

N° d'ordre : 104/2017-C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari
Boumediene
Faculté de Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3ème cycle
(LMD)

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Equations aux dérivées partielles et applications

Par : Fatima Zohra GOFFI

Sujet

**Approximation de l'impédance d'une multicouche
mince contrastée pour le système de Maxwell
harmonique**

Soutenue publiquement le 29 Novembre 2017, devant le jury composé de :

M. Djamel E. TENIOU	Professeur, USTHB	Président
M. Keddour LEMRABET	Professeur, USTHB	Directeur de thèse
M. Sébastien TORDEUX	Maître de conférences, Univ de Pau	Co-directeur de thèse
M. Mohamed S. MOULAY	Professeur, USTHB	Examineur
M. Mohand MOUSSAOUI	Professeur, ENS KOUBA	Examineur
Mme. Leila RAHMANI	Professeur, Univ de Tizi-Ouzzou	Examinatrice
M. Aissa AIBECHE	Professeur, Univ de Sétif	Invité

*À la mémoire
des plus beaux grands-parents...*

Remerciements

Je tiens à exprimer tout premièrement, une reconnaissance particulière et sincère à mon directeur de thèse Monsieur Keddour LEMRABET, pour tous ses efforts fournis, pour sa patience, sa modestie et sa gentillesse. Il a toujours été présent aussi bien sur le plan professionnel qu'humain. Que ce travail soit un témoignage de ma profonde gratitude et de mon grand respect. Je le remercie infiniment.

Je remercie chaleureusement Monsieur Sébastien TORDEUX d'avoir accepté de diriger une partie de cette thèse. Je lui suis reconnaissante pour le temps qu'il m'a consacré. Ses conseils et remarques constructives m'ont beaucoup apporté. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour son invitation à Pau, où j'ai apprécié l'atmosphère de travail et passé un très bon moment au sein de l'équipe Magique3D.

Je souhaite remercier Monsieur Djamel-Eddine TENIOU pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse, ainsi que pour son aide et son soutien.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements à Madame Leila RAHMANI, Monsieur Mohamed Said Moulay et Monsieur Mohand MOUSSAOUI qui ont généreusement accepté d'être les examinateurs de cette thèse.

J'aimerais aussi remercier Monsieur Aissa AIBECHE d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur Toufik LAADJ pour ses conseils et sa disponibilité en tous moments.

Merci à tous les membres du laboratoire AMNEDP. L'ambiance conviviale durant les workshops passés, surtout les versions hors de l'USTHB, est inoubliable!

Merci à l'équipe Magique3D pour leur très bon accueil durant ma visite à Pau, et pour les discussions enrichissantes, pour les conseils sur les outils informatiques qui m'ont beaucoup aidée à progresser dans la rédaction de cette thèse. Et bien sur merci pour l'ambiance chaleureuse.

A tous les professeurs, qui de près ou bien de loin m'ont un jour enseignée, encouragée, soutenue, ou aidée... je dis MERCI BEAUCOUP.

Un grand merci s'adresse aux membres de ma famille et aux personnes avec lesquelles je partage des liens amicaux, les plus chers se reconnaîtront bien sur ! Merci d'être toujours derrière moi, merci de m'avoir soutenue, merci de m'avoir aidée... et surtout merci de m'avoir aimée.

Enfin, j'aimerais profiter de cette occasion pour m'adresser tout particulièrement à une personne très chère, pour laquelle je n'ai pas de mots afin d'exprimer ma profonde gratitude, mais tout ce que je peux lui dire c'est : Si j'étais musicienne, je te dédierai une composition musicale et je ne la jouerais que pour toi... Si j'étais poète, j'écrirais un poème à l'eau de l'or, et je le rajouterais aux sept Mu'allaqât, afin que mon amour pour toi reste éternel... Ta fille a choisi de faire des mathématiques, où elle ne sait que calculer pour s'exprimer... Elle a essayé de chercher un calcul exact, mais malheureusement, ce n'était pas possible. Elle a essayé de chercher une approximation, le seul terme qu'elle a pu trouver était de l'ordre zéro, donné par l'infini en exponentiel !

Table des matières

Table des symboles	xii
Table des figures	xiii
Introduction générale	xv
I Préliminaires et résultats d'existence et d'unicité	1
1 Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels	3
1.1 Introduction	3
1.2 Notions de géométrie différentielle intrinsèque	4
1.2.1 Paramétrisation d'une surface	4
1.2.2 Paramétrisation d'une couche mince	6
1.2.3 Paramétrisation d'une multicouche	7
1.2.4 Opérateurs différentiels sur une surface Γ	8
1.2.5 Opérateurs différentiels sur une surface Γ^z	10
1.3 Espaces fonctionnels	15
1.3.1 Espaces fonctionnels standards	15
1.3.2 Espaces de traces	16
1.4 Différents types de traces	20
1.5 Théorèmes de traces	20
1.6 Décomposition de Helmholtz de frontière	21
1.7 Alternative de Fredholm	22
2 Équations fondamentales de l'électromagnétisme	25
2.1 Introduction	25
2.2 Équations de Maxwell	26
2.3 Équations de Maxwell en régime harmonique	28
2.4 Conditions de transmissions entre deux milieux	28
2.5 Condition de radiation à l'infini	30
2.6 Adimensionnement des équations de Maxwell	30
2.6.1 Cadre de l'adimensionnement	30
2.6.2 Système de Maxwell adimensionné	32

Table des matières

2.6.3	Conditions de transmission adimensionnées entre deux milieux	33
2.7	Principe de prolongement unique pour les équations de Maxwell	34
3	Existence et unicité de la solution du système de Maxwell	37
3.1	Introduction	37
3.2	Description du problème physique considéré	38
3.2.1	Hypothèses géométriques	38
3.2.2	Hypothèses physiques	38
3.2.3	Système d'équations	40
3.2.4	Cadre fonctionnel	41
3.3	Décomposition modale de la solution sortante de Maxwell à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R	42
3.3.1	Identification des coefficients $e_{n,m}^t$ et $e_{n,m}^x$	47
3.4	Décomposition modale de l'opérateur d'impédance	48
3.4.1	Définitions	48
3.5	Système de Maxwell d'ordre deux à l'intérieur d'une boule \mathcal{B}_R	52
3.6	Formulation variationnelle	53
3.7	Existence et unicité de la solution	55
3.7.1	Traitement de la première forme sesquilinéaire	60
3.7.2	Traitement de la deuxième forme sesquilinéaire	63
3.7.3	Unicité de la solution du problème variationnel couplé en utilisant le principe de prolongement unique	65
3.7.4	Conclusion	67
3.8	Unicité de la solution sortante du problème de Maxwell extérieur par le lemme de Rellich	68
II	Calcul de l'opérateur d'impédance	71
4	Système de Maxwell homogène dans une couche mince sous forme d'un système d'EDA du 1^{er} ordre	73
4.1	Introduction	73
4.2	Équations abstraites	74
4.2.1	Calcul de l'opérateur A_z	75
4.2.2	Calcul de l'opérateur B_z	76
4.3	Calcul des dérivées en $z = 0$	77
4.3.1	Dérivées d'ordre un	77
4.3.2	Dérivées d'ordre deux	78
5	Transfer and approximation of the impedance in planar geometry	81
5.1	Introduction	82
5.2	Maxwell system	83

5.3	Problem statement	85
5.3.1	Impedance operator	85
5.4	Transfer of the impedance condition through a slab	86
5.5	Application for a single thin layer	89
5.6	Application for three contrasted thin layers	91
5.6.1	Notation	91
5.6.2	Impedance boundary condition for three thin layers	92
6	Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane	97
6.1	Introduction	97
6.2	Présentation du problème	98
6.2.1	Modélisation de l'obstacle	98
6.2.2	Système de Maxwell harmonique	99
6.2.3	Les conditions aux bords	99
6.2.4	Système d'équations abstraites	100
6.3	Description de l'approche utilisée	100
6.4	Construction de l'opérateur d'impédance	101
6.5	Approximation de l'opérateur d'impédance	104
6.5.1	Condition d'impédance d'ordre 0	105
6.5.2	Condition d'impédance d'ordre 1	106
6.5.3	Condition d'impédance d'ordre 2	107
6.5.4	Condition d'impédance d'ordre 3	109
Annexes		117
A Solution de l'équation de Helmholtz		119
B Rappel de résultats de théorie spectrale		121
Bibliographie		123

Table des matières

Table des symboles

$[\cdot]$	Le saut à la traversée d'une surface
δ	Épaisseur d'une couche mince
Δ_Γ	Laplace-Beltrami scalaire
Γ_j^δ	Surface séparatrice entre deux couches minces Ω_j^δ et Ω_{j+1}^δ
Γ	Surface régulière
Γ^δ	Surface séparatrice entre une couche mince et un conducteur parfait
Γ_R	Une sphère de rayon R , le bord de la boule \mathcal{B}_R
$\Im(\cdot)$	La partie imaginaire d'un complexe
κ	Le nombre d'onde
λ	La longueur d'onde
$\{\tau^1(m), \tau^2(m)\}$	La base duale du plan tangent au point m
$\{\tau_1(m), \tau_2(m)\}$	La base du plan tangent au point m
\mathbf{B}	L'induction magnétique
\mathbf{D}	L'induction électrique ou bien le déplacement électrique
\mathbf{E}	Le champ électrique
\mathbf{f}	Densité de force
\mathbf{H}	Le champ magnétique
\mathbf{j}	Densité de courant
\mathbf{j}_Σ	Densité surfacique de courant
\mathbf{n}	La normale unitaire
$\mathbf{N}(T)$	Le noyau d'un opérateur T
$\mathbf{R}(T)$	L'image d'un opérateur T
$\mathbf{v}_\mathbf{n}$	La composante normale d'un champ de vecteur \mathbf{v}
\mathbf{v}_t	La composante tangentielle d'un champ de vecteur \mathbf{v}

Table des matières

\mathbf{x}	Variable spatiale (dans \mathbb{R}^3)
\mathcal{B}'_R	Complémentaire de la boule \mathcal{B}_R
\mathcal{B}_R	Boule de centre \mathbf{O} et de rayon R
\mathcal{C}	L'opérateur de courbure
\mathcal{G}	La courbure de Gauss
\mathcal{H}	La courbure moyenne
A	Ampère
C	Coulomb
F	Farad
Hz	Hertz
H	Henry
kg	Kilogramme
m	Mètre
rad	Radian
s	Seconde
T	Tesla
V	Volte
μ	La perméabilité magnétique
μ_0	La perméabilité du vide
μ_r	La perméabilité relative
∇_Γ	Le gradient tangentiel
Ω_R^δ	Couronne de frontières intérieur Γ^δ et extérieur Γ_R
Ω^{ext}	Un domaine extérieur non borné
ω	Pulsation
Ω^δ	Couche mince dans le problème classique. Dans le problème avec multicouche cette notation représente le domaine non borné constitué de $\Omega^{ext} \cup \Omega_j^\delta, j = 1, \dots, N$
Ω_j^δ	La $j^{\text{ème}}$ couche mince dans une multicouche, pour $j = 1, \dots, N$
Ω_R	Couronne de frontières intérieur Γ et extérieur Γ_R
div_Γ	La divergence tangentielle
\mathbf{x}	

rot_Γ	Rotationnel surfacique scalaire
$\overrightarrow{\Delta}_\Gamma$	Laplace-Beltrami vectoriel
$\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma$ ou $\nabla_\Gamma \times$	Rotationnel surfacique vectoriel
Π_m	La projection orthogonale d'un champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 sur le plan tangent d'une surface Γ au point m
$\Re(\cdot)$	La partie réelle d'un complexe
Σ	Surface séparatrice entre deux milieux Ω_1 et Ω_2
\times	Produit vectoriel
ε	La permittivité électrique
ε_0	La permittivité du vide
ε_r	La permittivité relative
ρ	Densité de charge
ρ_Σ	Densité surfacique de charge
$ \cdot $	Norme dans \mathbb{R}^3
c	La vitesse de l'onde électromagnétique
D	Domaine borné simplement connexe, représentant un obstacle parfaitement conducteur
f	Fréquence
$g^{\alpha\beta}$	La matrice inverse de $G_{\alpha\beta}$
$G_{\alpha\beta}$	Métrie riemannienne sur une surface Γ
$h_n^{(1)}$	La fonctions de Hankel sphérique de première espèce d'ordre n
J_n	La fonction de Bessel sphérique d'ordre n
q	Charge électrique
t	Variable temporelle
$T_m(\Gamma)$	Le plan tangent à une surface Γ au point m
$Y_{n,m}$	Les harmoniques sphériques angulaires
Y_n	La fonction de Bessel sphérique d'ordre n
A,B	Opérateurs différentiels de surface
EDA	Equations Différentielles Abstraites

Table des matières

Table des figures

1	Modèle de diffraction d'une onde électromagnétique complet et modèle de diffraction avec une condition d'impédance.	xv
1.1	Carte locale.	4
1.2	Paramétrisation d'une couche mince.	7
2.1	Domaine de propagation d'une onde électromagnétique dans deux milieux différents.	29
2.2	Illustration du domaine pour le principe de prolongement unique.	35
3.1	Géométrie du problème de diffraction par un obstacle métallique dans un domaine non borné. L'obstacle métallique est recouvert par des substrats diélectriques différents. C'est un exemple contenant trois couches minces diélectriques.	39
3.2	Géométrie du problème de propagation d'une onde électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R	43
3.3	Géométrie du problème de diffraction par un obstacle métallique sphérique dans un domaine borné. L'obstacle métallique est recouvert par des substrats diélectriques différents. C'est un modèle qui contient trois couches minces de diélectriques.	53
5.1	Configuration of the domain for the general case.	84
5.2	Geometry of the planar metallic obstacle coated with one thin layer of dielectric substrate.	89
5.3	Geometry of the planar metallic obstacle coated with three thin layers of dielectric substrates.	91
6.1	Paramétrisation d'une multicouche.	99

Table des figures

Introduction générale

Origine du problème

En théorie de la diffraction des ondes électromagnétiques ou bien acoustiques, la géométrie de l'obstacle joue un rôle très important. Dans la majorité des cas, cette géométrie comporte des parties minces par rapport aux autres. Ces dernières peuvent être des fentes (voir par exemple [31, 33, 35]), ou bien des couches minces couvrant l'obstacle (voir par exemple [12, 14, 49, 58]) auxquelles nous nous intéresserons dans cette thèse.

Du point de vue mathématique, la résolution numérique des problèmes à couches minces fait apparaître des instabilités liées à la nature du domaine. Cette difficulté provient de la discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la partie fine de l'obstacle. Plus précisément, le maillage contient un nombre très grand d'éléments, ce qui conduit à des calculs longs et peu précis. L'idée adoptée pour surmonter cette difficulté est de remplacer le problème initial par un problème équivalent ou bien approché qui ne fait plus intervenir de couche mince. Voir Figure 1.

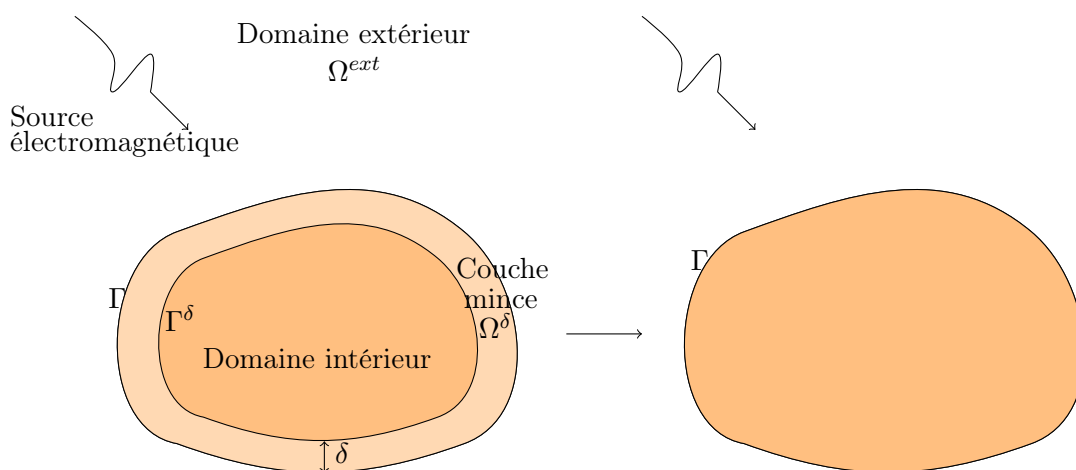


FIGURE 1 – Modèle de diffraction d'une onde électromagnétique complet et modèle de diffraction avec une condition d'impédance.

Le modèle de diffraction complet est donné à l'aide du problème de transmis-

Chapitre 0. Introduction générale

sion (défini sur $\Omega^{ext} \cup \Omega^\delta$, Figure 1)

$$(PT) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations dans le domaine extérieur } \Omega^{ext} \\ \text{Equations dans la couche mince } \Omega^\delta \\ \text{Conditions de transmission sur } \Gamma \\ \text{Condition aux limites sur } \Gamma^\delta \\ \text{Condition de radiation à l'infini.} \end{array} \right.$$

Le nouveau modèle de diffraction équivalent ou bien approché (défini sur Ω^{ext} , Figure 1) permet de remplacer les équations définies dans la couche mince, ainsi que les conditions de transmission sur Γ et les conditions aux limites sur Γ^δ par une condition dite **condition d'impédance**. Le nouveau problème de diffraction s'écrit alors

$$(PI) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations dans le domaine extérieur } \Omega^{ext} \\ \text{Condition d'impédance sur } \Gamma \\ \text{Condition de radiation à l'infini.} \end{array} \right.$$

La condition d'impédance dépend fortement du paramètre δ qui représente l'épaisseur de la couche mince. Elle modélise l'effet de la couche mince sur le domaine extérieur. En plus, elle est donnée par l'intermédiaire d'un opérateur surfacique généralement non-local¹ et non explicite, dit : opérateur d'impédance, ou opérateur de Steklov-Poincaré, ou opérateur de Calderon, ou bien condition de Leontovich... En acoustique, ce dernier couple la pression à sa dérivée normale. En électromagnétisme, il couple les composantes tangentielles du champ électrique aux composantes tangentielles du champ magnétique.

La condition d'impédance représente aussi le lien entre les données de Cauchy sur Γ pour la solution du problème sur la couche mince

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations dans la couche mince } \Omega^\delta \\ \text{Condition aux limites sur } \Gamma^\delta \\ \text{Une donnée de Cauchy fixée sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

La résolution de ce problème permet le calcul de l'autre donnée de Cauchy. Les conditions de transmission qui sont données par la continuité des données de Cauchy sur Γ permettent alors la construction de la condition d'impédance.

Généralement, nous ne savons pas résoudre exactement le problème (Q). Dans ce cas, nous nous contentons de trouver une condition d'impédance approchée par des techniques d'analyse asymptotique et, nous résolvons un problème d'impédance approché $(PI)^*$, dont la solution est proche de celle du problème initial. C'est dans ce sens que nous parlons de problème de diffraction approché. Pour des géométries particulières (les cas plan et sphérique) une condition d'impédance exacte est obtenue par des techniques d'analyse de Fourier

1. Un opérateur est dit non-local s'il augmente le support des fonction auxquelles il est appliqué.

[24], ou bien par les méthodes de séparation de variables et les fonctions spéciales.

Les champs d'application sont nombreux. Nous en citons, non exclusivement, quelques uns

- ★ en biologie : nous avons par exemple les travaux de Péron, Poignard, Dular, Duruflé et d'autres [18, 46, 47, 49, 50], où ils se sont intéressés à l'étude des champs électromagnétiques dans une cellule biologique plongée dans un milieu ambiant. La cellule est composée d'un cytoplasme entouré d'une fine membrane. L'étude de ce type de problème est de grande importance en médecine. Notamment, en diagnostique (imagerie médicale) et en oncologie (les traitements par électrochimiothérapie).
- ★ système de l'élasticité : corps élastique recouvert d'une coque mince de caractéristiques physiques différentes, voir Lemrabet et Abdalaoui [1].
- ★ problèmes inverses : une condition d'impédance sert à diminuer le nombre d'inconnues, cela revient au fait que nous pouvons passer d'un modèle volumique à un modèle surfacique. Cela aide aussi à diminuer le caractère mal posé du problème. Voir par exemple Haddar et Chaulet [11, 14].
- ★ en industrie : les applications en détection d'objets enfouis, la furtivité radar, les télécommunications et d'autres... ont inspiré la majorité des travaux effectués sur les domaines à couches minces. La littérature au sujet de ce phénomène est abondante. Nous pouvons citer par exemple [3, 8, 9, 17, 27, 30, 48, 52, 53]).

A la charnière des dix-neuvième et vingtième siècles, la condition d'impédance a été introduite pour des raisons liées à l'ingénierie électrique [59]. Dans les années 40 du siècle passé, Leontovich a introduit pour la première fois la forme que nous connaissons aujourd'hui pour la condition d'impédance [39, 40]. Son objectif était de modéliser la pénétration d'une onde dans un obstacle métallique imparfaitement conducteur. Par la suite, il a été démontré que cette condition modélise d'autres situations, telles qu'un conducteur parfait recouvert par une couche mince de diélectrique (voir par exemple [17, 27, 30]), ou bien un conducteur parfait avec une surface rugueuse (nous pouvons citer [28, 55]).

Quelques aperçus bibliographiques pour le système de Maxwell harmonique en dimension 3

Dans le cas d'un conducteur parfait recouvert par un substrat diélectrique, plusieurs travaux ont été effectués dans le cadre du calcul d'une approximation de la condition d'impédance. Elle s'écrit

$$\mathbf{E}_T + Z_\delta^{\text{eff}} \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \quad (0.1)$$

Chapitre 0. Introduction générale

Le terme Z_δ^{eff} est l'opérateur d'impédance, liant la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} à celle du champ magnétique \mathbf{H} . L'interface avec le domaine extérieur de propagation de l'onde électromagnétique est notée Γ (voir Figure 1).

Engquist et Nédélec [19] en 1993 ont proposé l'utilisation d'opérateurs différentiels tangentiels pour écrire une approximation à l'ordre un de l'opérateur d'impédance. Leur construction est basée sur un développement de Taylor, qui sert à transférer la condition au bord définie sur Γ^δ à la surface Γ , avec

$$Z_\delta^{\text{eff}} = i\kappa\mu\delta(1 + 1/(\kappa^2\varepsilon)\nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma). \quad (0.2)$$

Les caractéristiques physiques du substrat diélectrique sont données par la permittivité électrique relative ε et la perméabilité magnétique relative μ . Le nombre d'onde est donné par κ , il est supposé réel positif. Les opérateurs ∇_Γ et div_Γ sont respectivement le gradient surfacique et la divergence surfacique sur Γ .

En 2002, Haddar et Joly [26] ont introduit des termes de courbures pour améliorer la précision jusqu'à l'ordre deux. L'opérateur d'impédance approché qu'ils ont obtenu est de la forme

$$Z_\delta^{\text{eff}} = i\kappa\mu\delta \left(\begin{array}{c} 1 - \delta(\mathcal{C} - \mathcal{H}) + \\ 1/(\kappa^2\varepsilon)\nabla_\Gamma(1 + \delta\mathcal{H}) \text{div}_\Gamma \end{array} \right), \quad (0.3)$$

avec \mathcal{C} et \mathcal{H} sont, respectivement, l'opérateur de courbure et de courbure moyenne de la surface Γ .

En 2008, Bendali et Lemrabet [9] ont obtenu une condition d'impédance d'ordre trois donnée par

$$\begin{aligned} Z_\delta^{\text{eff}} = i\kappa\mu\delta & \left(\left(\begin{array}{c} 1 + \delta(\mathcal{C} - \mathcal{H}) + \\ \delta^2 2/3 (\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \end{array} \right) \right. \\ & + 1/\kappa_d^2 \nabla_\Gamma \left(\begin{array}{c} 1 + \delta\mathcal{H} \\ +\delta^2/3 (4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \end{array} \right) \text{div}_\Gamma \\ & \left. + \delta^2/3 \left(\begin{array}{c} \kappa_d^2(1 + 1/\kappa_d^2 \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma)^2 \\ -\nabla_\Gamma \times \text{curl}_\Gamma \end{array} \right) \right), \end{aligned} \quad (0.4)$$

avec $\nabla_\Gamma \times = -\mathbf{n} \times \nabla_\Gamma$ et $\text{curl}_\Gamma = -\text{div}_\Gamma \mathbf{n} \times$ le rotationnel surfacique vectoriel et le rotationnel surfacique scalaire, respectivement, de la surface Γ .

Cette dernière formule obtenue pour l'opérateur d'impédance contient un opérateur différentiel d'ordre quatre, ce qui n'est pas souhaitable du point de vue numérique. En 2009, les mêmes chercheurs Bendali et Lemrabet avec leurs co-auteurs [10] ont proposé une condition d'impédance à l'ordre trois de type Padé, donnée par

$$\begin{aligned} E_T + ik\mu\delta(\dots)(\mathbf{n} \times H)|_\Gamma &= 0, \\ (\dots) &= \left(\begin{array}{c} (1 - \frac{\delta^2}{3}\Delta)^{-1} \mathcal{P}_\delta \\ + \frac{1}{\kappa_d^2} \nabla_\Gamma(1 - \frac{\delta^2}{3}\Delta)^{-1} a_\delta \text{div}_\Gamma \end{array} \right), \end{aligned} \quad (0.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\delta &= 1 - \delta(\mathcal{C} - \mathcal{H}) + \\ &\quad \frac{\delta^2}{3}(\kappa_d^2 + 2(\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})), \\ a_\delta &= 1 + \delta\mathcal{H} + \frac{\delta^2}{3}(\kappa_d^2 + 4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Motivation et objectifs

Le revêtement du conducteur parfait est fait pour deux objectifs principaux. Le premier est pour le protéger de toute dégradation provoquée par la nature et le deuxième pour diminuer son rayonnement. Pour une meilleure fonctionnalité de ce revêtement, dans certains cas, nous avons besoin de plusieurs couches minces contrastées. A notre connaissance, les travaux effectués sont tous consacrés à l'étude d'un obstacle parfaitement conducteur recouvert par une seule couche mince de substrat diélectrique. Notre étude dans cette thèse représente une continuation de ce qui est présenté comme résultats dans le cadre de la modélisation d'une condition d'impédance approchée. La nouveauté est de considérer un revêtement constitué de plusieurs couches minces superposées, ces dernières ayant des caractéristiques physiques différentes.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la diffraction d'ondes électromagnétiques ayant une dépendance harmonique en temps par un obstacle comportant une multicouche dans \mathbb{R}^3 . Nous cherchons à atteindre deux objectifs : dans une partie théorique nous voudrions présenter le caractère bien posé du système de Maxwell dans le domaine considéré. La formulation variationnelle est non coercive, l'alternative de Fredholm sera donc utilisée. Puis, dans une partie application, nous voudrions modéliser des approximations de la condition d'impédance jusqu'à l'ordre trois dans le cas de deux types de géométries

(i) **Un obstacle métallique de géométrie plane :**

Une condition d'impédance explicite sera donnée, puis à l'aide d'un développement limité nous donnerons une approximation à l'ordre trois.

(ii) **Un obstacle métallique de géométrie non plane régulière :**

Une approximation jusqu'à l'ordre trois de l'opérateur d'impédance sera donnée en utilisant des outils de la géométrie différentielle intrinsèque des couches minces. Par la suite un développement de Taylor sera appliqué à la condition de type conducteur parfait.

Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en deux parties. La première partie comporte les outils de base dont nous avons besoin tout au long de ce document et un rappel sur les équations régissant la propagation des ondes électromagnétiques. Nous montrons notamment le caractère bien posé du système de Maxwell dans un domaine multicouche. La deuxième partie est consacrée à la modélisation des conditions

Chapitre 0. Introduction générale

d'impédance à l'ordre trois pour des couches minces planes ou courbes, en utilisant des techniques propres à la nature de chaque structure.

Partie I : Préliminaires et résultats d'existence et d'unicité Cette partie représente une plate-forme pour tout le reste de ce document. Dans le chapitre 1, nous donnons quelques notions essentielles de géométrie différentielle intrinsèque, ces dernières nous permettent de paramétrer les surfaces et les couches minces représentant le revêtement. Nous définissons les espaces fonctionnels nécessaires dans notre cadre d'étude, les différentes notions de traces et la décomposition de Helmholtz. Dans le Chapitre 2, nous rappelons les équations de Maxwell en régime temporel puis en régime harmonique. Les conditions aux limites au bord d'un obstacle, les conditions de transmission entre deux milieux différents et la condition de radiation à l'infini (pour tenir compte du caractère non borné du domaine) permettant de compléter le système d'équations sont données par la suite. Nous terminons cette partie par le Chapitre 3, dans lequel nous décrivons les géométries et nous précisons le problème aux limites considéré dans cette thèse. Nous montrons ensuite à l'aide du théorème de prolongement unique et de l'alternative de Fredholm que ce problème est bien posé. Cette dernière permet de déduire l'existence d'une solution à partir de son unicité. L'approche suivie est celle de Monk [43], où le problème est tout d'abord posé en domaine dont la frontière extérieure est une sphère de rayon $R > 0$. La condition d'onde sortante est alors écrite comme une condition d'impédance. Une étude précise de cet opérateur permet alors de déduire l'unicité.

Partie II : Calcul de l'opérateur d'impédance Nous avons divisé cette deuxième partie en trois chapitres, où dans le premier, nous donnons quelques notions introductives et dans les deux derniers des applications. Dans le Chapitre 4 nous décrivons le système de Maxwell comme un système différentiel d'ordre un par rapport à la variable normale et à coefficients opérateurs différentiels dans les directions tangentielles. Nous obtenons ainsi une deuxième formulation de notre problème, dite système d'équations différentielles abstraites. Une justification détaillée des coefficients de ce dernier système est faite. Par la suite, nous donnons quelques calculs détaillés des dérivées d'ordre un et deux de ces coefficients. Ils sont utiles lors de l'application d'un développement limité de la condition de conducteur parfait. Dans le Chapitre 5, nous considérons un obstacle de géométrie plane recouvert par une multicouche de substrats diélectriques. Dans un premier temps, une transformée de Fourier partielle est utilisée pour obtenir une condition d'impédance exacte dans le cas d'un revêtement constitué d'une seule couche mince. Cette dernière transfère la condition au bord d'une frontière du revêtement à l'autre frontière. A l'aide d'un développement limité nous donnons des approximations de l'opérateur d'impédance jusqu'à l'ordre trois. Par la suite, nous généralisons le résultat obtenu à une multicouche, en utilisant les conditions de transmission. Dans le Chapitre 6, nous nous intéressons à un obstacle

de géométrie courbe régulière recouvert par une multicouche. Nous écrivons le système de Maxwell sous la forme d'un système d'EDA (Equations Différentielles Abstraites) du premier ordre. L'objectif de cette étude est de construire une approximation de l'opérateur d'impédance à l'ordre trois. L'approche utilisée est celle de Bendali et *al.* [10], cette dernière consiste à appliquer un développement de Taylor sur la condition conducteur parfait, elle nous permettra d'obtenir une approximation de l'opérateur d'impédance de type Padé.

Publications

Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal *Asymptotic Analysis*

[24] F. Z. Goffi, K. Lemrabet and T. Laadj. Transfer and approximation of the impedance for time-harmonic Maxwell's system in a planar domain with thin contrasted multi-layers. *Asymptotic Analysis*, 101(1-2) : 1–15, 2017.

En préparation, nous avons deux autres travaux

[23] F. Z. Goffi and K. Lemrabet. Approximation of the impedance for time-harmonic Maxwell's system in non planar domain with thin contrasted multi-layers. *En préparation*.

[25] F. Z. Goffi and S. Tordeux. Well-posedness problem for time-harmonic Maxwell's system in a domain with thin contrasted multi-layers. *En préparation*.

Conférences et workshops

Le présent travail sur les problèmes de couches minces a fait l'objet de plusieurs communications

[24] a été présenté à :

- ★ TAM-TAM 2015 (le 7^{ème} colloque sur les Tendances des Applications en Mathématiques Tunisie Algérie Maroc TAM-TAM) à Tanger, Maroc.
- ★ LICMA'15 (Lebanese International Conference on Mathematics and Applications) Beyrouth, Liban.
- ★ Un poster a été présenté au « V^{ème} colloque EDP-Normandie 2015 », Le Havre, France.

[23] a été présenté à :

- ★ ICAAM 2016 (International Conference on Advances in Applied Mathematics) à Monastir, Tunisie.
- ★ Un poster a été présenté à « Fourth workshop on thin structures », Naples, Italie, 2016.

Chapitre 0. Introduction générale

★ Un poster a été présenté au « Deuxième Workshop Algéro-français EDP et Applications », Tlemcen, Algérie, 2017.

De plus, des communications au workshop annuel organisé par le laboratoire AM-NEDP² dans ses 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} versions en 2014, 2015 et 2016, respectivement.

