

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté des Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT

En : Mathématiques

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

Par : **OUATIKI SALIHA**

Thème

DOMINATION ET CYCLES

Soutenue publiquement le 31 octobre 2011, devant le jury composé de :

M. AIDER Méziane	Professeur à l'USTHB,	Président.
M ^{lle} BOUCHEMAKH Isma	Professeur à l'USTHB,	Directrice de Thèse.
M ^{me} KOUIDER Mekkia	M. C habilitée à l'Université Paris-Sud XI,	Co-Dtrice de Thèse.
M. BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur à l'USTHB,	Examineur.
M. BOUROUBI Sadek	Professeur à l'USTHB,	Examineur.
M. KHEDDOUCI Hamamache	Professeur à l'Université Lyon I, France,	Examineur.
M. CHELLALI Mustapha	M. C/ A, USD Blida,	Examineur.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mes deux encadreurs Mesdames I. Bouchemakh et M. Kouider qui m'ont orienté et initié à la recherche. Votre disponibilité, rigueur et engouement scientifique ainsi que gentillesse et sympathie m'ont permis d'évoluer dans un bon climat en tirant un maximum de profits.

Je prie Madame I. Bouchemakh de trouver ici ma vive gratitude pour son soutien et ses encouragements durant toute la période de la réalisation de cette thèse.

Je remercie également et chaleureusement Madame M. Kouider de m'avoir accueillie dans son laboratoire de recherche et de m'avoir assistée pendant mon stage.

J'exprime à vos deux ma sincère reconnaissance et ma profonde estime.

Mes vifs remerciements vont également au professeur M. Aider qui me fera l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je prie Messieurs A. Berrachedi, professeur à l'USTHB, S. Bouroubi, professeur à L'USTHB, M. Chellali, maître de conférences habilité à L'USD Blida et H. Kheddouci, professeur à Lyon1, de trouver ici l'expression de ma vive gratitude pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

Je tiens également à exprimer chaleureusement ma vive reconnaissance pour toute personne m'ayant soutenue durant ces années de thèse. Je pense particulièrement à mes chers parents qui m'ont toujours appuyée dans les moments difficiles et à mes adorables frères et sœurs qui n'ont jamais cessé de m'encourager et enfin mes chers amis qui étaient toujours présents.

Table des matières

1	Notions de base	8
1.1	Introduction	8
1.2	Concepts généraux sur les graphes	8
1.2.1	Degré, Chaîne, cycle	9
1.2.2	Isomorphismes de graphes	10
1.2.3	Sous-graphe, sous-graphe induit, graphe partiel	11
1.2.4	Quelques classes de graphes	11
1.3	Opérations sur les graphes	12
1.3.1	Union disjointe	13
1.3.2	Produit cartésien	13
1.4	Connectivité	13
1.4.1	Invariants $\kappa(G)$ et $\lambda(G)$	13
1.4.2	Graphe 2-arête connexe	14
1.5	Stable, couplage	15
1.6	Quelques concepts sur les hypergraphes	15
1.6.1	Hypergraphe et hypergraphe dual	15
1.6.2	Propriétés de König et duale de König	16
1.7	Concepts généraux sur les posets	18
1.7.1	Poset, dual d'un poset, treillis, intervalle, chaîne	18
1.7.2	Isomorphisme, fonction de rang	19
1.7.3	Exemples de posets	20
1.7.4	Hypergraphe des intervalles d'un poset	21
1.7.5	Graphe représentatif des intervalles d'un poset	22
1.8	Opérations sur les posets	23
1.8.1	Somme directe	23
1.8.2	Somme linéaire	23
1.8.3	Produit direct	24

1.9	Complexité algorithmique	26
1.9.1	Algorithme efficace	26
1.9.2	Problèmes de la classe \mathcal{P}	27
1.9.3	Classe des problèmes \mathcal{NP}	27
1.9.4	Classe des problèmes \mathcal{NP} -complets	28
2	Le nombre domatique et le nombre domatique total dans	
	$G(P * Q)$	30
2.1	Introduction	30
2.2	Notion de domination	31
2.2.1	Nombres domatique et domatique total des graphes $G(P + Q)$ et $G(P \oplus Q)$	33
2.2.2	Nombre domatique et nombre domatique total du graphe $G(P \times Q)$	34
2.2.3	Nombre domatique du graphe $G((C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u})$	35
2.3	\mathcal{NP} -complétude du problème de la partition domatique totale maximum	41
3	Facteurs dans les graphes	44
3.1	Introduction	44
3.2	Définitions et historique	44
3.3	f -facteurs	47
3.3.1	Facteurs réguliers dans les graphes réguliers	58
3.3.2	k -facteurs dans les graphes sans griffe	60
3.3.3	Composantes d'un 2-facteur dans un graphe sans griffe	61
3.4	(g, f) -facteurs et $[a, b]$ -facteurs	63
3.5	(g, f) -facteurs de parité fixée	66
3.5.1	Facteurs pairs	66
3.5.2	$(1, f)$ -facteurs impairs	71
3.6	Applications et aspect algorithmique	72
3.6.1	Problème du couplage	72
3.6.2	Problème du f -facteur	73
3.6.3	Problème du (g, f) -facteur	76
4	Nombre de stabilité et les $[2, b]$-facteurs pairs	78
4.1	Introduction	78
4.2	Principaux résultats	78
4.2.1	L'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair	81

5	Généralisation à un $[a, b]$-facteur pair	104
5.1	Introduction	104
5.2	Existence d'un $[a, b]$ -facteur pair	105

Introduction

La théorie des graphes est une discipline des mathématiques appliquées qui repose essentiellement sur un caractère pictural. Elle a vu le jour avec Euler en 1736 qui s'était demandé : "Est-il possible de parcourir les rues de Königsberg en franchissant une et une seule fois chacun des sept ponts de la ville ?".

Depuis le début du vingtième siècle, la théorie des graphes a vu une expansion de plus en plus galopante avec les travaux des mathématiciens tels que König, Menger, Cayley et puis Berge et Erdős. La liaison de cette théorie avec d'autres disciplines telles que la physique, la chimie, la gestion et l'informatique a contribué à son développement et lui a permis d'occuper une place importante dans la recherche opérationnelle. Ses liens avec d'autres branches des mathématiques telles que l'algèbre et les probabilités confirment l'immense ampleur que cette théorie a gagné et dont le développement ne connaît pas de répit.

La théorie des graphes intervient essentiellement dans la modélisation des problèmes réels tels que les réseaux de communication et de transport, l'ordonnancement des tâches d'un projet,...

La réponse d'Euler pour son problème posé ci-dessus, fut négative. Il introduit alors le concept de cycle eulérien qui sous entend un cycle simple qui passe par toutes les arêtes du graphe. Un graphe qui admet un tel cycle est alors appelé graphe eulérien. Il montra alors que si un graphe est eulérien alors il est connexe et tous ses sommets ont un degré pair. Plus de 100 ans après, Hierholzer prouva que la réciproque est aussi vrai. Ce qui donna par la suite la fameuse caractérisation des graphes eulériens.

Le thème abordé dans cette thèse se rapporte à la théorie des graphes. Nous nous intéressons particulièrement à quelques invariants de graphes qui

sont liés directement à la domination et aux cycles. L'histoire de la domination remonte au dix-neuvième siècle, grâce aux jeux d'échec. Ce n'est qu'en 1958, qu'elle est formalisée dans un contexte théorique par Claude Berge. Cependant, la notion du nombre domatique a été introduite par Cockayne et Hedetniemi en 1977. Ces mêmes auteurs avec Dawes, ont introduit le concept du nombre domatique total en 1980. Notre étude est focalisée en premier lieu autour de ces deux paramètres.

Dans la seconde partie de la thèse, nous nous intéressons aux graphes partiels, appelés aussi facteurs de graphes, ayant que des sommets de degré pair. Les facteurs considérés représentent l'union disjointe de graphes eulériens. Notre but est d'établir des conditions suffisantes pour l'existence de tels facteurs moyennant le nombre de stabilité.

Après l'introduction des définitions et concepts de base qui seront utilisées tout au long de cette thèse au premier chapitre, nous exposons nos résultats concernant le nombre domatique et le nombre domatique total dans le second chapitre. Nous nous intéressons à la classe des graphes 2-section des hypergraphes des intervalles de posets. Lorsque le poset est obtenu à partir de deux autres posets par le biais de certaines opérations comme la somme directe, la somme linéaire et le produit Cartésien, nous établissons des valeurs exactes ou des bornes pour les deux invariants de domination. Pour le sous-poset induit par l'union des niveaux consécutifs $N_l \cup \dots \cup N_u$ du produit Cartésien de deux chaînes $C_{n_1} \times C_{n_2}$, nous déterminons le nombre domatique du graphe 2-section de l'hypergraphe associé et exhibons une partition domatique maximum en fonction de l, u, n_1, n_2 . Nous montrons aussi la \mathcal{NP} -complétude du problème de la partition domatique totale maximum dans cette classe de graphes.

Un survey qui récapitule les résultats sur les facteurs dans les graphes est donné dans le troisième chapitre. Nous focalisons notre intérêt sur les facteurs réguliers, en particulier les facteurs pairs. Le quatrième chapitre est consacré à l'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair dans un graphe κ -connexe. Nous déterminons une condition suffisante faisant intervenir le nombre de stabilité, le degré minimum et l'entier b . La généralisation de ce résultat à un $[a, b]$ -facteur pair dans un graphe 2-arête connexe est donnée dans le cinquième chapitre. Par une technique de preuve quasiment différente de celle donnée dans le chapitre 4, nous déterminons à nouveau une borne pour le nombre

de stabilité en fonction des mêmes paramètres, et de l'entier a .

Nous clôturons notre thèse par une conclusion qui synthétise les résultats trouvés et qui jette la lumière sur les perspectives de recherche.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Introduction

La *théorie des graphes* est une discipline des mathématiques discrètes, qui traite des problèmes assez variés qui ont tous comme trait commun la possibilité d'être schématisés à partir d'une représentation graphique. Comme toute théorie, elle se distingue par son propre langage que nous essayons dans ce premier chapitre de donner celui concernant notre thèse en y explicitant les concepts et la terminologie relatifs aux thèmes traités. D'autres définitions seront introduites au fur et à mesure qu'elles seront abordées dans les chapitres qui suivent. Toutefois, il ne s'agira guère d'un aperçu exhaustif, nous référons donc le lecteur aux références [13, 141, 155] pour plus de détails.

1.2 Concepts généraux sur les graphes

Un *graphe* $G = (V(G), E(G))$ est un couple d'ensembles où $V(G)$ est un ensemble non vide d'éléments, appelés *sommets*, et $E(G)$ est un ensemble de parties à deux éléments de $V(G)$ appelées *arêtes*.

Dans ce qui suit, si aucun risque de confusion ne se pose, nous noterons $G = (V, E)$ au lieu de $G = (V(G), E(G))$.

Si V est fini, le graphe est dit *fini*. Le nombre de sommets du graphe G est appelé l'*ordre* de G et est noté souvent n . Deux sommets u et v de V sont dits *adjacents* ou *voisins*, s'il existe une arête qui les relie, nous noterons brièvement l'arête $\{u, v\}, uv$. Nous disons que les sommets u et v sont les *extrémités* de l'arête uv et que l'arête uv est *incidente* à u (où à

v). Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit **simple** s'il est sans boucles et entre deux sommets, il existe au plus une arête. Voir la figure 1.1. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis.

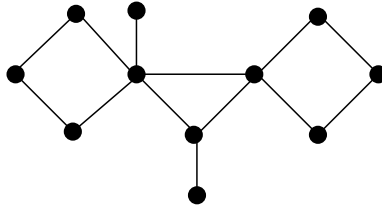


FIGURE 1.1 – Graphe simple.

L'ensemble de tous les sommets adjacents à un sommet v est appelé le **voisinage** du sommet v et est noté $N_G(v)$, ou brièvement $N(v)$ si aucun risque de confusion ne se pose. Le **voisinage fermé** est donné par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Etant donnés deux sous-ensembles disjoints $A, B \subseteq V$, nous notons par $e_G(A, B)$ le nombre d'arêtes dans G ayant une extrémité dans A et une autre dans B .

1.2.1 Degré, Chaîne, cycle

Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet v est appelé le **degré** de v et est noté $d_G(v)$. Les **degrés minimum** et **maximum** dans un graphe G sont notés respectivement $\delta(G)$ et $\Delta(G)$. Ces nombres seront notés brièvement $d(v)$, δ et Δ si aucun risque de confusion ne se pose.

Un sommet de degré 0 est appelé **sommet isolé**. Un sommet de degré 1 est appelé **sommet pendent**. Un sommet de degré supérieur à 1 est appelé **sommet interne**.

Une **chaîne** de longueur p , est une séquence de sommets v_0, \dots, v_p dans laquelle deux sommets successifs sont adjacents, notée parfois par (v_0, v_p) -chaîne. Les sommets v_0, v_p sont les **extrémités** de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une **corde** est une arête joignant deux sommets non consécutifs d'une chaîne. Une chaîne sans corde est dite **induite**. Voir la figure 1.2. La **distance** $d_G(u, v)$ entre deux

sommets u et v de G est la longueur d'une plus courte (u, v) -chaîne.

Un **cycle** de longueur p dans G , noté C_p est une chaîne simple v_1, \dots, v_p dans laquelle les deux extrémités coïncident ($v_1 = v_p$), il est dit **élémentaire** si tous ses sommets sont différents. Un cycle qui contient tous les sommets de G une et une seule fois est appelé **cycle hamiltonien** de G . Si G possède un cycle hamiltonien, alors il est dit hamiltonien. Une chaîne (resp. un cycle) est dite **eulérienne** (resp. dit **eulérien**) si elle (resp. s'il) utilise toutes les arêtes une fois et une fois seulement.

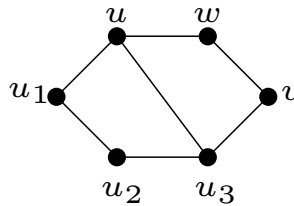


FIGURE 1.2 – Un cycle C_6 avec la corde uu_3 où la chaîne $uu_1 \dots v$ n'est pas induite mais la chaîne uvw l'est.

1.2.2 Isomorphismes de graphes

Deux graphes G_1 et G_2 sont dits **isomorphes** s'il existe une bijection $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ telle que $(x, y) \in E(G_1)$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in E(G_2)$. Voir la figure 1.3.

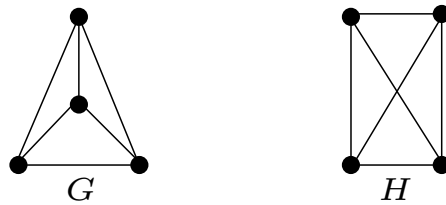


FIGURE 1.3 – Les graphes G et H sont isomorphes.

1.2.3 Sous-graphe, sous-graphe induit, graphe partiel

Un graphe H est un **sous-graphe** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Le sous-graphe H de G est dit **sous-graphe induit** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) = \{(u, v) \in E : u, v \in V(H)\}$. On dit alors que H est un sous-graphe induit par $V(H)$ et il est noté $G[V(H)]$. Le sous-graphe induit par $V(G) \setminus V(H)$ est noté brièvement par $G - H$. Un **graphe partiel** H de G est un sous-graphe tel que $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un graphe partiel est aussi dit un **facteur** d'un graphe. Voir la figure 1.4.

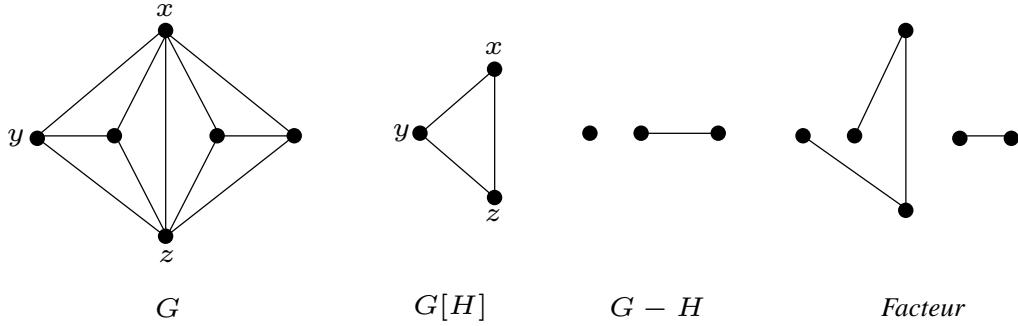


FIGURE 1.4 – Le sous-graphe induit par $H = \{x, y, z\}$, $G - H$ et un graphe partiel de G .

1.2.4 Quelques classes de graphes

Le **complémentaire** d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, \overline{E})$ tel que pour tout sommet u, v de V , $uv \in \overline{E}$ si et seulement si $uv \notin E$.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **complet** si toute paire de sommets est liée par une arête. Si $|V| = n$, G est noté K_n .

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles V_1 et V_2 , telle que tout arête de E a une de ses extrémité dans V_1 et une autre dans V_2 . Dans ce cas, $G = (V, E)$ est noté $G = (V_1, V_2, E)$. En particulier, un graphe **biparti complet**, où $n_1 = |V_1|$ et $n_2 = |V_2|$, est noté K_{n_1, n_2} .

Soit k un entier positif. Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -régulier si $d(x) = k, \forall x \in V$. Un k -facteur d'un graphe G est un graphe partiel k -régulier de G .

Nous disons qu'un graphe G est **connexe** s'il existe une chaîne dans G entre toute paire de sommets. Si G n'est pas connexe, il s'écrit comme l'union disjointe de graphes connexes (appelés **composantes connexes** de G).

Si un graphe ne contient pas de cycle, il est appelé **acyclique** ou une **forêt**. Un **arbre** T_n d'ordre n est un graphe acyclique connexe. Notons que tout graphe connexe G possède un graphe partiel qui est un arbre dit parfois **arbre couvrant** de G . Il suffit de supprimer une à une les arêtes de G sans déconnecter le graphe. Le graphe obtenu est un arbre.

Nous illustrons toutes ces classes de graphes dans la figure 1.5 ci-dessous.

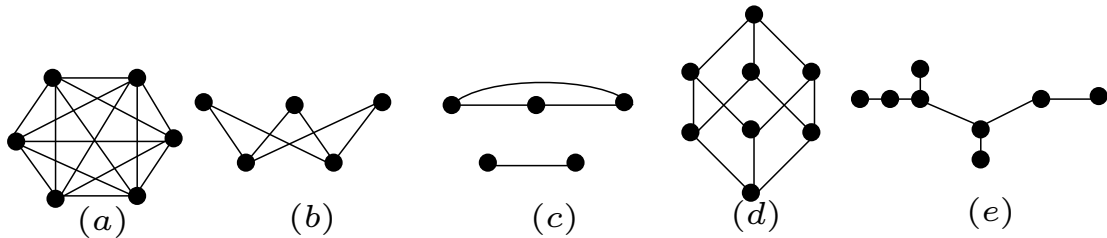


FIGURE 1.5 – (a) Graphe complet K_6 , (b) Graphe biparti complet $K_{3,2}$, (c) graphe complémentaire de $K_{3,2}$, (d) graphe 3-régulier, (e) arbre d'ordre 8, T_8 .

1.3 Opérations sur les graphes

Les opérations sur les graphes nous permettent de construire de nouveaux graphes à partir d'autres de tailles plus petites. Ceci permet de déduire de nouvelles propriétés à l'aide de celles se trouvant dans les graphes de petite taille. Nous ne mentionnons ici que deux de ces opérations.

Considérons deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

1.3.1 Union disjointe

L'*union disjointe* de G_1 et G_2 est le graphe $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$ où $V = V_1 \cup V_2$ et $E = E_1 \cup E_2$. Voir la figure 1.6.

1.3.2 Produit cartésien

Le *produit cartésien* de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \square G_2$ tel que $V(G_1 \square G_2) = V_1 \times V_2$ et l'arête uv est adjacente à l'arête $u'v'$ si et seulement si :

$u = u'$ et $vv' \in E_2$ ou $v = v'$ et $uu' \in E_1$.

Le produit cartésien $G_1 \square G_2$ s'obtient en traçant des copies de G_2 autant qu'il y'a des sommets dans G_1 et deux sommets dans deux copies différentes sont adjacents dans $G_1 \square G_2$ si les sommets correspondants dans G_1 sont adjacents. Voir la figure 1.6.

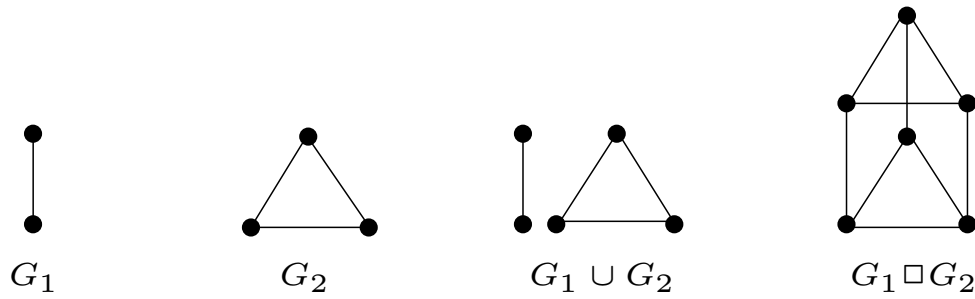


FIGURE 1.6 – L'union disjointe et le produit cartésien de G_1 et G_2 .

1.4 Connectivité

1.4.1 Invariants $\kappa(G)$ et $\lambda(G)$

Un *ensemble d'articulation* A , dit aussi un ensemble *séparateur* d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G s'il est connexe et augmente le nombre de composantes connexes s'il ne l'est pas. Un graphe G est dit κ -*connexe* si nous ne pouvons pas le déconnecter en supprimant moins de κ sommets. La *connectivité* $\kappa(G)$ est le nombre minimum κ pour lequel G est κ -connexe, en

d'autres termes, elle représente la taille minimum d'un ensemble séparateur de G .

D'une façon similaire, un sous-ensemble F de $E(G)$ est un **déconnectant** si $G - F$ contient plus de composantes connexes que G . Un graphe G est **λ -arête connexe** si le nombre minimum d'arêtes dont la suppression déconnecte le graphe ou le réduit à un seul sommet est au moins λ . Le cardinal minimum d'un ensemble d'arêtes de G dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes de G est dite **arête-connectivité** de G et est notée par $\lambda(G)$.

Les invariants $\kappa(G)$ et $\lambda(G)$ sont comparables et n'excèdent pas le degré minimum du graphe. En effet, pour tout graphe G , il est montré dans [155] que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Cette inégalité peut être stricte comme illustré par le graphe de la figure 1.7.

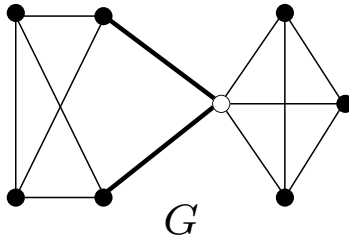


FIGURE 1.7 – $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$ et $\delta(G) = 3$.

1.4.2 Graphe 2-arête connexe

Une arête (resp. un sommet) dans un graphe G dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes de G est dite un **isthme** (resp. un **sommet d'articulation**). Ainsi, une arête e dans un graphe connexe est un isthme si et seulement si, e n'appartient à aucun cycle de G . Un graphe G avec au moins trois sommets est dit **2-arête connexe** s'il est connexe et n'a aucun isthme. Voir la figure 1.8. Suite à la caractérisation d'un isthme, un graphe G est 2-arête connexe, si et seulement si G est connexe et chaque arête de G est dans un cycle.

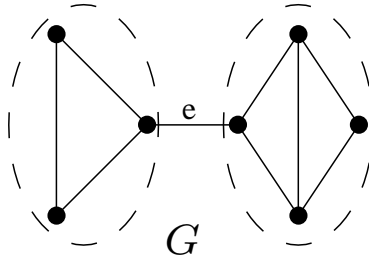


FIGURE 1.8 – L’arête e est un isthme reliant deux sous-graphes induits 2-arête connexe.

1.5 Stable, couplage

Un ensemble de sommets deux à deux non adjacents est appelé **ensemble indépendant** ou **stable**. **Le nombre de stabilité** $\alpha(G)$ représente le cardinal de l’ensemble indépendant maximum. Un **couplage** dans un graphe G est un sous-ensemble d’arêtes non incidentes deux à deux. Voir la figure 1.9.

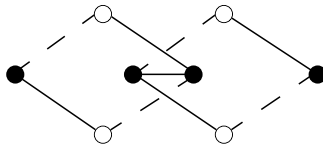


FIGURE 1.9 – Les sommets en blancs forment un stable et les arêtes en pointillé forment un couplage. $\alpha(G) = 4$.

1.6 Quelques concepts sur les hypergraphes

1.6.1 Hypergraphe et hypergraphe dual

En 1960, Claude Berge [13] a généralisé le concept de graphes en vue d’aborder de nouveaux problèmes d’optimisation combinatoire. L’idée était d’étudier une famille d’ensembles avec la même optique, en l’appelant **hypergraphe**.

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini d'éléments. Un **hypergraphe** sur X est une famille $\mathcal{H} = (E_1, \dots, E_m)$ de parties non vides de X dont l'union forme X . Voir la figure 1.10. Les éléments de X sont les **sommets** et les ensembles E_1, \dots, E_m sont les **arêtes** de l'hypergraphe. Un **hypergraphe simple** sur X (ou "**famille de Sperner**") est un hypergraphe $\mathcal{H} = (E_1, \dots, E_m)$ dont aucune arête n'en contient une autre, c'est à dire si $E_i \subset E_j$ alors $i = j$.

Deux sommets x et y de \mathcal{H} sont **adjacents** s'il existe une arête de \mathcal{H} qui les contienne et deux arêtes sont dites adjacentes si leur intersection est non vide.

Le **dual** d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (E_1, \dots, E_m)$ est un hypergraphe $\mathcal{H}^* = (X_1, \dots, X_m)$ dont les sommets e_1, \dots, e_m sont des points correspondants respectivement aux arêtes de \mathcal{H} et dont les arêtes sont $X_i = \{e_j / E_j \ni x_i\}$ dans \mathcal{H} . Voir la figure 1.10.

1.6.2 Propriétés de König et duale de König

Le graphe représentatif des arêtes de l'hypergraphe \mathcal{H} est un graphe simple noté $L(\mathcal{H})$ dont les sommets e_1, \dots, e_m représentent respectivement les ensembles E_1, \dots, E_m et deux sommets e_i et e_j sont adjacents dans $L(\mathcal{H})$ si et seulement si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$. Voir la figure 1.10.

Dans l'hypergraphe \mathcal{H} , un sous ensemble A (resp. T) de X est appelé ensemble **stable** ou **ensemble indépendant** (resp. **recouvrement par sommets** ou ensemble **transversal**) de \mathcal{H} , si chaque arête de \mathcal{H} contient au plus un sommet de A (resp. au moins un sommet de T). Un sous ensemble \mathcal{M} (resp. \mathcal{R}) d'arêtes de \mathcal{H} est appelé **couplage** (resp. **recouvrement par arêtes** de \mathcal{H}) si chaque sommet de X appartient à au plus une arête de \mathcal{M} (resp. au moins une arête de \mathcal{R}).

Une famille de sous-ensembles C de X est une **k -coloration (forte)** des sommets de \mathcal{H} si C est une partition de X en k ensembles stables. Un hypergraphe pour lequel il existe une k -coloration est dit **k -colorable**.

Posons :

- $\alpha(\mathcal{H}) = \max\{|A|, A \text{ est un ensemble stable de } \mathcal{H}\}$;
- $\tau(\mathcal{H}) = \min\{|T|, T \text{ est un recouvrement par sommets de } \mathcal{H}\}$;

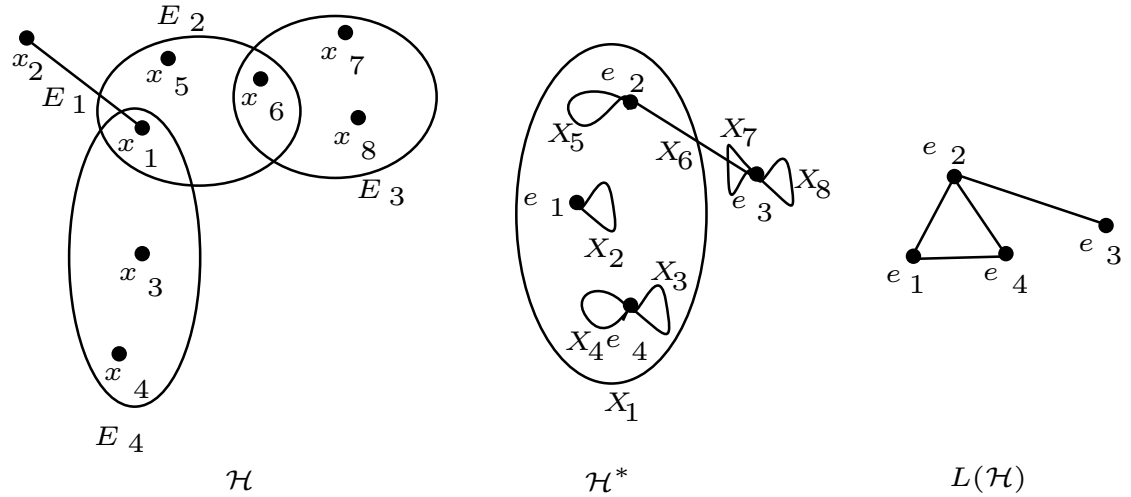


FIGURE 1.10 – L’hypergraphe \mathcal{H} , son dual \mathcal{H}^* et son graphe représentatif de ses intervalles $L(\mathcal{H})$.

- $v(\mathcal{H}) = \max\{|\mathcal{M}|, \mathcal{M} \text{ est un couplage de } \mathcal{H}\}$;
- $\rho(\mathcal{H}) = \min\{|\mathcal{R}|, \mathcal{R} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H}\}$;
- $\chi(\mathcal{H}) = \min\{k, \mathcal{H} \text{ admet une } k\text{-coloration de } \mathcal{H}\}$.

Ces nombres sont appelés *nombre de stabilité*, *nombre de recouvrement par sommets*, *nombre de couplage*, *nombre de recouvrement par arêtes* et *nombre chromatique* de \mathcal{H} respectivement.

Notons que tout hypergraphe \mathcal{H} vérifie $\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H})$ et $v(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H})$ puisque chaque arête d’un recouvrement par arêtes contient au maximum un élément d’un stable et chaque sommet d’un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête d’un couplage. \mathcal{H} a la **propriété de König** si $v(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H})$, et a la **propriété duale de König** si $\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H})$.

1.7 Concepts généraux sur les posets

1.7.1 Poset, dual d'un poset, treillis, intervalle, chaîne

Un ensemble partiellement ordonné (P, \leq) , en abrégé **poset**, est un ensemble P où la relation \leq est réflexive, antisymétrique et transitive. Dans tout ce qui suivra, nous nous intéresserons uniquement au cas où P est fini. Si $u \leq v$ et $u \neq v$ alors nous écrivons $u < v$.

Si u et v sont dans P alors v **couvre** u dans P si $u < v$ et s'il n'existe pas un élément $w \in P$ tel que : $u < w < v$. Nous notons alors : $v \succ u$. En utilisant la relation de couverture, on peut obtenir une représentation graphique de P , dite **diagramme de Hasse** de P , en associant à chaque élément de P , un point du plan et si v couvre u alors u sera lié au point v par un segment de droite ascendant. Le **dual** de P , noté P^* , est un poset ayant les mêmes sommets que P mais ordonnés par la relation d'ordre " \leq_{P^*} " définie par : $u \leq_{P^*} v \Leftrightarrow u \geq_P v$.

Nous donnons dans la figure 1.11 ci-dessous le diagramme de Hasse d'un poset P et son dual P^* .



FIGURE 1.11 – Un poset et son dual.

Soit A un sous ensemble de P . Un **minorant** (resp. **majorant**) de A dans P est un élément u de P tel que : $u \leq a$ (resp. $u \geq a$), $\forall a \in A$. La **borne inférieure** (resp. **supérieure**) de A est le plus grand (resp. petit) des minorants (resp. majorants) de A . Nous appelons **treillis** un poset dans lequel toute paire d'éléments possède une borne inférieure et une borne supérieure. Voir la figure 1.12.

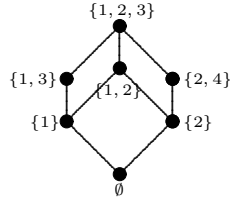


FIGURE 1.12 – Treillis.

Un sous ensemble C de P est dit **chaîne** de P , si pour toute paire d'éléments a, a' de C , $a \leq a'$ ou $a' \leq a$. Une chaîne est notée $(a_0 < \dots < a_k)$ et l'entier k représente sa **longueur**. Une **antichaîne** est un sous-ensemble de P dont les éléments sont deux à deux incomparables.

Un **intervalle** de P est un sous ensemble I , noté par $[p, q]$ de la forme $\{v \in P : p \leq v \leq q\}$. I est dit *maximal* si p est un *élément minimal* et q est un *élément maximal* de P .

1.7.2 Isomorphisme, fonction de rang

Deux posets P et Q sont dits **homomorphes** s'il existe une application φ de P dans Q vérifiant $x \leq_P y$ si et seulement si $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$. Ils sont dits **isomorphes** si et seulement si φ est bijective, φ et φ^{-1} sont des homomorphismes.

Une **fonction de rang** est une fonction r définie de P dans \mathbb{N} et vérifiant $r(u) = 0$ si u est un élément minimal et $r(v) = r(u) + 1$ si $v \succ u$. S'il existe une telle fonction de rang, nous disons que P est **rangé** ou **gradué** et la valeur $r(P) = \max_{x \in P} r(x)$ représente le rang de P . Si P est rangé, nous définissons son **niveau** i par $N_i(P) = \{u \in P : r(u) = i\}$ (voir la figure 1.13) et le $i^{\text{ème}}$ nombre de Whitney par $W_i(P) = |N_i(P)|, \forall i = 1, \dots, r(P)$. Pour un poset rangé, soit $P_{l,u}$ le sous-poset induit par l'union de niveaux consécutifs $\bigcup_{i=l}^u N_i$ de P où l et u sont deux entiers tels que : $0 \leq l \leq u \leq r(P)$.

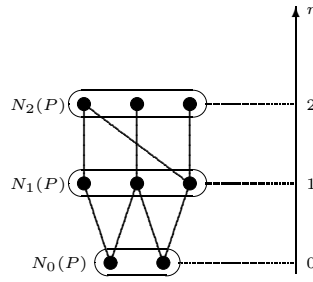


FIGURE 1.13 – Niveaux d'un poset rangé.

