une sous-suite d'indice $\{n_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$, telle que $\int_I f_1 d\mu_{n_k^1}$ converge vers un point dans $\mathbb{C}$, qu'on note $\varphi(f_1)$.

De même on a :

$$\left| \int_I f_2 d\mu_{n_k^1} \right| \leq \|f_2\|_{\infty} < \infty$$

Donc il existe une sous -suite $\{n_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{n_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$\int_I f_2 d\mu_{n_k^2}$ converge vers un point de $\mathbb{C}$, qu'on note $\varphi(f_2)$.

Par récurrence on construit des sous-suites $\{n_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{n_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ décroissantes au sens de l'inclusion et telles que : $\int_I f_i d\mu_{n_k^i}$ converge vers un point de $\mathbb{C}$, qu'on note $\varphi(f_i)$, lorsque k tend vers l'infini .

Soit la suite d'indices diagonale $\{n_i^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, on a $\int_I f_i d\mu_{n_i^i}$ converge vers $\varphi(f_i)$ lorsque i tend vers l'infini .

Enfin, montrons que $\forall f \in C(I), \exists \varphi(f) \in \mathbb{C}$ tel que $\int_I f d\mu_{n_i^i}$ converge vers $\varphi(f)$ lorsque i tend vers l'infini .

Soit donc f dans $C(I)$; $\exists \{f_l\}_l \subset \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $f_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{\infty}} f$.

Soient $\varepsilon > 0$ et l_0 tel que $\forall l \geq l_0 \Rightarrow \|f_l - f\|_{\infty} < \varepsilon$

Pour l fixé, tel que $l \geq l_0$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_I f \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right| &= \left| \int_I f \, d\mu_{n_i} - \int_I f_l \, d\mu_{n_i} + \int_I f_l \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right| \\
 &\leq \left| \int_I f \, d\mu_{n_i} - \int_I f_l \, d\mu_{n_i} \right| + \left| \int_I f_l \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right| \\
 &\leq \left| \int_I (f - f_l) \, d\mu_{n_i} \right| + \left| \int_I f_l \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right| \\
 &\leq \|f - f_l\|_\infty \cdot |\mu_{n_i}|(I) + \left| \int_I f_l \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right| \\
 &\leq \varepsilon \cdot 1 + \left| \int_I f_l \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right|.
 \end{aligned}$$

Comme la suite $\int_I f_l \, d\mu_{n_i}$ converge vers $\varphi(f_l)$ dans $\mathbb{C}$ alors

$$\left| \int_I f \, d\mu_{n_i} - \varphi(f_l) \right| \leq \varepsilon + \varepsilon'$$

Donc l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $\int_I f \, d\mu_{n_i}$ est contenu dans un disque de rayon inférieur à n'importe quel nombre. D'où cette suite admet une seule valeur d'adhérence, qu'on note $\varphi(f)$.

On a : $\varphi(\cdot)$ est linéaire de $C(I)$ dans $\mathbb{C}$ et

$$|\varphi(f)| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_I f \, d\mu_{n_i} \right|.$$

Donc pour tout f dans $C(I)$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ on a :

$$\left| \int_I f \, d\mu_{n_i} \right| \leq \|f\|_\infty |\mu_{n_i}|(I) \leq 1.$$

Par suite, $|\varphi(f)| \leq 1$ pour tout f dans $C(I)$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ d'où $\|\varphi\| \leq 1$,

i.e : φ est linéaire continue sur $C(I)$ et d'après le Théorème de représentation de Reisz (Voir [15] et annexe), il existe une mesure de borel complexe μ sur I telle que :

$$\varphi(f) = \int_I f \, d\mu \quad \text{et} \quad |\mu|(I) = \|\varphi\|.$$

D'où μ_{n_i} converge faiblement vers μ et $|\mu|(I) \leq 1$. ■

1.4 Fonctions à variations bornées dans $L^1(m)$

Soit f dans $L^1(m)$.

Posons

$$v(f) = \inf \{v_*(h) \mid h = f \text{ } m - p.p\}.$$

On dit que f est à variation bornée si le nombre $v(f)$ est fini.

Cela revient à dire qu'il existe $h_0 \in L^1(m)$ telle que $h_0 = f \text{ } m - p.p$ et $v_*(h_0) < \infty$.

On note V l'ensemble $\{f \in L^1(m) \mid v(f) < +\infty\}$.

On remarque que $v(\cdot)$ est une semi-norme sur V .

V est un sous-espace de $L^1(m)$ qui n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$, par exemple : la suite de fonctions $f_n(x) = \sin(\frac{1}{x}) \cdot 1_{] \frac{1}{n}, 1]}(x)$ est dans V et converge vers $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ dans $L^1(m)$ mais f n'est pas dans V .

Pour que V soit un espace de Banach, on définit la norme $\|\cdot\|_v$ sur V par :

$$\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1$$

On a les inégalités suivantes :

(i) Soient f et g dans V , alors

$$(1.4.1) \quad v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f).$$

(ii) $\forall f \in V$, on a

$$(1.4.2) \quad \|f\|_\infty \leq \|f\|_v.$$

où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme usuelle de $L^\infty(m)$. (Pour la démonstration : voir Annexe).

On propose le résultat suivant

Proposition 1.2. *Si $f \in V$, alors il existe $g = f \text{ } m - p.p$ telle que g soit continue à droite en tout point de I et continue à gauche en 1.*

De plus,

$$v_*(g) = v(f) = \inf \{v_*(h) \mid h = f \text{ } m - p.p\}.$$

Preuve. Comme $f \in V$, alors il existe $h_0 = f \text{ } m - p.p$ telle que $v_*(h_0) < \infty$, d'après les propriétés des fonctions à variations bornées, on déduit l'existence de g avec $g = f \text{ } m - p.p$, telle que g soit continue à droite en tout point de I et continue à gauche en 1.

Soit h une application quelconque telle que $h = f \text{ } m - p.p.$

Si h est continue à droite en x alors $h(x) = g(x)$.

En effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall y \in I : |y - x| \leq \delta \Rightarrow \left[|g(y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |h(y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Comme $h = f = g \text{ } m - p.p.$, alors $\exists z \in I$ tel que $|z - x| \leq \delta$ et $h(z) = g(z)$, donc :

$$|h(x) - g(x)| = |h(x) - h(z) + g(z) - g(x)| \leq |h(x) - h(z)| + |g(z) - g(x)| < \varepsilon.$$

D'où

$$h(x) = g(x).$$

De même si h est continue à gauche en 1 alors $h(1) = g(1)$.

Montrons maintenant que $v_*(g) \leq v_*(h)$ (ce qui implique que $v_*(g) = v(f)$).

Soit $\sigma = \{a_1 = 0 < a_2 < \dots < a_n = 1\}$ une subdivision de I .

Comme g est continue à droite en tout point de I et continue à gauche en 1.

Alors,

$$(1.4.3) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \exists z_i \in]a_i, a_{i+1}[\text{ tel que } |g(z_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

Comme $g = h \text{ } m - p.p.$, on peut supposer que $g(z_i) = h(z_i)$.

De même,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z_n \in]a_{n-1}, a_n = 1[\text{ tel que } |g(1) - g(z_n)| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)} \text{ et } g(z_n) = h(z_n).$$

On a,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_{i+1}) - g(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_{i+1}) - g(z_{i+1}) + g(z_{i+1}) - g(z_i) + g(z_i) - g(a_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_{i+1}) - g(z_{i+1})| + |g(z_{i+1}) - g(z_i)| + |g(z_i) - g(a_i)|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (1.4.3), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_{i+1}) - g(a_i)| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(n-1)} + |h(z_{i+1}) - h(z_i)| + \frac{\varepsilon}{2(n-1)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |h(z_{i+1}) - h(z_i)| + \varepsilon \\ &\leq [|h(z_1) - h(0)| + |h(1) - h(z_n)|] + \sum_{i=1}^{n-1} |h(z_{i+1}) - h(z_i)| + \varepsilon \\ &\leq v_*(h) + \varepsilon. \end{aligned} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n-1} |g(a_{i+1}) - g(a_i)| \leq v_*(h)$$

Comme σ est une subdivision quelconque dans I , on déduit que :

$$v_*(g) \leq v_*(h) \quad \forall h = f \text{ } m - p.p.$$

D'où

$$v_*(g) = \inf \{v_*(h) \mid h = f \text{ } m - p.p.\} = v(f)$$

■

Remarque 1.3. (i) On remarque que l'application g , qui vérifie les hypothèses de la proposition (1.2.) précédente est unique.

(ii) On peut considérer l'espace V , comme étant l'ensemble des fonctions à variations bornées, continues à droite en tout point de I et continues à gauche en 1.

Proposition 1.3. (Voir [6])

L'espace V est de Banach pour la norme $\|\cdot\|_v$.

On propose la démonstration suivante :

Preuve. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans V , donc bornée pour la norme $\|\cdot\|_v$ par une constante c .

$$\|f_n\|_v = v(f_n) + \|f_n\|_1 \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons qu'il existe une fonction f dans V telle que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_v} f$.

D'après la proposition 1.2. précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists h_n = f_n \text{ } m - p.p$ telle que $v(f_n) = v_*(h_n)$, et h_n continue à droite en tout point de I .

Soit μ_n la mesure de Borel associée à h_n

On associe à $h_n - h_m$ la mesure de Borel $\mu_n - \mu_m$ pour m, n dans $\mathbb{N}$ et on a :

$$\|\mu_n - \mu_m\|_I = |\mu_n - \mu_m|(I) = v_*(h_n - h_m) = v(f_n - f_m).$$

La suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy pour la semi-norme $v(\cdot)$, donc $\{\mu_n\}_n$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_I$.

Comme l'espace $M_{\mathbb{C}}(I)$ est de Banach pour la norme $\|\mu\|_I = |\mu|(I)$ donc il existe une mesure $\mu \in M_{\mathbb{C}}(I)$ telle que :

$$\|\mu_n - \mu\|_I \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{i.e : } |\mu_n - \mu|(I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit la fonction h définie par : $h(x) = \mu([0, x])$, d'après ce qui précède h est dans V .

Ainsi on associe à $h_n - h$ la mesure $\mu_n - \mu$, donc

$$v(f_n - h) = v_*(h_n - h) = |\mu_n - \mu|(I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il reste à montrer que f_n converge vers h dans $L^1(m)$, et cela en utilisant le Théoreme de Lebesgue (Voir l'annexe) :

D'une part :

$$|(\mu_n - \mu)([0, x])| \leq |\mu_n - \mu|([0, x]) \leq |\mu_n - \mu|(I).$$

Car $|\mu_n - \mu|$ est une mesure positive, et d'après (1.2.3), on a :

$$(\mu_n - \mu)([0, x]) = \mu_n([0, x]) - \mu([0, x]) = h_n(x) - h(x).$$

alors h_n converge uniformément vers h

D'autre part, il existe une constante positive c' telle que $|h_n| \leq c' \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

En effet, posons $c' = 2.c$ (c vérifie $\|h_n\|_v = \|f_n\|_v \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Supposons qu'il existe un entier n_0 dans $\mathbb{N}$ et $x_0 \in I$ verifiant :

$$|h_{n_0}(x_0)| > c'$$

On a pour tout x et y dans I

$$|h_{n_0}(y) - h_{n_0}(x)| \leq v(f_{n_0}) \leq c.$$

Donc

$$|h_{n_0}(x_0) - h_{n_0}(x)| \leq c \Rightarrow |h_{n_0}(x_0)| - |h_{n_0}(x)| \leq c.$$

Par suite

$$|h_{n_0}(x)| \geq |h_{n_0}(x_0)| - c > 2c - c = c \quad \forall x \in I.$$

On en déduit que

$$\|h_{n_0}\|_1 = \int_0^1 |h_{n_0}(x)| \, dm > \int_I c \, dm = c,$$

ce qui est absurde car $\|h_{n_0}\|_1 \leq \|h_{n_0}\|_v = \|f_{n_0}\|_v \leq c$.

Le Théorème de Lebesgue implique que h_n converge vers h dans $L^1(m)$.

D'où $\|f_n - h\|_v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ■

Chapitre 2

Mesure de probabilité invariante par une transformation uniformément dilatante

On va s'intéresser à une classe des transformations uniformément dilatantes. On va basé sur le livre de A.Broise (Voir[6]) et on montre que de telles transformations admettent une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m . Ce résultat est existentiel et pas constructif. L'outil principal est un opérateur linéaire, de $L^1(m)$ dans lui même, appelé " Opérateur de Perron-Frobenius ". Un point fixe de cet opérateur sera la densité de la mesure invariante de la transformation.

2.1 Transformations uniformément dilatantes

Si A est un sous-ensemble de $I = [0, 1]$, on note par $\overline{A}$ l'adhérence de A pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ induite sur I .

Définition 2.1. Une transformation $T : I \rightarrow I$ est dite uniformément dilatante si elle vérifie les deux hypothèses suivantes :

(i) Il existe une partition finie $(I_j)_{1 \leq j \leq n}$ de l'intervalle I telle que la restriction de T sur chaque élément I_j de la partition est strictement monotone et se prolonge en une application de classe C^1 et de dérivée lipschitzienne sur $\overline{I_j}$.

$$(ii) \min_{1 \leq j \leq n} \inf_{x \in \overline{I_j}} |T'(x)| > \delta > 1$$

On note D la classe des transformations uniformément dilatantes de l'intervalle I .

Remarquons que si $T \in D$ alors, $\forall k \geq 1$ on a $T^k \in D$, la partition de monotonie de T^k (i.e., les intervalles de I où T^k est strictement monotone) est donnée par :

$$(I_j)_{j \in J_k} = \left\{ I_{j_0} \cap T^{-1}(I_{j_1}) \cap \dots \cap T^{-k+1}(I_{j_k}) \neq \emptyset \mid I_{j_i} \in (I_j)_{1 \leq j \leq n} \right\},$$

où $(I_j)_{1 \leq j \leq n}$ est la partition de monotonie de T .

2.1.1 Exemples

Transformation linéaire par morceaux

T est une transformation linéaire par morceaux, s'il existe une partition finie $(I_j)_{j \in J}$ de cardinal supérieur ou égal à 2, telle que T soit linéaire sur chaque élément de la partition et tel que $T(\overline{I_j}) = I$. Comme T est linéaire sur chaque élément I_j donc elle est de classe C^∞ sur $\overline{I_j}$.

Notons α_j la mesure de I_j : $\alpha_j = m(I_j)$, alors,

$|T'(x)| = \frac{1}{\alpha_j}$ sur $\overline{I_j}$, car $T(\overline{I_j}) = I$ et T est linéaire sur $\overline{I_j}$. Le cardinal de la partition est supérieur ou égal à 2, alors

$$\forall j \in J : \alpha_j = m(I_j) < m(I) = 1.$$

D'où

$$\forall x \in I \text{ on a } |T'(x)| \geq \frac{1}{\max_{j \in J}(\alpha_j)} > 1.$$

β -transformation

Une β -transformation T s'écrit sous la forme $T(x) = \beta x \pmod{1}$, où $\beta > 1$.

La partition de monotonie de T est :

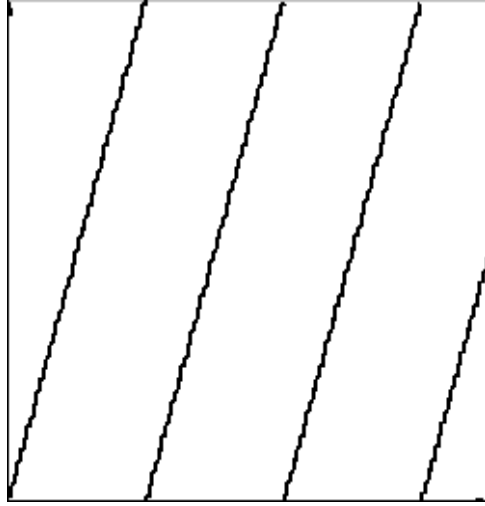
$$\left\{ \left[0, \frac{1}{\beta} \right[, \left[\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta} \right[, \dots, \left[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta} \right[, \dots, \left[\frac{[\beta]}{\beta}, 1 \right] \right\}$$

Transformation $T(x) = \beta.x + \alpha \pmod{1}$

Soit l'application de I dans lui-même, définie par : $T(x) = \beta.x + \alpha \pmod{1}$, où $\beta > 1$ et $0 \leq \alpha < 1$.

On considère la partition

$$\left\{ \left[0, \frac{1-\alpha}{\beta} \right[, \left[\frac{1-\alpha}{\beta}, \frac{2-\alpha}{\beta} \right[, \dots, \left[\frac{j-\alpha}{\beta}, \frac{j+1-\alpha}{\beta} \right[, \dots, \left[\frac{[\beta+\alpha]-\alpha}{\beta}, 1 \right] \right\}$$


 Figure 2.1: $T(x) = (7/2).x \bmod 1$

où $[\beta + \alpha]$ est la partie entière de $\beta + \alpha$.

T est linéaire sur chaque élément de la partition, donc de classe C^∞ .

On note T_j la restriction de T sur $I_j = \left[\frac{j - \alpha}{\beta}, \frac{j + 1 - \alpha}{\beta} \right]$ pour $0 \leq j \leq [\beta + \alpha] - 1$, alors :

$$T_j(x) = \beta.x + \alpha - j \text{ sur } I_j.$$

La restriction $T_{[\beta+\alpha]}$ de T sur $I_{[\beta+\alpha]} = \left[\frac{[\beta + \alpha] - \alpha}{\beta}, 1 \right]$ est donnée par

$$T_{[\beta+\alpha]}(x) = \beta.x + \alpha - [\beta + \alpha]$$

On a :

$$\forall x \in I \quad |T'(x)| = \beta > 1$$

2.2 Résultat principal

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace (métrique) de probabilité et T une transformation de X dans lui-même.

Définition 2.2. (i) On appelle support de la mesure μ l'ensemble :

$$\Gamma = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \mu(B(x, \varepsilon)) > 0\}$$

où $B(x, \varepsilon)$ est la boule centrée en x et de rayon ε .

(ii) Un point $x \in X$ est appelé un point de rebroussement si :

$$\forall V \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } T^n(V) \cap V \neq \emptyset$$

On montre, dans la proposition suivante, une condition nécessaire pour l'existence d'une mesure invariante.

Proposition 2.1. Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace (métrique) de probabilité et T une transformation de X dans lui-même.

Si l'ensemble des points de rebroussement est de mesure de Lebesgue nulle, alors il n'existe pas de mesure de probabilité invariante par T .

Preuve. Supposons qu'il existe une mesure μ T -invariante.

Si x n'est pas un point de rebroussement, alors

$$\exists V \text{ un voisinage de } x \text{ tel que } T^n(V) \cap V = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Donc

$$T^{-(n+m)}(V) \cap T^{-n}(V) = \emptyset \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*$$

Cela signifie que les sous-ensembles $T^{-n}(V)$ sont deux à deux disjoints.