2. Laboratoire d'Analyse Mathématique et Numérique des Equations aux Dérivées Partielles.

Première partie

Préliminaires et résultats d'existence et d'unicité

Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Notions de géométrie différentielle intrinsèque	4
1.2.1	Paramétrisation d'une surface	4
1.2.2	Paramétrisation d'une couche mince	6
1.2.3	Paramétrisation d'une multicouche	7
1.2.4	Opérateurs différentiels sur une surface Γ	8
1.2.5	Opérateurs différentiels sur une surface Γ^z	10
1.3	Espaces fonctionnels	15
1.3.1	Espaces fonctionnels standards	15
1.3.2	Espaces de traces	16
1.4	Différents types de traces	20
1.5	Théorèmes de traces	20
1.6	Décomposition de Helmholtz de frontière	21
1.7	Alternative de Fredholm	22

1.1 Introduction

Le Chapitre 1 est consacré à quelques rappels, définitions et résultats utilisés dans tout le reste de ce manuscrit. Nous commençons par donner des notions de géométrie différentielle intrinsèque, ces dernières nous permettent de décrire une surface ou bien une couche mince en donnant leurs paramétrisations. Par la suite, nous rappelons les définitions des opérateurs différentiels tangentiels intervenant dans l'écriture de l'opérateur d'impédance. Nous donnons ensuite un bref aperçu sur les espaces fonctionnels standards et de surface nécessaires pour démontrer le caractère bien posé de notre problème. Puis, nous définissons les différents types de traces venant des formules d'intégrations par partie. Nous donnons aussi les théorèmes de traces normale et tangentielles. Dans l'avant dernière section, nous

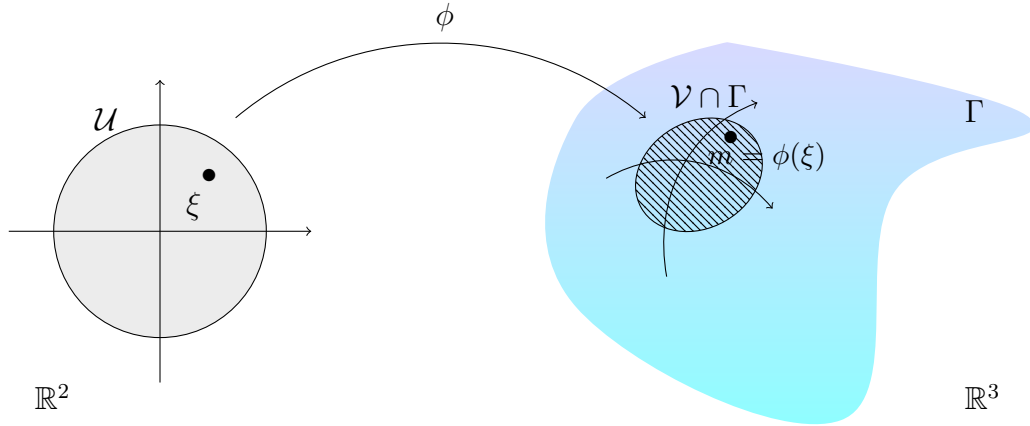


FIGURE 1.1 – Carte locale.

rappelons la décomposition de Helmholtz. Cette dernière nous permet de décomposer les espaces de Sobolev de frontière. Finalement, nous rappelons l'Alternative de Fredholm utilisée pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour le système de Maxwell.

Ce chapitre est basé essentiellement sur les livres de Monk [43] et de Nédélec [44].

1.2 Notions de géométrie différentielle intrinsèque

1.2.1 Paramétrisation d'une surface

Nous considérons une surface régulière Γ . Localement, pour $m \in \Gamma$, nous définissons la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (\xi^1, \xi^2) &\longrightarrow m = \phi(\xi^1, \xi^2), \end{aligned}$$

où \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^2 , \mathcal{V} est un ouvert de \mathbb{R}^3 contenant m et ϕ une application de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant :

- (i) ϕ est un homéomorphisme de \mathcal{U} dans $\mathcal{V} \cap \Gamma$.
- (ii) pour (ξ^1, ξ^2) un système de coordonnées dans \mathcal{U} , pour tout $\xi \in \mathcal{U}$, la famille $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1}(\xi), \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}(\xi) \right\}$ est libre.

Remarque 1.1 *Le triplet $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ est dit carte locale (voir Figure 1.1), représentant Γ au voisinage du point m . Nous attirons l'attention du lecteur que toutes les définitions dans cette partie sont indépendantes du choix de la carte locale $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ ou bien de l'atlas $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)$ de Γ .*

1.2. Notions de géométrie différentielle intrinsèque

Le plan tangent à Γ en m est noté $T_m(\Gamma)$, c'est l'espace vectoriel engendré par $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1}(\xi), \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}(\xi) \right\}$, en écriture abrégée, nous écrivons la base du plan tangent à Γ au point m

$$\tau_\alpha(m) := \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\alpha}(\xi^1, \xi^2), \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.1)$$

Nous définissons la normale unitaire à Γ au point m par

$$\mathbf{n}_m = \frac{\tau_1(m) \times \tau_2(m)}{|\tau_1(m) \times \tau_2(m)|}, \quad (1.2)$$

avec \times et $|\cdot|$ désignant le produit vectoriel et la norme dans \mathbb{R}^3 , respectivement.

Sur une surface Γ , nous posons la métrique $G_{\alpha\beta}$ définie par le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 comme suit

$$G_{\alpha\beta}(m) = \tau_\alpha(m) \cdot \tau_\beta(m), \quad \forall m \in \Gamma, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (1.3)$$

La base $\{\tau_1(m), \tau_2(m)\}$ du plan tangent $T_m(\Gamma)$ n'est pas orthogonale en général. Nous définissons alors la base duale $\{\tau^1(m), \tau^2(m)\}$ du plan tangent par

$$\tau^\alpha(m) = g^{\alpha\beta}(m) \tau_\beta(m), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (1.4)$$

où $g^{\alpha\beta}(m)$ est la matrice inverse de $G_{\alpha\beta}(m)$.

Opérateurs de courbure

Pour décrire la géométrie de la surface Γ , nous définissons les opérateurs

- \mathcal{C} : l'opérateur de courbure, défini par

$$\mathcal{C} = \nabla \mathbf{n}, \quad (1.5)$$

l'opérateur ∇ représente le gradient. En utilisant la base locale du plan tangent sur laquelle l'opérateur \mathcal{C} est diagonal, nous écrivons $\mathcal{C}\tau_1 = c_1\tau_1$ et $\mathcal{C}\tau_2 = c_2\tau_2$. Les valeurs propres c_1 et c_2 , de l'opérateur de courbure, sont appelées les courbures principales de la surface Γ .

- \mathcal{H} : la courbure moyenne, définie par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{n} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathcal{C}, \quad (1.6)$$

l'opérateur div représente la divergence, et tr est la trace.

- \mathcal{G} : la courbure de Gauss, définie par

$$\mathcal{G} = \det \mathcal{C}, \quad (1.7)$$

où \det représente le déterminant.

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

Décomposition d'un champ de vecteur

Pour \mathbf{v} un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^3 , nous pouvons décomposer ce dernier de la manière suivante :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n \mathbf{n}, \quad (1.8)$$

avec $\mathbf{v}_t = \Pi_m \mathbf{v}$ la composante tangentielle de \mathbf{v} , Π_m étant la projection orthogonale d'un champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 sur le plan tangent $T_m(\Gamma)$ au point m , et $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ la composante normale de \mathbf{v} .

1.2.2 Paramétrisation d'une couche mince

Soit Ω^{ext} un domaine extérieur non borné, nous notons par Γ sa frontière régulière. Nous définissons la couche mince Ω^δ d'épaisseur uniforme δ par

$$\Omega^\delta = \{ \mathbf{x} \notin \Omega^{ext}; \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) < \delta \}, \quad \delta > 0.$$

Le domaine intérieur est noté D , nous définissons l'interface entre Ω^δ et D par

$$\Gamma^\delta = \{ \mathbf{x} \notin \Omega^{ext}; \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) = \delta \}. \quad (1.9)$$

Le paramètre δ décrit l'épaisseur de la couche mince, il est supposé petit par rapport aux autres dimensions du domaine considéré, $\text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma)$ est la distance entre le point \mathbf{x} et la surface Γ . La normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω^δ est notée \mathbf{n} .

Remarque 1.2 Grâce à la projection de tout point \mathbf{x} dans Ω^δ sur la surface Γ , nous pouvons définir une paramétrisation de Ω^δ .

Nous supposons que $m = \mathcal{P}(\mathbf{x})$, $m \in \Gamma$, tel que \mathcal{P} représente l'application projection du point \mathbf{x} sur la surface Γ , pour tout $z \in]-\delta, 0[$ nous pouvons écrire \mathbf{x} comme suit

$$\mathbf{x} = m + z \mathbf{n}_m, \quad (1.10)$$

où \mathbf{n}_m est la normale à Γ au point m . Nous pouvons également écrire Ω^δ de la manière suivante

$$\Omega^\delta = \bigcup_z \Gamma^z, \quad -\delta < z < 0, \quad (1.11)$$

où Γ^z est la surface parallèle à Γ (voir Figure 1.2), définie par

$$\Gamma^z = \{ \mathbf{x} \in \Omega^\delta, \mathbf{x} = m + z \mathbf{n}_m, m \in \Gamma \}. \quad (1.12)$$

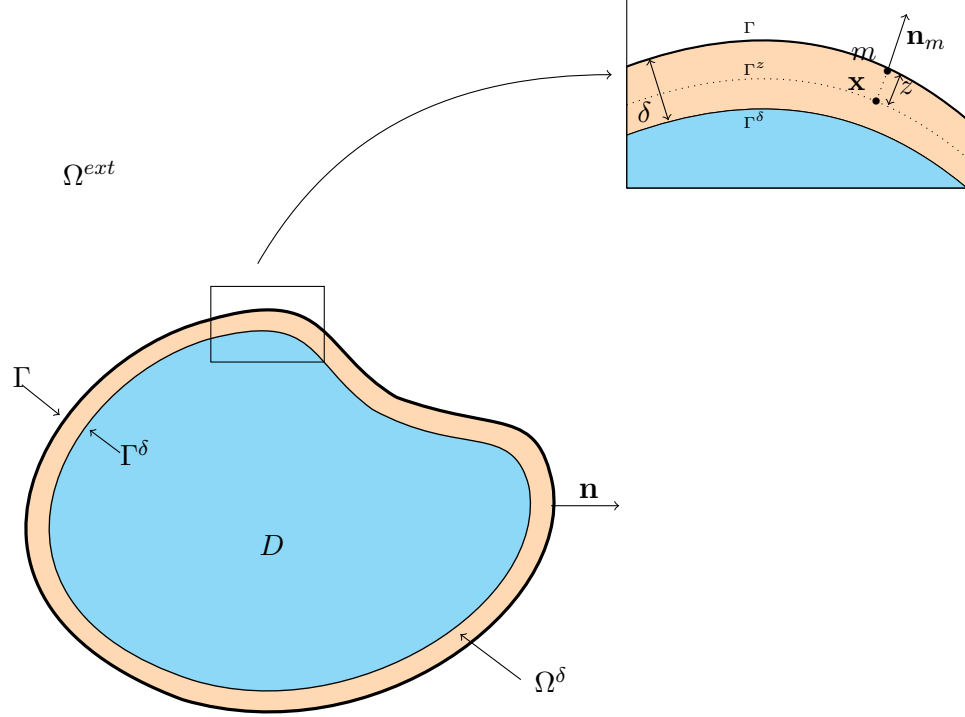


FIGURE 1.2 – Paramétrisation d'une couche mince.

1.2.3 Paramétrisation d'une multicouche

Dans le cas d'une multicouche constituée par la superposition de N couches minces Ω_l^δ , $l = 1, \dots, N$; chacune d'elles est d'une épaisseur $\delta_l = \alpha_l \delta$, tel que $\sum_{l=1}^N \alpha_l = 1$. Nous notons par Γ_l^δ , $l = 1, \dots, N-1$ les surfaces séparant les couches minces Ω_l^δ . En se basant sur la paramétrisation d'une seule couche mince définie dans le paragraphe précédent, nous avons cette paramétrisation

$$\Omega_l^\delta = \bigcup_z \Gamma^z, \quad z \in \left] -\sum_{j=1}^{j=l} \delta_j, -\sum_{j=1}^{j=l-1} \delta_j \right[, \quad l = 1, \dots, N, \quad (1.13)$$

avec Γ^z définie par

$$\Gamma^z = \{ \mathbf{x} \in \Omega_l^\delta, \mathbf{x} = m + z \mathbf{n}_m, m \in \Gamma_l^\delta, l = 1, \dots, N-1 \}. \quad (1.14)$$

Pour $l = 0$, nous adoptons la convention $\alpha_0 = 0$ et $\Gamma_0^\delta = \Gamma$.

Remarque 1.3 *La normale unitaire à Γ , orientée vers l'extérieur de la multicouche, est aussi normale à Γ^z dans le point d'intersection m avec cette dernière, que nous avons notée \mathbf{n}_m . Dans la suite de ce manuscrit nous allons ignorer l'indice m , et nous écrivons \mathbf{n} .*

1.2.4 Opérateurs différentiels sur une surface Γ

La définition des espaces de traces, les espaces de Sobolev de frontière, est basée essentiellement sur les opérateurs différentiels appliqués aux champs vectoriels ou bien scalaires surfaciques. Pour Γ une surface régulière, nous définissons le gradient tangentiel ∇_Γ et à partir de ce dernier nous définissons div_Γ , rot_Γ , $\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma$, Δ_Γ et $\overrightarrow{\Delta}_\Gamma$.

Gradient surfacique « ∇_Γ »

Si v est une fonction scalaire bien définie au voisinage de la surface Γ . Le gradient de v au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ est un vecteur dans \mathbb{R}^3 défini par

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Si $\frac{\partial v}{\partial x_3}$ représente la dérivée dans la direction normale à la surface Γ , alors le gradient usuel de v privé de sa composante normale nous donne le gradient surfacique. Nous écrivons alors

$$\nabla v = \nabla_\Gamma v + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}, \quad (1.16)$$

où $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ est la dérivée dans la direction normale à la surface Γ . Nous pouvons ainsi écrire

$$\nabla_\Gamma v := \Pi_\Gamma \nabla v = \mathbf{n} \times (\nabla v \times \mathbf{n}). \quad (1.17)$$

En coordonnées locales, pour $m \in \Gamma$. Le gradient surfacique $\nabla_\Gamma v(m)$ de v au point m est défini par

$$\nabla_\Gamma v(m) := \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (v \circ \phi) (\xi^1, \xi^2) \tau^\alpha(m), \quad (1.18)$$

$$= g^{\alpha\beta}(m) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (v \circ \phi) (\xi^1, \xi^2) \tau_\beta(m). \quad (1.19)$$

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (v \circ \phi) (\xi^1, \xi^2) = \frac{\partial}{\partial m} v(m) \frac{\partial m}{\partial \xi^\alpha} (\xi^1, \xi^2), \quad (1.20)$$

$$= \nabla_\Gamma v(m) \cdot \tau_\alpha(m), \quad (1.21)$$

et comme

$$\nabla_\Gamma v(m) = (\nabla_\Gamma v(m) \cdot \tau_\alpha(m)) \tau^\alpha(m), \quad (1.22)$$

1.2. Notions de géométrie différentielle intrinsèque

nous avons

$$\nabla_{\Gamma} v(m) := \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} (v \circ \phi) (\xi^1, \xi^2) \tau^{\alpha}(m), \quad (1.23)$$

qui est la définition adoptée.

Divergence surfacique « $\operatorname{div}_{\Gamma}$ »

Si \mathbf{u} est un champ de vecteurs surfacique régulier, sa divergence surfacique sur Γ , notée $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}$ ou bien $\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{u}$, est définie par dualité à travers la formule de Stokes

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} v \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma} v \, d\Gamma, \quad (1.24)$$

pour toute fonction régulière v sur Γ , où $d\Gamma$ l'élément de surface sur Γ donné par

$$d\Gamma = |\tau_1 \times \tau_2| d\xi^1 d\xi^2. \quad (1.25)$$

Rotationnel surfacique vectoriel « $\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma}$ »

Pour une fonction scalaire u définie sur Γ , son rotationnel surfacique vectoriel, noté $\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} u$ ou bien $\nabla_{\Gamma} \times u$, est défini par

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} u := \nabla_{\Gamma} u \times \mathbf{n}. \quad (1.26)$$

D'après la définition, nous pouvons voir $\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma}$ comme étant une rotation du gradient tangentiel ∇_{Γ} dans le plan tangent.

Nous avons la relation suivant

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} u = 0. \quad (1.27)$$

Remarque 1.4 Si \tilde{u} est un relèvement de u au voisinage de Γ , alors la relation entre $\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} u$ et le rotationnel usuel rot est la suivante

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} u = \operatorname{rot}(\tilde{u} \tilde{\mathbf{n}})|_{\Gamma}, \quad (1.28)$$

pour $\tilde{\mathbf{n}}$ un relèvement de \mathbf{n} au voisinage de Γ . Voir [44].

Rotationnel surfacique scalaire « $\operatorname{rot}_{\Gamma}$ »

Nous définissons le rotationnel surfacique scalaire $\operatorname{rot}_{\Gamma}$, d'un champ tangentiel, en utilisant la définition du rotationnel surfacique vectoriel $\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma}$ et la dualité.

Pour un champ tangentiel régulier \mathbf{u} défini sur Γ , et pour toute fonction régulière v sur Γ , nous avons la formule de Stokes

$$\int_{\Gamma} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma} v \times \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (1.29)$$

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

Grâce à l'identité vectorielle

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a), \quad (1.30)$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} v \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma} v \times \mathbf{n} \, d\Gamma, \\ &= \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} v \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \, d\Gamma, \\ &= - \int_{\Gamma} v \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \, d\Gamma, \\ &= \int_{\Gamma} v \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} := \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{u} \times \mathbf{n}). \quad (1.31)$$

Nous avons aussi

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} = - \operatorname{rot}_{\Gamma}(\mathbf{u} \times \mathbf{n}), \quad (1.32)$$

et

$$\operatorname{rot}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} = 0. \quad (1.33)$$

Laplace-Beltrami « Δ_{Γ} »

L'opérateur Laplacien surfacique scalaire Δ_{Γ} , dit aussi opérateur de Laplace-Beltrami, appliqué à une fonction scalaire u , définie sur Γ et supposée régulière, est défini par

$$\Delta_{\Gamma} u = \operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla_{\Gamma} u) = - \operatorname{rot}_{\Gamma}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} u). \quad (1.34)$$

Opérateur de Hodge « $\overrightarrow{\Delta}_{\Gamma}$ »

L'opérateur Laplacien surfacique vectoriel $\overrightarrow{\Delta}_{\Gamma}$, dit aussi opérateur de Hodge [56], ou bien opérateur de Laplace Beltrami vectoriel [44], appliqué à un champ de vecteurs tangents \mathbf{u} est défini par

$$\overrightarrow{\Delta}_{\Gamma} \mathbf{u} = \nabla_{\Gamma}(\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma}(\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}). \quad (1.35)$$

1.2.5 Opérateurs différentiels sur une surface Γ^z

Pour décrire la variation dans la direction normale à la surface Γ , nous avons besoin de définir les opérateurs différentiels tangentiels sur les surfaces Γ^z (définis en (1.12) et (1.14)).

Nous définissons le difféomorphisme entre les surfaces Γ et Γ^z par $\mathbf{x} = m + z\mathbf{n}_m$, son inverse est $m = \mathbf{x} - z\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$.

1.2. Notions de géométrie différentielle intrinsèque

1.2.5.1 Opérateurs de courbure sur Γ^z

La base du plan tangent à la surface Γ^z est définie par

$$\begin{cases} \tau_1(m, z) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} = \frac{\partial m}{\partial \xi^1} + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^1} = \tau_1(m) + z\mathcal{C}\tau_1(m), \\ \tau_2(m, z) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial m}{\partial \xi^2} + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^2} = \tau_2(m) + z\mathcal{C}\tau_2(m). \end{cases} \quad (1.36a)$$

$$\quad (1.36b)$$

Alors, la relation entre les bases des plans tangents aux surfaces Γ et Γ^z est donnée par

$$\tau_\alpha(m, z) = (1 + z\mathcal{C})\tau_\alpha(m), \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.37)$$

Nous adoptons la notation

$$\mathcal{R}_z = 1 + z\mathcal{C}. \quad (1.38)$$

Lemme 1.1 *L'inverse de l'opérateur \mathcal{R}_z est donné par*

$$\mathcal{R}_z^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{R}_z} \mathcal{T}_z, \quad (1.39)$$

où

$$\det \mathcal{R}_z = 1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}, \quad (1.40)$$

et

$$\mathcal{T}_z = 1 - z(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (1.41)$$

Preuve : En utilisant la base locale du plan tangent, la matrice associée à \mathcal{R}_z s'écrit

$$\mathcal{R}_z = 1 + z\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 + zc_1 & 0 \\ 0 & 1 + zc_2 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

La matrice transposée de la comatrice associée à \mathcal{R}_z est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 + zc_2 & 0 \\ 0 & 1 + zc_1 \end{pmatrix} = 1 - z(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (1.43)$$

Pour le déterminant de \mathcal{R}_z , c'est un calcul direct à partir de (1.42), ce qui termine la preuve. \square

Lemme 1.2 *L'opérateur de courbure \mathcal{C}_z sur Γ^z est donné par la formule*

$$\mathcal{C}_z = \mathcal{C}(1 + z\mathcal{C})^{-1}. \quad (1.44)$$

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

Preuve : Nous savons que la normale unitaire à Γ est aussi normale à Γ^z dans le point d'intersection m avec cette dernière, nous avons alors $\mathbf{n}(m) = \mathbf{n}(m + z\mathbf{n}(m))$. Nous dérivons cette dernière expression, nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{n}(m)}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial \xi^\alpha}, \quad (1.45)$$

où \mathbf{x}^i est la $i^{\text{ème}}$ composante du point \mathbf{x} dans \mathbb{R}^3 , donc nous écrivons

$$\frac{\partial \mathbf{n}(m)}{\partial \xi^\alpha} = \nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}. \quad (1.46)$$

En utilisant la définition de l'opérateur de courbure, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\tau_\alpha(m) &= \nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (1 + z\mathcal{C})\tau_\alpha(m), \\ &= \mathcal{C}_z \tau_\alpha(m, z), \\ &= \mathcal{C}_z (1 + z\mathcal{C})\tau_\alpha(m), \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$\mathcal{C}_z = \mathcal{C}(1 + z\mathcal{C})^{-1}. \quad (1.47)$$

Ce qui termine la preuve. \square

Corollaire 1.1 *L'opérateur de courbure \mathcal{C}_z sur Γ^z vérifie les relations*

$$\begin{cases} \mathcal{C} - \mathcal{C}_z = z\mathcal{C}_z\mathcal{C}, & (1.48a) \\ (1 + z\mathcal{C})^{-1} = 1 - z\mathcal{C}_z. & (1.48b) \end{cases}$$

Preuve : La relation (1.48a) est obtenue directement à partir de la définition de l'opérateur \mathcal{C}_z . Pour démontrer (1.48b), nous utilisons (1.48a). \square

Remarque 1.5 *La courbure moyenne \mathcal{H}_z sur la surface Γ^z est donnée par*

$$2\mathcal{H}_z = \text{tr}\mathcal{C}_z = \text{tr}(\mathcal{C}(1 + z\mathcal{C})^{-1}). \quad (1.49)$$

Lemme 1.3 *Pour \mathbf{u} un champ de vecteurs défini sur la surface Γ^z , nous avons la relation suivante*

$$\mathcal{R}_z(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) = (\mathcal{T}_z \mathbf{u}) \times \mathbf{n}. \quad (1.50)$$

Preuve : En utilisant la matrice associée à \mathcal{R}_z dans la base locale du plan tangent, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) &= \begin{pmatrix} 1 + zc_1 & 0 \\ 0 & 1 + zc_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_2 + zc_1 u_2 \\ -u_1 - zc_2 u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Notions de géométrie différentielle intrinsèque

Nous pouvons écrire

$$\begin{pmatrix} u_2 + zc_1u_2 \\ -u_1 - zc_2u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - z(c_2 - 2\mathcal{H})u_2) \\ -(1 - z(c_1 - 2\mathcal{H})u_1) \end{pmatrix}.$$

Cette dernière formule n'est autre que

$$[(1 - z(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})\mathbf{u})] \times \mathbf{n},$$

ce qui termine la preuve. □

1.2.5.2 Relation entre les opérateurs différentiels sur les surfaces Γ^z et Γ

Théorème 1.1 *Les opérateurs différentiels tangentiels sur les surfaces Γ^z s'expriment en fonction des opérateurs différentiels tangentiels sur la surface de référence Γ par*

$$\nabla_{\Gamma^z} = \mathcal{R}_z^{-1} \nabla_{\Gamma}, \quad (1.51a)$$

$$\operatorname{div}_{\Gamma^z} = \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathcal{T}_z, \quad (1.51b)$$

$$\operatorname{rot}_{\Gamma^z} = \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{R}_z, \quad (1.51c)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma^z} = \mathcal{T}_z^{-1} \overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma}. \quad (1.51d)$$

Preuve : Nous utilisons la paramétrisation de la couche mince Ω^δ par $\Gamma \times]-\delta, 0[$ à travers l'application

$$\begin{aligned} \Gamma \times]-\delta, 0[&\rightarrow \Omega^\delta \\ (m, z) &\rightarrow \mathbf{x} = m + z\mathbf{n}(m). \end{aligned}$$

Pour toute fonction v définie sur Ω^δ , nous associons la fonction \widehat{v} définie sur $\Gamma \times]-\delta, 0[$ par

$$\widehat{v}(m, z) := v(\mathbf{x}). \quad (1.52)$$

Nous avons alors

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \xi^\alpha} &= \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial \xi^\alpha} = \nabla v \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}, \end{aligned} \right. \quad (1.53a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial z} = \nabla v \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}, \end{aligned} \right. \quad (1.53b)$$

où \mathbf{x} et (ξ^1, ξ^2, z) sont liés par

$$\mathbf{x} = \phi(\xi^1, \xi^2) + z\mathbf{n}(\phi(\xi^1, \xi^2)). \quad (1.54)$$

Il s'ensuit

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \xi^\alpha} = \nabla v \cdot (1 + z\mathcal{C})\tau_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} = \nabla v \cdot \mathbf{n}. \quad (1.55)$$

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

Pour δ petit, l'opérateur $1 + z\mathcal{C}$ est un automorphisme du plan tangent $T_m(\Gamma)$, et nous avons

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial \xi^\alpha} = (1 + z\mathcal{C})\nabla v \cdot \tau_\alpha. \quad (1.56)$$

En utilisant la définition du gradient tangentiel, nous avons

$$(\nabla v)|_{\Gamma^z} = (1 + z\mathcal{C})^{-1}\nabla_\Gamma \widehat{v},$$

qui est bien la formule (1.51a), les autres formules (1.51b), (1.51c) et (1.51d) sont des applications directes de leurs définitions.

En effet, pour démontrer (1.51b), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z} \mathbf{u} v \, d\Gamma^z &= - \int_{\Gamma^z} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma^z} v \, d\Gamma^z, \\ &= - \int_{\Gamma^z} \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}_z^{-1} \nabla_\Gamma v \, d\Gamma^z. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.1 et la symétrie de l'opérateur \mathcal{C} , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z} \mathbf{u} v \, d\Gamma^z &= - \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \mathbf{u} \cdot \mathcal{T}_z \nabla_\Gamma v \, d\Gamma^z, \\ &= - \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \mathcal{T}_z \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma v \, d\Gamma^z, \\ &= \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} (\operatorname{div}_\Gamma \mathcal{T}_z \mathbf{u}) v \, d\Gamma^z. \end{aligned}$$

Pour démontrer (1.51c) nous utilisons la relation entre $\operatorname{div}_{\Gamma^z}$ et $\operatorname{rot}_{\Gamma^z}$ et nous avons alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^z} \operatorname{rot}_{\Gamma^z} \mathbf{u} v \, d\Gamma^z &= \int_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) v \, d\Gamma^z, \\ &= \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{div}_\Gamma \mathcal{T}_z (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) v \, d\Gamma^z. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant la lemme 1.3 pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^z} \operatorname{rot}_{\Gamma^z} \mathbf{u} v \, d\Gamma^z &= \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{div}_\Gamma ((\mathcal{R}_z \mathbf{u}) \times \mathbf{n}) v \, d\Gamma^z, \\ &= \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{rot}_\Gamma (\mathcal{R}_z \mathbf{u}) v \, d\Gamma^z. \end{aligned}$$

Pour démontrer la dernière formule (1.51d) nous utilisons (1.51c), le lemme 1.1 et la symétrie de l'opérateur \mathcal{C} et nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^z} \overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma^z} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma^z &= \int_{\Gamma^z} u \operatorname{rot}_{\Gamma^z} \mathbf{v} \, d\Gamma^z, \\ &= \int_{\Gamma^z} \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} u \operatorname{rot}_\Gamma \mathcal{R}_z \mathbf{v} \, d\Gamma^z, \\ &= \int_{\Gamma^z} u \operatorname{rot}_\Gamma \mathcal{T}_z^{-1} \mathbf{v} \, d\Gamma^z. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{\Gamma^z} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma^z} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma^z = \int_{\Gamma^z} \mathcal{T}_z^{-1} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma^z,$$

ce qui termine la preuve. \square

Remarque 1.6 *Pour $z = 0$, nous avons*

$$\nabla_{\Gamma^z|_{z=0}} = \nabla_{\Gamma}, \quad (1.57a)$$

$$\text{div}_{\Gamma^z|_{z=0}} = \text{div}_{\Gamma}, \quad (1.57b)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma^z|_{z=0}} = \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma}, \quad (1.57c)$$

$$\text{rot}_{\Gamma^z|_{z=0}} = \text{rot}_{\Gamma}, \quad (1.57d)$$

$$\mathcal{C}_z|_{z=0} = \mathcal{C}, \quad (1.57e)$$

$$(\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z)|_{z=0} = (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (1.57f)$$

1.3 Espaces fonctionnels

Pour Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , borné ou non borné, de frontière Γ supposée régulière. \mathbf{n} est la normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω . Nous rappelons ici les espaces fonctionnels utiles.

Remarque 1.7 *Dans tout ce manuscrit, nous notons les fonctions vectorielles ainsi que leurs espaces par des caractères gras.*

1.3.1 Espaces fonctionnels standards

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω .
- $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$: l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k(\Omega)$, à support compact.
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k(\Omega)$, avec des dérivées bornées et uniformément continues jusqu'à l'ordre k sur $\overline{\Omega}$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions infiniment différentiables, à support compact dans Ω .
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω , c'est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$.
- $L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions u sur Ω , tel que $|u|^2$ est intégrable, c'est un espace de Hilbert, muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.58)$$

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

- $\mathbf{L}^2(\Omega)$: l'espace des fonctions vectorielles $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in (L^2(\Omega))^3$ et pour $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in (L^2(\Omega))^3$ nous définissons le produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$ comme suit

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 u_j \bar{v}_j d\mathbf{x}. \quad (1.59)$$

C'est un espace de Hilbert, muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^3 \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.60)$$

- $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$: est l'espace défini par

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.61)$$

- $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$: est l'espace défini par

$$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot } \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\text{rot}(u)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.62)$$

Remarque 1.8 Dans la théorie des équations de Maxwell, les espaces d'énergie sont $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ et $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$.

1.3.2 Espaces de traces

La caractérisation des espaces de Sobolev sur la frontière Γ , qui, dans notre étude, représentent les espaces de traces des solutions des équations de Maxwell, utilise la théorie spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami (voir le livre de Nédélec [44, Section 5.4.1]).

Pour Γ une surface régulière, nous définissons

- $\mathcal{D}(\Gamma)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Γ .
- $\mathcal{D}'(\Gamma)$: l'espace des distributions sur Γ , qui est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Gamma)$.
- $L^2(\Gamma)$: l'espace des classes de fonctions mesurables de carré intégrable sur Γ , c'est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.63)$$

où $d\Gamma$ représente l'élément de mesure sur Γ .

- $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$: l'espace des champs de vecteurs tangents dans $\mathbf{L}^2(\Gamma)$, défini par

$$\mathbf{L}_t^2(\Gamma) = \{ \mathbf{u} \in (L^2(\Gamma))^3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \}. \quad (1.64)$$

Remarque 1.9 Nous notons par Y_i les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami scalaire Δ_Γ . Les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel $\vec{\Delta}_\Gamma$ sont notés $\vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i$ et $\nabla_\Gamma Y_i$. Nous notons par λ_i les valeurs propres associées. Nous écrivons alors

$$-\Delta_\Gamma Y_i = \lambda_i Y_i, \quad (1.65)$$

et

$$\begin{cases} -\vec{\Delta}_\Gamma \vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i = \lambda_i \vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i, \\ -\vec{\Delta}_\Gamma \nabla_\Gamma Y_i = \lambda_i \nabla_\Gamma Y_i. \end{cases} \quad (1.66a)$$

$$(1.66b)$$

Le lecteur pourra revenir à Nédélec [44, Sous-section 5.4.1].

Pour caractériser les espaces de Sobolev sur Γ , nous utilisons la base dénombrable $\{Y_i\}$ de l'opérateur de Laplace-Beltrami scalaire ($-\Delta_\Gamma Y_i = \lambda_i Y_i$) pour définir les fonctions scalaires et la base $\{\vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i, \nabla_\Gamma Y_i\}$ de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel ($-\vec{\Delta}_\Gamma \vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i = \lambda_i \vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i$ et $-\vec{\Delta}_\Gamma \nabla_\Gamma Y_i = \lambda_i \nabla_\Gamma Y_i$) pour définir les champs de vecteurs tangents (Annexe B).

