

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**HOUARI BOUMEDIENE**



**FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES**  
**DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Mémoire

Présente pour l'obtention du diplôme de MAGISTER  
EN : MATHÉMATIQUES

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE (M.G)

Par : BENKACI ALI Zaina

Sujet

**Nombre de domination double et nombre domatique double  
dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset**

Soutenu le 09 /10/2007, devant le Jury compose de :

H.AIT HADDADENE, Professeur à l'USTHB.

Président.

I. BOUCHEMAKH, M.C à l'U.S.T.H.B.

Directrice de mémoire.

M.AIDER, Professeur à l'USTHB

Examineur.

A.BERRACHEDI, Professeur à l'USTHB

Examineur.

# Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	2
CHAPITRE 1 : Définitions et notations	
1.1 Concept du poset et notation.....	4
1.2 Exemple de posets classiques.....	7
1.3 Opérations dans les posets.....	8
1.4 Concepts généraux sur les graphes.....	12
1.5 Concepts généraux sur les hypergraphes.....	14
1.6 Hypergraphe des intervalles d'un poset .....	16
1.7 Notion de k-domination et k-domatique .....	17
CHAPITRE 2 : Nombre de domination double	
2.1 Introduction.....	18
2.2 Bornes du nombre de domination double.....	19
2.3 Domination double dans les arbres .....	26
2.4 Domination double dans les cactus.....	32
2.5 Domination double exacte dans les graphes.....	33
2.6 Nombre de domination double dans $G(P^*Q)$ .....	37
CHAPITRE 3 : Nombre domatique double	
3.1 Introduction .....	42
3.2 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum.....	43
3.3 Nombre domatique double de $G(P^*Q)$ .....	44
3.4 Nombre domatique double du graphe représentatif des intervalles de $G(C_{n1} \times C_{n2})_{\ell, u}$ .....	48
Conclusion Générale.....	55
Références.....	56

## INTRODUCTION GENERALE

Le travail du mathématicien appliqué est de modéliser un problème concret afin de mieux le comprendre et, éventuellement, le résoudre. Dans ce contexte, les graphes sont un moyen de modélisation imagée de divers problèmes, de nature combinatoire, à l'aide de sommets et d'arêtes reliant ces sommets.

La théorie des graphes ne cesse de se développer et de susciter l'intérêt tant du mathématicien pur, de l'ingénieur, de l'économiste, de l'organisateur et bien d'autres.

Le concept de la domination est l'un des problèmes de cette théorie. Elle trouve son origine au dix-neuvième siècle avec les jeux d'échecs. Le principe est de couvrir, l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. En 1862, De Jaenisch [35] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur un échiquier de tel sorte que chaque case est soit occupée par une reine soit peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier de  $5 \times 5$ , le nombre minimum est de 3 et pour un échiquier de  $8 \times 8$  le nombre minimum est de 5. Le nombre minimum dans un échiquier de  $n \times n$  demeure ouvert jusqu'à aujourd'hui (voir [35]). La domination devient un domaine théorique qu'en 1958 avec Claude Berge où cet invariant est appelé "*le nombre de stabilité externe*". Plus tard, en 1977, Cockayne et Hedetniemi [29] publient un article sur la domination et depuis, elle est devenue un problème très florissant.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets ou tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le problème de la recherche d'un ensemble dominant de taille minimale est un problème NP-complet [39].

Plusieurs types de domination sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants. Citons par exemple, un ensemble dominant stable est un ensemble dominant qui induit un stable. Si on impose à ce que tout sommet de  $G$  soit dominé au moins deux fois, on a la domination double, et si le sous graphe induit par un ensemble dominant contient au moins un couplage parfait alors cet ensemble est dit dominant couplé.

L'un des paramètres importants de la domination dont l'étude a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs est le nombre domatique. Il a été introduit pour la première fois par Cockayne et Hedetniemi [33] en 1977. Le nombre domatique est la taille maximale d'une partition des sommets d'un graphe en ensembles dominants.

Le concept du nombre domatique a été généralisé en introduisant le nombre  $k$ -dominant et le nombre  $k$ -domatique dans les graphes par Harary et Haynes [41]. Si  $k = 2$ , on parlera du nombre dominant double et le nombre domatique double.

Nous nous intéressons dans ce travail à deux types de domination : le nombre de domination double et le nombre domatique double dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset  $P$ , noté  $G(P)$ . Les sommets de  $G(P)$  sont les points de  $P$  et deux sommets  $x, y$  sont adjacents si et seulement si il existe un intervalle contenant  $x$  et  $y$ .

Notre travail est développé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux notions de base nécessaires pour la suite de notre thèse. Nous abordons les concepts de posets et d'hypergraphes ainsi que la notion du graphe représentatif des intervalles d'un poset.

Dans le chapitre 2, nous citons les différents résultats établis dans la littérature sur le nombre de domination double. On déterminera ensuite le nombre de domination double du graphe représentatif d'un poset construit à partir d'une opération qui est soit la somme linéaire soit la somme directe de deux autres posets et nous terminons ce chapitre par des valeurs exactes sur le nombre de domination double dans le cas de  $G(C_{n1} \times C_{n2})_{l,u}$ .

Dans le chapitre 3, nous mentionnerons deux résultats dus à Harary et Haynes [41] concernant le nombre domatique double dans les graphes en général. Il est important de signaler que la notion du nombre de domination double ne fût étudiée que par Harary et Haynes. Nous déterminons le nombre domatique double du graphe représentatif des intervalles de la somme directe et de la somme linéaire de deux posets. Le chapitre s'achève par une étude complète du nombre domatique double dans le graphe  $G(C_{n1} \times C_{n2})_{l,u}$ .

# Chapitre 1

## Définitions et notations

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions de base et les notations nécessaires pour le développement de cette thèse.

### 1.1 Concept de posets et notations

Un ensemble partiellement ordonné  $(P, \leq)$ , en abrégé *poset* est un ensemble  $P$  où la relation  $\leq$  est réflexive, antisymétrique et transitive. On note  $P$  brièvement au lieu de  $(P, \leq)$  s'il n'y a aucun risque d'ambiguïté, et on ne s'intéresse qu'au cas où  $P$  est fini.

Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $P$ , Si  $u \leq v$  et  $u \neq v$ , on écrit alors  $u < v$ . Un élément  $v$  de  $P$  *couvre*  $u$  dans  $P$ , et on note  $u \prec v$ , si  $u < v$  et il n'existe pas  $w \in P$  tel que  $u \leq w < v$ .

La notion de couverture permet d'obtenir une représentation graphique sous forme d'un diagramme appelé *diagramme de Hasse* ou *graphe de couverture* de  $P$ . La représentation de ce dernier se fait comme suit:

A chacun des éléments de  $P$  est associé de façon injective, un point du plan. Si un élément  $v$  couvre  $u$  dans  $P$  alors  $u$  sera lié au point  $v$  par un segment de droite ascendant.

**Exemple**

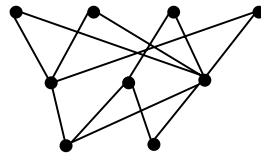


Figure 1

Deux éléments  $u$  et  $v$  de  $P$  seront dits comparables si  $u \leq v$  ou  $v \leq u$ .

Le dual de  $P$ , note  $P^*$ , est un poset ayant les mêmes sommets que  $P$  et ordonné par la relation «  $\leq_{P^*}$  » définie par:

$$u \leq_{P^*} v \iff v \leq_P u.$$

Soit  $A$  un sous ensemble de  $P$ .

Un minorant (resp. majorant) de  $A$  est un élément  $u$  de  $P$  tel que  $u \leq a$  (resp.  $u \geq a$ ), pour tout  $a \in A$ .

La borne inférieure (resp. supérieure) de  $A$  est le plus grand (resp. petit) des minorants (resp. majorants) de  $A$ .

Un poset dans lequel toute paire d'éléments possède une borne inférieure et une borne supérieure est appelé *un treillis*.

Un sous poset induit  $P'$  d'un poset  $P$  est un poset où l'ensemble de ses sommets est un sous ensemble de  $P$  et deux sommets sont comparable dans  $P'$  s'ils le sont dans  $P$ .

**Exemple**

Le poset illustré dans la Figure 2-a) est un treillis mais celui de la Figure 2-b) ne l'est pas.

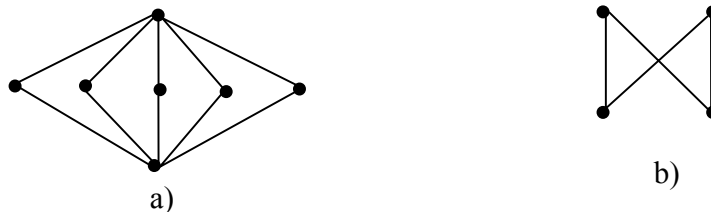


Figure 2

Un intervalle de  $P$  est un sous ensemble  $I$ , noté  $[p, q]$ , de la forme  $\{v \in P; p \leq v \leq q\}$ . Si en plus  $p$  est un élément minimal et  $q$  est un élément maximal, alors  $I$  est dit intervalle maximal.

Deux posets  $P$  et  $Q$  sont dits isomorphes, et on note  $P \cong Q$ , s'il existe une application bijective  $\varphi$  de  $P$  dans  $Q$  vérifiant  $x \leq_P y$  si et seulement si  $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ .

Une fonction de rang est une fonction  $r$  définie de  $P$  dans  $\mathbb{N}$  vérifiant:  $r(u)=0$  si  $u$  est un élément minimal et  $r(v)=r(u)+1$  si  $u < v$ .

Si une telle fonction existe,  $P$  sera dit *rangé* ou *gradué* et la valeur  $r(P)=\max \{r(x), x \in P\}$  représente son rang.

Si  $P$  est rangé, on définit son niveau  $i$  par :  $N_i(P)=\{u \in P : r(u)=i\}$ .

Le nombre  $W_i(P)=|N_i(P)|$  est appelé  $i^{\text{ème}}$  nombre de Whitney,  $\forall i=0 \dots r(P)$ .

### Exemple

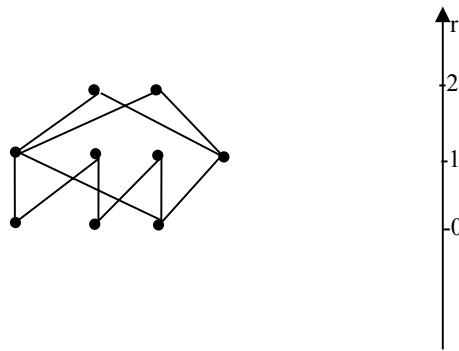


Figure 3

Soit  $(P, \leq)$  un poset rangé. Pour un sous ensemble  $A$  du niveau  $N_i$ , on définit l'ombre supérieure (resp. inférieure) de  $A$  par l'ensemble  $R^+(A)=\{x \in N_{i+1} : x > a, \text{ pour un certain } a \in A\}$ , (resp.  $R^-(A)=\{x \in N_{i-1} : a > x, \text{ pour un certain } a \in A\}$ ).

### Exemple

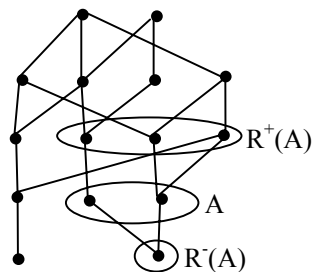


Figure 4

Soit  $C$  un sous ensemble de  $P$ . On dit que  $C$  est une chaîne de  $P$  si pour toute paire

d'éléments  $c_1, c_2$  de  $C$  on a  $c_1 \leq c_2$ . Une chaîne est notée par  $C = (c_0 < c_1 < \dots < c_k)$ . L'entier  $k$  représente sa longueur. Elle est dite symétrique si  $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$ .

Soit  $P$  un poset rangé. Notons par  $P_{\ell,u}$  le sous poset induit par l'union de niveaux consécutifs  $N_\ell \cup \dots \cup N_u$  de  $P$  où  $\ell$  et  $u$  sont deux entiers tels que  $0 \leq \ell \leq u \leq r(P)$ .

## 1.2 Exemple de posets classiques

### 1.2.1 Treillis booléen

Soit  $B_n$  le poset défini par  $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$  où la relation d'ordre est telle que  $a' = (a_1, a_2, \dots, a_n) \leq b' = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  si et seulement si  $a_i \leq b_i \quad \forall i=1, \dots, n$ .  $B_n$  est appelé *treillis booléen*.

#### Exemple

Pour  $n=3$ , la figure ci-dessous représente le treillis booléen  $B_3$ .

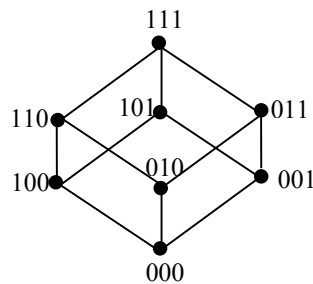


Figure 5

Il est clair que  $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$  et  $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$  sont isomorphes. Il suffit de considérer l'application qui associe à  $n$ -uples  $a \in \{0,1\}^n$  l'image  $\varphi(a) = \{i: a_i = 1\}$ . Ainsi, il est possible de définir le treillis Booléen comme étant le treillis de tous les sous ensembles de  $\{1, \dots, n\}$  ordonné par inclusion.

L'application qui a un élément de  $B_n$  associe sa cardinalité représente une fonction de rang sur  $B_n$ .

### 1.2.2 Le treillis $S(k_1, \dots, k_n)$

On définit le treillis  $S(k_1, \dots, k_n)$  comme étant l'ensemble de tous les  $n$ -uples  $a = (a_1, \dots, a_n)$  tels que  $0 \leq a_i \leq k_i$ , pour tout  $i$ , et la relation d'ordre est telle que:  $a' = (a_1, \dots, a_n) \leq b' = (b_1, \dots, b_n)$  si et seulement si  $a_i \leq b_i$  pour tout  $i$ .

En particulier, le treillis Booléen  $B_n$  est isomorphe à  $S(1, \dots, 1)$ .

L'isomorphisme entre  $S(k_1, \dots, k_n)$  et  $\prod_{i=1}^n (0 < 1 < \dots < k_i)$  confère au treillis  $S(k_1, \dots, k_n)$  le nom de produit de chaînes.

### Exemple

La Figure 6 représente le treillis  $S(3, 5)$

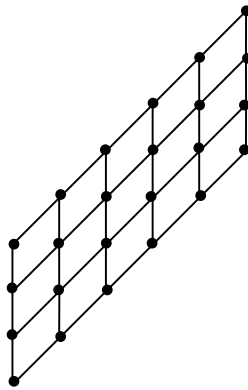


Figure 6

$S(k_1, \dots, k_n)$  est rangé par la fonction de rang  $r(a') = a_1 + \dots + a_n$  pour  $a' = (a_1, \dots, a_n)$  et son rang vaut  $k_1 + \dots + k_n$ . Les éléments du niveau  $i$  sont tous les  $n$ -uples dont la somme des composantes est égale à  $i$ .

## 1.3 Opérations dans les posets

Nous définissons dans cette partie trois opérations sur les posets, à savoir la somme directe, la somme linéaire, et le produit direct de deux posets  $P$  et  $Q$  où plusieurs résultats ont été établis pour différents invariants [10],[15],[23], [24] ,[53].