Comme μ est T -invariante, on a

$$\mu(T^{-n}(V)) = \mu(V) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(V)) \leq \mu(X) = 1$$

Ce qui implique que $\mu(V) = 0$.

Donc $x \notin \Gamma$ (où Γ est le support de la mesure μ)

D'où, Γ est contenu dans l'ensemble des points de rebroussement qui est de mesure de Lebesgue nulle. ■

Notons que si la mesure de Lebesgue est T -invariante telle que $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ soit continue et injective, alors T est la fonction identique sur $[0, 1]$ (Voir annexe).

D'après la condition, citée dans la proposition (2.1.) précédente, on remarque la difficulté d'avoir une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue par des systèmes dynamiques chaotiques. Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 2.2. (Voir [6])

Si T est dans D , alors il existe une mesure de probabilité μ_h T -invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m .

De plus la densité h de μ_h est à variation bornée.

2.3 Preuve du résultat principal

2.3.1 Opérateur de Perron-Frobenius

Définition 2.3. Soit T dans D . L'opérateur $\phi_T : L^1(m) \rightarrow L^1(m)$ de Perron-Frobenius associé à T est défini par :

$$\int_I \phi_T(f) \cdot g \, dm = \int_I f \cdot (g \circ T) \, dm$$

où $f \in L^1(m)$ et $\forall g \in L^\infty(m)$.

Propriétés de ϕ_T (Voir [6])

- (i) ϕ_T est un opérateur linéaire continu de $L^1(m)$.
- (ii) ϕ_T est une contraction de $L^1(m)$: $\|\phi_T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$.
- (iii) ϕ_T est positif : $f \geq 0 \Rightarrow \phi_T(f) \geq 0$.
- (iv) ϕ_T préserve l'intégrale : $\int_I \phi_T(f) \cdot dm = \int_I f \cdot dm$.
- (v) $\phi_{T^n} = (\phi_T)^n$
- (vi) $\phi_T(f) = f$ si et seulement si T laisse invariante la mesure $\mu_f = f \, dm$ de densité f .

De plus si $\phi_T(1) = 1$ alors m est T -invariante.

On propose la démonstration suivante :

Preuve. (i) Comme ϕ_T est une contraction de $L^1(m)$ (Voir ci-dessous) alors, ϕ_T est continu de $L^1(m)$ dans lui-même .

(ii) Montrons que ϕ_T est une contraction de $L^1(m)$.

Pour f dans $L^1(m)$, soit l'application L_f de $L^\infty(m)$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$L_f : L^\infty(m) \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto L_f(g) = \int_I \phi_T(f) \cdot g \, dm.$$

On a :

$$\|L_f\| = \|\phi_T(f)\|_1 = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_I \phi_T(f) g \, dm \right|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\phi_T(f)\|_1 &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_I \phi_T(f) g \, dm \right| \\ &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_I f (g \circ T) \, dm \right| \leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_I |f| \cdot |g \circ T| \, dm \\ &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|g \circ T\|_\infty \int_I |f| \, dm \leq \int_I |f| \, dm = \|f\|_1 \end{aligned}$$

d'où :

$$\|\phi_T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$$

Donc ϕ_T est défini sur $L^1(m)$ tout entier .

(iii) Montrons que ϕ_T est positif :

Soit f dans $L^1(m)$ telle que : $f \geq 0$ $m - p.p$ et supposons que $\phi_T(f)$ n'est pas positive m -presque partout . On peut trouver un sous-ensemble mesurable A de I , tel que

$$m(A) > 0 \text{ et } \phi_T(f)(x) < 0 \, \forall x \in A.$$

Pour $g = 1_A$ qui est dans $L^\infty(m)$, on a :

$$(2.3.1) \quad \int_I \phi_T(f) \cdot 1_A \, dm < 0.$$

Or

$$\int_I \phi_T(f) \cdot 1_A \, dm = \int_I f \cdot (1_A \circ T) \, dm.$$

Comme $f \cdot (1_A \circ T) \geq 0$ $m - p.p$, alors :

$$\int_I f \cdot (1_A \circ T) \, dm \geq 0.$$

D'où

$$\int_I \phi_T(f) \cdot 1_A \, dm \geq 0,$$

ce qui contredit (2.3.1) .

(iv) Il suffit de prendre $g = 1$ qui est dans $L^\infty(m)$, et on aura :

$$\int_I \phi_T(f) \, dm = \int_I f \, dm$$

(v) Montrons que $\phi_{T^n} = (\phi_T)^n$, $\forall n \geq 1$.

Pour $n = 2$, on a pour tout g dans $L^\infty(m)$:

$$\begin{aligned} \int_I (\phi_T)^2(f) g \, dm &= \int_I \phi_T(f) (g \circ T) \, dm = \int_I f ((g \circ T) \circ T) \, dm \\ &= \int_I f (g \circ T^2) \, dm = \int_I \phi_{T^2}(f) g \, dm. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_I (\phi_T)^2(f) g \, dm = \int_I \phi_{T^2}(f) g \, dm \quad \forall g \in L^\infty(m).$$

Comme les fonctions indicatrices des sous-ensembles de I sont dans $L^\infty(m)$, on déduit que :

$$(\phi_T)^2(f) = \phi_{T^2}(f)$$

Par recurrence, on a :

$$(\phi_T)^n = \phi_{T^n}$$

(vi) Si $\phi_T(f) = f$, alors $\forall g \in L^\infty(m)$, on a :

$$\int_I f.g \, dm = \int_I f.(g \circ T) \, dm$$

Soit $\mu_f = fm$ la mesure définie par la densité f , alors :

$$\int_I g \, d\mu_f = \int_I g \circ T \, d\mu_f \quad \forall g \in L^\infty(m).$$

Ce qui prouve que μ_f est T -invariante.

Sachant que toute mesure définie par une densité est absolument continue par rapport à la mesure de référence (Voir [15]), la mesure μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m .

Si $\mu_f = fm$ est T -invariante, alors :

$$\begin{aligned} \int_I g \, d\mu_f &= \int_I g \circ T \, d\mu_f \quad \forall g \in L^\infty(m) \\ \Rightarrow \int_I f.g \, dm &= \int_I f.(g \circ T) \, dm \quad \forall g \in L^\infty(m) \\ \Rightarrow \phi_T(f) &= f \end{aligned}$$

Et si $\phi_T(1) = 1$, on aura :

$$\int_I g \, dm = \int_I (g \circ T) \, dm \quad \forall g \in L^\infty(m)$$

Donc m est T -invariante . ■

Ecriture explicite de l'opérateur ϕ_T (Voir [6])

Les conditions imposées aux transformations T de D permettent une écriture explicite de ϕ_T .

On a

$$\int_I \phi_T(f) g \, dm = \int_I f \cdot (g \circ T) \, dm$$

Notons $\sigma_j : T(\overline{I_j}) \rightarrow \overline{I_j}$ la réciproque de la restriction de T à l'élément $\overline{I_j}$ de la partition $(I_j)_{1 \leq j \leq n}$.

On a

$$\int_I \phi_T(f)(x) g(x) \, dm = \int_I f(x) (g \circ T)(x) \, dm = \sum_{j=1}^n \int_{\overline{I_j}} f(x) (g \circ T)(x) \, dm.$$

Par un changement de variables on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_I \phi_T(f)(x) g(x) \, dm &= \sum_{j=1}^n \int_{\overline{I_j}} f(x) (g \circ T)(x) \, dm = \sum_{j=1}^n \int_{T(\overline{I_j})} (f \circ \sigma_j)(y) \sigma_j'(y) g(y) \, dm \\ &= \int_I \left[\sum_{j=1}^n (f \circ \sigma_j)(x) \frac{1}{|T'(\sigma_j(x))|} 1_{T(\overline{I_j})}(x) \right] g(x) \, dm. \end{aligned}$$

Comme toutes les fonctions indicatrices sont dans $L^\infty(m)$ on a donc :

$$\phi_T(f)(x) = \sum_{j=1}^n f(\sigma_j(x)) \frac{1}{|T'(\sigma_j(x))|} 1_{T(\overline{I_j})}(x) \quad m - \text{presque partout}$$

2.3.2 La mesure invariante μ_h

L'écriture explicite de l'opérateur de Perron-Frobenius, montre que l'ensemble $C(I)$ des applications continues sur I n'est pas stable sous l'action de cet opérateur.

On travaillera alors sur un espace fonctionnel plus "grand" que $C(I)$, c'est l'espace V des fonctions à variations bornées dans $L^1(m)$ en le munissant de la norme $\|\cdot\|_v$ définie dans le chapitre 1.

Rappelons qu'une fonction $f \in L^1(m)$ est dite à variation bornée (*i.e.*, $f \in V$) si :

$$\inf \{v_*(h) \mid h = f \quad m - p.p\} = v(f) < \infty$$

Et la norme $\|\cdot\|_v$, qui rend V un espace complet, est définie par :

$$\|\cdot\|_v = v(\cdot) + \|\cdot\|_1$$

Lemme 2.3. (*Voir [6]*)

Soient T dans D et ϕ_T l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T , alors :

- (a) ϕ_T laisse stable l'espace V .
- (b) ϕ_T est borné de V dans V pour la norme $\|\cdot\|_v$: $\exists c > 0$ tel que $\sup_{\|f\|_v \leq 1} \|\phi_T(f)\|_v \leq c$.
- (c) Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tels que :

$$\|(\phi_T)^{n_0}(f)\|_v \leq \alpha \|f\|_v + \beta \|f\|_1 \quad \forall f \in V.$$

- (d) Il existe $L < \infty$ tel que :

$$\|(\phi_T)^{m \cdot n_0}(f)\|_v \leq \alpha^m \|f\|_v + L \|f\|_1 \quad \forall m \geq 1 \text{ et } \forall f \in V.$$

Preuve. (a) Soit f dans V et montrons que $v(\phi_T(f)) < \infty$.

On a :

$$\begin{aligned} v(\phi_T(f)) &\leq v_*(\phi_T(f)) = v_*\left(\sum_{j=1}^n (f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(I_j)}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n v_*\left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(I_j)}\right). \end{aligned}$$

Notons $T(\overline{I_j}) = [a_j, b_j]$ et $\overline{I_j} = [i_j, i_{j+1}]$

Calcul de $v_*\left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(I_j)}\right)$.

D'après l'inégalité (1.2.1) :

$$\begin{aligned} v_*\left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(I_j)}\right) &\leq v_*\left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|}, [a_j, b_j]\right) \\ &\quad + \left|\frac{f(\sigma_j(a_j))}{T'(\sigma_j(a_j))}\right| + \left|\frac{f(\sigma_j(b_j))}{T'(\sigma_j(b_j))}\right|. \end{aligned}$$

Où $v_* \left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|}, [a_j, b_j] \right)$ est la variation totale de $\frac{(f \circ \sigma_j)}{|T' \circ \sigma_j|}$ sur $[a_j, b_j]$.

Comme σ_j est strictement monotone $[a_j, b_j]$ dans $[i_j, i_{j+1}]$ alors :

$$v_* \left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(\overline{I_j})} \right) \leq v_* \left(f \frac{1}{|T'|}, [i_j, i_{j+1}] \right) + \left| \frac{f(i_j)}{T'(i_j)} \right| + \left| \frac{f(i_{j+1})}{T'(i_{j+1})} \right|.$$

Par définition de la transformation T on a : $\min_{1 \leq j \leq n} \inf_{x \in \overline{I_j}} |T'(x)| > \delta > 1$, donc

$$v_* \left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(\overline{I_j})} \right) \leq v_* \left(f \frac{1}{|T'|}, [i_j, i_{j+1}] \right) + \frac{1}{\delta} [|f(i_j)| + |f(i_{j+1})|].$$

D'après (1.2.2)

$$|f(i_j)| + |f(i_{j+1})| \leq v_*(f, [i_j, i_{j+1}]) + 2 \inf_{x \in [i_j, i_{j+1}]} (|f|(x)).$$

Donc

$$\begin{aligned} v_* \left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(\overline{I_j})} \right) &\leq v_* \left(f \frac{1}{|T'|}, [i_j, i_{j+1}] \right) + \\ &\frac{1}{\delta} \left[v_*(f, [i_j, i_{j+1}]) + 2 \inf_{x \in [i_j, i_{j+1}]} (|f|(x)) \right]. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in [i_j, i_{j+1}]} (|f|(x)) &\leq \frac{1}{i_{j+1} - i_j} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm = \frac{1}{m(\overline{I_j})} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm \\ &\leq \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq n} (m(\overline{I_j}))} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm. \end{aligned}$$

Notons $d = \min_{1 \leq j \leq n} (m(\overline{I_j}))$, donc

$$\begin{aligned} (2.3.2) \quad &v_* \left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(\overline{I_j})} \right) \\ &\leq v_* \left(\frac{f}{|T'|}, [i_j, i_{j+1}] \right) + \frac{1}{\delta} v_*(f, [i_j, i_{j+1}]) + 2 \frac{1}{d \cdot \delta} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm. \end{aligned}$$

Calcul de $v_* \left(\frac{f}{|T'|}, [i_j, i_{j+1}] \right)$.

Soit $i_j = a_1 < a_2 < \dots < a_N = i_{j+1}$ une subdivision de $\overline{I_j} = [i_j, i_{j+1}]$,

On a :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N-1} \left| \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_{i+1}) - \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_i) \right| \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \left| \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_{i+1}) - \frac{f(a_i)}{|T'(a_{i+1})|} + \frac{f(a_i)}{|T'(a_{i+1})|} - \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_i) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{1}{|T'(a_{i+1})|} \right| |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_i)| \left| \frac{1}{|T'(a_{i+1})|} - \frac{1}{|T'(a_i)|} \right| \\
 &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_i)| \left| \frac{1}{|T'(a_{i+1})|} - \frac{1}{|T'(a_i)|} \right| \\
 &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_i)| \left| \frac{|T'(a_{i+1}) - T'(a_i)|}{|T'(a_{i+1})| |T'(a_i)|} \right| \\
 &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_i)| |T'(a_{i+1}) - T'(a_i)| \\
 &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{|T'(a_{i+1}) - T'(a_i)|}{|a_{i+1} - a_i|} \right) (|f(a_i)| |a_{i+1} - a_i|).
 \end{aligned}$$

Par définition T' est lipschitzienne sur $\overline{I_j} = [i_j, i_{j+1}] \forall 1 \leq j \leq n$.

Soit k_j la constante de Lipschitz de T' sur $\overline{I_j}$; $\left(k_j = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \overline{I_j}}} \left| \frac{T'(x) - T'(y)}{x - y} \right| \right)$.

Posons $k = \max_{1 \leq j \leq n} (k_j)$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N-1} \left| \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_{i+1}) - \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_i) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \frac{k}{\delta^2} \sum_{i=1}^{N-1} (|f(a_i)| |a_{i+1} - a_i|).
 \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour toute subdivision de $\overline{I_j}$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left| \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_{i+1}) - \left(\frac{f}{|T'|} \right) (a_i) \right| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \frac{k}{\delta^2} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm.$$

On passe alors, au supremum sur l'ensemble des subdivisions de $\overline{I_j}$, on obtient

$$(2.3.3) \quad v_* \left(\frac{f}{|T'|}, [i_j, i_{j+1}] \right) \leq \frac{1}{\delta} v_*(f, [i_j, i_{j+1}]) + \frac{k}{\delta^2} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm.$$

De (2.3.2) et (2.3.3), on déduit que :

$$\begin{aligned}
 & v_* \left((f \circ \sigma_j) \frac{1}{|T' \circ \sigma_j|} 1_{T(\overline{I_j})} \right) \\
 & \leq \frac{1}{\delta} v_* (f, [i_j, i_{j+1}]) + \frac{k}{\delta^2} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm + \frac{1}{\delta} v_* (f, [i_j, i_{j+1}]) + 2 \frac{1}{d \delta} \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm \\
 & = \frac{2}{\delta} v_* (f, [i_j, i_{j+1}]) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 v(\phi_T(f)) & \leq v_*(\phi_T(f)) \leq \sum_{j=1}^n v_* \left(f(\sigma_j(x)) \frac{1}{|T'(\sigma_j(x))|} 1_{T(\overline{I_j})}(x) \right) \\
 & \leq \sum_{j=1}^n \frac{2}{\delta} v_*(f, [i_j, i_{j+1}]) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \int_{i_j}^{i_{j+1}} |f(x)| dm \\
 & \leq \frac{2}{\delta} \sum_{j=1}^n v_*(f, [i_j, i_{j+1}]) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \sum_{j=1}^n \int_{\overline{I_j}} |f(x)| dm \\
 & = \frac{2}{\delta} v_*(f) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \|f\|_1.
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$v(\phi_T(f)) \leq \frac{2}{\delta} v(f) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \|f\|_1 < \infty.$$

(b) Soit $f \in V$ telle que $\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1 \leq 1$

D'après la démonstration de (a), on a :

$$v(\phi_T(f)) \leq \frac{2}{\delta} v(f) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \|f\|_1.$$

Donc

$$\|\phi_T(f)\|_v = v(\phi_T(f)) + \|\phi_T(f)\|_1 \leq \frac{2}{\delta} v(f) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} \right) \|f\|_1 + \|f\|_1,$$

car $\|\phi_T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$. Par suite

$\forall f \in V$ avec $\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1 \leq 1$

$$\|\phi_T(f)\|_v \leq \frac{2}{\delta} v(f) + \left(\frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} + 1 \right) \|f\|_1 \leq \frac{2}{\delta} + \frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} + 1.$$

Donc

$$\sup_{\|f\|_v \leq 1} \|\phi_T(f)\|_v \leq c = \frac{2}{\delta} + \frac{k}{\delta^2} + 2 \frac{1}{d \delta} + 1 < \infty$$

(c) Comme $\min_{1 \leq j \leq n} \inf_{x \in \overline{I_j}} |T'(x)| > \delta > 1$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$\gamma = \min_{1 \leq j \leq n} \inf_{x \in \overline{I_j}} |(T^{n_0})'(x)| > 2$$

où $(I_j)_{j \in J_{n_0}}$ est la partition de monotonie de (T^{n_0}) (il suffit de prendre $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\delta^{n_0} > 2$).

T^{n_0} est aussi dans la classe D , soit $d' = \min_{j \in J_{n_0}} (m(\overline{I_j}))$ et $k'_j = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \overline{I_j}}} \left| \frac{(T^{n_0})'(x) - (T^{n_0})'(y)}{x - y} \right|$.

Posons $k' = \max_{j \in J_{n_0}} (k'_j)$.