Alors, pour une fonction u définie sur Γ , nous avons

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i Y_i, \quad \text{où} \quad u_i = \langle u, Y_i \rangle_\Gamma = \int_\Gamma u \bar{Y}_i d\Gamma. \quad (1.67)$$

Pour tout champ tangent \mathbf{u} sur Γ , nous avons

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha_i \nabla_\Gamma Y_i + \beta_i \vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i \right), \quad (1.68)$$

avec

$$\alpha_i = \langle \mathbf{u}, \nabla_\Gamma Y_i \rangle_\Gamma \quad \text{et} \quad \beta_i = \langle \mathbf{u}, \vec{\mathbf{rot}}_\Gamma Y_i \rangle_\Gamma. \quad (1.69)$$

Nous avons aussi

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{u} = - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \lambda_i Y_i, \quad (1.70)$$

et

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda_i Y_i. \quad (1.71)$$

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

- $H^1(\Gamma)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Γ , défini par

$$H^1(\Gamma) = \{u \in L^2(\Gamma), \nabla_{\Gamma} u \in \mathbf{L}^2(\Gamma)\}, \quad (1.72)$$

c'est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)} = \left(\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} u\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.73)$$

- $H^s(\Gamma)$: pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev $H^s(\Gamma)$ est défini par

$$H^s(\Gamma) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Gamma), \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \lambda_i)^s |u_i|^2 < \infty \right\}, \quad (1.74)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \lambda_i)^s |u_i|^2. \quad (1.75)$$

Remarque 1.10 Pour $s = 1$, la norme du graphe (1.73) est équivalente à la norme (1.75).

Remarque 1.11 Pour $s \geq 0$, l'espace $H^{-s}(\Gamma)$ est défini par dualité, c'est à dire :

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i, \quad \forall u \in H^s(\Gamma), \forall v \in H^{-s}(\Gamma), \quad (1.76)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ représente le produit de dualité entre $H^s(\Gamma)$ et $H^{-s}(\Gamma)$.

- $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$: pour tout $s \geq 0$, nous définissons l'espace des champs de vecteurs de $\mathbf{H}^s(\Gamma) = (H^s(\Gamma))^3$ tangents à Γ par

$$\mathbf{H}_t^s(\Gamma) = \{ \mathbf{u} \in (H^s(\Gamma))^3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \}. \quad (1.77)$$

L'espace $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ est caractérisé par

$$\mathbf{H}_t^s(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \mid \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i)^{s+1} (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2) < \infty \right\}. \quad (1.78)$$

La norme dans $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ est donnée par

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i)^{s+1} (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2). \quad (1.79)$$

— Pour $s = 0$, nous notons $\mathbf{L}_t^2(\Gamma) = \mathbf{H}_t^0(\Gamma)$.

— Pour $s \geq 0$, nous définissons l'espace $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$ par dualité

$$\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-s}(\Gamma), \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma = 0, \right. \\ \left. \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Gamma) \text{ un champ de vecteur normal à } \Gamma \right\}. \quad (1.80)$$

- $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$: l'espace des champs de vecteurs de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tangent à Γ , à rotationnel surfacique scalaire dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \quad (1.81)$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.82)$$

- $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$: l'espace des champs de vecteurs de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tangent à Γ , à divergence surfacique dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \quad (1.83)$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} = \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \|\text{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.84)$$

Remarque 1.12 Les normes dans $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ se caractérisent aussi par

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} (|\alpha_i|^2 + \lambda_i |\beta_i|^2), \quad (1.85)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} (\lambda_i |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2). \quad (1.86)$$

Remarque 1.13 Pour $i \rightarrow \infty$, nous avons $\lambda_i \approx (1 + \lambda_i)$. Nous définissons les normes équivalentes suivantes

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} (|\alpha_i|^2 + (1 + \lambda_i) |\beta_i|^2), \quad (1.87)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} ((1 + \lambda_i) |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2), \quad (1.88)$$

1.4 Différents types de traces

Lorsque nous appliquons les formules d'intégration par partie, nous avons plusieurs types de traces, apparaissant dans les termes d'intégration aux bords. Dans cette section, nous donnons une brève définition de chacune d'elles.

Définition 1.1 Soient u une fonction scalaire dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ et \mathbf{u} une fonction vectorielle dans $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}) = (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$. Nous définissons

1. la trace γ de u et de \mathbf{u}

$$\gamma u = u|_\Gamma, \quad \gamma \mathbf{u} = \mathbf{u}|_\Gamma. \quad (1.89)$$

2. la trace de la composante normale $\gamma_{\mathbf{n}}$ d'une fonction vectorielle \mathbf{u}

$$\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_\Gamma. \quad (1.90)$$

3. la trace tangentielle γ_t d'une fonction vectorielle \mathbf{u}

$$\gamma_t \mathbf{u} = \gamma \mathbf{u} - (\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}) \mathbf{n}, \quad (1.91)$$

donnée aussi par la formule

$$\gamma_t \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u})|_\Gamma \times \mathbf{n}. \quad (1.92)$$

4. la trace tangentielle γ_\times d'une fonction vectorielle \mathbf{u}

$$\gamma_\times \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u})|_\Gamma. \quad (1.93)$$

Remarque 1.14 Les relations entre les deux traces γ_t et γ_\times sont données par

$$\gamma_t \mathbf{u} = (\gamma_\times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}, \quad (1.94)$$

$$\gamma_\times \mathbf{u} = \mathbf{n} \times (\gamma_t \mathbf{u}). \quad (1.95)$$

1.5 Théorèmes de traces

Pour Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 de frontière Γ supposée régulière, \mathbf{n} est la normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω . Nous rappelons les espaces

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, \quad (1.96)$$

$$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}. \quad (1.97)$$

1.6. Décomposition de Helmholtz de frontière

Théorème 1.2 *L'opérateur trace $\gamma_{\mathbf{n}}$ qui associe à tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ sa composante normale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sur Γ est continue et surjective de $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Il existe un opérateur de relèvement R , continu de $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$, vérifiant*

$$\gamma_{\mathbf{n}}(Rg) = (Rg \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma} = g. \quad (1.98)$$

En plus, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$, nous avons

$$\int_{\Omega} [\nabla u \cdot \bar{\mathbf{v}} + u \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}] d\mathbf{x} = \langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{v}, u \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (1.99)$$

Preuve : Voir [44, Théorème 5.4.1] ou bien [22, Chapitre 2]. □

Théorème 1.3 *L'opérateur trace γ_t qui associe à tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ sa composante tangentielle sur Γ , est continue et surjective de $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$. L'opérateur trace γ_{\times} qui associe à tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ sa composante tangentielle $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ est continue et surjective de $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$.*

Pour les deux opérateurs de traces il existe un opérateur de relèvement continu dans $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$.

Pour tous \mathbf{u} et \mathbf{v} dans $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$, nous avons la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega} [\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}}_t] d\mathbf{x} = \langle \gamma_{\times} \mathbf{u}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)}. \quad (1.100)$$

Preuve : Voir [44, Théorème 5.4.2]. □

1.6 Décomposition de Helmholtz de frontière

Soit Ω un ouvert simplement connexe, de frontière Γ supposée compacte, nous avons les applications suivantes

$$\begin{aligned} \gamma_t : \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) &\longrightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \\ \mathbf{u} &\longrightarrow \gamma_t \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} \times : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) &\longrightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \\ \mathbf{u}_t &\longrightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{u}_t, \end{aligned} \quad (1.102)$$

où \mathbf{u}_t est la trace tangentielle de \mathbf{u} ,

$$\begin{aligned} \gamma_{\times} = \times \circ \gamma_t : \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) &\longrightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \\ \mathbf{u} &\longrightarrow \gamma_{\times} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$ est un Hilbert et son dual est $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$.

Chapitre 1. Notions de géométrie différentielle intrinsèque et Espaces fonctionnels

Définition 1.2 Nous définissons la décomposition des espaces $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ comme suit [43]

- ★ Pour tout $\mathbf{u}_t \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$, il existe un unique $\varphi_{\mathbf{u}} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de moyenne nulle et un unique $\Psi_{\mathbf{u}} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ tel que

$$\mathbf{u}_t = \nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{u}}. \quad (1.104)$$

- ★ Pour tout $\mathbf{v}_t \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, il existe un unique $\varphi_{\mathbf{v}} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ de moyenne nulle et un unique $\Psi_{\mathbf{v}} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que

$$\mathbf{v}_t = \nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{v}}. \quad (1.105)$$

Définition 1.3 Nous définissons le produit de dualité entre $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ comme suit [45]

$$\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle_\Gamma = \langle \nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{u}}, \nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{v}} \rangle_\Gamma + \left\langle \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{v}} \right\rangle_\Gamma. \quad (1.106)$$

Ce produit de dualité coïncide avec l'intégrale

$$\int_\Gamma \mathbf{u}_t \cdot \overline{\mathbf{v}_t} \, d\Gamma = \int_\Gamma \nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{u}} \cdot \nabla_\Gamma \overline{\varphi_{\mathbf{v}}} \, d\Gamma + \int_\Gamma \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \overline{\Psi_{\mathbf{v}}} \, d\Gamma, \quad (1.107)$$

quand \mathbf{u}_t et \mathbf{v}_t sont régulières.

Remarque 1.15 Nous remarquons qu'il n'y a pas de contribution des termes croisés dans ce produit de dualité en raison de leur orthogonalité. En plus, le premier terme est bien défini car $\nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\nabla_\Gamma \varphi_{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tandis que pour le second les rôles sont inversés $\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}_\Gamma \Psi_{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

1.7 Alternative de Fredholm

Dans les problèmes variationnels posés sur les espaces de Hilbert, plusieurs théories existent en nous fournissant des conditions suffisantes pour assurer l'existence et l'unicité de la solution faible. Nous citons le théorème de représentation de Riesz [43, Théorème 2.17], le lemme de Lax-Milgram [43, Lemme 2.21]. Malheureusement, ces derniers ne répondent pas à la question d'existence et d'unicité pour les équations de Maxwell. Pour ce faire, l'alternative de Fredholm [13] est alors utilisée.

Théorème 1.4 (Alternative de Fredholm) Pour \mathbf{X} un espace de Hilbert, $\mathbf{T} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ un opérateur compact. Alors

- a) $\mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T})$ est de dimension fini,

b) $\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{T})$ est fermée, et plus précisément

$$\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{T}) = \mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}^*)^\perp$$

c) $\mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{T}) = \mathbf{X}$

d) $\dim \mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}) = \dim \mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}^*)$.

Remarque 1.16 *L'alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation $u - \mathbf{T}u = f$. Elle exprime que :*

- **Ou bien** pour tout $f \in \mathbf{X}$ l'équation $u - \mathbf{T}u = f$ admet une solution unique.
- **Ou bien** l'équation homogène $u - \mathbf{T}u = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène $u - \mathbf{T}u = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalités (i.e $f \in \mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{T}^*)^\perp$).

Équations fondamentales de l'électromagnétisme

Sommaire

2.1	Introduction	25
2.2	Équations de Maxwell	26
2.3	Équations de Maxwell en régime harmonique	28
2.4	Conditions de transmissions entre deux milieux	28
2.5	Condition de radiation à l'infini	30
2.6	Adimensionnement des équations de Maxwell	30
2.6.1	Cadre de l'adimensionnement	30
2.6.2	Système de Maxwell adimensionné	32
2.6.3	Conditions de transmission adimensionnées entre deux milieux	33
2.7	Principe de prolongement unique pour les équations de Maxwell	34

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les équations de Maxwell qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques. Ce système sera considéré d'une dépendance temporelle tout d'abord quelconque puis harmonique. Par la suite, nous complétons ce système d'équations par les conditions aux limites au bord d'un obstacle et les conditions de transmission entre deux milieux différents. D'autre part, nous rappelons la condition de radiation à l'infini pour tenir compte du caractère non borné du domaine. Les références bibliographique sur lesquelles nous nous basons essentiellement sont le livre de Dautray et Lions [16] et celui de Né-délec [44]. Pour un point de vue physique, nous renvoyons le lecteur aux fameux livres de Feynman [20, 21].

En fin, nous adimensionnons ces équations afin de nous ramener au système de Maxwell le plus souvent étudié en mathématiques appliquées.

2.2 Équations de Maxwell

La propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu est décrite par les équations de Maxwell.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{div} \mathbf{D} = \varrho. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1a) \\ (2.1b) \\ (2.1c) \\ (2.1d) \end{array}$$

Ce système fait intervenir les quatre champs de vecteurs

- ▷ le champ électrique $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donné en $[\mathbf{V} \cdot \mathbf{m}^{-1}]$.
- ▷ le champ magnétique $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donné en $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}^{-1}]$.
- ▷ l'induction électrique $\mathbf{D} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donnée en $[\mathbf{C} \cdot \mathbf{m}^{-2}]$. Cette dernière est appelée encore déplacement électrique.
- ▷ l'induction magnétique $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donnée en $[\mathbf{T}]$.

Ces quatre champs de vecteurs sont générés par une densité de charge $\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée en $[\mathbf{C} \cdot \mathbf{m}^{-3}]$, et une densité de courant $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donnée en $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}^{-2}]$. Réciproquement, le champ électromagnétique exerce une densité de force $\mathbf{f} [\mathbf{kg} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}^{-2}]$ sur le milieu continu, dite densité de force de Lorentz

$$\mathbf{f} = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Dans le cadre de cette thèse nous ne tiendrons pas compte de cette équation. Nous supposons que les densités de charges et de courant sont connues.

D'autre part, les équations de Maxwell sont compatibles avec la loi de conservation de la charge

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.3)$$

Cette dernière équation peut être interprétée comme une condition nécessaire à l'existence de solutions au système de Maxwell.

La permittivité électrique ε (en $[\mathbf{C} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m}^{-1}]$, ou bien en $[\mathbf{F} \cdot \mathbf{m}^{-1}]$), et la perméabilité magnétique μ (en $[\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}^{-1}]$, ou bien en $[\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{m}]$), du milieu de propagation relie les champs électromagnétiques et les inductions électromagnétiques à travers les lois constitutives du milieu de propagation

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.4a) \\ (2.4b) \end{array}$$

2.2. Équations de Maxwell

Un milieu vérifiant ces deux lois constitutives est appelé **milieu parfait**, il est dit aussi isotrope homogène, lorsque ε et μ sont des constantes positives.

Grâce aux lois constitutives (2.4), nous pouvons éliminer les inductions \mathbf{D} et \mathbf{B} du système (2.1), et garder les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} (voir par exemple [43, 44]). Le système de Maxwell (2.1) du premier ordre devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \\ \mathbf{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.5a) \\ (2.5b) \\ (2.5c) \\ (2.5d) \end{array}$$

Remarque 2.1 *La permittivité électrique et la perméabilité magnétique caractérisent la réponse électromagnétique d'un milieu.*

Les permittivité et perméabilité du vide, notées ε_0 et μ_0 , sont données par :

$$\varepsilon_0 = 8,854187 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, \quad (2.6)$$

$$\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (2.7)$$

Les permittivité et perméabilité d'un milieu parfait sont exprimées à l'aide des quantités adimensionnelles, dites permittivité relative et perméabilité relative, notées $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\mu}$ respectivement, telles que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

$$\mu = \mu_0 \hat{\mu}. \quad (2.9)$$

Remarque 2.2 *Dans le cas des matériaux hétérogènes isotropes, la permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ sont des fonctions scalaires dépendant de la variable d'espace.*

Remarque 2.3 *Dans le cas des matériaux anisotropes, les fonctions scalaires ε et μ sont remplacées par des tenseurs.*

Définition 2.1 *Dans un matériau diélectrique parfait, la permittivité électrique et la perméabilité magnétique sont réelles.*

2.3 Équations de Maxwell en régime harmonique

En régime fréquentiel, les champs électromagnétiques, ainsi que les termes sources ont une dépendance temporelle harmonique, ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), & (2.10a) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{H}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), & (2.10b) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), & (2.10c) \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{D}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), & (2.10d) \end{cases}$$

avec $\Re(\cdot)$ désigne la partie réelle d'un champ complexe. Les fonctions \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} et $\mathbf{D} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ sont à valeurs vectorielles complexes et, $\omega > 0$ est la pulsation. D'après (2.5), le système de Maxwell harmonique en champ électrique \mathbf{E} et en champ magnétique \mathbf{H} est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0, & (2.11a) \\ \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0, & (2.11b) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{j}, & (2.11c) \\ \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \varrho. & (2.11d) \end{cases}$$

Nous avons aussi

$$\begin{cases} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \Re(\mathbf{j}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), & (2.12a) \\ \varrho(\mathbf{x}, t) = \Re(\varrho(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), & (2.12b) \end{cases}$$

avec $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ une fonction à valeurs vectorielles complexes et, $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction scalaire à valeurs complexes.

La loi de conservation de la charge en régime harmonique est donnée par

$$i\omega\varrho = \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (2.13)$$

2.4 Conditions de transmissions entre deux milieux

Nous considérons la propagation d'une onde électromagnétique à travers deux milieux Ω_1 et Ω_2 . L'interface Σ séparant ces deux milieux est parcourue par une densité surfacique de courant \mathbf{j}_Σ et une densité surfacique de charge ϱ_Σ . Nous notons \mathbf{n} la normale unitaire orientée du milieu Ω_1 vers le milieu Ω_2 , voir Figure : 2.1. Nous rappelons ici les conditions de transmission qui régissent les traces normales et tangentielles des champs et inductions. Le lecteur pourra se référer à

2.4. Conditions de transmissions entre deux milieux

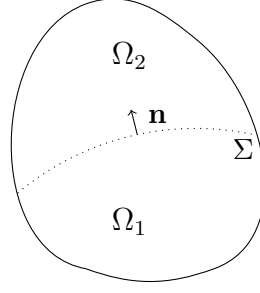


FIGURE 2.1 – Domaine de propagation d’une onde électromagnétique dans deux milieux différents.

[16].

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_\Sigma, \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = -\mathbf{j}_\Sigma, \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.14a) \\ (2.14b) \\ (2.14c) \\ (2.14d) \end{array}$$

Traitons tout d’abord le cas particulier où les milieux Ω_1 et Ω_2 sont parfaits. Nous notons ε_1 , μ_1 , ε_2 et μ_2 les propriétés caractéristiques des milieux Ω_1 et Ω_2 . L’interface Σ ne contient ni charge ni courant ($\mathbf{j}_\Sigma = 0$ et $\rho_\Sigma = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = 0, \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.15a) \\ (2.15b) \\ (2.15c) \\ (2.15d) \end{array}$$

Les conditions de transmission s’écrivent en éliminant les inductions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = 0, \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.16a) \\ (2.16b) \end{array}$$

Traitons maintenant le cas où Ω_1 est un milieu parfait et le milieu Ω_2 est un conducteur parfait. Les champs électromagnétiques sont nuls dans le conducteur parfait

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 = 0.$$

Il faut alors distinguer les deux conditions aux limites homogènes au bord du milieu de propagation

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.17a) \\ (2.17b) \end{array}$$

Chapitre 2. Équations fondamentales de l'électromagnétisme

Les équations permettant de déterminer la densité de charge surfacique et la densité de courant surfacique, qui sont engendrées par l'éclairage de la surface par une onde électromagnétique s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = -\varrho_\Sigma, \\ \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{j}_\Sigma. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.18a) \\ (2.18b) \end{matrix}$$

On pourra se référer à [43].

2.5 Condition de radiation à l'infini

Afin de garantir l'existence et l'unicité de la solutions du système de Maxwell en régime fréquentiel, nous complétons en général ce système par la condition d'onde sortante, dite condition de Silver-Müller

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left(\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \mathbf{E} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Le lecteur pourra se référer à [43].

2.6 Adimensionnement des équations de Maxwell

2.6.1 Cadre de l'adimensionnement

Le principe de l'adimensionnement consiste à se donner des grandeurs caractéristiques en lien avec le modèle physique étudié. Ces dernières sont considérées comme des grandeurs de référence. Le but de cette opération est de pouvoir exprimer le système d'équations par des paramètres et des grandeurs sans dimension.

Dans cette partie nous allons adimensionner totalement le système de Maxwell, c'est à dire en temps et en espace.

Pour commencer, nous considérons les champs à dépendance temporelle harmonique définis par (2.10), la vitesse de l'onde électromagnétique dans le vide et dans un milieu non nécessairement homogène sont définies respectivement par

$$c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad c^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x})},$$

les fonctions $\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont définies par

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \widehat{\varepsilon}(\mathbf{x}) \varepsilon_0, \quad \mu(\mathbf{x}) = \widehat{\mu}(\mathbf{x}) \mu_0,$$

avec ε_0 et μ_0 sont les permittivité et perméabilité du vide définies dans (2.6)-(2.7) ; $\widehat{\varepsilon}(\mathbf{x})$ et $\widehat{\mu}(\mathbf{x})$ sont les permittivité et perméabilité relatives.

2.6. Adimensionnement des équations de Maxwell

Remarque 2.4 *La vitesse relative de la lumière est notée \hat{c} , elle est définie à travers la relation*

$$c = c_0 \hat{c}.$$

En particulier, dans le vide nous avons

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\mu} = \hat{c} = 1.$$

Nous définissons ainsi les grandeurs

- la pulsation ω , dite encore la fréquence angulaire, donnée en $[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$ et définie par

$$\omega = 2\pi f_0,$$

f_0 est la fréquence en $[\text{Hz}]$. Nous écrivons ω de la forme suivante

$$\omega = \omega_0 \hat{\omega},$$

tels que ω_0 est la pulsation caractéristique, $\hat{\omega}$ est la pulsation relative.

- la période temporelle T_0 , définie par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- le nombre d'onde κ_0 , défini par $\kappa_0 = \frac{\omega_0}{c_0}$.
- la longueur d'onde λ_0 , définie par $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\kappa_0}$.

Nous avons aussi

$$c_0 = \frac{\lambda_0}{T_0}.$$

Nous notons par \hat{t} et $\hat{\mathbf{x}}$ les nouvelles variables associées au temps et à l'espace, définies par

$$\hat{t} = \frac{t}{T_0}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\lambda_0}.$$

Nous notons par $\mathbf{E}_0 = [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}]$ la grandeur caractéristique du champ électrique. Nous écrivons alors le champ électrique comme suit

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}), \tag{2.20}$$

avec $\hat{\mathbf{E}}(\cdot)$ représentant le champ électrique adimensionné.

Nous passons maintenant aux autres champs, nous utilisons le système des équations de Maxwell (2.1) et les lois constitutives (2.4), pour définir le champ magnétique adimensionné et les inductions adimensionnées

$$\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \tag{2.21a}$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\lambda_0}{T_0} \mathbf{D}_0 = c_0 \mathbf{D}_0 = c_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \tag{2.21b}$$

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = c_0 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{c_0}. \tag{2.21c}$$

Chapitre 2. Équations fondamentales de l'électromagnétisme

Il reste à déterminer \mathbf{j}_0 et ϱ_0 , pour cela nous utilisons les équation (2.1c) et (2.1d), nous avons

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{T_0}, \quad (2.22a)$$

$$\varrho_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\lambda_0} = \frac{\varepsilon_0}{\lambda_0} \mathbf{E}_0. \quad (2.22b)$$

Remarque 2.5 Nous pouvons choisir alternativement de fixer D_0, H_0, B_0, j_0 ou bien ϱ_0 et déterminer les dernières relations, à l'aide des relations précédentes.

Dans les variables adimensionnées, les opérateurs différentiels sont écrits comme suit

$$\mathbf{rot} = \frac{1}{\lambda_0} \widehat{\mathbf{rot}}, \quad \mathbf{div} = \frac{1}{\lambda_0} \widehat{\mathbf{div}}, \quad \partial_t = \frac{1}{T_0} \partial_{\hat{t}}.$$

2.6.2 Système de Maxwell adimensionné

Les équations de Maxwell deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{E}_0}{\lambda_0} \widehat{\mathbf{rot}} \widehat{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{B}_0}{T_0} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \widehat{\mathbf{B}} = 0, \end{array} \right. \quad (2.23a)$$

$$\frac{\mathbf{B}_0}{\lambda_0} \widehat{\mathbf{div}} \widehat{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.23b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{H}_0}{\lambda_0} \widehat{\mathbf{rot}} \widehat{\mathbf{H}} - \frac{\mathbf{D}_0}{T_0} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{j}_0 \widehat{\mathbf{j}}, \end{array} \right. \quad (2.23c)$$

$$\frac{\mathbf{D}_0}{\lambda_0} \widehat{\mathbf{div}} \widehat{\mathbf{D}} = \varrho_0 \widehat{\varrho}. \quad (2.23d)$$

Nous utilisons les formules (2.21), nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{rot}} \widehat{\mathbf{E}} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \widehat{\mathbf{B}} = 0, \end{array} \right. \quad (2.24a)$$

$$\widehat{\mathbf{div}} \widehat{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.24b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{rot}} \widehat{\mathbf{H}} - \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{j}}, \end{array} \right. \quad (2.24c)$$

$$\widehat{\mathbf{div}} \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\varrho}. \quad (2.24d)$$

En régime fréquentiel, les équations de Maxwell sont écrites comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{rot}} \widehat{\mathbf{E}} - i\widehat{\omega} \widehat{\mathbf{B}} = 0, \end{array} \right. \quad (2.25a)$$

$$\widehat{\mathbf{div}} \widehat{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.25b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{rot}} \widehat{\mathbf{H}} + i\widehat{\omega} \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{j}}, \end{array} \right. \quad (2.25c)$$

$$\widehat{\mathbf{div}} \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\varrho}. \quad (2.25d)$$

2.6. Adimensionnement des équations de Maxwell

Les relations constitutives adimensionnées s'écrivent

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}}, \\ \widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.26a) \\ (2.26b) \end{array}$$

Dans le vide nous avons

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{E}}, \\ \widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{H}}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.27a) \\ (2.27b) \end{array}$$

L'équation de conservation de la charge adimensionnée s'écrit

$$\partial_t \widehat{\rho} + \widehat{\text{div}} \widehat{\mathbf{j}} = 0, \quad (2.28)$$

en régime fréquentiel elle est donnée par

$$-i\widehat{\omega} \widehat{\rho} + \widehat{\text{div}} \widehat{\mathbf{j}} = 0. \quad (2.29)$$

2.6.3 Conditions de transmission adimensionnées entre deux milieux

Nous partons des conditions de transmission (2.16), et les formules (2.21), nous avons

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}] = 0 \implies [\widehat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}] = 0 \iff \left[\frac{\widehat{\mathbf{D}}}{\widehat{\varepsilon}} \times \mathbf{n} \right] = 0, \quad (2.30a)$$

$$[\mathbf{H} \times \mathbf{n}] = 0 \implies [\widehat{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}] = 0 \iff \left[\frac{\widehat{\mathbf{B}}}{\widehat{\mu}} \times \mathbf{n} \right] = 0, \quad (2.30b)$$

$$[\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}] = 0 \implies [\widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n}] = 0 \iff [\widehat{\varepsilon} \widehat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (2.30c)$$

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = 0 \implies [\widehat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}] = 0 \iff [\widehat{\mu} \widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (2.30d)$$

Remarque 2.6 *Dans la suite de ce manuscrit*

- nous allons travailler avec le système de Maxwell adimensionné et, pour simplifier l'écriture, nous écrivons les grandeurs sans ($\widehat{\cdot}$).
- Les permittivité électrique, perméabilité magnétique et la vitesse relatives sont notées ε , μ et c , sauf dans le cas d'indication contraire.

2.7 Principe de prolongement unique pour les équations de Maxwell

Énoncé. Soient Ω un ouvert connexe et Ω_1 un ouvert inclus dans Ω . Rappelons [51] que si $u \in L^2_{loc}$ vérifie

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa^2 u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.31a)$$

$$\quad \quad \quad (2.31b)$$

Alors, $u = 0$ dans Ω .

Le résultat prend la forme suivante pour les équations de Maxwell

Proposition 2.1 *Nous supposons que κ , μ et ε sont constants sur Ω . Si $\mathbf{E} \in \mathbf{L}^2_{loc}(\Omega)$ vérifie*

$$\begin{cases} \text{rot rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.32a)$$

$$\quad \quad \quad (2.32b)$$

Alors, $\mathbf{E} = 0$ dans Ω .

Preuve : Nous remarquons tout d'abord qu'en appliquant la divergence à (2.32), nous obtenons

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.33)$$

Comme

$$\Delta = \nabla \text{div} - \text{rot rot}, \quad (2.34)$$

il s'ensuit alors

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} + \kappa^2 \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.35a)$$

$$\quad \quad \quad (2.35b)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le résultat précédent à chacune des composantes de \mathbf{E} . □

Soit Ω_1 un domaine régulier connexe, dont la frontière peut être décomposée en deux parties connexes Γ et Σ . L'espace \mathbb{R}^3 admet la décomposition suivante $\mathbb{R}^3 = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_\Sigma} \cup \overline{\Omega_\Gamma}$, comme décrit sur la Figure : 2.2.

Proposition 2.2 *Si $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_1)$ vérifie*

$$\begin{cases} \text{rot rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ \text{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.36a)$$

$$\quad \quad \quad (2.36b)$$

$$\quad \quad \quad (2.36c)$$

Alors, $\mathbf{E} = 0$ sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Sigma \cup \Omega_\Sigma$.

2.7. Principe de prolongement unique pour les équations de Maxwell

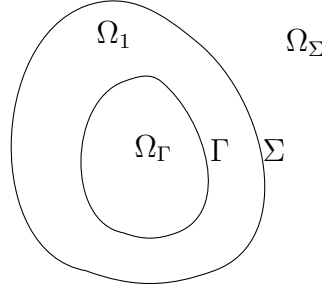


FIGURE 2.2 – Illustration du domaine pour le principe de prolongement unique.

Preuve : Nous prolongeons \mathbf{E} à Ω_Σ par 0. Nous notons $\Omega = \Omega_1 \cup \Sigma \cup \Omega_\Sigma$. Nous montrons alors que \mathbf{E} vérifie sur Ω

$$\begin{cases} \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega), & (2.37a) \\ \mathbf{rotrot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.37b)$$

En effet, nous avons par une application de la formule de Stokes deux fois, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$,

$$\langle \mathbf{rotrot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{rotrot} \varphi - \kappa^2 \varphi) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.38)$$

avec les termes de bord nuls, nous pouvons alors appliquer la proposition précédente. \square

Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Sommaire

3.1	Introduction	37
3.2	Description du problème physique considéré	38
3.2.1	Hypothèses géométriques	38
3.2.2	Hypothèses physiques	38
3.2.3	Système d'équations	40
3.2.4	Cadre fonctionnel	41
3.3	Décomposition modale de la solution sortante de Maxwell à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R	42
3.3.1	Identification des coefficients $e_{n,m}^t$ et $e_{n,m}^x$	47
3.4	Décomposition modale de l'opérateur d'impédance	48
3.4.1	Définitions	48
3.5	Système de Maxwell d'ordre deux à l'intérieur d'une boule \mathcal{B}_R	52
3.6	Formulation variationnelle	53
3.7	Existence et unicité de la solution	55
3.7.1	Traitement de la première forme sesquilinéaire	60
3.7.2	Traitement de la deuxième forme sesquilinéaire	63
3.7.3	Unicité de la solution du problème variationnel couplé en utilisant le principe de prolongement unique	65
3.7.4	Conclusion	67
3.8	Unicité de la solution sortante du problème de Maxwell extérieur par le lemme de Rellich	68

3.1 Introduction

Rappelons qu'à la section 2.2, nous avons présenté les équations qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques en régime temporel quelconque, puis

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

qu'à la section 2.3, nous avons présenté ce même modèle en régime harmonique. Dans ce chapitre, nous décrivons les géométries et précisons le problème aux limites considéré dans cette thèse. Nous montrons ensuite à l'aide du théorème de prolongement unique et de l'alternative de Fredholm que ce problème est bien posé. Cette dernière permet de déduire l'existence d'une solution à partir de son unicité. Nous nous basons sur le livre de Monk [43], où le problème est tout d'abord posé en domaine dont la frontière extérieure est une sphère de rayon $R > 0$. La condition d'onde sortante est alors écrite comme une condition d'impédance. Une étude précise de cet opérateur permet alors de déduire l'unicité.

3.2 Description du problème physique considéré

3.2.1 Hypothèses géométriques

Nous considérons un obstacle parfaitement conducteur D de frontière Γ^δ . En terme mathématique D est un domaine borné simplement connexe de frontière régulière Γ^δ (pour comprendre les notions de domaine et de surface régulière nous renvoyons le lecteur au livre de Nédélec [44, Section 2.5.2] par exemple).

L'obstacle D est recouvert de N couches minces de diélectriques notées Ω_j^δ pour $j = 1, \dots, N$. Elles sont supposées parallèles d'épaisseurs uniformes δ_j . Ces dernières (les épaisseurs δ_j) sont très petites par rapport aux autres dimensions de l'obstacle. Nous notons par Γ_j^δ , $j = 1, \dots, N - 1$, les surfaces séparatrices entre les couches minces. L'interface entre la multicouche et le domaine extérieur $\Omega^{ext} = \mathbb{R}^3 \setminus (D \cup \Omega_j^\delta)$, $j = 1, \dots, N$, est notée Γ_0^δ . Soit Ω^δ le domaine construit par $\Omega^{ext} \cup \Omega_j^\delta$, $j = 1, \dots, N$. La normale unitaire orientée vers l'extérieur de l'obstacle est notée \mathbf{n} , voir Figure : 3.1.