### 1.3.1 Somme directe

La *somme directe* ou bien union disjointe de deux posets  $P$  et  $Q$  est le poset " $P+Q$ " sur l'union  $P \cup Q$  tel que  $x \leq y$  dans  $P+Q$  si  $x, y \in P$  et  $x \leq_P y$  ou  $x, y \in Q$  et  $x \leq_Q y$ .

Notation: la somme directe de  $P$  avec lui même  $n$  fois est noté  $nP$ .

### Exemple

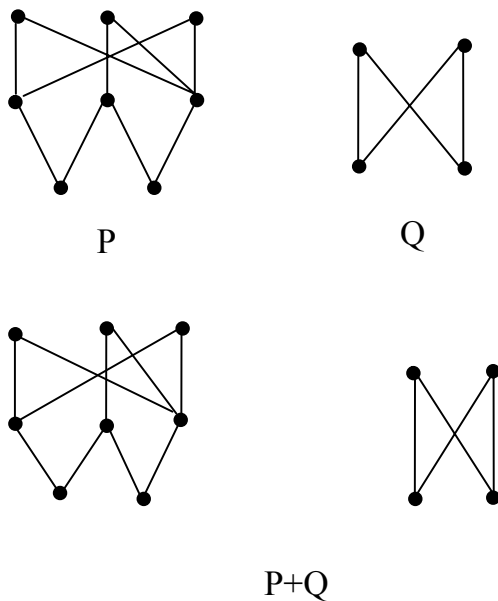


Figure 7

### 1.3.2 Somme linéaire

La *somme linéaire* de deux posets  $P$  et  $Q$  est le poset  $P \oplus Q$  sur l'union  $P \cup Q$  tel que  $x \leq y$  dans  $P \oplus Q$  si  $x, y \in Q$  et  $x \leq_Q y$  ou bien  $x, y \in P$  et  $x \leq_P y$  ou bien  $x \in P$  et  $y \in Q$ . Le diagramme de Hasse de  $P \oplus Q$  se fait en traçant celui de  $P$  puis au dessus de lui celui de  $Q$  et on relie tout sommet maximal de  $P$  à tout sommet minimal de  $Q$ .

### Remarque

Une chaîne à  $n$  sommets est isomorphe à  $1 \oplus \dots \oplus 1$   $n$  fois.

### Exemple

En considérant les posets de la Figure 1, nous obtenons le poset suivant :

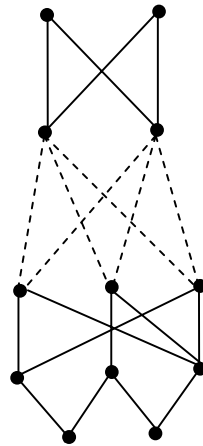


Figure 8

### 1.3.2.1 Poset série-parallèle

Un *poset série parallèle* est un poset qui peut être construit à partir des singletons en utilisant seulement la somme disjointe (+) et la somme directe ou bien la somme linéaire ( $\oplus$ ). Autrement dit P peut être décomposé en singletons en n'utilisant que ces deux opérations.

Les posets série-parallèles sont caractérisés par le fait de ne pas contenir de sous-poset isomorphe à  $N \times N$  où N représente un sous ensemble à quatre éléments  $\{x, y, z, t\}$  tels que les seules relations de comparabilité sont :  $x < y > z < t$  [53].

#### Exemple

Le poset illustré dans la figure-4-est un poset série parallèle puisqu'il se décompose comme:

$$(1+1+1) \oplus ((1 \oplus 1) + ((1+1) \oplus (1+1)) + (1 \oplus 1)).$$

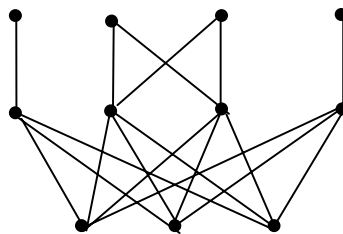


Figure 9

$Z$  est un zig-zag si  $Z$  est défini sur les sommets  $p_1, \dots, p_q$  où  $p_1 < p_2 > p_3 < p_4 > \dots > p_{q-1} > p_q$  et il n'existe pas d'arêtes entre deux comparabilités.

Un poset connexe  $P$  est un poset dont toute paire d'éléments  $a, a'$  de  $P$  il existe un zig-zag reliant  $a$  et  $a'$ .

### 1.3.2.2 Remarque

Si  $P$  est connexe, alors chaque élément maximal est au dessus de chaque élément minimal de  $P$ , car s'il existe un plus court "zig-zag" joignant un élément maximal  $x$  à un élément minimal  $y : x = p_0 > p_1 < \dots > p_k = y$  cela contredit le fait que  $P$  ne contient pas de sous-poset isomorphe à  $N$  et par conséquent  $x > y$ .

### 1.3.3 Produit direct

Le produit direct ou cartésien de deux posets  $P$  et  $Q$  est le poset  $P \times Q$  sur l'ensemble  $\{(x, y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$  tel que  $(x, y) \leq (x', y')$  dans  $P \times Q$  ssi  $x \leq_P x'$  et  $y \leq_Q y'$ .

Notation: le produit de  $P$  avec lui même  $n$  fois est noté par  $P^n$ .

Le diagramme de Hasse de  $P \times Q$  se fait en traçant des copies de  $P$  autant qu'il y'a de sommets dans  $Q$ . Deux sommets dans deux copies différentes sont liés dans  $P \times Q$  si les sommets correspondants dans  $Q$  sont liés.

### Exemple

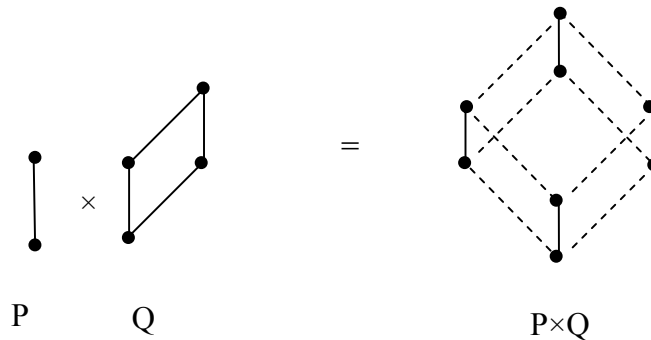


Figure 10

## 1.4 Concepts généraux sur les graphes

### 1.4.1 Définitions

Un *graphe*  $G = (V, E)$  est la donnée de deux ensembles : Un ensemble fini non vide  $V$  de  $n$  éléments appelé *sommets* de  $G$  et un ensemble fini  $E$  d'une famille de  $m$  paires d'éléments de  $V$ , appelées arêtes de  $G$ .

Deux sommets  $u$  et  $v$  constituant une arête  $e = (u, v)$ , noté aussi  $uv$ , de  $G$  sont appelés *extrémités* de l'arête  $e$ . On dit aussi que les sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents*.

L'ensemble des sommets adjacents à un sommet  $v$  de  $G$  est appelé *voisinage* ou *ensemble des voisins de  $v$* , noté  $N(v)$ . L'ensemble  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$  est dit *voisinage fermé de  $v$* . Une arête dont les deux extrémités sont confondues est dite *boucle*. Le *degré* d'un sommet  $v$ , noté  $\deg_G(v)$ , est le nombre de sommets adjacents à  $v$ .

Une *chaîne*  $C$  de longueur  $p$  est une séquence finie de sommets  $v_1, \dots, v_p$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq p-1$ ,  $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_p$  sont les extrémités de la chaîne  $C$ . Une chaîne est dite *élémentaire* (resp. *simple*) si tous ses sommets sont distincts (resp. toutes les arêtes sont distinctes).

Un *cycle* de longueur  $p$  dans un graphe  $G$  est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues. Il est dit *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts.

Un sommet *isolé* est un sommet de degré zéro.

Un sommet *pendant* est un sommet de degré un et ses voisins sont appelés sommets *supports*.

On note par  $P(G)$  l'ensemble des sommets pendants (resp.  $S(G)$  l'ensemble des sommets supports) et par  $\ell(G) = |P(G)|$  (resp.  $\delta(G) = |S(G)|$ )

### 1.4.2 Quelques graphes élémentaires

Le graphe défini dans le premier paragraphe 1.4.1 est dit un *graphe simple*.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. On appelle *sous graphe* induit par  $S \subseteq V$ , le graphe

$G[S] = (S, E_S)$  ou  $E_S = \{uv \in E / u, v \in S\}$ .

Un graphe  $G$  est dit *complet* si deux sommets quelconques de  $G$  sont adjacents. Un graphe complet d'ordre  $n$  est noté  $K_n$ .

Le *graphe complémentaire* de  $G$ , noté  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  est un graphe tel que deux sommets sont adjacents dans  $\bar{G}$  si et seulement s'ils ne le sont pas dans  $G$ .

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *connexe* si pour tout sommet  $u, v$  de  $V$  il existe une chaîne joignant le sommet  $u$  au sommet  $v$ . Dans le cas contraire,  $G$  sera dit *non connexe* et pourra s'écrire comme l'union disjointe de graphes connexes appelés *composantes connexes* de  $G$ .

Un graphe  $G$  est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que  $G[V_1]$  et  $G[V_2]$  ne contiennent aucune arête. Un *graphe biparti complet* où  $|V_1| = n_1$  et  $|V_2| = n_2$  est noté  $K_{n_1, n_2}$ . Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impair [8].

Un graphe  $G$  est dit *biparti équilibré* si ses sommets peuvent être partitionnés en deux ensembles stables  $S_1$  et  $S_2$  tels que  $|S_1| = |S_2|$ .

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *régulier* si tous ses sommets ont le même degré.

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

La *couronne*  $G^*$  d'un graphe  $G$  est un graphe obtenu par une copie de  $G$  où chaque sommet de  $G$  est adjacent à un sommet pendant.

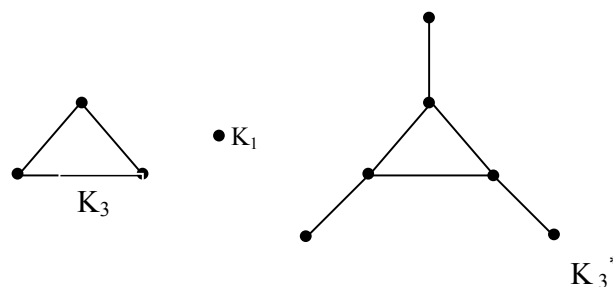


Figure 11

## 1.5 Concepts généraux sur les hypergraphes

Le concept d'hypergraphe a été introduit par Berge [8]. Nous ne nous limiterons qu'aux définitions qui nous seront utiles.

Soit  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble fini et  $\mathcal{E} = \{E_i : i \in I\}$  une famille de parties de  $X$  vérifiant pour tout  $i \in I$ ,  $E_i \neq \emptyset$  et  $\cup \{E_i : i \in I\} = X$ . Le couple  $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$  s'appelle hypergraphe de sommets  $x_1, \dots, x_n$  et d'arêtes  $E_1, \dots, E_m$ . Son rang  $r(\mathcal{H})$  est la valeur de  $\max |E_i|$ .

Un hypergraphe  $\mathcal{H}$  dont les arêtes ont au plus deux éléments est donc un graphe et il est dit simple s'ils sont de cardinalité égale à 2.

Deux sommets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{H}$  sont dits *adjacents* s'il existe une arête de  $\mathcal{E}$  qui les contienne et deux arêtes sont dites adjacentes si leur intersection est non vide.

Un hypergraphe simple sur  $X$  ou "*famille de Sperner*" est un hypergraphe  $\mathcal{H} = (X; E_1, \dots, E_m)$  où aucune arête n'en contient une autre, c'est à dire :  $E_j \subset E_i \Rightarrow i=j$ .

Le dual d'un hypergraphe  $\mathcal{H} = (X; E_1, \dots, E_m)$  est un hypergraphe  $\mathcal{H}^* = (E; X_1, \dots, X_n)$  dont les sommets  $e_1, \dots, e_m$  sont des points correspondant respectivement aux arêtes de  $\mathcal{H}$  et les arêtes sont  $X_j$  tel que  $X_j = \{e_i / i \leq m, E_i \ni x_j\}$ . ( $j=1, \dots, n$ )

### Exemple

La Figure 9 représente le dual  $\mathcal{H}^*$  de  $\mathcal{H}$ .

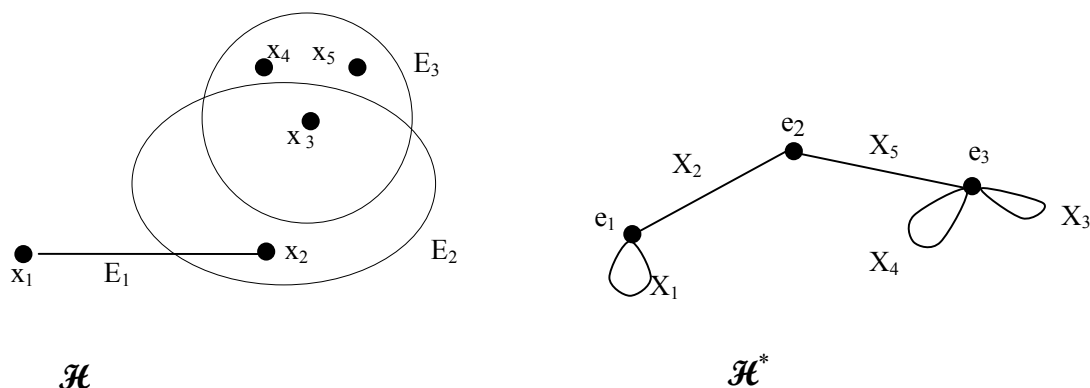


Figure 12

Le *graphe représentatif* des arêtes de l'hypergraphe  $\mathcal{H}$  est un graphe simple noté  $L(\mathcal{H})$  dont les sommets  $e_1, \dots, e_m$  représentent respectivement les ensembles  $E_1, \dots, E_m$  et deux sommets  $e_i$  et  $e_j$  sont adjacents dans  $L(\mathcal{H})$  si et seulement si  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$  pour  $i \neq j$ .

Soit  $x \in X$ . Le *degré* de  $x$ , noté  $\deg_{\mathcal{H}}(x)$ , est le nombre d'arêtes de  $\mathcal{H}$  qui contiennent  $x$  et le *codegré* de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{H}$ , noté  $\text{codeg}_{\mathcal{H}}(x, y)$ , est le nombre d'arêtes de  $\mathcal{H}$  qui contiennent  $x$  et  $y$  en même temps. Le degré maximum de  $\mathcal{H}$  est noté par:

$$\Delta(\mathcal{H}) = \max \{d_{\mathcal{H}}(x) ; x \in X\}.$$

Dans l'hypergraphe  $\mathcal{H} = (X, E)$ , un sous ensemble  $A$  (resp.  $T$ ) est appelé *ensemble stable* ou *ensemble indépendant* (resp. *recouvrement par sommets* ou *ensemble transversal*) de  $\mathcal{H}$  si chaque arête de  $\mathcal{H}$  contient au plus un sommet de  $A$  (resp. au moins un sommet de  $T$ ). Un sous ensemble  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{R}$ ) de  $E$  est appelé un *couplage* (resp. *un recouvrement par arêtes* de  $\mathcal{H}$ ) si chaque sommet de  $X$  appartient à au plus un membre de  $\mathcal{M}$  (resp. au moins un membre de  $\mathcal{R}$ ).

Une famille de sous ensemble  $C$  de  $X$  est une *k-coloration* (forte) des sommets de  $\mathcal{H}$  si  $C$  est une partition de  $X$  en  $k$  ensembles stables  $A_1, \dots, A_k$ . Un hypergraphe pour lequel il existe une *k-coloration* est dit *k-colorable*.