1.7.3 Exemples de posets

Treillis booléen

Le treillis booléen est le poset définie par $B_n = (\{0, 1\}^n, \leq)$, où la relation d'ordre est telle que $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_i \leq b_i$ pour tout i . Voir la figure 1.14.

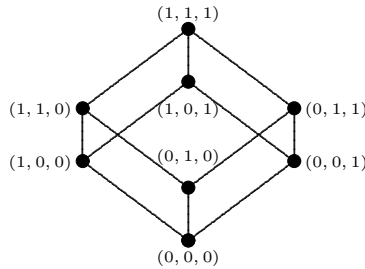


FIGURE 1.14 – Treillis booléen B_3 .

En considérant l'application $\varphi(a) = \{i, a_i = 1\}$, nous remarquons bien que $B_n = (\{0, 1\}^n, \leq)$ et $(P(1, \dots, n), \subseteq)$ sont isomorphes, où $P(1, \dots, n)$ est l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. D'où la possibilité de définir le treillis booléen comme étant le treillis de tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ordonnés par inclusion. L'application qui à un élément de B_n associe son cardinal définit la fonction de rang sur B_n .

Treillis $S(k_1, \dots, k_n)$

$S(k_1, \dots, k_n)$ est le poset défini sur l'ensemble de tous les n -uples $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ tel que : $0 \leq a_i \leq k_i$, pour tout i . La relation d'ordre est telle que : $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_i \leq b_i$ pour tout i . En d'autres termes $\underline{a} \prec \underline{b}$ si et seulement si $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $b_j - a_j = 1$ et $a_i = b_i$ pour tout i différent de j . Voir la figure 1.15. En particulier, le treillis B_n est isomorphe à $S(1, \dots, 1)$.

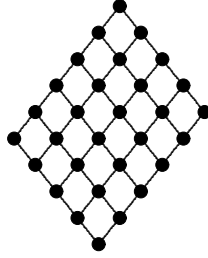


FIGURE 1.15 – $S(4, 5)$

L'application qui associe à un élément $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ l'entier $a_1 + \dots + a_n$ définit la fonction rang sur $S(k_1, \dots, k_n)$. De plus $r(S(k_1, \dots, k_n)) = k_1 + \dots + k_n$. Les éléments du niveau i sont tout les n -uples dont la somme des composantes est égale à i .

1.7.4 Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit P un poset et \mathcal{I} l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe $\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$ dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont les intervalles maximaux de P est dit l'**hypergraphe des intervalles** de P . Notons par $\mathcal{H}^*(P)$ le dual de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$.

L'hypergraphe des intervalles d'un poset a été introduit par B. Voigt et I. Wegener [152] pour la détermination de l'invariant $\rho(\mathcal{H}(B_n)_{l,u})$ qui conduit au nombre de monômes qui représentent une fonction booléenne symétrique. La généralisation à un poset quelconque a été faite par I. Bouchemakh [24] dans sa thèse de doctorat d'état dont certains des résultats de la thèse ont été

publiés. Elle s'est intéressée particulièrement avec K. Engel [20,21] à l'aspect algorithmique des problèmes de couplage, de stabilité, de recouvrements ainsi qu'à la propriété de König et duale de König. Ces dernières propriétés ont été également étudiées dans [7,86] pour l'hypergraphe des intervalles de quelques classes de posets. Les travaux établis par K. Engel dans [51] ont visé les deux paramètres τ et ν , et dans [27], I. Bouchemakh étudia la généralisation de la stabilité. La *k-stabilité* est la taille maximum d'un ensemble A qui intersecte chaque interval maximal de P en au plus k éléments de A . Elle proposa dans certains cas des valeurs exactes et dans d'autres cas des bornes. Elle aborda également dans [25] l'étude du nombre chromatique qui est équivalente à l'étude des systèmes stables $P(t, k, n)$ où un système stable d'ordre n est une paire (Q, q) , où Q est un ensemble à n éléments et q est une collection de sous-ensembles à k éléments de Q appelés blocs, ayant la propriété que chaque sous-ensemble à t éléments de Q est dans au plus un bloc de q . D'autres études pour l'hypergraphe des intervalles ont vu le jour pour d'autres classes de posets comme la classe des ordres d'intervalles [21], la classe des ordres série-parallèles [26], les ordres à chaînes semi symétriques spéciales [20], le treillis des faces du n -cube [121] et le treillis linéaire [52].

1.7.5 Graphe représentatif des intervalles d'un poset

Soit P un poset. Le *graphe représentatif des intervalles de P* , appelé également *le graphe 2-section de l'hypergraphe des intervalles de P* , noté $G(P)$, est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils appartiennent à un même intervalle de P . Il s'agit en fait du graphe représentatif des arêtes de $\mathcal{H}^*(P)$, voir la figure 1.16.



FIGURE 1.16 – Exemple de $G(P) = L(\mathcal{H}^*(P))$.

1.8 Opérations sur les posets

Plusieurs opérations peuvent être définies sur deux ou plusieurs posets et diverses propriétés sont alors déduites. (Voir par exemple [14, 29, 30, 53, 140]). Cependant, nous ne mentionnons ici que celles qui font l'objet de notre étude.

1.8.1 Somme directe

La *somme directe* ou *union disjointe* de deux posets P et Q est le poset $P + Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P + Q$ si $x, y \in P$ et $x \leq_P y$ ou $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$. Voir la figure 1.17. La somme directe de P avec lui-même n fois est notée par nP .

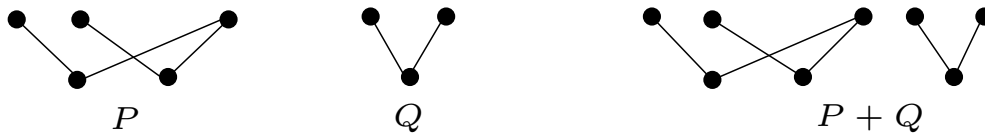


FIGURE 1.17 – P, Q et $P + Q$.

1.8.2 Somme linéaire

La *somme linéaire* de deux posets P et Q est le poset $P \oplus Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P \oplus Q$ si $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$ ou $x \in P$ et $y \in Q$ ou $x, y \in P$ et $x \leq_P y$. Voir la figure 1.18. Notons qu'une chaîne à n sommets est isomorphe à $1 \oplus \dots \oplus 1$, n fois. Le diagramme de Hasse de $P \oplus Q$, se fait en traçant celui de P , puis au dessus de lui, celui de Q et nous relierons tout sommet maximal de P à tout sommet minimal de Q .

Les Posets P construits à partir des singletons, en utilisant seulement la somme directe (+) et la somme linéaire (\oplus), c'est à dire que P se décompose en singletons en utilisant que ces deux opérations, sont appelés Séries-parallèles. Ces posets sont caractérisés par le fait de ne pas contenir de sous-poset isomorphe à N où N est le sous ensemble a quatre éléments $\{x, y, z, t\}$ tel que les seules relations de comparabilité sont $x < y > z < t$. Voir la figure 1.19.

Notons que si P est connexe, alors chaque élément maximal est au dessus de chaque élément minimal car s'il existe un plus court "zig-zag" joignant un

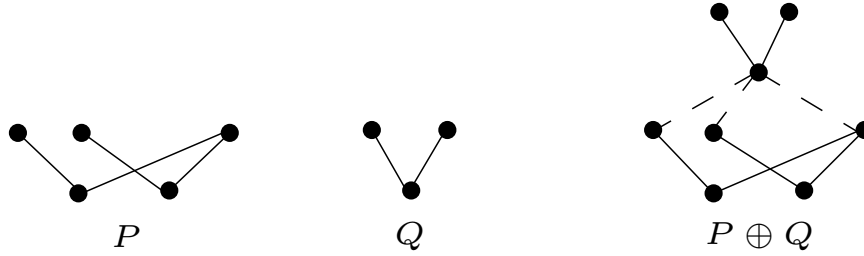


FIGURE 1.18 – P, Q et $P \oplus Q$.

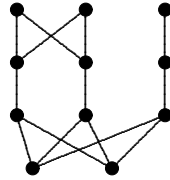


FIGURE 1.19 – Ce poset est un poset série-parallèle, il peut être écrit comme suit : $(1 + 1) \oplus (((1 \oplus 1) + (1 \oplus 1)) \oplus (1 + 1)) + (1 \oplus 1 \oplus 1)$.

élément maximal x à un élément minimal $y : x = p_0 > p_1 < p_2 \dots > p_k = y$, on obtiendra une contradiction avec le fait que P ne contient pas de sous-poset isomorphe à N . D'où $x > y$.

1.8.3 Produit direct

Le **produit direct** (ou *cartésien*) de deux posets P et Q est le poset $P \times Q$ sur l'ensemble $\{(x, y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$ tel que : $(x, y) \leq (x', y')$ dans $P \times Q$ si $x \leq_P x'$ et $y \leq_Q y'$. Le produit direct de P avec lui-même n fois est noté par P^n . Le diagramme de Hasse de $P \times Q$ se fait en traçant des copies de P autant de fois qu'il y a des sommets dans Q et deux sommets dans deux copies différentes sont liés dans $P \times Q$, si les sommets correspondants dans Q sont liés. Voir la figure 1.20.



FIGURE 1.20 – P, Q et $P \times Q$.

Cas particulier : Produit de chaînes

Soit $r \geq 1$ un entier, considérons les r chaînes $C_{k_i} = (0 < 1 < \dots < k_i), i \in \{1, \dots, r\}$. Le produit de ces chaînes $C_{k_1} \times \dots \times C_{k_r}$ est un poset à $\prod_{i=1}^r (k_i + 1)$ sommets de la forme (a_1, \dots, a_r) où $0 \leq a_i \leq k_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Le sommet (b_1, \dots, b_r) couvre le sommet (a_1, \dots, a_r) si et seulement si il existe un unique indice j tel que $b_j - a_j = 1$ et, $\forall i \neq j, a_i = b_i$. L'isomorphisme entre $S(k_1, \dots, k_n)$ et $\prod_{i=1}^n C_{k_i}$, lui confère le nom de produit de chaînes. Voir la figure 1.21.

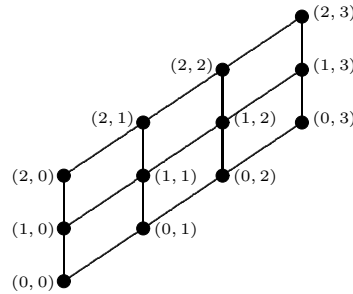


FIGURE 1.21 – $S(2, 3) \simeq C_2 \times C_3$

1.9 Complexité algorithmique

La complexité algorithmique est un moyen d'évaluation des performances d'un algorithme. Il est certain que le temps d'exécution d'un programme sur une machine donnée dépend fortement de la vitesse de cette machine. La complexité algorithmique en décide autrement en quantifiant le temps d'exécution des programmes en fournissant le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'accomplissement de la tâche, généralement en fonction de la taille n des données à traiter.

Dans les années soixante et au début des années soixante dix, avec la découverte des algorithmes fondamentaux tels que ceux de Kruskal ou Prim, on ne mesurait pas leur efficacité, on se contentait de donner leurs temps d'exécution en secondes dans un langage bien précis. Ce qui rendait difficile la comparaison des algorithmes entre eux.

Notons que c'est Stephen Cook [42] et Richard Karp [93], qui ont indépendamment introduit les fondements de la théorie de la complexité des problèmes après un travail préliminaire de Jack Edmonds [46].

1.9.1 Algorithme efficace

Un *algorithme* de résolution d'un problème P donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème P en une chaîne de caractères représentant les résultats de P .

A toute instance I d'un problème P , nous pouvons attacher un nombre $\mu(I)$, qui mesure la longueur des données de cette instance et que nous appelons la *taille* de cette instance I .

Un algorithme est dit *polynomial* si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille n , est borné par un polynôme en n . Un algorithme est considéré comme *efficace* si et seulement si il est polynomial.

Si A est un algorithme de résolution d'un problème P et I est une instance de ce dernier, alors au couple (A, I) , nous associons un entier $\tau(A, I)$ représentant le nombre d'opérations élémentaires (addition, multiplication, comparaison, affectation) effectuées par l'algorithme A dans la résolution de

l'instance I du problème P . le plus grand nombre $\tau(A, I)$ sur l'ensemble de toute les instances ayant la même taille est appelé **complexité** de l'algorithme A .

1.9.2 Problèmes de la classe \mathcal{P}

Un problème est dit appartenir à la classe \mathcal{P} s'il peut être résolu par un algorithme polynomial. Nous disons que les problèmes de la classe \mathcal{P} sont **faciles**.

1.9.3 Classe des problèmes \mathcal{NP}

Un **problème de reconnaissance** est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs vrai ou faux.

Les problèmes de reconnaissance ne peuvent être identifiés à des **problèmes d'optimisation combinatoire**. Dans un problème d'optimisation combinatoire, nous demandons d'exhiber $s \in S$ qui minimise -ou qui maximise- $f(s)$ ce qui n'est pas le cas dans les problèmes de reconnaissance. Par contre, à tout problème d'optimisation combinatoire $\min_{s \in S} f(s)$ (resp. $\max_{s \in S} f(s)$), et un nombre a , nous associons un problème de reconnaissance défini comme suit : existe-t-il un élément $\hat{s} \in S$ tel que $f(\hat{s}) \leq a$ (resp. $f(\hat{s}) \geq a$) ?

Exemple 1.9.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n et a un entier, $a \leq n$. Existe-t-il un sous-ensemble $S \subseteq V$, S est un stable tel que $|S| \geq a$ est le problème de reconnaissance associé au problème de stable maximum dans un graphe.

Le problème de reconnaissance est au moins aussi facile que le problème d'optimisation combinatoire auquel il est associé. En d'autres termes, si le problème de reconnaissance est difficile, il en est de même pour le problème d'optimisation combinatoire.

Les **algorithmes non déterministes**, sont des algorithmes contenant une instruction "choix", qui opérant sur un ensemble fini, choisit un élément de cet ensemble sans spécifier comment ce choix est fait. Ils sont caractérisés par le fait que s'il existe une manière (au moins) d'effectuer le choix qui conduise à la réponse vrai, c'est suivant cette manière que le choix est fait.

Plus précisément, les choix successifs seront effectués de telle sorte qu'on arrive à la réponse VRAI en un minimum de temps.

Un problème appartient à la classe \mathcal{NP} [**Non deterministic polynomial**], s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.

Les algorithmes ordinaires sont un cas particulier des algorithmes non déterministes, donc un problème de reconnaissance qui peut être résolu par un algorithme polynomial appartient à la classe \mathcal{NP} et il s'ensuit que $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$.

Le problème qui consiste à décider si un graphe possède un cycle hamiltonien est un problème \mathcal{NP} .

1.9.4 Classe des problèmes \mathcal{NP} -complets

L'inclusion stricte $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$ reste à ce jour une conjecture très difficile. Elle découle du fait qu'il existe des problèmes que nous ne savons pas montrer s'il existe ou non un algorithme polynomial pour les résoudre. Cette inaptitude qui ne signifie guère l'inexistence de tels algorithmes. Cependant il existe une large classe de problèmes qui sont *équivalents* du point de vue que si l'un d'eux est *facile* alors il en est de même pour tous les autres problèmes de la classe \mathcal{NP} . Pour illustrer cette équivalence, nous introduisons le sens de réduction polynomiale.

Un problème P_1 se réduit polynomialement au problème P_2 si et seulement si il existe un algorithme de résolution pour P_1 faisant appel à la résolution de P_2 et si cet algorithme est polynomial lorsque la résolution de P_2 est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème P de la classe \mathcal{NP} est dit **\mathcal{NP} -complet** si et seulement si tout problème de la classe \mathcal{NP} se réduit polynomialement à P .

De là, il apparaît que les problèmes \mathcal{NP} -complets sont plus difficiles que ceux de la classe \mathcal{P} si toutefois la conjecture $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ est vraie.

La notion de \mathcal{NP} -complétude, ne peut s'appliquer qu'aux problèmes de reconnaissance. Le théorème qui suit donne le schéma général du type de

raisonnement utilisé pratiquement (grâce à la transitivité de la réduction polynomiale) pour montrer qu'un problème est \mathcal{NP} -complet.

Théorème 1.9.1. *Si le problème P est \mathcal{NP} -complet et si nous pouvons mettre en évidence une réduction polynomiale de P à un problème P' de la classe \mathcal{NP} , alors P' est \mathcal{NP} -complet.*

Les problèmes d'existence d'un cycle hamiltonien, d'un stable maximum, d'une coloration minimum dans un graphe sont des problèmes \mathcal{NP} -complets.

Chapitre 2

Le nombre domatique et le nombre domatique total dans $G(P * Q)$

2.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre deux paramètres de domination à savoir le nombre domatique et le nombre domatique total dans le graphe 2-section $G(P)$ de l'hypergraphe des intervalles d'un poset P . Notre étude est une suite de notre travail réalisé dans la thèse de magister [133]. Nous focalisons notre intérêt en premier lieu à l'étude de $G(P * Q)$ où $*$ est l'une des opérations : somme directe, somme linéaire, produit Cartésien. Notre motivation pour l'étude de ces opérations est due en partie au fait que plusieurs posets s'obtiennent à partir des opérations mentionnées ci-dessus tel que le treillis booléen qui est isomorphe au produit direct de n chaînes de longueur une, les posets série-parallèles, le treillis des faces du n -cube C_n qui est isomorphe au produit de n sous posets [52], le treillis de Shuffles $W_{m,n}$ [74]. . . Notons que d'autres paramètres de domination ont été également étudié dans $G(P)$ dans [12], il s'agit du nombre de domination double et le nombre domatique double. Dans le cas où P est le treilli booléen, le nombre domatique ainsi que le nombre de domination ont été étudié dans $G(P)$ [78].

2.2 Notion de domination

Un ensemble *dominant* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets D de V tel que tout sommet de $V - D$, est adjacent à au moins un sommet de D . Un *sommet dominant* est un sommet qui forme à lui seul un ensemble dominant, c'est-à-dire, un sommet qui est adjacent à tous les autres sommets. Une *partition domatique* est une partition des sommets de G en ensembles dominants. *Le nombre de domination*, noté $\gamma(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant.

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants dans les graphes commença aux environs des années 1060, le sujet a ses racines historiques datant avant 1862, quand Jaenish [84] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines nécessaires pour dominer une table d'échecs ($n \times n$), en posant le problème suivant : " Quel est le nombre minimum de reines qui peuvent être placées sur un échiquier de telle sorte que chaque case, est soit occupée par une des reines ou elle est sur son champ de mouvement" (rappelons que les champs de mouvement de la reine sont toutes les cases qui se trouvent sur la ligne, la colonne et la diagonale passant par celle-ci). Evidemment, cela revient à déterminer le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. D'autres variantes de ce problème ont été définies en considérant d'autres pièces d'échecs avec (ou) différentes tailles d'échiquiers [154].

En 1958, la domination est formalisée dans un contexte théorique dans la théorie des graphes, par C.Berge [13], où il définit pour la première fois le concept du nombre de domination d'un graphe en lui attribuant la terminologie du coefficient de stabilité externe. En 1962, Ore [131] fut le premier à utiliser les termes "ensemble dominant" et la notation " $d(G)$ " pour désigner le nombre de domination.

L'un des paramètres importants de la domination dont l'étude a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs [9, 33, 38, 79, 157–169] est le nombre domatique. Le vocable "domatique"(domatic) n'a aucun lien avec le même mot utilisé en cristallographie. Il a été créé des mots "domating" et "chromatic" de la même manière que le mot "smog" est composé à partir des vocables "smoke" et "fog". Le concept du nombre domatique est le même que celui du nombre chromatique, seulement, on utilise les ensembles dominants pour les définir au lieu des ensembles stables.

En 1977, Cockayne et Hedetniemi [40] ont défini pour la première fois le concept du **nombre domatique** $d(G)$ d'un graphe G , comme étant le nombre maximum d'ensembles dominants dans une partition domatique du graphe, où d'une façon équivalente, le nombre maximum d'ensembles dominants disjoints deux à deux et dont l'union est $V(G)$. Leur papier "survey" semble avoir mis dans le mouvement l'étude moderne de la domination dans les graphes puisque après vingt ans, plus de 1200 papiers de recherche ont été publiés dans ce contexte et le nombre de papiers augmente régulièrement. Trois ans plus tard, les mêmes auteurs avec Dawes [39] définissent **le nombre domatique total** $d_t(G)$ qui est le nombre maximum de classes de la partition de V en ensembles dominants totaux disjoints où un sous ensemble D de V est dit **ensemble dominant total**, si pour tout sommet de V , il existe un sommet de D , qu'il lui soit adjacent, voir la figure 2.1. Pour tout graphe $G = (V, E)$, il a été montré dans [40] que le nombre domatique $d(G)$ (resp. le nombre domatique total $d_t(G)$) est au plus égal à $\delta(G) + 1$ (resp. à $\delta(G)$). Nous disons qu'un graphe G est **domatiquement plein** si $d(G) = \delta(G) + 1$. Nous référons le lecteur intéressé par les différents résultats sur le nombre domatique d'un graphe à notre survey consacré à ce thème [23].

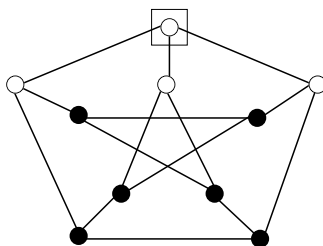


FIGURE 2.1 – L'ensemble des sommets en blancs est un ensemble dominant total, en lui enlevant le sommet encadré, nous obtenons un ensemble dominant minimum.

Le problème de partition domatique apparaît dans les réseaux de communication [41]. Le réseau est modélisé par un graphe non orienté où les arêtes représentent les lignes de communication et les sommets représentent les cités. Un groupe de transmission est un ensemble de cités qui activent comme des stations de transmission, c'est-à-dire qui peut transmettre des

messages à chaque cité dans le réseau. Donc, un groupe de transmission dans le réseau de communication, est un ensemble dominant dans le graphe. Trouver le nombre maximum de groupes de transmission disjoints et dont l'union est l'ensemble des cités dans un réseau de communication est équivalent au problème de partition domatique dans le graphe correspondant.

2.2.1 Nombres domatique et domatique total des graphes $G(P + Q)$ et $G(P \oplus Q)$

Nous avons établi les résultats suivant.

Proposition 2.2.1. [22] *Soient P et Q deux posets. Nous avons :*

1. $d(G(P + Q)) = \min\{d(G(P)), d(G(Q))\}$,
2. $d_t(G(P + Q)) = \min\{d_t(G(P)), d(G_t(Q))\}$.

Démonstration. 1. Il est facile de voir que D est un ensemble dominant de $G(P + Q)$ si et seulement si $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 (resp. D_2) est un ensemble dominant non vide de $G(P)$ (resp. $G(Q)$). Par conséquent, $d(G(P + Q)) \leq \min\{d(G(P)), d(G(Q))\}$.

Inversement, si $D_1, \dots, D_{d(G(P))}$ (resp. $D'_1, \dots, D'_{d(G(Q))}$) est une partition domatique de $G(P)$ (resp. $G(Q)$), où nous supposons sans perte de généralité que $d(G(P)) \leq d(G(Q))$, alors

$\{D_i \cup D'_i, i = 1, \dots, d(G(P)) - 1\} \cup \left(D_{d(G(P))} \cup \bigcup_{i \geq d(G(P))} D'_i \right)$ est une partition domatique de $G(P + Q)$ c-à-d, $d(G(P + Q)) \geq \min\{d(G(P)), d(G(Q))\}$.
2. Analogue à 1. □

Proposition 2.2.2. [22] *Soient P et Q deux posets. Nous avons :*

1. $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(P)) + d(G(Q))$,
2. $d_t(G(P \oplus Q)) \geq d_t(G(P)) + d_t(G(Q))$.

Démonstration. 1. Il suffit de montrer que chaque ensemble dominant de $G(P)$ (resp. $G(Q)$) est un ensemble dominant de $G(P \oplus Q)$. Soit D un ensemble dominant de $G(P)$ et x un sommet de $V(G(Q))$. Dans le poset Q , il

existe une chaîne qui joint le sommet x à l'un des éléments minimaux de Q . Par l'opération \oplus , cet élément minimal est comparable à tous les sommets de P et en particulier à ceux de D . Il s'ensuit que dans $G(P \oplus Q)$, x est adjacent à l'un des sommets de D . Par dualité, chaque ensemble dominant de $G(Q)$ est aussi un ensemble dominant de $G(P \oplus Q)$.

2. Analogue à 1. □

Notons que dans les posets série-parallèles connexes, chaque élément maximal est plus grand que chaque élément minimal. Dans $P \oplus Q$, cette propriété implique que chaque élément maximal (resp. minimal) de P (resp. de Q) appartient à tous les intervalles maximaux de $P \oplus Q$ quand P et Q sont des posets série-parallèles connexes. Ainsi, dans $G(P \oplus Q)$, l'ensemble des éléments maximaux (resp. minimaux) $Max(P)$ (resp. $Min(Q)$) de P (resp. Q) est un ensemble de sommets dominants. En utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 2.2.3, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2.2.3. [22] *Soient P et Q deux posets.*

1. *Si P est un ordre série-parallèle connexe, alors $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(Q)) + |Max(P)| + d(G(P_r))$, où P_r est le sous poset de P induit par $P - Max(P)$.*
2. *Si Q est un ordre série-parallèle connexe, alors $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(P)) + |Min(Q)| + d(G(Q_0))$, où Q_0 est le sous poset de Q induit par $Q - Min(Q)$.*

2.2.2 Nombre domatique et nombre domatique total du graphe $G(P \times Q)$

Proposition 2.2.4. [22] *Soient P et Q deux posets. Nous avons :*

1. $d(G(P \times Q)) \geq d(G(P))d(G(Q))$,
2. $d_t(G(P \times Q)) \geq d_t(G(P))d_t(G(Q))$.

Démonstration. 1. Soit $\mathcal{D} = \{D_i, i = 1, \dots, d(G(P))\}$ (resp. $\mathcal{D}' = \{D'_j, j = 1, \dots, d(G(Q))\}$) une partition domatique de $G(P)$ (resp. $G(Q)$). Nous montrons que $\mathcal{D} \times \mathcal{D}' = \{D_i \times D'_j, 1 \leq i \leq d(G(P)), 1 \leq j \leq d(G(Q))\}$ forment une partition domatique de $G(P \times Q)$. Soit $(x, y) \in P \times Q$, $1 \leq i \leq d(G(P))$ et $1 \leq j \leq d(G(Q))$. Si $(x, y) \notin D_i \times D'_j$, alors $x \notin D_i$ ou $y \notin D'_j$. Dans le premier cas, il existe un élément $x_0 \in D_i$ et un intervalle $[p, q]$ de P tel que $x, x_0 \in [p, q]$

et dans le deuxième cas, il existe un élément $y_0 \in D'_j$ et un intervalle $[p', q']$ de Q tel que $y, y_0 \in [p', q']$. Nous déduisons que, $(x, y), (x_0, y) \in [(p, y), (q, y)]$ si $x \notin D_i$ et $y \in D'_j$, $(x, y), (x, y_0) \in [(x, p'), (x, q')]$ si $x \in D_i$ et $y \notin D'_j$ et $(x, y), (x_0, y_0) \in [(p, p'), (q, q')]$ si $x \notin D_i$ et $y \notin D'_j$. D'où, $D_i \times D'_j$ est un ensemble dominant de $P \times Q$ et $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ est partition domatique de $P \times Q$.

2. Analogue à 1. □

Théorème 2.2.1. [22] *Soient P et Q deux posets. Si $G(P)$ et $G(Q)$ sont domatiquement pleins, alors*

$$d(G(P \times Q)) = d(G(P))d(G(Q)).$$

Démonstration. De la Proposition 2.2.4, nous avons $d(G(P \times Q)) \geq d(G(P))d(G(Q))$. Examinons maintenant l'inégalité dans l'autre sens. Soit $(x, y) \in P \times Q$. Nous avons $\deg_{G(P \times Q)}(x, y) = \deg_{G(P)}(x)(\deg_{G(Q)}(y) + 1) + \deg_{G(Q)}(y)$. D'où, $d(G(P \times Q)) \leq \delta(G(P \times Q)) + 1 = \delta(G(P))(\delta(G(Q)) + 1) + \delta(G(Q)) + 1 = (\delta(G(P)) + 1)(\delta(G(Q)) + 1) = d(G(P))d(G(Q))$ puisque P et Q sont domatiquement pleins. □

Corollaire 2.2.1. [22] *Soit P un poset et C_n une chaîne de longueur n . Si $G(P)$ est domatiquement plein, alors*

1. $d(G(C_n \times P)) = (n + 1)d(G(P))$,
2. $d_t(G(C_n \times Q)) \geq (n + 1)d_t(G(Q))$.

Dans la figure 2.2 ci-dessous, nous donnons l'exemple d'un poset P tel que $G(P)$ n'est pas domatiquement plein et où la condition 1 du Corollaire 2.2.1 n'est pas vérifiée.

2.2.3 Nombre domatique du graphe $G((C_{n_1} \times C_{n_2})_{l,u})$

Le nombre domatique du produit cartésien $G_1 \square G_2 = (V_1 \times V_2, E)$ de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ a été déterminé par G.J.Chang [33]. Il a montré que tout produit cartésien de deux chaînes $P_{n_1} \times P_{n_2}$ en n_1 et n_2 sommets respectivement est domatiquement plein c'est à dire, $d(P_{n_1} \times P_{n_2}) = 3$ excepté pour $d(P_2 \times P_2) = d(P_2 \times P_4) = d(P_4 \times P_2) = 2$. Laborde [110] et Zelinka [158] ont prouvé qu'en cas où k est un entier positif et $r = 2^k - 1$, le produit $P_{n_1} \times \dots \times P_{n_r}$ est domatiquement plein.

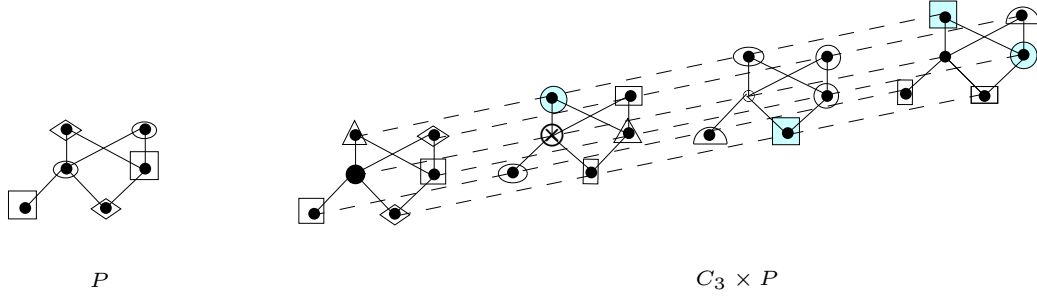


FIGURE 2.2 – $d(G(P)) = 3, d(G(C_3)) = 4, d(G(C_3 \times P)) = 14$

Soit P le produit cartésien de deux chaînes C_{n_1} et C_{n_2} de longueur n_1 et n_2 , respectivement. Soit $P_{l,u}$ le sous poset de P induit par les niveaux consécutifs $\cup_{i=l}^u N_i$ de P , $0 \leq l \leq u \leq n_1 + n_2$.

Nous donnons dans cette partie une valeur exacte de $d(G(P_{l,u}))$, ainsi que la partition domatique correspondante

Notons brièvement $G_{l,u} = G(P_{l,u})$ et nous supposons sans perte de généralité que $n_1 \leq n_2$.

Notons aussi par $U_p(x)$ et $D_p(x)$ le filtre engendré par x et l'idéal engendré par x dans P , respectivement, $U_P(x) = \{y \in P : x \leq_P y\}$ et $D_P(x) = \{y \in P : y \leq_P x\}$.

Dans $G_{0,n_1+n_2} = G(P)$, chaque sommet est un sommet dominant c-à-d, $d(G(P)) = (n_1 + 1)(n_2 + 1)$, mais ceci n'est pas vrai pour tout l et u .

Proposition 2.2.5. [22] *Si $l \leq u - n_2$, alors les éléments de l'ensemble $D = [(l, l), (u - n_2, u - n_1)]$ sont des sommets dominants de $G_{l,u}$.*

Démonstration. Notons par A (resp. B) l'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) de $P_{l,u}$ et \mathcal{I} l'ensemble de ses intervalles maximaux,

$A = \{(i, l - i) : 0 \leq i \leq l\}$, $B = \{(n_1 - k, u - n_1 + k) : 0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u\}$.

Notons que l'ensemble des sommets dominants $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ est non vide. En effet,

nous avons en premier lieu $(i, l - i) \leq (l, l)$ pour tout i , $0 \leq i \leq l$ et en second lieu, nous avons, $(l, l) \leq (n_1 - k, u - n_1 + k)$ pour tout $0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u$ parceque $l \leq u - n_2 \leq n_1 - k$ et $l \leq u - n_2 \leq u - n_1 \leq u - n_1 + k$. Par

conséquent, (l, l) appartient à tous les intervalles maximaux de $P_{l,u}$.

Il reste à prouver que $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I = D$.

“ \subseteq ” Si $(x, y) \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$, alors $(x, y) \geq (i, l - i)$ pour tout i , $0 \leq i \leq l$, et alors $(x, y) \geq (\max_i i, \max_i (l - i)) \geq (l, l)$. En outre, $(x, y) \leq (n_1 - k, u - n_1 + k)$ pour tout k , $0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u$, alors $(x, y) \leq (\min_k (n_1 - k), \min_k (u - n_1 + k)) = (u - n_2, u - n_1)$.

“ \supseteq ” Si $(x, y) \in D$, alors $(l, l) \leq (x, y) \leq (u - n_2, u - n_1)$ et par conséquent $(i, l - i) \leq (l, l) \leq (x, y) \leq (u - n_2, u - n_1) \leq (n_1 - k, u - n_1 + k)$, pour tout $0 \leq i \leq l$ et $0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u$, c-à-d, $(x, y) \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$. \square

Nous introduisons ci-dessous dans la figure 2.3, l'ensemble D des sommets dominants de $G_{l,u}$ où $l \leq u - n_2$.