3.2.2 Hypothèses physiques

Dans le domaine extérieur Ω^{ext} , c'est à dire, en dehors de l'obstacle recouvert par la multicouche, les grandeurs physiques caractéristiques relatives du milieu ε et μ sont constantes et égales à 1.

Chaque couche Ω_j^δ , pour $j = 1, \dots, N$, est constituée d'un milieu diélectrique parfait de permittivité électrique relative ε_j et de perméabilité magnétique relative μ_j . Suivant la définition 2.1, ces dernières sont réelles et nous avons (voir par exemple [4, 29])

$$\Im(\varepsilon_j) = 0, \tag{3.1}$$

$$\Im(\mu_j) = 0. \tag{3.2}$$

3.2. Description du problème physique considéré

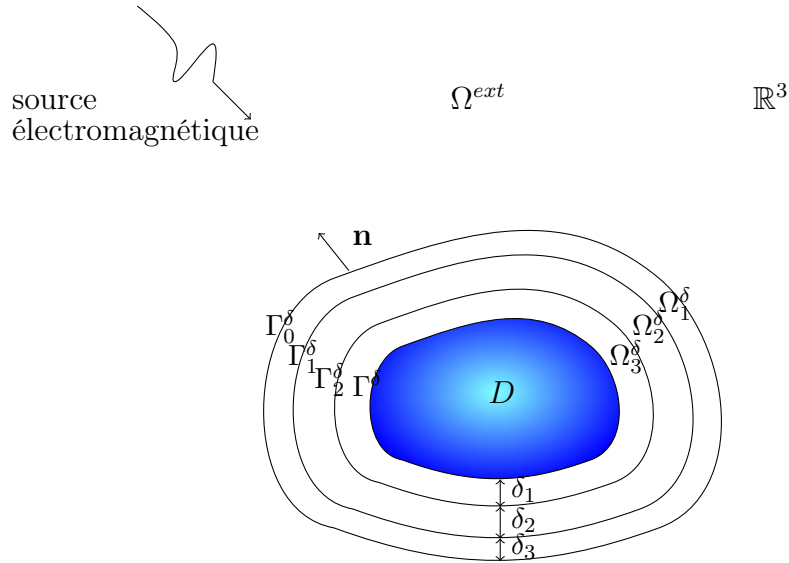


FIGURE 3.1 – Géométrie du problème de diffraction par un obstacle métallique dans un domaine non borné. L'obstacle métallique est recouvert par des substrats diélectriques différents. C'est un exemple contenant trois couches minces diélectriques.

Plus précisément, nous définissons les grandeurs ε et μ sous la forme des fonctions scalaires positives, définies par morceaux comme suit

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega^{ext}, \\ \varepsilon_j, & \mathbf{x} \in \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\mu = \mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega^{ext}, \\ \mu_j, & \mathbf{x} \in \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le nombre d'onde κ est par définition donné par

$$\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu. \quad (3.5)$$

Dans le cadre de cette thèse, le nombre d'onde est une fonction scalaire définie par morceaux

$$\kappa^2 = \kappa^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \omega^2, & \mathbf{x} \in \Omega^{ext}, \\ \omega^2 \varepsilon_j \mu_j, & \mathbf{x} \in \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme la pulsation ω est une constante positive donnée (voir section 2.3) et, d'après les hypothèses sur ε et μ le nombre d'onde κ est réel.

Remarque 3.1 *La nature du nombre d'onde κ joue un rôle très important dans l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution pour le problème de Maxwell :*

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

- pour un nombre d'onde complexe avec $\Im(\kappa) > 0$, la coercivité de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème est assurée, donc la théorie de Lax-Milgram est applicable.
- pour un nombre d'onde réel, la coercivité de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème n'est pas assurée. Dans ce cas, nous pouvons utiliser
 - ★ le principe d'absorption limite qui consiste à ajouter un frottement $i\theta$ au nombre d'onde κ afin d'assurer la coercivité de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème, par la suite passer à la limite lorsque $\theta \rightarrow 0^+$.
 - ★ dans le cadre de cette thèse, nous utilisons la théorie de Fredholm qui permet de déduire l'existence d'une solution à partir de son unicité.

3.2.3 Système d'équations

Le problème de diffraction dans $\Omega^\delta = \Omega^{ext} \cup \Omega_j^\delta \cup \Gamma_{j-1}^\delta$, $j = 1, \dots, N$, s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0, & (3.7a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{j}. & (3.7b) \end{cases}$$

Les grandeurs caractéristiques du milieu ε et μ sont les fonctions scalaires définies par (3.143) et (3.128), respectivement. La densité de courant \mathbf{j} est une fonction supposée de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega^{ext})$ à support compact disjoint de l'origine.

Le champ électrique \mathbf{E} vérifie au bord de l'obstacle métallique D

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \text{sur } \Gamma^\delta. \quad (3.8)$$

Comme il s'agit d'un problème de transmission, nous complétons le système par les conditions d'interfaces, qui sont définies sur les surfaces $\Gamma = \Gamma_0^\delta$ et Γ_j^δ , pour $j = 1, \dots, N - 1$.

$$\begin{cases} [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{\Gamma_j^\delta} = 0, & j = 0, \dots, N - 1, & (3.9a) \\ [\mathbf{H} \times \mathbf{n}]|_{\Gamma_j^\delta} = 0, & j = 0, \dots, N - 1. & (3.9b) \end{cases}$$

Finalement, le champ électromagnétique vérifie la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left(\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \mathbf{E} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Remarque 3.2 Nous disons que la solution du système de Maxwell harmonique (3.7) est sortante si elle vérifie la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller.

3.2. Description du problème physique considéré

Sur chaque sous-domaine constituant Ω^δ le domaine de propagation de l'onde électromagnétique, nous avons l'équation du second ordre qui met en jeu le champ électrique \mathbf{E} suivante

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = i\omega \mathbf{j}. \quad (3.11)$$

Cette dernière est obtenue à partir du système de Maxwell (3.7) et, pour $\mathbf{F} = i\omega \mu \mathbf{j}$ nous pouvons écrire

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{F}, \quad (3.12)$$

avec κ , μ et \mathbf{F} sont toujours relatifs à chaque sous-domaine.

Nous pouvons déduire le champ magnétique \mathbf{H} à partir de la relation suivante

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega \mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

Ainsi, suivant les conditions de transmission (3.9b), le champ \mathbf{H} doit vérifier $[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]|_{\Gamma_j^\delta} = 0$, $j = 0, \dots, N - 1$. Nous devons donc avoir

$$[\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{\Gamma_j^\delta} = 0, \quad j = 0, \dots, N - 1. \quad (3.14)$$

Pour que ces dernières équations soient bien définies au sens des distributions, nous insistons sur le fait qu'elles sont définies sur chaque partie de Ω^δ .

3.2.4 Cadre fonctionnel

L'énergie électromagnétique est donnée par (cf. le livre de Lions-Dautray [16, §4])

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\delta} (\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{H}|^2) dx. \quad (3.15)$$

D'après (3.13), il s'ensuit alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\delta} (\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\omega^2 \mu^3} |\mathbf{rot} \mathbf{E}|^2) dx. \quad (3.16)$$

Il est naturel de chercher la solution dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega^\delta)$, dont la définition est donnée dans la sous-section 1.3.1.

La densité de charge ρ est reliée à la densité de courant \mathbf{j} par l'équation de conservation de la charge en régime harmonique (voir sous-section 2.3)

$$i\omega \rho = \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Par hypothèse, la densité de courant \mathbf{j} est une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω^{ext} . Il suit que ρ est une fonction régulière à support compact dans Ω^{ext} . Ainsi, la densité ρ est dans $L^2(\Omega^{ext})$. D'après le système de Maxwell harmonique (2.11), nous avons

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho. \quad (3.17)$$

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Nous cherchons alors les solutions du système de Maxwell dans

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega^\delta) \mid \mathbf{rot} \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega^\delta) \text{ et } \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) \in L^2(\Omega^\delta) \}. \quad (3.18)$$

En raison du caractère non borné du domaine de propagation, le champ électromagnétique sera recherché localement dans l'espace \mathbf{X} . Pour ce faire, nous considérons \mathcal{B}_R une boule de centre \mathbf{O} et de rayon $R > 0$, définie par

$$\mathcal{B}_R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < R \}.$$

Le support du terme source $\mathbf{F} = i\omega\mu\mathbf{j}$ est contenu dans \mathcal{B}_R et il est supposé assez loin de l'obstacle métallique recouvert de la multicouche (voir Figure : 3.2). D'après l'équation de conservation de la charge, la régularité de \mathbf{F} est $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega^\delta)$ localement. Dans le cadre de cette thèse, nous supposons que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

Remarque 3.3 *La boule \mathcal{B}_R nous permet de décomposer le domaine infini de propagation de l'onde électromagnétique en deux parties*

- *une partie non bornée dans laquelle nous définissons le problème de Maxwell extérieur homogène, vérifié par l'onde sortante et une condition d'onde sortante. Une première étape consiste à résoudre ce problème et obtenir un opérateur d'impédance sur la sphère de rayon $|\mathbf{x}| = R$.*
- *une partie bornée contenant le support du terme source \mathbf{F} , dans laquelle la solution vérifie le problème de Maxwell non homogène et la condition d'impédance sur la sphère de rayon $|\mathbf{x}| = R$. Pour démontrer que la solution existe et unique pour ce dernier problème, nous allons utiliser l'alternative de Fredholm. Cette dernière nous permet de déduire l'existence d'une solution à partir de son unicité. Nous suivons le livre de Monk [43], où le problème est tout d'abord posé en domaine dont la frontière extérieure est une sphère de rayon $R > 0$. La condition d'onde sortante est alors écrite comme une condition d'impédance. Une étude précise de cet opérateur permet alors de déduire l'unicité.*

3.3 Décomposition modale de la solution sortante de Maxwell à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R

Nous désignons par \mathcal{B}'_R le complémentaire de la boule de centre \mathbf{O} et de rayon $R > 0$, définie par

$$\mathcal{B}'_R = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > R \}.$$

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, nous avons $\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ la normale unitaire dirigée vers l'intérieur de \mathcal{B}'_R , voir Figure : 3.1.

3.3. Décomposition modale de la solution sortante de Maxwell à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R

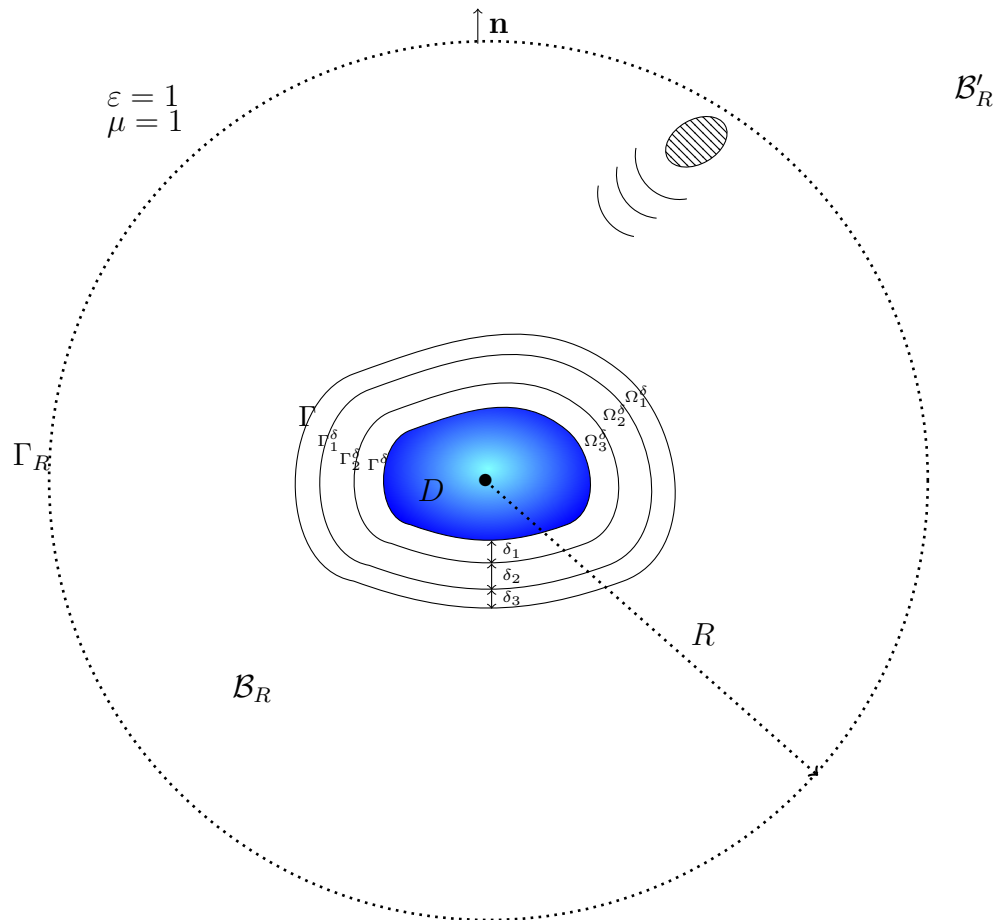


FIGURE 3.2 – Géométrie du problème de propagation d'une onde électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R .

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

La restriction de la solution sortante du système de Maxwell d'ordre deux sur \mathcal{B}'_R vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot rot } \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \mathcal{B}'_R, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \lambda, & \text{sur } \Gamma_R = \partial \mathcal{B}'_R, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left(\mathbf{rot } \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \mathbf{E} \right) = 0. & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.19a) \\ (3.19b) \\ (3.19c) \end{array}$$

Pour \mathbf{E} dans l'espace \mathbf{X} et λ supposé connu dans l'espace $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$, ce dernier est défini dans la sous-section 1.3.2. Nous allons calculer \mathbf{E} en fonction de la trace tangentielle de λ (la trace tournée $\pi/2$). L'opérateur qui associe à λ le terme $\mathbf{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ est l'opérateur d'impédance.

Remarque 3.4 *En ce qui concerne le choix de la donnée λ , il est naturel de la considérer régulière (en vue d'une donnée venant de la nature ou bien pour les applications en simulations numériques). Toutefois, dans notre cadre théorique, le théorème des traces tangentielles nous permet d'étendre les données au bord à des fonctions moins régulières appartenant à $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$.*

La solution sortante \mathbf{E} admet la décomposition modale suivante (voir [37, Chapitre 5] ou bien [43, Chapitre 9])

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} e_{n,m}^\times \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) \right\}. \quad (3.20)$$

Les modes $\mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x})$ et $\mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x})$ sont des fonctions reliées par les formules (voir [37, Chapitre 5])

$$\mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot } \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot } \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

qui vérifient

$$\mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) = \left(\frac{h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|)}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \right) \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}), \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) &= \frac{n(n+1)}{i\kappa|\mathbf{x}|} \left(\frac{h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|)}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \right) Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{x}} \\ &+ \frac{1}{i\kappa|\mathbf{x}|} \left(\frac{h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|) + \kappa|\mathbf{x}|h_n^{(1)' }(\kappa|\mathbf{x}|)}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \right) \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Les fonctions $h_n^{(1)}(\kappa|\mathbf{x}|)$ sont les fonctions de Hankel sphériques de première espèce et les fonctions $Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}})$ sont les harmoniques sphériques angulaires (voir l'Annexe A dans laquelle il y a un petit rappel et, pour plus de détails nous renvoyons le

3.3. Décomposition modale de la solution sortante de Maxwell à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R

lecteur par exemple à [15, 38, 43, 44]).

Le coefficient α_n est donnée par

$$\alpha_n = 1 + \kappa R \frac{h_n^{(1)'}(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)}. \quad (3.23)$$

Remarque 3.5 *Le développement de la solution sortante \mathbf{E} sur la sphère de rayon $|\mathbf{x}| = R$, sous la forme d'une somme discrète des modes propres est un développement en changement de variables (voir [43, Chapitre 9]).*

Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques caractéristiques de α_n .

Lemme 3.1 (cf. [43, Lemma 9.20, Chapitre 9]) *Ils existent deux constantes positives c_1 et c_2 , tel que pour tout n , vous avons*

$$c_1 n \leq |\alpha_n| \leq c_2 n. \quad (3.24)$$

Lemme 3.2 *Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\{ \Re \left(\frac{h_n^{(1)'}(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \right) < 0, \right. \quad (3.25a)$$

$$\left. \Im \left(\frac{h_n^{(1)'}(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)} \right) > 0. \right. \quad (3.25b)$$

Preuve : Il suffit d'adapter au 3D les preuves dans la thèse de Tordeux [57, pp. 275-277]. La fonction de Hankel sphérique de première espèce d'ordre n est définie comme suit

$$h_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z), \quad (3.26)$$

avec J_n est la fonction de Bessel sphérique d'ordre n et Y_n est la fonction de Neumann sphérique d'ordre n (cf. [43, Section 9.3.2]). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $z = \kappa R \in \mathbb{R}^{*,+}$, les fonctions J_n et Y_n vérifient les propriétés suivantes ([43, Lemme A.3, Lemme A.4])

$$J_n(z)Y_n'(z) - J_n'(z)Y_n(z) > 0, \quad (3.27)$$

$$J_n'(z)J_n(z) + Y_n'(z)Y_n(z) < 0. \quad (3.28)$$

Nous avons

$$\frac{h_n^{(1)'}(z)}{h_n^{(1)}(z)} = \frac{J_n'(z) + iY_n'(z)}{J_n(z) + iY_n(z)} \quad (3.29)$$

$$= \frac{(J_n'(z) + iY_n'(z))(J_n(z) - iY_n(z))}{J_n^2(z) + Y_n^2(z)} \quad (3.30)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{J_n'(z)J_n(z) + Y_n'(z)Y_n(z)}{J_n^2(z) + Y_n^2(z)} \right)}_{<0} + i \underbrace{\left(\frac{J_n(z)Y_n'(z) - J_n'(z)Y_n(z)}{J_n^2(z) + Y_n^2(z)} \right)}_{>0}. \quad (3.31)$$

□

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Corollaire 3.1 *Les signes de la partie réelle et de la partie imaginaire de α_n sont déterminés comme suit*

$$\begin{cases} \Re(\alpha_n) < 0, \\ \Im(\alpha_n) > 0. \end{cases} \quad (3.32a)$$

$$\quad (3.32b)$$

Preuve : Nous avons

$$\alpha_n = 1 + \kappa R \frac{h_n^{(1)'}(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)}.$$

Alors

$$\begin{cases} \Re(\alpha_n) = 1 + \kappa R \Re\left(\frac{h_n^{(1)'(\kappa R)}(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)}\right), \\ \Im(\alpha_n) = \kappa R \Im\left(\frac{h_n^{(1)'(\kappa R)}(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)}\right). \end{cases} \quad (3.33a)$$

$$\quad (3.33b)$$

D'après le lemme 3.2, nous déduisons que

$$\Im(\alpha_n) > 0. \quad (3.34)$$

Pour déterminé le signe de la partie réelle de α_n , nous avons besoin d'utiliser les propriétés des fonctions de Bessel et de Neumann sphériques.

Pour $\kappa R = z$, nous avons

$$\begin{aligned} \Re(\alpha_n) &= 1 + z \Re\left(\frac{h_n^{(1)'(z)}(z)}{h_n^{(1)}(z)}\right), \\ &= 1 + z \frac{J_n'(z)J_n(z) + Y_n'(z)Y_n(z)}{J_n^2(z) + Y_n^2(z)} \\ &= \frac{J_n^2(z) + Y_n^2(z) + z(J_n'(z)J_n(z) + Y_n'(z)Y_n(z))}{J_n^2(z) + Y_n^2(z)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nous rappelons la formule suivante [2, p. 439]

$$\begin{cases} J_n^2(z) + Y_n^2(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!(2n-2k)!}{k![(n-k)!]^2} (2z)^{2k-2n} \\ = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!(2n-2k)!}{k![(n-k)!]^2} (2z)^{2k-2n} \end{cases} \quad (3.36)$$

En dérivant cette dernière formule, nous obtenons

$$\begin{cases} j_n'(z)j_n(z) + y_n'(z)y_n(z) = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!(2n-2k)!}{k![(n-k)!]^2} (2z)^{2k-2n} \\ + \frac{1}{2z^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!(2n-2k)!(4k-4n)}{k![(n-k)!]^2} (2z)^{2k-2n-1} \end{cases} \quad (3.37)$$

3.3. Décomposition modale de la solution sortante de Maxwell à l'extérieur d'une boule \mathcal{B}_R

Il s'en suit

$$J_n^2(z) + Y_n^2(z) + z(J_n'(z)J_n(z) + Y_n'(z)Y_n(z)) = \frac{1}{2z} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k)!(2n-2k)!(4k-4n)}{k![(n-k)!]^2} (2z)^{2k-2n-1}. \quad (3.38)$$

Comme $4k-4n < 0$, alors cette dernière formule est de signe négatif. Finalement, nous déduisons que $\Re(\alpha_n) < 0$. □

3.3.1 Identification des coefficients $e_{n,m}^t$ et $e_{n,m}^\times$

Nous calculons tout d'abord la trace tangentielle de la solution sortante \mathbf{E}

$$\gamma_t \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \gamma_t \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} e_{n,m}^\times \gamma_t \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) \right\}. \quad (3.39)$$

La fonction $\mathbf{S}_{n,m}^t$ à valeurs dans \mathbb{R}^3 , définie par (3.22a), est un champ tangent à la sphère orthogonale à $\hat{\mathbf{x}}$. Par contre, la fonction $\mathbf{S}_{n,m}^\times$ définie par (3.22b) est constituée d'une partie radiale en $\hat{\mathbf{x}}$ et, une partie tangentielle en $\nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$. Donc la trace tangentielle de \mathbf{E} à la sphère de rayon $|\mathbf{x}| = R$ est donnée par

$$\gamma_t \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) + e_{n,m}^\times \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.40)$$

D'autre part La donnée λ se décompose sous la forme (voir Annexe B.1)

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \lambda_{n,m}^t \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) - \lambda_{n,m}^\times \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.41)$$

pour $\mathbf{x} \in \Gamma_R$. Les coefficients spectraux sont donnés par

$$\lambda_{n,m}^t = \frac{1}{n(n+1)} \int_{\Gamma_R} \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\Gamma_R, \quad (3.42a)$$

$$\lambda_{n,m}^\times = -\frac{1}{n(n+1)} \int_{\Gamma_R} \lambda(\mathbf{x}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} \overline{Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})} d\Gamma_R. \quad (3.42b)$$

D'après la condition au bord (3.19b) et en utilisant les définitions des traces tangentielles γ_\times et γ_t (voir section 1.4), nous avons

$$\gamma_t \mathbf{E} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \lambda \times \mathbf{n}. \quad (3.43)$$

La décomposition spectrale de $\lambda \times \mathbf{n}$ est donnée par

$$(\lambda \times \mathbf{n})(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \lambda_{n,m}^t \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) + \lambda_{n,m}^\times \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \quad (3.44)$$

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

et cela en utilisant les relations suivantes

$$\nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{n} = \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}), \quad (3.45a)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{n} = -\nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}). \quad (3.45b)$$

Par identification des coefficients de (3.92) et de (3.44), nous avons

$$e_{n,m}^t = \lambda_{n,m}^t, \quad (3.46a)$$

$$e_{n,m}^\times = \lambda_{n,m}^\times. \quad (3.46b)$$

Conclusion 3.1 *Pour $\lambda \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$ définie par (3.41), la solution sortante du système de Maxwell (3.19) est donnée par*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \lambda_{n,m}^t \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \lambda_{n,m}^\times \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) \right\}, \quad (3.47)$$

pour $\lambda_{n,m}^t$ et $\lambda_{n,m}^\times$ définis par (3.42a) et (3.42b), respectivement.

3.4 Décomposition modale de l'opérateur d'impédance

Dans ce paragraphe nous allons calculer explicitement l'opérateur d'impédance, ce dernier représente l'opérateur de frontière défini sur la sphère $\Gamma_R = \partial(\mathcal{B}_R)$, que nous obtenons à partir de la formulation variationnelle du système de Maxwell d'ordre deux à l'intérieur de la boule \mathcal{B}_R (sous-section 3.6). Il est défini par le terme au bord $\langle \text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}_t \rangle_{\Gamma_R}$.

3.4.1 Définitions

Nous rappelons tout d'abord la décomposition modale de la solution sortante

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) + e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) \right\}. \quad (3.48)$$

Les modes $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^\times$ sont données par les fonctions (3.22a) et (3.22b), respectivement. Les coefficients $e_{n,m}^\times$ et $e_{n,m}^t$ sont donnés par les formules (3.46b) et (3.46a), respectivement.

Pour commencer, nous calculons $\text{rot } \mathbf{E}$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \text{rot } \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) + e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \text{rot } \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) \right\}. \quad (3.49)$$

3.4. Décomposition modale de l'opérateur d'impédance

Nous utilisons la relation (3.21) et le fait que les modes $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^\times$ vérifient l'équation de Maxwell d'ordre deux (voir [37, Théorème 5.2]), nous obtenons

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ i\kappa e_{n,m}^t \mathbf{S}_{n,m}^\times(\mathbf{x}) - i\kappa e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \mathbf{S}_{n,m}^t(\mathbf{x}) \right\}. \quad (3.50)$$

Nous calculons maintenant $(\mathbf{rot} \mathbf{E}) \times \mathbf{n}$, en remplaçant $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^\times$ par leurs formules, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(\frac{n(n+1)}{R} \right) e_{n,m}^t Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{n} \right. \\ \left. + \frac{1}{R} e_{n,m}^t \alpha_n \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{n} \right. \\ \left. - i\kappa e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{n} \right\}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

ce dernier à un sens dans $\mathbf{H}_t^{-1/2}(\mathbf{rot}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$.

Comme $\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{x}}$, nous avons

$$\widehat{\mathbf{x}} \times \mathbf{n} = 0. \quad (3.52)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \frac{\alpha_n}{i\kappa R} \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right. \\ \left. + e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Car

$$\nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{n} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}), \quad (3.54)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{n} = -\nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}). \quad (3.55)$$

Nous remplaçons $e_{n,m}^t$ et $e_{n,m}^\times$ par leurs formules (3.46a) et (3.46b) dans cette dernière expression, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \lambda_{n,m}^t \frac{\alpha_n}{i\kappa R} \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right. \\ \left. + \lambda_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Remarque 3.6 Pour être en conformité avec [43, 44], dans ce chapitre, nous adoptons la notation \mathbf{E}_t pour la trace tangentielle $\gamma_t \mathbf{E}$.

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Définition 3.1 Nous désignons par

$$\mathcal{Z} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_R}, \Gamma_R) \longrightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R), \quad (3.57)$$

l'opérateur *electric-to-magnetic* de Calderon, qui associe à la trace tangentielle du champ électrique \mathbf{E}_t de la solution sortante du système de Maxwell, la trace tournée de 90° , $\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}$, nous écrivons

$$\mathcal{Z}\mathbf{E}_t = \frac{1}{i\kappa} \text{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}. \quad (3.58)$$

Le lecteur pourra revenir à [44, Section 5.3.2].

Corollaire 3.2 D'après la définition 3.1 et la formule (3.53), la décomposition modale de l'opérateur \mathcal{Z} est donnée par

$$\mathcal{Z}\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \frac{\alpha_n}{i\kappa R} \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) + e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}, \quad (3.59)$$

avec

$$\alpha_n = 1 + \kappa R \frac{h_n^{(1)' }(\kappa R)}{h_n^{(1)}(\kappa R)}. \quad (3.60)$$

Preuve : C'est une application directe de la définition 3.1. \square

Proposition 3.1 En utilisant la définition de l'opérateur *electric-to-magnetic* de Calderon \mathcal{Z} , la décomposition modale de l'opérateur de frontière

$$i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{E}_t, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = \langle \text{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R}, \quad (3.61)$$

est donnée par

$$\langle \text{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ n(n+1) \left(\frac{\alpha_n}{i\kappa R} e_{n,m}^t \overline{e_{n,m}^{t'}} + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} e_{n,m}^\times \overline{e_{n,m}^{\times'}} \right) \right\}. \quad (3.62)$$

Pour $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, nous avons la forme quadratique

$$\langle \text{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}_t \rangle_{\Gamma_R} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ n(n+1) \left(\frac{\alpha_n}{i\kappa R} |e_{n,m}^t|^2 + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} |e_{n,m}^\times|^2 \right) \right\}. \quad (3.63)$$

Les coefficients $e_{n,m}^\times$ et $e_{n,m}^t$ sont données par les formules (3.46b) et (3.46a), respectivement.

3.4. Décomposition modale de l'opérateur d'impédance

Preuve : Nous effectuons le produit de dualité suivant

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = & \\
i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} & \left\{ \frac{\alpha_n}{i\kappa R} e_{n,m}^t \overline{e_{n',m'}^{t'}} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}, \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n',m'} \right\rangle_{S^2} \right. \\
& + e_{n,m}^t \overline{e_{n',m'}^{\times'}} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}, \nabla_{S^2} Y_{n',m'} \right\rangle_{S^2} \\
& + e_{n,m}^{\times} \overline{e_{n',m'}^{t'}} \left\langle \nabla_{S^2} Y_{n,m}, \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n',m'} \right\rangle_{S^2} \\
& \left. + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} e_{n,m}^{\times} \overline{e_{n',m'}^{\times'}} \left\langle \nabla_{S^2} Y_{n,m}, \nabla_{S^2} Y_{n',m'} \right\rangle_{S^2} \right\}. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\nabla_{S^2} Y_{n,m}$ et $\overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}$ sont orthogonaux. En plus, nous avons les relations

$$\langle \nabla_{S^2} Y_{n,m}, \nabla_{S^2} Y_{n',m'} \rangle_{S^2} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n,m}, \overrightarrow{\mathbf{rot}}_{S^2} Y_{n',m'} \right\rangle_{S^2} = \langle Y_{n,m}, -\Delta_{S^2} Y_{n',m'} \rangle_{S^2}. \quad (3.65)$$

Nous savons aussi que les harmoniques sphériques $Y_{n,m}$ sont des solutions du problème aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_{S^2}

$$-\Delta_{S^2} Y_{n',m'} = n'(n'+1) Y_{n',m'}. \quad (3.66)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = & \\
i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} & \left\{ n'(n'+1) \frac{\alpha_n}{i\kappa R} e_{n,m}^t \overline{e_{n',m'}^{t'}} \langle Y_{n,m}, Y_{n',m'} \rangle_{S^2} \right. \\
& \left. + n'(n'+1) \frac{i\kappa R}{\alpha_n} e_{n,m}^{\times} \overline{e_{n',m'}^{\times'}} \langle Y_{n,m}, Y_{n',m'} \rangle_{S^2} \right\}. \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Finalement, nous utilisons le caractère orthonormal des harmoniques sphériques, nous avons

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ n(n+1) \left(\frac{\alpha_n}{i\kappa R} e_{n,m}^t \overline{e_{n,m}^{t'}} + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} e_{n,m}^{\times} \overline{e_{n,m}^{\times'}} \right) \right\}. \quad (3.68)$$

Pour $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, nous avons la forme quadratique

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}_t \rangle_{\Gamma_R} = i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ n(n+1) \left(\frac{\alpha_n}{i\kappa R} |e_{n,m}^t|^2 + \frac{i\kappa R}{\alpha_n} |e_{n,m}^{\times}|^2 \right) \right\}. \quad (3.69)$$

Les coefficients $e_{n,m}^{\times}$ et $e_{n,m}^t$ sont données par les formules (3.46b) et (3.46a), respectivement. \square

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Remarque 3.7 *En tenant compte des métriques, nous avons par exemple*

$$\langle \mathbf{E}, \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\Gamma_R} = R^2 \langle \mathbf{E}(R \hat{\cdot}), \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\mathcal{S}^2}. \quad (3.70)$$

Dans les formules précédentes, le coefficient multiplicatif R^2 n'était pas pris en considération.

Théorème 3.1 *L'opérateur $\mathcal{Z} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_R}, \Gamma_R) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$ est continu.*

Preuve : Il se démontre suivant le même principe que dans [43, Théorème 9.21], en utilisant le lemme 3.1. □

3.5 Système de Maxwell d'ordre deux à l'intérieur d'une boule \mathcal{B}_R

Nous considérons le système de Maxwell du second ordre non homogène, défini dans un domaine borné de \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot rot } \mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{E} = \mathbf{F}, & \text{dans } \Omega_R, \quad (3.71a) \\ \text{rot } \mu_j^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_j - \omega^2 \varepsilon_j \mathbf{E}_j = 0, & \text{dans } \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.71b) \\ (\text{rot } \mathbf{E} - \mu_1^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma, \quad (3.71c) \\ [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] = 0, & \text{sur } \Gamma, \quad (3.71d) \\ [\mathbf{E}_j \times \mathbf{n}] = 0, & \text{sur } \Gamma_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.71e) \\ [\mu_j^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_j \times \mathbf{n}] = 0, & \text{sur } \Gamma_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.71f) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_N = 0, & \text{sur } \Gamma^\delta, \quad (3.71g) \\ \text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = i\kappa \mathcal{Z}(\lambda \times \mathbf{n}), & \text{sur } \Gamma_R. \quad (3.71h) \end{array} \right.$$

Le crochet $[\cdot]$ représente le saut à la traversée d'une surface. L'opérateur \mathcal{Z} est l'opérateur d'impédance appliqué à la donnée $\lambda \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_t$, cette dernière appartient à l'espace $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$.