Posons,

$$\alpha(\mathcal{H}) = \max \{|A| : A \text{ est un ensemble stable de } \mathcal{H}\},$$

$$\tau(\mathcal{H}) = \min \{|T| : T \text{ est un recouvrement par sommets de } \mathcal{H}\},$$

$$v(\mathcal{H}) = \max \{|\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ est un couplage de } \mathcal{H}\},$$

$$\rho(\mathcal{H}) = \min \{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H}\},$$

$$\chi(\mathcal{H}) = \min \{|C| : C \text{ est une } k\text{-coloration de } \mathcal{H}\}.$$

Ces nombres sont appelés *nombre de stabilité*, *nombre de recouvrement par sommets*, *nombre de couplage*, *nombre de recouvrement par arêtes* et *nombre chromatique* de  $\mathcal{H}$  respectivement.

Notons que tout hypergraphe  $\mathcal{H}$  vérifie:

$$\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H}) \text{ et } v(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}), \text{ puisque chaque arête d'un recouvrement par arêtes}$$

contient au maximum un élément d'un stable et chaque sommet d'un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête d'un couplage .

Ainsi, on dira que:

$\mathcal{H}$  a la propriété de König si  $\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H})$  et a la propriété duale de König si  $\nu(\mathcal{H}^*) = \tau(\mathcal{H}^*)$  ou encore  $\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H})$  puisque  $\alpha(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}^*)$  et  $\tau(\mathcal{H}^*) = \rho(\mathcal{H})$ .

## 1.6 Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit  $P$  un poset et  $\mathcal{I}$  l'ensemble de ses intervalles. L'hypergraphe  $\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$  dont les sommets sont les éléments de  $P$  et les arêtes sont les intervalles maximaux de  $P$  est dit *hypergraphe des intervalles* de  $P$ .

Le graphe représentatif des arêtes de  $\mathcal{H}^*(P)$ , encore appelé *graphe représentatif des intervalles* de  $P$  et est noté  $G(P)$ . Les sommets de  $G(P)$  sont les éléments de  $P$  et deux sommets sont adjacents s'ils appartiennent à un même intervalle de  $P$ .

Le concept d'hypergraphe des intervalles d'un poset  $P$  a été introduit par B. Voigt et I. Wegener [55] pour la détermination de l'invariant  $\rho(\mathcal{H}(P))$  où  $P$  est un sous poset du treillis booléen. La généralisation à un poset quelconque a été étudiée par I. Bouchemakh dans [15] et d'intéressants résultats existent sur la complexité algorithmique et sur les deux propriétés de König et dual de König.

$G(P)$  est un graphe parfait (voir [9]) si  $P$  est un ordre d'intervalle sans  $N$ , série parallèle, ordre de trapèze, ... (Voir [2], [15])

### Exemple

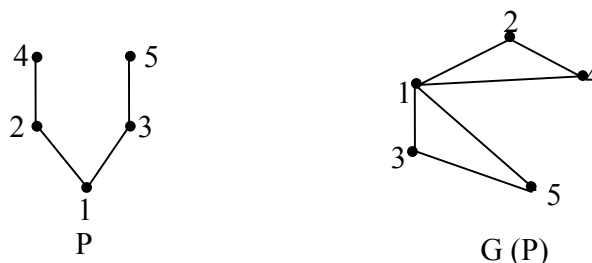


Figure 13

## 1.7 Notion de k-domination et k-domatique

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et  $S \subset V$ .

$S$  est un dominant multiple ou bien un  $k$ -tuple dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v \in G$ , on a  $|N[v] \cap S| \geq k$ . Autrement dit, soit chaque sommet est dans  $S$  et admet au moins  $(k-1)$  voisins dans  $S$  soit il est dans  $V-S$  et possède  $k$  voisins dans  $S$ .

- Un sommet *k-tuple dominant* est un sommet qui forme un ensemble  $k$ -tuple dominant, c'est-à-dire un sommet qui est adjacent à  $k$  sommets de  $S$ .
- Une partition *k-tuple domatique* d'un graphe est une partition des sommets de  $G$  en ensembles  $k$ -tuple dominants.
- Le nombre *k-tuple domatique* d'un graphe, noté  $d_k(G)$ , est le nombre maximum d'ensembles dominants dans une partition  $k$ -tuple domatique du graphe, ou d'une façon équivalente, le nombre maximum d'ensembles dominants disjoints deux à deux.
- Le nombre *k-tuple dominant*, noté  $\gamma_k(G)$ , est la cardinalité minimum d'un ensemble  $k$ -tuple dominant.

Harrary et Haynes [41] ont montré que le nombre  $k$ -domatique  $d_k(G) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G)+1}{k} \right\rfloor$ , où

$\delta(G) = \min_{x \in G} d(x)$ . Un graphe  $G$  est dit  $k$  domatiquement plein si  $d_k(G) = \left\lfloor \frac{\delta(G)+1}{k} \right\rfloor$ .

Nous parlerons dans cette thèse de la notion d'un graphe domatiquement double plein.

Notation :

Pour  $k=1$ ,  $\gamma_1(G) = \gamma(G)$  est dit *nombre de domination*.

Pour  $k=2$ ,  $\gamma_2(G) = \gamma_{\times 2}(G)$  est dit *nombre de domination double*.

Pour  $k=1$ ,  $d_1(G) = d(G)$  est dit *nombre domatique*.

Pour  $k=2$ ,  $d_2(G) = d_{\times 2}(G)$  est dit *nombre domatique double*

## CHAPITRE 2

### Nombre de domination double

Le chapitre 2 porte sur les différents travaux étudiés dans la domination double dans les graphes en général. Le nombre de domination double a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs (voir [31], [41], [49]), nous présentons dans ce chapitre l'essentiel de leurs travaux puis nous nous intéressons au graphe représentatif des intervalles d'un poset  $P$ . nous établissons dans cette classe de graphe plusieurs résultats.

#### 2.1 Introduction

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Rappelons qu'un sous ensemble  $S$  de  $V$  est un dominant double de  $G$  si pour tout sommet  $v$  de  $G$ , on a  $|N[v] \cap S| \geq 2$ , c'est à dire, soit  $v \in S$  et possède au moins un voisin dans  $S$ , soit il est dans  $V-S$  et possède au moins deux voisins dans  $S$ .

Le nombre de domination double, noté  $\gamma_{\times 2}(G)$ , est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de  $G$ .

Un graphe simple admet un dominant double s'il est sans sommets isolés.

Les applications dans le domaine de la domination double sont nombreuses. A titre d'exemple, nous pouvons citer *le problème du placement des gardiens dans une prison*. Un gardien placé sur un sommet  $v$  peut garder tous les sommets de  $N[v]$ . Dans ce cas, un ensemble dominant double  $S$  représente un ensemble de gardiens avec la propriété que tout prisonnier (un sommet de  $V-S$ ) est surveillé par au moins deux gardiens et chaque gardien (un sommet de  $S$ ) est voisin d'un autre gardien en vue de s'assurer une mutuelle aide et assistance en cas de besoin.

### Exemple 2.1

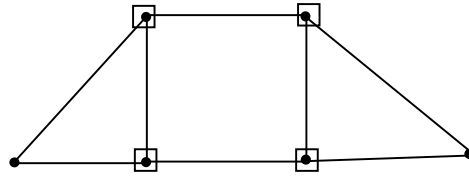


Figure 9

Le nombre de domination double du graphe de la Figure 9 est égal à 4.

En 2003, Liae et Chang [49] montrent que le problème de la détermination du nombre de domination double dans un graphe quelconque est NP-Complet. Ils donnent un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination dans les graphes fortement triangulés.

Quelques bornes ont été établies par Harary et Haynes sur le nombre de domination double.

### Théorème 2.1 [36]

Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés ayant  $n$  sommets et  $m$  arêtes, alors:

- a)  $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G) + 1$ .
- b) si  $G$  admet deux ensemble disjoints dominant de taille  $\gamma(G)$ , alors  $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$ .
- c)  $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$ .
- d)  $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{4n - 2m}{3}$ .
- e)  $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 1}$ .
- f) si  $\delta \geq 2$  alors  $\gamma_{\times 2}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \gamma(G)$  si  $n = 3$  ou  $5$   
et  
 $\gamma_{\times 2}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \gamma(G) - 1$  sinon.

## 2.2 Bornes du nombre de domination double

Beaucoup de chercheurs s'intéressent à la minimalité et à l'établissement des bornes supérieures et inférieures pour le nombre de domination double dans les graphes et les

conditions sous lesquelles elles sont atteintes. Nous résumons dans cette partie les différents travaux sur ce domaine.

### 2.2.1 Valeurs exactes

Pour certaines classes de graphes, le nombre de domination double est connu. Nous en citerons quelques une d'entre elles.

#### **Théorème 2.2 [41]**

Pour tout graphe complet, on a :  $\gamma_{x2}(K_n)=2$ , pour tout  $n \geq 2$ .

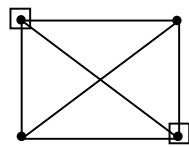


Figure1

#### **Théorème 2.3 [41]**

Si  $G$  est un graphe biparti complet, on a :  $\gamma_{x2}(K_{r,s})=4$  pour tout  $r, s \geq 3$ . Comme on peut le voir avec l'exemple de la figure-11 pour  $K_{4,3}$ .

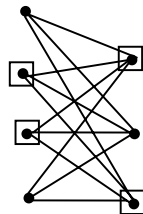


Figure 11

#### **Théorème 2.4 [41]**

Pour tout  $m \geq 1$ , on a :  $\gamma_{x2}(K_{1,m})=m+1$ .

**Théorème 2.5 [41]** Pour tout cycle  $C_n$ , on a  $\gamma_{x2}(C_n)=\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$

#### **Théorème 2.6 [13]**

Pour toute chaîne, on a :

$$\gamma_{x2}(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2(n+1)}{3} \right\rceil & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}. \\ \left\lceil \frac{2(n+1)}{3} \right\rceil + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 2.2.2 Minimalité et relation entre le nombre de domination double et d'autres invariants

### 2.2.2.1 Minimalité

L'étude de la minimalité des ensembles dominants doubles dans les graphes a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. Elle se résume à chercher les conditions nécessaires et / ou suffisantes pour qu'un ensemble dominant double soit minimal dans un graphe quelconque.

Nous introduisons dans cette partie deux résultats : le premier concerne la minimalité des ensembles dominants et le second concerne la minimalité des ensembles dominants doubles (voir [31]).

dans tout ce qui suit, Nous supposons que  $G = (V, E)$  est un graphe simple et fini.

#### **Théorème 2.6 [51]**

Un ensemble dominant  $S$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est minimal si et seulement si pour tout sommet  $u \in S$ , l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1.  $u$  est un sommet isolé dans le sous graphe induit par  $S$ ,
2. il existe un sommet  $v \in V - S$  tel que  $N(v) \cap S = \{u\}$ .

#### **Théorème 2.7 [31]**

Soient  $G$  un graphe et  $S$  un ensemble dominant double de  $G$ . Alors  $S$  est *minimal* si et seulement si chaque sommet  $v \in S$  satisfait l'une des conditions suivantes:

1.  $v$  est un sommet pendant dans le sous graphe induit par les sommets de  $S$ ,
2.  $v$  est adjacent à un sommet pendant dans le sous graphe induit par les sommets de  $S$ ,
3. il existe un sommet  $u$  dans  $V - S$  tel que  $N(u) \cap S = \{v, w\}$ .

### 2.2.2.2 Relation entre le nombre de domination double et d'autres invariants

Dans la théorie des graphes, il est souvent question d'étudier les relations entre deux invariants et parfois entre plusieurs invariants, pour cela, des travaux ont été entrepris pour déterminer des bornes pour le nombre de domination double et les conditions sous lesquelles elles sont atteintes. Nous commençons par le résultat établi par Chellali pour le nombre de domination double et le nombre de 2-stabilité.

Donnons d'abord la définition du nombre de 2-stabilité :

#### Définition 2.8

Un sous-ensemble  $S$  de  $V$  est dit *2-stable* dans  $G$  si pour deux sommets quelconques  $x$  et  $y$  de  $S$  on a  $N[x] \cap N[y] = \emptyset$ . Le cardinal maximum d'un ensemble de 2-stable de  $G$  noté  $\rho(G)$  est appelé *le nombre de 2-stabilité*

#### Théorème 2.9 [31]

Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés, alors  $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2\rho(G)$ .

L'énoncé du Théorème 2.10 est donné par Farber.

#### Théorème 2.10 [37]

Si  $G$  est un graphe fortement triangulé, alors  $\rho(G) = \gamma(G)$ .

En conséquence, Chellali a établi le corollaire suivant :

#### Corollaire 2.11 [31]

Si  $G$  est un graphe fortement triangulé, alors  $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2\gamma(G)$ .

Une relation a été donné dans [31] entre le nombre de domination double et le nombre de domination couplé dans le cas d'un graphe sans  $K_{1,3}$ .

#### Définition 2.12

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit *dominant couplé* si  $S$  est un dominant de  $G$  et le sous graphe induit par les sommets de  $S$  contient au moins un couplage parfait. *Le nombre de domination couplé* noté  $\gamma_{pr}(G)$  est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de  $G$ .

**Théorème 2.13 [31]**

Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,3}$  et sans sommets isolés alors  $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma_{\text{pr}}(G)$ .

**Définition 2.14**

Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit *irrédondant* si pour tout sommet  $x \in S$  on a,  $N[x] - N[S - \{x\}] \neq \emptyset$ , c'est à dire que chaque sommet de  $S$  possède un voisinage privé relatif à  $S$ . Si un sommet  $v$  appartient au voisinage privé de  $x$  relatif à  $S$  alors on écrira  $v \in p_n(x, S)$ . Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble irrédondant maximal noté  $i_r(G)$  (resp.  $IR(G)$ ) est appelé *le nombre d'irrédondance* (resp. *d'irrédondance supérieure*).

**Lemme 2.15 [31]**

Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés possédant deux  $i_r(G)$ -ensembles disjoints alors  $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2i_r(G)$ .

**Théorème 2.16 [1]**

Pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés, on a

$$\gamma_t(G) \leq 2i_r(G)$$

En conséquence, Chellali a établi le corollaire suivant:

**Corollaire 2.17 [31]**

Pour tout graphe  $G$  avec  $\delta \geq 2$ ,

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n}{2} + i_r(G) \leq \frac{n}{2} + \gamma(G).$$

Dans [31], Chellali a établi un résultat concernant la borne supérieure pour la somme du nombre de domination double et le nombre de 2-stabilité dans un graphe  $G$ .

**Proposition 2.18 [31]**

Pour tout graphe  $G$  avec  $\delta \geq 2$ , on a

$$\gamma_{\times 2}(G) + \rho(G) \leq n,$$

et cette borne est atteinte

Les cycles  $C_{3k}$  sont des graphes pour les quels la borne est atteinte.

De plus, il a réalisé un résultat pour les graphes fortement triangulés [31]

**Corollaire 2.19 [31]**

Si  $G$  est un graphe fortement triangulé avec  $\delta \geq 2$ , alors

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma(G) \leq n,$$

et cette borne est atteinte.