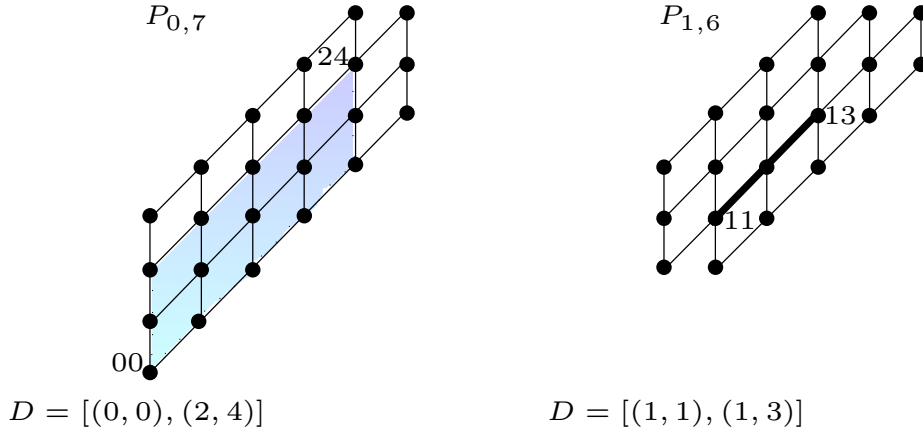


FIGURE 2.3 – Considérons $P = C_3 \times C_5$. L'ensemble D représente l'ensemble des sommets dominants de $G_{0,7}$ et $G_{1,6}$ respectivement.

Théorème 2.2.2. [22] Soient l, u, n_1, n_2 des entiers non négatifs tels que $l \geq n_1$ ou $u \leq n_2$, nous avons $d(G_{l,u}) = u - l + 1$, $d_t(G_{l,u}) = u - l$ et $G_{l,u}$ est domotiquement plein.

Démonstration. Nous n'étudions que le cas où $u \leq n_2$. En effet, si l'égalité $d(G_{l,u}) = u-l+1$ est vérifiée pour $u \leq n_2$, alors $d(G_{l,u}) = d(G_{n_1+n_2-u, n_1+n_2-l}) = (n_1+n_2-l) - (n_1+n_2-u) + 1 = u-l+1$ pour $l \geq n_1$. D'une façon similaire, si l'égalité $d_t(G_{l,u}) = u-l$ est vérifiée pour $u \leq n_2$, alors $d_t(G_{l,u}) = u-l$ pour $l \geq n_1$.

Soit $u \leq n_2$. Nous avons

$$d(G_{l,u}) \leq \delta(G_{l,u}) + 1 \leq \deg_{G_{l,u}}(0, u) + 1$$

et

$$d_t(G_{l,u}) \leq \delta(G_{l,u}) \leq \deg_{G_{l,u}}(0, u).$$

Les sommets adjacents à $(0, u)$ sont $(0, u-i), i = 1, \dots, u-l$. D'où $d(G_{l,u}) \leq u-l+1$ et $d_t(G_{l,u}) \leq u-l$.

D'autre part, la famille $\{N_i, l \leq i \leq u\}$ (resp. $\{N_l \cup N_u, N_i, l+1 \leq i \leq u-1\}$) est une partition domatique (resp. domatique totale) de $G_{l,u}$ de taille $u-l+1$ (resp. $u-l$). D'où l'égalité. \square

Nous illustrons dans l'exemple donné dans la figure 2.4 ci-dessous comment nous obtenons le nombre domatique et le nombre domatique total dans le cas où les conditions du théorème 2.2.2 sont satisfaites.

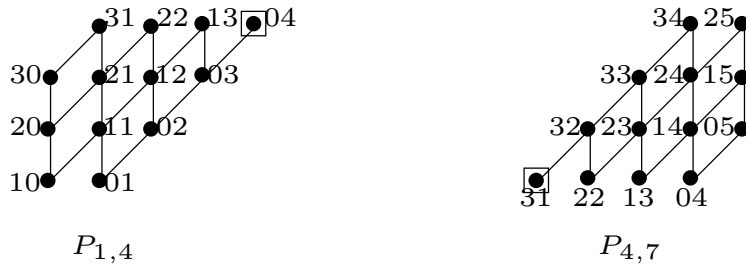


FIGURE 2.4 – Soit $P = C_3 \times C_5$, $d(G_{1,4}) \leq \delta(G_{1,4}) + 1 \leq d_{G_{1,4}}(0, 4) + 1 = 4$ et $d_t(G_{4,7}) \leq \delta(G_{4,7}) = d_{G_{4,7}}(3, 1) = 3$. D'autre part, chaque niveau de $P_{1,4}$ est un ensemble dominant dans $G_{1,4}$ et $\{N_4 \cup N_7, N_5, N_6\}$ est une partition domatique totale de $G_{4,7}$. D'où $d(G_{1,4}) = 4$ et $d_t(G_{4,7}) = 3$.

Théorème 2.2.3. [22] Soient l, u, n_1 et n_2 des entiers non négatifs tels que $l < n_1$ et $u > n_2$. Nous avons

$$d(G_{l,u}) = \begin{cases} (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1) & \text{si } l + u \leq n_1 + n_2, \\ (u - n_1 + 1)(n_1 - l + 1) & \text{si } l + u > n_1 + n_2, \end{cases}$$

et $G_{l,u}$ est domatiquement plein.

Démonstration. Par dualité, nous considérons uniquement le cas où $l + u \leq n_1 + n_2$.

Nous avons $d(G_{l,u}) \leq \delta(G_{l,u}) + 1 \leq \deg_{G_{l,u}}(0, n_2) + 1$, avec $\deg_{G_{l,u}}(0, n_2) = |\{(m, n) \in P_{l,u} : 0 \leq m \leq u - n_2 \text{ et } l \leq n \leq n_2\}| - 1 = (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1) - 1$. D'où, $d(G_{l,u}) \leq (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$.

Pour prouver l'autre inégalité, nous introduisons les notations suivantes :

$$\text{pour } i \in \{0, \dots, u - l\}, \text{ soit } J_i = \begin{cases} \{0, \dots, i\} & \text{si } i \leq u - n_2 - 1, \\ \{0, \dots, u - n_2\} & \text{si } u - n_2 \leq i \leq n_2 - l, \\ \{0, \dots, u - l - i\} & \text{si } n_2 - l + 1 \leq i, \end{cases}$$

et nous prouvons que les $(u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$ sous-ensembles D_j^i de N_{l+i} définis ci-dessus, constituent une partition domatique de $P_{l,u}$.

Pour $i \leq u - n_2 - 1, j \in J_i$, soit

$$D_j^i = \{(k, l + i - k) \in [0, n_1] \times [0, n_2] : k \equiv j[i + 1]\}.$$

Pour $u - n_2 \leq i \leq n_2 - l, j \in J_i$, soit

$$D_j^i = \{(k, l + i - k) \in [0, n_1] \times [0, n_2] : k \equiv j[u - n_2 + 1]\}.$$

Pour $i \geq n_2 - l + 1, j \in J_i$, soit

$$D_j^i = \{(i - n_2 + l + k, n_2 - k) \in [0, n_1] \times [0, n_2] : k \equiv j[u - i - l + 1]\}.$$

Pour illustrer les ensembles D_j^i dans un diagramme de Hasse, nous attribuons à chaque élément de l'intervalle $[(0, l), (u - n_2, n_2)]$ une couleur telle que deux sommets différents aient deux couleurs différentes. Nous obtenons exactement $(u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$ couleurs différentes. Pour compléter la coloration de $P_{l,u}$, nous procédons comme suit : Dans le niveau N_{l+i} , nous continuons la numérotation périodiquement en allant de la droite vers la gauche. La figure 2.5 illustre ce procédé avec un exemple particulier où $D_0^0 = \{x : x \text{ a la couleur } 1\}$; $D_0^1 = \{x : x \text{ a la couleur } 2\}$, $D_1^1 = \{x : x \text{ a la couleur } 3\}$; $D_0^2 = \{x : x \text{ a la couleur } 4\}$, $D_1^2 = \{x : x \text{ a la couleur } 5\}$, $D_2^2 = \{x : x \text{ a la couleur } 6\}, \dots$

Clairement, pour tout $i \in \{0, \dots, u - l\}$, $\{D_j^i, j \in J_i\}$ forme une partition de

N_{l+i} . Il reste à prouver que chaque D_j^i est un ensemble dominant.
 Considérons les $n_1 + n_2 - u + 1$ intervalles suivants :

$$I_k = \begin{cases} [(k, l - k), (u - n_2 + k, n_2 - k)] & \text{if } k = 0, \dots, l, \\ [(l, 0), (u - n_2 + k, n_2 - k)] & \text{if } k = l + 1, \dots, n_1 + n_2 - u. \end{cases}$$

Par la procédure de coloration précédemment définie, on peut dire que tout intervalle I_k , $k = 0, \dots, l$ (resp. $k = l + 1, \dots, n_1 + n_2 - u$) contient un (resp. au moins un) élément de chaque D_j^i pour tout i, j , c'est à dire,

$$I_k \cap D_j^i \neq \emptyset$$

pour tout i, j, k . En outre, les intervalles I_k couvrent tout le poset $P_{l,u}$. Donc, chaque élément de $G_{i,u}$ est adjacent à un certain élément de D_j^i pour tout i, j .

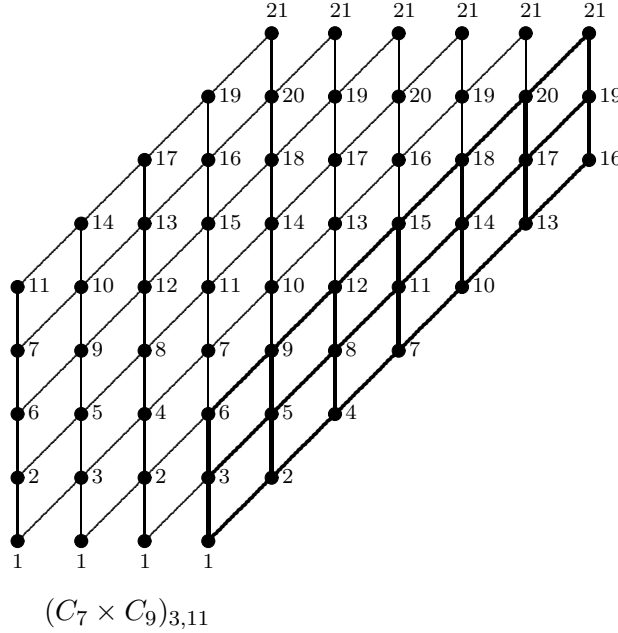


FIGURE 2.5 – La partition domatique de $(C_7 \times C_9)_{3,11}$

Il s'ensuit que les $(u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$ ensembles D_j^i constituent bien une partition domatique de $G_{l,u}$ et $d(G_{l,u}) \geq (u - n_2 + 1)(n_2 - l + 1)$. Par conséquent, $G_{l,u}$ est domatiquement plein. \square

2.3 \mathcal{NP} -complétude du problème de la partition domatique totale maximum

Beaucoup de résultats concernant l'aspect algorithmique du problème de la partition domatique maximum existent dans la littérature (voir [18], [72], [92], [134], [139]). Pour plusieurs classes de graphes, des algorithmes en temps linéaires ont été décrits comme pour les graphes fortement triangulés et les graphes d'intervalles, pour d'autres la \mathcal{NP} -complétude du problème de la partition domatique maximum $d(G) \geq k$ a été prouvée, comme pour les graphes triangulés, les graphes scindés, les graphes de comparabilité et les graphes bipartis (pour $k \geq 3$).

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier. Nous définissons les problèmes de reconnaissance suivants :

- " $\alpha(\mathcal{H}(P)) \geq k, k \leq |P|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un ensemble stable de cardinal $\geq k$, (stable maximum).
- " $\rho(\mathcal{H}(P)) \leq k, k \leq |N_0| |N_{r(P)}|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par arêtes, de cardinal $\leq k$ (recouvrement par arêtes minimum).
- " $\nu(\mathcal{H}(P)) \geq k, k \leq \min\{|N_0|, |N_{r(P)}|\}$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un couplage de cardinal $\geq k$, (couplage maximum).
- " $\tau(\mathcal{H}(P)) \leq k, k \leq |P|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par sommets de cardinal $\leq k$, (recouvrement par sommets minimum).
- " $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq k, k \leq |P|$ " : le problème qui consiste à déterminer s'il existe une coloration des sommets de P , de cardinal $\leq k$ (coloration minimum).

I. Bouchemakh [20, 25] a montré que ces problèmes de reconnaissance sont tous \mathcal{NP} -complets.

Théorème 2.3.1. (*[20, 25]*) *Les problèmes de reconnaissance $\alpha(\mathcal{H}(P)) \geq k, \rho(\mathcal{H}(P)) \leq k, \nu(\mathcal{H}(P)) \geq k, \tau(\mathcal{H}(P)) \leq k$ et $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq k$ où P et k sont donnés, sont \mathcal{NP} -complets.*

Comme le problème $d(G) \geq k$ est \mathcal{NP} -complet pour les graphes bipartis (pour $k \geq 3$), nous déduisons directement que le problème de la partition

domatique maximum $d(G(P)) \geq k$ dans le graphe 2-section de l'hypergraphe des intervalles d'un poset P est \mathcal{NP} -complet pour $k \geq 3$.

Théorème 2.3.2. [22] *Le problème de la partition domatique totale maximum dans le graphe 2-section de l'hypergraphe des intervalles d'un poset fini P est \mathcal{NP} -complet.*

Démonstration. Il est clair que ce problème appartient à la classe \mathcal{NP} . Nous prouvons la complétude par une réduction polynomiale du problème du nombre domatique dans un graphe à notre problème.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et k un entier. Il est connu [72] que le problème de décision $d(G) \geq k$ est \mathcal{NP} -complet. Nous présentons une construction qui donne la relation $d(G) = d_t(G(P))$. Notons les sommets de G par v_1, \dots, v_n . Nous associons à G le poset $P = V \cup V'$ où $V' = \{v'_i : v_i \in V\}$ est une copie de V et l'ordre est donné de la façon suivante : pour $v_i \in V, v'_j \in V'$, nous avons $v_i < v'_j$ si et seulement si v_i est adjacent à v_j dans G ou $i = j$. En outre, V et V' forment des antichâines. Voir la figure 2.6.

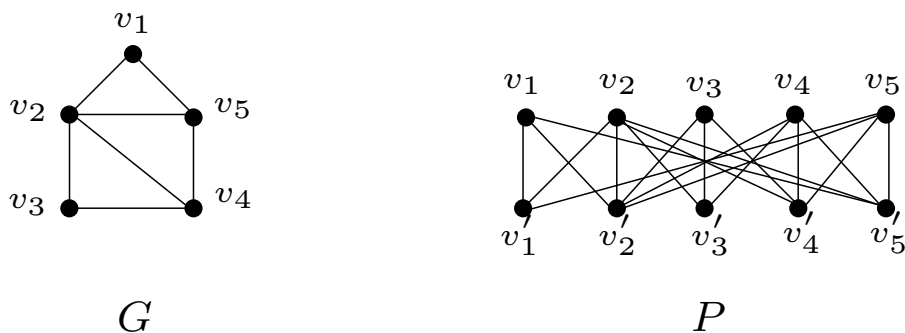


FIGURE 2.6 – Le poset $P = V \cup V'$ associé au graphe $G = (V, E)$.

Soit $\{D_k, k = 1, \dots, q\}$ une partition domatique de G . Alors $\{D_k \cup D'_k, k = 1, \dots, q\}$ est une partition domatique totale de $G(P)$. En effet, pour $x \in V - D_k$, il existe un élément $y \in D_k$ tel que xy est une arête de E et par suite dans P , $x < y'$ et $y < x'$, c-à-d, pour tout $x \in V - D_k$ (resp. $x' \in V' - D'_k$) il existe $y' \in D'_k$ (resp. $y \in D_k$) tel que xy' (resp. $x'y$) est une arête dans $G(P)$. Pour $x \in D_k$ (resp. $x' \in D'_k$), nous avons par construction $x < x'$, ce qui veut dire que pour tout $x \in D_k$ (resp. $x' \in D'_k$) il existe $x' \in D'_k$ (resp. $x \in D_k$) tel que $x'x$ est une arête de $G(P)$. Par suite, $D_k \cup D'_k$ est un ensemble dominant total de $G(P)$ et nous obtenons l'inégalité $d(G) \leq d_t(G(P))$.

Inversement, soit $\{D_k, k = 1, \dots, q\}$ une partition domatique totale de $G(P)$. Puisque $G(P)$ est un graphe biparti, donc chaque ensemble dominant total D_k doit être décomposé en deux sous ensembles non vides D_{i_k} de V et D'_{j_k} de V' . Il s'ensuit que les familles $\{D_{i_k}, k = 1, \dots, q\}$ et $\{D'_{j_k}, k = 1, \dots, q\}$ constituent en effet une partition domatique de G et l'inégalité $d(G) \geq d_t(G(P))$ en découle. \square

Chapitre 3

Facteurs dans les graphes

3.1 Introduction

Vu l'importance et la croissance sans cesse de l'étude des facteurs dans les graphes, nous jugeons utile de passer en revue les résultats basiques établis. Plusieurs revues ont été écrites là-dessus [36, 153]. Akiyama et Kano [1], ont établi une en 1985, et en 2007, Plummer [137] introduit une suite de ce papier en rassemblant tous les résultats entre 1985 et 2003. Deux livres sont entièrement dédiés aux facteurs, il s'agit de celui de Bosàk [19] et d'Akiyama et Kano [2]. Nous nous abstenons de parler des facteurs connexes, nous référons le lecteur au survey de Kouider et Vestergaard [107] sur le sujet. Notre survey dans ce chapitre est loin d'être exhaustif, nous nous contentons seulement de quelques résultats que nous jugeons fondamentaux et qui ont marqué l'histoire enrichissante des facteurs. Nous nous intéresserons particulièrement aux facteurs pairs, qui constituent l'un des mots clef de notre thèse.

3.2 Définitions et historique

Nous rappelons qu'un *facteur* dans un graphe G n'est autre qu'un graphe partiel de G et pour un entier positif k , un *k -facteur* de G est un graphe partiel régulier d'ordre k . Si le graphe partiel est connexe, alors le facteur est dit *connexe*. Une *factorisation* d'un graphe est une décomposition du graphe en des graphes partiels c-à-d une partition des arêtes de G en des facteurs vérifiant certaines propriétés. Par exemple, lorsqu'il s'agit d'une

décomposition d'un graphe G en k -facteurs, nous parlerons donc d'une k -**factorisation**. Le graphe G est dit alors k -**factorisable**. Voir la figure 3.1.

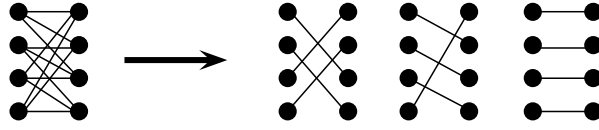


FIGURE 3.1 – Un graphe 3-régulier et l'une des ses 1-factorisation.

Considérons un graphe $G = (V, E)$ et une application à valeurs entières positives $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Un graphe partiel F tel que $d_F(x) = f(x)$ pour tout $x \in V(G)$ est dit un f -**facteur**.

Soit k un entier positif. Si l'application f est définie comme suit : $f(x) = k$ pour tout $x \in V(G)$, alors un f -facteur est équivalent à un k -facteur. Ce qui implique qu'un f -facteur constitue une généralisation naturelle d'un k -facteur.

Soient f, g deux applications $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $g(v) \leq f(v)$ pour tout sommet v de $V(G)$.

Un (g, f) -**facteur** de G est un graphe partiel F tel que

$$g(v) \leq \deg_F(v) \leq f(v) \text{ pour tout } v \in V(G).$$

Si $f = g$; il s'agira d'un f -**facteur**. Par contre, si $f = g = k$, alors le (g, f) -facteur c-à-d, (k, k) -facteur, n'est simplement qu'un k -**facteur**.

Soient a, b deux entiers fixés tels que $1 < a \leq b$. Un graphe partiel F de G est dit un $[a, b]$ -**facteur** de G si

$$a \leq d_F(x) \leq b \text{ pour tout } x \in V(G).$$

Un sommet de degré b dans $[a, b]$ -facteur est dit **un sommet saturé**; sinon, il est dit **non saturé**.

L'histoire des facteurs a commencé avec Petersen en 1891, qui voulait généraliser le concept de cycle hamiltonien par celui d'un 2-facteur, qui est une famille de cycles élémentaires deux à deux sommet-disjoints, tel que

chaque sommet du graphe appartient à un cycle et à un seulement. Nous remarquons qu'un cycle hamiltonien n'est qu'un cas particulier d'un 2-facteur. En fait, il s'agit d'un 2-facteur connexe. Petersen énonça alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. (Petersen [135], 1891) *Si $G = (V, E)$ est un graphe $2k$ -régulier, nous pouvons partitionner l'ensemble E de ses arêtes en k classes constituant chacune un 2-facteur.*

Il a prouvé également un deuxième théorème qui stipule que tout graphe 2-connexe, 3-régulier a un 1-facteur c-à-d un couplage parfait. Ce résultat est inspiré de son contre exemple construit pour le théorème de Tait qui disait que tout graphe 3-régulier, sans isthme est 1-factorisable. Son contre exemple ne fut autre que le fameux graphe de Petersen (voir figure 3.2). Ces deux théorèmes ont ouvert la voie à d'autres domaines prometteurs de la théorie des graphes.

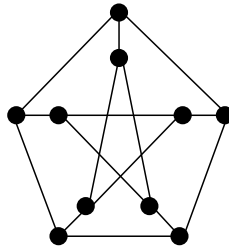


FIGURE 3.2 – Le graphe de Petersen

Par la suite, les théorèmes de König et Hall sur les graphes bipartis firent leurs apparitions. En effet, en 1916, König montra que tout graphe régulier biparti est 1-factorisable. Il enchaîna ensuite en 1931, avec un autre théorème qui fut découvert aussi par Hall en 1935 et qui assure l'existence d'un couplage dans un graphe biparti $G = (A \cup B, E)$ qui sature A si et seulement si pour tout sous-ensemble S de A , $|N_G(S)|$ est au plus égale à $|S|$.

L'année 1947 fut marquante dans l'histoire des facteurs. On y voit la caractérisation des 1-facteurs dans les graphes par Tutte [147] dans un théorème des plus importants et des plus influents à ce jour.

Théorème 3.2.2. (Théorème des 1-facteurs de Tutte [147] (1947)) *Un graphe G a un 1-facteur si et seulement si pour tout sous-ensemble $S \subseteq V(G)$,*

le nombre de composantes de $G - S$ qui ont un cardinal impair est au plus égal à $|S|$.

Les cinq théorèmes cités précédemment constituent une base dans l'étude des facteurs et les factorisations. Le second stade du développement des facteurs est marqué toujours par Tutte [148] qui nous égaya en 1952 par l'un des plus beaux résultats établis dès lors ; il s'agit du théorème des f -facteurs de Tutte qui caractérise les f -facteurs et constitue une généralisation de son théorème établi en 1947. La roue du développement ne cesse de tourner, et l'année 1970, nous révéla l'émergence de Lovász avec un théorème des plus originaux, qui généralise celui de Tutte, il s'agit du théorème des (g, f) -facteurs de Lovász. Tutte [146] n'en demeure pas là, il redémontra en 1981 le théorème de Lovász en utilisant son propre théorème des f -facteurs. Il en offrait ainsi une preuve moins longue et plus élégante. Cependant, les conditions des théorèmes des f -facteurs et (g, f) -facteurs restent difficiles à vérifier dans le cas général, ce qui a orienté la recherche vers l'élaboration de conditions suffisantes pour l'existence de facteurs moyennant les invariants de graphe. Cette piste est des plus fertiles vu le nombre important de papiers écrit et qui ne cesse d'augmenter.

3.3 f -facteurs

Soient deux sous-ensembles disjoints $X, Y \subseteq V(G)$. Rappelons que $e_G(X, Y)$ est le nombre d'arêtes dans G ayant une extrémité dans X et une autre dans Y . Si aucun risque de confusion ne se pose, ce nombre sera noté $e(X, Y)$.

Introduisons le fameux théorème des f -facteurs de Tutte, établi en 1952.

Théorème 3.3.1. (Théorème des f -facteurs de Tutte [148]) *Soit G un graphe et $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Alors G a un f -facteur si et seulement si pour tous sous-ensembles disjoints X et Y de $V(G)$,*

$$\sum_{y \in Y} d_G(y) - \sum_{y \in Y} f(y) + \sum_{x \in X} f(x) - h(X, Y) - e(X, Y) \geq 0.$$

Où $h(X, Y)$ est le nombre de composantes C de $G - (X \cup Y)$ telles que

$$\sum_{x \in V(C)} f(x) + e(V(C), Y) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Remarque 3.3.1. Posons $\delta(X, Y) = \sum_{y \in Y} d_G(y) - \sum_{y \in Y} f(y) + \sum_{x \in X} f(x) - h(X, Y) - e(X, Y)$, dans le théorème précédent. Nous avons $\delta(\emptyset, \emptyset) = h(\emptyset, \emptyset) = 0$. En effet, $h(\emptyset, \emptyset)$ est le nombre de composantes C de G qui vérifient $\sum_{x \in V(C)} f(x) \equiv 1 \pmod{2}$, or $\sum_{x \in V(C)} f(x) \equiv 0 \pmod{2}$. De ce fait, les sous-ensembles disjoints X, Y à considérer sont tels que $X \cup Y \neq \emptyset$.

Pour montrer la condition suffisante de ce théorème, Tutte avait transformé le graphe G en un graphe simple $G^* = (V^*, E^*)$ et a montré que G a un f -facteur si et seulement si G^* a un 1-facteur. La construction de G^* se fait comme suit :

Supposons que le graphe G a un sommet a tel que $d(a) < f(a)$, alors G ne peut avoir aucun f -facteur. En outre, pour $X = \emptyset, Y = \{a\}$, $\delta(\emptyset, a) < 0$, ce qui implique la vérification du théorème 3.3.1 dans ce cas. Supposons à présent que $d(x) \geq f(x)$ pour tout sommet x de $V(G)$. Soit $s(x) = d(x) - f(x)$.

Pour tout sommet x de V , nous associons $d(x)$ éléments distincts x_u de V^* , chaque élément x_u est associé à l'arête u qui lui est incidente (voir figure 3.3), et nous associons également $s(x) = d(x) - f(x)$ autres éléments distincts $x(1), x(2), \dots, x(s(x))$ de V^* . Nous notons l'ensemble des $d(x)$ éléments x_u et l'ensemble $s(x)$ éléments $x(i)$ par $X(x)$ et $Y(x)$ respectivement. Nous supposons que deux ensembles $X(x) \cup Y(x)$ définis pour deux éléments distincts x de V ne doivent pas avoir un élément en commun. L'ensemble V^* de sommets de G^* est défini par :

$$V^* = \bigcup_{x \in V} (X(x) \cup Y(x)).$$

Pour toute arête $A = xy$ de G , nous supposons que G^* n'a qu'une seule arête qui joint x_A et y_A , nous notons ceci par le symbole A . Nous supposons aussi que pour tout sommet x de V , chaque élément de $X(x)$ est joint à tout sommet de $Y(x)$ par exactement une seule arête de G . Nous supposons que G^* n'a d'autres arêtes que ceux exigées par ces deux règles.

Pour tout sommet x de V , les éléments $X(x) \cup Y(x)$ et les arêtes de G^* joignant ces sommets, constituent un sous-graphe $St(x)$ de G^* que nous appelons graphe étoile de x dans G^* . $St(x)$ est connexe si $s(x) > 0$ et dans le cas où $s(x) = 0$, il est connexe seulement si $d(x) = f(x) = 1$.

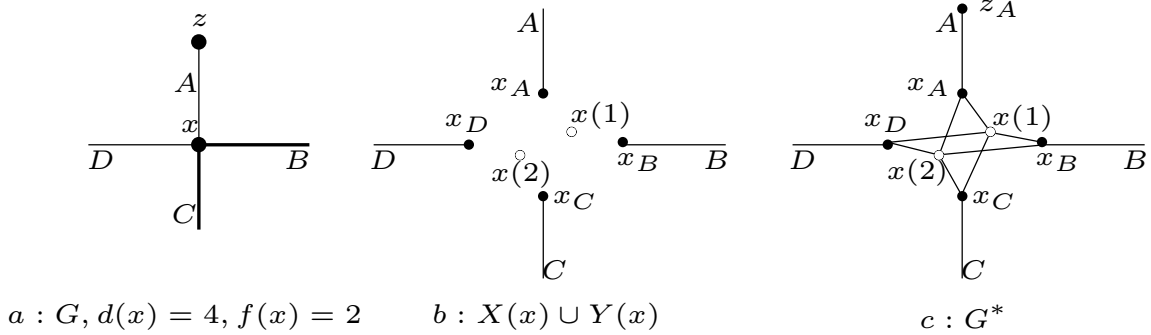


FIGURE 3.3 – a : Le graphe G , b : l'ensemble des sommets en noir est $X(x)$, ceux en blanc forment $Y(x)$, c : le graphe G^* .

Nous reprenons ci-dessous, la démonstration de Tutte [149] du lemme qui stipule que le graphe G a un f -facteur si et seulement si G^* a un 1-facteur. Si F est l'ensemble des arêtes d'un f -facteur de G . Alors, nous construisons un 1-facteur, F' de G^* en associant à F' , l'ensemble des arêtes de G^* désignées par la même lettre dans F (Voir figure 3.4). A tout sommet x de V correspond $X(x) \cup Y(x)$ sommets dans G^* . Nous avons $f(x)$ arêtes qui ont une extrémité dans $X(x)$ et qui sont dans F ; il en reste $(d(x) - f(x))$ sommets de $X(x)$ qui sont liés à tout sommet de $Y(x)$ et qui ne sont pas saturés par F' . Nous prenons donc dans F' , $d(x) - f(x)$ arêtes parmi celles qui joignent $X(x)$ à $Y(x)$, ainsi nous saturons ce dernier ensemble. D'après la définition de G^* , il y'aura pas deux arêtes avec la même extrémité.

Réciproquement, si G^* a un 1-facteur dont l'ensemble des arêtes est H ; soit H_0 l'ensemble des arêtes ayant les deux extrémités dans deux graphes étoiles différents $St(x)$, i.e., ceux qui ont les deux extrémités dans deux ensembles $X(x)$ différents. Pour tout sommet x de V , il y a seulement $s(x)$ éléments de H qui ont une extrémité dans $Y(x)$, et par suite, il reste seulement $d(x) - s(x) = f(x)$ éléments de H_0 qui ont une extrémité dans $X(x)$.

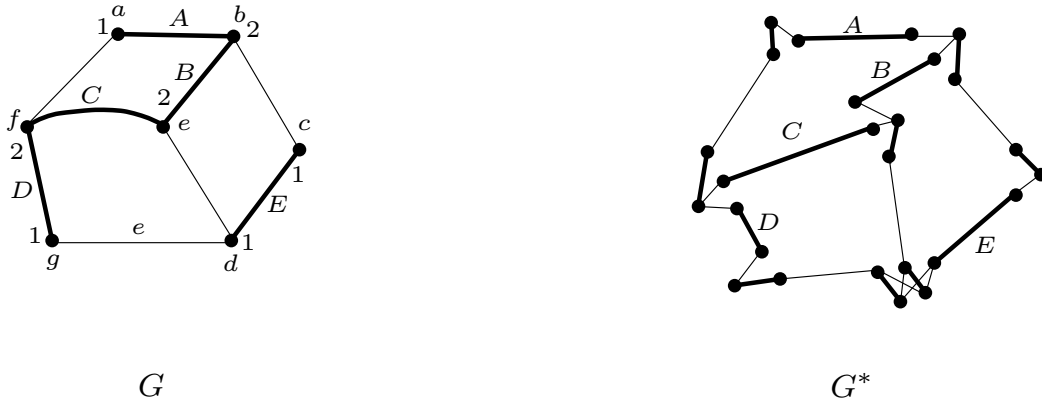


FIGURE 3.4 – Construction d’un 1-facteur dans G^* à partir d’un f -facteur dans G . Nous gardons les arêtes du facteur F puis nous prenons dans chaque graphe étoile $St(x)$, un couplage qui sature tous les sommets restants.

Il s’ensuit que les arêtes correspondantes aux éléments de H_0 définissent un f -facteur dans G . Voir la figure 3.5

Pour une constante entière $k \geq 1$, en posant $f(x) = k$ pour tout $x \in V(G)$ dans le théorème précédent, nous obtenons le théorème des k -facteur obtenu indépendamment par Belck [11] et Tutte [148].

Théorème 3.3.2. (Le théorème des k -facteurs, Belck et Tutte) Soit $k \geq 1$ un entier et G un graphe. Alors, G a un k -facteur si et seulement si pour tous sous-ensemble disjoints X et Y de $V(G)$,

$$k|X| + \sum_{y \in Y} d_G(y) - k|Y| - h(X, Y) - e(X, Y) \geq 0,$$

où $h(X, Y)$ est le nombre de composantes C de $G - (X \cup Y)$ dites composantes k -impair telles que

$$k|V(C)| + e(V(C), T) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Nous rappelons qu’il n’est pas facile d’appliquer les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2. Cependant, les investigations de conditions suffisantes pour l’existence d’un k -facteur ont été couronnées par une multitude de résultats publiés.

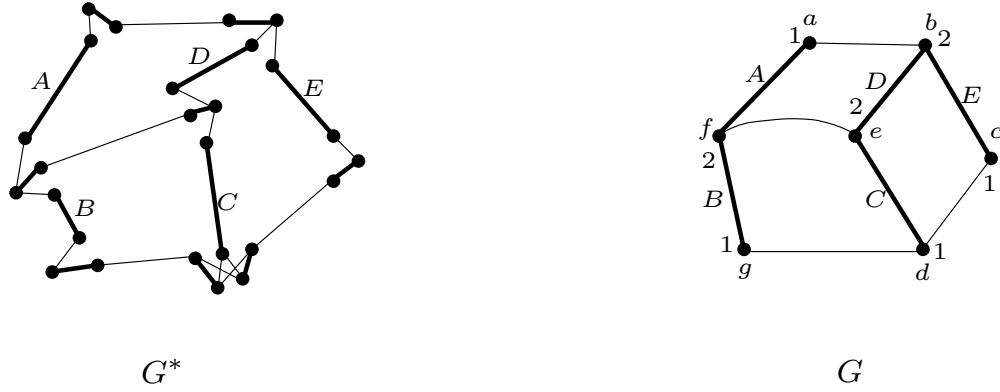


FIGURE 3.5 – L’obtention d’un f -facteur dans G à partir d’un 1-facteur dans G^* . Nous gardons dans G les arêtes de G^* dans le facteur qui ont les deux extrémités dans deux ensembles $X(x)$ différents.

Nous subdivisons les résultats en quatre parties : nous exposons d’abord les résultats qui impliquent le voisinage des sommets puis nous enchaînons avec ceux relatifs au nombre de stabilité, la connectivité et la toughness, pour terminer avec deux sous-sections qui traitent respectivement les facteurs réguliers dans les graphes réguliers et les k -facteurs dans les graphes sans griffe.

Conditions sur degré et voisinage

Les premiers résultats connus qui impliquent le voisinage sont des conditions suffisantes pour l’existence d’un cycle Hamiltonien. Il s’agit essentiellement du résultat d’Ore [132] qui stipule que dans un graphe G , si toute paire de sommets x, y de $V(G)$, non adjacents vérifie $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est Hamiltonien. Ce résultat fut étendu par Fan [57] comme suit.