Nous supposons que l'obstacle métallique D , recouvert par une multicouche, est de géométrie sphérique. Il est contenu dans une boule \mathcal{B}_R de centre \mathbf{O} et de rayon $R > 0$ définie par

$$\mathcal{B}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| < R\}.$$

Nous désignons par Ω_R la couronne définie comme suit

$$\Omega_R = \mathcal{B}_R \setminus (D \cup \Omega_j^\delta), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.72)$$

de frontière extérieur Γ_R et intérieur Γ , voir Figure : 3.3.

Nous notons par Ω_R^δ le domaine

$$\Omega_R^\delta = \Omega_R \cup \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.73)$$

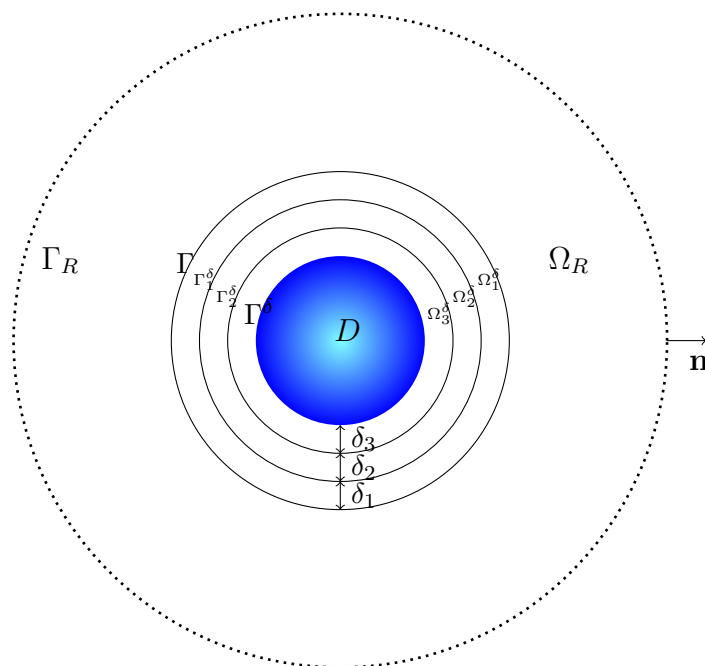


FIGURE 3.3 – Géométrie du problème de diffraction par un obstacle métallique sphérique dans un domaine borné. L'obstacle métallique est recouvert par des substrats diélectriques différents. C'est un modèle qui contient trois couches minces de diélectriques.

de frontière extérieur Γ_R et intérieur Γ^δ . Ce dernier représente le domaine borné d'intégration, que nous considérons dans la formulation variationnelle. La normale unitaire orientée vers l'extérieur de la boule \mathcal{B}_R est notée \mathbf{n} .

Remarque 3.8 *L'écriture explicite de la solution \mathbf{E} sur la surface Γ en utilisant les modes $\mathbf{S}_{n,m}^t$ et $\mathbf{S}_{n,m}^\times$ nous oblige de supposer que l'obstacle métallique D est de géométrie sphérique.*

3.6 Formulation variationnelle

Pour écrire la formulation variationnelle du système (3.71) Nous multiplions (3.71a) et (3.71b) par une fonction test \mathbf{E}' et, nous intégrons par partie sur Ω_R^δ en utilisant la formule de Green (1.100). Par la suite, nous utilisons les conditions de transmission définies sur les interfaces Γ_j^δ , $j = 1, \dots, N-1$; ainsi que les conditions

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

aux limites (3.71c)-(3.71g), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} (\mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'}) dx \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j^\delta} (\mu_j^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \varepsilon_j \mathbf{E}_j \cdot \overline{\mathbf{E}'}) dx \\ & - \langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = \int_{\Omega_R} \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{E}'} dx, \end{aligned} \quad (3.74)$$

pour toute fonction régulière \mathbf{E}' , avec $\mathbf{n} \times \mathbf{E}' = 0$ sur Γ^δ et $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega_R)$. Nous supposons que le champ électrique \mathbf{E} vérifie la contrainte $\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$.

D'après la définition 3.1, le terme de bord en $\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ s'écrit

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R} = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}) \cdot \overline{\mathbf{E}'_t} d\Gamma_R = i\kappa \langle \mathcal{Z} \mathbf{E}_t, \mathbf{E}'_t \rangle. \quad (3.75)$$

La formulation variationnelle (3.74) s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} (\mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'}) dx \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j^\delta} (\mu_j^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \varepsilon_j \mathbf{E}_j \cdot \overline{\mathbf{E}'}) dx \\ & - i\kappa \langle \mathcal{Z} \mathbf{E}_t, \mathbf{E}'_t \rangle = \int_{\Omega_R} \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{E}'} dx, \end{aligned} \quad (3.76)$$

Remarque 3.9 1. Le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_R}$ représente le produit de dualité entre les espaces $\mathbf{H}_t^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$ et $\mathbf{H}_t^{-1/2}(\text{rot}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$ (cf. section 1.6, définition 1.3).

2. D'après la définition 3.1, nous avons $\mathcal{Z} \mathbf{E}_t$ dans l'espace $\mathbf{H}_t^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$. En plus, D'après le théorème de trace (cf. chapitre 1), la trace tangentielle $\gamma_t \mathbf{E} = \mathbf{E}_t$ est dans l'espace $\mathbf{H}_t^{-1/2}(\text{rot}_{\Gamma_R}, \Gamma_R)$. Nous déduisons alors que $\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_t \rangle_{\Gamma_R}$ est bien défini.

L'espace fonctionnelle approprié est

$$\mathbf{H} = \{ \mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_R^\delta) \cap \mathbf{H}(\varepsilon \text{div}, \Omega_R^\delta) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \Gamma^\delta \}. \quad (3.77)$$

L'espace \mathbf{H} est un espace de Hilbert.

Nous notons par $b_\omega : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$, la forme sesquilinéaire définie par

$$\begin{aligned} b_\omega(\mathbf{E}, \mathbf{E}') &= \int_{\Omega_R} \left(\mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} \right) dx \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j^\delta} \left(\mu_j^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \varepsilon_j \mathbf{E}_j \cdot \overline{\mathbf{E}'} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

3.7. Existence et unicité de la solution

Nous notons par $a_\omega : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire définie par

$$a_\omega(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = b_\omega(\mathbf{E}, \mathbf{E}') - i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{E}_t, \mathbf{E}'_t \rangle. \quad (3.79)$$

Remarque 3.10 *Dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer la formulation variationnelle écrite d'une façon compacte comme suit*

$$\int_{\Omega_R^\delta} \left(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} \right) d\mathbf{x} - i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{E}_t, \mathbf{E}'_t \rangle = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{E}'} d\mathbf{x}, \quad (3.80)$$

avec les caractéristiques physiques ε et μ , \mathbf{F} , ainsi que la solution \mathbf{E} des fonctions définies par morceaux sur $\Omega_R^\delta = \Omega_R \cup \Omega_j^\delta$, $j = 1, \dots, N$.

Dans la suite nous énonçons le théorème principal dans ce chapitre d'existence et d'unicité de la solution faible pour le système de Maxwell (3.71) défini à l'intérieur de la boule \mathcal{B}_R .

Théorème 3.2 *Pour $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega_R)$ à support compact et à divergence nulle, le problème variationnel associé au système d'équations (3.71), défini par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{H}, \text{ telque} \\ \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}, \quad a_\omega(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \int_{\Omega_R} \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{E}'} d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (3.81a)$$

$$\quad (3.81b)$$

admet une unique solution \mathbf{E} .

Pour démontrer ce théorème nous utilisons le théorème de Fredholm. L'unicité de la solution est donnée par le théorème de prolongement unique puis, nous obtenons l'existence de la solution à partir de son unicité en décomposant le champ électrique en la somme d'un champ de gradient et son orthogonal (cf. [43, Chapitre 3]).

3.7 Existence et unicité de la solution

Nous définissons les deux espaces suivant

$$\mathbf{W} = \{ \phi \in H^1(\Omega_R^\delta), \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_R \} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_R^\delta) \mid \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma^\delta \text{ et } \operatorname{div}_{\Gamma^\delta} \mathbf{u}_t = \operatorname{div}_{\Gamma_R} \mathbf{u}_t = 0 \}. \quad (3.83)$$

La norme de l'espace \mathbf{W} est induite par la norme de l'espace $H^1(\Omega_R^\delta)$. La norme de l'espace \mathbf{X} est induite par la norme de l'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_R^\delta)$.

Théorème 3.3 *L'injection de l'espace \mathbf{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$ est compacte.*

Remarque 3.11 *Comme l'injection de l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega_R^\delta)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$ est compacte [13], alors il suffit de démontrer que l'espace \mathbf{X} s'injecte continûment dans l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega_R^\delta)$.*

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Preuve du Théorème 3.3 : Tout d'abord, nous considérons le cas d'un domaine contenant une seule couche mince Ω_1^δ . Nous avons alors $\Omega_R^\delta = \Omega_1^\delta \cup \Omega_R$. L'espace \mathbf{X} est contenu dans l'espace $\tilde{\mathbf{X}}$ défini par

$$\tilde{\mathbf{X}} = \left\{ \mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_R^\delta) \cap \mathbf{H}(\varepsilon \operatorname{div}, \Omega_R^\delta) \mid \mathbf{E}_t \in \mathbf{H}_t^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma^\delta}, \Gamma^\delta) \right. \\ \left. \text{et } \mathbf{E}_t \in \mathbf{H}_t^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma_R}, \Gamma_R) \right\}. \quad (3.84)$$

D'après le Théorème 5.4.4 dans le livre de Nédélec [44], l'espace $\tilde{\mathbf{X}}$ s'injecte dans $\mathbf{H}^1(\Omega_1^\delta) \times \mathbf{H}^1(\Omega_R)$. Ce dernier s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega_1^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R)$. En utilisant la continuité des traces tangentielles \mathbf{E}_t ainsi que la continuité des traces normales $\varepsilon(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})$ à la traversée des surfaces séparatrices entre les couches minces, notées Γ_j^δ , $j = 1, \dots, N-1$, nous pouvons généraliser le résultat d'injection de l'espace \mathbf{X} , défini sur $\Omega_R \cup \Omega_j^\delta$, $j = 1, \dots, N$, dans $\mathbf{H}^1(\Omega_N^\delta) \times \dots \times \mathbf{H}^1(\Omega_1^\delta) \times \mathbf{H}^1(\Omega_R)$. \square

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution, nous cherchons \mathbf{E} sous la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} + \nabla p, \quad (3.85)$$

avec $p \in \mathbf{W}$ et $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$.

Cette décomposition n'est pas unique, nous y ajoutons les conditions suivantes

1. Nous choisissons p vérifiant

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla p) = 0. \quad (3.86)$$

Nous avons alors

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0. \quad (3.87)$$

2. Sur Γ_R , nous choisissons \mathbf{u} vérifiant

$$\operatorname{div}_{\Gamma_R} \mathbf{u}_t = 0. \quad (3.88)$$

Nous utilisons les propriétés des opérateurs différentiels surfaciques (cf. chapitre 1), nous avons

$$\operatorname{div}_{\Gamma_R} \mathbf{E}_t = -\operatorname{rot}_{\Gamma_R}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{n}). \quad (3.89)$$

Nous avons aussi

$$\operatorname{div}_{\Gamma_R} \nabla_{\Gamma_R} p = \Delta_{\Gamma_R} p. \quad (3.90)$$

En utilisant la condition aux limites $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \lambda$ donnée par (3.19b), nous obtenons

$$\Delta_{\Gamma_R} p = \operatorname{rot}_{\Gamma_R} \lambda. \quad (3.91)$$

3. La trace de p sur Γ_R est déterminée à une constante près. Cette dernière est fixée en prenant $\langle p, 1 \rangle_{\Gamma_R} = 0$, c'est à dire considérer p à moyenne nulle sur Γ_R .

3.7. Existence et unicité de la solution

Remarque 3.12 *Les hypothèses précédents nous permettent de déterminer les régularités de p et de \mathbf{u} . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au livre de Nédélec [44, p. 216].*

Sur le coté extérieur de la sphère Γ_R , nous avons

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{n,m}^t \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) + e_{n,m}^\times \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.92)$$

Les décompositions modales de \mathbf{u}_t et de $(\nabla p)_t = \nabla_{\Gamma_R} p$ sont données par

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ u_{n,m}^t \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) + u_{n,m}^\times \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}, \quad (3.93)$$

$$(\nabla_{\Gamma_R} p)(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ (\nabla p)_{n,m}^t \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) + (\nabla p)_{n,m}^\times \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.94)$$

Nous pouvons écrire \mathbf{E}_t de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ (u_{n,m}^t + (\nabla p)_{n,m}^t) \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right. \\ \left. + (u_{n,m}^\times + (\nabla p)_{n,m}^\times) \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

En utilisant la condition sur \mathbf{u}_t donnée par

$$\text{div}_{\Gamma_R} \mathbf{u}_t = 0.$$

Nous obtenons

$$u_{n,m}^\times = 0. \quad (3.96)$$

Il est clair que

$$\text{rot}_{\Gamma_R}(\nabla_{\Gamma_R} p) = 0.$$

Nous avons alors

$$(\nabla p)_{n,m}^t = 0. \quad (3.97)$$

Finalement, nous avons

$$e_{n,m}^t = u_{n,m}^t, \quad (3.98)$$

$$e_{n,m}^\times = (\nabla p)_{n,m}^\times. \quad (3.99)$$

Finalement, nous écrivons

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ u_{n,m}^t \overrightarrow{\text{rot}}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) + (\nabla p)_{n,m}^\times \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.100)$$

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

En utilisant ce dernier résultat et d'après la formule (3.59), l'opérateur d'impédance appliqué à \mathbf{E}_t , s'écrit

$$\mathcal{Z}\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = \mathcal{Z}^t\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) + \mathcal{Z}^\times\mathbf{E}_t(\mathbf{x}). \quad (3.101)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{Z}^t\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e_{n,m}^t \frac{\alpha_n}{i\kappa R} \mathbf{rot}_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}) \\ \mathcal{Z}^\times\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e_{n,m}^\times \frac{i\kappa R}{\alpha_n} \nabla_{S^2} Y_{n,m}(\widehat{\mathbf{x}}). \end{cases} \quad (3.102)$$

D'autre part, nous avons dans le cadre de la décomposition $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \nabla p$ avec $\operatorname{div}_{\Gamma_R} u_t = 0$

$$\mathcal{Z}^t\mathbf{E}_t = \mathcal{Z}^t\mathbf{u}_t \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}^\times\mathbf{E}_t = \mathcal{Z}^\times\nabla p$$

Dans le paragraphe suivant, nous réécrivons la formulation variationnelle (3.80) en utilisant p et \mathbf{u} . Pour \mathbf{E}' vérifiant la décomposition suivante $\mathbf{E}' = \mathbf{v} - \nabla q$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \\ & + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} - i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle - i\kappa \langle \mathcal{Z}(\nabla_{\Gamma_R} p), \mathbf{v}_t \rangle \\ & + i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{u}_t, (\nabla_{\Gamma_R} q) \rangle + i\kappa \langle \mathcal{Z}(\nabla_{\Gamma_R} p), (\nabla_{\Gamma_R} q) \rangle = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Pour q et \mathbf{v} vérifiant les mêmes hypothèses que p et \mathbf{u} . Alors en utilisant (3.96) et (3.97), nous avons

$$v_{n,m}^\times = 0, \quad (3.104)$$

$$(\nabla q)_{n,m}^t = 0. \quad (3.105)$$

Nous utilisons la formule (3.62) dans la proposition 3.2, nous obtenons

$$i\kappa \langle \mathcal{Z}(\nabla_{\Gamma_R} p), \mathbf{v}_t \rangle = 0, \quad (3.106a)$$

$$i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{u}_t, \nabla_{\Gamma_R} q \rangle = 0, \quad (3.106b)$$

$$\begin{aligned} i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{\alpha_n}{i\kappa R} \mathbf{u}_{n,m}^t \overline{\mathbf{v}_{n,m}^t} \\ &= i\kappa \langle \mathcal{Z}^t\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle, \end{aligned} \quad (3.106c)$$

$$\begin{aligned} i\kappa \langle \mathcal{Z}(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{i\kappa R}{\alpha_n} (\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times \overline{(\nabla_{\Gamma_R} q)_{n,m}^\times} \\ &= i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle. \end{aligned} \quad (3.106d)$$

3.7. Existence et unicité de la solution

Nous introduisons la notation suivante

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle \quad (3.107a)$$

$$B(\nabla p, \mathbf{v}) = -\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \quad (3.107b)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \quad (3.107c)$$

$$A(\mathbf{u}, \nabla q) = \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} \quad (3.107d)$$

$$B(\nabla p, \nabla q) = \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} + i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times (\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle \quad (3.107e)$$

$$L(\nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}. \quad (3.107f)$$

Nous écrivons maintenant les deux formulations variationnelles suivantes

$$\begin{cases} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), & (3.108a) \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = L(\nabla q). & (3.108b) \end{cases}$$

Lemme 3.3 *Pour $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega_R)$ à support compact et à divergence nulle, chercher l'existence et l'unicité de la solution \mathbf{E} vérifiant le problème variationnel associé au système d'équations (3.71), défini par*

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{H}, \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}, \quad a_\omega(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \int_{\Omega_R} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x}, \end{cases} \quad (3.109a)$$

est équivalent à chercher l'existence et l'unicité de (\mathbf{u}, p) vérifiant le problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{W}, \text{ tels que} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, & (3.110a) \\ \forall q \in \mathbf{W}, \quad A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}, & (3.110b) \end{cases}$$

pour (\mathbf{v}, q) vérifiant $\mathbf{v} - \nabla q = \mathbf{E}'$.

Preuve : Pour démontrer l'implication directe, nous procédons comme dans le paragraphe précédent. Prendre \mathbf{E} et \mathbf{E}' sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{u} + \nabla p, & (3.111a) \\ \mathbf{E}' = \mathbf{v} - \nabla q. & (3.111b) \end{cases}$$

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Les injecter dans (3.109a), nous obtenons (3.103). Par la suite, en regroupant les terme en utilisant les notations (3.107) nous obtenons le problème variationnel (3.110).

Pour démontrer l'implication inverse, nous prenons la somme de (3.110a) et de (3.110b), nous obtenons

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) + A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}. \quad (3.112)$$

Comme

$$\begin{cases} i\kappa \langle \mathcal{Z}(\nabla_{\Gamma_R} p), \mathbf{v}_t \rangle = 0 & (3.113a) \\ i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{u}_t, \nabla_{\Gamma_R} q \rangle = 0, & (3.113b) \end{cases}$$

nous obtenons

$$\begin{cases} i\kappa \langle \mathcal{Z}\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle = i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle & (3.114a) \\ i\kappa \langle \mathcal{Z}(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle = i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle. & (3.114b) \end{cases}$$

Par la suite, la formule (3.112) nous donne la formule (3.103). Finalement, en regroupant les termes suivant la décomposition $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \nabla p$ et $\mathbf{E}' = \mathbf{v} - \nabla q$ nous obtenons (3.109a). \square

L'étape suivante consiste à chercher l'existence et l'unicité de $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{W}$, vérifiant le problème variationnel (3.110). Pour ce faire, nous traitons les deux formulations variationnelles (3.110a) et (3.110b), respectivement. En décomposant chaque une d'elles en deux parties : compacte et coercive. Puis, nous prouvons l'injectivité du problème variationnel (3.110).

3.7.1 Traitement de la première forme sesquilinéaire

Nous prenons la forme sesquilinéaire dans (3.110a) et, nous l'écrivons sous la forme de la somme de deux termes, un terme coercif et un terme compact.

Nous définissons l'opérateur $K_1 : \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$ comme suit

$$K_1 = \begin{pmatrix} -2\omega^2 \varepsilon I & 0 \\ 0 & -\omega^2 \varepsilon I \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$

avec I est l'opérateur identité. Pour $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \nabla p \end{pmatrix}$ défini sur l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$, nous avons $K_1 \mathbf{U} \in \mathbf{X} \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$, avec

$$K_1 \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 \varepsilon \mathbf{u} \\ -\omega^2 \varepsilon \nabla p \end{pmatrix}. \quad (3.116)$$

3.7. Existence et unicité de la solution

Pour $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$ un vecteur défini sur l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$. Nous définissons le produit scalaire $\langle K_1 \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)}$ comme suit

$$\langle K_1 \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)} = -2\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}. \quad (3.117)$$

Nous ajoutons et nous soustrayons le terme $\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$ dans la forme sesquilinéaire de (3.110a), nous obtenons

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \\ \underbrace{\int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle}_{A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \underbrace{\langle K_1 \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)}}_{A_{12}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Dans la suite nous démontrons que $A_{11}(\cdot, \cdot)$ représente la partie coercive dans la forme sesquilinéaire $A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v})$ et $A_{12}(\cdot, \cdot)$ représente la partie compacte.

3.7.1.1 Signe de $\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \cdot, \cdot \rangle)$

D'après la formule (3.106c), pour $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nous avons

$$\begin{aligned} i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{\alpha_n}{i\kappa R} |\mathbf{u}_{n,m}^t|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{R} \alpha_n |\mathbf{u}_{n,m}^t|^2. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Nous avons alors

$$\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Im(\alpha_n) \frac{n(n+1)}{R} |\mathbf{u}_{n,m}^t|^2. \quad (3.120)$$

D'après le corollaire 3.1, nous avons $\Im(\alpha_n) > 0$. Nous obtenons alors

$$\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) > 0. \quad (3.121)$$

3.7.1.2 Signe de $\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \cdot, \cdot \rangle)$

De même, d'après la formule (3.106c) pour $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nous avons

$$\begin{aligned} i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{\alpha_n}{i\kappa R} |\mathbf{u}_{n,m}^t|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(n+1)}{R} \alpha_n |\mathbf{u}_{n,m}^t|^2. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Nous avons alors

$$\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Re(\alpha_n) \frac{n(n+1)}{R} |\mathbf{u}_{n,m}^t|^2. \quad (3.123)$$

D'après le corollaire 3.1, nous avons $\Re(\alpha_n) < 0$. Nous obtenons alors

$$\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) < 0. \quad (3.124)$$

3.7.1.3 Coercivité de la forme sesquilinéaire $A_{11}(\cdot, \cdot)$

Pour $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, nous avons

$$A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle. \quad (3.125)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| &\geq |\Re(A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{u}))| \\ &\geq \int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Nous avons démontré dans le paragraphe 3.7.1.2 que $\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) < 0$, alors $-\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) > 0$. D'autre part, dans la section 3.2.2 nous avons défini les caractéristiques ε et μ , qui sont des fonctions scalaires positives définies par morceaux, comme suit

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega^{ext}, \\ \varepsilon_j, & \mathbf{x} \in \Omega_j^\delta, j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.127)$$

$$\mu = \mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega^{ext}, \\ \mu_j, & \mathbf{x} \in \Omega_j^\delta, j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.128)$$

Nous notons par $\alpha_1 = \min_{1 \leq j \leq N} (1, \omega^2, \frac{1}{\mu_j}, \omega^2 \varepsilon_j)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} |A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| &\geq \alpha_1 \left(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)}^2 \right) \\ &= \alpha_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}}^2. \end{aligned} \quad (3.129)$$

D'où l'existence d'une constante positive α_1 vérifiant la coercivité de la forme sesquilinéaire $A_{11}(\cdot, \cdot)$.

3.7.1.4 Compacité de $A_{12}(\cdot, \cdot)$

Théorème 3.4 *L'opérateur K_1 est compact de $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$.*

Preuve : La compacité de l'opérateur K_1 est déduite de l'injection compacte de l'espace \mathbf{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$. \square

3.7.2 Traitement de la deuxième forme sesquilinéaire

Dans la deuxième forme sesquilinéaire (3.110b), nous suivons la même démarche que dans la première. L'écrire sous la forme de la somme d'un terme coercif et un terme compact.

Nous définissons l'opérateur $K_2 : \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$ comme suit

$$K_2 = \begin{pmatrix} \omega^2 \varepsilon I & 0 \\ 0 & -\omega^2 \varepsilon I \end{pmatrix}, \quad (3.130)$$

avec I est l'opérateur identité. Pour $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$ défini sur l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$, nous avons $K_2 \mathbf{U} \in \mathbf{X} \times \mathbf{W}$, avec

$$K_2 \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \omega^2 \varepsilon \mathbf{u} \\ -\omega^2 \varepsilon p \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

Pour $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nabla q \\ q \end{pmatrix}$ un vecteur défini sur l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$. Nous définissons le produit scalaire $\langle K_2 \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)}$ comme suit

$$\langle K_2 \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)} = \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon p \cdot \bar{q} \, d\mathbf{x}. \quad (3.132)$$

Nous ajoutons et nous soustrayons le terme $\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon p \cdot \bar{q} \, d\mathbf{x}$ dans la forme sesquilinéaire de (3.110b), nous obtenons

$$\begin{aligned} & A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = \\ & \underbrace{\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon p \cdot \bar{q} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} + i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle}_{A_{21}(p, q)} + \underbrace{\langle K_2 \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)}}_{A_{22}(\mathbf{u}, p ; q)} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Dans la suite nous démontrons que $A_{21}(\cdot, \cdot)$ représente la partie coercive dans la forme sesquilinéaire $A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q)$ et $A_{22}(\cdot, \cdot)$ représente la partie compacte.

3.7.2.1 Signe de $\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\cdot, \cdot) \rangle)$

D'après la formule (3.106d), pour $p = q$ nous avons

$$\begin{aligned} i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{i\kappa R}{\alpha_n} |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2 \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{\kappa^2 R}{\alpha_n} |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \kappa^2 R \Im\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \kappa^2 R \Im(\alpha_n) |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2. \end{aligned} \quad (3.135)$$

D'après le corollaire 3.1, nous avons $\Im(\alpha_n) > 0$. Nous obtenons alors

$$\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle) > 0. \quad (3.136)$$

3.7.2.2 Signe de $\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\cdot, \cdot) \rangle)$

De même, d'après la formule (3.106d), pour $p = q$ nous avons

$$\begin{aligned} i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle &= i\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{i\kappa R}{\alpha_n} |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2 \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \frac{\kappa^2 R}{\alpha_n} |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \kappa^2 R \Re\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2 \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) \kappa^2 R \Im(\alpha_n) |(\nabla_{\Gamma_R} p)_{n,m}^\times|^2. \end{aligned} \quad (3.138)$$

D'après le corollaire 3.1, nous avons $\Re(\alpha_n) < 0$. Nous obtenons alors

$$\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle) > 0. \quad (3.139)$$

3.7.2.3 Coercivité de la forme sesquilinéaire $A_{21}(\cdot, \cdot)$

Nous rappelons que

$$A_{21}(p, q) = \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon p \cdot \bar{q} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} + i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle. \quad (3.140)$$

Pour $p = q$, nous avons

$$A_{21}(p, p) = \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |p|^2 \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\nabla p|^2 \, d\mathbf{x} + i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), (\nabla_{\Gamma_R} p) \rangle. \quad (3.141)$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}
 |A_{21}(p, p)| &\geq |\Re(A_{21}(p, p))| \\
 &\geq \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |p|^2 d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\nabla p|^2 d\mathbf{x} + \Re \left(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), (\nabla_{\Gamma_R} p) \rangle \right).
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

Nous rappelons que ε est une fonction scalaire positive définie par morceaux comme suit

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega^{ext}, \\ \varepsilon_j, & \mathbf{x} \in \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{3.143}$$

Nous notons par

$$\alpha_2 = \min_{1 \leq j \leq N} \left(\omega^2, \omega^2 \varepsilon_j \right) \tag{3.144}$$

La constante α_2 est positive, en plus nous avons démontré dans le paragraphe 3.7.2.2 que $\Re(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), (\nabla_{\Gamma_R} p) \rangle) > 0$. Nous avons finalement

$$|A_{21}(p, p)| \geq \alpha_2 \|p\|_{\mathbf{W}}^2. \tag{3.145}$$

D'où la coercivité de la forme sesquilinéaire $A_{21}(\cdot, \cdot)$.

3.7.2.4 Compacité de $A_{22}(\cdot, \cdot)$

Théorème 3.5 *L'opérateur K_2 est compact de $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta) \times \mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$.*

Preuve : La compacité de l'opérateur K_2 est déduite de l'injection compacte de l'espace \mathbf{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega_R^\delta)$. □

3.7.3 Unicité de la solution du problème variationnel couplé en utilisant le principe de prolongement unique

Pour démontrer l'unicité de la solution du problème

$$\begin{cases} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x}, & (3.146a) \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} d\mathbf{x}, & (3.146b) \end{cases}$$

avec \mathbf{u}, \mathbf{v} dans \mathbf{X} et, p et q dans \mathbf{W} . Il suffit de démontrer son injectivité, c'est à dire supposer que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\nabla p, \mathbf{u}) = 0, \tag{3.147a}$$

$$A(\mathbf{u}, \nabla p) + B(\nabla p, \nabla p) = 0, \tag{3.147b}$$

et prouver que \mathbf{u} et p sont nulles sur tout le domaine Ω_R^δ .

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Lemme 3.4 *Les formes sesquilinéaires définies par*

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) &= \\
 \int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t \rangle - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \\
 A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) &= \\
 \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x} + i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times (\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} q \rangle,
 \end{aligned}$$

sont injectives.

Preuve : Nous rappelons que le domaine Ω_R^δ est constitué de l'union des couches minces superposées et de la couronne Ω_R . Pour $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ et $p = q$, nous prenons la partie imaginaire de $A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\nabla p, \mathbf{u})$ et de $A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q)$ sur chaque sous domaine, nous avons

Sur $\bigcup_{j=1}^N \Omega_j^\delta$:

$$\begin{aligned}
 &* \Im (A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\nabla p, \mathbf{u})) \\
 &= \Im \left(\int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \underbrace{\varepsilon \nabla p \cdot \bar{\mathbf{u}}}_{=0} \, d\mathbf{x} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned}
 &* \Im (A(\mathbf{u}, \nabla p) + B(\nabla p, \nabla p)) \\
 &= \Im \left(\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \underbrace{\varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{p}}_{=0} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\nabla p|^2 \, d\mathbf{x} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Sur Ω_R :

$$\begin{aligned}
 &* \Im (A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\nabla p, \mathbf{u})) \\
 &= \underbrace{\Im \left(\int_{\Omega_R^\delta} \mu^{-1} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \nabla p \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \right)}_{=0} - \Im (i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle)
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

$$\begin{aligned}
 &* \Im (A(\mathbf{u}, \nabla p) + B(\nabla p, \nabla p)) \\
 &= \underbrace{\Im \left(\omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{p} \, d\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega_R^\delta} \varepsilon |\nabla p|^2 \, d\mathbf{x} \right)}_{=0} + \Im (i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times (\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle)
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

Nous rappelons que

3.7. Existence et unicité de la solution

- (i) dans le paragraphe 3.7.1.1 nous avons démontré que $\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle) > 0$, d'où $u_{n,m}^t = 0$, ce qui implique que $\mathbf{u} = 0$ sur Γ_R .
- (ii) dans le paragraphe 3.7.2.1 nous avons démontré que $\Im(i\kappa \langle \mathcal{Z}^\times(\nabla_{\Gamma_R} p), \nabla_{\Gamma_R} p \rangle) > 0$, d'où $\nabla_{\Gamma_R} p_{n,m}^\times = 0$, ce qui implique que $\nabla p = 0$ sur Γ_R . Comme par hypothèse nous avons $p \in \mathbf{W}$, alors nous déduisons que $p = 0$ sur Γ_R .

Finalement, par le principe de prolongement unique (cf. section 2.7), nous avons $(\mathbf{u}, p) = 0$ sur tout Ω_R^δ d'où l'injectivité des deux formes sesquilinéaires $A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\nabla p, \mathbf{u})$ et $A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q)$. \square

3.7.4 Conclusion

Nous rappelons que la première étape dans cette démonstration consistait à écrire le problème variationnel (3.109) associé au système d'équations (3.71). En prenant $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \nabla p$, nous avons établi un nouveau problème variationnel équivalent à (3.109); défini par les deux formulations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (3.152a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (3.152b)$$

Les termes $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $B(\nabla p, \mathbf{v})$, $A(\mathbf{u}, \nabla q)$ et $B(\nabla p, \nabla q)$ sont définis dans la notation (3.107).

Dans une étape suivante, nous avons réécrit $A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v})$ et $A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q)$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + A_{12}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}), \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = A_{21}(p, q) + A_{22}(\mathbf{u}, p; q). \end{array} \right. \quad (3.153a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + A_{12}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}), \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = A_{21}(p, q) + A_{22}(\mathbf{u}, p; q). \end{array} \right. \quad (3.153b)$$

Avec les parties coercives sont données par $A_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $A_{21}(p, q)$ et, les parties compactes sont données par $A_{12}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v})$ et $A_{22}(\mathbf{u}, p; q)$.

Comme (3.152a)-(3.152b) sont injectives, alors d'après l'alternative de Fredholm, il existe une unique solution (\mathbf{u}, p) dans $\mathbf{X} \times \mathbf{W}$, solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (3.154a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\nabla p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}, \\ A(\mathbf{u}, \nabla q) + B(\nabla p, \nabla q) = - \int_{\Omega_R^\delta} \mathbf{F} \cdot \nabla \bar{q} \, d\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (3.154b)$$

pour tout (\mathbf{v}, q) dans $\mathbf{X} \times \mathbf{W}$.