Ainsi, il a construit une classe de graphe pour lequel la borne est atteinte. Il s'agit des graphes  $G_k$  obtenu à partir de  $k$  copies de  $K_3$  en identifiant un sommet de la  $i^{\text{ème}}$  copie avec le  $i^{\text{ème}}$  sommet de la chaîne  $P_k$ .

Le graphe  $G_k$  ainsi construit a  $n = 3k$ ,  $\gamma(G) = k$ ,  $\gamma_{\times 2}(G) = 2k$ .

Il a aussi considéré la couronne  $G = H \circ K_1$  [31] où  $H$  est fortement triangulé d'ordre  $k$  où il a constaté que le graphe  $G$  est fortement triangulé d'ordre  $n = 2k$  avec  $\delta = 1$ ,  $\gamma(G) = k$  et  $\gamma_{\times 2}(G) = 2k$ .

Il donne ensuite une borne supérieure pour le nombre de domination double en fonction de l'ordre du graphe et du nombre de domination total pour les graphes ayant un degré égal au moins à deux. Donnons d'abord la définition d'un nombre domatique total.

**Définition 2.20**

Un ensemble *dominant total* est un ensemble dominant sans sommets isolés. C'est à dire que chaque sommet de l'ensemble possède au moins un autre voisin dans le même ensemble. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total, noté  $\gamma_t(G)$ , est appelé *le nombre de domination totale*.

**Proposition 2.21 [31]**

Pour tout graphe  $G$  avec  $\delta \geq 2$ ,

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n + \gamma_t(G)}{2}$$

et cette borne est atteinte.

Le cycle  $C_5$  est un exemple [31] pour lequel la borne de la proposition 2.21 est atteinte.

Dans [46], Henning établit la borne supérieure suivante pour le nombre de domination total.

**Théorème 2.22 [46]**

Si  $G \notin \{C_3, C_5, C_6, C_{10}\}$  est un graphe d'ordre  $n$  avec  $\delta \geq 2$ , alors

$$\gamma_t(G) \leq \frac{4n}{7}.$$

Le corollaire suivant dû à Chellali découle directement de la proposition 2.21 et le théorème 2.22.

**Corollaire 2.23 [31]**

Si  $G \neq C_5$  est un graphe d'ordre  $n$  avec  $\delta \geq 2$ , alors

$$\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor \frac{11n}{14} \rfloor.$$

Allan, Laskar et Hedetniemi donne une relation entre le nombre de domination total et le nombre d'irrédondance dans [1].

Le théorème 2.24 est un résultat établi par Chellali pour le nombre de domination double en fonction de l'ordre et du degré minimum.

**Théorème 2.24 [31]**

Pour tout graphe  $G$ , on a :  $\gamma_{\times 2}(G) \leq n + 1 - \delta$ .

**2.2.2.3 Inégalité de type Nordhaus-Gaddum**

Des résultats de type Nordhaus-Gaddum sont de très fortes bornes pour la somme et le produit de paramètres d'un graphe et de son complémentaire.

En 1956, le premier papier qui porte des bornes pour la somme et le produit du nombre chromatique du graphe et son complémentaire est dû à Nordhaus-Gaddum.

**Théorème 2.25 [41]**

Si  $G$  et  $\bar{G}$  sont deux graphes sans sommets isolés, alors

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\bar{G}) \leq 2n,$$

et cette borne est atteinte si et seulement si  $G = P_4$ .

**Théorème 2.26 [41]**

Si  $G$  est un graphe tel que  $\gamma(G) \geq 5$  et  $\gamma(\bar{G}) \geq 5$ , alors

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\bar{G}) \leq n - \Delta + \delta - 1 \leq n - 1.$$

Harary et Haynes conjecturent que les relations du Théorème 2.26 est étendue pour le cas du nombre de domination dès que  $\gamma(G) \geq 4$  et  $\gamma(\overline{G}) \geq 4$ . Plus tard, Erfang, Chuangvin et Liying [36] la prouvent.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 2.24 et améliore la borne du Théorème 2.25

**Corollaire 2.27 [31]**

Si  $G$  et  $\overline{G}$  sont sans sommets isolés, alors

$$\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G}) \leq n + 3 + \Delta - \delta,$$

et cette borne est atteinte.

Chellali donne l'exemple du cycle  $C_5$ , pour lequel la borne précédente est atteinte.

**Corollaire 2.28 [31]**

Pour tout graphe régulier  $G \neq K_n$ , on a  $\gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G}) \leq n + 3$ .

**2.3 Domination double dans les arbres**

On introduit dans cette partie quelques définitions supplémentaires utiles pour le développement de cette dernière.

Un arbre  $T$  *enraciné* est une arborescence (arbre où les arêtes sont remplacées par des arcs) admettant un sommet  $r$  à partir duquel il existe un chemin à tout autre sommet de  $T$ . Le sommet  $r$  est unique et est appelé *racine*. Pour un sommet  $v$  d'un arbre enraciné, le *parent*  $p(v)$  de  $v$  est l'unique sommet tel qu'il existe un arc de  $p(v)$  vers  $v$ . Les *filles* de  $v$  est un sommet  $u$  tel que  $p(u) = v$  et un *descendant* de  $v$  est un sommet  $u$  pour lequel il existe un chemin de  $v$  à  $u$  dans  $T$ .

**Exemple**

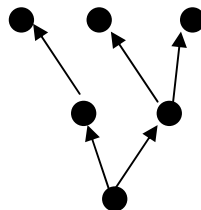


Figure 11

Il faut signaler que dans la suite, l'orientation dans un arbre enraciné ne sera pas mentionnée explicitement et on parlera aussi d'arêtes au lieu d'arcs.

### Notation

Pour un arbre enraciné, on a :

$$C(v) = \{u \in V: u \text{ est un fils de } v\}$$

$$D(v) = \{u \in V: u \text{ est un descendant de } v\}$$

$$D[v] = D(v) \cup \{v\}.$$

### Remarque 2.29

Un sous arbre maximal enraciné en  $w$  noté par  $T_w$  est le sous arbre de  $T$  induit par  $D[w]$ .

### Définitions 2.30

Une étoile d'ordre  $p \geq 2$  est le graphe biparti complet  $K_{1,p-1}$ .

Une étoile subdivisée est un arbre obtenu à partir d'une étoile où chaque arête est subdivisée une seule fois.

Un arbre  $T$  est une étoile double s'il contient exactement deux sommets supports adjacents. Une étoile double est notée par  $S_{p,q}$  où  $p + q = \ell(T)$ .

### 2.3.1 bornes inférieures

Nous donnons dans ce paragraphe tous les résultats établis sur les bornes inférieures pour le nombre dominant double dans le cas des arbres.

### Proposition 2.31 [31]

Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$ ,

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \ell(T).$$

Comme conséquence, on a

### Corollaire 2.32 [31]

Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$ ,

$$\gamma_{\times 2}(T) \geq \gamma(T) + \Delta(T).$$

### Théorème 2.33 [31]

Soit  $T$  un arbre. Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma(T) + \Delta(T)$  si et seulement si  $T = P_n$  pour  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$  ou bien  $T \in S$ .

$S$  est la famille des arbres obtenus à partir de l'étoile  $K_{1,t}$ , pour  $t \geq 3$ , ou bien en

subdivisant chaque arêtes une fois ( ce qui donne une étoile subdivisée) ou bien en subdivisant au plus  $(t-1)$  arêtes au plus deux fois.

Le résultat suivant montre que le nombre de domination double d'un arbre  $T$  est égal au moins deux fois le nombre de domination stable  $i(T)$  ( un ensemble domenant stable est un ensemble dominant dont le sous graphe induit un stable et le nombre de domination stable est la cardinalité minimum d'un tel ensemble,noté  $i(G)$ ). Et donne l'arbre pour lequel cette borne est atteinte.

**Théorème 2.34 [31]**

Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a  $\gamma_{x2}(T) \geq 2 i(T) \geq 2\gamma(T)$  .

Cette borne est atteinte pour la couronne d'un arbre où le nombre de domination double est égal à  $n$  et le nombre de domination stable est égal à  $n/2$ .

Dans [31], Chellali construit un arbre  $T_j$  obtenu à partir de la chaîne  $P_{2j+1}$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $2j+1$  et attache deux sommets pendants adjacent à chaque sommet numéroté impair, ainsi  $i(G) = j+1$  et  $\gamma_{x2}(G) = 3j + 3$ . Par suite, la différence entre le nombre de domination double et le nombre de domination stable peut être relativement grande.

Par ailleurs, il montre par un contre exemple que le Théorème 2.34 n'est pas valable pour tous les graphes. Il considère pour cela le graphe  $G$  formé à partir de  $t$  copies du cycle  $C_4$  en identifiant un sommet de chaque copie du cycle  $C_4$  en un seul sommet. Ainsi  $i(G) = t + 1$  et  $\gamma_{x2}(G) = 2t + 1$ . Pour la caractérisation des arbres qui atteignent cette somme, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.35 [31]**

Soit  $T$  un arbre. Alors  $\gamma_{x2}(T) = 2 i(T)$  si et seulement si  $T$  possède deux  $i(T)$ -ensembles disjoints.

**Théorème 2.36 [31]**

Soit  $T$  un arbre. Alors  $\gamma_{x2}(T) = 2 \gamma(T)$  si et seulement si  $T$  possède deux  $\gamma(G)$  –ensembles disjoints.

**Remarque 2.37 [31]**

L'égalité  $\gamma_{x2}(T) = 2\gamma(T)$  implique que  $\gamma_{x2}(T) = 2i(T)$  mais l'inverse n'est pas vraie comme on peut le voir pour l'étoile double  $S_{p,q}$ .

Une *chenille* est un arbre  $T$  qui contient une chaîne  $P = u_1u_2\dots u_k$  tel que chaque sommet de  $T$  est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne  $P$ .

**Théorème 2.38 [31]**

Soit  $T$  une chenille. Alors  $\gamma_{x2}(T) = 2\gamma(T)$  si et seulement si  $T = P_2$  ou bien  $T$  est tel que chaque sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant et la distance entre deux sommets supports consécutifs n'est pas un multiple de 3.

Présentons maintenant les différents résultats établis sur la relation entre le nombre de domination double et le nombre de domination couplée dans certaines classes de graphes. Pour un graphe  $G$  qui est une subdivision d'une étoile avec  $n \geq 5$ , on a  $\gamma_{x2}(G) = \gamma_{pr}(G)$ . Dans le cas où  $G$  est la couronne  $K^*_{2k}$  du graphe complet  $K_{2k}$ , on a  $\gamma_{x2}(G) = 4k$  et  $\gamma_{pr}(G) = 2k$ . Chellali s'est intéressé ensuite à la différence de  $\gamma_{x2}(G) - \gamma_{pr}(G)$  où il a construit une classe de graphe  $G_k$  obtenu à partir d'un sommet  $x$  et  $k$  copies disjointes du cycle  $C_6$  où  $\{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,6}\}$  représente l'ensemble des sommets de la  $i^{\text{ème}}$  copie de  $C_6$  en ajoutant les arêtes  $\{xv_{i,1}, xv_{i,3}, xv_{i,5} \mid 1 \leq i \leq k\}$  on a : les sommets sont désignés par. On a  $\gamma_{x2}(G) = 4k$  et  $\gamma_{pr}(G) = 3k + 1$ . par le biais de cet exemple, on voit que la différence  $\gamma_{x2}(G) - \gamma_{pr}(G)$  est large (voir [31]).

**Remarque 2.39 [31]**

Pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés, on a

1. Un sommet support appartient à tout  $\gamma_{pr}(G)$ -ensemble et à tout  $\gamma_{x2}(G)$ -ensemble;
2. Un sommet pendant appartient à tout  $\gamma_{x2}(G)$ -ensemble.

**Théorème 2.40 [31]**

Pour tout arbre  $T$  d'ordre au moins deux,  $\gamma_{x2}(T) \geq \gamma_{pr}(T)$ .

Dans [39], Fink et Jacobson ont établi une borne sur le nombre de domination double pour tout arbre en fonction de l'ordre.

**Théorème 2.41 [39]**

Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n$ , alors  $\gamma_{x2}(T) \geq (n+1)/2$ .

**Théorème 2.42 [31]**

Pour tout arbre  $T$  d'ordre au moins deux, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1  $\gamma_{x2}(T) = \gamma_{pr}(T)$ .
- 2  $T = P_2$  ou chaque sommet support de  $T$  est adjacent à exactement un seul sommet pendant, deux sommets supports quelconques de  $T$  sont non adjacents et  $T$  possède un  $\gamma_{x2}(G)$ -ensemble unique qui est  $S(T) \cup P(T)$ .

Où  $S(T)$  et  $P(T)$  sont respectivement l'ensemble des sommets supports et l'ensemble des sommets pendants.

### 2.3.2 Bornes supérieures

Cette section est consacrée aux résultats établis sur les bornes supérieures pour le nombre de domination double dans les arbres.

Une nouvelle notion a été introduite dans [31] par Chellali. Il s'agit de la notion d'ensemble dominant double faible.

Un sous ensemble de sommets  $S$  est un ensemble dominant double faible, noté brièvement EDDF, si  $S$  est un ensemble dominant et chaque sommet de degré au moins deux est dominé au moins deux fois. Le cardinal minimum d'un EDDF de  $G$  est appelé le nombre de domination double faible, noté  $\gamma_{\times 2}^w(G)$ .

#### Remarque

Tout graphe  $G$  possède un EDDF puisque  $V$  constitue un tel ensemble.

Soit  $\mathcal{T}$  est un ensemble d'arbres qui peuvent être obtenus à partir de l'union de  $k \geq 1$  copies de  $P_3$  en ajoutant  $k - 1$  arêtes de telle sorte que chaque arête ajoutée joint deux sommets pendants de deux chaînes différentes. Ou bien  $\mathcal{T}$  vérifie  $\mathcal{T} = \{T \mid T \text{ est un arbre, } |N_T[v] \cap S| = 1 \text{ et } \deg_T(v) = 2 \forall v \in T\}$

#### Lemme 2.43 [31]

Si  $T$  est un arbre de  $\mathcal{T}$  d'ordre  $n$ , alors  $\gamma_{\times 2}^w(T) = 2n/3$ .

#### Lemme 2.44 [31]

Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 2$ , alors  $\gamma_{\times 2}^w(T) \leq 2n/3$ . L'égalité est atteinte si et seulement si  $T \in \mathcal{T}$ .

Soit  $F$  une forêt où chaque composante connexe appartient à  $\mathcal{T}$ . Alors chaque composante de  $F$  possède un ensemble dominant double parfait (unique) ayant la propriété pour chaque sommet est de degré 2 dans  $F$ .

$S_F$  est l'union de ces ensembles dominants parfaits(unique) dont chaque sommet est de degré 2.

Soit  $T$  est un arbre dont la suppression de ses sommets supports et pendants engendre une forêt  $F$  et tel que un sommet support quelconque de  $T$  n'est adjacent à aucun sommet de  $S_F$ .  $F$  est dite forêt cachée par l'arbre  $T$  et  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble de tels arbres  $T$ .

#### Lemme 2.45 [31]

Soit  $T \in \mathcal{F}$  un arbre d'ordre  $n$  avec  $\ell$  sommets pendants et  $s$  sommets supports. Alors

$$\gamma_{\times 2}(T) = (2n + \ell + s)/3.$$

**Théorème 2.46 [31]**

Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 3$  avec  $\ell$  sommets pendants et  $s$  sommets supports. Alors  $\gamma_{\times 2}(T) \leq (2n + \ell + s)/3$  avec l'égalité atteinte si et seulement si  $T \in \mathcal{F}$  ou bien chaque sommet de  $T$  est pendent ou support.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 2.46 et 2.34.