Théorème 3.3.3. (Fan [57] (2004)) *Soit G un graphe 2-arête connexe d’ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire de sommets x, y tel que $d(x, y) = 2$, $\max\{d(x), d(y)\} \geq \frac{n}{2}$, alors G est Hamiltonien.*

Le théorème suivant englobe un ensemble de résultats réalisés entre 1985 et 1997.

Théorème 3.3.4. *Soit $k \geq 2$ un entier positif et G un graphe connexe d'ordre n tel que $\delta(G) \geq k$ et kn est pair. Si l'une des six conditions suivantes est vérifiée, alors le graphe G a un k -facteur.*

1. $\delta(G) \geq n/2$ et $n \geq 4k + 5$. (Egawa et Enomoto [54] (1989); Katerinis [95] (1985))
2. $d(x) + d(y) \geq n$ pour toute paire de sommets non adjacents x, y de G et $n \geq 4k - 5$. (Iida et Nishimura [81] (1991))
3. $\max\{d(x), d(y)\} \geq n/2$ pour toute paire de sommets non adjacents x, y de G et $n \geq 4k - 3$. (Nishimura [130] (1992))
4. $\min\{|N_G(x) \cup N_G(y)|/x, y \in V(G), xy \notin E(G)\} \geq (1/2)(n + k - 2)$ et $n \geq 8k - 7$. (Niessen [127] (1995))
5. $\min\{|N_G(x) \cup N_G(y)|/x, y \in V(G), xy \notin E(G)\} \geq (1/2)(n)$ et $n \geq 8k - 7$ et $\delta(G) \geq k + 1$. (Niessen [127] (1995))
6. $n \geq 9k - 1 - 4\sqrt{2(k-1)^2 + 2}$ et si $|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq (1/2)(n + k - 2)$ pour toute paire de sommets non adjacents x et y . (Iida et Nishimura [82] (1997))

Le résultat donné en 2 améliore celui en 1. Nishimura [130] a par la suite étendu ces deux résultats dans 3, puis Niessen donne d'autres conditions sur le voisinage dans 4 et 5, sa condition sur l'ordre du graphe fut améliorée par Iida et Nishimura [82] dans 6. Le résultat 3 de Nishimura [130] fut généralisé davantage par Niessen [125] en fortifiant la condition sur l'ordre du graphe comme suit.

Théorème 3.3.5. (Niessen [125] (1997)) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G) \geq k$ où k est un entier positif, kn pair et $n \geq 8k^2 + 12k + 6$. Si toute paire de sommets à distance 2 dans G vérifie $\max\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{n}{2}$, alors G a un k -facteur.*

Pour de grandes valeurs de n , Matsuda [119] a également fortifié la borne sur la somme des degrés donnée dans résultat 2 du théorème 3.3.4 pour garantir l'existence d'un k -facteur dans un graphe contenant un cycle Hamiltonien tel que ce k -facteur contient ce cycle aussi.

Théorème 3.3.6. (Matsuda [119] (2005)) *Soient $k > 2$ un entier et G un graphe d'ordre $n > 8(k)^2 - 2(\alpha(G) + 12)k + 3\alpha(G) + 16$, où $\alpha(G) = 3$ pour k impair et $\alpha(G) = 4$ pour k pair. Supposons kn pair et $\delta(G) \geq k$. Si pour*

toute paire de sommets non adjacents x, y de G , $d(x) + d(y) \geq n + \alpha(G)$. Alors G a un k -facteur contenant un cycle Hamiltonien donné.

Récemment, Gao et al. [71] ont considéré des graphes de taille plus grande qui contiennent un cycle Hamiltonien et ont fourni une condition plus forte sur les degrés que celle de Matsuda, seulement, il rajoute une autre condition pour que le graphe admette un k -facteur contenant ce cycle Hamiltonien est que l'ensemble des arêtes de ce cycle n'est pas un déconnectant.

Théorème 3.3.7. (Gao et al. [71](2009)) Soit $k \geq 2$ un entier et soit G un graphe d'ordre $n > 12(k-2)^2 + 2(5-\alpha(G))(k-2) - \alpha(G)$. Supposons kn pair, $\delta(G) \geq k$ et $\max\{d(x), d(y)\} \geq (n + \alpha(G))/2$ pour toute paire de sommets x, y de G , non adjacents où $\alpha(G) = 3$ pour k impair et $\alpha(G) = 4$ pour k pair. Alors G a un k -facteur qui contient un cycle Hamiltonien C donné si $G - E(C)$ est connexe.

Gao a fait savoir également que si G est un graphe qui vérifie les conditions du théorème précédent et si pour tout cycle Hamiltonien C dans G , $H = G - E(C)$ est connexe, alors G contient un 3-facteur qui contient tout cycle Hamiltonien C donné.

Kano [87] avait introduit ce théorème qui suit et qui a joué un rôle important puisqu'il a permis l'extension de plusieurs résultats trouvés sur les k -facteurs. Anstee [4] l'a utilisé pour l'obtention d'autres conditions sur les facteurs.

Théorème 3.3.8. (Kano [87] (1990)) Soit G un graphe connexe et θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq 1$, A, B deux sous-ensembles disjoints de $E(G)$ et f une application $f : V(G) \rightarrow N$. Si les quatre conditions suivantes sont vérifiées, alors G a un f -facteur F tel que $E(F) \supset A$ et $E(F) \cap B = \emptyset$.

1. $\sum (f(x); x \in V(G)) \equiv 0 \pmod{2}$.
2. $\epsilon = \sum (|f(x) - \theta d_G(x)|; x \in V(G)) + 2(1 - \theta)|A| + 2\theta|B| < 2$.
3. $\theta e(X, V(G)) \geq 1$ pour tout $X \subset V(G)$ tel que $G[X]$ est connexe et $\sum (f(x); x \in V(G)) \equiv 1 \pmod{2}$.
4. $(1 - \theta)e(X, V(G)) \geq 1$ pour tout $X \subset V(G)$ tel que $G[X]$ est connexe et $\sum (f(x); x \in V(G)) + e(X, V(G)) \equiv 1 \pmod{2}$.

Conditions sur la connectivité et le nombre de stabilité

Il a été montré par Chvátal et Erdős que dans un graphe G , si $\alpha(G) \leq \kappa(G)$, alors G a un cycle Hamiltonien, Katerinis et Nishimura ont généralisé ce résultat comme suit :

Théorème 3.3.9. *Soit G un graphe d'ordre n et k un entier positif tel que $k \geq 2$ et kn est pair. Alors si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors G a un k -facteur.*

1. $n \geq k+1$ et $\alpha(G) \frac{(k+1)^2}{4k} + \frac{5k-4}{8} - \frac{2}{k} \leq \kappa(G)$. (Katerinis [95](1985))
2. k est impair, $\kappa(G) \geq \max\{(k+1)^2/2, ((k+1)^2/4k)\alpha(G)\}$. (Nishimura [128](1989))
3. k est pair, $\kappa(G) \geq \max\{k(k+1)/2, ((k+2)/4)\alpha(G)\}$. (Nishimura [128](1989))

Moyennant le nombre de stabilité et le degré minimum d'un graphe, Niessen [126] avait établi les résultats suivants.

Théorème 3.3.10. (Niessen [126] (1995)) *Soit G un graphe d'ordre n et k un entier positif.*

1. Si $\delta(G) > \alpha(G)$, alors G a un 2-facteur.
2. Si k est pair, $k \geq 4$ et $n \geq k+1$. Si $\delta(G) > \alpha(G) \frac{k+2}{4} + \frac{5k-3}{8} - \frac{2}{k}$ alors G a un k -facteur.
3. Si k est impair, $k \geq 3$ et l un entier impair tel que $1 \leq l \leq k$ et G est d'ordre pair, $n \geq k+1$ tel que G possède un l -facteur. Si $\delta(G) > \alpha(G) \frac{(k+1)^2}{4k} + \frac{5k-4}{8} - \frac{2}{k}$, alors G possède un k -facteur.

Un autre résultat donné par Katerinis et Tsikopoulos [98] en 2000 assure en particulier l'existence d'un k -facteur, $k \in \{2, 3\}$.

Théorème 3.3.11. (Katerinis et Tsikopoulos [98] (2000)) *Soit G un graphe d'ordre n et a, b deux entiers positifs avec $a \leq b$ et $2 \leq b \leq 3$ et supposons que :*

$$(i) \kappa(G) \geq \frac{2(b-1)}{a} \alpha(G) \text{ et}$$

(ii) $n \geq 8$.

Si f est une fonction de $V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

(iii) $\sum (f(x); x \in V(G))$ est pair et

(iv) $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in V(G)$.

Alors, G a un f -facteur.

Conditions sur la toughness

La connectivité et l'arête-connectivité ne sont pas les seuls paramètres pour évaluer la force d'un graphe. Il en existe d'autres invariants qui testent cette force d'un autre point de vue. Nous citons entre autres le concept de la toughness introduit par Chvátal [37] en 1973.

Un graphe G , non complet est dit ***t -tough*** si pour tout sous-ensemble d'articulation S de $V(G)$; $|S| \geq t.w(G - S)$, où $w(G - S)$ désigne le nombre de composantes connexes de $G - S$. La ***toughness*** d'un graphe G , noté $t(G)$ est le nombre maximum t pour lequel G est t -tough. Si G est complet, nous convenons que $t(G)$ est infinie.

En 1973, Chvátal [37] posa la conjecture suivante.

Conjecture 3.3.1. (*Conjecture de Chvátal [37] (1973)*) Soit G un graphe d'ordre n et k un entier positif tel que kn est pair et G est k -tough. Alors G a un k -facteur.

Dès l'introduction du concept de la toughness, un laborieux travail a été conçu pour établir des relations entre ce paramètre et l'existence de facteurs dans les graphes. Le résultat le plus connu dans ce sens est celui établi par Enomoto et al. [54] en 1985 qui confirme la conjecture précédente de Chvátal.

Théorème 3.3.12. (*Enomoto et al. [54] (1985)*) Soit $k \geq 2$ un entier. Alors tout graphe d'ordre n , k -tough tel que $n \geq k + 1$ et kn pair a un k -facteur.

Ce résultat est fort, puisque il est montré dans [54] que pour tout entier réel positif ϵ , il existe un graphe G qui n'a aucun k -facteur et où $t(G) \geq k - \epsilon$. Chvátal [37] a également conjecturé que tout graphe 2-tough a un cycle Hamiltonien. Il résulte du théorème précédent qu'un tel graphe a un 2-facteur.

Cependant, un contre exemple de cette conjecture fut trouvé dans [10].

Katerinis [97] a prouvé deux résultats qui impliquent le théorème 3.3.12 dans un certain cas.

Théorème 3.3.13. (Katerinis [97] (1990)) Soient G un graphe et a, b deux entiers positifs tels que $1 \leq a \leq b$ et supposons que

$$t(G) \geq \begin{cases} \frac{(b+a)^2 + 2(b-a)}{4a}, & \text{où } b \equiv a \pmod{2}; \\ \frac{(b+a)^2 + 2(b-a) + 1}{4a}, & \text{où } b \not\equiv a \pmod{2}. \end{cases}$$

Si f est une fonction de $V(G)$ dans \mathbb{N} telle que

- (i) $\sum_{x \in V(G)} f(x)$ est pair, et
 - (ii) $a \leq f(x) \leq b$ pour tout x dans $V(G)$,
- alors G a un f -facteur.

Ce théorème implique la vérification de la conjecture 3.3.1 de Chvátal dans le cas où $a = b = k$, il a également donné l'exemple d'un graphe G tel que $t(G)$ est arbitrairement proche de $(b+1)^2/4$ (resp. $((b(b+2))/4)$) si b est impair (resp. pair), et G ne possède pas tous les f -facteurs possibles, où $1 \leq f(x) \leq b$ pour tout sommet $x \in V(G)$, ce qui signifie que nous nous pouvons savoir si le théorème précédent est le meilleur possible dans le cas où $a = 1$.

Katerinis [97] obtient également un autre résultat dans le cas où $1 \leq a \leq b \leq 2$

Théorème 3.3.14. (Katerinis [97] (1990)) Soit G un graphe 2-tough. Alors, pour toute fonction $f : V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ telle que $\sum_{x \in V(G)} f(x)$ est pair, G a un f -facteur.

Ces deux théorèmes cités précédemment sont les meilleurs possibles dans le cas où $a = b = k$, dans le sens où il existe un graphe donné dans [54] qui n'a pas un k -facteur et où sa toughness est largement proche de k , (i.e., $t(G) \geq k - \epsilon$).

Concernant les graphes 1-tough, Akiyama et Kano [2] montrent que de tels graphes avec un ordre pair ont un 1-facteur, ils démontrent également qu'il existe un graphe G d'ordre pair qui n'a aucun 1-facteur et qui vérifie $\tau(G) > 1 - \epsilon$. Sous la condition qu'un graphe G est 1-tough, Jung [85] a amélioré le résultat de Dirac [45] sur l'hamiltonicité d'un graphe G d'ordre $n \geq 3$ avec $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, en considérant un graphe d'ordre $n \geq 11$ avec $\delta(G) \geq \frac{n-4}{2}$ qu'il montre qu'il est Hamiltonien aussi. Faudree et al. [59] ont étendu ce dernier résultat en montrant que de tels graphes ne possèdent pas uniquement un seul cycle (cas Hamiltonien) mais un 2-facteur avec exactement k cycles, pour tout entier k , tel que $1 \leq k \leq \frac{n-16}{4}$.

Théorème 3.3.15. (Faudree et al. [59] (2004)) *Si G est un graphe d'ordre n et $\delta(G) \geq \frac{n-4}{2}$, alors*

1. *Si G est non connexe d'ordre $n \geq 8$, alors G contient un 2-facteur avec k cycles pour $2 \leq k \leq \lceil \frac{n-4}{3} \rceil$.*
2. *Si G est connexe d'ordre $n \geq 8$, qui n'est pas 1-tough, alors G contient un 2-facteur avec k cycles pour $2 \leq k \leq \lceil \frac{n-4}{3} \rceil$.*
3. *Si G est 1-tough, d'ordre n suffisamment grand avec $\delta(G) \geq \frac{n-t}{2}$, $0 \leq t \leq 4$, alors G contient un 2-facteur avec k cycles pour tout k , $1 \leq k \leq \frac{n}{4} - t$.*

Une variation du concept de la toughness fut introduite il y'a une dizaine d'années par Enomoto [55] : Si G est pas complet, $\tau(G) := \infty$. Si G n'est pas complet

$$\tau(G) := \min \left\{ \frac{|S|}{w(G-S) - 1}, S \subseteq V(G), w(G-S) \geq 2 \right\};$$

où $w(G-S)$ est le nombre de composantes connexes de $G-S$.

Enomoto [55] montre que si un entier $k \in \{1, 2\}$, un graphe G d'ordre n a un k -facteur si $\tau(G) \geq k$, kn pair et $n \geq k + 1$. Ceci n'est pas vérifié pour $k \geq 3$, l'exemple de la roue W_6 (Un sommet que nous relions à tout sommet d'un cycle C_6) qui n'a aucun 3-facteur et où $\tau(W_6) = 3$ l'illustre pleinement.

Enomoto et Hagita [56] ont pu montrer qu'il y'a que quelques exceptions pour tout entier k .

Théorème 3.3.16. *(Enomoto et Hagita [56], 2000) Soient G un graphe d'ordre n et k un entier. Supposons $\tau(G) \geq k, kn$ pair et $n \geq k^2 - 1$. Alors, G a un k -facteur.*

Nous trouvons dans [116], une étude récente sur la toughness et l'existence des k -facteurs fractionels (Voir définition page 77).

3.3.1 Facteurs réguliers dans les graphes réguliers

D'après le théorème 3.2.1, tout graphe $2r$ -régulier a un $2k$ -facteur pour tout entier $k, 1 \leq k \leq r$. En outre, quelques résultats sur les 1-facteurs dans les graphes r -réguliers montrent l'existence d'un $r - 1$ -facteur dans un graphe r -régulier en prenant le complémentaire d'un 1-facteur dans le graphe donné. Par exemple, l'existence d'un 1-facteur dans tout graphe 2-arête connexe, 3-régulier signifie l'existence d'un 2-facteur dans de tels graphes. Le théorème suivant de Båbler [8] en assure cette optique.

Théorème 3.3.17. *(Båbler [8](1938)) Soient r et k deux entiers positifs tels que r est impair et soit G un graphe λ -arête connexe, r -régulier. Si $\lambda \geq k$ et k pair, alors G a un k -facteur et un $(r - k)$ -facteur. En particulier, un graphe $(r - 1)$ -arête connexe, r -régulier, r impair a un 1-facteur.*

Nous introduisons à présent un théorème qui récapitule les premiers résultats établis concernant les facteurs réguliers dans les graphes réguliers.

Théorème 3.3.18. *(Les facteurs réguliers dans les graphes réguliers) Soient r et k deux entiers tels que $1 \leq k < r$, et soit G un graphe d'ordre n , λ -arête connexe, r -régulier, où $\lambda \geq 1$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors G a un k -facteur.*

1. r et k sont tous deux pairs. (Petersen [135](1891))
2. r est pair, k est impair, n est pair, et $\frac{r}{\lambda} \leq k \leq r(1 - \frac{1}{\lambda})$. (Gallai [70](1950))
3. r est impair, k est pair et $2 \leq k \leq r(1 - \frac{1}{\lambda})$. (Gallai [70] (1950))

4. r et k sont tous deux impairs et $\frac{r}{\lambda} \leq k$. (Gallai [70], Bähler [8](1938))
5. Soit λ^* un entier tel que $\lambda^* \in \{\lambda, \lambda + 1\}$ et $\lambda^* \equiv 1 \pmod{2}$. Soit r est impair, k est pair et $k \leq r(1 - \frac{1}{\lambda^*})$ ou bien r, k sont impairs et $\frac{r}{\lambda^*} \leq k$. (Bollobás, Saito et Wormald [17] (1985))

Bähler [8] a déduis ces cas particulier.

Corollaire 3.3.1. (Bähler [8](1938))

1. Soit $r \geq 3$ un entier impair. Alors, tout graphe r -régulier, 2-arête connexe a un 2-facteur.
2. Soit $r \geq 3$ un entier impair et k un entier pair tel que $2 \leq k < r$. Alors, tout graphe r -régulier, k -arête connexe a un k -facteur.

Il a été prouvé dans [90] que si l'une des cinq hypothèses du théorème 3.3.18 est vérifiée, alors pour toute arête e , G possède un k -facteur contenant e et un autre k -facteur excluant e .

A partir du théorème 3.3.18, nous pouvons en déduire ce corollaire qui en exclut les conditions sur la parité.

Corollaire 3.3.2. Soient r, k, λ des entiers tels que $2 \leq k < r$, $\lambda \geq 1$ et G un graphe λ -arête connexe, r -régulier, alors si $2 \leq \frac{r}{\lambda} \leq k \leq r(1 - \frac{1}{\lambda})$ alors G a un k -facteur.

En 1985, Katerinis [96] a établi le théorème d'interpolation suivant.

Théorème 3.3.19. (Katerinis [96](1985)) Soient a, b, k des entiers impairs, tels que $1 \leq a \leq k \leq b$. Si un graphe G a un a -facteur et un b -facteur, alors G a un k -facteur. En particulier, si un graphe H , r -régulier a un 1-facteur, alors pour tout entier h , $1 \leq h \leq r$, H a un h -facteur.

L'existence d'un k -facteur dans un graphe régulier de petit ordre à été réalisée il y'a une dizaine d'années par Niessen et Randerath [124].

Théorème 3.3.20. (Niessen et Randerath [124](1998)) Soit G un graphe d'ordre n , r -régulier connexe avec $r \geq 3$ et soit k un entier tel que $1 \leq k < r$. Si kn est pair et l'une des conditions suivantes est vérifiée,

- (i) r est pair, k est impair, et $n \leq 3r(r + 1) + 2$,
 - (ii) r et k sont tous deux impairs, et $n \leq (r + 2)(k + 1)$,
 - (iii) r est impair, k est pair et $n \leq (r + 2)(r - k + 1)$,
- alors G a un k -facteur.

Notons que les bornes données dans le théorème précédent dans (ii) et (iii) sont les meilleurs possibles.

3.3.2 k -facteurs dans les graphes sans griffe

L'étude des facteurs dans les graphes définis par l'exclusion de quelques sous-graphes a vu une tendance à la hausse depuis des dizaines années. Le graphe $K_{1,3}$ appelé **griffe** en est l'une de ces structures interdites. Un graphe sans griffe est un graphe qui n'a aucun $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit. Sumner [142] et Las Vergnas [111] ont montré indépendamment que si un graphe connexe sans griffe est d'ordre pair alors il a un 1-facteur. Sumner [143] a par la suite étendu ce résultat à un graphe sans $K_{1,n}$ comme suit.

Théorème 3.3.21. (Sumner [143] (1976)) *Si G est un graphe n -connexe, d'ordre pair et qui n'a aucun sous-graphe induit isomorphe à $K_{1,n+1}$, alors G a un 1-facteur.*

Le graphe des arêtes d'un graphe G dit le line graphe $L(G)$ est sans griffe. Chartrand et Wall [34] ont montré que si un graphe G est connexe alors, $L(L(G))$ a un cycle Hamiltonien. Matthews et Sumner [120] ont prouvé également que pour un graphe G d'ordre n , 2-arête connexe, sans griffe, si $\delta(G) \geq \frac{n-2}{3}$, alors G est Hamiltonien. L'hamiltonicité de $L(G)$ n'est pas toujours assurée, cependant, un concept plus général fut abordé, il s'agit de l'existence des k -facteurs dans $L(G)$.

Soient k, t deux entiers et G un graphe. Nous disons que G a un **k -système dominant** s'il existe une famille \mathcal{S} de cycles arête-disjoints et des étoiles $K_{1,t}$, $t \geq 2$ dans G tel que chaque arête de G est soit dans la famille \mathcal{S} , soit dans les étoiles, ou bien elle est incidente à un cycle dans \mathcal{S} , où $k = |\mathcal{S}|$.

Gould et Hynds [76] ont donné un critère relatif à ce système pour l'existence d'un 2-facteur dans $L(G)$ avec un nombre de composantes spécifié.

Théorème 3.3.22. (*Gould et Hynds [76] (1999)*) Soit G un graphe sans sommets isolés. $L(G)$ contient un 2-facteur avec $k(k \geq 1)$ composantes si et seulement si G a un k -système dominant.

Nishimura [129] a montré que pour tout entier $k \geq 2$, si un graphe connexe G est tel que $k|E(G)|$ est pair, satisfait $\delta(L(G)) \geq (9k + 12)/8$, alors le line graph $L(G)$ de G a un k -facteur. Ce résultat est étendu par Egawa et Ota [49]. Un résultat similaire est obtenu indépendamment par Choudum et Paulraj [35].

Théorème 3.3.23. Soit G un graphe connexe sans griffe d'ordre n et soit $k \geq 2$ un entier positif tel que kn est pair. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors G a un k -facteur.

1. $\delta(G) \geq \lceil \frac{9k + 12}{8} \rceil$. (*Egawa et Ota [49](1991)*)
2. $\delta(G) \geq 2k$. (*Choudum et Paulraj [35] (1991)*)

Egawa et Ota [49]) ont élargi leur résultat à un graphe sans $K_{1,n}$.

Théorème 3.3.24. (*Egawa et Ota [49]*) Soit $n \geq 3$ et k un entier tel que $k \geq n - 1$ si k est impair, et $k \geq 2$ si k est pair. Alors, tout graphe connexe G sans $K_{1,n}$ avec kn pair, qui satisfait

$$\delta(G) > \frac{n^2}{4(n-1)}k + \frac{3n-6}{2} + \frac{n-1}{4k}$$

a un k -facteur.

3.3.3 Composantes d'un 2-facteur dans un graphe sans griffe

L'existence d'un 2-facteur dans un graphe sans griffe est assurée par les théorèmes que nous venons de voir. Dans les dix dernières années, un nombre d'auteurs s'est investi dans la recherche du nombre de composantes qui composent le 2-facteur dans les graphes sans griffe. En effet, Faudree et al. [58],

ont montré que si G est un graphe sans griffe, $\delta(G) \geq 4$, alors G a un 2-facteur avec au plus $\frac{6n}{\delta(G) + 2} - 1$ composantes. Gould et Jacobson [75] ont par la suite amélioré la borne sur $\delta(G)$ et obtiennent moins de composantes dans le 2-facteur, ils montrent en fait que si $\delta(G) \geq (4n)^{2/3}$ alors G a un 2-facteur avec au plus $n/\delta(G)$ composantes. Fujisawa et al. [66], ont également montré que tout line graphe avec un degré minimum au moins 2 a un 2-facteur avec au plus $\frac{3n-2}{8}$ composantes. Jackson et Yoshimoto [83] ont par la suite amélioré la condition sur $\delta(G)$ par rapport à celle de Fujisawa et al.. Ils obtiennent moins de composantes dans le 2-facteur dans le line graphe.

Théorème 3.3.25. *(Jackson et Yoshimoto [83] (2007)) Si G est un graphe d'ordre n tel que $\delta(G) \geq 3$, alors $L(G)$ a un 2-facteur avec au plus $\max\{1, \frac{3n-4}{10}\}$ composantes.*

Ce résultat résout le cas $\delta(G) = 3$ de la conjecture suivante donnée dans [66].

Conjecture 3.3.2. *[66] Si G est d'ordre n avec $\delta(G) = \delta \geq 3$, alors $L(G)$ a un 2-facteur avec au plus $\frac{(2\delta-3)n}{2(\delta^2-\delta-1)} (< \frac{n}{\delta})$ cycles.*

Pour la même condition sur le degré minimum ($\delta(G) \geq 4$) que celle de Faudree et al [58] citée plus haut, Jackson et Yoshimoto [83] ont considéré dans le résultat suivant le nombre de composantes d'un 2-facteur dans un graphe sans griffe, κ -connexe, $\kappa \in \{2, 3\}$. Dans le cas particulier d'un line graphe G , 2-connexe (resp. 3-connexe), ils obtiennent alors moins de composantes que Faudree et al si $\delta(G) < \frac{2(11n-5)}{n+5}$ (resp. $\delta(G) < \frac{2(43n-15)}{2n+15}$).

Théorème 3.3.26. *(Jackson et Yoshimoto [83] (2007)) Soit G un graphe sans griffe tel que $\delta(G) \geq 4$.*

1. *Si G est 2-connexe, alors G a un 2-facteur avec au plus $\frac{n+1}{4}$ composantes.*
2. *Si G est 3-connexe, alors G a un 2-facteur avec au plus $\frac{2n}{15}$ composantes.*

Quoique la borne donnée dans le théorème 3.3.25 est la meilleure possible dans un certain cas, Xiong et al. [156] ont pu l'améliorer en se restreignant à des graphes sans griffe. Ils donnent également un exemple pour montrer que leur borne est la meilleure possible.

Théorème 3.3.27. (*Xiong et al. (2009)*) *Si G est un graphe sans griffe, d'ordre n avec $\delta(G) \geq 3$. Alors, $L(G)$ a un 2-facteur avec au plus $\max\{1, \lfloor \frac{2n-2}{7} \rfloor\}$ composantes.*

3.4 (g, f) -facteurs et $[a, b]$ -facteurs

Nous énonçons à présent le concept des (g, f) -facteurs et des $[a, b]$ -facteurs qui constituent une généralisation naturelle des f -facteurs et des facteurs réguliers respectivement. En 1970, Lovász [113] caractérisa les (g, f) -facteurs par son fameux théorème connu sous le nom du théorème des (g, f) -facteurs de Lovász.

Théorème 3.4.1 (Théorème des (g, f) -facteurs de Lovász [113], 1970). *Soit G un graphe et $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in V(G)$. Alors G a un (g, f) -facteur si et seulement si pour toute paire d'ensembles disjoints, $X, Y \subseteq V(G)$.*

$$\sum_{y \in Y} d_G(y) - \sum_{y \in Y} g(y) + \sum_{x \in X} f(x) - h(X, Y) - e(X, Y) \geq 0.$$

Où $h(X, Y)$ désigne le nombre de composantes C de $G - (X \cup Y)$ dites impaires qui vérifient : $g(v) = f(v), \forall v \in V(C)$ et

$$\sum_{v \in V(C)} f(v) + e(V(C), Y) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Remarque 3.4.1. *Posons $\delta(X, Y) = \sum_{y \in Y} d_G(y) - \sum_{y \in Y} g(y) + \sum_{x \in X} f(x) - h(X, Y) - e(X, Y)$ dans le théorème précédent. Comme fut le cas pour le théorème des f -facteurs, $\delta(\emptyset, \emptyset) = 0$. En effet, $\delta(\emptyset, \emptyset) = -h(\emptyset, \emptyset)$. Si $g(x) < f(x)$, par définition de $h(X, Y)$, $h(\emptyset, \emptyset) = 0$. Si $g(x) = f(x)$, alors $h(\emptyset, \emptyset)$*

est le nombre de composantes C de G telles que $\sum_{x \in V(C)} f(x) \equiv 1 \pmod{2}$,
 or $\sum_{x \in V(C)} f(x) = \sum_{x \in V(C)} g(x) = \sum_{x \in V(C)} d_F(x) \equiv 0 \pmod{2}$, où F est le (g, f) -facteur. D'où les sous-ensembles X, Y à considérer sont tels que $X \cup Y \neq \emptyset$.

Vu la nature compliquée du théorème des (g, f) -facteurs, son utilisation s'avère difficile dans le cas général. Beaucoup d'auteurs se sont investis dans la recherche de conditions suffisantes pour l'existence de tels facteurs (voir par exemple [1, 2, 4, 48, 137]). Néanmoins, en supposant que le graphe n'a pas un (g, f) -facteur, ce qui signifie l'existence de deux sous-ensembles disjoints X et Y pour lesquels $\delta(X, Y) < 0$, plusieurs résultats ont été élaborés en moyennant différents paramètres de graphes comme l'ordre, le nombre de stabilité et la connectivité. Nous explorons cette piste de recherche dans le chapitre 5.

Soient a, b deux entiers positifs tels que $1 \leq a \leq b$. En posant $g(x) = a$ et $f(x) = b$ pour tout sommet x de $V(G)$ dans le théorème des (g, f) -facteur, nous obtenons la caractérisation des $[a, b]$ -facteurs dans un graphe. Notons que si $a = b$, alors un $[a, b]$ -facteur devient un a -facteur. Pour cela, pour l'existence des $[a, b]$ -facteurs, nous considérons souvent $a < b$.

Tutte [146] donna en 1981 sa célèbre condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur, quand $a < b$.

Condition (Tutte [146] (1981)) *Un graphe G a un $[a, b]$ -facteur si et seulement si $b|S| - a|T| + \sum_{v \in T} d_{G \setminus S}(v) \geq 0$, pour toute paire de sous-ensembles disjoints S et T de $V(G)$.*

Cette condition est aussi un corollaire du théorème des (g, f) facteurs de Lovász dans [113]. Un $[a, b]$ -facteur n'est qu'un cas spécial d'un (g, f) -facteur, il constitue églement une généralisation des facteurs réguliers, raison pour laquelle, plusieurs recherches sur ces derniers ont été généralisés pour les $[a, b]$ -facteurs. L'étude de ce type de facteurs est en pleine expansion, vu le nombre important de résultats qui en sort chaque année, voir par exemple [1, 101, 103, 107, 137], pour n'en citer que ceux là. Nous n'allons pas exposer les travaux relatifs puisque nous nous intéressons parti-

culièrement aux facteurs de parité fixée introduis dans la section suivante. Néanmoins, nous introduisons le concept de **facteur presque régulier** ou **semi-régulier**. Il s'agit en fait d'un $[k, k + 1]$ -facteur c-à-d, les facteurs dans lesquels tout sommet a un degré égal soit à k soit à $k + 1$. Nous citons les deux résultats de Thomassen et Kano.

Théorème 3.4.2. (Thomassen [144] (1981)) *Si G est un $[r, r + 1]$ -graphe, alors pour tout entier k , $0 \leq k \leq r$, G a un $[k, k + 1]$ -facteur.*

Théorème 3.4.3. (Kano [91] (1986)) *Soit $r \geq 3$, un entier impair et k un entier positif tel que $1 \leq k \leq \frac{2r}{3} - 1$, alors tout graphe r -régulier a un $[k, k + 1]$ -facteur dans lequel chaque composante est régulière.*

Par la combinaison du théorème 3.3.3 et le théorème 3 de Nishimura, cité dans 3.3.4. Nous remarquons qu'un graphe G , 2-connexe qui vérifie le théorème de Nishimura, possède un $[k, k + 2]$ -facteur contenant un cycle Hamiltonien C donné. En effet, l'existence du cycle C est assurée par le théorème 3.3.3 de Fan et celle d'un k -facteur est assurée par le résultat de Nishimura. L'union du cycle Hamiltonien C avec le k -facteur donne un $[k, k + 2]$ -facteur. En 2002, Matsuda [117] a étendu ce résultat qui est l'existence d'un $[k, k + 2]$ -facteur contenant un cycle Hamiltonien donné à l'existence d'un $[k, k + 1]$ -facteur qui contient un cycle Hamiltonien donné.

Théorème 3.4.4. (Matsuda [117] (2002)) *Soient $k \geq 2$ un entier et G un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $n \geq 8k - 16$ si n est pair et $n \geq 6k - 13$ si n est impair. Si $\delta(G) \geq k$ et $\max\{d(x), d(y)\} \geq \frac{n}{2}$ pour toute paire de sommets non adjacents x, y de G ; alors, G a un $[k, k + 1]$ -facteur contenant un cycle Hamiltonien donné.*

Au moyen d'un exemple, Cai et al. [32] ont montré que la condition $\delta(G) \geq n/2$ ne garanti pas l'existence d'un k -facteur contenant un cycle Hamiltonien donné. Cependant, les bornes inférieures données sur l'ordre n dans le théorème précédent sont les meilleurs possibles.

Comme un $[k, k + 1]$ -facteur qui contient un cycle Hamiltonien est un $[k, k + 1]$ -facteur 2-connexe. Le théorème précédent est une extension d'un résultat similaire obtenu par Cai [31] pour l'existence d'un $[k, k + 1]$ -facteur connexe dans un graphe G d'ordre $n \geq 4k - 3$, $k \geq 3$.

3.5 (g, f) -facteurs de parité fixée

Il s'agit de l'étude des facteurs dont les degrés des sommets ont la même parité, soit paire ou impaire.