D'après la propriété (v) de l'opérateur de Perron-Frobenius, on a

$$(\phi_T)^{n_0} = \phi_{T^{n_0}}$$

Il suffit de montrer que :

$$\|\phi_{T^{n_0}}(f)\|_v \leq \alpha \|f\|_v + \beta \|f\|_1 \quad \forall f \in V \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \beta < \infty.$$

Avec la même méthode de la démonstration de (a), on trouve :

$$v(\phi_{T^{n_0}}(f)) \leq \frac{2}{\gamma} v(f) + \left(\frac{k'}{\gamma^2} + 2 \frac{1}{d' \gamma} \right) \|f\|_1 \quad \forall f \in V.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|(\phi_{T^{n_0}})(f)\|_v &= v(\phi_{T^{n_0}}(f)) + \|\phi_{T^{n_0}}(f)\|_1 \leq \frac{2}{\gamma} v(f) + \left(\frac{k'}{\gamma^2} + 2 \frac{1}{d' \gamma} \right) \|f\|_1 + \|f\|_1 \\ &= \frac{2}{\gamma} v(f) + \left(\frac{k'}{\gamma^2} + 2 \frac{1}{d' \gamma} + 1 \right) \|f\|_1 \\ &\leq \frac{2}{\gamma} v(f) + \left(\frac{k'}{\gamma^2} + 2 \frac{1}{d' \gamma} + 1 \right) \|f\|_1 + \frac{2}{\gamma} \|f\|_1 \\ &= \frac{2}{\gamma} \|f\|_v + \left(\frac{k'}{\gamma^2} + 2 \frac{1}{d' \gamma} + 1 \right) \|f\|_1. \end{aligned}$$

On a : $\alpha = \frac{2}{\gamma} < \frac{2}{2} = 1$ et $\beta = \frac{k'}{\gamma^2} + 2 \frac{1}{d' \gamma} + 1 < \infty$.

(d) On a pour tout entier $m \geq 1$, $\|(\phi_T)^m\|_1 \leq 1$ i.e., $\|(\phi_T)^m(f)\|_1 \leq \|f\|_1$ et $\|(\phi_T)^{n_0}(f)\|_v = \|\phi_{T^{n_0}}(f)\|_v \leq \alpha \|f\|_v + \beta \|f\|_1$. Donc

$$\begin{aligned} \|(\phi_T)^{mn_0}(f)\|_v &= \left\| (\phi_T)^{n_0} \left((\phi_T)^{(m-1)n_0}(f) \right) \right\|_v \\ &\leq \alpha \left\| (\phi_T)^{(m-1)n_0}(f) \right\|_v + \beta \left\| (\phi_T)^{(m-1)n_0}(f) \right\|_1 \\ &\leq \alpha \left\| (\phi_T)^{(m-1)n_0}(f) \right\|_v + \beta \|f\|_1. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \alpha \left\| (\phi_T)^{(m-1)n_0} (f) \right\|_v &= \alpha \left\| (\phi_T)^{n_0} \left((\phi_T)^{(m-2)n_0} (f) \right) \right\|_v \\ &\leq \alpha^2 \left\| (\phi_T)^{(m-2)n_0} (f) \right\| + \alpha \beta \|f\|_1. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| (\phi_T)^{mn_0} (f) \right\|_v \leq \alpha^2 \left\| (\phi_T)^{(m-2)n_0} (f) \right\| + \beta (1 + \alpha) \|f\|_1.$$

Par réccurence on a :

$$\left\| (\phi_T)^{mn_0} (f) \right\|_v \leq \alpha^m \|f\|_v + \beta \cdot (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \|f\|_1.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ alors :

$$\beta \cdot (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad \forall m \geq 1.$$

D'où , $L = \frac{\beta}{1-\alpha}$ et :

$$\left\| (\phi_T)^{mn_0} (f) \right\|_v \leq \alpha^m \|f\|_v + L \cdot \|f\|_1$$

■

Lemme 2.4. (Voir [6])

La suite des normes $(\|(\phi_T)^n\|_v)_{n \geq 1}$ est uniformément bornée :

$$\exists M < \infty \quad \text{tel que} \quad \sup_{n \geq 1} (\|(\phi_T)^n\|_v) = M.$$

Preuve. D'après le lemme 2.3.(b) précédent, $\exists c > 0$ tel que $\|\phi_T\|_v \leq c$.

Donc

$$\|(\phi_T)^n\|_v \leq (\|\phi_T\|_v)^n \leq c^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où $\exists l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(2.3.4) \quad \|(\phi_T)^n\|_v \leq l \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, n_0\}.$$

On aussi d'après le lemme 2.3.(d)

$$\|(\phi_T)^{mn_0}\|_v \leq \alpha^m + d \leq \alpha + d \quad \forall m \geq 1.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$: $n = m.n_0 + k$, $n \geq 1$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k < n_0$ on a :

Si $k = 0$

$$\|(\phi_T)^n\|_v = \|(\phi_T)^{m n_0}\|_v \leq \alpha + d \quad \forall m \geq 1.$$

Si $0 < k < n_0$

$$\|(\phi_T)^n\|_v = \|(\phi_T)^{m \cdot n_0 + k}\|_v = \|\phi_T^{m \cdot n_0} (\phi_T^k)\|_v \leq (\alpha + d) \cdot l$$

Donc $\forall n \geq 1$

$$\|(\phi_T)^n\|_v \leq \max(\alpha + d, (\alpha + d) \cdot l).$$

■

Lemme 2.5. (Voir [6])

L'ensemble $A_c = \{f \in L^1(m) \mid \|f\|_v \leq c\} \subset V$, où c est une constante dans $\mathbb{R}_+^*$, est compact dans $L^1(m)$.

On propose la démonstration suivante :

Preuve. Soit une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de points de A_c . D'après la proposition 1.2. , on a :

$\forall n \geq 1 \exists h_n \in L^1(m)$ avec $h_n = f_n \cdot m - p \cdot p$ et h_n continue à droite en tout point de I , telle que : $v(f_n) = v_*(h_n)$

On associe à chaque élément h_n la mesure de Borel associée μ et $h_n(x) = \mu_n([0, x])$.
Donc $\forall n \geq 1$ on a

$$|\mu_n|(I) = v_*(h_n) = v(f_n) \leq v(f_n) + \|f_n\|_1 = \|f_n\|_v \leq c.$$

D'après la Proposition 1.1. : $B = \{\mu \in M_{\mathbb{C}}(I) \mid |\mu|(I) \leq 1\}$ est compact pour la topologie de la convergence faible des mesures. Il existe une sous-suite $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une mesure de Borel μ dans $M_{\mathbb{C}}(I)$ (ensemble des mesures de Borel complexes sur I) telle que,

μ_{n_k} converge faiblement vers μ lorsque k tend vers l'infini. Posons $h(x) := \mu([0, x])$.

D'après (1.3.3) :

$$(2.3.5) \quad v_*(h) = |\mu|(I) \leq \liminf_n |\mu_{n_k}|(I) = \liminf_n v_*(h_{n_k}).$$

Comme l'ensemble des points de discontinuités de μ est au plus dénombrable (car la fonction associée h est à variation bornée), la fonction indicatrice $1_{[0, x]}$ est continue μ -presque partout si x n'est pas un point de discontinuité de μ . D'après (1.3.1) :

$$\int_I 1_{[0, x]} d\mu_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_I 1_{[0, x]} d\mu \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } I.$$

Donc $\mu_{n_k}([0, x]) = h_{n_k}(x)$ converge m-presque partout vers $\mu([0, x]) = h(x)$.

Et d'après (1.4.2), $\|h_n\|_\infty \leq \|h_n\|_v \leq c$, donc les h_n sont bornés.

Le Théorème de Lebesgue implique que h_{n_k} converge vers h dans $L^1(m)$, d'où f_{n_k} converge vers h dans $L^1(m)$ car $f_{n_k} = h_{n_k}$ m-p.p. D'après (2.3.5), on a

$$\|h\|_v = v_*(h) + \|h\|_1 \leq \liminf_n [v_*(h_{n_k}) + \|h_{n_k}\|_1] \leq c.$$

D'où A_c est compact dans $L^1(m)$. ■

On montre maintenant le Théorème 2.2. :

Preuve. Soit $g \in V$ telle que $g \geq 0$ et $\int_I g \, dm = 1$.

On considère la suite $f_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_T)^i(g)$.

D'après le lemme 2.4., $\exists M < \infty$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}^* : \|(\phi_T)^m\|_v \leq M$.

Donc

$$\|f_n\|_v = \left\| \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_T)^i(g) \right\|_v \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \|(\phi_T)^i(g)\|_v \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} M \cdot \|g\|_v = M \cdot \|g\|_v.$$

D'où $(f_n)_{n \geq 1} \subset B = \{f \in L^1(m) \mid \|f\|_v \leq M \cdot \|g\|_v\}$.

Or d'après le lemme 2.5. B est compact dans $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$. Il existe une sous-suite $(f_{n_p})_{n_p}$ de $(f_n)_n$ et $h \in B \subset V$ telles que :

$$\|f_{n_p} - h\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

h est un point fixe de ϕ_T , en effet :

$$\begin{aligned} \|\phi_T(f_{n_p}) - f_{n_p}\|_1 &= \left\| \frac{1}{n_p} \cdot \sum_{i=1}^{n_p} (\phi_T)^i(g) - \frac{1}{n_p} \cdot \sum_{i=0}^{n_p-1} (\phi_T)^i(g) \right\|_1 \\ &= \frac{1}{n_p} \left\| \sum_{i=1}^{n_p} (\phi_T)^i(g) - \sum_{i=0}^{n_p-1} (\phi_T)^i(g) \right\|_1 = \frac{1}{n_p} \|(\phi_T)^{n_p}(g) - g\|_1 \\ &\leq \frac{\|(\phi_T)^{n_p}(g)\|_1 + \|g\|_1}{n_p} \leq \frac{2 \cdot \|g\|_1}{n_p} = \frac{2}{n_p}. \end{aligned}$$

On passe à la limite, on déduit que :

$$\phi_T(h) = h.$$

D'après la propriété (vi) de l'opérateur de Perron-Frobenius, la mesure μ_h définie par la densité h est invariante par T . Comme ϕ_T est positif alors $h \geq 0$.

Il reste à montrer que μ_h est une mesure de probabilité.

La propriété (iv) de l'opérateur implique que

$$\int_I (\phi_T)^i(g) dm = \int_I g dm = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_I f_{n_p} dm &= \int_I \frac{1}{n_p} \cdot \sum_{i=0}^{n_p-1} (\phi_T)^i(g) dm = \frac{1}{n_p} \int_I \sum_{i=0}^{n_p-1} (\phi_T)^i(g) dm \\ &= \frac{1}{n_p} \sum_{i=0}^{n_p-1} \int_I (\phi_T)^i(g) dm = \frac{1}{n_p} \sum_{i=0}^{n_p-1} 1 = \frac{n_p}{n_p} = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

comme $\|f_{n_p} - h\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, Alors $\int_I h dm = 1$.

D'où $\mu_h = h.m$ est une mesure de probabilité invariante par T telle que $h \in V$ et $h \geq 0$

■

2.3.3 Exemples et remarques

Exemple 1

Transformation linéaire par morceaux :

Soit T une transformation linéaire par morceaux, on a $|T'(x)| = \frac{1}{\alpha_j}$ où $\alpha_j = m(I_j)$

Soit σ_j la réciproque de la restriction de T sur $\overline{I_j}$.

On a $|(\sigma_j)'(x)| = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_j}} = \alpha_j$: car T est linéaire et surjective sur chaque élément I_j de la partition associée, d'où :

$$\phi_T(f)(x) = \sum_{j \in J} (f) \left(\left| \pm \frac{1}{\alpha_j} \right| \cdot x \right) \cdot \alpha_j.$$

On remarque que pour $f \equiv 1$, on a :

$$\phi_T(1) = \sum_{j \in J} 1 \cdot \alpha_j = \sum_{j \in J} \alpha_j = \sum_{j \in J} m(I_j) = 1.$$

Donc d'après la propriété (vi) de l'opérateur de Perron-Frobenius, la mesure de Lebesgue m est T -invariante.

Remarque 2.1. La densité h de la mesure $\mu_h = h.m$ invariante par une transformation uniformément dilatante n'est pas nécessairement strictement positive.

Exemple

La transformation $T(x) = \beta.x + \alpha$ avec $\beta^2 = \beta + 1$, $\beta > 0$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$.

La partition de monotonie associée à T est : $\{I_1 = [0, \frac{2-\beta}{2}[, I_2 = [\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}[, I_3 = [\frac{\beta}{2}, 1]\}$.

On note T_i la restriction de T sur I_i , $1 \leq i \leq 3$:

$$T_1(x) = \beta.x + \alpha \text{ sur } I_1,$$

$$T_2(x) = \beta.x + \alpha - 1 \text{ sur } I_2,$$

$$T_3(x) = \beta.x + \alpha - 2 \text{ sur } I_3.$$

Donc $T(\overline{I_1}) = [\alpha, 1]$, $T(\overline{I_2}) = [0, 1]$ et $T(\overline{I_3}) = [0, \frac{\beta-1}{2}]$.

Soit σ_j la réciproque de la restriction de T sur $\overline{I_j}$.

Comme $\beta^2 = \beta + 1$ (donc $\frac{1}{\beta} = \beta - 1$) alors

$$\sigma_1 : [\alpha, 1] \rightarrow [0, \frac{2-\beta}{2}] , \sigma_1(x) = (\beta - 1).x + \frac{5-3\beta}{2}$$

$$\sigma_2 : [0, 1] \rightarrow [\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}] , \sigma_2(x) = (\beta - 1).x + \frac{2-\beta}{2}$$

$$\sigma_3 : [0, \frac{\beta-1}{2}] \rightarrow [\frac{\beta}{2}, 1] , \sigma_3(x) = (\beta - 1).x + \frac{\beta}{2}.$$

On a $(\sigma_j)'(x) = (\beta - 1)$ pour $1 \leq j \leq 3$, donc

$$\phi_T(f) = (\beta - 1). (f \circ \sigma_1) . \mathbf{1}_{[\alpha, 1]} + (\beta - 1). (f \circ \sigma_2) . \mathbf{1}_{[0, 1]} + (\beta - 1). (f \circ \sigma_3) . \mathbf{1}_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}.$$

Soit h l'application de I dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$h = \frac{1}{5}. (3 + 4\beta) . \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} \right) + \frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \left(\mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}[} + \mathbf{1}_{[\alpha, \frac{\beta}{2}[} \right).$$

Montrons que $\phi_T(h) = h$.

On a :

$$\begin{aligned} \phi_T(h) &= (\beta - 1). (h \circ \sigma_1) . \mathbf{1}_{[\alpha, 1]} + (\beta - 1). (h \circ \sigma_2) . \mathbf{1}_{[0, 1]} + (\beta - 1). (h \circ \sigma_3) . \mathbf{1}_{[0, \frac{\beta-1}{2}]} \\ &= \left[(\beta - 1). \frac{1}{5}. (3 + 4\beta) . \mathbf{1}_{[\alpha, 1]} \right] + \left[(\beta - 1). \frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} \right) \right] \\ &\quad + \left[(\beta - 1). \frac{1}{5}. (3 + 4\beta) . \mathbf{1}_{[0, \frac{\beta-1}{2}]} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi_T(h) &= \left[\frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \left(\mathbf{1}_{[\alpha, \frac{\beta}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} \right) \right] + \left[(\beta - 1). \frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} \right) \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}[} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi_T(h) &= \frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \beta . \mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}[} + \frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \beta . \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} \\ &\quad + \frac{1}{5}. (3\beta + 1) . \left(\mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}[} + \mathbf{1}_{[\alpha, \frac{\beta}{2}[} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi_T(h) &= \frac{1}{5} \cdot (3 + 4\beta) \cdot \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} \right) + \frac{1}{5} \cdot (3\beta + 1) \cdot \left(\mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}[} + \mathbf{1}_{[\alpha, \frac{\beta}{2}[} \right) \\ \Rightarrow \phi_T(h) &= h. \end{aligned}$$

.

Chapitre 3

Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (I.T.M)

But de ce Chapitre

Rappelons que le spectre d'un opérateur linéaire L continu d'un espace de Banach $(E, |\cdot|)$ dans lui même, est l'ensemble $\sigma(L)$ des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(L - \lambda.Id)$ n'est pas bijective, où Id est l'application identique sur E . $\sigma(L)$ est compact dans $\mathbb{C}$ (Voir[5]). Le rayon spectral est le nombre $\rho(L) \in \mathbb{R}^+$, tel que $\rho(L) = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(L)\}$. Le rayon spectral de L est donné par la *formule spectrale* suivante (Voir [8]) :

$$\rho(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|L^n\|)^{\frac{1}{n}}.$$

Notons $A \subset \sigma(L)$ l'ensemble des valeurs propres, dont l'espace propre associé est de dimension fini.

Le rayon spectral essentiel est le nombre $\rho_{ess}(L) \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\rho_{ess}(L) = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \forall \lambda \in \sigma(L), |\lambda| > \alpha : \lambda \in A \right\}$$

Si $A = \emptyset$, alors $\rho_{ess}(L) = \rho(L)$.

L'opérateur L est dit quasi-compact si on a une décomposition en sous-espace fermés, stable par L :

$$E = F + H$$

où F est de dimension finie et la restriction de L sur F ($L|_F$) n'a que des valeurs propres de modules $\rho(L)$, avec

$$\rho(L|_H) < \rho(L)$$

Dans ce chapitre on va essayer de donner une décomposition spectrale de l'opérateur de Perron-Frobenius ϕ_T , associé à un élément de la classe des transformations uniformément dilatantes, et on peut déduire que ϕ_T est quasi-compact.

La décomposition est faite sur l'espace V , des fonctions à variation bornée dans $L^1(m)$, basée essentiellement sur l'inégalité de Lasota-Yorke (lemme (2.3.) -c).

Le résultat général est le théorème suivant (Voir [6]).

Théorème 3.1. (I.T.M)

Soient $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ et $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, avec $\mathcal{F}$ contenu dans $\mathcal{L}$, Φ un opérateur de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ qui est borné par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ (donc il laisse stable $\mathcal{F}$), si on a les hypothèses suivantes :

- (a) si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge dans $\mathcal{L}$ vers f et si pour tout $n \geq 0$ $\|f_n\|_{\mathcal{F}} \leq c$, alors f est dans $\mathcal{F}$ et on a $\|f\|_{\mathcal{F}} \leq c$,
- (b) $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n(f)\|_{\mathcal{L}} / f \in \mathcal{F}, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\} \leq H < \infty$,
- (c) il existe un entier n_0 , $\alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tels que

$$\|\Phi^{n_0}(f)\|_{\mathcal{F}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{F}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Alors Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de modul 1 : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et Φ s'écrit alors sous la forme :

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot \Phi_i + \Psi$$

où les Φ_i sont des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{F}$ dans $\Phi_i(\mathcal{F})$ qui est de dimension finie et est contenu dans $\mathcal{F}$. Ψ est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{F}$ et Ψ a un rayon spectral $\rho(\Psi) < 1$ dans $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$, de plus on a :

$$\Psi \Phi_i = \Phi_i \Psi = 0, (\Phi_i)^2 = \Phi_i, \Phi_i \Phi_j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Donc :

$$\Phi^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n \cdot \Phi_i + \Psi^n \text{ pour tout } n > 0.$$

3.1 Application du Théorème ITM

On prend pour $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ l'espace $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$, pour $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ l'espace $(V, \|\cdot\|_v)$ et pour Φ l'opérateur de Perron-Frobenius ϕ_T associé à un élément T de la classe D , des transformations uniformément dilatantes, définie dans le Chapitre 2.