**Théorème 2.47 [31]**

Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 3$  avec  $\ell$  sommets pendants et  $s$  sommets supports. Alors  $i(T) \leq (2n + \ell + s)/6$  avec l'égalité atteinte si et seulement si ou bien

(i)  $T \in \mathcal{F}$  et  $\ell = s$  ou bien

(ii)  $i(T) = n/2$  et chaque sommet de  $T$  est un sommet pendent ou un support.

Le théorème ci-dessous dû à Favaron[38], découle immédiatement du théorème cité précédemment. Puisque tout arbre possède plus de sommets pendants que de sommets supports.

**Théorème 2.48 [38]**

Si  $T$  est un arbre d'ordre  $n \geq 3$  avec  $\ell$  sommets pendants alors

$$i(T) \leq (n + \ell)/3.$$

Nous présentons dans cette section les résultats établis sur la borne supérieure pour le nombre de domination double en fonction des nombres de domination et des sommets pendants.

Chellali[31] a introduit une nouvelle classe de graphe définie comme étant une collection  $\mathcal{G}$  d'arbres qui peuvent être obtenu à partir de l'union de  $k \geq 1$  étoiles, chacune d'ordre au moins 3, en ajoutant  $k - 1$  arêtes de telle sorte que les arêtes ajoutées joignant les sommets pendants de ces étoiles forment un couplage dans  $T$ . i.e., le sous graphe de  $T$  induit par les  $k-1$  arêtes ajoutées est isomorphe à  $(k - 1)K_2$ . les  $k$  étoiles utilisées seront appelées *étoile cachée* par  $T$

Une étoile cachée  $T'$  par  $T$  est *une étoile cachées pendante* si  $T - V(T')$  est un arbre.

**Remarque 2.49 [31]**

Pour  $k \geq 2$ ,  $T$  possède deux étoiles cachées pendantes.

**Lemme 2.50 [31]**

Soit  $T \in \mathcal{G}$  un arbre d'ordre  $n$  ayant  $k$  étoiles cachées. Alors,

- 1  $\gamma(T) = k$ ,
- 2  $\ell(T) = n - 3k + 2$ ,
- 3  $\gamma_{\times 2}(T) = n - k + 1 = 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$ .

**Lemme 2.51 [31]**

Si  $T \in \mathcal{G}$  et si  $T'$  est une étoile cachée pendante de  $T$ , alors il existe un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient chaque sommet de  $T'$ .

**Théorème 2.52 [31]**

Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n \geq 2$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T) \leq 2\gamma(T) + \ell(T) - 1$  avec l'égalité atteinte si et seulement si  $T \in \mathcal{G}$ .

Le corollaire suivant est une conséquence des théorèmes 2.34 et 2.52.

**Corollaire 2.53 [31]**

Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$  on a,  $i(T) \leq \gamma(T) + (\ell(T) - 1)/2$ .

Comme relation entre le nombre de domination double et le nombre de domination total, on a :

**Théorème 2.54 [31]**

Pour tout arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a  $\gamma_{\times 2}(T) \leq (n + \gamma(T) + \ell(T))/2$ .

**2.4 La domination double dans un cactus**

Rappelons que

- $L_u$  désigne le nombre de sommets pendants attachés à  $u$  où  $u$  est un sommet support.

- Un graphe  $G$  est dit *2-connexe* si et seulement si il est connexe d'ordre  $n \geq 3$  et n'admet pas de point d'articulation (un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes).
- Un bloc dans un graphe  $G$  est un ensemble  $A$  de sommets ( $A \subseteq V$ ) qui engendre un sous graphe  $G(A)$  connexe, sans sommet d'articulation et qui est maximal pour cette propriété. Le sous graphe  $G(A)$  est alors soit 2-connexe (si  $|A| > 2$ ), soit un isthme (une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes) de  $G$  (si  $|A|=2$ ), soit un sommet isolé (si  $|A|=1$ ).
- Un *graphe bloc* est un graphe connexe dans lequel chaque bloc engendre un sous graphe complet.
- On appelle *corde* d'un cycle élémentaire et une arête qui relie deux sommets non consécutifs de ce cycle.
- Un *graphe cactus* est un graphe connexe dont chaque bloc est constitué, soit par un isthme, soit par un cycle élémentaire sans corde.
- Un graphe cactus contenant un seul bloc est dit *trivial*, les autres seront dits *non triviaux*.
- Un arbre  $T$  ayant exactement deux sommets  $p$  et  $q$  non pendants est dit *double étoile*.

**Remarque 2.55 [31]**

Tout ensemble dominant double d'un graphe  $G$  contient tous les sommets pendants.

**Théorème 2.56 [31]**

Soit  $G$  un graphe cactus connexe non trivial ayant le nombre de blocs  $k(G)$  pair. Alors  $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma_t(G) - k(G)$ , et cette borne est atteinte .

## 2.5 Domination double exacte dans les graphes

Il est nécessaire de voir les graphes pour lesquels il existe un dominant double exacte. Ou bien les conditions sous lesquels il existe un ensemble dominant double exact. Ce concept a été introduit par Harary et Haynes dans l'article "double domination in graphs". Nous commençons par définir un ensemble dominant exact.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et soit  $S$  un sous ensemble de  $V$ . Alors  $S$  est dit *un dominant double exact* si tout sommet du graphe est dominé deux fois par  $S$ .

**Remarque 2.57**

Les ensembles dominants doubles exacts n'existent pas toujours, puisque le problème de décision de l'existence d'un ensemble dominant double exact est NP-complet([31]).

### 2.5.1 Propriétés des ensembles dominants doubles exactes

Nous présentons dans cette partie les résultats de Chellali, Maffray et Khelladi [38].

D'après la définition d'un ensemble dominant double exact, deux propriétés triviales sont établies.

**Remarque 2.58 [31]**

Si  $S$  est un ensemble dominant double exact d'un graphe  $G$  alors  $S$  induit un couplage, c'est à dire que  $G[S]$  est un graphe 1-régulier.

**Remarque 2.59 [31]**

Si  $S$  est un ensemble dominant double exact d'un graphe  $G$  alors  $|S| \geq \gamma_{\times 2}(G)$ .

Le résultat suivant montre que dans un graphe, l'existence des ensembles dominants doubles exacts confirme l'égalité de leurs tailles

**Proposition 2.60 [31]**

Si un graphe  $G$  est un graphe admettant des ensembles dominants doubles exacts, alors ils sont tous de même taille.

**Proposition 2.62 [31]**

Si  $S$  est un ensemble dominant double exact d'un graphe  $G$  alors  $|S| \leq 2n / (\delta + 1)$ .

**Théorème 2.63 [41]**

Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés alors  $\gamma_{\times 2}(G) \geq (2n) / (\Delta + 1)$ .

Le résultat suivant est une conséquence directe de la proposition 2.62 et le théorème 2.63.

**Corollaire 2.64 [31]**

Si  $S$  est un ensemble dominant double exact d'un graphe régulier  $G$ , alors

$$|S| = 2n / (\Delta + 1) = \gamma_{x2}(G).$$

Une conjecture posée par Chellali a été résolue par Blidia.

### **Théorème 2.65 [11]**

Si  $S$  est un ensemble dominant double exact d'un graphe  $G$  alors  $|S| = \gamma_{x2}(G)$ .

## **2.5.3 Graphes ayant des ensembles dominants doubles exacts**

Dans la partie suivante, nous présentons les graphes pour lesquels il existe un ensemble dominant double exact.

### **Proposition 2.66 [31]**

Un cycle  $C_n$  a un dominant double exact si et seulement si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Si tel est le cas, la taille de cet ensemble est  $2n/3$ .

### **Proposition 2.67 [31]**

Une chaîne  $P_n$  a un dominant double exact si et seulement si  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Si tel est le cas, la taille de cet ensemble est  $2(n + 1)/3$ .

### **Remarque 2.68**

Si on considère l'ensemble des sommets de degré deux, alors une chaîne admet un dominant double exact si et seulement si  $d \equiv 0 \pmod{3}$ .

### **Théorème 2.69 [31]**

Si un graphe  $G$  admet un dominant double exact  $S$ . Alors  $|S| = n - \delta + 1$  si et seulement si ou bien on a  $G = tk_2$  avec  $t \geq 1$  et  $\delta = 1$  c'est-à-dire  $G$  est un graphe 1-régulier ou bien  $G = K_n$  avec  $n \geq 3$  et  $\delta > 1$ .

### **Remarque 2.70 [31]**

Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés. Si  $x$  est un sommet pendant de  $G$  alors tout ensemble dominant double contient  $x$  et son voisin.

### **Remarque 2.71 [31]**

Soit  $T$  un arbre d'ordre au moins deux admettant  $S$  comme un ensemble dominant double exact. Alors:

1. Tout sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendent.
2. Deux sommets supports quelconques ne sont pas adjacents.

Chellali a donné une caractérisation des arbres pour les quelles elles admettent un ensemble dominant double exact. Nous présentons dans le paragraphe suivant toutes les étapes:

Soit  $T$  la famille des arbres  $T$  qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ( $k \geq 1$ ) tels que  $T_1$  est une chaîne  $P_2 = xy$ ,  $T = T_k$ , et si  $k \geq 2$ , pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq k-1$ , alors l'arbre  $T_{i+1}$  peut être Obtenu récursivement à partir de  $T_i$ , par l'une des deux opérations ci-dessous. Posons  $A(T_1) = \{x, y\}$ ,  $B(T_1) = \{y\}$ .

**Opération type-1:** Attacher une chaîne  $P_3 = uvw$  en ajoutant une arête reliant  $w$  à un sommet de  $A(T_i)$ . Poser  $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{u, v\}$ ,  $B(T_{i+1}) = B(T_i) \cup \{u\}$ .

**Opération type-2:** attacher une chaîne  $P = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  de centre  $a_3$  et un sommet de  $V(T_i) - A(T_i)$ . Poser  $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$  et  $B(T_{i+1}) = B(T_i) \cup \{a_1, a_5\}$ .

### Lemme 2.72 [31]

Si  $T \in T$  alors:

1.  $B(T)$  est un ensemble 2-stable de  $T$  avec  $|B(T)| = |A(T)|/2$ ,
2.  $A(T)$  est un ensemble dominant double exact de  $T$  avec  $|A(T)| = \gamma_{x2}(T) = 2\gamma(T)$ ,
3.  $A(T)$  est l'unique  $\gamma_{x2}(T)$ -ensemble.

### Théorème 2.73 [31]

Soit  $T$  un arbre d'ordre au moins deux. Alors  $T$  possède un dominant double exact si et seulement si  $T \in T$ .

Pour un couplage  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_{n/2}\}$  d'un graphe  $G$ , désignons par  $G_M = (V_M, E_M)$  un graphe simple ou toute arête est représenté par un sommet dans  $V_M$  et deux sommets sont adjacents dans  $V_M$  si les arêtes correspondantes sont adjacentes dans  $G$ . le théorème suivant est un résultat de l'existence d'un ensemble dominant double exact dans un graphe connexe 3-régulier.

### Théorème 2.74 [31]

Soit  $G$  un graphe 3-régulier connexe. Alors  $G$  possède un dominant double si et seulement si  $G$  admet un couplage parfait  $M$  tel que le graphe associé  $G_M$  est un graphe biparti équilibré.

## 2.6 Nombre de domination double dans $G (P * Q)$

Cette partie est consacrée à l'étude du nombre de domination double dans le graphe représentatif d'un poset obtenu à partir d'une opération de deux autres posets P et Q.

### 2.6.1 Somme directe

#### Proposition 2.75

Soient P et Q deux posets, alors

$$\gamma_{\times 2}(G (P + Q)) = \gamma_{\times 2}(G (P)) + \gamma_{\times 2}(G (Q))$$

#### Preuve

Montrons que  $\gamma_{\times 2}(G (P + Q)) \geq \gamma_{\times 2}(G (P)) + \gamma_{\times 2}(G (Q))$

Soit D un ensemble dominant double de cardinalité minimum de  $G(P+Q)$ . D s'écrit sous la forme

$D = D^1 \cup D^2$  où  $D^1$  (resp.  $D^2$ ) sont des ensembles dominants doubles de  $G (P)$  et de  $G(Q)$  respectivement.

On a donc,  $\gamma_{\times 2}(G (P + Q)) = |D| = |D^1 \cup D^2| = |D^1| + |D^2| \geq \gamma_{\times 2}(G (P)) + \gamma_{\times 2}(G (Q))$ .

Inversement, si  $D^1$  (resp.  $D^2$ ) est un ensemble dominant double de cardinalité minimum de  $G (P)$  (resp.  $G (Q)$ ). Alors,  $\gamma_{\times 2}(G (P + Q)) \leq |D^1 \cup D^2| = |D^1| + |D^2| = \gamma_{\times 2}(G (P)) + \gamma_{\times 2}(G (Q))$ . D'où,  $\gamma_{\times 2}(G (P + Q)) \leq \gamma_{\times 2}(G (P)) + \gamma_{\times 2}(G (Q))$ .

Et donc l'égalité.

### 2.6.2 Somme linéaire

#### Proposition 2.76

Si P et Q sont deux posets, alors

$$2 \leq \gamma_{\times 2}(G (P \oplus Q)) \leq 4.$$

#### Preuve

On sait que pour tout graphe G, on a  $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2$  [36].

Il reste à montrer que  $\gamma_{\times 2}(G (P + Q)) \leq 4$ .

Tout élément maximal de  $V(G(P))$  est adjacent à tout élément minimal de  $V(G(Q))$ , donc tous les éléments de  $V(G(P))$  sont adjacents à tous les éléments de  $V(G(Q))$  dans le diagramme de Hasse de  $G(P \oplus Q)$ . Il suffit donc de prendre deux sommets de  $G(P)$  et de  $G(Q)$  pour construire un ensemble dominant double de  $G (P \oplus Q)$  de taille 4.

**Exemple**

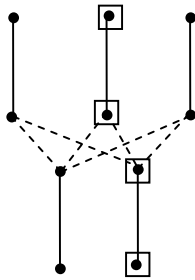


Figure 12

**Proposition 2.76**

Si P ou Q est un ordre série parallèle connexe alors  $\gamma_{x2}[G(P \oplus Q)] = 2$ .

**Exemple**

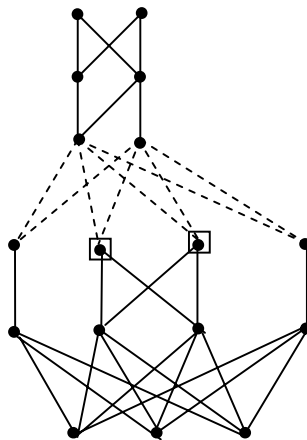


Figure 13

**Preuve**

Il suffit de montrer que  $\gamma_{x2}[G(P \oplus Q)] \leq 2$ .

Supposons sans perte de généralité que P est un ordre série parallèle connexe. Soit  $D = \{p_1, p_2\}$  un sous-ensemble de sommet de  $G(P \oplus Q)$  tels que  $p_1$  et  $p_2$  sont deux éléments maximaux de P, montrons que D est un ensemble dominant double de  $G(P \oplus Q)$ .