Soit G un graphe et $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ deux applications telles que $g(x) \leq f(x)$ et $g(x) \equiv f(x) \pmod{2}$ pour tout $x \in V(G)$. Alors, un graphe partiel F de G est dit un (g, f) -**facteur de parité fixée** si $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$ et $d_F(x) \equiv f(x) \pmod{2}$ pour tout $x \in V(G)$.

En 1972, Lovász caractérisa de tels facteurs comme suit.

Théorème 3.5.1. (Théorème des (g, f) -facteurs de parité fixée, Lovász [114], (1972)) Soit G un graphe et $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions telles que $g(x) \leq f(x)$ et $g(x) \equiv f(x) \pmod{2}$ pour tout $x \in V(G)$. Alors, G a un (g, f) -facteur de parité fixée si et seulement si pour toute paire de sous-ensembles disjoints X et Y de $V(G)$, nous avons

$$\sum_{y \in Y} d_G(y) - \sum_{y \in Y} g(y) + \sum_{x \in X} f(x) - h(X, Y) - e(X, Y) \geq 0,$$

où $h(X, Y)$ désigne le nombre de composantes C de $G - (X \cup Y)$ telles que

$$\sum_{x \in V(C)} f(x) + e(C, Y) \equiv 1 \pmod{2}.$$

3.5.1 Facteurs pairs

Un graphe partiel F d'un graphe G est dit **facteur pair** de G si chaque sommet est de degré pair dans F . Si k est un entier pair alors un k -facteur est un facteur pair, ce qui implique que tous les résultats vus dans la section des k -facteurs sont valables ici. Les premiers résultats généralement cités concernent un 2-facteur (théorème 3.2.1 et corollaire 3.3.1).

L'existence d'un facteur pair dans un graphe qui n'est pas 2-arête connexe n'est pas toujours garantie (Voir figure 3.6). Ceci a ramené les chercheurs à éliminer ce cas et a imposé parfois la condition de l'arête connectivité pour un graphe pour l'existence de tels facteurs.

Petersen a montré que tout graphe 3-régulier, sans isthme a un 2-facteur, ce résultat fut généralisé pour un facteur pair dans un graphe sans isthme

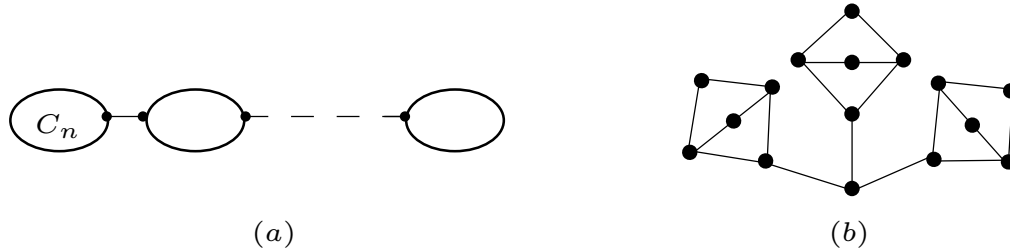


FIGURE 3.6 – Ces deux graphes ne sont pas 2-arêtes connexes, le graphe dans (a) admet un 2-facteur, par contre celui dans (b), n’a aucun facteur pair.

de degré minimum au moins 3 par Fleishner [60]. Récemment, Jackson et Yoshimoto [83] ont pu généraliser ces deux résultats en prouvant ce théorème.

Théorème 3.5.2. (*Jackson et Yoshimoto [83] (2007)*) Soit G un graphe d’ordre n .

1. Si G est sans isthme, avec $\delta(G) \geq 3$ alors, G a un facteur pair dans lequel chaque composante a au moins 4 sommets.
2. Si G est 3-connexe, alors G a un facteur pair dans lequel chaque composante a un ordre au moins $\min\{n, 5\}$.

Les conditions données dans le résultat 1 du théorème 3.5.2 sont les meilleures possibles dans le sens où il existe un graphe ayant un isthme et un autre graphe de degré minimum 2 qui n’ont tous deux, aucun facteur pair. Cependant, Xiong et al. [156] ont pu étendre ce résultat en y rajoutant d’autres conditions.

Théorème 3.5.3. (*Xiong et al. [156] (2009)*) Soit G un graphe,

1. Si G est sans isthme et a au plus deux sommets de degré 2, alors, G a un facteur pair dans lequel chaque composante a au moins quatre sommets.
2. Si $\delta(G) \geq 3$ et tous les isthmes de G appartiennent à une même chaîne, alors G a un facteur pair dans lequel chaque composante a au moins 4 sommets.
3. Si G est sans isthme, avec $\delta(G) \geq 3$ alors, pour toute arête donnée e , G a un facteur pair F dans lequel chaque composante a au moins 4 sommets tel que F ne contient pas e .

Xiong et al. [156] ont étudié les facteurs pairs dans un graphe sans griffe. Il en découle du théorème 3.3.22, l'observation suivante.

Remarque 3.5.1. *Si G a un facteur pair avec au plus k composantes, alors $L(G)$ a un 2-facteur avec au plus k composantes.*

Xiong et al. [156] généralisent en fait leur résultat du théorème 3.3.27, qui en découle directement du suivant résultat d'après la remarque 3.5.1.

Théorème 3.5.4. *(Xiong et al. [156] (2009)) Tout graphe sans $K_{1,3}$ d'ordre n et de degré minimum $\delta(G) \geq 3$ possède un facteur pair avec au plus $\max\{1, \lfloor \frac{2n-2}{7} \rfloor\}$ composantes.*

Xiong et al. [156] montrent également que cette borne trouvée est la meilleure possible, et conjecturent que si G est un graphe sans griffe, d'ordre n avec $\delta(G) = \delta \geq 3$, alors G a un facteur pair avec au plus $\max\{1, \lfloor \frac{(\delta-1)n-2}{\delta^2-2} \rfloor\}$ composantes. Le dernier théorème résout le cas $\delta = 3$ de cette conjecture.

Fleishner [60] a montré que tout graphe 2-arête connexe tel que $\delta(G) \geq 3$ admet un facteur pair. Akiyama et Kano [2] ont pu avoir un meilleur résultat qui est une caractérisation des facteurs pairs, obtenue à partir du théorème 3.5.1, en y posant $g(x) = 2$ et $f(x) = N$ pour tout x dans $V(G)$ où N est un entier pair suffisamment grand ; un graphe G a un facteur pair si et seulement si G a un (g, f) -facteur pair, puis en y choisissant $X = \emptyset$ dans le théorème 3.5.1, ils obtiennent ce résultat.

Théorème 3.5.5. *(Akiyama et Kano [2] (2007)) Un graphe G a un facteur pair si et seulement si*

$$\sum_{x \in X} (d_G(x) - 2) - q(G, X) \geq 0,$$

pour tout sous-ensemble $X \subset V(G)$, où $q(G, X)$ désigne le nombre de composantes C de $G - X$ telles que $e(C, X) \equiv 1 \pmod{2}$.

Un $[a, b]$ -facteur F est dit un $[a, b]$ -**facteur de parité fixée** si

$$a \equiv b \pmod{2} \text{ et } \deg_F(x) \equiv a \pmod{2} \text{ pour tout } x \in V(G).$$

En particulier, un $[a, b]$ -facteur de parité fixée est un **facteur pair** si $a \equiv b \equiv 0 \pmod{2}$.

Si $a = 2$, un $[a, b]$ -facteur pair peut s'écrire un $[2, 2k]$ -facteur qui est un recouvrement des sommets du graphe par des cycles arêtes disjoints tel que tout sommet appartient à au plus k cycles. Rappelons qu'un cycle hamiltonien n'est autre qu'un 2-facteur connexe. Donc, un $[2, 2k]$ -facteur généralise le concept de cycle Hamiltonien, ce qui donne de l'importance pour l'étude de tels facteurs.

Suite à la caractérisation des $[g, f]$ -facteurs pairs de Lovász [114] dans le théorème 3.5.1, en y posant $g(x) = a, f(x) = b$ pour tout $x \in V(G)$. Nous obtenons immédiatement.

Théorème 3.5.6. (Théorème des $[a, b]$ -facteurs pairs, Lovász [114], (1972)) Soit G un graphe et soit a et $b \geq 2$ deux entiers pairs. Alors, G a un $[a, b]$ -facteur pair si et seulement si pour toute paire de sous-ensemble disjoints X et Y de $V(G)$, nous avons

$$\sum_{y \in Y} d_G(y) - a|Y| + b|X| - h(X, Y) - e(X, Y) \geq 0,$$

où $h(X, Y)$ désigne le nombre de composantes C de $G - (X \cup Y)$ telles que

$$e(C, Y) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Les conditions d'existence d'un $[a, b]$ -facteur pair, que nous trouvons dans la littérature sont récentes et ont inclus l'ordre du graphe, le degré minimum, les entiers a, b , l'arête-connectivité et le paramètre $\sigma_2(G) = \min\{d_G(x) + d_G(y) \mid x, y \text{ sont non adjacents}\}$. Ore [132] fut le premier qui utilisa $\sigma_2(G)$, pour montrer l'existence d'un cycle Hamiltonien (Voir conditions sur le voisinage, page 51). Kano [89] ainsi que Kouider et Mahéo [104] l'ont également utilisé pour montrer l'existence d'un $[2, b]$ -facteur connexe et d'un 2-arête connexe $[2, 2b]$ -facteur respectivement.

Kouider et Vestergaard [109] ont donné des conditions sur l'ordre et le degré minimum ou sur l'arête connectivité $\lambda(G)$ pour qu'un graphe G admette un $[a, b]$ -facteur pair. Ils donnent également un exemple d'un graphe

qui n'est pas 2-arête connexe et qui n'a aucun facteur pair mais qui vérifie la première condition du théorème suivant, ce qui explique la nécessité d'imposer la condition 2-arête connexe.

Théorème 3.5.7. (Kouider et Vestergaard [109](2004)) Soient a et b , deux entiers pairs, tels que $4 \leq a \leq b$. Soit G un graphe 2-arête connexe d'ordre n . Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,

1. $n \geq \max\left\{\frac{(a+b)^2}{b}, \frac{3(a+b)}{2}\right\}$ et $\delta(G) \geq \frac{an}{a+b}$.
2. $n \geq \frac{(a+b)^2}{b}$ et $\delta(G) \geq \frac{an}{a+b} + \frac{a}{2}$.

alors, G admet un $[a, b]$ -facteur pair.

Ils donnèrent une condition plus faible sur le degré minimum mais plus forte pour l'arête connectivité.

Théorème 3.5.8. (Kouider et Vestergaard [109](2004)) Soient $a \geq 4$ et $b \geq a$, deux entiers pairs et soit $\kappa \geq a + \min\{\sqrt{a}, \frac{b}{a}\}$. Soit G un graphe κ -arête connexe d'ordre n tel que $n \geq \frac{(a+b)^2}{b}$ et $\delta(G) \geq \frac{an}{a+b}$ alors G admet un $[a, b]$ -facteur pair.

Khodar et Xu [99] donnent une condition légèrement plus forte sur le degré minimum d'un graphe que celle donnée dans le théorème 3.5.8.

Théorème 3.5.9. (Khodar et Xu [99](2007)) Soient $a, b \geq 2$ deux entiers pairs et soit G un graphe a -arête connexe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq \max\{a+1, \frac{an}{a+b} + a - 2\}$, alors, G possède un $[a, b]$ -facteur pair.

Soit $b \geq 2$, un entier pair. Kouider et Vestergaard [108] ont considéré les $[2, b]$ -facteurs pairs dans les graphes biparti-complets. Soit q un entier positif, $K_{1,q}$ n'a aucun $[2, b]$ -facteur, et $K_{2,q}$ n'en a aucun qui soit strictement inclus dans ce graphe, il en a un qui soit pair si et seulement si q est pair et $q \leq b$. Pour les cas restants, ils établissent une caractérisation des $[2, b]$ -facteurs pairs dans les biparti-complets.

Théorème 3.5.10. (Kouider et Vestergaard [108] (2003)) Soient p, q deux entiers positifs tels que $3 \leq p \leq q$ et soit $K_{p,q}$ un graphe biparti complet et

$b \geq 2$ un entier positif pair. Alors $K_{p,q}$ a un $[2, b]$ -facteur pair si et seulement si $q \leq \frac{b}{2}p$.

L'investigation des $[2, b]$ -facteurs pairs dans un graphe 2-arête connexe est réalisée également par Kouider et Vestergaard [108] qui en garantissent l'existence si $\delta(G) \geq \max\{2n/(2+b), 3\}$. Ils ont conjecturé qu'un graphe G a un $[2, b]$ -facteur pair si $\sigma_2(G) \geq \max\{4n/(2+b), 6\}$. Matsuda [118] a légèrement amélioré cette borne en se restreignant à un graphe 2-arête connexe, il a montré le résultat suivant.

Théorème 3.5.11. (Matsuda [118](2005)) *Soit G un graphe 2-arête connexe d'ordre n et b un entier positif pair, $b \geq 2$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,*

1. *Si $n \geq b + 3, \sigma_2(G) \geq 4n/(2+b)$.*
2. *Si $n \leq b + 2, \sigma_2(G) \geq 5$.*

alors G a un $[2, b]$ -facteur pair.

3.5.2 (1, f)-facteurs impairs

Dans le cas spécial où un graphe G a un f -facteur tel que $f(v)$ est impair, pour tout $v \in V(G)$, alors nous disons que G a un ***f -facteur impair***.

Soit f une fonction à valeurs entières impaires $f : V(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots\}$. Un graphe partiel F de G est dit ***(1, f)-facteur impair*** si

$$d_F(x) \in \{1, 3, \dots, f(x)\} \text{ pour tout } x \in V(G).$$

Evidemment, si $f(x) = 1$ pour tout sommet $x \in V(G)$, alors un $(1, f)$ -facteur impair n'est qu'un simple 1-facteur. Soit $n \geq 1$ une constante entière impaire, si $f(x) = n$ pour tout $x \in V(G)$, alors le $(1, f)$ -facteur impair est dit un ***$[1, n]$ -facteur impair***.

Pour un entier positif impair k , un k -facteur est évidemment impair et dans ce cas nous pouvons retourner sur la section des facteurs réguliers pour y voir les résultats relatifs. Lovász ([112], p. 54) a fait remarquer qu'un graphe connexe G a un facteur impair si et seulement si G a un nombre pair de sommets. Nishimura [128] a établi une condition suffisante pour l'existence d'un facteur régulier impair. En effet, il montre que pour un graphe

G de connectivité $\kappa(G)$ et $r \geq 1$ un entier impair, si $\alpha(G) \leq \frac{4r\kappa(G)}{(r+1)^2}$, alors G a un r -facteur. En 1947, Tutte [147] caractérisa les graphes ayant un 1-facteur ie., couplage parfait dans un graphe ; dans l'un des théorèmes les plus intéressants dans la théorie des graphes voir théorème 3.2.2 page 46, et qui a permis l'expansion de la recherche dans le domaine des couplages.

Amahashi [40] a étendu le résultat du théorème de 1-facteur de Tutte à un $[1, n]$ -facteur impair où n est un entier impair ; en donnant une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel facteur dans un graphe G qui fut que pour tout sous ensemble $X \subseteq V(G)$, le nombre de composantes de $G - X$ qui ont un cardinal impair est au plus $n|X|$. Par la suite, Cui et Kano [44], ont généralisé le concept établi par Amahashi ainsi.

Théorème 3.5.12. (Théorème des $(1, f)$ -facteurs impairs, Cui et Kano [44] (1988)) *Soit G un graphe et $f : V(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots\}$. Alors G a un $(1, f)$ -facteur impair si et seulement si*

$$c_0(G - X) \leq \sum_{x \in X} f(x) \text{ pour tout sous-ensemble } X \subseteq V(G),$$

où $c_0(G - X)$ désigne le nombre de composantes de $G - X$ qui ont un cardinal impair.

Topp et Vestergaard [145] ont réduit par la suite le nombre de sous-ensembles à considérer dans le résultat précédent et prouvent qu'un graphe d'ordre pair n dans lequel aucun sommet n'est centre d'une étoile induite $K_{1, n f(v)+1}$ a un $[1, f]$ -facteur impair.

3.6 Applications et aspect algorithmique

3.6.1 Problème du couplage

Le *problème du couplage* dans un graphe est le problème qui consiste à chercher un couplage maximum dans ce graphe. Les techniques les plus connues pour la résolution d'un tel problème sont établies par Berge [16] ainsi que par d'autres auteurs qui ont fourni des algorithmes polynomiaux

pour la détection d'un tel couplage. La vérification de la condition donnée dans le théorème 3.2.2 des 1-facteur de Tutte pour l'existence d'un couplage parfait, se fait en temps polynomial. En 1958, Berge [16] a étendu ce théorème et a obtenu une formule connue sous le nom de Formule de Berge-Tutte pour l'évaluation de la taille maximum d'un couplage dans un graphe G d'ordre n , qui est égale au $\min\{n - (o(G - S) - |S|), S \subseteq V(G)\}$ où $o(G - S)$ est le nombre de composantes de $G - S$ qui ont un cardinal impair.

Le premier algorithme pour le problème de couplage, revient à Edmonds [46] en 1965, avec une complexité $O(n^4)$. D'autres algorithmes plus performants pour les couplages ont vu le jour avec Micali et Vazirani [123, 150] et autres [15, 69] avec une complexité de $O(m\sqrt{n})$. En 1999, Gobow, et al. [67, 68] ont fourni un algorithme en $O(m\log^4 n)$ qui teste si un graphe a un unique 1-facteur (couplage parfait) et de le trouver s'il existe.

3.6.2 Problème du f -facteur

Le *problème du f -facteur* s'énonce comme suit : Soit f une fonction à valeurs entières définie sur $V(G)$, $|V(G)| = n$. G contient-il un graphe partiel H tel que $d_H(u_i) = f(u_i) = f_i, i = 1, \dots, n$ pour tout sommet $u_i \in V(G)$?

Tutte [149] a prouvé que trouver un f -facteur dans un graphe G est équivalent à trouver un 1-facteur dans des graphes considérablement grands G^* formés par une transformation de G (Voir page 48 et figure 3.4). Il est simple de voir que cette transformation se fait en temps polynomial, en effet, l'ordre du graphe G^* est égal à $4|E(G)| - \sum_{v \in V(G)} f(v)$. L'une des restrictions du

problème du f -facteur à un graphe simple, cas pour lequel les f_i sont bornés par $n-1$ qui est un polynome en n , fournit un algorithme polynomial pour les f -facteurs en appliquant la transformation des f -facteurs à un 1-facteur de Tutte puis en appliquant un bon algorithme pour les 1-facteurs. Cependant, dans le cas général, les f_i ne sont pas bornés par un algorithme polynomial en n et par suite, ces techniques ne peuvent être appliquées. Anstee [5] a utilisé l'aspect matriciel pour donner un algorithme polynomial en $O(n^3)$ qui trouve le f -facteur ou montre qu'il n'existe pas. Il associe à un graphe G sa matrice d'adjacence $C = (c_{i,j}), i, j = 1, \dots, n$. Un f -facteur correspond donc à une matrice symétrique A à valeurs entières avec des valeurs pairs en diagonale (le graphe n'est pas simple). Pour tout $i = 1, \dots, n$, la somme de la $i^{\text{ème}}$ ligne

(resp. la $i^{\text{ème}}$ colonne) est égale à f_i et satisfait $0 \leq a_{i,j} \leq c_{i,j}$, pour tout i, j . Il utilise la théorie des flots dans les réseaux pour trouver A .

L'algorithme donné en [68] par Gobow, et al. pour les 1-facteur peut être modifié pour tester si un graphe a un unique f -facteur et de le trouver s'il existe et de vérifier si un f -facteur donné est unique. Tous ces algorithmes sont polynomiaux. La résolution du problème d'un f -facteur impair est donné par un un algorithme polynomial dans [191].

Résolution du problème du f -facteur dans les graphes bipartis

Une autre restriction des deux problèmes cités auparavant à un graphe biparti, est résolue par les techniques usuelles de la théorie des flots. Introduisons tout d'abord la terminologie relative aux flots.

Soit $G = (V(G), U(G))$ un graphe simple, orienté. L'ensemble $U(G)$ est l'ensemble de paires ordonnées de sommets dit ensemble d'*arcs*. L'arc (u, v) indique que u et v sont adjacents et que l'orientation est de u vers v ($u \rightarrow v$); u est dit alors *extrémité initiale* et v *extrémité terminale* de l'arc (u, v) .

Un *réseau* N est un graphe orienté qui contient deux sommets particuliers s et t dits respectivement *source* et *puît* tel que s (resp. t) n'est l'extrémité terminale (resp. initiale) d'aucun arc de N et dans N , est associé à chaque arc e une valeur entière positive dite *capacité* de l'arc $\text{cap}(e)$.

Nous rajoutons dans N un arc fictif (t, s) dit arc de retour.

Soit h une fonction à valeurs entières définie sur $U(N)$. Pour tout sommet $u \in V(N)$, un *flux sortant* de u est $h^+(u) = \sum_{\{v \in V(N)/u \rightarrow v\}} h(u, v)$ et un *flux entrant* dans u est $h^-(u) = \sum_{\{v \in V(N)/v \rightarrow u\}} h(v, u)$.

La fonction h est dite un *flot* si elle satisfait ces deux conditions :

- i** $h^+(u) = h^-(u)$, pour tout sommet $u \neq s, t$. (Condition de conservation)
 - ii** $0 \leq h(u, v) \leq \text{cap}(u, v)$ pour tout arc (u, v) . (Contrainte de capacité)
- la *valeur du flot* $\text{val}(h) = h^+(s) - h^-(s)$.

Soit G un graphe biparti, considérons le problème du f -facteur. Soit (X, Y) la bipartition du graphe G . Nous pouvons créer un réseau N de G en orientant les arêtes de G de X vers Y et en attribuant à chaque arête une capacité égale à 1. Rajoutons une source s et un puit t et tous les arcs (s, x) et (y, t) pour tout $x \in X$ et $y \in Y$. Attribuons la capacité $f(x)$ et $f(y)$ aux arcs (s, x) et (y, t) respectivement. Le problème du f -facteur consiste donc à trouver un flot maximum h dans N . Il est facile de voir que le f -facteur H existe si et seulement si

$$\text{la valeur du flot} = \sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(y).$$

Pour résoudre le problème du couplage maximum, il suffit de poser $f(u_i) = 1$ pour tout sommet $u_i \in V(G)$ et trouver par la suite un flot maximum.

Quand G n'est pas biparti, la théorie standard des flots ne peut pas s'appliquer. Cependant, Kocay et Stone [100] ont utilisé la notion du réseau équilibré pour montrer que les deux problèmes cités auparavant peuvent être résolus par les méthodes du flot. Ils définissent ce réseau comme suit :

Un *réseau équilibré* (voir la figure 3.7) est un réseau N qui vérifie ces propriétés :

- Les sommets de N consistent en une source s , un puit t et deux sous-ensembles de sommets $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$;
- N contient les paires d'arcs (s, x_i) et (y_i, t) pour tout $1 \leq i \leq n$;
- Les arcs restants de N sont entre X et Y et apparaissent en couples, soit (x_i, y_j) et (x_j, y_i) , ou bien (y_i, x_j) et (y_j, x_i) , où $i \neq j$;
- $cap(s, x_i) = cap(y_i, t)$, $cap(x_i, y_j) = cap(x_j, y_i)$, et $cap(y_i, x_j) = cap(y_j, x_i)$ pour tout i, j .

En fait, dans un réseau équilibré, tous les sommets apparaissent en des couples complémentaires, ainsi, pour tout sommet $u \in V(N)$, soit u' son sommet complémentaire. Donc, $s' = t$, $t' = s$, $x_i' = y_i$ et $y_i' = x_i$. Les arcs également apparaissent ainsi, $(x_i, y_j)' = (x_j, y_i)$ et $(s, x_i)' = (y_i, t)$. Un *flot équilibré* dans N est un flot dans lequel toute paire d'arcs complémentaires porte le même flux.

Kocay et Stone [100] montrèrent que le théorème des f -facteur de Tutte est équivalent au théorème du flot maximum (min-max flow theorem) dans

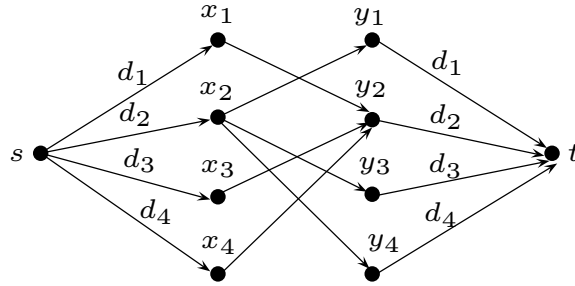


FIGURE 3.7 – Un réseau équilibré. les d_i représentent les capacités des arcs.

ce réseau équilibré.

Tous les algorithmes connus des couplages maximum sont basés sur la méthode des chaînes augmentantes, établie pour la première fois par Berge [16]. Paeger et Jungnickel [61–65] l’ont adapté aux réseaux équilibrés établis par Kocay et Stone [100] en proposant d’autres algorithmes plus performants. Ils ont considéré dans leur étude les k -facteurs, f -facteurs et les (g, f) -facteurs, ils montrent également que le problème du flot maximum peut être appliqué aux problèmes de couplage d’une façon plus explicite que ce qui a été fait auparavant.

Quant au problème de l’existence d’un 2-facteur dans un graphe, le premier algorithme polynomial a été trouvé par Edmonds et Johnson [164]. Si nous exigeons que le 2-facteur est sans triangle, le problème reste polynomial voir [77, 152]. Quant au problème de décision qui teste si un graphe a un cycle hamiltonien ou non est l’un des premiers problèmes de décision prouvé être \mathcal{NP} -complet par Karp [93, 94]. Le problème reste \mathcal{NP} -complet, si le graphe en question est 3-régulier et planaire [73] ou 4 ou 5-régulier et planaire [136].

3.6.3 Problème du (g, f) -facteur

Le problème du (g, f) -facteur s’énonce comme suit : Soient f et g deux fonctions à valeurs entières définie sur $V(G)$, $|V(G)| = n$. G contient-il un graphe partiel H tel que $g(u_i) = g_i \leq d_H(u_i) \leq f(u_i) = f_i, i = 1, \dots, n$ pour tout sommet $u_i \in V(G)$?

En 1985, Anstee [5] a donné des preuves algorithmiques pour le théorème des (g, f) -facteurs, ces algorithmes fournissent les facteurs en question ou montrent qu'ils n'existent pas. En considérant la matrice d'adjacence $C = (c_{i,j})$ associé au graphe G , il introduit le concept d'un (g, f) -facteur orienté qui est une matrice à valeurs entières A tel que pour tout $i, j = 1, \dots, n$, la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. la $j^{\text{ème}}$ colonne) est égale à r_i (resp. s_j) tel que $g_i \leq r_i \leq f_i$ (resp. $g_i \leq s_j \leq f_i$) avec $0 \leq a_{ij} \leq c_{ij}$. Ce (g, f) -facteur orienté se comporte comme un flot dans un réseau qu'il construit. Ainsi, il montre qu'un tel facteur dans un graphe G existe si et seulement si $\sum_{i \in S} f_i + \sum_{i \in T, j \in T \cup U} c_{i,j} \geq \sum_{i \in T} g_i$, pour toutes les partitions S, T, U de $1, 2, \dots, n$. Son algorithme trouve un (g, f) -facteur à partir d'un (g, f) -facteur orienté ou montre qu'il n'existe pas. Les complexités de ces algorithmes sont en $O(n^3)$. Notons que cette complexité est indépendante des fonctions f et g . Cependant, il est apparemment inconnu, s'il existe un algorithme polynomial qui teste si un graphe G à tous les (g, f) -facteurs. En revanche, une intéressante approche des (g, f) -facteurs est fournie par le concept des (g, f) -facteurs fractionnels, voir par exemple [6] : considérons un graphe G sans boucle dans lequel chaque arête a une multiplicité égale à c_e . Un vecteur $x = (x_e)$ avec $|E(G)|$ valeurs réelles tel que : $0 \leq x_e \leq c_e$ et $g(v) \leq d_x(v) \leq f(v)$ pour tout sommet v , où $d_x(v) = \sum_{uv \in E(G)} x_{uv}$. Ce vecteur est appelé un (g, f) -facteur fractionnel.

L'intéressante caractéristique de ces derniers est qu'ils peuvent être étudiés en utilisant la théorie des flots dans les réseaux avec ses algorithmes polynomiaux qui l'accompagnent. En outre, dans certains cas, ils peuvent être transformés en des (g, f) -facteurs en nombres entiers. Nous trouvons dans [80] une intéressante application des (g, f) -facteurs dans les graphes à l'analyse statistique des données.

Chapitre 4

Nombre de stabilité et les $[2, b]$ -facteurs pairs

4.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'existence des $[2, b]$ -facteurs pairs. Notre condition suffisante pour l'existence de tels facteurs fait intervenir le nombre de stabilité, le degré minimum et l'entier b . Dans la littérature, il existe peu de résultats qui implique le nombre de stabilité et les facteurs. En effet, Neumann-Lara, Rivera-Campo [122] ont prouvé pour un graphe G , κ -connexe et pour un entier $b \geq 2$, que si $\alpha(G) \leq 1 + \kappa(b - 1)$, alors G a un arbre couvrant de degré maximum b (c-à-d, un $[1, b]$ -facteur connexe). Un résultat sémi-laire a été fourni par Brandt [28] qui garantit l'existence d'un $[2, b]$ -facteur connexe dans un graphe κ -connexe si $\alpha(G) \leq \frac{\kappa b}{2}$, $\kappa \geq 2$ et $b \geq 2$ un entier pair. D'autres résultats incluant le nombre de stabilité et le degré minimum ont été élaborés par Kouider et Lonc [102], pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur ou d'un $[a, b]$ -facteur connexe ou 2-connexe. Certains de ces résultats sont liés à ceux établis par Nishimura [128].

4.2 Principaux résultats

Nous avons établi une condition suffisante pour l'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair, pour les graphes κ -connexes. Cette condition inclut le nombre de stabilité, le degré minimum du graphe ainsi que l'entier b .

Théorème 4.2.1. [105] *Soit $b \geq 6$ un entier pair et soit G un graphe κ -connexe tel que $b \leq \kappa$ et $\alpha(G) < (b - 1)(\delta - 1)/5$ alors G possède un $[2, b]$ -facteur pair.*

Nous utiliserons au cours de la démonstration de notre théorème principal le théorème de Menger qui caractérise les graphes κ -connexes ainsi que son corollaire :

Théorème 4.2.2. (Menger [13] (1926)) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe simple soit κ -connexe est que l'on puisse relier deux sommets x et y distincts par κ chaînes élémentaires disjointes n'ayant deux à deux en commun que les sommets x et y .*

Ce théorème a été redécouvert par H. Whitney en 1932.

Corollaire 4.2.1. (Whitney [13] (1932)) *Soit G un graphe simple κ -connexe. Soit $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_\kappa\}$ un sous-ensemble de sommets tel que $|Y| = \kappa$. Si $x \in X - Y$, il existe κ , (x, y_i) -chaînes élémentaires sommet-disjointes joignant x et l'ensemble Y .*

Nous utiliserons également le lemme d'extension de Whitney [13] :

Lemme 4.2.1. (Whitney [13]) *Si G est un graphe κ -connexe, et G' est obtenu de G en ajoutant un nouveau sommet y adjacent à au moins κ sommets de G , alors G' est κ -connexe.*

Nous utiliserons également les lemmes (4.2.3 et 4.2.4) qui sont cités comme exercices sans preuves dans le livre de Bollobás [16](p. 84), nous introduisons d'abord l'observation suivante :

Lemme 4.2.2. [105] *Tout arbre T contient comme sous-graphe une chaîne joignant deux sommets pendants de T et qui a au plus un sommet de degré au moins trois dans T .*

Démonstration. Nous prouvons ce lemme par induction sur n , l'ordre de T . Si $n \in \{2, 3\}$; alors $T = P_n$; si $n = 4$, $T = P_4$ ou $T = K_{1,3}$ et le lemme est satisfait. Supposons que $n > 4$ et que chaque arbre T' d'ordre $n' < n$ vérifie le lemme. Considérons alors l'arbre T , posons $T' = T - l$ où l est un sommet pendant dans T . Comme T' vérifie l'hypothèse d'induction; il contient une chaîne P qui joint deux sommets pendants l_1, l_2 de T' , et qui a au plus un sommet s de degré au moins trois. Si l n'est un voisin d'aucun sommet interne

de P , alors P est le sous-graphe désiré dans T , autrement, si l est adjacent à $l_i, i \in \{1, 2\}$, nous considérons alors $P \cup \{l\}$. Si l est adjacent à un sommet y de $P - \{l_1, l_2\}$, nous considérons la (l, l_1) -chaîne (ou (l, l_2) -chaîne) qui contient au plus un sommet y de degré au moins trois dans T . \square

Lemme 4.2.3. [105] *Tout arbre T avec $2k$ sommets pendants, contient k chaînes arêtes-disjoints joignant des paires disjointes de sommets pendants, et chaque chaîne a au plus un sommet en commun avec les autres chaînes.*

Démonstration. Nous prouvons ce lemme par induction sur k . Si $k = 1$, $T = P_n$ et P_n joint deux sommets pendants. Supposons que $k > 1$, et que le résultat est vrai pour tout arbre T' avec $2k'$ sommets pendants, $k' < k$. Considérons un arbre T avec $2k$ sommets pendants. Il s'ensuit du lemme 4.2.2 que l'arbre T contient une chaîne P qui joint deux sommets pendants et qui a au plus un sommet y de degré au moins trois, le sommet y existe puisque $T \neq P_n$. Soit $T' = (T - P) \cup y$. Si $d_T(y) \geq 4$, l'arbre T' a exactement $2k - 2$ sommets pendants, en appliquant l'hypothèse d'induction, il existe $(k - 1)$ chaînes arêtes-disjoints joignant les différents sommets pendants, en rajoutant P , nous obtenons le résultat. Supposons que $d_T(y) = 3$, alors T' a $2k - 1$ sommets pendants, nous supprimons alors le sommet pendant y de l'arbre T' et si le nombre de sommets pendants reste inchangé, nous supprimons le nouveau sommet pendant créé, nous continuons ce processus jusqu'à l'obtention d'un arbre avec $2k - 2$ sommets pendants auquel nous appliquons l'hypothèse d'induction, nous rajoutons la chaîne P et nous obtenons les k chaînes arêtes-disjoints. \square

Lemme 4.2.4. [105] *Soit G un graphe et x un sommet de G qui n'est pas un sommet d'articulation de degré au moins $2k$ alors il existe k cycles arêtes-disjoints contenant le sommet x .*

Démonstration. Soit $N'(x)$ un sous-ensemble de $2k$ voisins de x . La preuve est par induction sur k . Si $k = 1$, le résultat est évident.