D'après le lemme 2.3. et le lemme 2.5., les hypothèses (c) et (a) sont vérifiées.

Comme $\|\phi_T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$, on a $\sup_{n \geq 0} \{\|\phi_T^n(f)\|_1 / \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1$ d'où l'hypothèse (b).

Le lemme 2.4. et la formule spectrale, montre que

$$\rho(\phi_T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\phi_T^n\|_v)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Notons pour tout λ de $\mathbb{C}$

$$V(\lambda) = \{f \in V / \phi_T(f) = \lambda f\}$$

C'est l'espace propre associé à la valeur λ et si $V(\lambda) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre de ϕ_T .

Lemme 3.2. (Voir [6])

Si $|\lambda| = 1$ alors $V(\lambda)$ est de dimension finie.

Preuve. D'après le théorème de Riesz [5], il suffit de montrer que la fermeture de la boule unité (pour la topologie de $L^1(m)$ induite sur V) de $V(\lambda)$ est compacte i.e., l'ensemble $X = \overline{V(\lambda) \cap \{f \in V / \|f\|_1 \leq 1\}}$ est compact.

Soit maintenant f dans X , d'après l'hypothèse (c) du lemme 2.3., on a :

$$\begin{aligned} \|(\phi_T)^{n_0}(f)\|_v &= \|\lambda^{n_0} f\|_v = \|f\|_v \leq \alpha \|f\|_v + \beta \|f\|_1 = \alpha \|f\|_v + \beta \\ \Rightarrow \|f\|_v &\leq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (\text{sachant que } 0 < \alpha < 1). \end{aligned}$$

Donc X est une partie bornée de V . i.e., $X \subset A = \{f \in V / \|f\|_v \leq \frac{\beta}{1-\alpha}\}$. D'après le lemme 2.5. A est compact dans $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$, i.e., X est relativement compact dans $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$

Par définition X est fermé dans $L^1(m)$, donc X est compact dans $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$.

D'où $V(\lambda)$ est de dimension finie. ■

Lemme 3.3. (Voir [6])

ϕ_T n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 .

Preuve. Supposons qu'il existe une suite infinie de valeurs propres distinctes de module

1: $(\lambda_n)_{n \geq 1}, \lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ et $|\lambda_n| = 1 \ \forall n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$ soit f_n un élément dans $V(\lambda_n)$ avec $f_n \neq 0$, les $(f_n)_{n \geq 1}$ sont linéairement indépendants.

On note $X(n) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$,

$X(n)$ est strictement inclus dans $X(n+1)$.

Le Lemme de F.Riesz (voir[5] et annexe) montre qu'il existe une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$g_n \in X(n)$, $\|g_n\|_1 = 1 \ \forall n \geq 1$ et $\forall f \in X(n-1)$ on a : $\|g_n - f\|_1 \geq \frac{1}{2}$.

On a pour $n_m = m \ n_0$, $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \frac{1}{\lambda_j^{n_m}} \cdot (\phi_T)^{n_m}(g_j) \right\|_v = \|(\phi_T)^{n_m}(g_j)\|_1 \leq \alpha^m \cdot \|g_j\|_v + d \cdot \|g_j\|_1 = \alpha^m \cdot \|g_j\|_v + d.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ alors $\exists m(j) \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall m \geq m(j)$ on a : $\alpha^m \cdot \|g_j\|_v \leq 1$.

Donc $\forall m \geq m(j)$:

$$\left\| \frac{1}{\lambda_j^{n_m}} \cdot (\phi_T)^{n_m}(g_j) \right\|_v \leq 1 + d.$$

Posons

$$A = \left\{ \frac{1}{\lambda_j^{n_m}} \cdot (\phi_T)^{n_m}(g_j) \ / \ j \in \mathbb{N}^*, m \geq m(j) \right\}$$

et

$$B = \{f \in L^1(m) \ / \ \|f\|_v \leq 1 + d\}.$$

D'après le lemme 2.5. B est compact dans $L^1(m)$ et comme $A \subset B$, donc il existe deux sous-suites strictement croissantes $(j_s)_s$ et $(n_{m_s})_s$ de (j) et (n_m) respectivement telles que la suite $\left(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_{m_s}}} \cdot (\phi_T)^{n_{m_s}}(g_{j_s}) \right)_{s \geq 1}$ converge dans $L^1(m)$.

On note

$$U_s = \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_{m_s}}} \cdot (\phi_T)^{n_{m_s}}(g_{j_s}) \text{ pour } s \geq 1.$$

Soit maintenant f dans $X(n)$: $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f_i$, alors : $(\phi_T)^m(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \lambda_i^m \cdot f_i$ pour tout $m \geq 1$, i.e., $(\phi_T)^m(f) \in X(n)$. Donc :

$$(3.1.1) \quad U_s \in X(j_s) \text{ car } g_{j_s} \in X(j_s).$$

D'autre part, si f est dans $X(m)$ alors pour tout entier $p \geq 1$: $f - \frac{1}{\lambda_m^p} (\phi_T)^p(f)$ est dans $X(m-1)$. En effet,

$$\begin{aligned}
 f - \frac{1}{\lambda_m^p} (\phi_T)^p(f) &= \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot f_i \right] - \frac{1}{\lambda_m^p} \left[(\phi_T)^p \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot f_i \right) \right] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot f_i \right] - \frac{1}{\lambda_m^p} \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \lambda_i^p f_i \right] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \cdot f_i \right] + \beta_m \cdot f_m - \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m} \right)^p \cdot f_i - \beta_m \cdot f_m \\
 &= \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \cdot \left(1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m} \right)^p \right) \cdot f_i \in X(m-1).
 \end{aligned}$$

Comme $g_{j_{s+1}} \in X(j_{s+1})$, on a

$$(3.1.2) \quad g_{j_{s+1}} - U_{s+1} \in X(j_{s+1} - 1).$$

Puisque $X(j_s) \subset X(j_{s+1} - 1)$ (car $j_s \leq j_{s+1} - 1$), il vient de (3.1.1) et (3.1.2) :

$$(g_{j_{s+1}} - U_{s+1}) + U_s \in X(j_{s+1} - 1).$$

Comme $g_{j_{s+1}} \in X(j_{s+1})$, d'après le Lemme de F.Riesz on a :

$$\|U_{s+1} - U_s\|_1 = \|g_{j_{s+1}} - ((g_{j_{s+1}} - U_{s+1}) + U_s)\|_1 \geq \frac{1}{2}.$$

Cela contredit la convergence de la suite $(U_s)_s$. ■

3.2 Construction des opérateurs ϕ_{λ_i}

Lemme 3.4. (Voir [6])

Quelque soit le nombre complexe λ de module 1, quelque soit f dans V , il existe $\bar{f}$ dans V tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right] - \bar{f} \right\|_1 = 0$$

Preuve. D'après le lemme 2.4. on a : $\sup_{m \geq 1} \|(\phi_T)^m\|_v = M < \infty$.

Donc pour f dans V , on a :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right\|_v &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right\|_v = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| (\phi_T)^k(f) \right\|_v \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\| (\phi_T)^k(f) \right\|_v + \frac{1}{n} \cdot \|f\|_v \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} M \cdot \|f\|_v + \frac{1}{n} \|f\|_v = \left[\left(\frac{n-1}{n} \right) \cdot M + \frac{1}{n} \right] \|f\|_v.
 \end{aligned}$$

Si $M \leq 1$ alors,

$$M \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) \leq \frac{n-1}{n} \Rightarrow M \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow M \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) + \frac{1}{n} \leq 1.$$

Donc

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \cdot (\phi_T)^k(f) \right\|_v \leq \|f\|_v.$$

Si $M > 1$ alors ,

$$\frac{M}{n} > \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{M}{n} + \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow M - \frac{M}{n} + \frac{1}{n} < M \Rightarrow M \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) + \frac{1}{n} < M.$$

Donc

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right\|_v \leq M \cdot \|f\|_v.$$

D'où

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right\|_v \leq \max(M, 1) \|f\|_v.$$

Par suite, l'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie bornée dans V pour la norme $\|\cdot\|_v$, donc d'après le lemme 2.5. on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^1(m)$.

Il existe donc une suite $(n_p)_p$ strictement croissante d'entiers et une fonction $\bar{f}$ dans $V \subset L^1(m)$ telle que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \left[\frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right] - \bar{f} \right\|_1 = 0.$$

Montrons maintenant que la suite $f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f)$ converge aussi dans $L^1(m)$ vers $\bar{f}$.

On remarque d'abord que

$$(3.2.1) \quad \phi_T(\bar{f}) = \lambda \cdot \bar{f}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \|\phi_T(f_{n_p}) - \lambda \cdot f_{n_p}\|_1 &= \left\| \frac{1}{n_p} \left(\sum_{k=0}^{n_p-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^{k+1}(f) - \sum_{k=0}^{n_p-1} \frac{\lambda}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right) \right\|_1 \\ &= \frac{1}{n_p} \left\| \frac{1}{\lambda^{n_p-1}} \cdot (\phi_T)^{n_p}(f) - \lambda \cdot f \right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{n_p} \|(\phi_T)^{n_p}(f)\|_1 + \frac{1}{n_p} \|f\|_1 \\ &\leq \frac{1}{n_p} \|f\|_1 + \frac{1}{n_p} \|f\|_1 = \frac{2}{n_p} \|f\|_1. \end{aligned}$$

On passe alors à la limite, on trouve :

$$\phi_T(\bar{f}) = \lambda \cdot \bar{f}.$$

On a :

$$f = \bar{f} + (f - \bar{f})$$

Alors :

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(\bar{f} + (f - \bar{f})) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(\bar{f}) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f - \bar{f}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{\lambda^k} \cdot \bar{f} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f - \bar{f}) \\ &= \bar{f} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f - \bar{f}). \end{aligned}$$

Il suffit donc, de montrer que la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(f - \bar{f})$ converge vers 0 dans $L^1(m)$. On remarque que :

$$(3.2.2) \quad \left[I - \frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k \right] (f) = \left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right) \left(\sum_{k=1}^{n_p-1} \frac{n_p - k}{n_p} \cdot \frac{(\phi_T)^{k-1}}{\lambda^{k-1}} \right) (f).$$

La suite $\left[I - \frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k \right] (f)$ d'indice n_p converge vers $f - \bar{f}$ dans $L^1(m)$, donc $f - \bar{f}$ est dans la fermeture de l'image de V par $\left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right)$ prise dans $L^1(m)$. Il suffit donc de montrer que pour tout g de cet ensemble la suite $g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(g)$ converge vers 0.

Si g est dans $\text{Im} \left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right)$: il existe z dans V tel que $g = \left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right) (z)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 (3.2.3) \quad \|g_n\|_1 &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k (g) \right\|_1 = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k \left(\left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right) (z) \right) \right\|_1 \\
 &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k (z) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot (\phi_T)^{k+1} (z) \right\|_1 \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left\| z - \frac{1}{\lambda^n} \cdot (\phi_T)^n (z) \right\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{n} \cdot \|z\|_1 + \frac{1}{n} \cdot \|(\phi_T)^n (z)\|_1 \leq \frac{1}{n} \cdot \|z\|_1 + \frac{1}{n} \cdot \|z\|_1 = \frac{2}{n} \cdot \|z\|_1.
 \end{aligned}$$

Maintenant si g est dans la fermeture de $\text{Im} \left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right)$, il existe $g' = \left(I - \frac{\phi_T}{\lambda} \right) (z)$, z dans V tel que : $\|g - g'\|_1 < \varepsilon$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 \|g_n\|_1 &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g) \right\|_1 = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k ((g - g') + g') \right\|_1 \\
 &= \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g - g') + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g') \right\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g - g') \right\|_1 + \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g') \right\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \left\| (\phi_T)^k (g - g') \right\|_1 + \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g') \right\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|g - g'\|_1 + \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g') \right\|_1 \\
 &\leq \varepsilon + \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g') \right\|_1.
 \end{aligned}$$

et d'après (3.2.3)

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (g') \right\|_1 \leq \frac{2}{n} \|z\|_1.$$

Donc

$$\|g_n\|_1 \leq \varepsilon + \frac{2}{n} \|z\|_1.$$

D'où pour $g = f - \bar{f}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k (f - \bar{f}) \right\|_1 = 0.$$

D'après (3.2.1) , on a : $\phi_T(\bar{f}) = \lambda.\bar{f}$ donc

$$\|\bar{f}\|_v = \|\lambda\bar{f}\|_v = \|\phi_T(\bar{f})\|_v.$$

On a

$$\phi_T(\bar{f}) = \phi_T\left(\lim_n f_n\right) = \lim_n \phi_T(f_n).$$

Or,

$$\begin{aligned} \|\phi_T(f_n)\|_v &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^{k+1}(f) \right\|_v \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^{k+1}(f) \right\|_v \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| (\phi_T)^{k+1}(f) \right\|_v \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M \cdot \|f\|_v = M \cdot \|f\|_v. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\bar{f}\|_v = \|\phi_T(\bar{f})\|_v = \left\| \lim_n \phi_T(f_n) \right\|_v \leq M \|f\|_v.$$

D'où

$$(3.2.4) \quad \|\bar{f}\|_v \leq M \|f\|_v.$$

■

Remarque 3.1.

L'égalité (3.2.2) , montre que si λ n'est pas une valeur propre de ϕ_T avec $|\lambda| = 1$, alors $Id - \frac{1}{\lambda}\phi_T$ est surjective.

On note $\bar{f} = \phi_\lambda(f)$, d'après (3.2.4) , on a :

$$\|\bar{f}\|_v = \|\phi_\lambda(f)\|_v \leq M \cdot \|f\|_v.$$

Donc ϕ_λ est un opérateur linéaire borné de V dans V et on a :

$$\|\phi_\lambda\|_v \leq M.$$

On a aussi, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(f) \right\|_1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| (\phi_T)^k(f) \right\|_1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_1 = \|f\|_1.$$

Donc

$$(3.2.5) \quad \|\phi_\lambda(f)\|_1 \leq \|f\|_1 \Rightarrow \|\phi_\lambda\|_1 \leq 1.$$

3.3 Décomposition de l'opérateur ϕ_T

On démontre les dernières assertions du Théorème (I.T.M) .

Proposition 3.5. (Voir [6])

L'image de V par ϕ_λ est l'espace propre $V(\lambda)$.

Preuve. (a) $V(\lambda) \subset \phi_\lambda(V)$:

Soit f dans $V(\lambda)$ alors,

$$\phi_T(f) = \lambda.f \Rightarrow (\phi_T)^k(f) = \lambda^k.f \quad \forall k \geq 1.$$

On a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{\lambda^k} .f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f = f,$$

Donc

$$(3.3.1) \quad \phi_\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(f) = f.$$

Comme $\phi_\lambda(f) \in \phi_\lambda(V)$ alors $f \in \phi_\lambda(V)$.

(b) $\phi_\lambda(V) \subset V(\lambda)$:

Soit f dans $\phi_\lambda(V)$. Il existe $g \in V$ telle que $f = \phi_\lambda(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} . (\phi_T)^k(g)$.

On a :

$$\begin{aligned} \phi_T \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) \right] &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^{k+1}(g) \\ &= \frac{n+1}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda^{k+1}} (\phi_T)^{k+1}(g) \\ &= \frac{n+1}{n} \lambda \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+1}} (\phi_T)^{k+1}(g) \\ &= \frac{n+1}{n} \lambda \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) \\ &= \frac{n+1}{n} \lambda \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) - \frac{1}{n} \lambda g. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_T \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) \right] &= \phi_T \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) \right] \\ &= \phi_T(\phi_\lambda(g)) = \phi_T(f), \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \phi_T(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \lambda \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k(g) - \frac{1}{n} \cdot \lambda \cdot g \right] \\
 &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) - 0 = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} (\phi_T)^k(g) \\
 &= \lambda \cdot \phi_\lambda(g) = \lambda f.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\phi_T(f) = \lambda f$$

■

Le résultat précédent est vrai pour tout nombre complexe de module 1, donc si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ et λ n'est pas une valeur propre de ϕ_T alors $V(\lambda) = \{0\}$ donc $\phi_\lambda(V) = \{0\}$ i.e., $\phi_\lambda \equiv 0$.

Lemme 3.6. (Voir [6])

Soit λ une valeur propre de module 1, alors $\phi_\lambda^2 = \phi_\lambda$.

Preuve. Soit f dans V , alors d'après la proposition 3.5. $\phi_\lambda(f) \in V(\lambda)$, et d'après (3.3.1), si $g \in V(\lambda)$ alors : $\phi_\lambda(g) = g$ donc :

$$\phi_\lambda^2(f) = \phi_\lambda(f) \text{ i.e., } \phi_\lambda^2 = \phi_\lambda$$

■

ϕ_λ est donc la projection de V sur $V(\lambda)$.

Lemme 3.7. (Voir [6])

Si μ et λ sont distinctes alors

$$\phi_\lambda \phi_\mu \equiv 0$$

Preuve. Soit f dans V , on a $\phi_\mu(f) \in V$ donc,

$$(3.3.2) \quad \phi_\lambda(\phi_\mu(f)) \in V(\lambda).$$

D'autre part, $\phi_\mu(f) \in V(\mu)$ donc :

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k (\phi_\mu(f)) \in V(\mu) \quad \forall n \geq 1.$$

En effet, comme $\phi_\mu(f) \in V(\mu)$ donc $(\phi_T)^k (\phi_\mu(f)) \in V(\mu) \quad \forall 0 \leq k \leq n-1$.

$(U_n)_n$ est une suite d'éléments de $V(\mu)$ et comme $V(\mu)$ est fermé dans V car il est de dimension finie (lemme 3.2.), la limite de $(U_n)_n$ est dans $V(\mu)$.

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \cdot (\phi_T)^k (\phi_\mu(f)) = \phi_\lambda(\phi_\mu(f)),$$

i.e.,

$$(3.3.3) \quad \phi_\lambda(\phi_\mu(f)) \in V(\mu).$$

Comme $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{0\}$ car μ et λ sont distinctes et de (3.3.2) et (3.3.3), on déduit que :

$$\phi_\lambda(\phi_\mu(f)) = 0 \quad \forall f \in V.$$

D'où

$$\phi_\lambda \phi_\mu \equiv 0.$$

■

Définition 3.1. Soit Ω le supplémentaire de $\bigoplus_{i=1}^p V(\lambda_i)$ dans V , donc $V = \bigoplus_{i=1}^p V(\lambda_i) \oplus \Omega$.