On a d'une part, par l'opération  $\oplus$  que tout élément maximal de P est couvert par tout élément minimal de Q. d'autre part, comme P est un ordre série parallèle connexe,

alors tout élément maximal de  $P$  est au dessus de tout élément minimal de  $P$ . Donc,  $p_1$  et  $p_2$  appartiennent à tous les intervalles maximaux de  $P \oplus Q$  et  $D$  est bien un ensemble dominant double.

**Proposition 2.77**

Soient  $P$  un poset et  $\mathcal{J}$  l'ensemble de ses intervalles maximaux. Alors:

$$\gamma_{\times 2}[G(P)] = 2 \iff |\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| \geq 2$$

**Preuve**

Supposons que  $\gamma_{\times 2}[G(P)] = 2$  et montrons que  $|\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| \geq 2$ .

$\gamma_{\times 2}[G(P)] = 2$  signifie qu'il existe un ensemble  $D$  dominant double  $D$  tel que  $|D| = 2$ .

Soit  $D = \{v_1, v_2\}$  cet ensemble, Montrer que  $D \subseteq \{\cap I, I \in \mathcal{J}\}$ .

Si  $I = [p, q] \in \mathcal{J}$ , alors  $q = v_1$  (resp.  $p \in D$ ) et  $q$  (resp.  $p$ ) est strictement plus grand (resp. plus petit) que  $v_2$  (resp.  $v_1$ ) ou  $q \notin D$  (resp.  $p \notin D$ ) et  $q$  (resp.  $p$ ) est strictement plus grand (resp. plus petit) aux éléments de  $D$ . Donc  $p \leq v_1 \leq v_2 \leq q$ , c'est-à-dire  $v_1, v_2 \in I$ . il s'ensuit alors que  $D = \{v_1, v_2\} \subseteq I : \forall I$ , et  $D \subseteq \{\cap I, I \in \mathcal{J}\}$ .

Inversement ;

Soit  $\{\cap I, I \in \mathcal{J}\} = \{x_1, \dots, x_r\}$  avec  $r \geq 2$ .

Pour tout  $x_i \in P$ ,  $x_i$  est un sommet adjacent à tout élément de  $G(P)$ , donc les  $\sum_{k=2}^r C_r^k$  sous ensembles de  $\mathcal{J}$  de taille comprise entre 2 et  $r$  sont des ensembles dominants doubles de  $G(P)$ . On en déduit que  $\gamma_{\times 2}[G(P)] = 2$ .

**Remarque 2.78**

La preuve est similaire à celle de la proposition 2.73, dont voici l'énoncé :

$$\gamma_{\times s}[G(P)] = s \iff |\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| \geq s.$$

**2.6.3 Nombre de domination double dans le graphe représentatif des intervalles de  $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{\ell, u}$**

Soit  $P = C_{n_1} \times C_{n_2}$  le produit de deux chaînes de longueurs respectivement  $n_1$  et  $n_2$  et soit  $P_{\ell, u} = N_\ell \cup \dots \cup N_u$ ,  $0 \leq \ell \leq u \leq n_1 + n_2$ . le sous poset induit par d'union des niveaux consécutifs de  $P$ . Supposons sans perte de généralité que  $n_1 \leq n_2$  vis à vis de l'isomorphisme existant entre  $C_{n_1} \times C_{n_2}$  et  $C_{n_2} \times C_{n_1}$  et notons par  $G_{\ell, u}$  le graphe  $G(P_{\ell, u})$ .

**Proposition 2.79**

Soit P un poset, pour  $\ell \leq n_1$  et  $u \geq n_2$ , alors :

$$\gamma_{\times 2}[G(P_{\ell,u})] = \begin{cases} 3 & \text{si } \ell = u - n_2 \text{ et } n_1 = n_2, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve**

L'ensemble des sommets dominants de  $G_{\ell,u}$  représente l'intersection de tous les intervalles maximaux de  $P_{\ell,u}$ . D'après la Proposition 2.80, pour montrer que  $\gamma_{\times 2}[G(P_{\ell,u})] = 2$ , il suffit de montrer que  $|\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| \geq 2$ . On a  $|\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| = |[(\ell, \ell), (u - n_2, u - n_1)]| \geq 2$  (voir Figure 14), donc  $|\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| \geq 2$  et par suite  $\gamma_{\times 2}[G(P_{\ell,u})] = 2$ .

**Exemple**

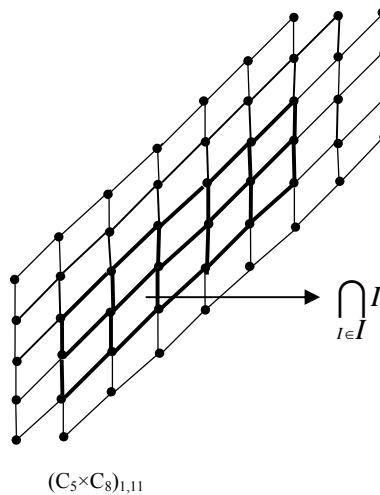


Figure 14

Montrons maintenant que  $\gamma_{\times 2}[G(P_{\ell,u})] = 3$  si  $\ell = u - n_2$  et  $n_1 = n_2$ .

Puisque  $|\{\cap I, I \in \mathcal{J}\}| \neq 2$ , alors d'après la Proposition 2.81, on a  $\gamma_{\times 2}(P_{\ell,u}) \neq 2$ .

Soit  $D = \{(\ell, \ell), (\ell + 1, \ell), (\ell, \ell + 1)\}$  un ensemble de sommet de  $G(P_{\ell,u})$  et Montrons que D est un ensemble dominant double.

Si x est un sommet de D, alors  $\forall x \in D |N[x] \cap D| \geq 2$ .

Si x est un sommet de  $G(P_{\ell,u}) - D$ .

Considérons :

$$I_k = \begin{cases} [(k, \ell-k), (u-n_2+k, n_2-k)] & \text{si } k=0, \dots, \ell \\ [(\ell, 0), (u-n_2+k, n_2-k)] & \text{si } k=\ell+1, \dots, n_1+n_2-u \end{cases}$$

$D \cap I_k \neq \emptyset$  de plus on a  $|D \cap I_k| \geq 2$ . Pour tout  $k$ . On en déduit que  $D$  est bien un ensemble dominant double minimum de  $G(P_{\ell, u})$ . D'où  $\gamma_{\times 2}[G(P_{\ell, u})] = 3$ .

**Exemple**

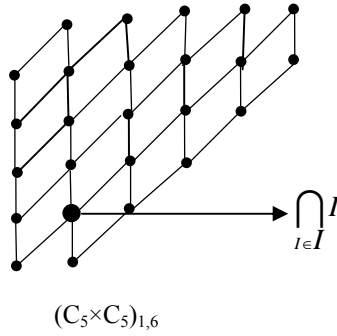


Figure15

## Chapitre 3

### Nombre domatique double

On s'intéresse dans ce chapitre au nombre domatique double du graphe représentatif des intervalles d'un poset. Nous donnons dans un premier temps un petit survey sur cet invariant. Puis nous prouvons quelques résultats sur le nombre domatique double de  $G(P)$  où  $P$  est obtenu à partir d'une opération donnée.

#### 3.1 Survey sur le nombre domatique double

Harary et Haynes ont établi une borne pour le nombre  $k$ -domatique en terme de degré minimum  $\delta$ .

##### **Théorème 1 [41]**

Soit  $k$  un entier positif, et  $G$  un graphe ayant  $\delta \geq k-1$ . Alors

$$d_k \leq \left\lfloor \frac{\delta+1}{k} \right\rfloor.$$

En particulier,

si  $k=2$  et  $G$  admet une partition domatique double en  $\left\lfloor \frac{\delta+1}{2} \right\rfloor$  ensemble dominant

double alors  $d_2 = \left\lfloor \frac{\delta + 1}{2} \right\rfloor$ .

Pour les graphes qui ont un degré  $\delta \geq k-1$ , on a :

### Corollaire 2 [33]

Soit  $G$  un graphe tel que  $k-1 \leq \delta \leq k$ , alors  $d_k(G) = 1$ .

Harary et Haynes[41] ont posé un problème qui consiste à caractériser les graphes pour lesquelles  $d_k \geq 2$ . Le Corollaire 2 implique que si  $d_2 \geq 2$  alors  $\delta \geq 3$ . Le graphe de Peterson vérifie  $\delta(P) = 3$  et  $\gamma_{\times 2}(P) = 6$ , ce qui donne  $d_2(P) = 1$ . Par contre le graphe cubique peut avoir  $d_{\times 2} \geq 2$  comme on peut le voir avec  $d_2(K_4) = 2$ . Ce qui signifie que la réciproque du corollaire 2 est fautive en général.

Le problème de la caractérisation des graphes ayant  $d_k \geq 2$  demeure jusqu'à aujourd'hui un problème ouvert.

## 3.2 Inégalité de type Nordhaus-Gaddum

Harary et Haynes[41] ont établi une inégalité de type Nordhaus-Gaddum pour le nombre chromatique double.

### Théorème 3 [41]

Soit  $G$  un graphe tel que  $\bar{\delta} \geq k-1$ . Alors

$$d_k + \bar{d}_k \leq \frac{n - \Delta + \delta + 1}{k}.$$

### Définition 4

Soit  $r$  un entier, le produit de  $r$  chaînes  $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}$  est un poset à  $\prod\{(n_i + 1) ; i = 1 \dots r\}$  sommets de la forme  $(a_1, \dots, a_r)$  ou  $0 \leq a_i \leq n_i$  pour  $1 \leq i \leq r$ . Le sommet  $(b_1, \dots, b_r)$  couvre le sommet  $(a_1, \dots, a_r)$  si et seulement si il existe un unique indice  $j$  tel que  $b_j - a_j = 1$  et  $\forall i \neq j, a_i = b_i$ .

### 3.3 Nombre domatique double de $G (P*Q)$

Plusieurs posets sont définis à partir d'opérations. Nous pouvons citer les treillis booléens, les posets série parallèles,... . D'où l'intérêt de cette étude.

#### 3.3.1 Somme directe

##### Proposition 1

Soient  $P$  et  $Q$  deux posets. Nous avons

$$d_2 [G (P+Q)] = \min [d_2(G (P)), d_2(G (Q))].$$

##### Preuve

Soit  $\mathcal{D}$  une partition domatique double maximum de  $G (P +Q)$  et soit  $\mathcal{D}^1$  (resp.  $\mathcal{D}^2$ ) une partition domatique double de  $G (P)$  (resp. de  $G (Q)$ ). Nous avons  $d_2 [G (P+Q)] = k \leq |\mathcal{D}^1| \leq d_2(G (P))$  et  $d_2 [G (P+Q)] = k \leq |\mathcal{D}^2| \leq d_2(G (Q))$ . Ainsi,  $d_2(G (P+Q)) \leq \min \{d_2(G (P)), d_2(G (Q))\}$

Inversement,

Soient  $D_1, \dots, D_{d_2(G (Q))}$  (resp.  $D'_1, \dots, D'_{d_2(G (P))}$ ) une partition domatique double de  $G(Q)$  (resp. de  $G(P)$ ) et supposons sans perte de généralité que  $d_2(G(Q)) \leq d_2(G(P))$  alors :  $(\bigcup_{i \geq d_2(G(Q))} D_i \cup D'_1 \cup D'_1) \cup \{D_i \cup D'_i; i = 2, \dots, d_2(G(Q))\}$  constitue une

partition domatique double de  $G (P+Q)$ , c.à.d  $d_2(G (P+Q)) \geq \min [d_2(G (P)), d_2(G (Q))]$ . D'où l'égalité.

#### 3.3.2 Somme linéaire

##### Proposition 2

Soient  $P$  et  $Q$  deux posets. Nous avons  $d_2 [G (P \oplus Q)] \geq d_2[G (P)] + d_2[G (Q)]$ .

##### Preuve

Montrons que tout ensemble dominant double  $D$  de  $G (P)$  (resp.  $D'$  de  $G (Q)$ ) est un ensemble dominant double de  $G (P \oplus Q)$ .

Soit  $D$  un ensemble dominant double de  $G (P)$  et soit  $x \in V (G (Q))$ .

$x$  est donc soit un sommet minimal de  $G(Q)$ , et par l'opération  $\oplus$ ,  $x$  est adjacent à tout sommet de  $G(P)$  dans  $G(P \oplus Q)$ , en particulier à ceux de  $D$  soit  $x$  n'est pas un sommet minimal de  $G(Q)$  et alors il existe une chaîne dans  $Q$  reliant  $x$  à un sommet minimal de  $G(Q)$  qui lui-même est relié à tout sommet de  $D$  dans  $G(P \oplus Q)$ .  $D$  est alors un ensemble dominant double de  $G(P \oplus Q)$ .

Soit  $D'$  un ensemble dominant double de  $G(Q)$  et soit  $y \in V(G(P))$ .

Un raisonnement similaire montre que tout ensemble dominant double de  $G(Q)$  est dominant double dans  $G(P \oplus Q)$ .

On conclut que si  $\mathcal{D}$  est une partition domotique double de  $G(P)$  et  $\mathcal{D}'$  est une partition domotique double de  $G(Q)$  alors  $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$  est une partition domotique double de  $[G(P \oplus Q)]$  et par suite  $d_2[G(P \oplus Q)] \geq d_2[G(P)] + d_2[G(Q)]$ .

### Exemple

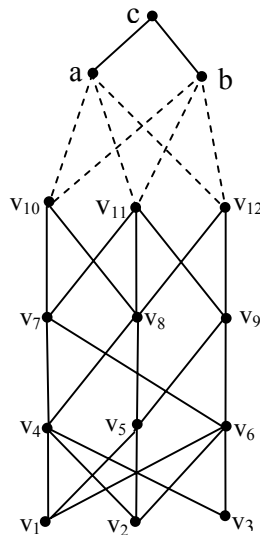


Figure7

$$\mathcal{D} = \{\{1, 8, 12\}, \{2, 10, 11\}, \{3, 5, 9\}, \{4, 6, 7\}\}, \quad d_{\times 2}[G(P)] = 4 = \left\lfloor \frac{\deg(v_3) + 1}{2} \right\rfloor.$$

$$\mathcal{D}' = \{\{a, b, c\}\}, \quad d_{\times 2}[G(Q)] = 1;$$

La partition domotique double de  $G(P \oplus Q)$  est donné par :

$$\{1, 2, 3, a\}, \{4, 5\}, \{6, b\}, \{7, c\}, \{8, 9\}, \{10, 11, 12\} = 6 = \left\lfloor \frac{\deg(v_3) + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\delta(G(P \oplus Q)) + 1}{2} \right\rfloor.$$

### 3.3.3 le nombre domatique double de $G(C_n \times P)$

#### Proposition 3

Soient  $P$  un poset et  $C_n$  une chaîne de longueur  $n$ . Nous avons

$$d_2(G(C_n \times P)) \geq (n+1) d_2(G(P)).$$

#### Preuve

Soit  $C_n = (a_0 \prec \dots \prec a_n)$  une chaîne de longueur  $n$  et  $P_i = a_i P = \{(a_i, x), x \in P\}$  une copie de  $P$ .

Montrons que :

Si  $D$  est un ensemble dominant double de  $P$ , alors  $a_i D = \{(a_i, x), x \in D\}$  est un ensemble dominant double de  $G(C_n \times P)$ ,  $\forall i=0, \dots, n$ .