Supposons que $k \geq 2$. Comme $G - x$ est connexe, il existe un arbre recouvrant de G , en particulier cet arbre couvre $N'(x)$.

Parmi tous les arbres de G couvrant $N'(x)$, nous choisissons un arbre T avec un nombre minimum d'arêtes. Il en résulte que chaque sommet pendant

de T est un voisin de x . Soit P une chaîne de T joignant deux voisins de x , u_1 et u_2 , construite par le lemme précédent. La chaîne P a au plus un sommet c en commun avec le graphe $T' = \{T - X(P)\} \cup c$.

Si $|N'(x) \cap P| \geq 3$ et $c \notin N'(x)$, il existe $i \in \{1, 2\}$ et un sommet $u \in N'(x)$ tel que $P_1 = P(u_i, u)$ ne contient pas le sommet c et ne contient aucun sommet de $N'(x)$ comme sommet interne. Comme la chaîne P , le sous-graphe $P_1 = P(u_i, u)$ a au plus un sommet c en commun avec le graphe $T' = \{T - X(P_1)\} \cup c$ et T' est connexe. Si $|N'(x) \cap P| = 2$, soit $P_1 = P$. Dans

tous les cas, si u, u' sont les extrémités de P_1 , on obtient le cycle $[u, x, u'] \cup P_1$. Le graphe restant $G' = \{G - X(P_1)\} \cup c$ a exactement $2k - 2$ sommets de $N'(x)$. Nous appliquons l'hypothèse d'induction à G' . Si $u = c \in N'(x)$, nous considérons le graphe $G' = \{G - P_1\} \cup c$ avec $N'(x) := N'(x) - \{c, u'\}$ ce qui signifie, nous gardons c dans G' sans le considérer comme élément de $N'(x)$, donc G' a exactement $2k - 2$ sommets de $N'(x)$ et nous appliquons l'hypothèse d'induction à G' . \square

4.2.1 L'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair

Nous exposons dans cette partie, la preuve de notre résultat principal que nous rappelons ci-après.

THEOREME 4.2.1. [105] *Soit $b \geq 6$ un entier pair et soit G un graphe κ -connexe tel que $b \leq \kappa$ et $\alpha(G) < (b - 1)(\delta - 1)/5$ alors G possède un $[2, b]$ -facteur pair.*

Démonstration. Nous procédons par contradiction. Nous définissons F un $[0, b]$ -facteur pair. Puisque $\delta \geq \kappa \geq 2$, F possède au moins un cycle. Nous supposons en outre que F a un minimum de sommets isolés. Il s'ensuit d'après la définition de F que ces sommets isolés forment une forêt. Il existe un sommet x_0 de G tel que $d_F(x_0) = 0$ et tel que x_0 a au plus un sommet isolé dans F comme voisin dans $G - F$ alors x_0 a au moins $\delta(G) - 1$ voisins dans $G - F$ qui ne sont pas des sommets isolés dans F .

Supposons que F contient plusieurs composantes connexes notées F_1, F_2, \dots, F_p . Nous définissons l'opération φ_1 sur F comme suit (Voir figure 4.1 : Les arêtes en pointillé sont ceux de $G - F$ et les sommets en blanc sont ceux dont le degré a changé après l'application de φ_1) :

Soient u, v, w des sommets de G , tel que w est non saturé par F et u, v sont des voisins de w dans $G - F$ et $d_F(w) = 2$.

- Si u et v sont adjacents dans F , nous supprimons donc l'arête uv et nous rajoutons les arêtes de $G - F$, wu et wv dans F .
- Si u et v sont joints dans F par une chaîne de longueur trois ayant seulement des sommets de degré au moins six, nous supprimons alors la (u, v) -chaîne et nous rajoutons dans F les arêtes wu et wv de $G - F$.
- Si u et v sont des sommets non saturés dans F et qui sont adjacents dans $G - F$, nous rajoutons le triangle wuv dans F .
- Si u et v ont respectivement les voisins u' et v' dans F et u' et v' sont adjacents dans $G - F$, nous supprimons alors de F les arêtes uu' et vv' et nous rajoutons les arêtes wu, wv et $u'v'$ de $G - F$.

Par les opérations a, b , et d , le degré des sommets u' et v' dans F reste inchangé, de même pour u' et v' . Dans tous les cas, le degré du sommet w augmente de deux. Par φ_1 , si un sommet est degré au moins quatre dans F , il reste de degré au moins quatre.

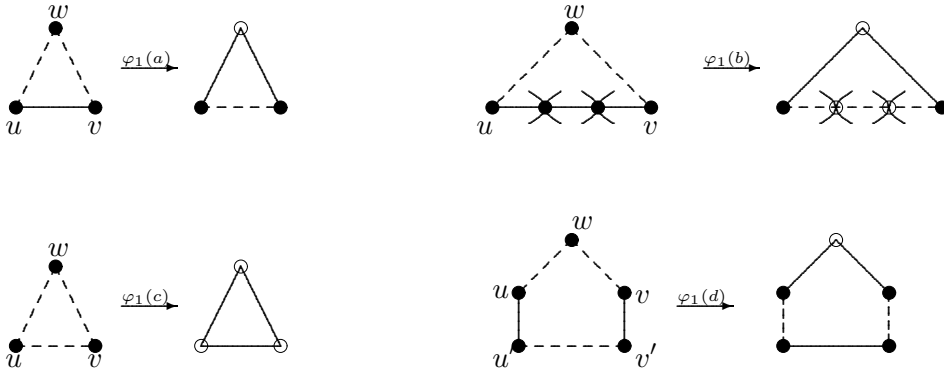


FIGURE 4.1 – L'opération d'insertion φ_1

Un sommet de degré deux dans F est dit *insérable*, si nous pouvons lui appliquer l'une des opérations a, b, c, d de φ_1 . L'opération φ_1 est dite *d'insertion*. Les sommets de degré deux qu'on ne peut insérer par φ_1 sont dits *non insérables*. On applique l'opération φ_1 et on réitère tant que c'est possible. A l'arrêt, on a plus des sommets insérables.

Pour tout sommet saturé s dans F , on réalise l'opération φ_2 (Voir figure 4.2 : Les arêtes en pointillé sont ceux de $G - F$ et les sommets en blanc sont ceux dont le degré a changé après l'application de φ_2) :

Pour tout couple de sommets (u, v) voisins de s dans F :

- a. Si u et v ont un degré au moins six dans F et s'ils sont adjacents dans F , nous supprimons donc de F le triangle uvs .
- b. Si u et v sont adjacents dans $G - F$, nous supprimons alors de F les arêtes su et sv et nous rajoutons l'arête uv dans F .

Par l'application de φ_2 , le sommet s devient non saturé, les sommets u et v conservent leur degré dans F par $\varphi_2(b)$ tandis que leur degré diminue par $\varphi_2(a)$. Comme $b \geq 6$, dans tous les cas, nous nous créons pas de sommets de degré deux en appliquant cette opération. Nous appliquons φ_2 et nous réitérons φ_1 et φ_2 . A chaque itération, φ_1 diminue le nombre de sommets de degré deux et φ_2 le laisse inchangé. Ainsi, le processus d'itération est fini. Nous nous pouvons avoir par la suite des sommets de degré au moins six, voisins dans F d'un sommet saturé, qui soient adjacents dans F ou dans $G - F$.

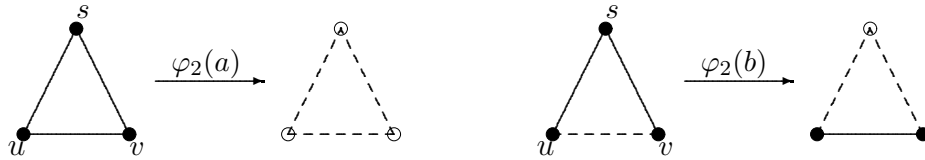


FIGURE 4.2 – φ_2

Nous numérotions les voisins de x par $\{x_1, x_2, \dots\}$. Nous notons chaque chaîne induite de F délimitée par deux sommets u et v par $P[u, v]$.

Cas 1. F possède au moins une composante F_i tel que $|F_i| > b$.

Comme le graphe G est κ -connexe et $b \leq \kappa$, par le théorème de Menger 4.2.2, il va exister au moins b chaînes sommets-disjoints de G joignant le sommet x_0 à au moins b sommets disjoints de la composante F_i .

Soit $\{F_k, 1 \leq k \leq r\}$ l'ensemble des différentes composantes de F . Soit $i \leq r$ un entier fixé. Soit $(P_j(x_0, F_i))_j$ l'ensemble des b chaînes intérieurement disjointes de x_0 à F_i .

Nous appliquons d'abord les opérations suivantes aux chaînes $(P_j(x_0, F_i))_j$: Soit j, k deux entiers.

- (O_1) Si une chaîne P_j arrive en un point a sur une composante F_k et quitte la composante en un point a' tel que $|P_j \cap F_k| \geq 2$, et s'il n'existe aucune autre chaîne qui utilise la composante F_k , nous modifions alors P_j en une chaîne P'_j tel que $P'_j \cap F_k = P[a, a']$.
- (O_2) Si l'une des chaînes P' de x_0 à F_k contient un sommet interne saturé s tel que $\{s\} = P'_i \cap F_t$, s est nécessairement adjacent à deux arêtes de $G - F$ dans la chaîne, nous rajoutons donc un cycle induit minimum C_k dans F_t à la chaîne et nous choisissons C_k de sorte que tous ses sommets soient de degré au moins quatre dans F si possible.

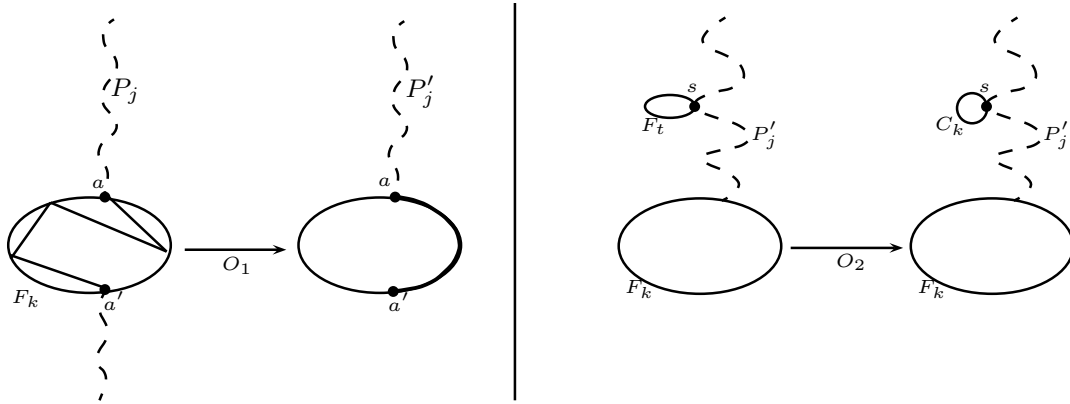


FIGURE 4.3 – Les opérations O_1 et O_2 .

Notons les chaînes résultantes par $(\mathcal{P}_j(x_0, F_i))_j$.

Proposition 4.2.1. *Soit $(\mathcal{P}_j(x_0, F_i))_j$ l'ensemble des b chaînes intérieurement disjointes de x_0 à F_i . Alors ces chaînes forment avec F un ensemble d'au*

moins $\frac{b-1}{3}$ cycles élémentaires de G , tel que deux cycles quelconques ont au plus un sommet en commun dans F .

Démonstration. Contractons d'abord chaque composante F_k en un sommet f_k . Soit t un entier fixé. L'union de l'ensemble des chaînes $(R_j(x_0, F_t))_j$, est dit un fibre \mathcal{F}_t si ces chaînes sont intérieurement sommet disjoint. Par induction, nous montrons le lemme suivant.

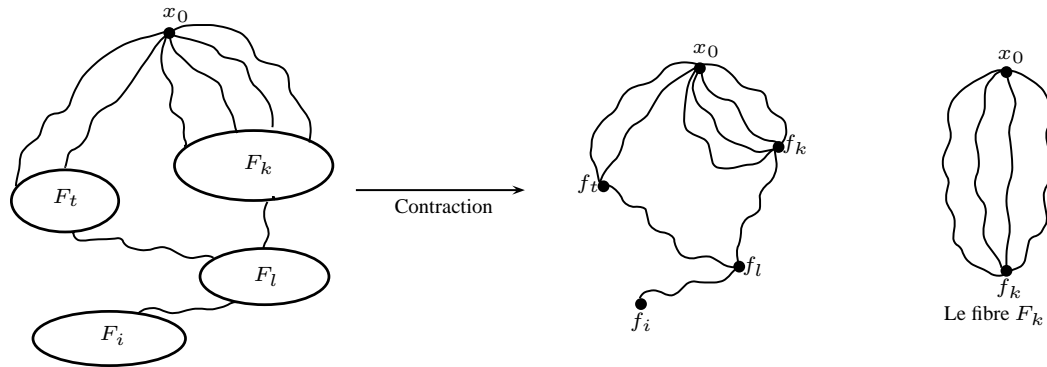


FIGURE 4.4 – La formation d'un fibre

Lemme 4.2.5. *Il existe R_j , une famille de b' sous-chaînes de $\cup_{1 \leq j \leq b'} (\mathcal{P}_j(x_0, f_i))_j$, tel que R_j sont deux à deux intérieurement sommets disjoints et forment un ensemble de fibres $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_r$. En outre, chaque fibre contient au moins deux sous-chaînes sauf peut être \mathcal{F}_i .*

Démonstration. Par induction sur b' . Si $b' = 2$, dans $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, il existe un cycle élémentaire contenant x_0 . Nous obtenons un fibre avec 2 chaînes. Si $b' = 3$, si la troisième chaîne \mathcal{P}_3 rencontre le fibre \mathcal{F}_1 en f_r , nous obtenons le fibre \mathcal{F}_r de trois chaînes ; sinon, \mathcal{P}_3 forme le fibre \mathcal{F}_i .

Supposons que le lemme est vrai pour $b' = b_0$. Soit $b' = b_0 + 1$. Donc $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{b'-1}$ forme un ensemble de fibres comme celui décrit dans le lemme. Considérons la chaîne $\mathcal{P}_{b'}[x_0, f_i]$. Soit, elle ne rencontre aucun fibre ; donc elle forme elle même un fibre \mathcal{F}_i . Où bien partant de x_0 , $\mathcal{P}_{b'}$ rencontre en premier une sous-chaîne R dans les fibres, soit f_l le sommet en commun. Soit \mathcal{F}_j le

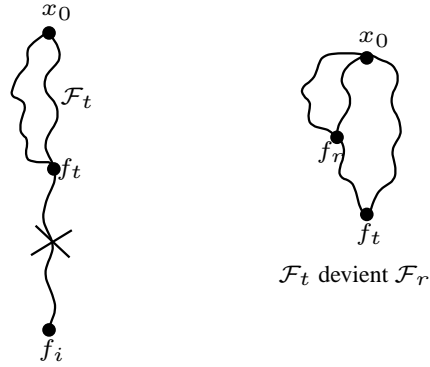


FIGURE 4.5 – Cas $b' = 2, b' = 3$.

fibres de R . Soit, \mathcal{F}_j contient au moins 3 sous-chaînes, donc on soustrait R_{x_0} de F_j ; $R[x_0, f_l] \cup \mathcal{P}_{b'}[x_0, f_l]$ forme un nouveau fibre \mathcal{F}_l . Ou bien \mathcal{F}_j contient au plus 2 sous-chaînes, alors la construction est celle du cas $b' = 2$ or 3. \square

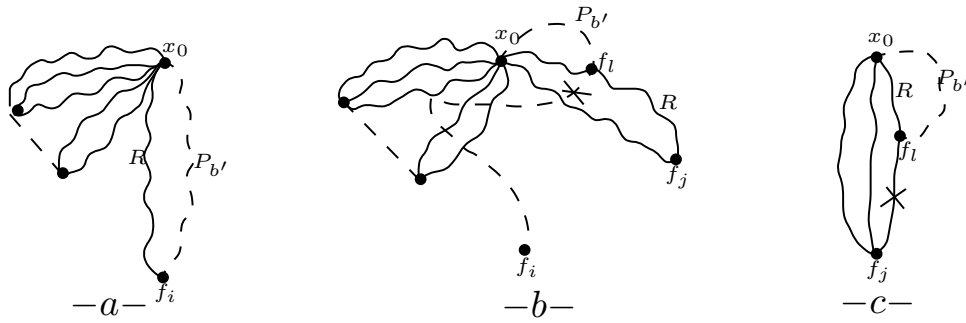


FIGURE 4.6 – Dans a , la chaîne P'_b ne rencontre aucun fibre. Par contre, dans b , elle rencontre le fibre \mathcal{F}_j au sommet f_l , dans ce cas, nous supprimons la sous-chaîne (f_l, f_i) , ainsi le fibre \mathcal{F}_l remplace \mathcal{F}_j . Dans c , nous créons le fibre \mathcal{F}_l et nous gardons \mathcal{F}_j .

Considérons les fibres \mathcal{F}_k avec exactement deux sous-chaînes $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Décontractons le sommet f_k et soit c_1 (resp. c_2) l'intersection de \mathcal{P}_1 (resp. \mathcal{P}_2) et F_k . L'union de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et la chaîne induite $P[c, c']$ de F_k forme un cycle dans G . Considérons à présent les fibres \mathcal{F}_k avec exactement trois sous-chaînes.

Nous décontractons les sommets f_k et nous utilisons l'algorithme donné dans la preuve du lemme 4.2.4 pour former des chaînes arêtes-disjointes de F_k , ayant au plus un sommet en commun. Nous remplaçons alors chaque chaîne utilisée par sa chaîne induite et nous rajoutons les sous-chaînes des fibres pour former un nouveau cycle dans F_k . Comme les sous-chaînes sont deux à deux intérieurement sommets-disjoints suivant le lemme 4.2.5, ces cycles sont deux à deux arêtes-disjoints et deux cycles quelconques ont au plus un sommet en commun dans F . Les cycles formés alors contiennent des chaînes de F et des arêtes de $G - F$.

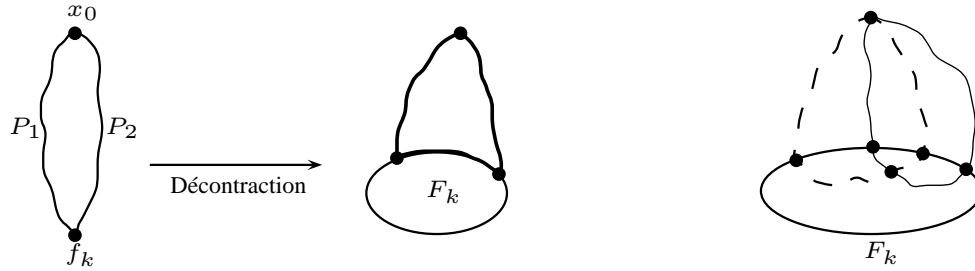


FIGURE 4.7 – Formation d'un cycle ou plusieurs cycles arêtes-disjoints, tel que deux cycles quelconques ont au plus un sommet en commun dans F .

Ainsi, s'il existe $2r_l + k_l, 0 \leq k_l \leq 1, r_l \neq 0$ chaînes qui arrivent sur une composante F_k , nous définissons dans ce cas r_l cycles arêtes-disjoints contenant le sommet x_0 . Le nombre total de chaînes qui est au moins b est égal à $\sum_{l=1}^p (2r_l + k_l)$ et le nombre de cycles arêtes-disjoints définis est alors

donné par $\sum_{l=1}^p r_l$, nous avons $2 \sum_{l=1}^p r_l \leq b \leq \sum_{l=1}^p (2r_l + k_l) = \sum_{l=1}^p 2r_l + \sum_{l=1}^p k_l \leq \sum_{l=1}^p (2r_l) + p \leq \sum_{l=1}^p 2r_l + (\sum_{l=1, l \neq i}^p r_l) + 1 \leq 3(\sum_{l=1}^p r_l) + 1$, alors $\frac{b-1}{3} \leq \sum_l r_l \leq \frac{b}{2}$, ce qui signifie que nous pouvons définir au moins $\lceil \frac{b-1}{3} \rceil$ cycles arêtes-disjoints contenant le sommet x_0 . \square

Nous supposons que chaque cycle C_j contient les arêtes x_0x_j et $x_0x_{f(j)}$ tel que $j < f(j)$. Fixons un sens de parcours pour chaque cycle C_j de telle sorte que les sommets x_0, x_j et $x_{f(j)}$ apparaissent dans cet ordre. Pour $u \in V(C_j)$,

u^+ (resp. u^-) désigne son successeur (resp. prédécesseur), nous supposons que les sommets de chaque cycle sont ordonnés par \prec .

Notons chaque segment de C_j délimité par deux sommets u et v par uC_jv si les sommets de u à v y compris u et v sont ordonnés dans le sens du cycle C . Autrement, il est noté par $u\overline{C}_jv$. Un segment dans un cycle peut contenir à la fois des arêtes de F et de $G-F$. Nous notons par $F \cap C_j$ le sous-graphe de F ayant comme sommets ceux de C_j et comme arêtes ceux de $E(F) \cap E(C_j)$.

Remarque 4.2.1. *Par l'opération (O_2) , il n'existe aucun sommet saturé s interne à une chaîne de $G-F$, donc, tout sommet saturé dans le cycle C_j est adjacent à une arête de $E(F) \cap E(C_j)$.*

Si tout sommet dans C_i est de degré au moins quatre dans F , ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un, nous définissons alors l'opération de *complémentarité* qui consiste à transformer toute arête de $G-F$ en une arête de F et inversement. Comme conséquences de cette opération, nous avons :

Claim 4.2.1. *Par l'opération de complémentarité, les sommets adjacents à la fois à une arête de F et une autre de $G-F$, conservent leur degrés, le degré de tous sommet saturé n'augmente pas. Le degré des autres sommets, soit diminue de deux, soit augmente de deux.*

Démonstration. En effet, si un sommet saturé s est interne à une chaîne de $G-F$, suite à la remarque 4.2.1, s est aussi adjacent a deux arêtes de F , d'où la conservation de son degré en réalisant la complémentarité. Par contre, le degré de tout sommet interne à une chaîne de F dans C_i , diminue de deux, alors que le degré de tout sommet non saturé interne a une chaîne de $G-F$ augmente de deux. \square

Lemme 4.2.6. *Pour tout entier $i \geq 1$, C_i contient un sommet y tel que $d_{F \cap C_i}(y) = d_F(y) = 2$.*

Démonstration. Si chaque sommet de C_i est de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un, nous réalisons donc l'opération de complémentarité dans C_i , il s'ensuit d'après le claim 4.2.1, qu'il n'y aura pas violation de la parité des degrés des sommets du cycle. Nous introduisons donc le sommet x_0 dans le Facteur F , ce qui constitue une contradiction. \square

Un sommet t_j dans un cycle C_i est dit *pseudo-insérable* (Voir figure 4.8 : les arêtes en pointillé sont ceux de $G-F$), si $d_{C_i}(t_j) = d_F(t_j) = d_{F \cap C_i}(t_j) = 2$

et s'il existe un sommet t_j^0 dans C_i tel que $t_j^0 \prec t_j$ et tel qu'il existe une chaîne P_j de t_j à t_j^0 dans laquelle tout sommet excepté t_j , a un degré au moins quatre dans F et qui vérifie l'une des conditions suivantes :

- P_j est une arête de $G - F$, et si en plus, $(t_j^0)^- t_j$ est une arête de $G - F$ (c-à-d, t_j^0 est une extrémité d'un segment de F) alors nous supposons que t_j^0 est une extrémité d'un triangle T_j dont tous les sommets sont de degré au moins quatre dans F .
- P_j est une chaîne de G de longueur deux; $P_j = t_j v t_j^0$ où $v \notin C_i$, $t_j v$ est une arête de $G - F$ et $t_j^0 v$ une arête de F .
- $P_j = t_j v \dots t_j^0$ est une chaîne de G de longueur trois ou quatre, et $(t_j^0)^- t_j^0$ est une arête de $G - F$ (c-à-d, t_j^0 est une extrémité d'un segment de F); où $t_j v$ est une arête de $G - F$ et $t_j^0 \dots v$ est une chaîne de F de longueur deux ou trois dans laquelle tout sommet interne u vérifie $u \prec t_j$ si $u \in C_i$.

Nous supposons que $d_{C_i}(t_j^0, t_j)$ est maximum sous ces conditions.

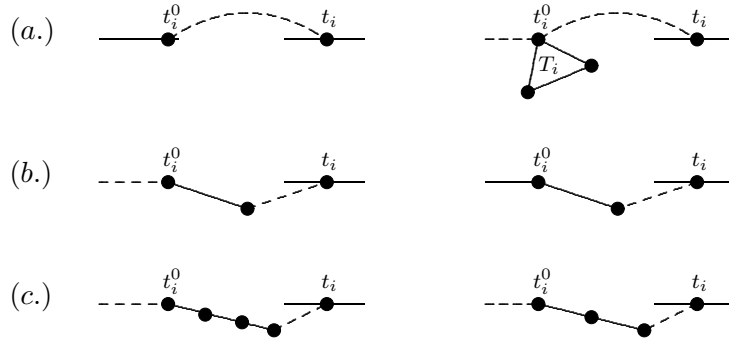


FIGURE 4.8 – La définition du sommet pseudo-insérable.

Un *segment pseudo-insérable* dans un cycle (resp. *cycle pseudo-insérable*) est un segment (resp. un cycle) dans lequel tout sommet est soit pseudo-insérable, soit il est de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un dans C_i .

Considérons un segment pseudo-insérable $x_i C_i t_j$, dans lequel nous définissons

l'opération de pseudo-insertion φ_3 comme suit :

1. Si t_j est un sommet pseudo-insérable, alors nous remplaçons le segment $t_j C_i t_j^0$ par

$$\begin{cases} P_j \cup T_j & \text{si } P_j \text{ et } (t_j^0)^- t_j \text{ sont des arêtes de } G - F; \\ P_j & \text{sinon} \end{cases}$$
 - a. Si chaque sommet du segment $x_i C_i t_j^0$ est soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un, nous ne ferons aucun changement dans le segment.
 - b. Sinon, nous considérons le sommet pseudo-insérable le plus proche du sommet t_j^0 , soit t_k tel que $t_k \prec t_j^0$ et nous réitérons $\varphi_3(i)$.
2. Si t_j n'est pas un sommet pseudo-insérable, posons $t_j^0 := t_j$ et nous réappliquons alors $\varphi_3(1)$ et $\varphi_3(b)$.

Dans φ_3 , considérons les chaînes et triangles qui remplacent deux différents segments $t_k^0 C_i t_k$ et $t_j^0 C_i t_j$ où $j < k$.

Claim 4.2.2. *La chaîne P_k (ou $P_k \cup T_k$ si un triangle est utilisé) qui remplace $t_k^0 C_i t_k$ est sommet disjoint de P_j (et $P_j \cup T_j$ si un triangle est utilisé) qui remplace $t_j^0 C_i t_j$ sauf peut être en t_j^0 . Dans ce cas, $t_k^0 C_i t_j$ est non élémentaire.*

Démonstration. **Cas 1.** $t_k^0 \prec t_k \prec t_j^0 \prec t_j$

S'il existe une intersection, alors il existe une chaîne de F d'extrémités t_k^0 et t_j^0 .

- Si t_k^0 est une extrémité finale d'un segment de $F \cap C_i$, alors $P_k \cup T_k$ ne peut intersecter $P_j \cup T_j$, puisque pour chaque composante F_k , $C_i \cap F_k$ n'a pas plus d'un segment, même chose pour P_k et P_j quand P_j a une longueur supérieur à trois dans G . Nous déduisons donc que la chaîne P_j a une longueur deux.
Le sommet t_j^0 ne peut être commun à $P_k \cup T_k$ et P_j , et t_k^0 ne peut être interne à P_j , sinon l'arête de F , $t_k^0 t_j^0$ contredit que $t_k^0 C_i t_j^0$ est une chaîne induite de F . D'où, l'intersection de $P_k \cup T_k$ (resp. P_k) et P_j donne une chaîne de G de longueur deux (resp. au plus quatre), d'extrémités t_j et

t_k^0 , ce qui contredit la maximalité de t_j^0 .

- Sinon, P_k est de longueur deux. L'intersection donne une chaîne d'extrémités t_j et t_k^0 , de longueur deux, ce qui contredit la maximalité de t_j^0 .

Cas 2. $t_k^0 = t_j^0$.

Il s'ensuit que C_i n'est pas élémentaire et t_k^0 est un sommet saturé tel qu'un cycle \mathcal{C} eu été rajouté à s et $t_j^0 = s$ qui est égal à $C_i \cap F_{k'}$ pour un certain k' .

Soit, P_j est de longueur au moins deux, les deux chaînes se rencontrent en dehors de C_i . Par la maximalité de t_j^0 , nous pouvons supprimer \mathcal{C} dans l'insertion.

Où bien, P_j est une arête de $G-F$. Comme $s^-s \in E(G-F)$, nécessairement P_k a une longueur au moins deux. P_k et P_j se rencontrent seulement en s . \square

Il s'ensuit de l'opération de pseudo-insertion, le résultat suivant concernant le segment pseudo-insérable $x_i \dots v_q$.

Lemme 4.2.7.

- (a) Nous obtenons un nouveau segment $x_i \dots v_q$ incluant une séquence d'arêtes de G tel que chaque sommet du nouveau segment obtenu, qui est différent des sommets pseudo-insérables est soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un.
- (b) Pour tout entier $i \geq 1$, C_i contient un sommet de degré deux dans F qui n'est pas pseudo-insérable.

Démonstration.

- (a) La preuve est par induction sur le nombre k des sommets pseudo-insérables t_1, \dots, t_k utilisés par φ_3 dans le segment $x_i C_i v_q$.

Il en résulte alors, l'ordre suivant : $t_k^0 \prec t_k \prec \dots \prec t_1^0 \prec t_1$.

Si $k = 1$, nous remplaçons le segment $t_1 C_i t_1^0$ soit par la chaîne P_1 ou par $P_1 \cup T_1$. Soit A le segment remplacé. Nous obtenons alors le nouveau segment $x_i C_i A$ dans lequel tout sommet est soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un.

Supposons que l'assertion est vrai à l'ordre $k - 1$, vérifions l'ordre k .

Cas 1. $x_i C_i v_q$ est élémentaire.

Il s'ensuit de la preuve du claim 4.2.2 (1^{er} cas), que deux différentes chaînes P_i et P_j utilisées par φ_3 sont sommet-disjoints quand C_i est élémentaire et si la chaîne P_i a une longueur trois ou quatre dans G , il s'ensuit de sa définition qu'elle n'utilise aucun sommet de degré au moins quatre dans $t_1 C_i t_i$; donc, en utilisant $k - 1$ pseudo-insérables sommets, nous obtenons un nouveau segment $t_{k-1}^0 \dots v_q$ dans lequel tout sommet est soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un. Nous réappliquons φ_3 , nous utilisons donc le sommet t_k et nous obtenons le segment $A C_i t_{k-1}^0 \dots v_q$ où A est soit la chaîne P_k ou $P_k \cup T_k$. Comme le sommet t_k est pseudo-insérable, en ajoutant A , t_k sera une extrémité d'une arête de F . Le sommet t_k^0 ainsi que les sommets du triangle T_k s'il est utilisé, ont un degré au moins quatre dans F , donc, nous obtenons le résultat.

Cas 2. $x_i C_i v_q$ est non élémentaire.

Il existe un sommet saturé s interne à une chaîne de $G - F$ auquel nous avons rajouté un cycle induit minimum $\mathcal{C}_k \subseteq F_k$ dans le segment $x_i C_i v_q$. Si tous les sommets de \mathcal{C}_k ont un degré au moins quatre dans F , nous ne ferons aucun changement à \mathcal{C}_k . Si $s = t_j^0$ pour un certain j , où $t_j \notin F_k$ et P_j a une longueur au moins deux dans G , alors on supprime \mathcal{C}_k quand nous réalisons φ_3 et le degré du sommet s dans $F \cap C_i$ est un.

\mathcal{C}_k est un cycle pseudo-insérable, et $s = t_j^0 = t_l^0$ où $t_l \in \mathcal{C}_k$ pour un certain l (Voir la preuve du claim 4.2.2, 2^{ème} cas) et P_j est une arête de $G - F$, ou si $s = t_l^0$, alors nous pouvons vérifier que s n'est pas interne à une chaîne de $G - F$ dans le nouveau segment.

- (b) Considérons le cycle C_i , suivant le lemme 4.2.6, ce cycle contient au moins un sommet non insérable.

Supposons que tout sommet dans C_i de degré deux dans F est pseudo-insérable, nous considérons alors le sommet pseudo-insérable t_k , le plus proche de $x_{f(i)}$ dans le sens $x_{f(i)} \overline{C}_i t_k$. Suivant la définition du sommet t_k , tout som-

met du segment $t_k C_i x_{f(i)}$ est soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $G - F$ est au plus un. Comme le segment $x_i C_i t_k$ est pseudo-insérable, nous appliquons l'opération φ_3 , nous obtenons un nouveau segment suivant a., auquel nous rajoutons l'arête $x_0 x_i$ et le segment $t_k C_i x_{f(i)} x_0$, nous définissons un nouveau cycle \mathcal{C} dans lequel tout sommet a un degré au moins quatre dans F , ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un, nous appliquons l'opération de complémentarité à cycle. En appliquant la complémentarité à un segment pseudo-insérable, il peut y avoir un sommet s qui peut être perturbé deux fois selon le claim 4.2.2 (Voir 2^{ème} cas dans la preuve), cependant le degré du sommet saturé s , reste inchangé selon le 2^{ème} cas, puisque le sommet s est de degré au moins un dans $F \cap C_i$. Nous ne pouvons créer aucun sommet isolé. Il en résulte de la complémentarité l'insertion du sommet x_0 dans le facteur F , ce qui est une contradiction. \square

Lors de l'application de φ_3 simultanément à deux cycles C_i et $C_j, i \neq j$, il peut exister soit un sommet ou une chaîne de G qui peut être utilisée dans φ_3 dans les deux cycles. Si ce n'est pas le cas, nous dirons que φ_3 s'applique indépendamment ; ce que nous prouvons dans le lemme suivant.