ϕ_{λ_i} est la projection de V sur $V(\lambda_i)$, donc pour f dans V on peut écrire :

$$f = \sum_{i=1}^p \phi_{\lambda_i}(f) + \sigma(f),$$

où σ est la projection de V sur Ω .

Et on a :

$$(3.3.4) \quad \phi_T(f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \phi_{\lambda_i}(f) + \phi_T(\sigma(f)),$$

car ϕ_T est linéaire et $\phi_{\lambda_i}(f) \in V(\lambda_i)$.

Posons

$$\phi_T(\sigma(f)) = \psi(f).$$

Proposition 3.8. (Voir [6])

ϕ_T préserve l'espace Ω , donc ψ préserve aussi Ω

On propose la démonstration suivante :

Preuve. Remarquons que pour tout f dans V , on a :

$$(3.3.5) \quad (\phi_{\lambda_i} \circ \phi_T)(f) = (\phi_T \circ \phi_{\lambda_i})(f) \quad \forall i, 1 \leq i \leq p.$$

En effet :

$$\begin{aligned} (\phi_{\lambda_i} \circ \phi_T)(f) &= \phi_{\lambda_i}(\phi_T(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^k} \cdot (\phi_T)^k(\phi_T(f)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^k} \cdot \phi_T((\phi_T)^k(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_T \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right]. \end{aligned}$$

Comme ϕ_T est continu de $L^1(m)$ dans lui-même et d'après le lemme 3.4. ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_1} \phi_{\lambda_i}(f).$$

Donc

$$\begin{aligned} (\phi_{\lambda_i} \circ \phi_T)(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_T \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right] = \phi_T \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^k} \cdot (\phi_T)^k(f) \right] \\ &= \phi_T(\phi_{\lambda_i}(f)) = (\phi_T \circ \phi_{\lambda_i})(f). \end{aligned}$$

Soit donc v dans Ω et montrons que $\phi_T(v) \in \Omega$: On a :

$$\phi_T(\phi_{\lambda_i}(v)) = \phi_T(0) = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq p$$

car ϕ_{λ_i} est la projection de V sur $V(\lambda_i)$ et $v \in \Omega$, $\forall i, 1 \leq i \leq p$.

Donc d'après (3.3.5) :

$$(\phi_{\lambda_i} \circ \phi_T)(v) = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq p,$$

i.e.,

$$\phi_{\lambda_i}(\phi_T(v)) = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq p.$$

Ce qui prouve que $\phi_T(v) \notin \left[\bigoplus_{i=1}^p V(\lambda_i) \right] \setminus \{0\}$, donc $\phi_T(v) \in \Omega$.

Comme σ est la projection de V sur Ω et que $\psi = \phi_T \circ \sigma$ par définition, l'opérateur ψ préserve Ω . ■

Consquence:

On déduit que ϕ_T est un opérateur quasi-compact de V dans lui-même.

Sachant que l'image de V par ψ est contenue dans l'espace Ω et que $\Omega \cap V(\lambda_i) = \{0\}$, on déduit que :

$$\phi_{\lambda_i} \psi = \psi \phi_{\lambda_i} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq p.$$

Pour f dans V on a :

$$(\phi_T \circ \sigma)(\psi(f)) = \psi^2(f).$$

Donc

$$(3.3.6) \quad \phi_T(\psi(f)) = \psi^2(f).$$

En effet : $\psi(f) \in \Omega$ donc $\sigma(\psi(f)) = \psi(f)$.

Comme $\psi = \phi_T \circ \sigma$, alors de (3.3.6) on a :

$$\phi_T(\phi_T \circ \sigma)(f) = \psi^2(f),$$

i.e.,

$$(\phi_T)^2 \circ \sigma = \psi^2.$$

Par récurrence :

$$(\phi_T)^m \circ \sigma = \psi^m.$$

D'où pour f dans V :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^p \phi_{\lambda_i}(f) + \sigma(f) \Rightarrow \phi_T(f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \phi_{\lambda_i}(f) + \psi(f) \\ \Rightarrow (\phi_T)^2(f) &= \phi_T \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \phi_{\lambda_i} + \psi \right) (f) = \phi_T \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \phi_{\lambda_i} + \phi_T \circ \sigma \right) (f) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \phi_{\lambda_i}(f) + ((\phi_T)^2 \circ \sigma)(f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \phi_{\lambda_i}(f) + \psi^2(f). \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$(\phi_T)^m(f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^m \phi_{\lambda_i}(f) + \psi^m(f).$$

Et on a :

$$\|\psi^m\|_1 = \left\| (\phi_T)^m - \sum_{i=1}^p \lambda_i^m \phi_{\lambda_i} \right\|_1 \leq \|(\phi_T)^m\|_1 + \sum_{i=1}^p \|\phi_{\lambda_i}\|_1 \leq 1 + p.$$

Il reste a voir que le rayon spectral $\rho(\psi)$ de ψ est inférieure strictement à 1.

ψ n'a pas de valeur propre de module 1 dans V , en effet :

Supposons qu'il existe v dans V tel que : $\psi(v) = \lambda.v$ et $|\lambda| = 1$, comme $\psi(v) \in \Omega$ alors $\lambda.v \in \Omega$, donc $v \in \Omega$. Mais $\psi(v) = (\phi_T \circ \sigma)(v) = \phi_T(v)$ donc $\phi_T(v) = \lambda v$, absurde car $v \notin V(\lambda_i) \forall 1 \leq i \leq p$.

Comme le spectre $\sigma(\psi)$ de ψ est compact et d'après la remarque (3.1.) , on déduit que $\rho(\psi) \leq c < 1$.

Remarque 3.2.

$$\rho(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\psi^n\|_v)^{\frac{1}{n}} \leq c < 1,$$

où $\rho(\psi)$ est le rayon spectral de ψ .

Donc pour tout $r > c$, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$(3.3.7) \quad \|\psi^n\|_v \leq k.r^n.$$

(Il suffit de prendre $k = \max \left\{ \frac{\|\psi^n\|_v}{r^n}, n \geq 1 \right\}$, sachant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|\psi^n\|_v}{r^n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{r} < 1$).

3.4 Conclusion

On a montré que l'opérateur de Perron-Frobenius ϕ_T associé à $T \in D$ est quasi-compact. Son rayon spectral essentiel est strictement inférieur à 1: $\rho_{ess}(\phi_T) \leq c < 1$.

On remarque dans la preuve du Théorème (3.1.) , si 1 est une valeur propre simple, alors en utilisant la deuxième équivalence dans la définition 1.3. , on déduit que le système (I, T, μ_h) est ergodique, où μ_h est l'unique mesure de probabilité invariante par T dont la densité h est dans V .

Chapitre 4

Méthode des cônes invariants et application

Dans ce chapitre issu de l'article écrit par C.Liverani : " Decay of correlations" [13], (Voir aussi [2]), on s'intéresse à des transformations particulières (Voir paragraphe (4.2)) de la classe des transformations uniformément dilatantes définies dans le chapitre 2. La condition supplémentaire qu'on exige à ces transformations est qu'elles soient bijectives sur chaque élément de la partition de monotonie (i.e., les intervalles de I où la transformation est strictement monotone).

On montre que telles applications admettent une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m en utilisant une méthode appelée « Méthode des cônes invariants ».

L'opérateur de Perron-Frobenius défini dans le chapitre 2 est l'outil commun entre les deux méthodes (celle du chapitre 2 et celle de ce chapitre).

Si $\mu_h = h.m$ est une mesure invariante par T , on définit la fonction de corrélation par :

$$C_n(f, g) = \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } L^\infty(m).$$

D'après la définition de l'opérateur de Perron-Frobenius :

$$\begin{aligned} C_n(f, g) &= \left| \int_I f \cdot (\phi_T)^n(g \cdot h) \, dm - \int_I f \, h \, dm \int_I g \, h \, dm \right| \\ &= \left| \int_I f \cdot \left[(\phi_T)^n(g \cdot h) - \left(\int_I g \, h \, dm \right) \cdot h \right] \, dm \right|. \end{aligned}$$

Le chapitre précédent montre que si 1 est une valeur propre simple est qu'elle est la seule valeur propre de module 1, alors $(\phi_T)^n(g \cdot h) - \left(\int_I g \, h \, dm \right) \cdot h = \psi^n(g \cdot h)$, sachant que

le rayon spectral r de l'opérateur ψ est strictement inférieur à 1. En utilisant l'inégalité (3.3.7) (Dans la remarque 3.2.) pour $c < r < 1$, on obtient:

$$\begin{aligned} C_n(f, g) &= \left| \int_I f \cdot \psi^n(g \cdot h) \, dm \right| \leq \|\psi^n(g \cdot h)\|_v \|f\|_1 \\ &\leq r^n k \|f\|_1 \|g \cdot h\|_v. \end{aligned}$$

où $k = \max \left\{ \frac{\|\psi^n\|_v}{r^n}, n \geq 1 \right\}$.

Par conséquent on obtient la décroissance exponentielle des corrélations.

Comme les fonctions indicatrices des sous-ensembles mesurables de I sont dans $L^\infty(m)$, alors pour tout A et B mesurables,

$$\mu_h((T^{-n}A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_h(A) \cdot \mu_h(B).$$

Cela signifie que la décroissance exponentielle des corrélations entraîne le mélange exponentiel. En outre la transformation T est ergodique (Voir généralités sur la théorie ergodique. Chapitre 1).

4.1 Définitions et résultats

Rappelons qu'on note I l'intervalle $[0, 1]$, m la mesure de Lebesgue et par $L^1(m)$ l'espace quotient des fonctions Lebesgue intégrables de I à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur le groupe $H = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} / \int_I |f| \, dm = 0\}$ muni de la norme usuelle $\|f\|_1 = \int_I |f| \, dm$.

On note $f \sim g$ m.p.p si $\|f - g\|_1 = 0$.

Définition 4.1.

Soit V un espace vectoriel et $\preceq$ une relation d'ordre partiel.

On dit que la relation $\preceq$ est compatible avec la structure algébrique de l'espace vectoriel V si :

- i) $\forall f, g \in V, g \preceq f \Rightarrow 0 \preceq f - g$.
- ii) $\forall f \in V, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, 0 \preceq f \Rightarrow 0 \preceq \lambda \cdot f$
- iii) $\forall f \in V, 0 \preceq f$ et $f \preceq 0 \Rightarrow f = 0$

Un espace vectoriel topologique V muni d'une relation d'ordre partiel $\preceq$, compatible avec la structure algébrique de V est appelé " Réseau Vectoriel".

Si de plus pour toute suite $\{f_n\}_{n \geq 1} \in V$ on a : $g \preceq f_n \, \forall n \geq 1$ où $g \in V$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, alors $g \preceq f$; on dit alors que V est un "réseau vectoriel intégralement fermé".

4.1.1 Relation d'ordre associée à un cône

Rappelons qu'un *cône* C dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est un sous-ensemble de cet espace tel que : pour tout scalaire $\lambda \geq 0$ et pour tout élément x de C on a : $\lambda x \in C$.

C est dit convexe si, $\forall \lambda \in [0, 1]$ et $\forall x, y \in C$ alors $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$.

On suppose, dans toute la suite, que $\{0\} \notin C$.

Soit V un espace vectoriel topologique, et $C \subset V$ un cône convexe avec $C \cap -C \neq \emptyset$ tel que $C \cup \{0\}$ est fermé, on définit la relation d'ordre $\preceq$ associée à C par :

$$f \preceq g \Leftrightarrow g - f \in C \cup \{0\}.$$

On remarque que V muni de cette relation est un réseau vectoriel et comme $C \cup \{0\}$ est fermé alors V est intégralement fermé.

On définit ainsi sur C la (pseudo)-métrique projective Θ appelée métrique de Hilbert :

$$\begin{aligned} \alpha(f, g) &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ / \lambda f \preceq g \} \\ \beta(f, g) &= \inf \{ \mu \in \mathbb{R}^+ / g \preceq \mu f \} \\ \Theta(f, g) &= \ln \left[\frac{\beta(f, g)}{\alpha(f, g)} \right]. \end{aligned}$$

Si l'ensemble $\{ \lambda \in \mathbb{R}^+ / \lambda f \preceq g \}$ (resp : $\{ \mu \in \mathbb{R}^+ / g \preceq \mu f \}$) est vide alors $\alpha = 0$ (resp : $\beta = \infty$). Cette métrique de Hilbert est une pseudo-métrique car elle peut prendre la valeur ∞ , elle est projective car la distance entre deux éléments coléniars est nulle. On a le théorème suivant (Voir [4])

Théorème 4.1. Inégalité de Birkhoff (Voir [4] ou [13])

Soient V_1 et V_2 deux réseaux vectoriels intégralement fermés et $T : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire.

Soient $C_1 \subset V_1$ et $C_2 \subset V_2$ deux cônes convexes, tels que $T(C_1) \subset C_2$, et notons Θ_i la métrique de Hilbert associée à C_i , $i = 1, 2$.

Posons $\Delta = \sup_{f, g \in T(C_1)} \Theta_2(f, g)$. Alors :

$$\Theta_2(T(f), T(g)) \leq \tanh \left(\frac{\Delta}{4} \right) \cdot \Theta_1(f, g) \quad \forall f, g \in C_1.$$

$$(\tanh(\infty) = 1)$$

Preuve. Soit f, g dans C_1 ,

Si $\alpha(f, g) = 0$ ou $\beta(f, g) = \infty$, alors le résultat est immédiat .

Si $\alpha(f, g) \neq 0$ et $\beta(f, g) \neq \infty$, $\Theta_1(f, g) = \ln \frac{\beta}{\alpha}$.

On a $\alpha f \preceq g$ et $\beta f \succeq g$, en effet :

on a $\alpha = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ / \lambda f \preceq g \}$ donc il existe une suite de nombres réels positifs $\{\lambda_n\}_n$ telle que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ et vérifie $\lambda_n f \preceq g$ ce qui implique que $f \preceq \frac{1}{\lambda_n} g$ et on a : $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} g = \frac{1}{\alpha} g$.

Comme V_1 est intégralement fermé alors $f \preceq \frac{1}{\alpha} g$ d'où $\alpha f \preceq g$. De même pour $\beta f \succeq g$.

Si $\Delta = \infty$:

$\alpha f \preceq g \Rightarrow 0 \preceq g - \alpha f$ donc $g - \alpha f \in C_1$ ce qui implique que $T(g - \alpha f) \in C_2$ d'où

$$0 \preceq T(g - \alpha f) \Rightarrow \alpha T(f) \preceq T(g) .$$

Comme $\beta f \succeq g$, on a

$$T(g) \preceq \beta T(f) .$$

Donc $\alpha'(T(f), T(g)) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ / \lambda T(f) \preceq T(g) \} \geq \alpha$ et

$$\beta'(T(f), T(g)) = \inf \{ \mu \in \mathbb{R}^+ / T(g) \preceq \mu T(f) \} \leq \beta .$$

D'où $\frac{\beta'}{\alpha'} \leq \frac{\beta}{\alpha}$ alors, $\Theta_2(T(f), T(g)) = \ln \frac{\beta'}{\alpha'} \leq \ln \frac{\beta}{\alpha} = \Theta_1(f, g)$.

Si $\Delta < \infty$:

On a $g - \alpha f \succeq 0$ et $\beta f - g \succeq 0$ i.e, $g - \alpha f \in C_1$ et $\beta f - g \in C_1$. Par définition du diamètre Δ , on a :

$$\Theta_2(T(g - \alpha f), T(\beta f - g)) \leq \Delta .$$

Par suite il existe μ et λ avec $\mu \geq \lambda \geq 0$ tels que :

$$\lambda T(g - \alpha f) \preceq T(\beta f - g) \text{ et } \mu T(g - \alpha f) \succeq T(\beta f - g) \text{ avec } \ln \frac{\mu}{\lambda} \leq \Delta .$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda T(g - \alpha f) &\preceq T(\beta f - g) \Rightarrow \lambda T(g) - \lambda \alpha T(f) \preceq \beta T(f) - T(g) \\ &\Rightarrow \lambda T(g) + T(g) \preceq \beta T(f) + \lambda \alpha T(f) \\ &\Rightarrow T(g) (\lambda + 1) \preceq T(f) (\beta + \lambda \alpha) \\ &\Rightarrow \frac{\beta + \lambda \alpha}{\lambda + 1} T(f) \succeq T(g) . \end{aligned}$$

Avec le même calcul on trouve

$$\frac{\beta + \mu \alpha}{\mu + 1} T(f) \preceq T(g) .$$

D'où

$$\begin{aligned}\Theta_2(T(f), T(g)) &\leq \ln \frac{\frac{\beta+\lambda\alpha}{\lambda+1}}{\frac{\beta+\mu\alpha}{\mu+1}} = \ln \frac{(\beta + \lambda\alpha)(\mu + 1)}{(\beta + \mu\alpha)(\lambda + 1)} = \ln \frac{(\frac{\beta}{\alpha} + \lambda)(\mu + 1)}{(\frac{\beta}{\alpha} + \mu)(\lambda + 1)} \\ &= \ln \frac{e^{\Theta_1(f,g)} + \lambda}{e^{\Theta_1(f,g)} + \mu} - \ln \frac{1 + \lambda}{1 + \mu}.\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{d \left(\ln \frac{e^x + \lambda}{e^x + \mu} \right)}{dx} = \frac{e^x (\mu - \lambda)}{(e^x + \lambda)(e^x + \mu)},$$

donc

$$\Theta_2(T(f), T(g)) \leq \ln \frac{e^{\Theta_1(f,g)} + \lambda}{e^{\Theta_1(f,g)} + \mu} - \ln \frac{1 + \lambda}{1 + \mu} = \int_0^{\Theta_1(f,g)} \frac{e^x (\mu - \lambda)}{(e^x + \lambda)(e^x + \mu)} dx.$$

Or,

$$(4.1.1) \quad \frac{e^x (\mu - \lambda)}{(e^x + \lambda)(e^x + \mu)} \leq \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^2} \quad (\text{voir annexe})$$

Par suite

$$\Theta_2(T(f), T(g)) \leq \Theta_1(f, g) \cdot \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^2}.$$

Or

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^2} = \frac{1 - e^{-2(\frac{1}{4} \ln \frac{\mu}{\lambda})}}{1 + e^{-2(\frac{1}{4} \ln \frac{\mu}{\lambda})}} = \tanh \left(\frac{\ln \frac{\mu}{\lambda}}{4} \right).$$

Comme $\ln \frac{\mu}{\lambda} \leq \Delta$, on en déduit que :

$$\Theta_2(T(f), T(g)) \leq \tanh \left(\frac{\Delta}{4} \right) \cdot \Theta_1(f, g).$$

■

Lemme 4.2. (Voir [4], [13])

Soient V un réseau vectoriel intégralement fermé munie d'une norme $\|\cdot\|$ et C un cône convexe de V .