Soit  $(a_j, x) \in (C_n \times P) - a_i D$ . Nous distinguons trois cas :

**1<sup>er</sup> cas :**  $i = j$

$(a_j, x)$  n'est pas un élément de  $a_i D$  signifie que  $x \notin D$  et comme  $D$  est un dominant double de  $G(P)$ , donc il existe deux éléments  $y$  et  $z$  de  $D$  tels que  $x$  est adjacent à  $y$  et à  $z$  dans  $G(P)$ , c'est à dire, il existe un intervalle de  $P$  contenant  $x, y$  et  $z$ . Ainsi,  $(a_i, x)$ ,  $(a_i, y)$  et  $(a_i, z)$  sont dans un même intervalle de  $G(C_n \times P)$ .

**2<sup>eme</sup> cas :**  $i \neq j$  et  $x \notin D$

Comme  $x \notin D$  et  $D$  est un ensemble dominant double de  $G(P)$ , il existe deux sommets  $y$  et  $z$  de  $D$  tels que  $x, y$  et  $z$  sont dans un même intervalle  $[p, q]$  de  $P$ .

Si  $i < j$ , nous avons  $(a_i, p) < (a_j, p) < (a_j, x)$ ,  $(a_j, y)$ ,  $(a_j, z) < (a_j, q)$ . Autrement dit,  $(a_j, x)$ ,  $(a_j, y)$  et  $(a_j, z)$  sont dans l'intervalle  $[(a_j, p), (a_j, q)]$  de  $C_n \times P$ .

Si  $j < i$ , un raisonnement analogue produit le même résultat.

**3<sup>eme</sup> cas :**  $i \neq j$  et  $x \in D$

Si  $i < j$  alors  $(a_i, x) < (a_j, x)$ . et donc  $(a_i, x)$  et  $(a_j, x)$  sont dans un même intervalle de  $C_n \times P$ . Donc  $a_i D = \{(a_i, x), x \in D\}$  est un ensemble dominant double de  $G(C_n \times P)$ ,  $\forall i=0, \dots, n$ .

#### Exemple

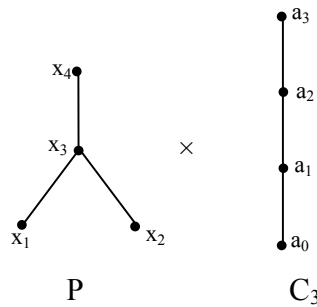


Figure 8

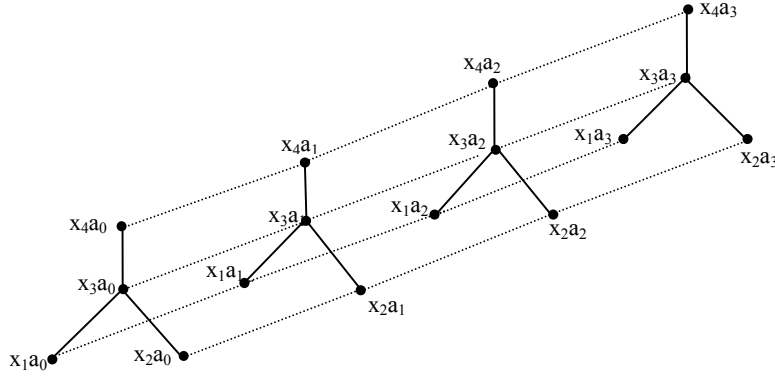


Figure 9

On a  $d_2(G(P)) = |\{x_1, x_2, x_3, x_4\}| = 1$  et  $d_2(G(C_3)) = 2$ . La partition domatique double de  $G(C_3 \times P)$  est donné par :

$\{x_1a_0, x_2a_0, x_4a_3\}, \{x_3a_0, x_4a_0\}, \{x_1a_1, x_2a_1, x_3a_3\}, \{x_3a_1, x_4a_1\}, \{x_1a_2, x_1a_3, x_2a_2, x_2a_3\}, \{x_3a_2, x_4a_2\}$ ,  $d_{\times 2}(G(C_3 \times P)) = 6 = \left\lfloor \frac{\deg(x_1a_0) + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\delta(G(C_n \times P)) + 1}{2} \right\rfloor > (n+1) \times d_{\times 2}(G(P)) = 4$ .

### Théorème 1

Soient  $P$  un poset et  $C_n$  une chaîne. Si  $G(P)$  est domatiquement double plein alors :

$$d_{\times 2}(G(P \times C_n)) = (n+1) d_2(G(P))$$

### Preuve

de la Proposition, on a  $d_2(G((P \times C_n))) \geq (n+1) d_2(G(P))$

Par ailleurs,

$$d_2(G(C_n \times P)) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G(C_n \times P)) + 1}{2} \right\rfloor$$

Mais,  $\forall x \in P, \forall i = 0, \dots, n, \deg_{G(C_n \times P)} = (n+1) \deg_{G(P)}(x) + n$ , donc  $\delta(G(C_n \times P)) = (n+1)(\delta(G(P)) + 1) - 1 = (\delta(G(C_n)) + 1)(\delta(G(P)) + 1) - 1$ .

Ainsi,  $d_{\times 2}(G(C_n \times P)) \leq (n+1) \left\lfloor \frac{\delta(G(P))+1}{2} \right\rfloor$

Or  $G(P)$  est domatiquement double plein alors  $d_{\times 2}(G(P)) = \left\lfloor \frac{\delta(G(P))+1}{2} \right\rfloor$

D'où  $d_{\times 2}(G(C_n \times P)) \leq (n+1) d_{\times 2}(G(P))$  et l'égalité  $d_{\times 2}(G(C_n \times P)) = (n+1) d_{\times 2}(G(P))$  en découle.

### 3.4 Le nombre domatique double du graphe représentatif des intervalles de $(C_{n_1} \times C_{n_2})_{\ell,u}$

Considérons dans cette partie, le produit direct  $P = C_{n_1} \times C_{n_2}$  de deux chaînes de longueurs  $n_1$  et  $n_2$  respectivement où  $n_1 \leq n_2$ . Nous nous intéressons au sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs  $P_{\ell,u} = N_\ell \cup \dots \cup N_u$  de  $P$ ,  $0 \leq \ell \leq u \leq n_1+n_2$ . Soit  $G_{\ell,u}$  le graphe représentatif des intervalles maximaux de  $P_{\ell,u}$ .

**Lemme 1[45]**

L'intervalle  $[(i, j), (i', j')]$  est isomorphe au produit  $C_{i'-i} \times C_{j'-j}$ ,  $\forall i, i', j, j' \in \mathbb{N}$  tel que  $i \leq i'$  et  $j \leq j'$ .

**Exemple**

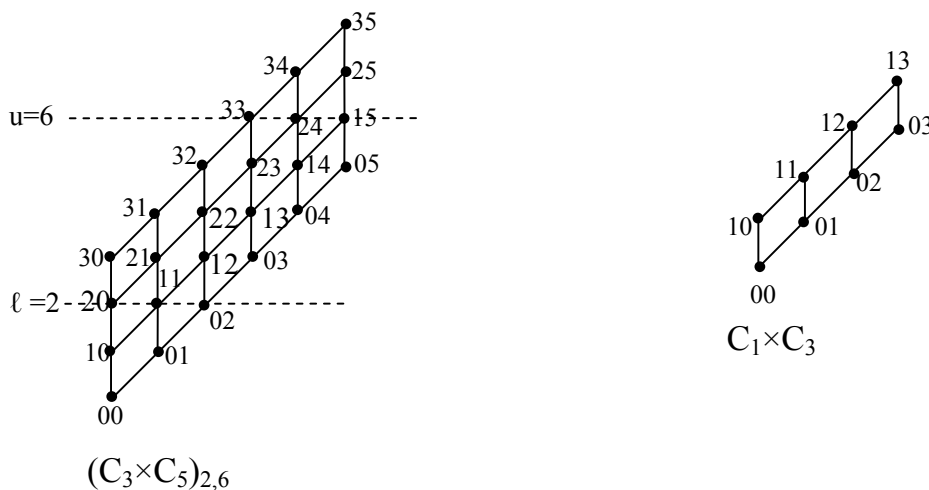


Figure 11

## Théorème 2

Si  $(u > n_2 \text{ et } \ell \geq n_1)$  ou  $u \leq n_2$ , nous avons  $d_{\times 2}(G_{\ell,u}) = \left\lfloor \frac{u - \ell + 1}{2} \right\rfloor$ .

### Preuve

" $\leq$ ". Soit  $\ell, u, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Si  $u > n_2$  et  $\ell \geq n_1$ , nous avons :

$$\delta(G_{\ell,u}) = \deg_{G_{\ell,u}}(n_1, \ell - n_1) = |\{(x,y) \in P_{\ell,u} : x=n_1 \text{ et } y > \ell - n_1\}| = |\{(x,y) : \ell \leq x+y \leq u ; x=n_1 \text{ et } y > \ell - n_1\}| = |\{y \in \mathbb{N} ; \ell - n_1 < y < u - n_1\}| = u - \ell$$

$$\begin{aligned} \text{Si } u \leq n_2, \text{ nous avons } \delta(G_{\ell,u}) &= \deg_{G_{\ell,u}}(0,u) \\ &= |\{(x,y) \in P_{\ell,u} : x=0 \text{ et } y < u\}| \\ &= |\{(x,y) : \ell \leq x+y \leq u, x=0, y < u\}| \\ &= |\{y \in \mathbb{N} : \ell \leq y \leq u\}| \\ &= u - \ell \end{aligned}$$

$$\text{D'où } d_2(G_{\ell,u}) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G_{\ell,u}) + 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{u - \ell + 1}{2} \right\rfloor.$$

" $\geq$ ". Soit  $i, 1 \leq i \leq \frac{u + \ell}{2}$ . L'union  $N_i \cup N_{u+\ell-i}$  représente un ensemble dominant double de  $G_{\ell,u}$ , donc  $\{N_i \cup N_{u+\ell-i}, \ell \leq i \leq \frac{u + \ell}{2}\}$  constitue une partition domatique double de  $G_{\ell,u}$  de cardinalité  $\left\lfloor \frac{u - \ell + 1}{2} \right\rfloor$ . Par suite,  $d_2(G_{\ell,u}) \geq \left\lfloor \frac{u - \ell + 1}{2} \right\rfloor$  et l'égalité en découle.

### Exemple

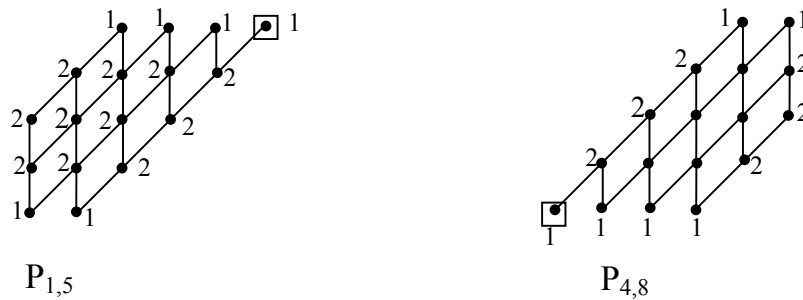


Figure 12

Posons  $D_i = \{(x, y) \in P_{1,5} : \text{couleur}[(x, y)] = i\}$ ,  $i=1, 2$ .  $\{D_1, D_2\}$  est une partition domatique double optimale de  $G(P_{1,5})$ . De même, si  $D'_i = \{(x', y') \in P_{4,8} : \text{couleur}[(x',$

$y')]= i\}$ ,  $\{D'_1, D'_2\}$  est une partition domatique double optimale de  $G$  ( $P_{4,8}$ ).

### **Théorème 3**

Pour tous  $l, u$  tels que  $l < n_1$  et  $u > n_2$ , nous avons

$$d_{\times 2}(G_{l,u}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(u-n_2+1)(n_2-l+1)}{2} \right\rfloor & \text{si } l+u \leq n_1+n_2 \\ \left\lfloor \frac{(u-n_1+1)(n_1-l+1)}{2} \right\rfloor & \text{si } l+u \geq n_1+n_2 \end{cases}$$

### **Preuve**

Nous nous limitons qu'au cas où  $l+u \leq n_1+n_2$ . L'autre cas se déduit directement par dualité.

" $\leq$ "

Des relations  $d_{\times 2}(G) \leq \left\lfloor \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rfloor$  [41] et  $\delta(G_{l,u}) = (u-n_2+1)(n_2-l+1) - 1$  [52], nous déduisons  $d_{\times 2}(G_{l,u}) \leq \left\lfloor \frac{(u-n_2+1)(n_2-l+1)}{2} \right\rfloor$ .

" $\geq$ "

Montrons que les  $\left\lfloor \frac{(u-n_1+1)(n_1-l+1)}{2} \right\rfloor$  ensembles  $D_{i,j}$  définis ci-dessous, forment une partition domatique double. Nous distinguons deux cas :

#### **Cas 1** $(u-l)/2 \notin \mathbb{IN}$

Pour  $i=0, \dots, \left\lfloor \frac{u-l}{2} \right\rfloor$  posons

$$J_i = \begin{cases} \{0, \dots, i\} & \text{si } i \leq u-n_2-1, \\ \{0, \dots, u-n_2\} & \text{si } u-n_2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{u-l}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Considérons les sous ensembles  $D_{i,j}$  définis de la manière suivante :

Pour  $i=0, \dots, u-n_2-1, j \in J_i$  posons

$$D_{i,j} = \{(k, \ell+i-k), (u-n_2-i+k, n_2-k) : k \equiv j [i+1]\}$$

Pour  $i = u-n_2, \dots, \left\lfloor \frac{u-\ell}{2} \right\rfloor$  et  $j \in J_i$  posons

$$D_{i,j} = \{(k, \ell+i-k), (k, u-i-k) : k \equiv j [u-n_2+1]\}$$

Afin d'illustrer ces ensembles sur un diagramme de Hasse, nous attribuons aux éléments de l'intervalle  $[(0, \ell), (u-n_2, n_2)]$  situés au dessous du niveau  $N_{\ell+\left\lfloor \frac{u-\ell}{2} \right\rfloor}$  (y compris ceux qui sont sur ce niveau) des couleurs différentes. En suite, nous affectons ces mêmes couleurs aux sommets situés au dessus du niveau  $N_{\ell+\left\lfloor \frac{u-\ell}{2} \right\rfloor}$  (y compris les sommets de ce niveau) par symétrie dans la copie du produit  $C_{u-n_2} \times C_{n_2-\ell}$ .

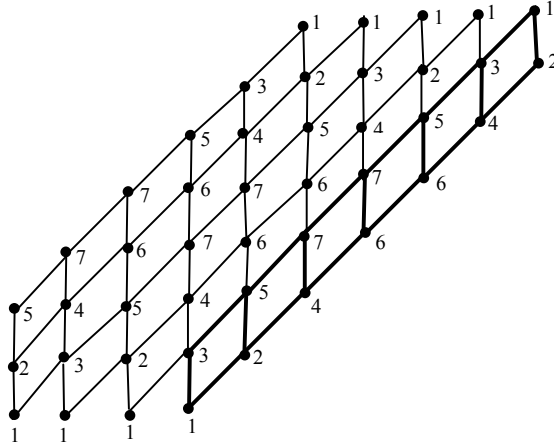
Nous complétons la coloration de  $G_{\ell,u}$ , en procédant comme suit :

En allant de droite à gauche sur le même niveau  $N_{\ell+i}$ , nous attribuons successivement au premier sommet non coloré la couleur du premier de droite coloré, puis au deuxième sommet non coloré la couleur de deuxième sommet de droite coloré et on continue la même procédure jusqu'à épuisement de tous les sommets de  $G_{\ell,u}$ .