Claim 4.2.3. *Soient $x_1 C_1 u_1$ et $x_2 C_2 u_2$ deux segments pseudo-insérable sans sommet en commun (Sauf peut être $u_1 = u_2$). Si φ_3 ne s'applique pas indépendamment dans les deux segments ; alors, il existe une chaîne $R(t_i^0, t_j^0)$ de F entre ces deux segments, dans laquelle tout sommet est degré au moins quatre dans F . Si R est choisie tel que $d(x_i, t_i^0) + d(x_j, t_j^0)$ est minimum, alors il n'existe aucune chaîne de G , $Q(a, b)$ tel que $a < t_i^0, b < t_j^0$ entre les deux segments.*

Démonstration. Soient $x_0 C_1 u_1$ et $x_0 C_2 u_2$ deux segments pseudo-insérable. Supposons qu'il existe une intersection dans les chaînes utilisées par φ_3 dans les deux segments. Ce qui implique l'existence d'une chaîne P_i (resp. P_j) dans $x_1 C_1 u_1$ (resp. $x_2 C_2 u_2$) tel que $P_i \cap P_j \neq \emptyset$.

Donc, si P_i intersecte C_i et C_j ou si $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ alors il existe une chaîne de F entre ces deux cycles, dans laquelle tout sommet interne est de degré au moins quatre dans F . \square

Lemme 4.2.8. *Soient $x_1 C_1 u_1$ et $x_2 C_2 u_2$ deux segments pseudo-insérable sans sommet en commun (Sauf peut être $u_1 = u_2$). Il n'existe pas de chaîne de F*

joignant ces segments, dans laquelle tout sommet est degré au moins quatre dans F .

Démonstration. Soit $P(u, v)$ une chaîne de F entre $x_1C_1u_1$ et $x_2C_2u_2$, choisie parmi toute les chaînes de G entre ces segments tel que $d_{C_1}(x_1, u) + d_{C_2}(x_2, v)$ est minimum.

Puisque $P(u, v)$ est une chaîne de F , alors C_1 et C_2 ont respectivement les segments $P[c, c']$ et $P[d, d']$ dans la même composante F_k de F . Il s'ensuit que $u \in P[c, c']$ et $v \in P[d, d']$.

Cas 1. $u_1 \neq u_2$.

Suivant le choix de la chaîne P et le claim 4.2.3, l'opération de pseudo-insertion φ_3 s'applique indépendamment dans les deux segments x_1C_1u et x_2C_2v . Nous rajoutons ensuite la chaîne P . Le cycle résultant \mathcal{C} a tout sommet, soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un. Nous appliquons la complémentarité à \mathcal{C} .

Donc, si u ou v est une extrémité d'un segment de $F \cap \mathcal{C}$, son degré ne change pas. Autrement, il est interne à une chaîne de F ce qui veut dire que son degré est au moins quatre et par suite, il diminue de deux. Le sommet x_0 est introduit dans F , ce qui est une contradiction.

Cas 2. $u_1 = u_2$.

Suivant le choix des chaînes dans la preuve du lemme 4.2.4, appliqué pour les cycles qui ont des segments dans la même composante de F , nous savons que les chaînes induites $P[c, c']$ et $P[d, d']$ ont au plus un sommet en commun.

Soit $[c, c'] \cap [d, d'] = \{w = u_1 = u_2\}$, le sommet w peut être voisin de x_0 ou il peut exister une chaîne de G de x_0 à w tel que cette chaîne ou l'arête x_0w appartient à un autre cycle définit dans F_k .

Si $w \prec \{u, v\}$ et si en outre $w = v$ ou u , nous appliquons alors φ_3 dans les segments x_1C_1w et x_2C_2w qui sont pseudo-insérables, φ_3 s'applique indépendamment. Nous appliquons ensuite la complémentarité au cycle obtenu. Comme le sommet w est degré au moins quatre, son degré diminue de deux et le sommet x_0 s'introduit dans F ce qui est une contradiction. Nous

déduisons que, soit $u \prec w$ ou $v \prec w$ et dans ce cas $P[c, u] \cap P[d, v] = \emptyset$ et nous retournons au premier cas. \square

Pour tout entier $i \geq 1$, soit w_i le premier sommet non pseudo-insérable dans C_i . Il s'ensuit de la définition du sommet w_i que pour tout sommet u dans C_i , tel que $u \prec w_i$, le segment $x_i C_i u$ est pseudo-insérable.

Nous déduisons du lemme précédent le résultat suivant :

Claim 4.2.4. *Soient i, j deux entiers tel que $i \neq j$. Les segments $x_i C_i w_i$ et $x_j C_j w_j$ sont sommet disjoint.*

Démonstration. Il s'ensuit de la preuve du lemme 4.2.8, Cas 2, que soit $w_i \prec w$ ou $w_j \prec w$. \square

Lemme 4.2.9. *Soient i, j deux entiers tel que $i \neq j$. S'il existe une arête $u_1 u_2$ de $G - F$ entre les segments $x_i C_i w_i$ et $x_j C_j w_j$ alors $\exists i \in \{1, 2\}$ tel que u_i est saturé, $u_i u_i^+ \in E(F)$, et $u_i u_i^- \in E(G - F)$.*

Démonstration. Soit (u_1, u_2) une arête de $G - F$ entre $x_1 C_1 u_1$ et $x_2 C_2 u_2$, choisie parmi toutes les chaînes de G entre ces segments tel que $d_{C_i}(x_1, u_1) + d_{C_j}(x_2, u_2)$ est minimum, et pour laquelle, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, u_i est non saturé, ou bien, si u_i est saturé pour un certain i , alors soit $u_i u_i^+ \notin E(F)$, ou $u_i u_i^- \notin E(G - F)$.

Il s'ensuit du claim 4.2.4 que les segments $x_i C_i w_i$ et $x_j C_j w_j$ sont sommet disjoint.

Considérons les segments pseudo-insérable $x_1 C_1 u_1$ et $x_2 C_2 u_2$. Comme il n'existe aucune chaîne de F entre ces segments selon le lemme 4.2.8, nous pouvons alors appliquer φ_3 qui s'applique indépendamment suivant le lemme 4.2.3, nous obtenons donc de nouveaux segments auxquels nous rajoutons les arêtes $x_0 x_i, x_0 x_j$ et $u_1 u_2$ de $G - F$, nous obtenons alors un cycle que nous notons \mathcal{C} . Comme les sommets $u_i, i \in \{1, 2\}$ sont soit tout les deux non saturés, ou si l'un d'eux est saturé avec $u_i u_i^+ \notin E(F)$, ou $u_i u_i^- \notin E(G - F)$, nous ne pouvons avoir dans le cycle \mathcal{C} , un sommet saturé qui soit adjacent a deux arêtes de $G - F$, donc en appliquant la complémentarité, nous ne augmentons pas le degré d'un sommet saturé dans \mathcal{C} : si u_i est non saturé pour un certain i ; s'il a un degré au moins quatre, il

conserve son degré si $u_i^- u_i \in E(F)$, sinon, son degré augmente de deux. Si u_i est saturé pour un certain i , tel que soit $u_i u_i^+ \notin E(F)$, ou $u_i u_i^- \notin E(G - F)$, alors u_i conserve son degré. Le sommet x_0 est alors rajouté au facteur F , ce qui est une contradiction. \square

Nous pouvons prouver de la même manière que dans le lemme précédent le résultat suivant :

Lemme 4.2.10. *Il n'existe aucune chaîne de $G - F$ de longueur au plus deux avec un sommet interne non saturé entre w_i et w_j pour $i \neq j$.*

Lemme 4.2.11. *Soient i, j deux entiers tel que $i \neq j$, w_j n'est pas voisin dans $G - F$ à un sommet saturé $s \in x_i C_i w_i$ tel que le sommet s est une extrémité d'un triangle T de F , dont tous les sommets sont de degré au moins quatre dans F .*

Démonstration. Soient i, j deux entiers tel que $i \neq j$ et s un sommet saturé dans $x_i C_i w_i$ tel que $s \in T$, où T est un triangle de F dont tous les sommets sont de degré au moins quatre dans F et tel que $d_{C_i}(x_i, s)$ est minimum et sw_j est choisie parmi toutes les chaînes de G entre $x_i C_i s$ et $x_j C_j w_j$ tel que $d_{C_i}(x_i, s) + d_{C_j}(x_j, w_j)$ est minimum.

Il s'ensuit du lemme 4.2.9 que le seul cas où l'arête sw_j existe est quand $s^- s$ est une arête de $G - F$ dans C_j . Nous appliquons φ_3 aux segments pseudo-insérables $x_j C_j w_j$ et $x_i C_i s$. φ_3 s'applique indépendamment suivant le lemme 4.2.3 et le lemme 4.2.8. Nous rajoutons ensuite les arêtes $sw_j, x_0 x_j$ et $x_0 x_i$, nous obtenons alors un cycle que nous notons par \mathcal{C} . Si $T \subset C_j$, nous appliquons la complémentarité à \mathcal{C} , sinon, la complémentarité sera appliqué à $\mathcal{C} \cup T$. Dans tous les cas, les sommets s et w_j conservent leur degré, et x_0 est introduit dans le facteur F , ce qui est une contradiction. \square

Lemme 4.2.12. *Soient i, j deux entiers tel que $i \neq j$. Il n'existe pas une chaîne $P = w_i a \dots v$ de G où $v \in x_j C_j w_j$ avec $d_F(v) \geq 4$, $w_i a$ est une arête de $G - F$ et $P(a, v)$ est une chaîne de F dans laquelle tout sommet différent de v n'appartient pas à $x_j C_j w_j$ et a un degré au moins quatre dans F .*

Démonstration. Soient i, j deux entiers tel que $i \neq j$ et v un sommet dans $x_j C_j w_j$ tel que $P = w_i a \dots v$ est une chaîne comme celle décrite dans le lemme, choisie parmi toutes les chaînes de G entre $x_i C_i w_i$ et $x_j C_j w_j$ tel que

$d_{C_j}(x_j, v) + d_{C_i}(x_i, w_i)$ est minimum.

Il s'ensuit du lemme 4.2.4 que les segments $x_j C_j v$ et $x_i C_i w_i$ sont sommet disjoint. Suivant le choix de la chaîne P et le claim 4.2.3 et le lemme 4.2.8, l'opération de pseudo-insertion φ_3 s'applique indépendamment dans ces segments. Donc, nous appliquons φ_3 dans $x_j C_j v$ et $x_i C_i w_i$.

Nous remarquons que toute chaîne P_i utilisée par φ_3 dans $x_i C_i w_i$ est sommet disjoint de P , sinon il va y avoir une chaîne de F entre les deux segments ce qui est impossible par le lemme 4.2.8. Cependant, s'il existe une chaîne P_j utilisée par φ_3 dans $x_j C_j v$ qui intersecte P , ceci contredit la définition de P . Donc, φ_3 ne perturbe aucun sommet de P . Nous rajoutons ensuite la chaîne P et les arêtes $x_0 x_i, x_0 x_j$. Le cycle résultant \mathcal{C} a tout sommet, soit de degré au moins quatre dans F ou son degré dans $F \cap C_i$ est au plus un. Nous appliquons la complémentarité à \mathcal{C} . Le degré de chaque sommet de $p(a, v)$ excepté a , diminue de deux, a, w_j conservent leur degré. Le sommet x_0 est introduit dans F ce qui est une contradiction. \square

Lemme 4.2.13. $\cup_{i \geq 1} w_i$ est un stable de G .

Démonstration. Pour tout entier i, j tel que $i \neq j$, alors $w_i \neq w_j$, puisque tout sommet w_i est défini dans un cycle C_i , et les cycles $C_i, i \geq 1$ sont arêtes disjoints et les sommets w_i ont un degré deux dans F . Si w_i et w_j sont dans la même composante de F , ils sont à distance au moins deux. Suivant le lemme 4.2.9 et le lemme 4.2.10, nous déduisons que $w_i w_j$ n'est pas une arête de $G - F$. \square

Pour tout sommet saturé s voisin de w_i dans $G - F$ et pour toute paire de sommets u, v de degré au moins quatre dans F tel que s, u, v forme un triangle T de F . Suivant le lemme 4.2.11, nous pouvons réappliquer $\varphi_2(a)$ à T , et alors nous nous réduisons au cas où $\min(d_F(u), d_F(v)) = 2$, nous déduisons donc le résultat suivant.

Claim 4.2.5. Par la réapplication de $\varphi_2(a)$, les segments $x_i C_i w_i, i \geq 1$ restent pseudo-insérables.

Démonstration. Soit s un sommet saturé adjacent à w_i dans $G - F$ et u, v sont des sommets de degré au moins quatre dans F qui forment avec s un triangle T dans F . Nous appliquons $\varphi_2(a)$ à T . Ainsi, les sommets u, v peuvent

devenir de degré deux, mais ils ne seront pas dans $\cup_{i \geq 1} x_i C_i w_i$. En effet, il s'ensuit du lemme 4.2.11, que le sommet s n'appartient pas à $x_j C_j w_j$, pour tout $j \neq i$. Donc, si $s \in x_i C_i w_i$, alors w_i sera pseudo-insérable, ce qui est une contradiction. Cependant, si u ou v sont dans le cycle C_i , nous avons nécessairement $w_i \prec u, v$ autrement w_i sera aussi pseudo-insérable. Si u ou v sont dans le cycle $C_j, j \neq i$, il s'ensuit du lemme 4.2.12 que ni u , ni v ne sont dans $x_j C_j w_j$ ce qui finit la preuve. \square

Notons par S_i (resp. \overline{S}_i) l'ensemble des voisins de w_i dans $G - F$, qui sont saturés par F (resp. non saturés par F).

Lemme 4.2.14. \overline{S}_i est un stable de G de cardinalité au moins $(\delta - 2) - \frac{2\alpha}{b - 1}$.

Démonstration. Soient u et v des sommets de \overline{S}_i . Si u et v sont adjacents dans F , nous appliquons donc l'opération $\varphi_1(a)$ et s'ils sont adjacents dans $G - F$, nous appliquons $\varphi_1(c)$. Dans tous les cas, nous insérons le sommet w_i , ce qui contredit sa définition.

Pour tout entier i , S_i est un stable dans F , puisque s'il existe deux sommets de S_i qui sont adjacents dans F , nous appliquons $\varphi_1(a)$, ce qui implique l'insertion du sommet w_i , ce qui est une contradiction.

Posons $L_i = N_F(S_i)$.

Claim 4.2.6. $F[L_i] = G[L_i]$.

Démonstration. Supposons l'existence d'une arête de $G - F$ joignant deux sommets u, v de L_i . Les sommets u, v ne peuvent être dans le voisinage d'un même sommet à cause de l'opération $\varphi_2(b)$ appliquée, il s'ensuit qu'ils sont dans le voisinage de deux sommets différents, nous appliquons alors $\varphi_1(d)$, ce qui implique l'insertion du sommet w_i , ce qui est une contradiction. \square

Nous avons $L_i = N_F(S_i)$, posons L_i^4 l'ensemble des sommets de L_i qui ont degré au moins quatre dans F .

Nous définissons également l'ensemble $L_2 = L_i - L_i^4$ et $L_2'' = \{u \in L_2 \text{ tel que } d_{F[L_i]}(u) = 1\}$ et $L_2' = L_2 - L_2''$.

Claim 4.2.7. L_2' est un stable de G .

Démonstration. Il s'ensuit du claim 4.2.6 et la définition. \square

Soit L_i^6 l'ensemble des sommets de L_i^4 qui ont degré au moins six dans F , nous prouvons le résultat suivant.

Claim 4.2.8. L_i^6 est un stable de G .

Démonstration. Soient u et v deux sommets dans L_i^6 . Si u et v sont voisins du même sommet, nous savons d'après l'application de l'opération φ_2 que u et v ne sont ni adjacents dans F , ni dans $G - F$. Si, cependant, u et v sont dans le voisinage de deux sommets disjoints u' et v' respectivement, et si u et v sont adjacents dans $G - F$, nous appliquons alors $\varphi_1(d)$, ce qui implique l'insertion du sommet w_i , ce qui est une contradiction. Si u et v sont adjacents dans F , nous appliquons $\varphi_1(b)$, ce qui implique également l'insertion du sommet w_i , ce qui est une contradiction. \square

Considérons l'ensemble $S_i \cup L_i^4$. Par le claim 4.2.8, nous déduisons que chaque cycle dans $S_i \cup L_i^4$, a au moins deux sommets de degré exactement quatre dans F .

Suivant le lemme 4.2.9, il s'ensuit qu'il peut exister un sommet saturé $s \in S_i$, voisin de w_i dans $G - F$ tel que $s \in \cup_{j \neq i} x_j C_j w_j$. Dans ce cas, $s^- s \in E(G - F)$, $s^+ s \in E(F)$ et s n'est pas une extrémité d'un triangle dont tous les sommets sont de degré au moins quatre dans F suivant le lemme 4.2.11. Si $j = i$, comme le sommet w_i n'est pas pseudo-insérable, il peut exister un sommet $s \in x_i C_i w_i \cap S_i$ tel que $s^- s \in E(G - F)$ et s n'est pas une extrémité d'un triangle dans lequel tout sommet est degré au moins quatre dans F . Posons S_0 l'ensemble de tels sommets s dans $\cup_{j \neq i} x_j C_j w_j$ et S_0^+ l'ensemble des successeurs de tout sommet de S_0 . Il est clair que $S_0^+ \subset L_i$.

Remarque 4.2.2. Il ne peut exister un cycle $\mathcal{C} \subset S_i \cup L_i^4$ qui contient deux sommets s_1, s_2 de $x_i C_i w_i \cap S_0$, car dans ce cas $s_1^- s_1$ et $s_2^- s_2$ sont dans $G - F$.

Cependant un cycle $\mathcal{C} \subset S_i \cup L_i^4$ peut contenir un sommet s_1 dans $x_i C_i w_i \cap S_0$ et un sommet s_2 de $S_i \cap C_i$ tel que $w_i \prec s_2$, mais dans ce cas il existe au plus un tel couple (s_1, s_2) selon la remarque ci-dessus. Considérons l'ensemble $S'_i = S_i - \{s_1\}$ au lieu de S_i .

Nous éliminons un par un chaque cycle dans $S'_i \cup L_i^4$ et nous obtenons.

Claim 4.2.9. *En éliminant un par un chaque cycle dans $S'_i \cup L_i^4$, les segments $x_j C_j w_j, j \geq 1$ restent pseudo-insérables.*

Démonstration. Éliminons un par un, chaque cycle dans $S'_i \cup L_i^4$.

Supposons l'existence d'un cycle $\mathcal{C} \subset S'_i \cup L_i^4$ qui contient soit le sommet $s \in S_0$ ou s^+ (Ce qui signifie que nous pouvons perturber un sommet de $x_j C_j w_j$ quand nous supprimons ce cycle). Supposons en premier que $s \in \mathcal{C} \cap x_i C_i w_i$. Sans perte de généralité, nous supposons également que $s^+ \in \mathcal{C}$. Comme le sommet s n'est pas une extrémité d'un triangle dans F ayant des sommets de degré au moins quatre dans F , donc il existe un sommet $l_0 \in (S'_i \cup L_i^4) \cap \mathcal{C}$, tel que l_0 est adjacent à s^+ et non adjacent à s . Donc, $l_0 \notin S_0$ selon la remarque 4.2.2 et $l_0 \notin x_j C_j w_j, j \neq i$ selon le lemme 4.2.8. Comme l_0 est à une distance au plus deux de w_i , alors $l_0 \notin x_i C_i w_i$, sinon w_i est pseudo-insérable. Donc, la chaîne de G contenant le sommet l_0 et qui joint w_i et s a une longueur trois ou quatre ce qui implique que le sommet w_i est pseudo-insérable, ce qui est une contradiction.

Si le sommet s est dans $x_j C_j w_j, j \neq i$. Sans perte de généralité, nous supposons que les deux sommets s, s^+ are in \mathcal{C} .

Comme s n'est pas une extrémité d'un triangle de F , il va y exister un sommet $l_1 \in \mathcal{C} \cup (L_i^4 \cup S'_i)$ tel que l_1 est adjacent à s^+ et non adjacent à s . Le sommet $l_1 \notin x_j C_j w_j$, par le lemme 4.2.9 et le lemme 4.2.12 et $l_1 \notin x_{j'} C_{j'} w_{j'}, j' \neq j$ par le lemme 4.2.8. Tout sommet interne à la chaîne de G de longueur au plus deux qui joint w_i à l_1 est externe à $\cup_{j \neq 1} x_j C_j w_j$ (Le même argument que celui pour l_1). Nous obtenons donc une chaîne de G entre w_i et s^+ de longueur trois, ce qui contredit le lemme 4.2.12. \square

Il s'ensuit du lemme précédent, le résultat suivant.

Claim 4.2.10. *$S'_i \cup L_i^4$ est une forêt dans F .*

Nous avons $e_G(S'_i, L_i^4) \leq |S'_i| + |L_i^4|$ puisque $S'_i \cup L_i^4$ est une forêt et nous avons aussi $e_G(S'_i, L_2) \leq 2|L'_2| + |L''_2|$. D'où, $e_G(S'_i, L_i) = e_G(S'_i, L_i^4) + e_G(S'_i, L_2) \leq |S'_i| + |L_i^4| + 2|L'_2| + |L''_2|$.

Comme $e_G(S'_i, L_i) = b|S'_i| \leq |S'_i| + |L_i^4| + 2|L'_2| + |L''_2|$, nous déduisons que $(b-1)|S'_i| \leq |L_i^4| + 2|L'_2| + |L''_2|$.

D'autre part, nous avons $\alpha(G) \geq \alpha(F[L_i]) \geq \alpha(F[L_i^4 \cup L''_2]) + |L'_2| \geq \frac{|L_i^4| + |L''_2|}{2} + |L'_2|$ ce qui implique que

$$2\alpha(G) \geq |L_i^4| + 2|L'_2| + |L''_2| \geq (b-1)|S'_i|. \text{ D'où, } |S'_i| \leq \frac{2}{b-1}\alpha(G).$$

Donc, $|S_i| \leq \frac{2}{b-1}\alpha(G) + 1$ et par suite $|\overline{S}_i| \geq \delta - 1 - \frac{2\alpha(G)}{b-1}$. \square

Lemme 4.2.15. $\bigcup_{i \geq 1} \overline{S}_i$ est un stable de G .

Démonstration. Il s'ensuit du lemme 4.2.13 et 4.2.10 que pour tout entier $i \neq j$, $w_i w_j$ ne peut être une arête

de $G - F$ et que pour tout entier i, j tel que $i \neq j$, $\overline{S}_i \cap \overline{S}_j = \emptyset$. \square

Suivant le lemme 4.2.13 et 4.2.14, $\bigcup_{i \geq 1} \overline{S}_i$ est un stable de G de cardinalité

$$\text{au moins } \frac{b-1}{3}(\delta - 1 - \frac{2\alpha(G)}{b-1}). \text{ Nous avons } \frac{b-1}{3}(\delta - 1 - \frac{2\alpha(G)}{b-1}) > \alpha(G) \Leftrightarrow \delta - 1 > \frac{5\alpha(G)}{(b-1)} \Leftrightarrow \alpha(G) < \frac{(b-1)(\delta - 1)}{5}.$$

Cas 2. Toutes les composantes F_i de F ont au plus b sommets.

Ceci signifie que le facteur F n'a aucun sommet saturé. Considérons alors un sous-ensemble de k sommets voisins de x_0 , $X_0 = \{x_1, \dots, x_k\}$, comme conséquence du théorème de Menger et le lemme d'expansion de Whitney dans [155], il existe $\lfloor k/2 \rfloor$ chaînes sommet-disjoint entre un sous-ensemble de $\lfloor k/2 \rfloor$ sommets de X_0 et son complément dans X_0 . Nous pouvons donc former $\lfloor k/2 \rfloor$ cycles sommet-disjoints qui ont uniquement le sommet x_0 en commun. Nous remarquons que tels cycles ne peuvent contenir uniquement des arêtes de $G - F$, autrement le sommet x_0 sera dans le facteur F en rajoutons les arêtes du cycle dans F puisque F n'a pas de sommets saturés, ce qui est une contradiction. Nous notons ces cycles par $C_1, \dots, C_{\lfloor k/2 \rfloor}$, nous fixons une orientation pour chaque cycle C_i tel que les sommets x_0, x_i apparaissent dans cet ordre et nous retournons au premier cas, nous prouvons de la même manière comme dans le lemme 4.2.6 et le lemme 4.2.7 que tout

cycle C_i contient un sommet non insérable w_i , nous considérons alors l'ensemble des voisins de w_i , qui ne sont pas saturés dans F que nous notons par \overline{S}_i , et nous prouvons de la même manière que dans le lemme 4.2.15 que $\bigcup_{i \geq 1} \overline{S}_i$ est un stable de G avec une cardinalité au moins $\lfloor k/2 \rfloor (\delta - 2)$. Comme

$$\alpha(G) < \frac{(b-1)(\delta-1)}{5} \leq \frac{(k-1)(\delta-1)}{5} < \lfloor k/2 \rfloor (\delta-2)$$

il existe donc une contradiction. \square

Nous jugeons utile après cette longue démonstration, d'introduire un bref résumé de notre preuve.

La preuve est par contradiction. Nous supposons que F est un $[0, b]$ -facteur ayant un minimum de sommets isolés et nous choisissons un sommet isolé $x_0 \in F$ tel qu'il ait au plus un sommet isolé dans F comme voisin dans $G - F$. Ce qui signifie que x_0 a au moins $\delta - 1$ voisins dans $G - F$. Nous supposons que F consiste en plusieurs composantes notés : F_1, F_2, \dots, F_p puis nous procédons comme suit :

Nous commençons par insérer les sommets de degré 2 dans F (Voir l'opération φ_1 , page 82 et la figure 4.1) et nous considérons :

1^{er} cas : G a au moins une composante F_i tel que $|F_i| > b$.

Nous appliquons ici le lemme de Menger qui nous assure l'existence d'au moins b chaînes sommets disjoints allant de x_0 à F_i puisque G est κ -connexe et $b \leq \kappa$. Nous modifions les chaînes qui arrivent sur F_i par les opérations O_1, O_2 (Voir page 84) de telle sorte qu'elles soient constituées alternativement de chaînes de F et de $G - F$. Par suite :

1. Nous montrons que nous pouvons construire avec ces chaînes au moins $\frac{b-1}{3}$ cycles élémentaires de G , tel que deux cycles quelconques ont au plus un sommet en commun.
2. Nous introduisons la notion de sommet pseudo-insérable qui est un sommet de degré 2 dans F vérifiant certaines propriétés. (Voir page 88 et figure 4.8) et nous montrons que dans chaque cycle défini dans 1., il existe un sommet w_i de degré 2 dans F qui ne soit pas pseudo-insérable.

3. Nous montrons que $\cup_{i \geq 1} w_i$ est un ensemble indépendant dans G .
4. Nous considérons \overline{S}_i l'ensemble des voisins de w_i dans $G - F$ qui ne sont pas saturés par F :
 - (a) Nous montrons que \overline{S}_i est un ensemble indépendant dans G de cardinalité au moins $(\delta - 1) - \frac{2\alpha}{b-1}$.
 - (b) $\cup_{i \geq 1} \overline{S}_i$ est un ensemble indépendant dans G de cardinalité au moins $\frac{b-1}{3}(\delta - 1 - \frac{2\alpha}{b-1})$. Cette valeur est supérieure à $\alpha(G)$, ce qui signifie que nous sommes arrivé à construire un stable de taille plus grande que $\alpha(G)$, ce qui constitue une contradiction.

2^{ème} cas, Toutes les composantes F_i de F ont au plus b sommets.

Nous construisons $\lfloor \frac{\kappa}{2} \rfloor$ cycles sommets disjoints qui n'ont que le sommet x_0 en commun et nous réappliquons les points 2 à 4, nous arriverons à construire un stable qui soit de cardinalité au moins $\lfloor \frac{\kappa}{2} \rfloor (\delta - 2)$ qui est plus grande que $\alpha(G)$.

Chapitre 5

Généralisation à un $[a, b]$ -facteur pair

5.1 Introduction

Comme vu dans le chapitre 3, section 3.5, Lovász [113] caractérisa les graphes ayant un $[g, f]$ -facteur pair et a fortiori un $[a, b]$ -facteur pair. Rappelons cette caractérisation.

Théorème 5.1.1. (Lovász [114], (1972)) *Soit G un graphe et soit a et $b \geq 2$ deux entiers pairs. Alors, G a un $[a, b]$ -facteur pair si et seulement si pour toute paire de sous-ensemble disjoints X et Y de $V(G)$, nous avons*

$$\sum_{y \in Y} d_G(y) - a|Y| + b|X| - h(X, Y) - e(X, Y) \geq 0,$$

où $h(X, Y)$ désigne le nombre de composantes C de $G - (X \cup Y)$ telles que

$$e(C, Y) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Posons $\tau(X, Y) = \sum_{y \in Y} d_G(y) - a|Y| + b|X| - h(X, Y) - e(X, Y)$.

En utilisant la contraposée de la condition suffisante du théorème 5.1.1 i.e., en supposant que le graphe G n'a pas un $[a, b]$ -facteur, il en résulte l'existence de deux sous-ensembles X, Y de $V(G)$ pour lesquels $\tau(X, Y) < 0$. Cette piste de recherche fut explorée par plusieurs auteurs et a permis l'élaboration d'un nombre important de résultats. Nous empruntons donc ce chemin pour améliorer notre résultat établi dans le chapitre précédent.

5.2 Existence d'un $[a, b]$ -facteur pair

Kouider et Lonc [102] ont établi une condition suffisante pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur dans un graphe, moyennant le nombre de stabilité et le degré minimum ainsi que l'entier a comme suit.

Théorème 5.2.1. (Kouider et Lonc [102]) *Soit $b \geq a + 1$ et soit G un graphe avec un degré minimum $\delta(G)$. Si $\alpha(G) \leq \begin{cases} 4b(\delta(G) - a + 1)/(a + 1)^2, & \text{pour } a \text{ impair;} \\ 4b(\delta(G) - a + 1)/a(a + 2), & \text{pour } a \text{ pair.} \end{cases}$ alors G a un $[a, b]$ -facteur.*

Soient a, b deux entiers. Nous introduisons ci-dessous un exemple d'un graphe satisfaisant la condition du théorème ci-dessus, qui a un $[a, b]$ -facteur mais n'a aucun $[a, b]$ -facteur pair.

Exemple 5.2.1. (Voir figure 5.1)

Soit t et p , deux entiers tel que $t = 2p + 1$. Soient $a = 2p, b = (2p + 2)^3$. Nous considérons $t + 1$ graphes complets disjoints, G_1, \dots, G_t : t copies de K_{2p} et une copie de K_b . En outre, nous supposons l'existence de deux sommets externes u et v . Pour tout $i \leq t$, soit y_i un sommet fixé de G_i . Le sommet v est adjacent aux sommets $y_i, i \leq t$, le sommet u est adjacent à $V(G_i) - y_i$ pour tout i .

Le graphe G que nous obtenons a un degré minimum $2p$. $\alpha(G) = t + 2 = 2p + 3$. Ainsi d'après le théorème 5.2.1, $\alpha(G) = 2p + 3 \leq \frac{4b(\delta(G) - a + 1)}{a(a + 2)} = \frac{(2p + 2)^3}{p(p + 1)}$. Cette inéquation est équivalente à $6p^2 + 13p + 8 \geq 0$, ce qui est toujours vrai. Ainsi, la condition du théorème précédent est satisfaite et par suite, G admet un $[a, b]$ -facteur. Cependant, G n'a aucun $[a, b]$ -facteur pair F , autrement, nous aurons $d_F(v) = t$ et t est impair.

L'existence d'un facteur pair avec des degrés bornés par les constantes a, b est caractérisé pour les graphes bipartis complets par M. Kouider et P. D. Vestergaard [108] de la manière suivante.

Théorème 5.2.2. (Kouider et Vestergaard [108]) *Pour $3 \leq p \leq q$ soit $K_{p,q}$ un graphe biparti complet et soit $b \geq 2$ un entier pair. Alors le graphe $K_{p,q}$ a un $[2, b]$ -facteur pair si et seulement si $q \leq \frac{b}{2}p$.*

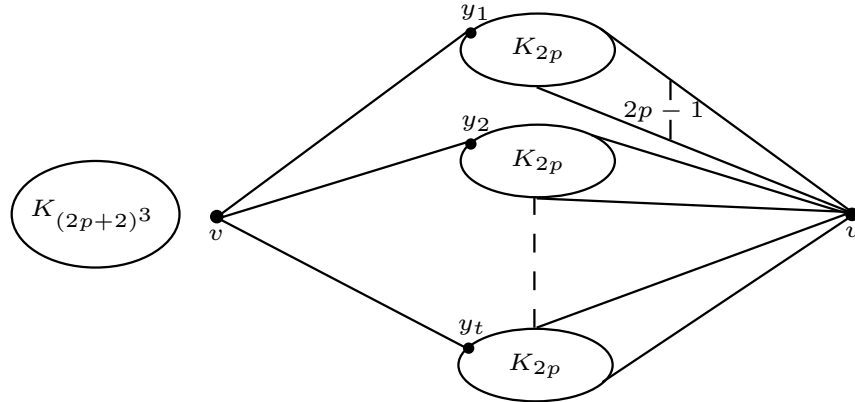


FIGURE 5.1 – Ce graphe a un $[a, b]$ -facteur mais n'a aucun $[a, b]$ -facteur pair.

Il s'ensuit de ce théorème que le graphe biparti complet $G = K_{p,q}$ a un $[2, b]$ -facteur pair si et seulement si $\alpha(G) \leq \frac{b}{2}\delta(G)$.

Nous généralisons le résultat obtenu dans le chapitre 4, théorème 4.2.1 à l'existence d'un facteur pair dont les degrés sont compris entre a et b où a est un entier pair ≥ 2 , comme suit.

Théorème 5.2.3. [106] *Soient a, b deux entiers pairs et soit G un graphe 2-arête connexe tels que $\delta(G) \geq 2a$ et $\alpha(G) \leq \frac{4b(\delta(G) - a)}{(a + 1)^2}$, alors G contient un $[a, b]$ -facteur pair.*

Ce théorème constitue une généralisation du théorème 4.2.1, car sous les conditions du théorème 5.2.3, nous avons $\frac{(b - 1)(\delta(G) - 1)}{5} < \frac{4b(\delta(G) - a)}{(a + 1)^2}$ dans le cas où $a = 2$. En fait, cette inégalité est équivalente à $9(-b - \delta(G) + 1) < b(11\delta(G) - 40)$, ce qui est toujours vrai sachant que $\delta(G) \geq 2a \geq 4$. En outre le théorème 5.2.3 traite l'existence d'un $[a, b]$ -facteur dans le cas où $a > 2$. Nous prouvons donc cette généralisation.

Démonstration. Nous prouvons ce théorème par contradiction. Supposons que G ne contient aucun $[a, b]$ -facteur pair. Il en résulte du théorème 5.1.1

de Lovàsz, qu'il existe une paire ordonnée X, Y de sous-ensembles disjoints de $V(G)$ pour laquelle

$$\tau(X, Y) = \sum_{y \in Y} d_{G-X}(y) - a|Y| + b|X| - h(X, Y) < 0. \quad (*)$$

Claim 5.2.1. $Y \neq \emptyset$.