Supposons que $\forall f, g \in V$ on a :

$$-f \preceq g \preceq f \Rightarrow \|f\| \geq \|g\|.$$

Alors, pour $f, g \in C \subset V$ telles que $\|f\| = \|g\|$, on a :

$$\|f - g\| \leq (e^{\Theta(f,g)} - 1) \|f\|.$$

Preuve. On a $\Theta(f, g) = \ln \frac{\beta}{\alpha}$ et d'après la preuve du théorème précédent $\alpha f \preceq g$ et $\beta f \succeq g$, donc

$$-g \preceq 0 \preceq \alpha f \preceq g \Rightarrow \alpha \|f\| \leq \|g\|$$

comme $\|f\| = \|g\|$ alors $\alpha \leq 1$. De même de l'inégalité $\beta \|f\| \geq \|g\|$ on en déduit que $\beta \geq 1$.

D'où

$$g - f \preceq (\beta - 1) \cdot f \preceq (\beta - \alpha) f,$$

$$g - f \succeq (\alpha - 1) \cdot f \succeq -(\beta - \alpha) f,$$

et

$$-(\beta - \alpha) f \preceq g - f \preceq (\beta - \alpha) f.$$

Par hypothèse on a :

$$\|g - f\| \geq \|(\beta - \alpha) f\| = (\beta - \alpha) \|f\|.$$

Comme $\alpha \leq 1$ alors :

$$\|g - f\| \leq \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \|f\|,$$

d'où

$$\|g - f\| \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \|f\| = (e^{\Theta(f, g)} - 1) \|f\|.$$

■

4.2 Mesure invariante

Les applications de l'intervalle, de la classe des transformations uniformément dilatantes, qu'on va étudier dans cette section vérifient les hypothèses suivantes :

(H₁) T est définie de I dans lui même, telle que il existe une partition finie $(I_j)_{1 \leq j \leq n}$ pour laquelle on a :

$\forall 1 \leq j \leq n$: T est bijective de I_j dans I et la restriction de T sur I_j se prolonge en une application de classe C^2 sur $\overline{I_j}$.

(H₂) $\min_{1 \leq j \leq n} \inf_{x \in \overline{I_j}} |T'(x)| \geq \delta > 1$.

On se place dans le cas où $n = 2$ sachant que les résultats se généralisent à n quelconque sans difficulté supplémentaire.

Soit $T : I \rightarrow I$ vérifie les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$ avec $n = 2$.

L'opérateur ϕ_T de Perron-Frobenius associé à T est défini par :

$$\phi_T(f) = \sum_{i=1}^2 (f \circ T_i^{-1}) \cdot |(T_i^{-1})'|$$

Soit $C(I)$ l'ensemble des applications continues sur I , muni de la topologie de la convergence uniforme.

On propose le résultat suivant

Proposition 4.3. *i) Si $f \in C(I)$, alors $\phi_T(f) \in C(I)$.*

ii) ϕ_T est un opérateur continu de $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ dans lui même.

Preuve. *i)* Soit f dans $C(I)$, on a :

$$\phi_T(f) = \sum_{i=1}^2 (f \circ T_i^{-1}) \cdot |(T_i^{-1})'|.$$

Comme T_i est de classe C^2 sur $\overline{I_i}$ pour $i = 1, 2$, alors T'_i est bornée sur $\overline{I_i}$, ce qui implique que les applications T_i^{-1} et $(T_i^{-1})'$ sont continues sur I .

Donc $\phi_T(f) = \sum_{i=1}^2 (f \circ T_i^{-1}) \cdot |(T_i^{-1})'|$ est continue sur I . i.e, $\phi_T(f) \in C(I)$.

ii) Soit f dans $C(I)$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$;

$$\begin{aligned} |\phi_T(f)| &= \left| \sum_{i=1}^2 (f \circ T_i^{-1}) \cdot |(T_i^{-1})'| \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 |(f \circ T_i^{-1})| \cdot |(T_i^{-1})'| \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^2 |(T_i^{-1})'| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 |(T_i^{-1})'|. \end{aligned}$$

Or,

$$|T'(x)| > \delta > 1 \quad \forall x \in I,$$

Donc

$$|\phi_T(f)| \leq \sum_{i=1}^2 |(T_i^{-1})'| \leq \frac{1}{\delta} \cdot 2.$$

D'où

$$\|\phi_T(f)\|_\infty \leq \frac{1}{\delta} \cdot 2$$

■

Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit le sous-ensemble C_a de $C(I)$ par :

$$C_a = \left\{ f \in C(I) \mid \forall x, y \in I, f(x) > 0 \text{ et } \frac{f(x)}{f(y)} \leq e^{a|x-y|} \right\}$$

On remarque que C_a est un cône convexe et que $C_a \cup \{0\}$ est un fermé dans $C(I)$ pour la topologie de la convergence uniforme. D'après la section précédente $C(I)$ est un réseau vectoriel intégralement fermé, muni de la relation d'ordre " $\preceq$ " définie par :

$$f, g \in C(I) : f \preceq g \Leftrightarrow g - f \in C_a \cup \{0\}$$

Lemme 4.4. (Voir [13])

Soit $\sigma \in]\frac{1}{\delta}, 1[$.

Si $a \geq \frac{D}{\sigma - \delta^{-1}}$ où $D = \sup_{\substack{x \in I \\ i \in \{1,2\}}} \left| \frac{(T_i^{-1})''(x)}{(T_i^{-1})'(x)} \right|$, alors : $\phi_T(C_a) \subset C_{\sigma a}$.

Preuve. Soit g dans C_a et $x, y \in I$, supposons que $x \leq y$.

D'après l'écriture explicite de l'opérateur ϕ_T on a :

$$(4.2.1) \quad \phi_T(g)(x) = \sum_{i=1}^2 (g \circ T_i^{-1})(x) \left| (T_i^{-1})'(x) \right| \quad \forall x \in I$$

L'égalité est partout car g est continue et T_i^{-1} est définie sur I .

On remarque que $\phi_T(g)(x) > 0 \quad \forall x \in I$, car $g > 0$. Comme $g \in C_a$ alors :

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} \frac{g(T_i^{-1}(x))}{g(T_i^{-1}(y))} &\leq e^{a|T_i^{-1}(x) - T_i^{-1}(y)|} \\ \Rightarrow g(T_i^{-1}(x)) &\leq g(T_i^{-1}(y)) \cdot e^{a|T_i^{-1}(x) - T_i^{-1}(y)|}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \phi_T(g)(x) &\leq \sum_{i=1}^2 \left[g(T_i^{-1}(y)) e^{a|T_i^{-1}(x)-T_i^{-1}(y)|} \right] \left| (T_i^{-1})'(x) \right| \\
 &= \sum_{i=1}^2 g(T_i^{-1}(y)) e^{a|T_i^{-1}(x)-T_i^{-1}(y)|} \frac{\left| (T_i^{-1})'(x) \right|}{\left| (T_i^{-1})'(y) \right|} \left| (T_i^{-1})'(y) \right| \\
 &= \sum_{i=1}^2 g(T_i^{-1}(y)) \left| (T_i^{-1})'(y) \right| e^{a|T_i^{-1}(x)-T_i^{-1}(y)|} \frac{\left| (T_i^{-1})'(x) \right|}{\left| (T_i^{-1})'(y) \right|} \\
 &\leq \sum_{i=1}^2 g(T_i^{-1}(y)) \left| (T_i^{-1})'(y) \right| e^{a|T_i^{-1}(x)-T_i^{-1}(y)|} e^{|\ln|(T_i^{-1})'(x)| - \ln|(T_i^{-1})'(y)||} \\
 &= \sum_{i=1}^2 g(T_i^{-1}(y)) \left| (T_i^{-1})'(y) \right| e^{a \int_x^y |(T_i^{-1})'(\zeta)| d\zeta} e^{\int_x^y \frac{|(T_i^{-1})''(\zeta)|}{|(T_i^{-1})'(\zeta)|} d\zeta} \\
 &\leq \sum_{i=1}^2 g(T_i^{-1}(y)) \left| (T_i^{-1})'(y) \right| e^{a\delta^{-1}|x-y|} e^{D|x-y|} \\
 &= e^{(D+a\delta^{-1})|x-y|} \left[\sum_{i=1}^2 g(T_i^{-1}(y)) \left| (T_i^{-1})'(y) \right| \right] = e^{(D+a\delta^{-1})|x-y|} \phi_T(g)(y) \\
 &\leq e^{(\sigma a)|x-y|} \phi_T(g)(y)
 \end{aligned}$$

D'où $\frac{\phi_T(g)(x)}{\phi_T(g)(y)} \leq e^{\sigma a|x-y|}$ ■

Dans toute la suite nous fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma \in]\frac{1}{\delta}, 1[$ tels que $a \geq \frac{D}{\sigma - \delta^{-1}}$.

Le lemme suivant nous permet d'avoir une écriture explicite de la métrique de Hilbert associée à C_a .

Lemme 4.5. (Voir [13])

Soit Θ la métrique de Hilbert associée à C_a . Alors pour $f, g \in C_a$ on a :

$$\Theta(f, g) = \ln \sup_{\substack{x \neq y \in I \\ u \neq v \in I}} \frac{(e^{a|x-y|}g(y) - g(x))(e^{a|u-v|}f(u) - f(v))}{(e^{a|x-y|}f(y) - f(x))(e^{a|u-v|}g(u) - g(v))}$$

Preuve. On a pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
 \lambda f &\preceq g \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) - \lambda f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ g(x) - \lambda f(x) \leq e^{a|x-y|} (g(x) - \lambda f(x)) \quad \forall x, y \in I \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{g(x)}{f(x)} \geq \lambda \quad \forall x \in I \\ \frac{e^{a|x-y|}g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|}f(y) - f(x)} \geq \lambda \quad \forall x, y \in I \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme $\alpha(f, g) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ / \lambda f \preceq g \}$, on en déduit que :

$$\alpha(f, g) = \min \left\{ \inf_{x \in I} \frac{g(x)}{f(x)}, \inf_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{e^{a|x-y|} g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|} f(y) - f(x)} \right\}.$$

Montrons que $\alpha(f, g) = \inf_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{e^{a|x-y|} g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|} f(y) - f(x)}$.

Soit $x_0 \in I$, tel que :

$$\frac{g(x_0)}{f(x_0)} = \inf_{x \in I} \frac{g(x)}{f(x)}$$

car g et f sont continues et positives.

$\forall x \in I$ tel que $x \neq x_0$, on a :

$$\inf_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{e^{a|x-y|} g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|} f(y) - f(x)} \leq \frac{e^{a|x-x_0|} g(x_0) - g(x)}{e^{a|x-x_0|} f(x_0) - f(x)} \quad \forall x \in I.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{e^{a|x-x_0|} g(x_0) - g(x)}{e^{a|x-x_0|} f(x_0) - f(x)} &= \frac{e^{a|x-x_0|} \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f(x_0) - \frac{g(x)}{f(x)} f(x)}{e^{a|x-x_0|} f(x_0) - f(x)} \\ &\leq \frac{e^{a|x-x_0|} \frac{g(x)}{f(x)} f(x) - \frac{g(x)}{f(x)} f(x)}{e^{a|x-x_0|} f(x_0) - f(x)} = \frac{g(x)}{f(x)}, \end{aligned}$$

donc

$$\inf_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{e^{a|x-y|} g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|} f(y) - f(x)} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \quad \forall x \in I.$$

D'où

$$\inf_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{e^{a|x-y|} g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|} f(y) - f(x)} \leq \inf_{x \in I} \frac{g(x)}{f(x)}$$

et par conséquent

$$\alpha(f, g) = \inf_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{e^{a|x-y|} g(y) - g(x)}{e^{a|x-y|} f(y) - f(x)}.$$

D'une manière analogue on trouve :

$$\beta(f, g) = \sup_{\substack{u, v \in I \\ u \neq v}} \frac{e^{a|u-v|} g(v) - g(u)}{e^{a|u-v|} f(v) - f(u)}.$$

D'où

$$\Theta(f, g) = \ln \frac{\beta(f, g)}{\alpha(f, g)} = \ln \sup_{\substack{u, v \in I \\ x, y \in I}} \frac{(e^{a|x-y|} g(y) - g(x)) (e^{a|u-v|} f(u) - f(v))}{(e^{a|x-y|} f(y) - f(x)) (e^{a|u-v|} g(u) - g(v))}.$$

■

Sous les hypothèses du lemme (4.4.) , on a le lemme suivant :

Lemme 4.6. (Voir[13])

$$\Delta = \sup_{(f,g) \in C_{\sigma a}} \Theta(f, g) = 2 \ln \frac{1+\sigma}{1-\sigma} + 2\sigma a$$

Preuve. Soient $f, g \in C_{\sigma a} \subset C_a$, d'après le lemme 4.5. , on a :

$$\Theta(f, g) = \ln \sup_{\substack{u, v \in I \\ x, y \in I}} \frac{(e^{a|x-y|} g(y) - g(x)) (e^{a|u-v|} f(u) - f(v))}{(e^{a|x-y|} f(y) - f(x)) (e^{a|u-v|} g(u) - g(v))},$$

et on a :

$$\begin{aligned} & \frac{(e^{a|x-y|} g(y) - g(x)) (e^{a|u-v|} f(u) - f(v))}{(e^{a|x-y|} f(y) - f(x)) (e^{a|u-v|} g(u) - g(v))} \\ &= \frac{\left(e^{a|x-y|} - \frac{g(x)}{g(y)}\right) \left(e^{a|u-v|} - \frac{f(v)}{f(u)}\right) g(y) f(u)}{\left(e^{a|x-y|} - \frac{f(x)}{f(y)}\right) \left(e^{a|u-v|} - \frac{g(v)}{g(u)}\right) f(y) g(u)} \\ &\leq \frac{(e^{a|x-y|} - e^{-\sigma a|x-y|}) (e^{a|u-v|} - e^{-\sigma a|u-v|})}{(e^{a|x-y|} - e^{\sigma a|x-y|}) (e^{a|u-v|} - e^{\sigma a|u-v|})} e^{\sigma a|u-v|} e^{\sigma a|x-y|} \\ &\leq \frac{(e^{a|x-y|} - e^{-\sigma a|x-y|}) (e^{a|u-v|} - e^{-\sigma a|u-v|})}{(e^{a|x-y|} - e^{\sigma a|x-y|}) (e^{a|u-v|} - e^{\sigma a|u-v|})} e^{2\sigma a} \\ &= \frac{(1 - e^{-a(1+\sigma)|x-y|}) (1 - e^{-(\sigma+1)a|u-v|})}{(1 - e^{-a(1-\sigma)|x-y|}) (1 - e^{-a(1-\sigma)|u-v|})} e^{2\sigma a}. \end{aligned}$$

Soit l'application $h(z)$, $z > 0$, définie par :

$$h(z) = \frac{(1 - e^{-(1+\sigma)z})}{(1 - e^{-(1-\sigma)z})}.$$

h peut se prolonger en une application de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ en posant $h(0) = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$ et $h'(0) \leq 0$. On a pour $z > 0$:

$$h'(z) = \frac{e^{-2z}}{(1 - e^{-(1-\sigma)z})^2} (-2\sigma + (1+\sigma)e^{(1-\sigma)a} - (1-\sigma)e^{(1+\sigma)a}).$$

On pose $h_0(z) = (-2\sigma + (1+\sigma)e^{(1-\sigma)a} - (1-\sigma)e^{(1+\sigma)a})$. Pour $z > 0$: $h_0(z) \leq 0$, car $h_0(0) = 0$ et

$$h'_0(z) = (1 - \sigma^2) (e^{(1-\sigma)a} - e^{(1+\sigma)a}) \leq 0$$

donc $h'(z) \leq 0, \forall z > 0$, ce implique que $h(z)$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$, par suite

$$h(z) \leq \frac{1+\sigma}{1-\sigma}.$$

Donc

$$\frac{(1 - e^{-a(1+\sigma)|x-y|})(1 - e^{-(\sigma+1)a|u-v|})}{(1 - e^{-a(1-\sigma)|x-y|})(1 - e^{-a(1-\sigma)|u-v|})} e^{2\sigma a} \leq \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^2 e^{2\sigma a}.$$

D'où

$$\frac{(e^{a|x-y|}g(y) - g(x))(e^{a|u-v|}f(u) - f(v))}{(e^{a|x-y|}f(y) - f(x))(e^{a|u-v|}g(u) - g(v))} \leq \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^2 e^{2\sigma a}.$$

■

D'après le lemme 4.4. , le lemme 4.6. et en appliquant le Théorème 4.1. , on a :

$$(4.2.3) \quad \Theta(\phi_T(f), \phi_T(g)) \leq \Lambda \Theta(f, g) \quad \forall f, g \in C_a$$

avec $\Lambda = \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) < 1$.

On remarque que Λ depend uniquement de δ et de D . Pour minimiser le diamètre Δ on choisit $a_0 = \frac{D}{\sigma_0 - \delta^{-1}}$, et cela après un bon choix de $\sigma = \sigma_0$.

Théorème 4.7. (Voir [13])

Si une transformation $T : I \rightarrow I$ vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$, alors :

T admet une mesure de probabilité invariante μ_h absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m . De plus la densité h de μ_h est continue et strictement positive sur I .

Pour montrer l'existence d'un point fixe non trivial de l'opérateur ϕ_T , on utilise la contraction formulée dans l'équation (4.2.3), en itérant une infinité de fois le cône C_{a_0} sous l'action de ϕ_T , qui donne ainsi, une contraction exponentiel. Cela nous permet d'avoir une intersection, de la famille des fermés emboîtés $\{(\phi_T)^n(C_{a_0} \cup \{0\})\}_{n \in \mathbb{N}}$, réduite à un seul point, qui est le point fixe. Par conséquent ce point fixe sera la densité d'une mesure invariante par T . On détaille la démonstration donnée dans [13] dans la preuve suivante :

Preuve du Théorème 4.7. Soit $f \in C_{a_0} \subset C(I)$, avec $\int_I f \, dm = 1$.

Montrons que $\{(\phi_T)^n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue (voir annex pour la définition d'une partie équicontinue).

Remarquons que pour $g \in C_{a_0}$ on a

$$\frac{g(x)}{g(y)} \leq e^{a_0|x-y|} \leq e^{a_0} \quad \forall x, y \in I.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) &\leq e^{a_0} \cdot g(y) \quad \forall x, y \in I, \\ \int_I g(x) \, dy &\leq e^{a_0} \cdot \int_I g(y) \, dy = e^{a_0} \cdot \|g\|_1 \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

D'où

$$g(x) \leq e^{a_0} \cdot \|g\|_1 \quad \forall x \in I.$$

Et par conséquent

$$(4.2.4) \quad \|g\|_\infty \leq e^{a_0} \cdot \|g\|_1.$$

Comme $\{(\phi_T)^n(f)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{a_0}$, et d'après la propriété (iv) de l'opérateur de Perron-Frobenius (Voir chapitre 2), alors

$$(4.2.5) \quad \|(\phi_T)^n(f)\|_\infty \leq e^{a_0} \cdot \|(\phi_T)^n(f)\|_1 = e^{a_0} \cdot \int_I (\phi_T)^n(f) \, dm = e^{a_0} \cdot \int_I f \, dm = e^{a_0}.$$

Donc $\forall x \in I$, l'ensemble $A_x = \{(\phi_T)^n(f)(x) / n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.