3.8 Unicité de la solution sortante du problème de Maxwell extérieur par le lemme de Rellich

Dans le paragraphe suivant, nous donnons un résultat d'unicité de la solution sortante du problème de Maxwell extérieur (3.19) en utilisant le Lemme de Rellich [15, 43].

Lemme 3.5 (Lemme de Rellich) *Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega^{ext})$ une solution de (3.19a), vérifiant la condition de rayonnement à l'infini de Silver-Müller, telle que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} |\mathbf{E}|^2 d\Gamma_R = 0. \quad (3.155)$$

Alors, $\mathbf{E} = 0$ dans $\overline{\Omega^{ext}}$.

Théorème 3.6 *Pour un nombre d'onde réel κ non nul, le problème de Maxwell extérieur (3.19) admet au plus une solution sortante.*

Preuve : Pour $R_1 > R > 0$, nous définissons les boules \mathcal{B}_{R_1} et \mathcal{B}_R de centre \mathbf{O} et de rayons R_1 et R , respectivement. Nous définissons aussi la couronne $\Omega_{R,R_1} = \mathcal{B}_{R_1} \setminus \mathcal{B}_R$ de frontière $\Gamma_R \cup \Gamma_{R_1}$. En utilisant la linéarité du problème de Maxwell, pour \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 deux solutions sortantes de 3.19). Nous définissons $\mathbf{u} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \mathcal{B}'_R, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Gamma_R = \partial \mathcal{B}'_R, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| (\mathbf{rot u} \times \mathbf{n} - i\kappa \mathbf{u}) = 0. & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.156a) \\ (3.156b) \\ (3.156c) \end{array}$$

Nous multiplions (3.156a) par $\bar{\mathbf{u}}$ et nous appliquons la formule de Green (1.100), nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{R,R_1}} (\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{R,R_1}} (|\mathbf{rot u}|^2 - \kappa^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_{R,R_1}} (\mathbf{n} \times \mathbf{rot u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d(\partial \Omega_{R,R_1}). \end{aligned}$$

D'après l'identité vectorielle $(\mathbf{n} \times \mathbf{rot u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{rot u}$ et, en utilisant la condition aux limites sur Γ_R , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{R,R_1}} (|\mathbf{rot u}|^2 - \kappa^2 |\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma_{R_1}} (\mathbf{rot u} \times \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_{R_1} \\ &= \int_{\Gamma_{R_1}} (\mathbf{rot u} \times \mathbf{n} - i\kappa \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_{R_1} + i\kappa \int_{\Gamma_{R_1}} |\mathbf{u}|^2 d\Gamma_{R_1}. \end{aligned}$$

3.8. Unicité de la solution sortante du problème de Maxwell extérieur par le lemme de Rellich

Nous prenons la partie imaginaire de la dernière égalité, nous obtenons

$$\Im \left(\int_{\Gamma_{R_1}} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n} - i\kappa \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma_{R_1} \right) + \kappa \int_{\Gamma_{R_1}} |\mathbf{u}|^2 \, d\Gamma_{R_1} = 0.$$

Comme \mathbf{u} vérifie la condition de radiation à l'infini de Silver-Müller, nous avons alors

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R_1}} |\mathbf{u}|^2 \, d\Gamma_{R_1} = 0. \quad (3.157)$$

En appliquant le lemme de Rellich, nous avons $\mathbf{u} = 0$ dans $\overline{\mathcal{B}'_R}$. Finalement, la solution sortante, si elle existe, est unique. \square

Chapitre 3. Existence et unicité de la solution du système de Maxwell

Deuxième partie

Calcul de l'opérateur d'impédance

Système de Maxwell homogène dans une couche mince sous forme d'un système d'EDA du 1^{er} ordre

Sommaire

4.1 Introduction	73
4.2 Équations abstraites	74
4.2.1 Calcul de l'opérateur A_z	75
4.2.2 Calcul de l'opérateur B_z	76
4.3 Calcul des dérivées en $z = 0$	77
4.3.1 Dérivées d'ordre un	77
4.3.2 Dérivées d'ordre deux	78

4.1 Introduction

L'objectif principal dans cette étude est la modélisation asymptotique de l'impédance d'une multicouche mince contrastée pour le système de Maxwell harmonique. Alors, partant d'un problème aux limites de transmission qui modélise la propagation d'ondes dans un milieu recouvert d'une couche mince (juxtaposition de plusieurs couches minces contrastées), nous montrons comment l'effet de la multicouche mince peut être approché par des conditions aux limites d'impédance sur le bord du milieu de propagation. Pour ce faire, nous utilisons une technique d'équations différentielles abstraites.

Dans ce chapitre, nous utilisons un paramétrage d'une couche mince afin de ramener le système de Maxwell sur la couche mince à un système différentiel abstrait du premier ordre en la direction normale et à coefficients opérateurs différentiels par rapport à la composante tangentielle. Finalement, nous donnons quelques calculs détaillés des dérivées d'ordre un et deux de ces coefficients. Leur utilité réside dans l'application d'un développement limité à la condition de type conducteur

Chapitre 4. Système de Maxwell homogène dans une couche mince sous forme d'un système d'EDA du 1^{er} ordre

parfait. La référence de base pour la préparation de ce chapitre est le livre de Nédélec [44] et le papier de Bendali *et al.* [10].

4.2 Équations abstraites

Notre travail entre dans le cadre des applications des techniques des développements asymptotiques pour la modélisation de l'effet d'une couche mince par des conditions aux limites de type impédance. Nous considérons un problème aux limites de transmission, modélisant la propagation d'ondes dans un domaine extérieur Ω^{ext} de frontière Γ et recouvert d'une couche mince Ω^δ

$$\Omega^\delta = \{x \notin \Omega^{ext} ; \text{dist}(x, \Gamma) < \delta\},$$

son épaisseur δ est supposée petite. Nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Gamma \times]-\delta, 0[&\rightarrow \Omega^\delta \\ (m, z) &\rightarrow \mathbf{x} = m + z\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où \mathbf{n} est la normale à Γ au point m .

Ce paramétrage permet de ramener le système de Maxwell sur la couche mince à un système différentiel abstrait du premier ordre en z et à coefficients opérateurs différentiels par rapport à la variable m .

Dans un domaine contenant une multicouche, Nous rappelons que \mathbf{E} et \mathbf{H} représentent les champs électrique et magnétique, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X}_j = \mathbb{M}_j \mathbf{X}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

où

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} \end{bmatrix}_j, \quad (4.3)$$

et \mathbb{M}_j des matrices à coefficients opérateurs différentiels par rapport à m , données par.

$$\mathbb{M}_j = \mathbb{M}(\delta_j, \varepsilon_j, \mu_j) = \begin{bmatrix} -\mathcal{C}_z & -i\omega\mu A_z \\ \frac{1}{i\omega\mu} B_z & (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \end{bmatrix}_j. \quad (4.4)$$

Les coefficients A_z et B_z sont donnés par

$$A_z = A_z(\varepsilon_j, \mu_j) = 1 + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_j \mu_j} \nabla_{\Gamma^z} \text{div}_{\Gamma^z}, \quad (4.5)$$

$$B_z = B_z(\varepsilon_j, \mu_j) = \omega^2 \varepsilon_j \mu_j - \nabla_{\Gamma^z} \times \text{rot}_{\Gamma^z}, \quad (4.6)$$

où, ∇_{Γ^z} , div_{Γ^z} , rot_{Γ^z} et $\nabla_{\Gamma^z} \times$ sont le gradient surfacique, la divergence surfacique, le rotationnel surfacique scalaire et le rotationnel surfacique vectoriel, respectivement, définis sur la surface Γ^z (voir paragraphes 1.2.4 et 1.2.5.2). \mathcal{C}_z et \mathcal{H}_z

sont des opérateurs de courbure définis sur la surface Γ^z (voir paragraphes 1.2.1 et 1.2.5.1). Les autres paramètres sont maintenant bien connus : les ε_j sont les permittivités électriques relatives, les μ_j sont les perméabilités magnétiques relatives, et l'indice j , pour $j = 1, \dots, N$, nous indique la couche mince sur laquelle le problème est défini. Finalement, ω est la pulsation.

Remarque 4.1 Dans la suite nous utilisons la notation $\nabla_{\Gamma^z} \times$ au lieu de $\overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma^z}$, comme dans [10].

Remarque 4.2 L'indice z nous réfère toujours à la surface Γ^z .

Nous calculons dans les deux sous-sections suivantes les opérateurs A_z et B_z , à travers lesquels, nous déduisons le système d'équations abstraites (4.2). Pour commencer, nous considérons un champ de vecteurs \mathbf{v} , défini sur Ω^δ , décomposé en ces composantes tangentielle et normale, voir paragraphe 1.2.1

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n \mathbf{n}. \quad (4.7)$$

Le rotationnel de \mathbf{v} dans Ω^δ est écrit comme suit (voir [44, section 2.5])

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{n} \text{ rot}_{\Gamma^z} \mathbf{v}_t + (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \nabla_{\Gamma^z} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \partial_z \mathbf{v} \times \mathbf{n}. \quad (4.8)$$

Le système de Maxwell homogène à l'intérieur de Ω^δ s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{n} \text{ rot}_{\Gamma^z} \mathbf{E}_t + (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{E} \times \mathbf{n} + \nabla_{\Gamma^z} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - \partial_z \mathbf{E} \times \mathbf{n} - i\omega\mu \mathbf{H} = 0, & (4.9a) \\ \mathbf{n} \text{ rot}_{\Gamma^z} \mathbf{H}_t + (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{H} \times \mathbf{n} + \nabla_{\Gamma^z} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} - \partial_z \mathbf{H} \times \mathbf{n} + i\omega\varepsilon \mathbf{E} = 0. & (4.9b) \end{cases}$$

4.2.1 Calcul de l'opérateur A_z

Nous éliminons la composante normale de (4.9a), vous avons

$$[(\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{E} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \nabla_{\Gamma^z} \times \mathbf{E}_n \times \mathbf{n} - \partial_z (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - i\omega\mu (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) = 0. \quad (4.10)$$

Nous utilisons les arguments suivants

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n}. \quad (4.11)$$

La relation

$$[(\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{E} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} = \mathcal{C}_z \mathbf{E}_t, \quad (4.12)$$

voir [44, Théorème 2.5.18].

L'égalité

$$\nabla_{\Gamma^z} \times u := \nabla_{\Gamma^z} u \times \mathbf{n}, \quad (4.13)$$

(voir section 1.2.4).

L'équation (4.10) s'écrit alors

$$\mathcal{C}_z \mathbf{E}_t - \nabla_{\Gamma^z} \mathbf{E}_n + \partial_z \mathbf{E}_t + i\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = 0. \quad (4.14)$$

Chapitre 4. Système de Maxwell homogène dans une couche mince sous forme d'un système d'EDA du 1^{er} ordre

Par ailleurs, nous prenons la composante normale de l'équation (4.9b) et nous utilisons l'égalité

$$\operatorname{rot}_{\Gamma^z} \mathbf{u} := \operatorname{div}_{\Gamma^z} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}), \quad (4.15)$$

(voir section 1.2.4), nous avons

$$\mathbf{E}_n = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot}_{\Gamma^z} \mathbf{H}_t, \quad (4.16)$$

$$= -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{div}_{\Gamma^z} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}), \quad (4.17)$$

$$= -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{div}_{\Gamma^z} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}). \quad (4.18)$$

L'équation (4.14) s'écrit

$$\partial_z \mathbf{E}_t = -\mathcal{C}_z \mathbf{E}_t + \frac{1}{i\omega\varepsilon} \nabla_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) - i\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}). \quad (4.19)$$

Finalement, nous avons la première equation du système (4.2)

$$\partial_z \mathbf{E}_t = -\mathcal{C}_z \mathbf{E}_t - i\omega\mu A_z (\mathbf{n} \times \mathbf{H}), \quad (4.20)$$

avec

$$A_z = 1 + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} \nabla_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z}. \quad (4.21)$$

4.2.2 Calcul de l'opérateur B_z

L'obtention de l'opérateur B_z est plus simple que A_z . Nous prenons la composante tangentielle de l'équation (4.9b)

$$(\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{H} \times \mathbf{n} + \nabla_{\Gamma^z} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} - \partial_z \mathbf{H} \times \mathbf{n} + i\omega\varepsilon \mathbf{E}_t = 0. \quad (4.22)$$

Alors

$$\partial_z \mathbf{n} \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}_t - \nabla_{\Gamma^z} \times \mathbf{H}_n + (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (4.23)$$

Par ailleurs, nous prenons la composante normale de l'équation (4.9a)

$$\mathbf{H}_n = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot}_{\Gamma^z} \mathbf{E}_t, \quad (4.24)$$

Finalement, nous avons la deuxième équation du système (6.5)

$$\partial_z (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{i\omega\mu} B_z \mathbf{E}_t + (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad (4.25)$$

avec

$$B_z = \omega^2 \varepsilon \mu - \nabla_{\Gamma^z} \times \operatorname{rot}_{\Gamma^z}. \quad (4.26)$$

4.3 Calcul des dérivées en $z = 0$

Dans le Chapitre 6, pour calculer la condition d'impédance d'ordre trois, en utilisant le développement de Taylor, nous avons besoin de calculer les dérivées d'ordre un et deux en $z = 0$ des matrices \mathbb{M}_j . Dans la présente section, nous donnons les dérivées des termes essentiels pour construire les matrices \mathbb{M}_j , avec $\mathbb{M}^{(1)} = \mathbb{M}$ et $\mathbb{M}^{(l+1)} = \partial_z \mathbb{M}^{(l)} + \mathbb{M}^{(l)} \mathbb{M}$ (voir [10]).

Nous rappelons les formules des opérateurs différentiels surfaciques définis sur la surface Γ^z

$$\nabla_{\Gamma^z} = \mathcal{R}_z^{-1} \nabla_{\Gamma}, \quad (4.27a)$$

$$\operatorname{div}_{\Gamma^z} = \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathcal{T}_z, \quad (4.27b)$$

$$\nabla_{\Gamma^z} \times = \mathcal{T}_z^{-1} \nabla_{\Gamma} \times, \quad (4.27c)$$

$$\operatorname{rot}_{\Gamma^z} = \frac{1}{1 + 2z\mathcal{H} + z^2\mathcal{G}} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{R}_z. \quad (4.27d)$$

Nous rappelons aussi

$$\mathcal{C}_z = \mathcal{C} \mathcal{R}_z^{-1}, \quad (4.28a)$$

$$\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z = (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \mathcal{T}_z^{-1}. \quad (4.28b)$$

Avec

$$\mathcal{R}_z = 1 + z\mathcal{C}, \quad (4.29a)$$

$$\mathcal{T}_z = 1 - z(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (4.29b)$$

Le lecteur pourra revenir à la section 1.2.5.

4.3.1 Dérivées d'ordre un

Nous utilisons les formules (4.27), (4.28) et (4.29), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\Gamma^z}|_{z=0} = -\mathcal{C} \nabla_{\Gamma}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div}_{\Gamma^z}|_{z=0} = -[2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} + \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})], \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\Gamma^z} \times|_{z=0} = (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \nabla_{\Gamma} \times, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_{\Gamma^z}|_{z=0} = -2\mathcal{H} \operatorname{rot}_{\Gamma} + \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{C}. \quad (4.33)$$

Nous avons aussi (voir [44, Section 2.5.6])

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{C}_z|_{z=0} = -\mathcal{C}^2, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z)|_{z=0} = (\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2. \quad (4.35)$$

Chapitre 4. Système de Maxwell homogène dans une couche mince sous forme d'un système d'EDA du 1^{er} ordre

En utilisant (4.30) et (4.31), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\Gamma_z} \operatorname{div}_{\Gamma^z} |_{z=0} = -\mathcal{C} \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} - \nabla_{\Gamma} (2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma}) - \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (4.36)$$

En utilisant (4.32) et (4.33), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\Gamma_z} \times \operatorname{rot}_{\Gamma^z} |_{z=0} = (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \nabla_{\Gamma} \times \operatorname{rot}_{\Gamma} - \nabla_{\Gamma} \times (2\mathcal{H} \operatorname{rot}_{\Gamma}) + \nabla_{\Gamma} \times \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{C}. \quad (4.37)$$

Nous calculons maintenant la dérivée d'ordre un de A_z . En utilisant (4.21) et (4.36), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial z} A_z |_{z=0} = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_{\Gamma_z} \operatorname{div}_{\Gamma^z}) |_{z=0}, \quad (4.38)$$

$$= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} (-\mathcal{C} \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} - \nabla_{\Gamma} (2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma}) - \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2\mathcal{H})). \quad (4.39)$$

4.3.2 Dérivées d'ordre deux

Nous dérivons les formules (4.27) à l'ordre deux, en $z = 0$, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_{\Gamma_z} |_{z=0} = 2\mathcal{C}^2 \nabla_{\Gamma}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \operatorname{div}_{\Gamma_z} |_{z=0} = 4\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) + 2(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{div}_{\Gamma}, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_{\Gamma_z} \times |_{z=0} = 2(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2 \nabla_{\Gamma} \times, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \operatorname{rot}_{\Gamma_z} |_{z=0} = -4\mathcal{H} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{C} + 2(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{rot}_{\Gamma}. \quad (4.43)$$

Nous avons aussi

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{C}_z |_{z=0} = 2\mathcal{C}^3, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) |_{z=0} = 2(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^3. \quad (4.45)$$

Nous dérivons le produit de (4.30) et (4.31) à l'ordre 2, en $z = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_{\Gamma_z} \operatorname{div}_{\Gamma_z} |_{z=0} &= 2\mathcal{C}^2 \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} + 2[\mathcal{C} \nabla_{\Gamma} (2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma}) + \mathcal{C} \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2\mathcal{H})] \\ &\quad + \nabla_{\Gamma} [4\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) + 2(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{div}_{\Gamma}]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Il reste à vérifier ce produit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_{\Gamma_z} \times \operatorname{rot}_{\Gamma^z}) |_{z=0} &= 2(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2 \nabla_{\Gamma} \times \operatorname{rot}_{\Gamma} + 2(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \nabla_{\Gamma} \times [-2\mathcal{H} \operatorname{rot}_{\Gamma} + \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{C}] \\ &\quad + \nabla_{\Gamma} \times [-4\mathcal{H} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathcal{C} + 2(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{rot}_{\Gamma}]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.3. Calcul des dérivées en $z = 0$

La dérivée d'ordre deux de A_z , pour $z = 0$, en utilisant (4.21) et (4.46), est donnée par

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z|_{z=0} = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z}) |_{z=0}, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} (2\mathcal{C}^2 \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} + 2[\mathcal{C} \nabla_{\Gamma} (2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma}) + \mathcal{C} \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2H)] \\ &\quad + \nabla_{\Gamma} [4\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) + 2(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{div}_{\Gamma}]). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Chapitre 4. Système de Maxwell homogène dans une couche mince
sous forme d'un système d'EDA du 1^{er} ordre

Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

This chapter is the subject of the following publication :

Transfer and approximation of the impedance for time-harmonic Maxwell's system in a planar domain with thin contrasted multi-layers.

F. Z. Goffi, K. Lemrabet and T. Laadj;
Asymptotic Analysis, 101(1-2) : 1-15, 2017.

Abstract. We consider the diffraction of time-harmonic electromagnetic waves by a perfectly conducting planar obstacle, coated by thin contrasted multi-layers of dielectric materials. A partial Fourier transform is used to derive an impedance condition that links the tangential components of the electric and magnetic fields, and transfers the boundary condition from the obstacle's face to the other face of dielectric multi-layers.

We first determine the exact formula and construct approximations of the impedance condition for one dielectric thin layer ; after that, we extend the obtained result to multi-layers.

Keywords. time-harmonic Maxwell's system, scattering, thin dielectric layers, impedance operator.

2010 Mathematics Subject Classification. 35Q60, 35Q61, 34L25.

Sommaire

5.1	Introduction	82
5.2	Maxwell system	83
5.3	Problem statement	85
5.3.1	Impedance operator	85
5.4	Transfer of the impedance condition through a slab .	86
5.5	Application for a single thin layer	89
5.6	Application for three contrasted thin layers	91

Chapitre 5. Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

5.6.1	Notation	91
5.6.2	Impedance boundary condition for three thin layers	92

5.1 Introduction

The scattering of time-harmonic electromagnetic or acoustic waves by obstacles involves always their structures, which have in most cases thin geometry at least in one space dimension; we mention for example the case of thin slots (see, e.g., [31, 34, 35]), and thin layers.

We highlight the fact that, in the numerical approximation of the solution, of the classical problem for perfect conductor coated by a thin dielectric material numerical instabilities appear (see [5]), due to the thinness of the thin shell. An impedance boundary condition is widely used to simplify the mathematical and numerical complexities in the solution of the scattering problem.

The impedance condition was formulated for the first time by Leontovich (see [39, 40]), it was presented initially as the boundary condition modelling the penetration of a wave in an imperfectly conducting metal barrier. However, it was verified that it also models other situations, such as a perfect conductor coated with a thin dielectric layer which is the present study interest (see, e.g., [17, 27, 30]), or the perfect conductor with a rough surface (see, e.g., [28, 55]).

In the literature, several authors gave different approximations of the impedance operator. Engquist and Nédélec (see [19]) derived approximations of order two with respect to the thickness of coating, while Bendali and Lemrabet in [8] gave approximate boundary condition up to the third order, via an asymptotic expansion. Senior and Volakis (see, e.g., [54]) have introduced a different way to construct that artificial condition, which consists in the approximation of the reflection coefficient, that is given exactly after solving explicitly the diffraction problem. Bartoli and Bendali have presented in [6] a study based on some techniques of domain decomposition methods to set the Helmholtz problem outside the obstacle. Bendali and Lemrabet in [9] have investigated the problem with a suitable scaling and an adapted writing of the curl operator inside the thin shell. However, after facing some difficulties related to the numerical simulation, Bendali et al. have shown in [10] how to overcome them through the development of efficient Padé-like approximation impedance boundary condition and presented some numerical procedures developed to efficiently solve the related unusual boundary value problems.

The work in this paper can be seen as a contribution to the previous studies (see [10, 9, 8]). We have specifically considered a perfectly conducting metal coated with contrasted dielectric thin multi-layers. The main idea is to present a way to transfer the impedance boundary condition from a face of the thin layer to the other one, and once we have the transfer formula we can transfer it through multiple thin layers, then we set transmission problem as a scattering problem in

only the exterior domain.

We consider a plane geometry for which an explicit expression of the impedance boundary condition can be achieved by using Fourier transform ; after that we give some approximations in two cases, which can serve as a guide to obtain approximate conditions in a non planar geometry, where the calculation of the exact impedance boundary condition is not always possible.

The paper is organized as follows :

- In the first section we present the time-harmonic Maxwell system which will be expressed inside the thin layers as an abstract first order differential system.
- In section two we define the impedance operator of the thin layer and use it to introduce an equivalent problem set in the exterior domain only.
- In section three, the solution of a boundary problem in a thin planar layer is obtained by Fourier transform. The explicit solution allows us to transfer an impedance condition set on a face of the layer to another impedance condition set on the other face.
- In section four we consider the simple case of a thin slab and apply the transfer formula to give approximate impedance boundary condition up to order three with respect to the thickness.
- The last section is devoted to the case of three thin layers. The use of the transfer formula three times leads to the exact impedance condition. A tensor notation is used to give the approximate impedance conditions up to order three in compact form.

5.2 Maxwell system

Let Ω be the exterior unbounded domain in which the wave propagates (see Figure 5.1), its boundary is a smooth bounded surface $\Gamma = \partial\Omega$ which represents the face of the scatterer composed by a perfect conductor coated with a thin layer of dielectric material denoted Ω^δ ,

$$\Omega^\delta = \{x \notin \Omega; \text{dist}(x, \Gamma) < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

The interface between the thin layer Ω^δ and the perfect conductor is denoted $\Gamma^\delta = \{x \notin \Omega; \text{dist}(x, \Gamma) = \delta\}$, which is parallel to the surface Γ . The parameter δ describing the thickness of the shell Ω^δ is *small enough* compared with the other dimensions of the scatterer, and $\text{dist}(x, \Gamma)$ is the distance between the point x and the surface Γ . The vector \mathbf{n} is the unit normal outwardly directed to Ω^δ , which is also normal to Γ^δ at the point where it intersects this surface.

The electromagnetic wave propagation is governed by the following Maxwell's system :

$$\begin{cases} \nabla \times E + \partial_t H = 0, & \nabla \times H - \partial_t E = 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla \times E + \mu \partial_t H = 0, & \nabla \times H - \varepsilon \partial_t E = 0 & \text{in } \Omega^\delta, \end{cases} \quad (5.1)$$

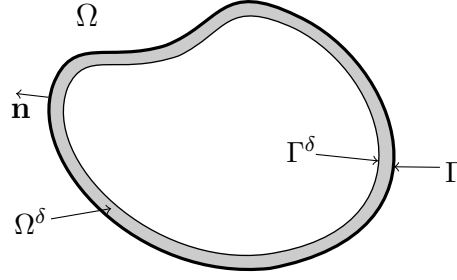


FIGURE 5.1 – Configuration of the domain for the general case.

the constants ε and μ characterize the electric permittivity and the magnetic permeability respectively inside the thin shell.

The time dependence is harmonic with a frequency $\omega > 0$, so that the electromagnetic field is of the form (see [44])

$$\begin{cases} E(t, x) = \Re\{E(x)e^{-i\omega t}\}, \\ H(t, x) = \Re\{H(x)e^{-i\omega t}\}, \end{cases} \quad (5.2)$$

which allows us to write the time-harmonic Maxwell system

$$\begin{cases} \nabla \times E - i\omega H = 0, & \nabla \times H + i\omega E = 0, & \text{in } \Omega, \\ \nabla \times E - i\omega\mu H = 0, & \nabla \times H + i\omega\varepsilon E = 0, & \text{in } \Omega^\delta. \end{cases} \quad (5.3)$$

The system of equations (5.3) has to be complemented by the following conditions :

- Transmission conditions on the exterior boundary Γ

$$\begin{cases} [E \times \mathbf{n}]_\Gamma = 0, \\ [\mathbf{n} \times H]_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

where $[\cdot]_\Gamma$ denotes the jump across the boundary Γ .

- Dirichlet boundary condition on Γ^δ

$$E \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma^\delta. \quad (5.5)$$

- The Silver-Müller radiation condition (see [36])

$$\begin{aligned} CR_\infty(H - H^{inc}, E - E^{inc}) := \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left((H - H^{inc}) \times \frac{x}{|x|} - (E - E^{inc}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

where (E^{inc}, H^{inc}) is the incident wave. For simplicity, it is assumed to be a plane wave propagating in the inverse direction of the normal vector.

Note that we can express equations (5.3) as an abstract first order differential equations (see [10]),

$$\partial_z Y(z) = \mathcal{M}Y(z), \quad (5.7)$$

with

$$Y = \begin{bmatrix} E_T \\ \mathbf{n} \times H \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & -ik\mu A \\ \frac{1}{ik\mu} B & 0 \end{bmatrix},$$

and

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, \mu) &= 1 + \frac{1}{k^2 \varepsilon \mu} \nabla_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z}, \\ B(\varepsilon, \mu) &= k^2 \varepsilon \mu - \nabla_{\Gamma^z} \times \operatorname{curl}_{\Gamma^z}, \end{aligned}$$

where ∇_{Γ^z} , $\operatorname{div}_{\Gamma^z}$ and $\operatorname{curl}_{\Gamma^z}$ are the surfacic gradient, surfacic divergence and scalar surfacic curl, respectively. Note that ε is the relative permittivity, μ is the relative permeability and $k = \omega/c$ is the wave number with c the speed of the electromagnetic wave in the vacuum.

5.3 Problem statement

The system of equations (5.3) and conditions (5.4)-(5.5)-(5.6) describe a scattering problem of electromagnetic plane waves by a perfectly conducting obstacle coated with thin dielectric layers.

To avoid the numerical instability mentioned in [5] and [6], we are going to replace the above scattering problem by another problem which will be called impedance problem set in the exterior domain only. The impedance problem is described through a relation linking the tangential components of the electromagnetic fields.

5.3.1 Impedance operator

For a sufficiently smooth function φ defined on Γ , let (E, H) be the solution of the following boundary value problem :

$$\begin{cases} \nabla \times E - i\omega\mu H = 0, & \nabla \times H + i\omega\varepsilon E = 0, & \text{in } \Omega^\delta, \\ E \times \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma^\delta, \\ \mathbf{n} \times H = \varphi & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

We define the impedance operator by the mapping

$$S : \varphi \longmapsto S\varphi = E \times \mathbf{n}|_\Gamma.$$

Let us emphasize the fact that the impedance operator S depends on δ the thickness of the thin layer.

Chapitre 5. Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

Making use of the impedance operators and the transmission conditions (5.4) we get the following impedance boundary problem set in the exterior domain

$$\begin{cases} \nabla \times E - i\omega H = 0, & \nabla \times H + i\omega E = 0, & \text{in } \Omega, \\ E \times \mathbf{n} = S(\mathbf{n} \times H) & \text{on } \Gamma, \\ +CR\infty \text{ (radiation condition at } \infty). \end{cases}$$

We will see later that the impedance operator S can be written as $S = G^{-1}F$, where G and F are differential operators on the boundary Γ , the impedance condition is $G(E \times \mathbf{n}) = F(\mathbf{n} \times H)$.

As we are interested in planar geometry, a Fourier transform can be used to calculate the exact impedance operator. Approximate impedance boundary conditions at different orders with respect to δ are then obtained through a power series expansion of S with respect to δ . This results will be of great help in searching impedance boundary approximations in an other geometry when the exact impedance is not reachable (see [6]).

5.4 Transfer of the impedance condition through a slab

Let Γ_{-s} and Γ_{-t} be the faces of the slab. The impedance boundary condition on Γ_{-t} is written as

$$G_{-t}E_T(-t) = F_{-t}(\mathbf{n} \times H)(-t),$$

where G_{-t} and F_{-t} are operators that can be obtained from the given boundary condition on Γ_{-t} ; for instance, if $\Gamma_{-t} = \Gamma^\delta$, then from (5.5), $F_{-t} = 0$ and G_{-t} is the identity operator.

We are going to get the impedance boundary conditions on Γ_{-s} as

$$G_{-s}E_T(-s) = F_{-s}(\mathbf{n} \times H)(-s),$$

where the operators G_{-s} and F_{-s} are expressed as functions of G_{-t} and F_{-t} .

We call this process **transfer of the impedance boundary condition**.

Now the transfer of the impedance boundary condition through multiple layers can be done by repeating the above process and taking into account the transmission conditions on the different interfaces.

Let

$$\Omega(-t, -s) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; -t < z < -s\},$$

be the thin layer limited between the two parallel planes $z = -t$ and $z = -s$, $s, t > 0$.

Let $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ be the normal outwardly directed to $\Omega(-t, -s)$, and let $V(x, z) = (V_T(x, z), V_n(x, z))$ be a vector field decomposed on his tangential

5.4. Transfer of the impedance condition through a slab

and normal components V_T and V_n , respectively.

We recall that the Fourier transform for a function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is given by

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Théorème 5.1 *The exact impedance boundary condition on the surface $\Gamma_{-s} = \mathbb{R}^2 \times \{-s\}$ with the partial Fourier transform is given by*

$$G_{-s}(\xi) \widehat{E}_T(\xi, -s) = F_{-s}(\xi) \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, -s), \quad (5.8)$$

with

$$\begin{aligned} G_{-s}(\xi) &= [G_{-t}(\xi) \cos(\alpha(t-s)) + \sin(\alpha(t-s)) F_{-t}(\xi) Q(\xi)], \\ F_{-s}(\xi) &= [-G_{-t}(\xi) \sin(\alpha(t-s)) + \cos(\alpha(t-s)) F_{-t}(\xi) Q(\xi)] P(\xi), \end{aligned}$$

where $\alpha^2 = k^2 \varepsilon \mu - |\xi|^2$, G_{-t} and F_{-t} are the given operators in the boundary condition (5.5), P and Q are operators depending on the physical characteristics ε and μ and are defined by

$$\begin{cases} P(\xi) = P(\varepsilon, \mu)(\xi) = \frac{ik\mu}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{k^2 \varepsilon \mu} \xi(\xi \cdot) \right), \\ Q(\xi) = Q(\varepsilon, \mu)(\xi) = \frac{1}{ik\mu \alpha} (k^2 \varepsilon \mu - (\xi \times \mathbf{n})(\xi \times \mathbf{n}) \cdot), \end{cases} \quad (5.9)$$

where $(\xi \cdot)$ and $((\xi \times \mathbf{n}) \cdot)$ denote the scalar product with ξ and $(\xi \times \mathbf{n})$.

Preuve : Applying the partial Fourier transform to equations (5.7) we get

$$\begin{cases} D_z \widehat{E}_T(\xi, z) = -ik\mu \left(1 - \frac{1}{k^2 \varepsilon \mu} \xi(\xi \cdot) \right) \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, z), \\ D_z \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, z) = \frac{1}{ik\mu} (k^2 \varepsilon \mu - (\xi \times \mathbf{n})(\xi \times \mathbf{n}) \cdot) \widehat{E}_T(\xi, z). \end{cases} \quad (5.10)$$

By combining these two latter equations, we see that \widehat{E}_T and \widehat{H}_T satisfy the following second order differential equation

$$D_z^2 \widehat{U}_T + \alpha^2 \widehat{U}_T = 0,$$

where $\alpha^2 = k^2 \varepsilon \mu - |\xi|^2$.