Les sommets de même couleur constituent un ensemble dominant double de  $G_{\ell,u}$ , comme le montre l'exemple de la Figure 12.

Evidemment, pour tout  $i \in \{0, \dots, \left\lfloor \frac{u-\ell}{2} \right\rfloor\}$ . On a

$\{D_{i,j} : j \in J_i\}$  forme une partition domatique double de  $G_{\ell,u}$ .



$$(C_5 \times C_9)_{3,10}$$

Figure 13

Il nous reste à montrer que les ensemble  $D_{i,j}$  définis précédemment sont des ensembles dominants doubles de  $G_{l,u}$ .

Considérons pour cela les  $(n_1+n_2-u+1)$  intervalles suivants :

$$I_k = \begin{cases} [(k, \ell-k), (u-n_2+k, n_2-k)] & \text{si } k=0, \dots, \ell \\ [(\ell, 0), (u-n_2+k, n_2-k)] & \text{si } k=\ell+1, \dots, n_1+n_2-u \end{cases}$$

Il est clair que tout intervalle  $I_k$  contient deux (resp. au moins) deux éléments de chaque  $D_{i,j}$  pour tout  $i, j$  pour  $k=0, \dots, \ell$  (resp.  $k=\ell+1, \dots, n_1+n_2-u$ ) c.à.d

$$|I_k \cap D_{i,j}| \geq 2 \quad \forall i,j,k$$

Cependant, les intervalles  $I_k$  couvrent tous le poset  $P_{\ell,u}$ , donc, chaque sommet est adjacent à deux éléments de  $D_{i,j}$  pour tout  $i,j$ , ce qui implique que les

$\left\lfloor \frac{(u-n_2+1)(n_2-\ell+1)}{2} \right\rfloor$  ensembles  $D_{i,j}$  constituent une partition domatique double de

$G_{l,u}$ . D'où  $d_{\times 2}(G) \geq \left\lfloor \frac{(u-n_2+1)(n_2-\ell+1)}{2} \right\rfloor$  et l'égalité en découle.

**Cas 2:**  $(u-\ell)/2 \in \mathbb{N}$

Pour  $i=0, \dots, \frac{u-\ell}{2}$  posons

$$J_i = \begin{cases} \{0, \dots, i\} & \text{si } i \leq u - n_2 - 1, \\ \{0, \dots, u - n_2\} & \text{si } u - n_2 \leq i \leq \frac{u-\ell}{2} - 1, \\ \{0, \dots, \lfloor \frac{u-n_2-1}{2} \rfloor\} & \text{si } i = \frac{u-\ell}{2}. \end{cases}$$

Considérons les sous ensembles  $D_{i,j}$  définis comme suit :

Pour  $i=0, \dots, u-n_2+1, j \in J_i$  posons

$$D_{i,j} = \{(k, \ell+i-k), (i-n_2+1+k, n_2-k); k \equiv j \pmod{i+1}\}$$

Pour  $i = u-n_2, \dots, \frac{u-\ell}{2} - 1, j \in J_i$  posons

$$D_{i,j} = \{(k, \ell+i-k), (k', \ell+i-k) : k \equiv j \pmod{u-n_2+1}\}$$

Pour  $i = \frac{u-\ell}{2}$  posons

$$D_{i,j} = \{(k, \ell+i-k), k \equiv j \pmod{\lfloor \frac{2n_2-\ell-u}{2} \rfloor}\}$$

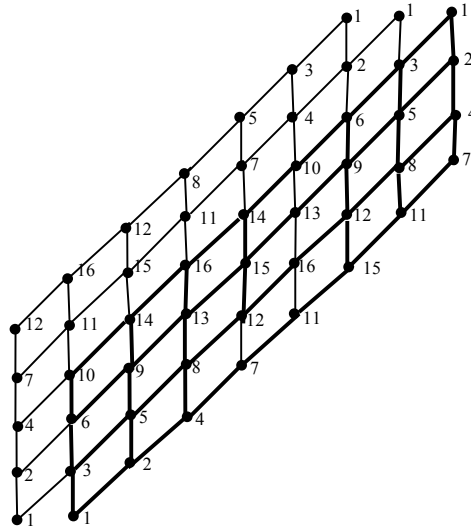


Figure 14

$(C_5 \times C_8)_{1,11}$

Nous expliquons l'illustration des ensembles  $D_{i,j}$  du cas 2 que pour  $i = \frac{u-\ell}{2}$ , puisque les autres ensembles sont identiquement similaires au cas 1.

Nous attribuons successivement aux éléments de la première moitié situés sur le niveau  $N_{\ell+\frac{u-\ell}{2}}$  de l'intervalle  $[(0, \ell), (u-n_2, n_2)]$  des couleurs différentes, ensuite nous affectons ces mêmes couleurs aux éléments de la deuxième moitié de ce niveau.

Nous complétons la coloration de  $G_{1,u}$  en procédant de la même manière que dans le cas 1.

## Conclusion générale

Nous avons traité dans cette thèse deux paramètres : le nombre de domination double et le nombre domatique double dans la classe des graphes représentatifs des intervalles d'un poset.

Nous avons établi un survey sur la majorité des travaux réalisés dans la littérature concernant ces deux paramètres.

Nous avons établi une relation entre  $d_2(G(P+Q))$  (resp.  $\gamma_{\times 2}[G(P+Q)]$ ) et  $d_2(G(P))$  et  $d_2(G(Q))$  (resp.  $\gamma_{\times 2}[G(P)]$  et  $\gamma_{\times 2}[G(Q)]$ ). Nous avons réalisé une borne pour  $\gamma_{\times 2}[G(P \oplus Q)]$  qui est atteinte si l'un des deux posets est un ordre série parallèle connexe. Nous avons traité le produit d'une chaîne de longueur  $n$  par un poset  $P$ . et le cas particulier lorsque  $P$  est domatiquement double plein.

Nous nous sommes intéressés ensuite à ces deux invariants du graphe représentatif des intervalles du sous poset induit par l'union des niveaux consécutifs  $N_\ell \cup \dots \cup N_u$  du produit de deux chaînes  $C_{n_1} \times C_{n_2}$ . Pour toutes les valeurs de  $\ell, u$ , l'ensemble dominant double optimal et la partition domatique double optimale sont données.

Comme perspectives, nous proposons l'étude des problèmes suivants:

- Trouver le nombre de domination double et le nombre domatique double du graphe  $G(\prod_{i=1}^n C_{l_i, u_i})$ .
- Déterminer  $\gamma_{\times 2}(G(P*Q))$  et  $d_2(G(P*Q))$  où  $*$  est le produit direct, produit linéaire, produit direct par rangés.....
- Déterminer le nombre de domination double  $\gamma_{\times 2}(G_{l,u})$  si ( $u > n_2$  et  $\ell \geq n_1$ ) ou  $u \leq n_2$ .

## Références

- [1] R. B.Allan, R. C. Laskar, and S.T.Hedetniemi, A note on total domination. *Discret Math.* 49 (1984) 7-13.
- [2] M. Aouane, Approche algorithmique pour la résolution de quelques problèmes dans les posets. Thèse de Magistère en Mathématiques USTHB, Faculté de Mathématiques, Algérie, 2005.
- [3] S.Arumugam, A. Thuraiswamy; total domatic number of a graph. Submitted to bulletin of the institute of combinatorics and its Applications.
- [4] Arumuam, and J.P. Joseph, On the connected domatic number of a graph. *J.Ramanujan Math. Soc.* 9, 69-77 (1994)
- [5] D. W.Banerjee and D. Ferrero, on paired domination in planer graphs *Combiaterax* 2003.
- [6] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, and P. J. Slater, A constructive characterization of Trees with two disjoint minimum dominating sets. *Congr. Numer.* 21(1978) 101-112.
- [7] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, and P. J. Slater, Efficient dominating sets in graphs, In R. D. Ringeisen
- [8] C.Berge, Theory of graphs and its applications. Methuen, London, (1985,1962).
- [9] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (*North Holland, Amsterdam,1973*).
- [10] S.L. Bezrukov and K. Engel. Properties of graded posets preserved by some operation . In R.L. Graham and J. Nešetřil, editors, *Mathematics of Paul Erdos*, Springer-Verlag, Berlin. *Algorithmes Comb.* 14 : 79-85(1985).
- [11] M.Blidia, M. Chellali, Nouvelle borne supérieure pour les paramètres de domination. Rencontre des Mathématiciens Algériens RMA2000, Alger.
- [12] M. Blidia, M. Chellali et T.Haynes, Characterizations of trees with equal paire and double domination numbers. soumis à *Discrete mathematics*. (2003)

- [13] M. Blidia, M Chellali et F. Maffray, Extremal graphs for a new upper bound on domination parameters in graphs. Soumis à *Discrete Mathematics*.(2003)
- [14] M. Blidia, M. Chellali, T. Haynes et M. Henning, Independent and double domination in trees. Soumis à *Utilitas Math*.(2003)
- [15] I. Bouchemakh, sur quelques problème extrémaux dans les ordres partiels finis, Thèse de doctorat, USTHB, Algérie, (2001).
- [16] I.Bouchemakh, stabilité et recouvrement par intervalles dans les Ordres partiels finis. Thèse de magistère, USTHB, Algérie, (1991)
- [17] I.Bouchemakh, on König and dual könig properties of the order interval hypergraphs of series-parallel posets. Rostock. Math. Kolloq, 56:3-8, (2002).
- [18] I.Bouchemakh and K.Engel. Interval stability and interval covering property in finite posets. *Order*, 9: 163-175 (1992).
- [19] I.Bouchemakh and K.Engel. The order-interval hypergraph of a Finite poset and the konig property. *Discrete Math*, 170: 51-61 (1997).
- [20]I.Bouchemakh. On the chromatic number of order-interval Hypergraph Rostock.Math. Kolloq. 54: 81-89 (2000).
- [21] I.Bouchemakh. On the k-independence number in the Boolean lattice. A paraître dans Maghreb Mathematic Review.
- [22] I.Bouchemakh, S.Ouatiki, On the domatic numbers and k-tuple domatic numbers of the 2-section graph of the order-interval hypergraph of a finite poset. A paraître dans *Discret Maths*
- [23] N.G. de Bruijn, C.A.V.E. Tengbergen, and D.Kruyswijk. On the set of divisors of a number; *Nieuw Arch. Wiskunde*, 23: 191-193 (1951).
- [24] E. R Canfield. A Sperner property preserved by product. *Linear and Multilinear Algebra*, 9: 151-157 (1980).
- [25] G. J. Chang, The domatic number problem, *Discrete Mathematics* 125, 115-122 (1984) North-Holland.
- [26] M. Chellali et T.W.Haynes, On paired and double domination in graphs. *Accepté*

à Utilitas Math.

- [27] M. Chellali et T.W. Haynes, Trees with unique minimum paired Dominating sets. Accepté à Ars Combinatoria.
- [28] M. Chellali A. Khelladi et F. Maffray, Exact double domination in Graphs. Soumis à Discussiones Mathematicae graph Theory (2003)
- [29] M.Chellali et L.Volkman, Relations between the lower domination Parameters and the chromatic number of a graph. Discrete Mathematics 274(2004) 1-8.
- [30] M. Chellali, Relations entre les paramètres de domination inférieur et le nombre chromatique d'un graphe. Journées des mathématiques Appliquées JMA 2000, Blida
- [31] M.Chellali, Etude de quelques invariants de graphes, thèse de Doctorat, 2004, USTHB.
- [32] M.Chellali, Bounds on the 2- domination number in cactus graphs.
- [33] E.J.Cockayne et S.T.Hedetniemi. Towards a theory of domination in graphs. Networks, 7(1977) 247-261.
- [34] E.J.Cockayne, S.T.Hedetniemi and D.J.Miller. Propertie of hereditary Hypergrahs and middle graphs. Canad. Math. Bull. 21 (1978), 461-468.
- [35] C.F.DeJaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu d'échecs. Petrograde (1862)
- [36] S.Erfanga, D.Chuangvin and K.Liyang, A note on NordhaunGaddum inequalities for domination. A paraître dans Disc. App. Math
- [37] M.Farber, domination, independent domination and duality in strongly chordal graphs. Discrete Appl. Math. 7(1984) 115-130.
- [38] O.Favaron, A bound on the independent domination number of aTree. Internat. J.Graph Ytheory, 1(1992) 19 -27.
- [39] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F.Kinch and J.Roberts, on graphs having domination numbers half their order. Period. Math. Hungar 16(2002) 117-124.

- [40] M.R.Garey and J.S.Jonhson Computers and Intractability. A guide of the theory of the theory of NP-Completeness. Freeman, New York. 1979.
- [41] F.Harary and T.W.Haynes, Double domination in graphs. *Ars Combin.* 55 (2000) 201-213.
- [42] F.Harary and T.W.Haynes, Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs. *Discrete Math.* 155 (1996) 99-105.
- [43] F.Harary and T.W.Haynes, The k-tuple domatic number of a graph. *Math, Slovaca* 48 (1998), No. 2, 161-166.
- [44] F.Harary and S.T.Hedetniemi and P.J.Slater, *Domination in graphs: Advanced topics.* Marcel Decker, Inc. New York, 1998.
- [45] T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi and P.J.Slater, *Fundamentals of Domination in graphs.* Marcel Decker, Inc. New York, 1998.
- [46] M.Henning, Graphs with large total domination number. *J.Graphs Theory* 35(1)(2000) 21-45.
- [47] Jacobson et Fink, L.F.Kinch and J.Roberts, On graphs having domination number half their order. *Period. Math. Hungar* 16(1985), 247-251.
- [48] C-S Liao and G.J.Chang, Algorithmic aspect of k-tuple domination in graphs. *Taiwanese J.Math.* Vol 6, N°3(2002) 415 – 420.
- [49] C-S Liao and G.J.Chang, k-tuple domination in graphs. *Information Processing Letters* 87(2003) 45-50.
- [50] S.Ouatiki, sur le nombre domatique du graphe représentatif des intervalles d'un poset, Thèse de magistère, USTHB.
- [51] O.Ore, *Theory of graphs.*Amer.Soc.Colloq .Pub 38, Providence, R.I. (1962).
- [52] I. Rial. Stories about the letter N(en). In *Combinatorics and Ordered Sets*, ed; I. Rival. *Contemporary Mathematics*, 57:263-285 (1986).
- [54] A. Sali. Costructions of ranked posets. *Discrete Math*, 70: 77-83 (1988).

- [55] B. Voigt and I. Wegener. A remark on minimal polynomials of Boolean functions. In E. Borger, H. Klein Buning, and M. M. Richter, editors, *CLS 88 Proc 2<sup>nd</sup> Workshop Computer, Science, logic, Duisburg 1988*, vol. **385** of lecture Notes in Comput. Sci, 372-383, Springer-Verlag, Berlin, New York (1989).

## Résumé

Soit  $P$  un poset fini. Nous nous intéressons dans ce travail au nombre de domination double et au nombre domatique double dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset  $P$  où  $P$  est soit la somme linéaire ou la somme directe de deux autres posets soit l'union de niveaux consécutifs  $N_1 \cup \dots \cup N_u$  du produit de deux chaînes  $C_{n_1} \times C_{n_2}$ . Pour toutes les valeurs de  $1, u$ , l'ensemble dominant double optimal et la partition domatique double optimale seront donnés.