D'autre part;

$$(\phi_T)^n(f)(x) \leq e^{a_0|x-y|} \cdot (\phi_T)^n(f)(y) \quad \forall x, y \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\text{Donc } (\phi_T)^n(f)(x) - (\phi_T)^n(f)(y) \leq e^{a_0|x-y|} \cdot (\phi_T)^n(f)(y) - (\phi_T)^n(f)(y),$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } (\phi_T)^n(f)(x) - (\phi_T)^n(f)(y) &\leq (e^{a_0|x-y|} - 1) (\phi_T)^n(f)(y) \\ &\leq (e^{a_0|x-y|} - 1) \|(\phi_T)^n(f)\|_\infty. \end{aligned}$$

L'inégalité (4.2.5) implique que

$$(\phi_T)^n(f)(x) - (\phi_T)^n(f)(y) \leq (e^{a_0|x-y|} - 1) e^{a_0}.$$

Or,

$$e^{a_0|x-y|} - 1 = \int_0^{a_0|x-y|} e^\zeta d\zeta \leq a_0|x-y| \cdot e^{a_0|x-y|} \leq a_0|x-y| e^{a_0}.$$

Donc

$$(\phi_T)^n(f)(x) - (\phi_T)^n(f)(y) \leq a_0 \cdot e^{2 \cdot a_0} \cdot |x-y| \quad \forall x, y \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$|(\phi_T)^n(f)(y) - (\phi_T)^n(f)(x)| \leq a_0 \cdot e^{2 \cdot a_0} \cdot |x-y| \quad \forall x, y \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent $\{(\phi_T)^n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une partie équicontinue dans $C(I)$, d'après le Théorème d'Ascoli (Voir [5] et l'annexe) : $\{(\phi_T)^n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact dans $C(I)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

D'où il existe une sous-suite $\{(\phi_T)^{n_k}(f)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{(\phi_T)^n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $h \in C(I)$ telle que :

$$(4.2.6) \quad \|(\phi_T)^{n_k}(f) - h\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Comme $C_{a_0} \cup \{0\}$ est fermé dans $C(I)$ pour la topologie de la convergence uniforme, alors $h \in C_{a_0} \cup \{0\}$.

Montrons maintenant que $\|(\phi_T)^n(f) - h\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et que $\int_I h dm = 1$

On a pour $f_1, f_2 \in C(I)$:

$$\begin{aligned} -f_1 \preceq f_2 \preceq f_1 &\Rightarrow f_1 - f_2 \in C_{a_0} \cup \{0\} \Rightarrow 0 \leq f_1 - f_2 \\ &\Rightarrow 0 \leq f_2(x) \leq f_1(x) \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

D'où pour la norme $\|\cdot\|_1$ sur $C(I)$, on a : $\|f_2\|_1 \leq \|f_1\|_1$.

Comme $\|(\phi_T)^n(f)\|_1 = \int_I (\phi_T)^n(f) dm = \int_I f dm = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors, d'après le lemme 4.2. , on a :

$$\begin{aligned} \|(\phi_T)^{n+m}(f) - (\phi_T)^n(f)\|_1 &\leq \left(e^{\Theta((\phi_T)^{n+m}(f), (\phi_T)^n(f))} - 1 \right) \|(\phi_T)^n(f)\|_1 \\ &= \left(e^{\Theta((\phi_T)^{n+m}(f), (\phi_T)^n(f))} - 1 \right). \end{aligned}$$

On applique l'inégalité (4.2.3) au terme $\Theta((\phi_T)^{n+m}(f), (\phi_T)^n(f))$, on trouve

$$\begin{aligned} \|(\phi_T)^{n+m}(f) - (\phi_T)^n(f)\|_1 &\leq \left(e^{\Lambda^{(n-1)}\Theta(\phi_T(\phi_T^m(f)), \phi_T(f))} - 1 \right) \\ &\leq e^{\Lambda^{(n-1)}.\Delta} - 1 \end{aligned}$$

Or,

$$e^{\Lambda^{(n-1)}.\Delta} - 1 = \int_0^{\Lambda^{(n-1)}.\Delta} e^\zeta d\zeta \leq \Lambda^{(n-1)}\Delta e^{\Lambda^{(n-1)}.\Delta} \leq \Lambda^{(n-1)}\Delta e^{\Lambda^{-1}.\Delta}.$$

Par conséquent, pour $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|(\phi_T)^{n+m}(f) - (\phi_T)^n(f)\|_1 \leq \Lambda^{n-1}\Delta e^{\Lambda^{-1}.\Delta}.$$

Ceci implique que la suite $\{(\phi_T)^n(f)\}_n$ est de Cauchy dans $L^1(m)$. On peut donc trouver $g \in L^1(m)$, telle que : $(\phi_T)^n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_1} g$.

Comme ϕ_T est continu de $L^1(m)$ dans lui-même, alors :

$$(4.2.7) \quad \phi_T(g) = g.$$

Or, d'après (4.2.6) :

$$\|(\phi_T)^{n_k}(f) - h\|_1 \leq \|(\phi_T)^{n_k}(f) - h\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc $g = h$.

On a,

$$\left| \int (\phi_T)^n(f) dm - \int_I h dm \right| \leq \|(\phi_T)^n(f) - h\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

et comme,

$$\int_I (\phi_T)^n(f) dm = \int_I f dm = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\int_I h dm = 1.$$

D'après la propriété (vi) de l'opérateur de Perron-Frobenius (Voir Chapitre 2) et l'égalité (4.2.7) , on déduit que la mesure $\mu_h = h.m$ est une mesure de probabilité invariante par T .

■

4.3 Décroissance des corrélations

La section précédente montre que si T vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) , alors elle admet une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m . On la notera $\mu_h = h.m$, sachant que $h \in C_{a_0}$. On montre maintenant la décroissance exponentielle vers zéro lorsque n tend vers l'infini de la fonction de corrélation :

$$C_n(f, g) = \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } L^\infty(m).$$

On considère alors le cône suivant

$$C_+ = \{g \in C(I) \mid g(x) \geq 0, \forall x \in I\}.$$

C_+ est convexe et fermé dans $C(I)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Comme la convergence uniforme implique la convergence simple, alors $C(I)$ muni de la relation d'ordre associée au cône C_+ est un réseau vectoriel intégralement fermé.

On note Θ_+ la métrique de Hilbert associée à C_+ .

L'identité Id est une application linéaire de $C(I)$ dans lui même et vérifie : $Id(C_{a_0}) = C_{a_0} \subset C_+$, où C_{a_0} est le cône utilisé dans la section précédente.

L'inégalité de Birkhoff (Théorème 4.1.) implique que pour g_1 et g_2 dans C_{a_0} :

$$(4.3.1) \quad \Theta_+(g_1, g_2) \leq \Theta(g_1, g_2).$$

Un calcul analogue que celui de la preuve du lemme (4.5.), montre que :

$$(4.3.2) \quad \Theta_+(g_1, g_2) = \ln \sup_{x, y \in I} \frac{g_1(x) \cdot g_2(y)}{g_1(y) \cdot g_2(x)}.$$

La décroissance exponentielle des corrélations $C_n(f, g)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.8. (Voir [13])

Il existe $\zeta < 1$ et $K, r \in \mathbb{R}^+$, tels que pour tout $f \in L^1(m)$, pour tout $g \in C^1(I)$:

$$C_n(f, g) = \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \leq \zeta^n K \|f\|_1 (\|g\|_1 + r \cdot \|g'\|_\infty)$$

où $C^1(I)$ est l'ensemble des fonctions continues et dérivables sur I .

Preuve. Soit $g \in C_{a_0}$, comme $h > 0$ alors : $\int_I g \, d\mu_h = \|g.h\|_1 \neq 0$ et comme $\|h\|_1 = 1$ par définition.

Donc,

$$\begin{aligned}
 (4.3.3) \quad C_n(f, g) &= \frac{\|g.h\|_1}{\|g.h\|_1} \left| \int_I (f \circ T^n) . g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \\
 &= \left| \int_I (f \circ T^n) . \frac{g.h}{\|g.h\|_1} \, dm - \int_I f.h \, dm \int_I \frac{g.h}{\|g.h\|_1} \, dm \right| \|g.h\|_1 \\
 &\leq \left| \int_I (f \circ T^n) . \frac{g.h}{\|g.h\|_1} \, dm - \int_I f.h \, dm \int_I \frac{g.h}{\|g.h\|_1} \, dm \right| \|g\|_\infty \|h\|_1 \\
 &= \left| \int_I (f \circ T^n) . \frac{g.h}{\|g.h\|_1} \, dm - \int_I f.h \, dm \int_I \frac{g.h}{\|g.h\|_1} \, dm \right| \|g\|_\infty
 \end{aligned}$$

Posons $\varphi = \frac{g.h}{\|g.h\|_1}$, donc $\varphi \in C_{2.a_0}$ (car $h \in C_{a_0}$). On remplace dans (4.3.3), on trouve

$$C_n(f, g) \leq \left| \int_I (f \circ T^n) . \varphi \, dm - \int_I f.h \, dm \right| \|g\|_\infty$$

D'après la définition de l'opérateur ϕ_T et ses propriétés, on a :

$$\int_I (f \circ T^n) . \varphi \, dm = \int_I f \, (\phi_{T^n}(\varphi)) \, dm = \int_I f \, ((\phi_T)^n(\varphi)) \, dm.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 C_n(f, g) &\leq \left| \int_I (f \circ T^n) . \varphi \, dm - \int_I f.h \, dm \right| \|g\|_\infty \\
 &= \left| \int_I f \, ((\phi_T)^n(\varphi)) \, dm - \int_I f.h \, dm \right| \|g\|_\infty \\
 &= \left| \int_I [((\phi_T)^n(\varphi)) - h] \, f \, dm \right| \|g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Comme $h > 0$, alors

$$\begin{aligned}
 (4.3.4) \quad C_n(f, g) &\leq \left| \int_I [((\phi_T)^n(\varphi)) - h] \, f \, dm \right| \|g\|_\infty \\
 &= \left| \int_I \left[\frac{(\phi_T)^n(\varphi)}{h} - 1 \right] h \, f \, dm \right| \|g\|_\infty \\
 &\leq \left\| \frac{(\phi_T)^n(\varphi)}{h} - 1 \right\|_\infty \|h\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Majorons la suite réelle $\left\| \frac{(\phi_T)^n(\varphi)}{h} - 1 \right\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$:

On a :

$$\frac{((\phi_T)^n(\varphi))(x)}{h(x)} = \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(x) . h(y)}{((\phi_T)^n(\varphi))(y) . h(x)} \cdot \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(y)}{h(y)}.$$

En utilisant (4.3.2) on déduit que $\forall x, y \in I$:

$$(4.3.5) \quad \left[e^{-\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} \right] \cdot \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(y)}{h(y)} \leq \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(x)}{h(x)} \leq \left[e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} \right] \cdot \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(y)}{h(y)}.$$

Comme

$$\int_I ((\phi_T)^n(\varphi)) - h dm = \int_I ((\phi_T)^n(\varphi)) dm - 1 = \int_I \varphi dm - 1 = 0$$

et sachant que $\forall n \in \mathbb{N}$: $((\phi_T)^n(\varphi)) - h$ est continue sur I , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in I \text{ tel que } ((\phi_T)^n(\varphi))(y_n) = h(y_n).$$

Remplaçons dans (4.3.5) y par y_n :

$$e^{-\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} \leq \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(x)}{h(x)} \leq e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} \quad \forall x \in I,$$

$$e^{-\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1 \leq \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(x)}{h(x)} - 1 \leq e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1 \quad \forall x \in I,$$

et

$$-\left(e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1\right) \leq \frac{((\phi_T)^n(\varphi))(x)}{h(x)} - 1 \leq e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1 \quad \forall x \in I.$$

D'où

$$(4.3.6) \quad \left\| \frac{(\phi_T)^n(\varphi)}{h} - 1 \right\|_{\infty} \leq e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1.$$

Comme $2a_0 \geq a_0 = \frac{D}{\sigma_0 - \delta - 1}$, et d'après le lemme 4.4. , on a : $\phi_T(C_{(2a_0)}) \subset C_{\sigma_0(2a_0)}$.

Le lemme 4.6. implique que

$$\Delta = \sup_{(f, g) \in C_{\sigma(2a)}} \Theta(f, g) = 2 \ln \frac{1 + \sigma_0}{1 - \sigma_0} + 4\sigma_0 a_0$$

On applique (4.3.1) , (4.2.3) dans l'inégalité (4.3.6) , on trouve

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\phi_T)^n(\varphi)}{h} - 1 \right\|_{\infty} &\leq e^{\Theta_+((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1 \leq e^{\Theta((\phi_T)^n(\varphi), h)} - 1 \\ &\leq e^{\Lambda^{(n-1)} \Theta((\phi_T)(\varphi), h)} - 1 \leq e^{\Lambda^{(n-1)} \Delta} - 1 \\ &= \int_0^{\Lambda^{(n-1)} \Delta} e^{\varepsilon} d\varepsilon \leq \Lambda^{(n-1)} \Delta e^{\Lambda^{(n-1)} \Delta} \leq \Lambda^{(n-1)} \Delta e^{\Lambda^{-1} \Delta}, \end{aligned}$$

où $\Delta = \sup_{(f, g) \in C_{\sigma(2a)}} \Theta(f, g) = 2 \ln \frac{1 + \sigma_0}{1 - \sigma_0} + 4\sigma_0 a_0$ et $\Lambda = \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) < 1$.

De (4.2.4) et (4.3.4) on déduit que pour tout $f \in L^1(m)$ et pour tout $g \in C_a$:

$$\begin{aligned}
 (4.3.7) \quad C_n(f, g) &= \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \\
 &\leq \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta} \|h\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_\infty \\
 &\leq \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2.a_0} \|h\|_1 \|f\|_1 \|g\|_1 \\
 &= \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2.a_0} \|f\|_1 \|g\|_1.
 \end{aligned}$$

Soit maintenant $g \in C(I)$, $g \geq 0$ et g dérivable par morceaux (i.e., Il existe une partition finie $\{J_k\}_{1 \leq k \leq p}$ tel que g est dérivable sur chaque élément de la partition).

On note : $\|g'\|_\infty = \max \left\{ \sup_{x \in I} g'_+(x), \sup_{x \in I} g'_-(x) \right\} < \infty$, où $g'_+(x)$ (resp : $g'_-(x)$) est la dérivé à droite (resp : à gauche) en x .

Posons $g_\rho = g + \rho h$, où ρ est une constante dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour montrer que l'inégalité (4.3.7) reste vrai pour $g \in C(I)$, $g \geq 0$ et g dérivable par morceaux, il suffit de montrer que $g_\rho \in C_a$ en trouvant un ρ_0 convenable.

Calcul de ρ_0 .

$\forall x, y \in I$, $x > y$, on a :

$$\frac{g_\rho(x)}{g_\rho(y)} = \frac{g(x) + \rho h(x)}{g(y) + \rho h(y)} \leq \frac{g(x) + \rho e^{\sigma_0 a_0(x-y)} h(y)}{g(y) + \rho h(y)}.$$

Notons $\psi(x, y) = g(x) + \rho e^{\sigma_0 a_0(x-y)} h(y)$, alors

$$(4.3.8) \quad \frac{g_\rho(x)}{g_\rho(y)} \leq e^{\ln \left(\frac{\psi(x, y)}{g_\rho(y)} \right)} = e^{\ln \psi(x, y) - \ln g_\rho(y)}.$$

On a :

$$\frac{d}{d\varepsilon} (\psi(\varepsilon, y)) = g'(\varepsilon) + \rho \sigma_0 a_0 e^{\sigma_0 a_0(\varepsilon-y)} h(y).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \ln \psi(x, y) - \ln g_\rho(y) &= \int_y^x \frac{g'(\varepsilon) + \rho \sigma_0 a_0 e^{\sigma_0 a_0(\varepsilon-y)} h(y)}{\psi(\varepsilon, y)} d\varepsilon \\
 &\leq \int_y^x \frac{|g'(\varepsilon) + \rho \sigma_0 a_0 e^{\sigma_0 a_0(\varepsilon-y)} h(y)|}{\psi(\varepsilon, y)} d\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Comme

$$\psi(\varepsilon, y) = g(\varepsilon) + \rho e^{\sigma_0 a_0(\varepsilon-y)} h(y) \geq \rho e^{\sigma_0 a_0(\varepsilon-y)} h(y),$$

alors

$$\begin{aligned}
 \ln \psi(x, y) - \ln g_\rho(y) &\leq \int_y^x \frac{|g'(x) + \rho \sigma_0 a_0 e^{\sigma_0 a_0 (\varepsilon - y)} h(y)|}{\psi(\varepsilon, y)} d\varepsilon \\
 &\leq \int_y^x \frac{|g'(x) + \rho \sigma_0 a_0 e^{\sigma_0 a_0 (\varepsilon - y)} h(y)|}{\rho e^{\sigma_0 a_0 (\varepsilon - y)} h(y)} d\varepsilon \\
 &= \int_y^x \left[\frac{|g'(x)|}{\rho e^{\sigma_0 a_0 (\varepsilon - y)} h(y)} + \sigma_0 \right] d\varepsilon \\
 &\leq \left[\frac{\|g'\|_\infty}{\rho h(y)} + \sigma_0 a_0 \right] (x - y).
 \end{aligned}$$

Il vient de (4.3.8)

$$\frac{g_\rho(x)}{g_\rho(y)} \leq e^{\left[\frac{\|g'\|_\infty}{\rho h(y)} + \sigma_0 a_0 \right] (x - y)}.$$

Par suite pour que $g_\rho \in C_{a_0}$, il suffit de prendre $\rho = \sup_{y \in I} \frac{\|g'\|_\infty}{h(y) a_0 (1 - \sigma_0)} = \frac{1}{\inf_{y \in I} h(y)} \left(\frac{\|g'\|_\infty}{a_0 (1 - \sigma_0)} \right)$.