Therefore \widehat{E}_T and \widehat{H}_T are given by

$$\begin{cases} \widehat{E}_T(\xi, z) = A(\xi) \cos(\alpha z) + B(\xi) \sin(\alpha z), \\ \widehat{H}_T(\xi, z) = C(\xi) \cos(\alpha z) + D(\xi) \sin(\alpha z). \end{cases} \quad (5.11)$$

Taking the derivative of (5.11) with respect to z , we get

$$\begin{cases} D_z \widehat{E}_T(\xi, z) = -\alpha A(\xi) \sin(\alpha z) + \alpha B(\xi) \cos(\alpha z), \\ D_z \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, z) = -\alpha (\mathbf{n} \times C)(\xi) \sin(\alpha z) + \alpha (\mathbf{n} \times D)(\xi) \cos(\alpha z). \end{cases} \quad (5.12)$$

Chapitre 5. Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

Substituting (5.11) into (5.10), we have

$$\left\{ \begin{array}{l} D_z \widehat{E}_T(\xi, z) = -ik\mu(\mathbf{n} \times C)(\xi) \cos(\alpha z) + \frac{i}{k\varepsilon} \xi(\xi \cdot \mathbf{n} \times C)(\xi) \cos(\alpha z) \\ \quad - ik\mu(\mathbf{n} \times D)(\xi) \cos(\alpha z) + \frac{i}{k\varepsilon} \xi(\xi \cdot \mathbf{n} \times D)(\xi) \sin(\alpha z), \\ D_z(\mathbf{n} \times \widehat{H}_T)(\xi, z) = \frac{k\varepsilon}{i} A(\xi) \cos(\alpha z) + \frac{k\varepsilon}{i} B(\xi) \sin(\alpha z) \\ \quad - \frac{1}{ik\mu} (\xi \times \mathbf{n}) [(\xi \times \mathbf{n}) \cdot A(\xi)] \cos(\alpha z) \\ \quad - \frac{1}{ik\mu} (\xi \times \mathbf{n}) [(\xi \times \mathbf{n}) \cdot B(\xi)] \sin(\alpha z). \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Identifying the coefficients of sin and cos we find that

$$\left\{ \begin{array}{l} A = P(\mathbf{n} \times D), \\ B = -P(\mathbf{n} \times C), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{n} \times C) = -QB, \\ (\mathbf{n} \times D) = QA. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Let's remark that P and Q defined in (5.9) satisfy

$$P(\xi) Q(\xi) = Q(\xi) P(\xi) = I. \quad (5.15)$$

Using the formulas (5.9) we can write (5.11) as

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{E}_T(\xi, z) = A(\xi) \cos(\alpha z) + B(\xi) \sin(\alpha z), \\ (\mathbf{n} \times \widehat{H}_T)(\xi, z) = -QB(\xi) \cos(\alpha z) + QA(\xi) \sin(\alpha z), \\ P(\mathbf{n} \times \widehat{H}_T)(\xi, z) = -B(\xi) \cos(\alpha z) + A(\xi) \sin(\alpha z). \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Therefore, by using the values of the electromagnetic field on the surface $\Gamma_{-s} = \mathbb{R}^2 \times \{-s\}$, we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\xi) = \cos(\alpha s) \widehat{E}_T(\xi, -s) - \sin(\alpha s) P(\mathbf{n} \times \widehat{H}_T(\xi, -s)), \\ B(\xi) = -\sin(\alpha s) \widehat{E}_T(\xi, -s) - \cos(\alpha s) P(\mathbf{n} \times \widehat{H}_T(\xi, -s)). \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Recall that the impedance boundary condition on the surface $\Gamma_{-t} = \mathbb{R}^2 \times \{-t\}$ is

$$G_{-t}(\xi) \widehat{E}_T(\xi, -t) = F_{-t}(\xi) (\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, -t).$$

Replacing $\widehat{E}_T(\xi, -t)$ and $(\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, -t)$ by their values from (5.16), we get

$$\begin{aligned} G_{-t}(\xi) (A(\xi) \cos(\alpha t) - B(\xi) \sin(\alpha t)) \\ = F_{-t} Q(\xi) (-B(\xi) \cos(\alpha t) - A(\xi) \sin(\alpha t)). \end{aligned}$$

Plugging the values of $A(\xi)$ and $B(\xi)$ given by (5.17) in the above formula we get the impedance boundary condition on the surface $\Gamma_{-s} = \mathbb{R}^2 \times \{-s\}$:

$$G_{-s}(\xi) \widehat{E}_T(\xi, -s) = F_{-s}(\xi) (\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, -s),$$

with

$$\begin{aligned} G_{-s}(\xi) &= [G_{-t}(\xi) \cos(\alpha(t-s)) + \sin(\alpha(t-s)) F_{-t}(\xi) Q(\xi)], \\ F_{-s}(\xi) &= [-G_{-t}(\xi) \sin(\alpha(t-s)) + \cos(\alpha(t-s)) F_{-t}(\xi) Q(\xi)] P(\xi), \end{aligned}$$

where, G_{-t} and F_{-t} are the operators of the given boundary condition on Γ_{-t} . \square

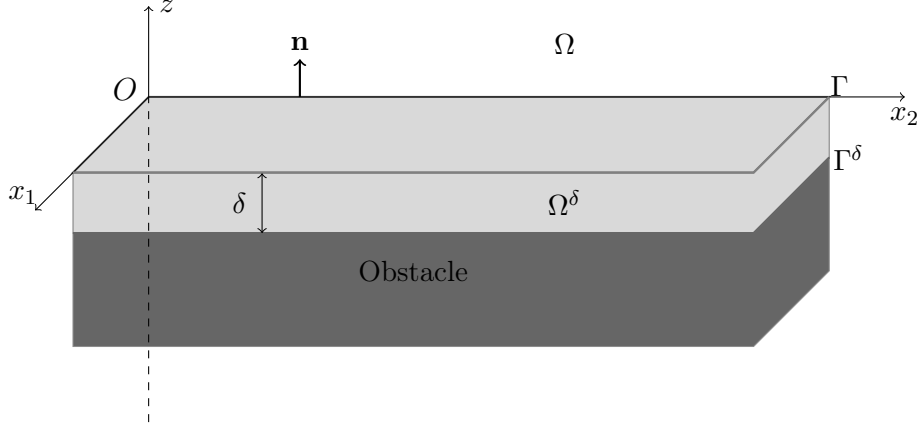


FIGURE 5.2 – Geometry of the planar metallic obstacle coated with one thin layer of dielectric substrate.

5.5 Application for a single thin layer

Théorème 5.2 For a slab of thickness δ , (see Figure : 5.2)

$$\Omega^\delta = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; -\delta < z < 0\},$$

the boundary condition $E \times \mathbf{n} = 0$ on the surface $\Gamma^\delta = \mathbb{R}^2 \times \{-\delta\}$ leads to the following approximate impedance boundary condition of order three :

$$E_{T|\Gamma} \simeq -ik\mu\delta \left(\left(1 - \frac{\delta^2}{3} k^2 \varepsilon \mu - \frac{\delta^2}{3} \overrightarrow{\Delta}_\Gamma \right)^{-1} + \frac{1}{k^2 \varepsilon \mu} \nabla_\Gamma \left(1 - \frac{\delta^2}{3} k^2 \varepsilon \mu - \frac{\delta^2}{3} \Delta_\Gamma \right)^{-1} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma, \quad (5.18)$$

where Δ_Γ and $\overrightarrow{\Delta}_\Gamma$ are respectively the surfacic scalar laplacian and the surfacic vectorial laplacian on Γ .

Preuve : The boundary condition $E \times \mathbf{n} = 0$ on the surface $\Gamma^\delta = \mathbb{R}^2 \times \{-\delta\}$ gives

$$G_{-\delta} E_T(-\delta) = F_{-\delta} (\mathbf{n} \times H)(-\delta),$$

with $G_{-\delta} = I$ and $F_{-\delta} = 0$, then the transfer formula (5.8) leads to

$$\widehat{E}_T(\xi, 0) = -\tan(\alpha\delta) P(\xi) (\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, 0),$$

which represents the exact impedance boundary condition.

For δ small enough and ξ fixed, we have

$$\tan(\alpha\delta) \simeq \alpha\delta + \frac{1}{3} \alpha^3 \delta^3,$$

Chapitre 5. Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

and therefore

$$\widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq -\delta \left(1 + \frac{\delta^2}{3}\alpha^2\right) \alpha P(\xi) (\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, 0),$$

which can be written as

$$\begin{aligned} \widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq & -ik\mu\delta \left(\left(1 + \frac{\delta^2}{3}k^2\varepsilon\mu - \frac{\delta^2}{3}|\xi|^2\right) I \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^2\varepsilon\mu}\xi \left(1 + \frac{\delta^2}{3}k^2\varepsilon\mu - \frac{\delta^2}{3}|\xi|^2\right) (\xi \cdot) \right) (\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, 0). \end{aligned} \quad (5.19)$$

By taking the inverse Fourier transform we obtain

$$\left(1 - \frac{\delta^2}{3} \left(k^2\varepsilon\mu + \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)\right) E_{T|\Gamma} \simeq -ik\mu\delta \left(1 + \frac{1}{k^2\varepsilon\mu} \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma)\right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma, \quad (5.20)$$

where $\overrightarrow{\Delta}_\Gamma$ is the surfacic vectorial Laplace Beltrami operator on Γ defined by

$$\overrightarrow{\Delta}_\Gamma = \nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma - \nabla_\Gamma \times \operatorname{curl}_\Gamma. \quad (5.21)$$

As the inverse of $\left(1 - \frac{\delta^2}{3}k^2\varepsilon\mu - \frac{\delta^2}{3}\overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)$ is equal to $\left(1 + \frac{\delta^2}{3} \left(k^2\varepsilon\mu + \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)\right)$ at order two with respect to δ we get

$$\begin{aligned} E_{T|\Gamma} & \simeq -ik\mu\delta \left(1 + \frac{\delta^2}{3} \left(k^2\varepsilon\mu + \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)\right) \left(1 + \frac{1}{k^2\varepsilon\mu} \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma)\right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma \\ & = -ik\mu\delta \left[\left(1 + \frac{\delta^2}{3} \left(k^2\varepsilon\mu + \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)\right) + \frac{1}{k^2\varepsilon\mu} \left(1 + \frac{\delta^2}{3} \left(k^2\varepsilon\mu + \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)\right) \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma) \right] (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma, \end{aligned}$$

but as

$$\overrightarrow{\Delta}_\Gamma \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma) = (\nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma - \nabla_\Gamma \times \operatorname{curl}_\Gamma) \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma) = \nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma,$$

we get

$$\left(k^2\varepsilon\mu + \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right) \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma) = \nabla_\Gamma \left(k^2\varepsilon\mu + \Delta_\Gamma\right) \operatorname{div}_\Gamma,$$

and then

$$\begin{aligned} E_{T|\Gamma} \simeq & -ik\mu\delta \left(\left(1 - \frac{\delta^2}{3}k^2\varepsilon\mu - \frac{\delta^2}{3}\overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)^{-1} + \right. \\ & \left. \frac{1}{k^2\varepsilon\mu} \nabla_\Gamma \left(1 - \frac{\delta^2}{3}k^2\varepsilon\mu - \frac{\delta^2}{3}\Delta_\Gamma\right)^{-1} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.1

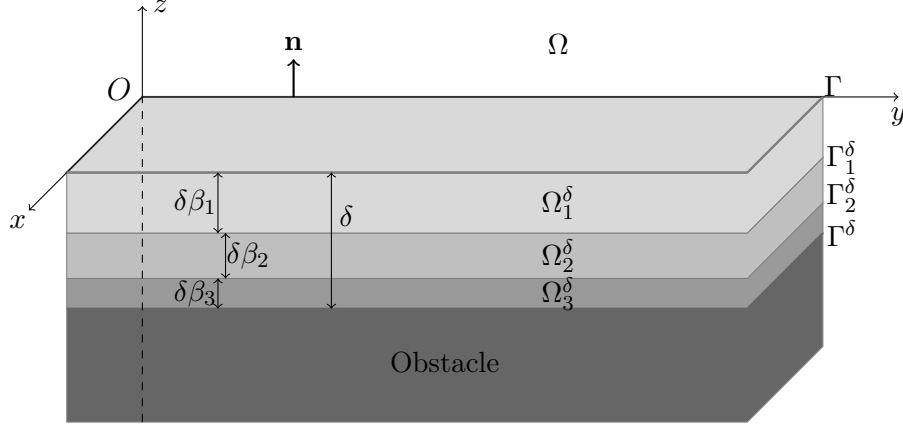


FIGURE 5.3 – Geometry of the planar metallic obstacle coated with three thin layers of dielectric substrates.

- 1) If we keep only the terms of order 1 in (5.18) we obtain the approximate condition

$$E_{T|\Gamma} \simeq -ik\mu\delta \left[1 + \frac{1}{k^2\varepsilon\mu} \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \right] (\mathbf{n} \times H)|_{\Gamma} \quad (5.22)$$

given by Engquist-Nédélec (see [19]).

- 2) The approximate condition (5.18) is a particular case of that in Bendali et al. (see. [10]) which contains curvature terms.

5.6 Application for three contrasted thin layers

In this section, we will extend the results obtained in the case of a single thin layer to the case when the domain Ω^{δ} is the superposition of three contrasted thin layers of dielectric materials Ω_j^{δ} , $1 \leq j \leq 3$ (see Figure : 5.3). The thin layers are parallel to each other and characterized by relative dielectric permittivity ε_j and relative magnetic permeability μ_j , $1 \leq j \leq 3$. In this case we must add the transmission conditions $[E \times \mathbf{n}] = 0$ and $[H \times \mathbf{n}] = 0$ on the interfaces Γ_j^{δ} , $j = 1, 2$.

5.6.1 Notation

For simplicity in writing some of the formulas in the case of multiple thin layers, we shall introduce the following notations.

Let A be a ring, and let $X, Y, Z \in A^n$. Then, we define

- The linear form $T_1(X)$ by

$$\begin{aligned} T_1(X) : \mathbb{R}^N &\rightarrow A \\ \delta &\mapsto T_1(X)(\delta) = \sum_{i=N}^{i=1} \delta_i X_i. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Chapitre 5. Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

— The bilinear form $T_2(X, Y)$ by

$$\begin{aligned} T_2(X, Y) : (\mathbb{R}^N)^2 &\rightarrow A \\ (\delta, \eta) &\mapsto T_2(X, Y)(\delta, \eta) = \sum_{i=1}^N \delta_i \eta_i X_i Y_i + \sum_{1 \leq j \leq i \leq N} 2\delta_i \eta_j X_i Y_j. \end{aligned} \quad (5.24)$$

— The trilinear form $T_3(X, Y, Z)$ by

$$\begin{aligned} T_3(X, Y, Z) : (\mathbb{R}^N)^3 &\rightarrow A \\ (\delta, \eta, \zeta) &\mapsto T_3(X, Y, Z)(\delta, \eta, \zeta) = \sum_{i,j,k} (T_3(X, Y, Z))_{i,j,k} \delta_i \eta_j \zeta_k, \end{aligned} \quad (5.25)$$

where

$$(T_3(X, Y, Z))_{i,j,k} = \begin{cases} X_i Y_i Z_i, & \text{if } i = j = k, \\ 3X_i Y_i Z_k & \text{if } i = j > k, \\ 3X_i Y_j Z_j & \text{if } i > j = k, \\ 6X_i Y_j Z_k & \text{if } i > j > k, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

5.6.2 Impedance boundary condition for three thin layers

Let β_j , $j = 1, 2, 3$ be positive real numbers satisfying $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$. We denote the j^{th} thin layer by $\Omega_j^\delta = \Omega(-t_j, -t_{j-1})$, $t_j = \delta \sum_{l=1}^{l=j} \beta_l$ with the convention $t_0 = 0$, and Γ_j^δ the interface between the j^{th} and the $(j+1)^{\text{th}}$ thin layers (see Figure 3).

Lemme 5.1 *The exact impedance boundary condition for the three thin layers is given by*

$$G \widehat{E}_T(\xi, 0) = F \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, 0), \quad (5.26)$$

where

$$\begin{aligned} G = & 1 - \tan(\alpha_3 \beta_3 \delta) P_3 \tan(\alpha_2 \beta_2 \delta) Q_2 - \tan(\alpha_3 \beta_3 \delta) P_3 \tan(\alpha_1 \beta_1 \delta) Q_1 \\ & - \tan(\alpha_2 \beta_2 \delta) P_2 \tan(\alpha_1 \beta_1 \delta) Q_1, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} F = & \tan(\alpha_1 \beta_1 \delta) P_1 + \tan(\alpha_2 \beta_2 \delta) P_2 + \tan(\alpha_3 \beta_3 \delta) P_3 \\ & - \tan(\alpha_3 \beta_3 \delta) P_3 \tan(\alpha_2 \beta_2 \delta) Q_2 \tan(\alpha_1 \beta_1 \delta) P_1, \end{aligned}$$

and

$$P_j = P(\varepsilon_j, \mu_j) \quad \text{and} \quad Q_j = Q(\varepsilon_j, \mu_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Preuve : We apply recursively, the transfer formula (5.8). Taking into account the continuity through the interfaces between the thin layers we get the requested result. \square

5.6. Application for three contrasted thin layers

5.6.2.1 First order approximation

Théorème 5.3 *A first order approximation of the impedance boundary condition for three thin layers is given by*

$$E_{T|\Gamma} \simeq -ik\delta \left(T_1(\mu)(\beta) + \frac{1}{k^2} T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma) \right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma. \quad (5.27)$$

Preuve : An approximation of (5.26) at the first order with respect to δ is

$$\widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq -(\alpha_1\beta_1\delta P_1 + \alpha_2\beta_2\delta P_2 + \alpha_3\beta_3\delta P_3) \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, 0).$$

Replacing $\alpha_j P_j$ with $ik \left(\mu_j - \frac{1}{k^2\varepsilon_j} \xi(\xi \cdot) \right)$, we get

$$\widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq -\delta ik \left(T_1(\mu)(\beta) - \frac{1}{k^2} T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) \xi(\xi \cdot) \right) \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, 0),$$

with $T_1(\mu)(\beta) = \sum_{l=1}^{l=3} \mu_l \beta_l$ and $T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) = \sum_{l=1}^{l=3} \frac{1}{\varepsilon_l} \beta_l$.

Hence, by the inverse Fourier transform, we find the first order approximation of the impedance boundary condition

$$E_{T|\Gamma} \simeq -ik\delta \left(T_1(\mu)(\beta) + \frac{1}{k^2} T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma) \right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma.$$

□

Remarque 5.2

- 1) *This first order approximation is that given in ([19]) for multi-layers.*
- 2) *The result in (Theorem 5.3) generalizes the one obtained in (Theorem 5.2) for one single layer, If the layers are not contrasted ($\varepsilon_j = \varepsilon, \mu_j = \mu$ for $j = 1, 2, 3$) we have the same approximation.*

5.6.2.2 Third order approximation

Théorème 5.4 *A third order approximate impedance boundary condition for three thin layers is given by*

$$E_{T|\Gamma} \simeq -ik\delta \left(T_1(\mu)(\beta) \left(1 - \delta^2 r_1 - \frac{\delta^2}{3} r_2 \overrightarrow{\Delta_\Gamma} \right)^{-1} - \frac{1}{k^2} T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) \nabla_\Gamma \left(1 - \delta^2 r_3 - \frac{\delta^2}{3} r_3 \Delta_\Gamma \right)^{-1} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathbf{n} \times H)|_\Gamma, \quad (5.28)$$

with

$$r_1 = k^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \varepsilon)(\beta, \beta, \beta)}{T_1(\mu)(\beta)}, r_2 = \frac{T_3\left(\mu, \mu, \frac{1}{\mu}\right)(\beta, \beta, \beta)}{T_1(\mu)(\beta)}, r_3 = \frac{T_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right)(\beta, \beta, \beta)}{T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta)},$$

Chapitre 5. Transfer and approximation of the impedance in planar geometry

and

$$s = \frac{1}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\beta)} \left(T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \mu, \varepsilon) + T_3(\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon) - T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu}) \right) (\beta, \beta, \beta).$$

Preuve : An approximation of (5.26) at order 3 with respect to δ is

$$G \widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq F \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, 0), \quad (5.29)$$

where

$$G = 1 - \delta^2 \beta_3 \beta_2 (\alpha_3 P_3) (\alpha_2 Q_2) - \delta^2 \beta_3 \beta_1 (\alpha_3 P_3) (\alpha_1 Q_1) - \delta^2 \beta_2 \beta_1 (\alpha_2 P_2) (\alpha_1 Q_1),$$

and

$$F = \beta_1 (\alpha_1 P_1) + \beta_2 (\alpha_2 P_2) + \beta_3 (\alpha_3 P_3) + \frac{\delta^2}{3} \beta_1^3 \alpha_1^2 (\alpha_1 P_1) + \frac{\delta^2}{3} \beta_2^3 \alpha_2^2 (\alpha_2 P_2) + \frac{\delta^2}{3} \beta_3^3 \alpha_3^2 (\alpha_3 P_3) - \delta^2 \beta_3 \beta_2 \beta_1 (\alpha_3 P_3) (\alpha_2 Q_2) (\alpha_1 P_1),$$

and

$$P_j = P(\varepsilon_j, \mu_j) \text{ and } Q_j = Q(\varepsilon_j, \mu_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

By replacing the operators P_j and Q_j with their expressions and using the notations introduced previously, we can write the impedance condition (5.29) as

$$\widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq -ik\delta \left(T_1(\mu)(\beta) \left(1 + \frac{\delta^2}{3} r_1 - \frac{\delta^2}{3} r_2 |\xi|^2 I \right) - \frac{1}{k^2} \xi T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\beta) \left(1 + \frac{\delta^2}{3} s - \frac{\delta^2}{3} r_3 |\xi|^2 \right) (\xi \cdot) \right) \left(\mathbf{n} \times \widehat{H} \right) (\xi, 0),$$

with

$$r_1 = k^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \varepsilon)(\beta, \beta, \beta)}{T_1(\mu)(\beta)}, r_2 = \frac{T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\beta, \beta, \beta)}{T_1(\mu)(\beta)}, r_3 = \frac{T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\beta, \beta, \beta)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\beta)},$$

and

$$s = \frac{1}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\beta)} \left(T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \mu, \varepsilon) + T_3(\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon) - T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu}) \right) (\beta, \beta, \beta).$$

We can verify that

$$[\xi(\xi \cdot) + (\xi \times n)((\xi \times n) \cdot)] = |\xi|^2 I, \quad (\xi \cdot) \xi = |\xi|^2.$$

As we have at second order with respect to δ

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{3} r_1 - \frac{\delta^2}{3} r_2 |\xi|^2 I \right) \simeq \left(1 - \frac{\delta^2}{3} r_1 + \frac{\delta^2}{3} r_2 |\xi|^2 I \right)^{-1},$$

5.6. Application for three contrasted thin layers

and

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{3}s - \frac{\delta^2}{3}r_3 |\xi|^2\right) \simeq \left(1 - \frac{\delta^2}{3}s + \frac{\delta^2}{3}r_3 |\xi|^2\right)^{-1},$$

the approximate impedance condition of order three can be written

$$\begin{aligned} \widehat{E}_T(\xi, 0) \simeq & -ik\delta \left(T_1(\mu)(\beta) \left(1 - \delta^2 r_1 + \frac{\delta^2}{3} r_2 |\xi|^2 I\right)^{-1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^2} \xi T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) \left(1 - \delta^2 s + \frac{\delta^2}{3} r_3 |\xi|^2\right)^{-1}(\xi \cdot) \right) (\mathbf{n} \times \widehat{H})(\xi, 0). \end{aligned}$$

By taking the inverse Fourier transform we get the following third order approximate impedance boundary condition :

$$\begin{aligned} E_{T|\Gamma} \simeq & -ik\delta \left(T_1(\mu)(\beta) \left(1 - \delta^2 r_1 - \frac{\delta^2}{3} r_2 \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right)^{-1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^2} T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\beta) \nabla_\Gamma \left(1 - \delta^2 s - \frac{\delta^2}{3} r_3 \Delta_\Gamma\right)^{-1} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathbf{n} \times H)_{|\Gamma}. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.3 For N contrasted layers ($N \geq 4$), of characteristics ε_j, μ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, the approximate impedance formula still holds.

Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

Sommaire

6.1	Introduction	97
6.2	Présentation du problème	98
6.2.1	Modélisation de l'obstacle	98
6.2.2	Système de Maxwell harmonique	99
6.2.3	Les conditions aux bords	99
6.2.4	Système d'équations abstraites	100
6.3	Description de l'approche utilisée	100
6.4	Construction de l'opérateur d'impédance	101
6.5	Approximation de l'opérateur d'impédance	104
6.5.1	Condition d'impédance d'ordre 0	105
6.5.2	Condition d'impédance d'ordre 1	106
6.5.3	Condition d'impédance d'ordre 2	107
6.5.4	Condition d'impédance d'ordre 3	109

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle parfaitement conducteur, recouvert par une multicouche de substrats diélectriques, la géométrie de l'obstacle cette fois-ci n'est pas plane. Nous écrivons le système de Maxwell sous la forme d'un système d'EDA du premier ordre. Le but de notre étude est de construire une approximation de l'opérateur d'impédance à l'ordre trois. L'approche que nous allons utiliser est celle de Bendaïli *et al.* [10]; cette dernière consiste à appliquer un développement de Taylor sur la condition conducteur parfait, elle nous permettra d'avoir une approximation de l'opérateur d'impédance de type Padé.

6.2 Présentation du problème

6.2.1 Modélisation de l'obstacle

La propagation de l'onde électromagnétique se fait dans un domaine extérieur non borné Ω^{ext} . Nous notons par D un obstacle métallique de géométrie non plane. Ce dernier est recouvert par une multicouche de substrats diélectriques Ω_l^δ , $l = 1, \dots, N$. Les couches minces sont supposées stratifiées et séparées par les interfaces Γ_l^δ , $l = 1, \dots, N - 1$. L'interface entre le domaine extérieur Ω^{ext} et la multicouche de diélectriques est une surface régulière notée $\Gamma_0^\delta = \partial\Omega^{ext}$. La frontière métallique est notée Γ^δ . Finalement, nous notons par \mathbf{n} la normale unitaire orientée vers l'extérieur de la multicouche le long de Γ_0^δ . Voir Figure 3.1.

Maintenant, nous décrivons les caractéristiques physiques de la multicouche, comme nous l'avons dit, elle est construite par la superposition de N couches minces de substrats diélectriques homogènes et isotropes, chacune d'elles est décrite par :

- Une caractéristique géométrique : l'épaisseur $\delta_l = \alpha_l \delta$, $l = 1, \dots, N$; avec $\sum_{l=1}^N \delta_l = \delta > 0$, qui est très petite par rapport aux autres dimensions de l'obstacle. Cette épaisseur est uniforme pour chacune des couches minces.
- Deux caractéristiques du milieu : la permittivité électrique ε_l et la perméabilité magnétique μ_l , $l = 1, \dots, N$; qui sont relatives à celles du domaine de propagation ε_0 et μ_0 .

Nous rappelons la paramétrisation des Ω_l^δ , $l = 1, \dots, N$; séparées par les interfaces Γ_l^δ , $l = 1, \dots, N - 1$, voir Figure 6.1,

$$\Omega_l^\delta = \bigcup_z \Gamma^z, \quad z \in \left] -\sum_{j=1}^{j=l} \delta_j, -\sum_{j=1}^{j=l-1} \delta_j \right[, \quad l = 1, \dots, N,$$

avec Γ^z définie par

$$\Gamma^z = \{\mathbf{x} \in \Omega_l^\delta, \mathbf{x} = m + z\mathbf{n}, m \in \Gamma_l^\delta, l = 0, \dots, N - 1\}.$$

Remarque 6.1 *Pour alléger l'écriture, nous allons adopter la notation suivante :*

$$\tilde{\delta}_l = \sum_{j=1}^l \delta_j = \sum_{j=1}^l \alpha_j \delta = \tilde{\alpha}_l \delta, \quad \text{tel que} \quad \sum_{l=1}^N \alpha_l = 1,$$

avec la convention : $\tilde{\delta}_N = \delta$ pour $l = N$ et $\tilde{\delta}_0 = \delta_0 = 0$ pour $l = 0$.

Remarque 6.2 *La notation adoptée pour l'interface entre la multicouche et le domaine extérieur est Γ_0^δ . Nous adoptons parfois une deuxième notation Γ , et cela dans le cas où nous travaillons seulement avec cette interface. C'est à dire dans le cas où nous n'avons pas besoin de citer les autres surfaces séparatrices entre les couches minces.*

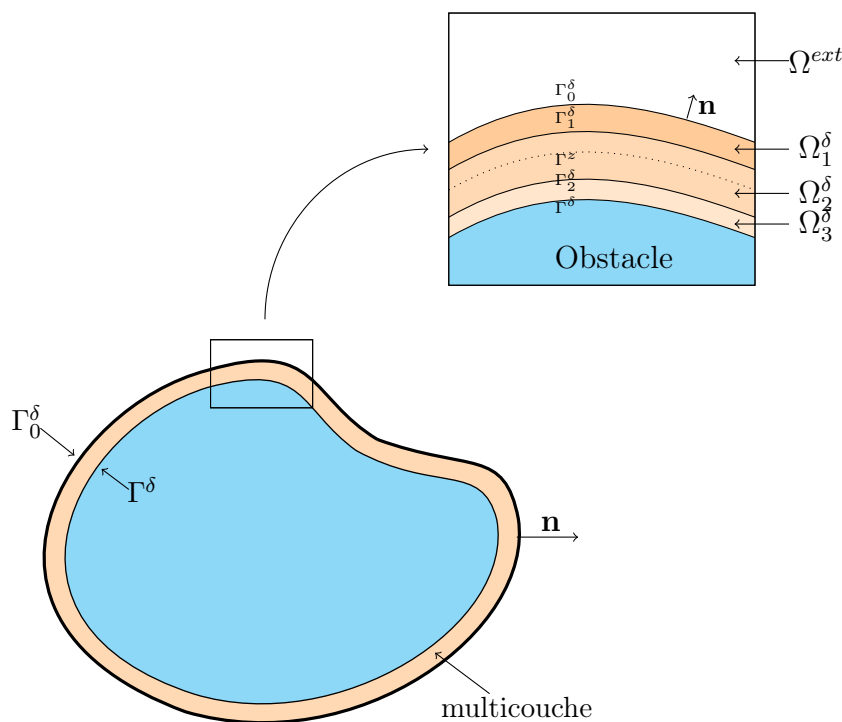


FIGURE 6.1 – Paramétrisation d'une multicouche.

6.2.2 Système de Maxwell harmonique

En absence de charge et de courant électrique, et en régime harmonique (voir Chapitre 3). Les équations de Maxwell décrivant la propagation de l'onde électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) sont définies comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{E} - i\omega \mathbf{H} = 0, & \text{dans } \Omega^{ext}, \quad (6.1a) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + i\omega \mathbf{E} = 0, & \text{dans } \Omega^{ext}, \quad (6.1b) \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_j - i\omega \mu_j \mathbf{H}_j = 0, & \text{dans } \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.1c) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_j + i\omega \varepsilon_j \mathbf{E}_j = 0, & \text{dans } \Omega_j^\delta, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.1d) \end{array} \right.$$

6.2.3 Les conditions aux bords

Le domaine de propagation de l'onde électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est constitué de plusieurs parties différentes (le domaine extérieur non borné, les substrats diélectriques contrastés et l'obstacle métallique), alors il est naturel de compléter notre système d'équations (6.1) par des conditions aux bords. Ces derniers sont catégorisées en trois types de conditions

Conditions de transmission : À la traversée des frontières séparatrices Γ_j^δ , $j = 0, \dots, N - 1$, les composantes tangentielles des champs électrique et ma-

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

gnétique sont continues

$$\begin{cases} [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{\Gamma_j^\delta} = 0, & j = 0, \dots, N-1, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]|_{\Gamma_j^\delta} = 0, & j = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (6.2a)$$

$$(6.2b)$$

Conditions de Dirichlet : Sur la frontière métallique Γ^δ , les composantes tangentielles du champ électrique sont nulles, cette condition est dite condition de type conducteur parfait

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^\delta. \quad (6.3)$$

Conditions de radiation à l'infini : Nous considérons la condition de Silver-Müller, de la forme

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}| \left(\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i\kappa \mathbf{E} \right) = 0. \quad (6.4)$$

6.2.4 Système d'équations abstraites

Nous avons vu dans la section 4.2 que le système de Maxwell à l'intérieur d'une multicouche Ω_j^δ , $j = 1, \dots, N$, peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles abstraites du premier ordre, de la variable z , donné par

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X}_j = \mathbb{M}_j \mathbf{X}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.5)$$

avec

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_T \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} \end{bmatrix}_j, \quad (6.6)$$

et

$$\mathbb{M}_j = \mathbb{M}(\delta_j, \varepsilon_j, \mu_j) = \begin{bmatrix} -\mathcal{C}_z & -i\omega\mu A_z \\ \frac{1}{i\omega\mu} B_z & (\mathcal{C}_z - 2\mathcal{H}_z) \end{bmatrix}_j. \quad (6.7)$$

Les coefficients sont des opérateurs différentiels de surface, donnés par

$$A_z = A_z(\varepsilon_j, \mu_j) = 1 + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_j \mu_j} \nabla_{\Gamma^z} \operatorname{div}_{\Gamma^z}, \quad (6.8)$$

$$B_z = B_z(\varepsilon_j, \mu_j) = \omega^2 \varepsilon_j \mu_j - \nabla_{\Gamma^z} \times \operatorname{rot}_{\Gamma^z}, \quad (6.9)$$

6.3 Description de l'approche utilisée

En 2009, à la conférence « waves 09 » organisée à Pau, A. Bendali en collaboration avec M. Fares, K. Lemrabet et S. Pernet, a présenté un travail non publié [10], dans lequel ils ont essayé de donner une approximation à l'ordre trois de la

6.4. Construction de l'opérateur d'impédance

condition d'impédance de type Padé, une approximation rationnelle de l'opérateur d'impédance, écrite sous la forme

$$Z_\delta^{\text{eff}} = \sum_{l=1}^{l=N} R_{\delta l} Q_{\delta l}^{-1} P_{\delta l}, \quad (6.10)$$

tels que $R_{\delta l}$, $Q_{\delta l}$ et $P_{\delta l}$ sont des opérateurs différentiels de surface et, $Q_{\delta l}$ est un opérateur elliptique inversible.