Démonstration. Si $|Y| = 0$, alors $\tau(X, \emptyset) = b|X| < 0$, ce qui est impossible. \square

Claim 5.2.2. $X \neq \emptyset$.

Démonstration. Si $|X| = 0$, il s'ensuit de (*) que

$$\tau(\emptyset, Y) = \sum_{y \in Y} d_G(y) - a|Y| - h(\emptyset, Y) < 0.$$

Nous avons

$$2a|Y| \leq \delta(G)|Y| \leq \sum_{y \in Y} d_G(y). \quad (5.1)$$

D'autre part, comme G est un graphe 2-arête connexe, alors

$$2h(\emptyset, Y) \leq \sum_{y \in Y} d_G(y). \quad (5.2)$$

Nous déduisons des équations (5.1) et (5.2), que :

$$2 \sum_{y \in Y} d_G(y) \geq 2a|Y| + 2h(\emptyset, Y).$$

Ce qui implique que

$$\sum_{y \in Y} d_G(y) - a|Y| - h(\emptyset, Y) \geq 0,$$

ceci est équivalent à $\tau(\emptyset, Y) \geq 0$. Nous obtenons alors une contradiction avec (*). \square

Claim 5.2.3. $|Y| > \frac{b}{a}|X|$.

Démonstration. Nous avons

$$h(X, Y) \leq \sum_{y \in Y} d_{G-X}(y) < a|Y| - b|X| + h(X, Y).$$

Ceci implique que $a|Y| - b|X| > 0$, d'où le résultat. \square

Nous proposons la partition suivante de Y : soit x_1 un sommet de Y tel que $d(x_1) = \min_{x \in G[Y]} d(x)$ et soit $N_1 = N_G[x_1] \cap Y$ et $Y_1 = Y$. Pour $i \geq 2$, si $Y - \bigcup_{1 \leq j < i} N_j \neq \emptyset$, soit $Y_i = Y - \bigcup_{1 \leq j < i} N_j$. Nous choisissons alors le sommet x_i dans Y_i tel que $d(x_i) = \min_{x \in G[Y_i]} d(x)$ et $N_i = N_G[x_i] \cap Y_i$.

Nous poursuivons ce processus, nous obtenons au rang $i = r + 1$, $N_i = \emptyset$. Il en résulte de cette définition que l'ensemble $\{x_1, \dots, x_r\}$ est un ensemble indépendant dans G .

Comme $Y \neq \emptyset$ alors $r \geq 1$. Soit $|N_i| = n_i$; nous avons $|Y| = \sum_{i=1}^r n_i$ et nous obtenons :

$$\sum_{y \in Y} d_{G-X}(y) \geq \sum_{y \in Y} d_Y(y) + h(X, Y) \geq h(X, Y) + \sum_{i=1}^r \sum_{y \in N_i} d_{Y_i}(y) \geq h(X, Y) + \sum_{i=1}^r n_i(n_i - 1). \quad (5.3)$$

Il s'ensuit des équations (*) et (5.3), que

$$h(X, Y) + \sum_{i=1}^r [n_i(n_i - 1) - an_i] \leq \sum_{y \in Y} d_{G-X}(y) - a|Y| < h(X, Y) - b|X|. \quad (5.4)$$

Nous vérifions aisément que la fonction $f(n_i) = n_i^2 - (1 + a)n_i$ atteint son minimum au point $n_1 = \frac{1+a}{2}$ donc $f(n_i) \geq f(\frac{1+a}{2})$. D'où,

$$h(X, Y) + \frac{-(1+a)^2 r}{4} \leq \sum_{y \in Y} d_{G-X}(y) - a|Y| < h(X, Y) - b|X|. \quad (5.5)$$

D'autre part, nous avons

$$\alpha(G) \geq \alpha(G[Y]) \geq r. \quad (5.6)$$

Prouvons d'abord le résultat suivant.

Claim 5.2.4. $|X| < \delta(G) - a$.

Démonstration. Supposons que $|X| \geq \delta(G) - a$. Suivant les équations (5.5) et (5.6), nous déduisons que

$$b|X| < \frac{(1+a)^2 r}{4} \leq \frac{(1+a)^2 \alpha(G)}{4},$$

alors,

$$b(\delta(G) - a) \leq b|X| < \frac{(1+a)^2}{4} \alpha(G).$$

Donc $\alpha(G) > \frac{4b(\delta(G) - a)}{(1+a)^2}$, ce qui est une contradiction. \square

Nous déduisons de (*) que

$$(\delta(G) - |X| - a)|Y| \leq \sum_{y \in Y} d_{G-X}(y) - a|Y| < -b|X| + h(X, Y). \quad (5.7)$$

D'après le claim 5.2.4 et l'équation (5.7), comme $|X| < \delta(G) - a$, alors

$$|Y| < \frac{-b|X| + h(X, Y)}{\delta(G) - |X| - a}.$$

Puisque $h(X, Y) \leq \alpha(G)$, nous obtenons

$$|Y| < \frac{-b|X| + \frac{4b(\delta(G)-a)}{(a+1)^2}}{\delta(G) - |X| - a}.$$

Nous déduisons que

$$|Y| < \frac{4b}{(a+1)^2} \left(1 - \frac{((a+1)^2 - 4)|X|}{4(\delta(G) - |X| - a)}\right) < \frac{4b}{(a+1)^2}.$$

Par le claim 5.2.3, nous avons

$$|X| < \frac{a}{b}|Y| < \frac{4a}{(a+1)^2} < 1,$$

ce qui implique que $|X| = 0$ et contredit le claim 5.2.2. Ce qui achève la preuve du théorème.

□

Dans le théorème 5.2.3, il est nécessaire d'exiger que G soit un graphe 2-arête connexe comme il est montré dans l'exemple suivant.

Exemple 5.2.2. Soient a, b, δ, t quatre entiers tels que les entiers a et b sont des entiers pairs différents de zéro, $\delta \geq a^2, b \geq (a+1)^2$, et $a \leq \delta \leq t \leq 4(\delta - a)$. Considérons t copies disjointes d'un graphe complet K_{t+1} , et x_0 un sommet ayant exactement un voisin dans chaque copie.

Nous obtenons dans le graphe résultant $G, d(x_0) = t$. Le graphe G n'a aucun $[a, b]$ -facteur pair, puisque si un tel facteur F existe, F aura au moins a composantes de $F - \{x_0\}$, chacune a exactement un sommet de degré impair.

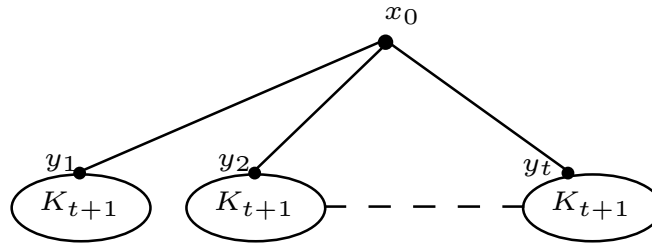


FIGURE 5.2 – Ce graphe G n'a aucun $[a, b]$ -facteur pair. G n'est pas 2-arête connexe.

Conclusion

Deux axes importants de la théorie des graphes ont été abordés au cours de cette thèse, il s'agit essentiellement de la domination et des facteurs.

Dans une première partie, nous nous sommes intéressés à deux invariants de graphes liés à la domination ; il s'agit du nombre domatique et du nombre domatique total que nous avons étudié sur une classe particulière qui est le graphe 2-section de l'hypergraphe d'un poset P , noté $G(P)$. Nous avons donné des valeurs exactes et des bornes de ces deux nombres lorsque P est la somme directe ou linéaire ou le produit cartésien de deux autres posets.

Essayer d'exploiter d'autres opérations sur les posets ou d'utiliser d'autres invariants de graphes s'avère intéressant sur cette classe de graphe peu étudiée.

Notre travail essentiel est basé sur l'étude du nombre domatique et du nombre domatique total dans le graphe 2-section du sous-poset induit par l'union des niveaux consécutifs N_l, \dots, N_u du produit cartésien de deux chaînes $C_{n_1} \times C_{n_2}$, où l, u sont deux entiers tels que $1 \leq l \leq u \leq n_1 + n_2$. Si $l \geq n_1$ ou $u \leq n_2$, des valeurs exactes pour ces deux invariants sont données. Pour le cas complémentaire, une partition domatique maximum est exhibée, ce qui donne une valeur exacte pour le nombre domatique en fonction de l, u, n_1 et n_2 .

Nous avons montré la \mathcal{NP} -complétude du problème de la partition domatique totale maximum $d_t(G) \geq k$ dans cette classe de graphe.

La seconde partie de cette thèse concerne l'étude des facteurs pairs dans les graphes. Grâce à une preuve constructive, nous avons établi une condition suffisante pour l'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair dans un graphe κ -connexe,

moyennant le nombre de stabilité et le degré minimum du graphe. Rappelons que dans la littérature, il existe peu de résultats qui impliquent le nombre de stabilité. Une généralisation du résultat élaboré à un $[a,b]$ -facteur pair dans un graphe 2-arête connexe est donnée en fonction des mêmes paramètres avec l'entier pair a .

Essayer d'impliquer d'autres paramètres pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur pair, autres que ceux trouvés dans la littérature, comme ceux relatifs à la domination peut être fructueux.

Du fait que les $[a, b]$ -facteurs constituent une généralisation d'un k -facteur, il serait intéressant d'essayer de voir l'impact des résultats sur les k -facteurs (k pair) pour l'existence des $[a, b]$ -facteurs pairs. Il est également intéressant de voir les conjectures établies par les auteurs pour améliorer davantage les résultats trouvés.

Bibliographie

- [1] Akiyama, J., M. Kano, *Factors and factorizations of graphs*, A survey, J Graph Theory **9** (1985) 1-42.
- [2] Akiyama, J., M. Kano, *Factors and factorizations of graphs*, Book (Kyoto CGGT 2007).
- [3] Amahashi, A., *On factors with all degrees odd*, Graphs Combin. **1** (1985) 111-114.
- [4] Anstee, R., Y. Nam, *More sufficient conditions for a graph to have factors*, Discrete Math. **184** (1998) 15-24.
- [5] Anstee, R., *An algorithmic proof of Tutte's f -factor theorem*, J. Algorithms **6** (1985) 112-131.
- [6] Anstee, R., *Matching theory : fractional to integral*, New Zealand J. Math. **21** (1992) 17-32.
- [7] Aouane, M., *Approche algorithmique pour la résolution de quelques problèmes dans les posets*, Mémoire de Magistère, 2005, L'U.S.T.H.B, Algérie.
- [8] Bäbler, F., *Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung*, Comment. Math. Helvetici **10** (1938) 275-287.
- [9] Baogen, X., E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, Z. Shao, *Extremal graphs for inequalities involving domination parameters*. Discrete Mathematics **216** (2000) 1-10 .
- [10] Bauer, D., H.J. Broersma, H.J. Veldman, *Not every 2-tough graph is hamiltonian*, Discrete Appl. Math. **99** (2000) 317-321.
- [11] Belck, H.B., *Reguläre Faktoren von Graphen*, J. Reine Angew. Math. **188** (1950) 228-252.

- [12] Benkaci ali, Z., *Nombre de domination double et nombre domatique double dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset*, Mémoire de Magister, 2007, U.S.T.H.B, Algérie.
- [13] Berge, C., *Theory of graphs and its applications*. Methuen, London, (1958).
- [14] Bezrukov, S.L., K. Engel, *Properties of graded posets preserved by some operation*. In R. L. Graham and J. Nešetřil, editors, Mathematics of Paul Erdos, Springer-Verlag, Berlin. *Algorithms Comb.* **14** (1985) 79-85.
- [15] Blum, M., *A new approach to maximum matchings in general graphs, languages and programming*, Proceedings of the 17th International Colloquium on Automata, (1990) 586-597.
- [16] Bollobás, B., *Graph Theory, An Introductory Course*, Graduate texts in mathematics : **63**, Springer-Verlag New York Inc (1979).
- [17] Bollobás, B., A. Saito, N.C. Wormald, *Regular factors of regular graphs*, *J. Graph theory* **9** (1985) 97-103.
- [18] Bonnucelli, M.A., *Dominating sets and domatic number in circular arc graphs*, *Discrete Applied Mathematics*, vol. **12** (1985) 203-213.
- [19] Bosák, J., *Decompositions of Graphs*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.
- [20] Bouchemakh, I., K. Engel, *Interval stability and interval covering property in finite posets*, *Order*, vol. **9** (1992) 163-175.
- [21] Bouchemakh, I., K. Engel, *The order-interval hypergraph of a finite poset and the König property*, *Discrete Math.*, vol. **170** (1997) 51-61.
- [22] Bouchemakh, I., S. Ouatiki, *On the domatic and the total domatic numbers of the 2-section graph of the order-interval hypergraph of the finite poset*, *Discrete Mathematics* **309** (2009) 3674-3679.
- [23] Bouchemakh, I., S. Ouatiki, *Survey on the domatic number of a graph*. Les annales ROAD du laboratoire LAID3, N°10, Novembre 2006.
- [24] Bouchemakh, I., *Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels finis*, USTHB, Algérie, (2001).
- [25] Bouchemakh, I., *On the chromatic number of order-interval hypergraphs*, *Rostock. Math. Kolloq.*, vol. **54** (2000) 81-89.
- [26] Bouchemakh, I., *On the König and dual König properties of the order-interval hypergraphs of series-parallel posets*, *Rostock. Math. Kolloq.*, vol. **56** (2002) 3-8.

- [27] Bouchemakh I., *On the k -independence number in the Boolean lattice*. Maghreb. Math. Rev.(in press).
- [28] Brandt, S., Private communication.
- [29] De Bruijn, N. G., C.A.V.E. Tengbergen, and D.Kruyswijk, *On the set of divisors of a number*. Nieuw Arch. Wiskunde, **23** (1951) 191-193.
- [30] Canfield, E. R, *A Sperner property preserved by product*. Linear and Multilinear Algebra, **9** (1980) 151-157.
- [31] Cai, M., *Connected $[k, k + 1]$ -factors of graphs*, Discrete Mathematics **169** (1997) 1-16.
- [32] Cai, M., Y. Li and M. Kano, *A $[k, k + 1]$ -factor containing given Hamiltonian cycle*, Science in China (ser. A) 41 (1998), 933-938.
- [33] Chang, G.J., *The domatic number problem*, *Discrete Math.*, vol **125** (1994) 115-122.
- [34] Chartrand, G., C.E. Wall, *On the Hamiltonien index of a graph*, MathSciNet, Studia Sci. Math. Hungar. **8** (1973) 43-48.
- [35] Choudum, S.A., M.S. Paulraj, *Regular factors in $K_{1,3}$ -free graphs*. J. Graph theory **15** (1991) 259-265.
- [36] Chung, F., R. Graham, *Recent results in graph decomposition*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, vol. **52**, Cambridge University Press, (1981) 103-123.
- [37] Chvátal, V., *Tough graphs and Hamiltonian circuits*, Discrete Math. **5** (1973) 215-228.
- [38] Cockayne, E. J., *Domination in undirected graphs- a survey*. In Y. Alavi and D. R. Lick, editors, Theory and Applications of Graphs in America's Bicentennial Year, Springer-Verlag, Berlin, (1978) 141-147.
- [39] Cockayne, E.J., R.M. Dawes , S.T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, *Networks*, vol **10** (1980) 211-219.
- [40] Cockayne, E.J., S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination on graphs*, *Networks*, vol **7** (1977) 247-261.
- [41] Cockayne, E.J., S.T. Hedetniemi, *Optimal domination in graphs*. IEEE Transactions on circuits and systems, **22** (11) 855-857 (1975).
- [42] Cook, S. A., *The Complexity of theorem-proving procedures*. Proc.3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New york, (1971) 151-158.

- [43] Cornuéjols, G., W. Pulleyblank, *Perfect triangle-free 2-matchings*, Combinatorial optimization II (Proceedings of Conference University of East Anglia, Norwich, 1979), Math. Program. Stud. **13** (1980) 1-7.
- [44] Cui, Y., M. Kano, *Some results on odd factors of graphs*, J. Graph Theory **12** (1988) 327-333.
- [45] Dirac, G., *Some theorems on abstract graphs*, Proc. London Math. Soc. **2** (1952) 69-81.
- [46] Edmonds, J., *Paths, trees and flowers*, Cand. J. Math. **17** (1965) 449-467.
- [47] Edmonds, J., E. Johnson, *Matching : a well solved class of integer linear programs*, Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New York, (1970) 89-92.
- [48] Egawa, Y., M. Kano, *Sufficient conditions for graphs to have (g, f) -factors*, Discrete Math. **151** (1996) 87-90.
- [49] Egawa, Y., K. Ota, *Regular factors in $K_{1,n}$ -free graphs*, J. Graph Theory **15** (1991) 337-344.
- [50] Egawa, Y., H. Enomoto, *Sufficient conditions for the existence of k -factors*, Recent Studies in Graph Theory (V.R.Kull, ed) (1989) 97-103.
- [51] Engel, K., *Interval packing and covering in the Boolean lattice*, Comb. Probab. Comput., vol. **5**, n°4, (1996) 373-384.
- [52] Engel, K., H.-D. O. F. Gronau, *Sperner theory in partially ordered sets*. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1985).
- [53] Engel, K., *Optimal representations of partially ordered sets and a limit Sperner theorem*. European J. Combin., **7** (1986) 287-302.
- [54] Enomoto, H., B. Jackson, P. Katerinis, A. Saito, *Toughness and the existence of k -factors*, J. Graph Theory **9** (1985) 87-95.
- [55] Enomoto, H., *Toughness and the existence of k -factors*. III, Discrete Math. **189** (1998) 277-282.
- [56] Enomoto, H., M. Hagita, *Toughness and the existence of k -factors*. IV, Discrete Math. **216** (1999) 111-120.
- [57] Fan, G., *New sufficient conditions for cycles in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **37** (1984) 221-227.
- [58] Faudree, R., O. Favaron, E. Flandrin, H. Li, Z. Liu, *On 2-factors in claw-free graphs*, Discrete Math. **206** (1999) 131-137.

- [59] Faudree, R., R.J. Gould, M.S. Jacobson, L. Lesniak, A. Saito, *Toughness, degrees and 2-factors*, Discrete Math. **286** (2004) 245-249.
- [60] Fleischner, H., *Spanning Eulerian subgraphs, the splitting lemma, and Petersen's theorem*, Discrete Math. **101** (1992) 33-37.
- [61] Fremuth-Paeger, C., *Degree constrained subgraph problems and network flow optimization*, Dissertation, Universität Augsburg, Augsburg, 1997, Augsburg Mathematical-Scientific Texts, vol.**21**, Dr. Bernd Wissner, Augsburg, 1997.
- [62] Fremuth-Paeger, C., D. Jungnickel, *Balanced network flows, I. A unifying framework for design and analysis of matching algorithms*, Networks **33** (1999) 1-28.
- [63] Fremuth-Paeger, C., D. Jungnickel, *Balanced network flows, II. Simple augmentation algorithms*, Networks **33** (1999) 29-41.
- [64] Fremuth-Paeger, C., D. Jungnickel, *Balanced network flows, III. Strongly polynomial augmentation algorithms*, Networks **33** (1999) 43-56.
- [65] Fremuth-Paeger, C., D. Jungnickel, *Balanced network flows, IV. Duality and structure theory*, Networks **37** (2001) 194-201.
- [66] Fujisawa, J., L. Xiong, K. Yoshimoto, S. Zhang, *The upper bound of the number of cycles in a 2-factor of a line graph*, J. Graph Theory **55** (2007) 72-82.
- [67] Gabow, H., H. Kaplan, R. Tarjan, *Unique maximum matching algorithms*, Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Atlanta, GA, 1999 (electronic), ACM, New York, (1999) 70-78.
- [68] Gabow, H., H. Kaplan, R. Tarjan, *Unique maximum matching algorithms*, J. Algorithms 40 (2001) 159-183.
- [69] Gabow, H., R. Tarjan, *Faster scaling algorithms for general graph-matching problems*, J.Assoc.Comput.Mach. **38** (1991) 815-853.
- [70] Gallai, T., *On factorisation of graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hung **1** (1950) 133-153.
- [71] Gao, Y., G. Li, X. Li, *Degree condition for the existence of a k -factor containing a given Hamiltonian cycle*, Discrete Math. **309** (2009) 2373-2381.
- [72] Garey, M.R., D.S. Johnson, *Computer and Intractability : A guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Francisco.CA., (1979).

- [73] Garey, M.R., D.S. Johnson, R. Tarjan, *The planar hamiltonian circuit problem is \mathcal{NP} -complete*, SIAM J. Comput. **5** (1976) 704-714.
- [74] Green, C., *Posets of Shuffles*. J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988) 191-206.
- [75] Gould, R.J., M.S. Jacobson, *Two-factors with few cycles in claw-free graphs*, Discrete Math. **231** (2001) 191-197.
- [76] Gould, R.J., E. Hynds, *A note on cycles in 2-factors of line graphs*, Bull. ICA. **26** (1999) 46-48.
- [77] Hartvigsen, *Extensions of matching theory*, Ph.D. Thesis, Carnegie-Mellon University, 1984.
- [78] K. Hussain, *Domination dans l'hypergraphe des intervalles du treillis booléen*, Mémoire de Magister, 2007, U.S.T.H.B, Algérie.
- [79] Haynes, T.W., S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, (1998).
- [80] Hell, P., D. Kirkpatrick, B. Li, *Rounding in symmetric matrices and undirected graphs*, Discrete Appl.Math. **70** (1996) 1-21.
- [81] Iida, H., T. Nishimura, *An Ore-type condition for the existence of k -factors in graphs*, Graphs and Combinatorics **7** (1991) 353-361.
- [82] Iida, H., T. Nishimura, *Neighborhood conditions and k -factors*, Tokyo J. Math. **20** (1997) 411-418.
- [83] Jackson, B., K. Yoshimoto, *Even subgraphs of bridgeless graphs and 2-factors of line graphs*, Discrete Mathematics, **307** (2007) 2775-2785.
- [84] De Jaenisch, C.F., *Applications de l'analyse mathématique dans les jeux des Echecs*. Petrograd (1862).J.E.
- [85] Jung, H.A., *On maximal circuits in finite graphs*, Ann. Discrete Math. **3** (1978) 129-144.
- [86] F. Kaci, *Propriétés de König et duale de König pour l'hypergraphe des intervalles de quelques classes de posets*. Mémoire de Magister, 2004, U.S.T.H.B, Algérie.
- [87] Kano, M., *Sufficient conditions for a graph to have factors*, Discrete Math. **80** (1990) 159-165.
- [88] Kano, M., *An Ore-type sufficient condition for a graph to have a connected $[2, k]$ -factor* (preprint).

- [89] Kano, M., G. Katona, *Structure theorem and algorithm on $(1, f)$ -odd subgraphs*, Discrete Math., **307** (2007) 1404–1417
- [90] Kano, M., *Graph factors with given properties*, Graph theory, Singapore 1983, Springer Lecture Notes in Math. **1073** (1984) 161-168.
- [91] Kano, M., *Factors of regular graphs*, J. Combin. Theory Ser.B **41** (1986) 27-36.
- [92] Kaplan, H., R. Shamir, *The Domatic Number Problem on Some Perfect Graph Families*, In Information Processing Letters, vol. **49** (1994) 51-56.
- [93] Karp, R. M., *Reducibility among Combinatorial problems*, in R.E. Miller and J. W. Thatcher (eds.); complexity of Computer Computations; Plenum Press; New York; (1972) 85-103.
- [94] Karp, R. M., *On the computational complexity of combinatorial problems*, Networks **5** (1975) 45-68.
- [95] Katerinis, P., *A Chvátal-Erdős condition for an r -factor in a graph*, Ars Combinat. **20-B** (1985) 185-191.
- [96] Katerinis, P., *Minimum degree of a graph and the existence of k -factors*, Proc. Indian. Acad. Sci. Math. Sci. **94** (1985) 123-127.
- [97] Katerinis, P., *Toughness of graphs and the existence of factors*, Discrete Mathematics **80** (1990) 81-92.
- [98] Katerinis, P., N. Tsikopoulos, *Independence number, connectivity and f -factors*, Utilitas Math. **57** (2000) 81-95.
- [99] Khodar, A., R. Xu, *More on even $[a, b]$ -factors in graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **27** (2007) 193-204.
- [100] Kocay, W., D. Stone, *Balanced network flows*, Bull.Inst.Combin.appl. **7** (1993) 17-32.
- [101] Kouider, M., *Cycles in graphs with prescribed stability number and connectivity*, J Combin Theory Series B **60** (2) (1994) 315-318.
- [102] Kouider, M., Z. Lonc, *Stability Number and $[a, b]$ -factors in graphs*, Journal of Graph Theory **46** (4) (2004) 254-264.
- [103] Kouider, M., M. Mahéo, *Two edge connected $[2, k]$ -factors in graphs*, Combinatorica **22** (1) (2002) 71-82.
- [104] Kouider, M., M. Mahéo, *Two-edge-connected $[2, k]$ -factors in graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **35** (2000) 89-95.

- [105] Kouider, M., S. Ouatiki, *Stability number and even $[2, b]$ -factors in graphs*, AKCE J. Graphs. Combin., 7, No. **2** (2010) 151-169.
- [106] Kouider, M., S. Ouatiki, *Sufficient condition for the existence of an even $[a, b]$ -factor in graph*, en révision dans Graphs and Combinatorics.
- [107] Kouider, M., P. D. Vestergaard, *Connected factors in graphs*, A survey, Graphs and Combinatorics **21** (2005) 1-26.
- [108] Kouider, M., P. D. Vestergaard, *On even $[2, b]$ -factors in graphs*, Australasian J. Combin. **27** (2003) 139-147.
- [109] Kouider, M., P. D. Vestergaard, *Even $[a, b]$ -factors in graphs*, Graph Theory **24** (2004) 431-441.
- [110] Laborde, J.M., *Sur le nombre domatique du n -cube et une conjecture de Zelinka*, European J. Combin., vol. **8** (1987) 175-177.
- [111] Las Vergnas, M., *A note on matchings in graphs*, Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974), Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. **17** (1975) 257-260.
- [112] Lovász, L., *Combinatorial Problems and Exercices*. North-Holland, Amsterdam (1979).
- [113] Lovász, L., *Subgraphs with prescribed valencies*, J Combin Theory **9** (1970) 391-416.
- [114] Lovász, L., *The factorization of graphs II*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **23** (1972) 223-246.
- [115] Lovász, L., M. Plummer, *Matching theory*, North-Holland Mathematics Studies, vol. **121**, Annals of Discrete Mathematics, vol. **29**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, (1986).
- [116] Liu, G., L. Zhang, *Toughness and the existence of fractional k -factors of graphs*, Discrete Math. **308** (2008) 1741-1748.
- [117] Matsuda, H., *Degree conditions for the existence of $[k, k + 1]$ -factors containing a given Hamiltonian cycle*, Austral. J. Combin. **26** (2002) 273-281.
- [118] Matsuda, H., *Ore-type conditions for the existence of even $[2, b]$ -fators in graphs*, Discrete Mathematics **304** (2005) 51-61.
- [119] Matsuda, H., *Regular factors containing a given Hamiltonian cycle*, Lecture Notes in Computer Science, Combinatorial Geometry and Graph Theory (2005) 123-130.

- [120] Matthews, M. M., D.P. Sumner, *Longest paths and cycles in $K_{1,3}$ -free graphs*, J. Graph Theory **8** (1985) 269-277.
- [121] Metropolis, N., G.-C. Rota, *On the lattice of faces of n -cube*. Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978) 284-286.
- [122] Neumann-Lara, V., E. Rivera-Campo, *Spanning trees with bounded degrees*, Combinatorica **11** (1) (1991) 55-61.
- [123] Micali, S., B. Vazirani, *An $O(|V|^{1/2}|E|)$ algorithm for finding maximum matchings in general graphs*, Proceedings of the 21st Annual Symposium on Foundation in Computer Science (Syracuse) 1980, 17-27.
- [124] Niessen, T., B. Randerath, *Regular factors of simple regular graphs and factor-spectra*. Discrete Math. **185** (1998) 89-103.
- [125] Niessen, T., *A Fan-type condition for regular factors*. Ars Combinatorica **46** (1997) 277-285.
- [126] Niessen, T., *Minimum degree, independence number and regular factors*, Graphs and Combinatorics **11** (1995) 367-378.
- [127] Niessen, T., *Neighborhood unions and regular factors*, J. Graph Theory **19** (1995) 45-64.
- [128] Nishimura, T., *Independence number, connectivity, and r -factors*, J Graph Theory **13**(1) (1989) 63-69.
- [129] Nishimura, T., *Regular factors of line graphs*. II. Math. Japan. **36** (1991) 1033-1040.
- [130] Nishimura, T., *A degree conditions for the existence of k -factors*. J. Graph Theory **16** (1992) 141-151.
- [131] Ore, O., *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **38**, Providence (1962).
- [132] Ore, O., *Note on Hamilton circuits*, Amer.Math.Monthly **67** (1960) 55.
- [133] Ouatiki, S., *Sur le nombre domatique du graphe représentatif des intervalles d'un poset*, Thèse de magister, 2003, U.S.T.H.B, Algérie.
- [134] Peng, S.L., M.S. Chang, *A simple linear time algorithm for the domatic partition problem on strongly chordal graphs*, Inform. Process. Lett., vol. **43** (1992) 297-300.
- [135] Petersen, J., *Die Theorie der regulären Graphen*, Acta Math, **15** (1891) 193-220.

- [136] Picouleau, C., *Complexity of the hamiltonian cycle in regular graph problem*, Theoret.Comput.Sci. **131** (1994) 463-473.
- [137] Plummer, M. D., *Graph factors and factorization*, A survey, Discrete Mathematics **307**(7-8) (2007) 791-821.
- [138] Pulleyblank, W., *Matchings and Extensions*, Handbook of Combinatorics, Elsevier, Amsterdam, (1995) 179-232.
- [139] Rao, A.S., C.P. Rangan, *Linear algorithm for domatic number problem on interval graphs*, Inform. Process. Lett., vol. **33** (1989) 29-33.
- [140] Sali, A., *Constructions of ranked posets*. Discrete Math., **70** (1988) 77-83.
- [141] Sakarovitch, M., *Graphes et programmation linéaire*, (1984) Hermann.
- [142] Sumner, D., *On Tutte's factorization theorem*, Graphs and Combinatorics (Proc. Capital Conf., George Washington University, Washington, DC, 1973), vol. **406**, Springer, Berlin, (1974) 350-355.
- [143] Sumner, D., *1-factors and anti-factor sets*, J. London Math. Soc. **13** (1976) 351-359.
- [144] Thomassen, C., *A remark on the factor theorems of Lovász and Tutte*, J. Graph Theory **5** (1981) 441-442.
- [145] Topp, J., P.D. Vestergaard, *Odd factors of a graph*, Graphs and Combin. **9** (1993) 371-381.
- [146] Tutte, W. T., *Graph factors*, Combinatorica **1** (1981) 70-97.
- [147] Tutte, W. T., *The factorization of linear graphs*, J. London Math. Soc. **22** (1947) 107-111.
- [148] Tutte, W. T., *The factors of graphs*, Canad. J. Math. **4** (1952) 314-328.
- [149] Tutte, W. T., *A short proof of the factor theorem for finite graphs*, Can. J. Math., **6**, (1954) 347-352 reprinted in Selected Papers of W.T. Tutte Ed. D. McCarthy and R.G Stanton, Charles Babbage Research Center, Canada, 1979.
- [150] Vazirani, V., *A theory of alternating paths and blossoms for proving correctness of the $O\sqrt{V}E$ general graph maximum matching algorithm*, Combinatorica **14** (1994) 71-109.
- [151] Vestergaard, P. D., B. Zelinka, *Cut-vertices and Domination in Graphs*, Mathematica Bohemica, No 2, **120** (1995), 135-143.

- [152] Voigt, B., I. Wegener. *A remark on minimal polynomials of Boolean functions*, In E. Borger, H. Kleine Buning, and M. M. Richter, editors, CLS 88 Proc. 2nd Workshop Computer, Science, logic, Duisburg 1988, vol. **385** of lecture Notes in Comput. Sci., 372-383, Springer-Verlag, Berlin, New York (1989).
- [153] Volkmann, L., *Regular graphs, regular factors, and the impact of Petersen's theorems*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **97** (1995) 19-42.
- [154] Yaglom, A. M., I. M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solutions*. In Volume **1** : Combinatorial Analysis and Probability Theory. San Francisco, (1964). Holden-Day.
- [155] West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, Inc. (1996).
- [156] Xiong, L., M. Lu, L. Han, *The structure of even factors in claw-free graphs*, Discrete Mathematics **309** (2009) 2417-2423.
- [157] Zelinka, B., *Domestic numbers of cube graphs*, Math. Slovaca **32**, No.2, (1982) 117-119.
- [158] Zelinka, B., *Domestic number and bichromaticity of a graph*, Graph Theory Lagow, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, vol. **1018** (1983) 278-285.
- [159] Zelinka, B., *Domestic number and degrees of vertices of a graph*. Math. Slovaca **33**, No.2, (1983) 145-147.
- [160] Zelinka, B., *Total domestic number and degrees of vertices of a graph*. Math Slovaca **39**, No.1, (1989) 7-11.
- [161] Zelinka, B., *Connected domestic number of a graph*. Math. Slovaca **36**, No.4, (1986) 387-392.
- [162] Zelinka, B., *Domestic number of a graph and its variants* (extended abstract). Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity, Elsevier Science Publishers, (ed. J.Nešetřil and M. Fiedler editors); (1992).
- [163] Zelinka, B., *Total domestic number of Cacti*; Math. Slovaca **38**, No.3, (1988) 207-214.
- [164] Zelinka, B., *On domestic numbers of graphs*. Math. Slovaca **31**, No.1, (1981) 91-95.
- [165] Zelinka, B., *On k-domestic numbers of graphs*. Czechoslovak Mathematical Journal, **33**, 108 (1983), Praha.

- [166] Zelinka, B., *Some remarks on domatic numbers of graphs*. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 106 (1981), Praha.
- [167] Zelinka, B., *Regular totally domatically full graphs*, discrete mathematics **86** (1990) 71-79 .
- [168] Zelinka, B., *Bichromaticity and domatic number of a bipartite graph*. Časopis pro pěstování matematiky. Vydává Matematický ústav, Praha. Svazek 110* PRAHA 31.5.1985*ČÍSLO 2.
- [169] Zelinka, B., *Domatic number and linear arboricity of Cacti*. Math. Slovaca **36**, No.1, (1986) 49-54.