De (4.3.7), on déduit que pour tout $g \in C(I)$, $g \geq 0$ et g dérivable par morceaux telle que $\|g'\|_\infty < \infty$, et $f \in L^1(m)$:

$$\begin{aligned}
 C_n(f, g) &= \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \\
 &= \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot (g_\rho - \rho h) \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I (g_\rho - \rho h) \, d\mu_h \right| \\
 &\leq \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g_\rho \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g_\rho \, d\mu_h \right| + \left| \int_I (f \circ T^n) \rho h \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I \rho h \, d\mu_h \right| \\
 &\leq \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \|f\|_1 [\|g_\rho\|_1 + \rho \|h\|_1] = \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \|f\|_1 [\|g_\rho\|_1 + \rho].
 \end{aligned}$$

Comme $g_\rho = g + \rho h$, on a $\|g_\rho\|_1 = \|g\|_1 + \rho$, en posant $\alpha = \frac{1}{\inf h} \frac{2}{a_0 (1 - \sigma_0)}$, il vient

$$(4.3.9) \quad C_n(f, g) \leq \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \|f\|_1 [\|g\|_1 + \alpha \|g'\|_\infty].$$

Enfin, soit $g \in C^1(I)$, alors $g = g_1 - g_2$ telle que $g_1 \geq 0$, $g_2 \geq 0$, g_1 et g_2 sont dérivables par morceaux (et on a $|g| = g_1 + g_2$), on déduit de (4.3.9) :

$$\begin{aligned}
 C_n(f, g) &= \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \\
 &\leq \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g_1 \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g_1 \, d\mu_h \right| + \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g_2 \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g_2 \, d\mu_h \right| \\
 &\leq \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \|f\|_1 [\|g_1\|_1 + \|g_2\|_1 + \alpha \|g'_1\|_\infty + \alpha \|g'_2\|_\infty] \\
 &= \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \|f\|_1 [\|g\|_1 + \alpha \|g'_1\|_\infty + \alpha \|g'_2\|_\infty] \\
 &\leq \Lambda^{n-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \|f\|_1 [\|g\|_1 + 2\alpha \|g'\|_\infty]. \\
 &= \Lambda^n \left(\Lambda^{-1} \Delta \, e^{\Lambda^{-1} \Delta + 2 \cdot a_0} \right) \|f\|_1 [\|g\|_1 + 2\alpha \|g'\|_\infty].
 \end{aligned}$$

D'où, $\forall f \in L^1(m), \forall g \in C^1(I)$:

$$C_n(f, g) = \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \leq \zeta^n K \|f\|_1 (\|g\|_1 + r \|g'\|_\infty).$$

avec $\zeta = \Lambda$, $K = \Lambda^{-1} \Delta e^{\Lambda^{-1} \Delta} e^{2.a_0}$ et $r = 2\alpha$. ■

Le mélange exponentiel

Rappelons que le mélange est donné par la formule suivante :

$$\mu_h((T^{-n}A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_h(A) \cdot \mu_h(B),$$

pour tout sous-ensemble mesurable A et B de I .

D'après le Théorème 4.8. , pour tout $f \in L^1(m)$ et pour tout $g \in C^1(I)$:

$$C_n(f, g) = \left| \int_I (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu_h - \int_I f \, d\mu_h \int_I g \, d\mu_h \right| \leq \Lambda^n \left(\Lambda^{-1} \Delta e^{\Lambda^{-1} \Delta} e^{2.a_0} \right) \|f\|_1 (\|g\|_1 + 2\alpha \|g'\|_\infty)$$

où $C^1(I)$ est l'ensemble des fonctions continues et dérivables sur I .

Soient φ et ψ dans $L^\infty(m)$ avec $\int_I \varphi \, d\mu_h = \int_I \varphi \, h \, dm = 0$.

Comme $C^1(I)$ est dense dans $L^1(m)$ pour la norme $\|\cdot\|_1 = \int_I |\cdot| \, dm$, alors il existe une suite $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans $C^1(I)$ telle que :

$$\|\psi_k - \psi\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

On peut supposer que

$$(4.3.10) \quad \|\psi_k - \psi\|_1 \leq \Lambda^k$$

Calcul de $C_n(\varphi, \psi)$.

On a

$$\begin{aligned} C_n(\varphi, \psi) &= \left| \int (\varphi \circ T^n) \psi \, d\mu_h \right| \\ &= \left| \int (\varphi \circ T^n) \psi \, d\mu_h - \int (\varphi \circ T^n) \psi_k \, d\mu_h + \int (\varphi \circ T^n) \psi_k \, d\mu_h \right| \\ &= \left| \int (\varphi \circ T^n) (\psi - \psi_k) \, d\mu_h + \int (\varphi \circ T^n) \psi_k \, d\mu_h \right| \\ &\leq \int |(\varphi \circ T^n)| |\psi - \psi_k| \, d\mu_h + \left| \int (\varphi \circ T^n) \psi_k \, d\mu_h \right| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|\psi_k - \psi\|_1 + \left| \int (\varphi \circ T^n) \psi_k \, d\mu_h \right| \end{aligned}$$

D'après le Théorème 4.8. et d'après (4.3.10) , on trouve

$$C_n(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|_\infty \Lambda^k + \Lambda^n K \|\varphi\|_1 (\|\psi_k\|_1 + r \|\psi_k\|_\infty)$$

Pour $f \in L^\infty(m)$, posons $\varphi = f - \int_I f d\mu_h$ et $\psi = g \in L^\infty(m)$, donc

$$\begin{aligned} C_n(\varphi, \psi) &= \left| \int (\varphi \circ T^n) \psi d\mu_h \right| = \left| \int \left(\left(f - \int_I f d\mu_h \right) \circ T^n \right) g d\mu_h \right| \\ &= \left| \int f \circ T^n g d\mu_h - \int_I \left(\int_I f d\mu_h \right) g d\mu_h \right| \\ &= \left| \int f \circ T^n g d\mu_h - \int_I f d\mu_h \int_I g d\mu_h \right| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^k \Lambda^k + \Lambda^n \left(\Lambda^{-1} \Delta e^{\Lambda^{-1} \Delta} e^{2.a_0} \right) \|\varphi\|_1 (\|\psi_k\|_1 + 2\alpha \|\psi'_k\|_\infty) \end{aligned}$$

D'où, pour tout f et g dans $L^\infty(m)$, on a $C_n(f, g)$ converge exponentiellement vers 0.

Par conséquent, on obtient un mélange exponentiel, ce qui signifie (Voir : paragraphe (1.1)), que pour tout sous-ensemble mesurable A , $T^n(A)$ devient, plus rapidement, asymptotiquement indépendant de tout autre sous-ensemble B . En particulier, le système (I, T, μ_h) est ergodique.

Conclusion générale

L'importance de la propriété stochastique, qui est la décroissance des corrélations, a fait l'objet de plusieurs recherches actuelles dans le domaine des systèmes dynamiques chaotiques. Dans notre travail, on a présenté deux méthodes analytiques, qui aboutissent à un résultat assez suffisant à propos de cette propriété stochastique concernant des classes importantes des systèmes hyperboliques. Dans la littérature, il existe plusieurs types de la décroissance des corrélations : Exponentielle, Strictement Exponentielle, Polynomiale,...etc. Dans notre travail, on a rencontré une décroissance des corrélations de type exponentielle, cela en utilisant un outil principal assez fréquenté, qui est l'opérateur de transfert de Perron-Frobenius. Plusieurs auteurs de notre temps, se sont mis au travail sur ce genre de recherches.

Le type "Exponentielle" de la décroissance des corrélations, a été complètement étudié en 1998, dans les travaux de Lai-Sang Young [23]. Une année après, le même auteur dans [22] a présenté une étude, basée sur le *Temps de Retour* et *L'ensemble De Référence*, et sans utiliser l'opérateur de Perron-Frobenius a pu détecter, dans le cadre des systèmes hyperboliques, plusieurs types de la décroissance des corrélations. En donnant un exemple de transformations dilatantes avec des points fixes neutres, il montre une décroissance polynomiale des corrélations. Principalement, dans ses travaux, le type de la décroissance des corrélations d'un système hyperbolique est déterminé par le temps de retour.

On peut aussi avoir des résultats stochastiques sur des systèmes même qui ne représentent pas la propriété de " *l'hyperbolicité* " et cela en utilisant une méthode appelée " *Méthodes des schémas inclus* ". Citons les travaux de Y.Pessin et S.Senti [17], où ils montrent l'état d'équilibre d'une classes de transformations dérivables sur l'intervalle, la notion de l'état d'équilibre est capitale en physique statistique.

En perspectives, il est intéressant de déterminer des classes de ce type de transformations, en trouvant des conditions suffisantes (vérifiées par cette classe de transformations) pour avoir l'unicité de la valeur propre 1 de l'opérateur de Perron-Frobenius sur le cercle unité et que cette valeur propre soit simple, en se basant sur les résultat du Théorème de Ionesco-Tulcea et Marinescu étudié dans le chapitre 3, voir par exemple les travaux de F.Paccaut [16]. Cela permet d'avoir la décroissance des corrélations et le mélange.

On remarque aussi que l'ensemble des fonctions, dont le nombre de points de discontinuités est fini, est stable par l'opérateur de Perron-Frobenius associé à une transformation uniformément dilatante de la classe D définie dans le Chapitre 2. Un bon choix de la norme

sur cet espace (Qui le rend complet et vérifie l'inégalité de Lasota-Yorke) nous permettra d'avoir une mesure invariante avec plus de régularité sur sa densité.

Annexe

Proposition

Si la mesure de Lebesgue m est T -invariante telle que $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ soit continue et injective, alors T est la fonction identique sur $[0, 1]$

Preuve. supposons que $T \neq id$ donc il existe $x_1 \in I$ tel que $T(x_1) \leq x_1$ (ou bien $T(x_1) \geq x_1$), et d'après le théorème du point fixe, il existe aussi un point x_2 de I tel que $T(x_2) = x_2$ supposons donc que $T(x_1) \leq x_2$ et posons $A = [T(x_1), x_2]$ donc $T^{-1}(A) = [T^{-1}(T(x_1)), T^{-1}(x_2)] = [x_1, x_2]$, car T est injective et continue, et on a $m(A) \neq m(T^{-1}(A))$. ■

Preuve des inégalités (1.2.1) et (1.2.2)

(i) Soit $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$ une subdivision finie de I , alors

$\exists l, m \in \mathbb{N}$ avec $1 < l < m < n$ tels que : $(a_i)_{0 \leq i < l} \subset [0, a[$, $(a_i)_{l \leq i \leq m} \subset [a, b]$ et $(a_i)_{m < i \leq n} \subset]b, 1]$
donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) \cdot 1_{[a,b]}(a_{i+1}) - f(a_i) \cdot 1_{[a,b]}(a_i)| &= |f(a_l) - 0| + \sum_{i=l}^{m-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |0 - f(a_m)| \\ &\leq |f(a)| + |f(a_l) - f(a)| + \sum_{i=l}^{m-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(b) - f(a_m)| \\ &\leq |f(a)| + v_*(f, [a, b]) + |f(b)| \end{aligned}$$

On passe au supremum sur l'ensemble des subdivision de I ,

$$\Rightarrow v_*(f \cdot 1_{[a,b]}) \leq v_*(f, [a, b]) + |f(a)| + |f(b)|$$

donc

(ii) $\forall x \in [a, b]$ on a :

$$\begin{aligned} [|f(a)| - |f(x)|] + [|f(b)| - |f(x)|] &\leq |f(a) - f(x)| + |f(b) - f(x)| \\ &\leq v_*(f, [a, b]) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(a)| + |f(b)| \leq v_*(f, [a, b]) + 2|f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow |f(a)| + |f(b)| \leq v_*(f, [a, b]) + 2 \inf_{x \in [a, b]} (|f(x)|)$$

Preuve des inégalités (1.4.1) et (1.4.2)

(i) Soit $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$ une subdivision finie de I , alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_{i+1}) - (fg)(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_{i+1}) - f(a_{i+1})g(a_i) + f(a_{i+1})g(a_i) - (fg)(a_i)| \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_{i+1}) - (fg)(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_{i+1}) - f(a_{i+1})g(a_i)| + |f(a_{i+1})g(a_i) - (fg)(a_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1})| |g(a_{i+1}) - g(a_i)| + \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_i)| |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_{i+1}) - g(a_i)| + \|g\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \|f\|_\infty v_*(g) + \|g\|_\infty v_*(f) \\ &\Rightarrow v_*(fg) \leq \|f\|_\infty v_*(g) + \|g\|_\infty v_*(f) \\ &\Rightarrow v(fg) \leq v_*(fg) \leq \|f\|_\infty v_*(g) + \|g\|_\infty v_*(f) \end{aligned}$$

d'où

$$v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f)$$

(ii) On a pour tout x et y dans I

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq v_*(f)$$

$$\Rightarrow \int_I |f(x)| dy - \int_I |f(y)| dy \leq \int_I v_*(f) dy$$

$$\Rightarrow |f(x)| - \|f\|_1 \leq v_*(f)$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq v_*(f) + \|f\|_1$$

Comme pour tout application h telle que $h = f \cdot m - p.p$, on a :

$$\|f\|_{\infty} = \|h\|_{\infty} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \|h\|_1$$

donc

$$\Rightarrow \|f\|_{\infty} \leq v_*(h) + \|f\|_1$$

d'où

$$\|f\|_{\infty} \leq v(f) + \|f\|_1 = \|f\|_v$$

Théorème de Lebesgue [5]

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions dans $L^1(m)$. On suppose que

(i) f_n converge m -presque partout sur I vers une fonction f .

(ii) Il existe une fonction $g \in L^1(m)$ telle que pour chaque n : $f_n(x) \leq g(x)$ m -presque tout x dans I .

Alors, $f \in L^1(m)$ et $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Théorème de représentation de Riesz [15]

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni de norme $\|\cdot\|$.

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue et de norme $|\varphi|$.

Alors il existe une mesure de Borel complexe μ telle que:

$$\forall f \in C(I) : \varphi(f) = \int f d\mu, \text{ et } |\mu|(I) = |\varphi|$$

Lemme de F.Riesz[5]

Soit E un espace vectoriel munie d'une norme $\|\cdot\|$, et soit $M \subset E$ un sous-espace fermé tel que $M \neq E$. Alors, $\forall \varepsilon > 0 \exists u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|u - x\| \geq 1 - \varepsilon \forall x \in M$.

Preuve de l'inégalité (4.1.1)

Posons

$$f(x) = \frac{e^x(\mu - \lambda)}{(e^x + \lambda)(e^x + \mu)},$$

avec $\mu \geq \lambda$ et $x \in [0, +\infty[$.

Etude de la monotonie de f sur $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{e^x (\mu - \lambda) (e^x + \lambda) (e^x + \mu) - e^x (\mu - \lambda) e^x (e^x + \mu) - e^x (\mu - \lambda) e^x (e^x + \lambda)}{[(e^x + \lambda) (e^x + \mu)]^2} \\
 &= \frac{e^x (\mu - \lambda) [(e^x + \lambda) (e^x + \mu) - e^x (e^x + \mu) - e^x (e^x + \lambda)]}{[(e^x + \lambda) (e^x + \mu)]^2} \\
 &= \frac{e^x (\mu - \lambda) [e^{2x} + e^x (\lambda + \mu) + \lambda\mu - e^{2x} - e^x \mu - e^{2x} - e^x \lambda]}{[(e^x + \lambda) (e^x + \mu)]^2} \\
 &= \frac{e^x (\mu - \lambda) [\lambda\mu - e^{2x}]}{[(e^x + \lambda) (e^x + \mu)]^2}.
 \end{aligned}$$

Donc f est décroissante à l'infini.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{e^x (\mu - \lambda) [\lambda\mu - e^{2x}]}{[(e^x + \lambda) (e^x + \mu)]^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^{2x} = \lambda\mu \\
 &\Leftrightarrow x = \ln (\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} = x_0
 \end{aligned}$$

Par suite, x_0 est la seule racine de l'équation $f'(x) = 0$, alors $f(x_0) = \sup_{x \in [0, +\infty[} f(x)$.

D'où

$$\begin{aligned}
 f(x) &\leq f(x_0) = \frac{(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} (\mu - \lambda)}{\left((\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} + \lambda\right) \left((\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} + \mu\right)} = \frac{(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \mu}{\left((\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} + \lambda\right) \left((\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} + \mu\right)} \\
 &= \frac{(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{\left((\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} + \lambda\right) \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{(\lambda\mu)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Théorème d'Ascoli (Voir [5])

Soit M une partie bornée de $C(I)$.

On suppose que M est équicontinue sur I i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in C(I).$$

Alors, M est relativement compact dans $C(I)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Bibliographie

- [1] J-M.ARNAUDIES. *L'intégrale de Lebesgue sur la droite*. Vuibert.1997
- [2] V.BALADI. *Positive transfer operators and decay of correlations*. World Scientific. 2000.
- [3] T.BEDFORD, M.KEANE and C.SERIES. *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*. Oxford University Press. 1991.
- [4] G.BIRKHOFF. *Lattice Theory*, 25 3rd ed, American Mathematical Society Colloquium.1967.
- [5] H.BREZIS. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et application* .Masson.1983.
- [6] A.BROISE. *Aspects stochastiques de certains systemes dynamiques : Transformations dilatantes de l'intervalle, fractions continues multidimensionnelles*. Thèse de l'Université de Rennes 1. 1994.
- [7] CHOQUET . *Cours d'analyse* . Masson, 1973.
- [8] N.DUNFORD, J.SCHWARTZ. *Linear operators. PartI.General theory*. John Wiley & Sons, Inc., NewYork,1988.
- [9] P.GORA, B.SCHMITT. *Un exemple de transformation dilatante et C^1 par morceaux de l'intervalle, sans probabilité absolument continue invariante*. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 9 (1989), 101–113.
- [10] G. KELLER. *Propriétés ergodiques des endomorphismes dilatants C^2 par morceaux des régions bornées du plan*. Thèse de l'Université de Rennes.1979.
- [11] A.I. KHINCHIN. *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, Dover, 1949.

- [12] A.LASOTA, J.YORKE. *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. Trans. Amer. Math. Soc. Vol 186, 481– 488, 1973.*
- [13] C.LIVERANI. *Decay of correlations. Ann. of Math. (2) 142 239-301, 1995.*
- [14] R.MANE . *Ergodic Theory and differentiable Dynamics. Springer-Verlag, 1987.*
- [15] C.M.MARLE . *Theorie de la mesure et Probabilité. Hermann,1974.*
- [16] F.PACCAUT. *Propriétés Statistiques De Systèmes Dynamiques Non Markoviens. Thèse de l'université de Bourgogne. 2000.*
- [17] Y.PESSIN, S.SENTI. *Thermodynamical Formalism Associated With Inducing Schemes For One-Dimensional Maps. arXiv: math.DS/0511599 v1. 2005.*
- [18] ROBERT B. ASH. *Measure, Integration, and Functional Analysis. Academic Press, New York, 1972.*
- [19] W.RUDIN. *Real and Complex Analysis, McGraw-Hill,1974.*
- [20] B. SAUSSOL. *Etude statistique de systèmes dynamiques dilatants. Thèse de l'Université de Toulon et du var. 1998.*
- [21] P.WALTERS. *An Introduction to Ergodic Theory. Springer, New York, 1982.*
- [22] L-S YOUNG. *Recurrence Time And Rates Of Mixing. Israel Jornal Of Mathematics. 110. 153–188. 1999.*
- [23] L-S YOUNG. *Statistical Properties Of Dynamical Systems With Some Hyperbolicity. Ann. Math. 147. 585-650. 1998.*