Leur approche a été adoptée pour surmonter la difficulté des instabilités numériques, apparaissant à cause de l'opérateur d'ordre élevé dans l'approximation de la condition d'impédance, voir Bendali *et al.* [9].

La démarche consiste en deux étapes principales :

Première étape : Écrire les équations de Maxwell à l'intérieur de la couche mince, sous la forme d'un système d'équations différentielles abstraites du premier ordre, voir équation (6.5), de la variable z qui varie le long de l'épaisseur de la couche mince. Les coefficients sont des opérateurs différentiels de surface.

Deuxième étape : Écrire la condition de type conducteur parfait, $\mathbf{E}_T|_{\Gamma^\delta} = 0$, en terme de son développement de Taylor, en δ , à l'ordre N .

Remarque 6.3 *En écrivant le développement de Taylor de la condition de type conducteur parfait, les dérivées d'ordre m de $\mathbf{E}_T|_\Gamma$, c'est-à-dire $\partial_z^m \mathbf{E}_T|_{z=0}$, peuvent être exprimées en fonction de $\mathbf{E}_T|_\Gamma = \mathbf{E}_T|_{z=0}$ et $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_\Gamma = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{z=0}$.*

Au final, la condition de type Padé d'ordre 3 qu'ils ont trouvée est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T + i\omega\mu\delta(\dots)(\mathbf{n} \times \mathbf{H})|_\Gamma &= 0, \\ (\dots) &= \left(\left(1 - \frac{\delta^2}{3}\Delta\right)^{-1} \mathcal{P}_\delta + \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma \left(1 - \frac{\delta^2}{3}\Delta\right)^{-1} a_\delta \operatorname{div}_\Gamma \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

avec

$$\mathcal{P}_\delta = 1 - \delta(\mathcal{C} - \mathcal{H}) + \frac{\delta^2}{3}(\omega^2 + 2(\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})), \quad (6.12a)$$

$$a_\delta = 1 + \delta\mathcal{H} + \frac{\delta^2}{3}(\omega^2 + 4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}). \quad (6.12b)$$

6.4 Construction de l'opérateur d'impédance

Après avoir présenté le problème aux limites et sa reformulation sous la forme abstraite, voir 4.2 ou bien sous-section 6.2.4. Nous donnons maintenant l'application de l'approche de Bendali *et al.* [10] à notre problème et, nous citons le

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

résultat principal dans ce chapitre.

Nous allons procéder comme suit : appliquer un développement de Taylor à la condition aux bords (6.3), $\mathbf{E}_{T|z=-\delta} \times \mathbf{n} = 0$ par rapport à δ_N . Puis, pour pouvoir passer d'une couche mince à une autre, nous utilisons les conditions de transmission (6.2). Notre but est de chercher des approximations jusqu'à l'ordre 3 de la condition d'impédance; nous éliminons alors les termes d'ordre supérieur.

Lemme 6.1 *Le vecteur $\mathbf{X}_N(-\delta)$ défini sur la surface Γ^δ , est écrit sur la frontière Γ en fonction de $\mathbf{X}_1(0)$ par :*

$$\mathbf{X}_N(-\delta) = \mathcal{N}_n \mathbf{X}_1(0), \quad (6.13)$$

tels que, l'indice n nous indique l'ordre d'approximation, l'opérateur \mathcal{N}_n est défini comme suit :

$$\mathcal{N}_n = \prod_{i=N}^1 \begin{pmatrix} I - \delta_i \mathbb{M} + \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) + \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \\ -\frac{1}{6} \delta_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \\ -\frac{1}{2} \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} \\ -\frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) + \dots \end{pmatrix} (0, \varepsilon_i, \mu_i). \quad (6.14)$$

Preuve : Pour $z \in]-\tilde{\delta}_1, 0[$, nous avons un milieu à coefficients ε_1 et μ_1 .

Pour $z \in]-\tilde{\delta}_j, -\tilde{\delta}_{j-1}[$, nous avons un milieu à coefficients ε_j et μ_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Au niveau de chaque substrat diélectrique, la $j^{\text{ème}}$ couche mince par exemple, nous appliquons un développement de Taylor en $\tilde{\delta}_{j-1}$, dans l'intervalle $]-\tilde{\delta}_j, -\tilde{\delta}_{j-1}[$,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_j) &= \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) - \delta_j \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) \\ &\quad + \frac{\delta_j^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) - \frac{\delta_j^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) + \dots \end{aligned} \quad (6.15)$$

Grâce à l'EDA du premier ordre (6.5), nous pouvons remplacer les dérivées du vecteur \mathbf{X}_j par les matrices \mathbb{M}_j et leurs dérivées, comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_j) &= \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) - \delta_j \mathbb{M} \left(\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j \right) \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) \\ &\quad + \frac{\delta_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) \left(\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j \right) \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) \\ &\quad - \frac{\delta_j^3}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \left(\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j \right) \mathbf{X}_j(-\tilde{\delta}_{j-1}) + \dots \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.4. Construction de l'opérateur d'impédance

Maintenant, pour pouvoir passer au substrat diélectrique suivant, nous utilisons les conditions de transmission (6.2) définies sur les surfaces Γ_{j-1}^δ ,

$$\begin{cases} [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] |_{\Gamma_{j-1}^\delta} = 0, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] |_{\Gamma_{j-1}^\delta} = 0. \end{cases} \quad (6.17a)$$

$$(6.17b)$$

Nous appliquons encore le développement de Taylor en $\tilde{\delta}_{j-2}$, dans l'intervalle $]-\tilde{\delta}_{j-1}, -\tilde{\delta}_{j-2}[$. Par la suite nous remplaçons les dérivées du vecteur \mathbf{X}_{j-1} par les matrices \mathbb{M}_{j-1} et leurs dérivées. Nous utilisons les conditions de transmission pour pouvoir passer à la couche mince suivante et ainsi de suite, jusqu'à arriver à la surface Γ .

Nous signalons que, à chaque application du développement de Taylor, nous gardons juste les termes d'ordre inférieur ou égal à 3, de cette façon nous avons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_N(-\tilde{\delta}_N) = \\ \prod_{j=N}^1 \left(I - \delta_j \mathbb{M} + \frac{\delta_j^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) - \right. \\ \left. \frac{\delta_j^3}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) + \dots \right) (\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j) \mathbf{X}_1(0, \varepsilon_1, \mu_1). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Les matrices \mathbb{M}_j sont dépendantes des domaines Ω_j^δ . Alors, nous devons appliquer un développement de Taylor sur les matrices \mathbb{M}_j et leurs dérivées comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j) = \mathbb{M}(0, \varepsilon_j, \mu_j) - \tilde{\delta}_j \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M}(0, \varepsilon_j, \mu_j) \\ + \frac{\tilde{\delta}_j^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M}(0, \varepsilon_j, \mu_j) + \dots, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) (\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) (0, \varepsilon_j, \mu_j) \\ - \tilde{\delta}_j \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) (0, \varepsilon_j, \mu_j) + \dots, \end{aligned} \quad (6.20)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) (\tilde{\delta}_j, \varepsilon_j, \mu_j) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) (0, \varepsilon_j, \mu_j) + \dots \end{aligned} \quad (6.21)$$

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

Finalement, nous faisons le produit des termes obtenus et, nous gardons toujours les termes d'ordre inférieur ou égal à trois. Nous obtenons la formule finale

$$\mathbf{X}_N(-\tilde{\delta}_N) = \prod_{i=N}^1 \left(\begin{array}{c} I - \delta_i \mathbb{M} + \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) + \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \\ -\frac{1}{6} \delta_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \\ -\frac{1}{2} \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} \\ -\frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) + \dots \end{array} \right) (0, \varepsilon_i, \mu_i) \mathbf{X}_1(0, \varepsilon_1, \mu_1). \quad (6.22)$$

□

Remarque 6.4 *L'opérateur \mathcal{N}_n final est une matrice carré d'ordre 2, à coefficients opérateurs différentiels de surface.*

6.5 Approximation de l'opérateur d'impédance

Nous rappelons que le but principal de cette étude, est d'avoir des approximations jusqu'à l'ordre trois de l'opérateur d'impédance. Nous allons voir dans la suite qu'en général la condition d'impédance s'écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{P} \mathbf{E}_{T|\Gamma} = \mathcal{Q} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}, \quad (6.23)$$

où \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des opérateurs différentiels définis sur Γ , et nous essayons toujours d'inverser l'opérateur \mathcal{P} , pour écrire une condition d'impédance sous la forme

$$\mathbf{E}_{T|\Gamma} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{Q} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}. \quad (6.24)$$

Pour avoir les différentes approximations, nous utilisons le résultat (6.13) du lemme 6.1, nous utilisons aussi la condition aux limites (6.3). Nous avons

$$0 = [\mathcal{N}_n]_{11} \mathbf{E}_{T|\Gamma} + [\mathcal{N}_n]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}. \quad (6.25)$$

Les coefficients $[\mathcal{N}_n]_{11}$ et $[\mathcal{N}_n]_{12}$ représentent la première composante et la deuxième composante, respectivement, de l'opérateur \mathcal{N}_n , qui est en réalité une matrice carré d'ordre 2 à coefficients opérateurs différentiels de surface.

Les différentes approximations, jusqu'à l'ordre trois, sont écrites

$$\mathbf{X}_{N|\Gamma^\delta} = \mathcal{N}_0(\varepsilon, \mu) \mathbf{X}_{1|\Gamma}, \quad (6.26)$$

$$\mathbf{X}_{N|\Gamma^\delta} = \mathcal{N}_1(\varepsilon, \mu) \mathbf{X}_{1|\Gamma}, \quad (6.27)$$

$$\mathbf{X}_{N|\Gamma^\delta} = \mathcal{N}_2(\varepsilon, \mu) \mathbf{X}_{1|\Gamma}, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{X}_{N|\Gamma^\delta} = \mathcal{N}_3(\varepsilon, \mu) \mathbf{X}_{1|\Gamma}, \quad (6.29)$$

6.5. Approximation de l'opérateur d'impédance

tels que, $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n(\varepsilon, \mu)$, $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq N}$ et $\mu = (\mu_j)_{1 \leq j \leq N}$.

Notre objectif maintenant est de calculer les \mathcal{N}_n , $n = 0, 1, 2, 3$.

Remarque 6.5 *Avant de commencer à calculer les approximations de l'opérateur d'impédance, nous rappelons rapidement les notations utiles : \mathbf{n} est la normale orientée vers l'extérieur de la multicouche le long de sa frontière avec le domaine extérieur, ε_j et μ_j les caractéristiques physiques de chaque substrat diélectrique Ω_j^δ . Les surfaces séparant les couches minces sont notées Γ_{j-1}^δ . La surface $\Gamma_0^\delta = \Gamma$ est l'interface avec le domaine extérieur, la surface Γ^δ représente l'interface avec l'obstacle métallique. Les épaisseurs uniformes de chaque Ω_j^δ sont notées δ_j , tels que $\delta_j = \alpha_j \delta$, $j = 1, 2, \dots, N$ et N représente le nombre de couches minces. Pour alléger l'écriture, nous utilisons cette notation*

$$\tilde{\delta}_j = \sum_{l=1}^{l=j} \delta_l = \sum_{l=1}^{l=j} \alpha_l \delta = \tilde{\alpha}_j \delta, \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l = 1.$$

\mathcal{C} , \mathcal{H} et \mathcal{G} sont des opérateurs de courbure.

Remarque 6.6 *Par souci de clarté, à chaque ordre d'approximation nous allons garder dans la formule de l'opérateur \mathcal{N}_n les premiers termes et cela jusqu'à l'ordre souhaité.*

6.5.1 Condition d'impédance d'ordre 0

Pour $n = 0$, d'après (6.13) nous avons

$$\mathcal{N}_n = \prod_{i=N}^1 \left(\begin{array}{c} I - \delta_i \mathbb{M} + \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) + \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \\ -\frac{1}{6} \delta_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \\ -\frac{1}{2} \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} \\ -\frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) + \dots \end{array} \right) (0, \varepsilon_i, \mu_i), \quad (6.30)$$

il est clair que $\mathcal{N}_0 = I$. En utilisant la condition aux limites (6.3), la condition d'impédance d'ordre 0 définie sur Γ est

$$\mathbf{E}_{T|\Gamma} = 0. \quad (6.31)$$

Cela signifie que, l'effet de la multicouche est négligé.

6.5.2 Condition d'impédance d'ordre 1

Première forme : Pour $n = 1$, d'après (6.13) nous avons

$$\mathcal{N}_n = \prod_{i=N}^1 \left(\begin{array}{c} I - \delta_i \mathbb{M} + \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) + \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \\ - \frac{1}{6} \delta_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \\ - \frac{1}{2} \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} \\ - \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) + \dots \end{array} \right) (0, \varepsilon_i, \mu_i). \quad (6.32)$$

Nous remarquons que $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_0 +$ « un terme d'ordre 1 ».

En développant le produit des termes de N à 1, nous avons

$$\mathcal{N}_1 = I - \delta \sum_{j=N}^1 \alpha_j \mathbb{M}_j. \quad (6.33)$$

Nous utilisons la notation tensorielle définie dans la sous-section 5.6.1, \mathcal{N}_1 s'écrit alors

$$\mathcal{N}_1 = I - \delta T_1(\mathbb{M}). \quad (6.34)$$

Avec la condition aux limites (6.3), nous avons

$$0 = [\mathcal{N}_1]_{11} \mathbf{E}_{T|\Gamma} + [\mathcal{N}_1]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma} \quad (6.35a)$$

$$= [I - \delta T_1(\mathbb{M})]_{11} \mathbf{E}_{T|\Gamma} - [\delta T_1(\mathbb{M})]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}. \quad (6.35b)$$

Deuxième forme : Le terme $[\mathcal{N}_1]_{12}$ est en δ . Alors, nous n'avons pas besoin de développer le terme $[\delta T_1(\mathbb{M})]_{11}$, car il va être éliminé. Nous obtenons à l'ordre un par rapport à δ

$$0 = \mathbf{E}_{T|\Gamma} - \delta [T_1(-i\omega\mu A)(\alpha)] (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}, \quad (6.36)$$

avec

$$A = A(\varepsilon, \mu) = 1 + \frac{1}{\omega^2 \mu} \nabla_{\Gamma} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_{\Gamma} \right), \quad \varepsilon = (\varepsilon)_{1 \leq i \leq N}, \quad \mu = (\mu)_{1 \leq i \leq N}. \quad (6.37)$$

Troisième forme : La formule finale de l'approximation de l'impédance à l'ordre 1, pour un domaine multicouche est donnée par

$$0 = \mathbf{E}_{T|\Gamma} + \delta i\omega \left[T_1(\mu)(\alpha) + \left(\frac{1}{\omega^2} T_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) (\alpha) \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}. \quad (6.38)$$

Remarque 6.7 D'après ce résultat, nous remarquons que la condition d'impédance d'ordre 1, ne fait pas intervenir l'effet de courbure et, elle représente la condition d'impédance dans le cas plan, que nous avons traité par l'analyse de Fourier [24].

Remarque 6.8 Cette approximation est la même que celle donnée par Engquist-Nédélec [19] pour une couche mince.

6.5.3 Condition d'impédance d'ordre 2

Première forme : Pour $n = 2$, d'après (6.13) nous avons

$$\mathcal{N}_n = \prod_{i=N}^1 \left(\begin{array}{c} I - \delta_i \mathbb{M} + \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) + \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \\ - \frac{1}{6} \delta_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \\ - \frac{1}{2} \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} \\ - \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) + \dots \end{array} \right) (0, \varepsilon_i, \mu_i). \quad (6.39)$$

Nous remarquons que $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 +$ « un terme d'ordre 2 ».

En développant le produit des termes de N à 1 nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 + \delta^2 \sum_{N \geq i > j \geq 1}^1 \alpha_i \alpha_j \mathbb{M}_i \mathbb{M}_j \\ + \delta^2 \sum_{i=N}^1 \frac{1}{2} \alpha_i^2 \left(\mathbb{M}_i^{(1)} + \mathbb{M}_i^2 \right) + \delta^2 \sum_{i=N}^1 \alpha_i \tilde{\alpha}_{i-1} \mathbb{M}_i^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

En notation tensorielle, \mathcal{N}_2 s'écrit comme suit

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha) + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha). \quad (6.41)$$

Maintenant, en utilisant la condition (6.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{N}_2]_{11} \mathbf{E}_{T|\Gamma} + [\mathcal{N}_2]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma} \quad (6.42) \\ &= \left[I - \delta T_1(\mathbb{M})(\alpha) + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha) + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha) \right]_{11} \mathbf{E}_{T|\Gamma} \\ &+ \left[-\delta T_1(\mathbb{M})(\alpha) + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha) + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha) \right]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Deuxième forme : Le terme $[\mathcal{N}_2]_{12}$ est en δ^2 , alors il suffit de multiplier à gauche par $[I + \delta T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11}$. Nous obtenons à l'ordre deux par rapport à δ

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}_T(0) \\ &+ \left\{ \left[\begin{array}{c} -\delta T_1(\mathbb{M})(\alpha) + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha) \\ + \delta^2 \frac{1}{2} T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha) \\ -\delta^2 [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{12} \end{array} \right]_{12} \right\} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

Remarque 6.9 *Le coefficient en δ est celui de la condition d'ordre un. Alors, nous ne calculons que les coefficients en δ^2 .*

Voici le développement des termes nécessaires pour cette approximation

$$[T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{12} = -i\omega T_1(\mu A)(\alpha), \quad (6.45)$$

$$[T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} = -\mathcal{C}T_1(I)(\alpha) = -\mathcal{C}, \quad (6.46)$$

$$[T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} = \mathcal{C}^2, \quad (6.47)$$

$$[T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{12} = \frac{1}{2}\mathcal{C} [T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha) + T_2(I, \mu A)(\alpha, \alpha)]^1, \quad (6.48)$$

$$\left[\frac{1}{2}T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha) \right]_{12} = i\omega \frac{1}{2}\mathcal{C}T_2(I, \mu A)(\alpha, \alpha) - i\omega \frac{1}{2}T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}), \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha) \right]_{12} &= i\omega \frac{1}{2}\mathcal{C}T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha) + i\omega \frac{1}{2}T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\ &\quad + i\omega \frac{1}{\omega^2}\nabla_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}T_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, I\right)(\alpha, \alpha)\right) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} \\ &\quad - i\omega \frac{1}{2}T_2(2\mu, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} &\left[\delta^2 \frac{1}{2}T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha) + \delta^2 \frac{1}{2}T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha) \right]_{12} \\ &\quad - \delta^2 [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{12} \\ &= i\omega \delta^2 \frac{1}{2}\mathcal{C}T_2(I, \mu A)(\alpha, \alpha) - i\omega \delta^2 \frac{1}{2}T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\ &\quad + i\omega \frac{1}{2}\delta^2 \mathcal{C}T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha) + i\omega \delta^2 \frac{1}{2}T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\ &\quad + i\omega \delta^2 \frac{1}{\omega^2}\nabla_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}T_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, I\right)(\alpha, \alpha)\right) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} \\ &\quad - i\omega \delta^2 \frac{1}{2}T_2(2\mu, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H}) \\ &\quad - i\omega \delta^2 \frac{1}{2}\mathcal{C} [T_2(\mu A, I)(\alpha, \alpha) + T_2(I, \mu A)(\alpha, \alpha)] \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} &= i\omega \delta^2 \frac{1}{\omega^2}\nabla_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}T_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, I\right)(\alpha, \alpha)\right) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} \\ &\quad - i\omega \delta^2 \frac{1}{2}T_2(2\mu, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (6.52)$$

La deuxième forme de la condition d'impédance, à l'ordre 2, est donnée par :

$$0 = \mathbf{E}_T(0) + \begin{pmatrix} i\omega \delta T_1(\mu A)(\alpha) \\ +i\omega \delta^2 \frac{1}{\omega^2}\nabla_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}T_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, I\right)(\alpha, \alpha)\right) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma} \\ -i\omega \delta^2 T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H}) \end{pmatrix} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0), \quad (6.53)$$

6.5. Approximation de l'opérateur d'impédance

avec

$$A = A(\varepsilon, \mu) = 1 + \frac{1}{\omega^2 \mu} \nabla_{\Gamma} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_{\Gamma} \right), \quad \varepsilon = (\varepsilon)_{1 \leq i \leq N}, \quad \mu = (\mu)_{1 \leq i \leq N}. \quad (6.54)$$

Troisième forme : La formule finale de l'approximation de l'impédance à l'ordre 2, pour un domaine multicouche est donnée par

$$0 = \mathbf{E}_T(0) + i\omega\delta \begin{pmatrix} T_1(\mu)(\alpha) + \frac{1}{\omega^2} T_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\alpha) \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \\ + \delta \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2} \nabla_{\Gamma} (T_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, I\right)(\alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_{\Gamma}) \\ - \delta T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha) (\mathcal{C} - \mathcal{H}) \end{pmatrix} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0). \quad (6.55)$$

Remarque 6.10 *D'après ce résultat, nous remarquons que c'est à l'ordre 2 que nous pouvons voir l'effet de courbure de la multicouche.*

Remarque 6.11 *Cette approximation est la même que celle donnée par Haddar et Joly [26], pour une couche mince.*

6.5.4 Condition d'impédance d'ordre 3

Première forme : Pour $n = 3$, d'après (6.13) nous avons

$$\mathcal{N}_n = \prod_{i=N}^1 \begin{pmatrix} I - \delta_i \mathbb{M} + \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 \right) + \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \\ - \frac{1}{6} \delta_i^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} + \mathbb{M}^3 \right) \\ - \frac{1}{2} \delta_i \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} \\ - \frac{1}{2} \delta_i^2 \left(\tilde{\delta}_{i-1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbb{M} \right) \mathbb{M} \right) + \dots \end{pmatrix} (0, \varepsilon_i, \mu_i). \quad (6.56)$$

Nous remarquons que $\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_2 + \ll \text{un terme d'ordre 3} \gg$.

En développant le produit des termes de N à 1, nous avons

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_3 = & \mathcal{N}_2 - \delta^3 \sum_{N \geq i > j > k \geq 1}^1 \alpha_i \alpha_j \alpha_k \mathbb{M}_i \mathbb{M}_j \mathbb{M}_k - \delta^3 \sum_{N \geq i > j \geq 1}^1 \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{l=1}^{i-1} \alpha_l \right) \mathbb{M}_i^{(1)} \mathbb{M}_j \\
& - \delta^3 \sum_{N \geq i > j \geq 1}^1 \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{l=1}^{j-1} \alpha_l \right) \mathbb{M}_i \mathbb{M}_j^{(1)} - \delta^3 \sum_{N \geq i > j \geq 1}^1 \frac{1}{2} \alpha_i^2 \alpha_j \left(\mathbb{M}_i^{(1)} + \mathbb{M}_i^{(2)} \right) \mathbb{M}_j \\
& - \delta^3 \sum_{N \geq i > j \geq 1}^1 \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j^2 \mathbb{M}_i \left(\mathbb{M}_j^{(1)} + \mathbb{M}_j^{(2)} \right) - \delta^3 \sum_{i=N}^1 \alpha_i \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \right)^2 \mathbb{M}_i^{(2)} \\
& - \delta^3 \sum_{i=N}^1 \frac{1}{2} \alpha_i^2 \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \right) \left(\mathbb{M}_i^{(2)} + \mathbb{M}_i^{(1)} \mathbb{M}_i + \mathbb{M}_i \mathbb{M}_i^{(1)} \right) \\
& - \delta^3 \sum_{i=N}^1 \frac{1}{6} \alpha_i^3 \left(\mathbb{M}_i^{(2)} + 2\mathbb{M}_i^{(1)} \mathbb{M}_i + \mathbb{M}_i \mathbb{M}_i^{(1)} + \mathbb{M}_i^3 \right). \quad (6.57)
\end{aligned}$$

En notation tensorielle, \mathcal{N}_3 s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_3 = & \mathcal{N}_2 - \delta^3 \frac{1}{6} T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}) (\delta, \delta, \delta) - \delta^3 \frac{1}{6} T_3(\mathbb{M}^{(2)}, I, I) (\delta, \delta, \delta) \\
& - \delta^3 \frac{1}{6} T_3(\mathbb{M}^{(1)}, \mathbb{M}, I) (\delta, \delta, \delta) - \delta^3 \frac{1}{6} T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}^{(1)}, I) (\delta, \delta, \delta) \\
& - \delta^3 \frac{1}{6} T_3(\mathbb{M}^{(1)}, I, \mathbb{M}) (\delta, \delta, \delta). \quad (6.58)
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la condition (6.3), nous obtenons

$$0 = [\mathcal{N}_3]_{11} \mathbf{E}_{T|\Gamma} + [\mathcal{N}_3]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})_{|\Gamma}. \quad (6.59)$$

Remarque 6.12 Pour inverser $[\mathcal{N}_3]_{11}$, nous utilisons le même argument que dans les conditions d'impédance d'ordre 1 et 2, c'est à dire, comme $[\mathcal{N}_3]_{12}$ est en δ^3 , alors dans $[\mathcal{N}_3]_{11}$ les termes en δ^3 ne sont pas pris en considération.

La première forme de la condition d'impédance à l'ordre 3 est la suivante

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\begin{array}{c} I - \delta T_1(\mathbb{M}) (\alpha) + \frac{1}{2} \delta^2 T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha) \\ + \frac{1}{2} \delta^2 T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha) \end{array} \right]_{11} \mathbf{E}_T(0) \\
+ & \left[\begin{array}{c} -\delta T_1(\mathbb{M}) (\alpha) + \frac{1}{2} \delta^2 T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha) + \frac{1}{2} \delta^2 T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha) \\ -\frac{1}{6} \delta^3 \left(\begin{array}{c} T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha) + T_3(\mathbb{M}^{(2)}, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) \\ + T_3(\mathbb{M}^{(1)}, \mathbb{M}, I) (\alpha, \alpha, \alpha) + T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha, \alpha) \\ + T_3(\mathbb{M}^{(1)}, I, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha) \end{array} \right) \end{array} \right]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0). \quad (6.60)
\end{aligned}$$

6.5. Approximation de l'opérateur d'impédance

Deuxième forme : À ce stade, pour obtenir la deuxième forme de la condition d'impédance, nous suivons trois étapes :

★ Étape 1 : Nous multiplions à gauche par $(I + \delta [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11})$. Nous obtenons à l'ordre trois par rapport à δ

$$\begin{aligned}
 0 = & \left(1 + \frac{1}{2} \delta^2 \begin{pmatrix} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha)]_{11} + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{11} \\ -2 ([T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11})^2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{E}_T(0) \\
 & + \left(\begin{array}{c} -\delta [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{12} \\ +\delta^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha)]_{12} + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{12} \\ -2 [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11} [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{12} \end{pmatrix} \\ -\frac{\delta^3}{6} \begin{pmatrix} [T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} + [T_3(\mathbb{M}^{(2)}, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_3(\mathbb{M}^{(1)}, \mathbb{M}, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} + [T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_3(\mathbb{M}^{(1)}, I, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} \\ -3 [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11} \begin{pmatrix} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{12} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) (0).
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

★ Étape 2 : Nous effectuons une deuxième multiplication à gauche par

$$1 - \frac{1}{2} \delta^2 \left([T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha) + T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{11} - 2 ([T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11})^2 \right). \tag{6.62}$$

Nous obtenons à l'ordre trois par rapport à δ

$$\begin{aligned}
 0 = & \mathbf{E}_T(0) - \delta [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{12} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) (0) \\
 & + \frac{1}{2} \delta^2 \begin{pmatrix} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha)]_{12} + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{12} \\ -2 [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11} [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{12} \end{pmatrix} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) (0) \\
 & - \frac{1}{6} \delta^3 \begin{pmatrix} [T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} + [T_3(\mathbb{M}^{(2)}, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_3(\mathbb{M}^{(1)}, \mathbb{M}, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} + [T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_3(\mathbb{M}^{(1)}, I, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} \\ -3 [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11} \begin{pmatrix} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{12} \end{pmatrix} \\ -3 \begin{pmatrix} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha)]_{11} \\ + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I) (\alpha, \alpha)]_{11} \end{pmatrix} [T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{12} \\ -2 ([T_1(\mathbb{M}) (\alpha)]_{11})^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) (0).
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

Remarque 6.13 *Les coefficients des termes en δ et δ^2 sont ceux de la condition d'ordre deux.*

★ Étape 3 : Avant de donner la deuxième forme de la condition d'impédance à l'ordre trois, nous donnons tout d'abord le développement des coefficients en δ^3 dans la formule (6.63). Nous calculons chaque terme d'une manière séparée, puis, nous faisons la somme.

$$\begin{aligned}
 & \bullet [T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} = \\
 & \quad - i\omega \mathcal{C}^2 T_3(I, I, \mu A) (\alpha, \alpha, \alpha) + i\omega T_3(\mu A, \frac{1}{\mu} B, \mu A) (\alpha, \alpha, \alpha) \\
 & \quad \quad + i\omega \mathcal{C} T_3(I, \mu A, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & \quad \quad \quad - i\omega T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2. \quad (6.64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet [T_3(\mathbb{M}^2, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} = \\
 & \quad - i\omega 2\mathcal{C}^2 T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) - i\omega 2\mathcal{C} T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & + i\omega 4T_3(\mu, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) \mathcal{C} (\mathcal{C} - \mathcal{H}) - i\omega \frac{2}{\omega^2} \mathcal{C} \nabla_\Gamma \left(T_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, I, I\right) (\alpha, \alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma \right) \\
 & \quad - i\omega \frac{2}{\omega^2} \nabla_\Gamma \left(T_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, I, I\right) (\alpha, \alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & \quad \quad - i\omega \frac{2}{\omega^2} \nabla_\Gamma \left(T_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, I, I\right) (\alpha, \alpha, \alpha) (4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{div}_\Gamma \right). \quad (6.65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet [T_3(\mathbb{M}^{(1)}, I, \mathbb{M}) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} = - i\omega \mathcal{C}^2 T_3(I, I, \mu A) (\alpha, \alpha, \alpha) \\
 & \quad + i\omega \mathcal{C} T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & \quad + i\omega T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2 \\
 & \quad - i\omega T_3(2\mu, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - \mathcal{H}) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & \quad + i\omega \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma \left(T_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, I, I\right) (\alpha, \alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (6.66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet [T_3(\mathbb{M}^{(1)}, \mathbb{M}, I) (\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} = - i\omega \mathcal{C}^2 T_3(I, \mu A, I) (\alpha, \alpha, \alpha) \\
 & \quad + i\omega \mathcal{C} T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & \quad + i\omega T_3(\mu A, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2 \\
 & \quad - i\omega T_3(2\mu, I, I) (\alpha, \alpha, \alpha) (\mathcal{C} - \mathcal{H}) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 & \quad + i\omega \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma \left(T_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, I, I\right) (\alpha, \alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma \right) (\mathcal{C} - 2\mathcal{H}). \quad (6.67)
 \end{aligned}$$

6.5. Approximation de l'opérateur d'impédance

$$\begin{aligned}
 \bullet [T_3(\mathbb{M}, \mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha, \alpha)]_{12} &= -i\omega\mathcal{C}^2 T_3(I, \mu A, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \\
 &\quad - i\omega\mathcal{C} T_3(I, \mu A, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 &\quad - i\omega T_3(\mu A, I, I)(\mathcal{C} - 2\mathcal{H})^2 \\
 &\quad + i\omega T_3(I, 2\mu, I)(\alpha, \alpha, \alpha)\mathcal{C}(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\
 &\quad - i\omega \frac{\mathcal{C}}{\omega^2} \nabla_\Gamma \left(T_3(I, \frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma \right).
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet 3 [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11} &\left(\begin{array}{c} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha)]_{12} \\ + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha)]_{12} \end{array} \right) = \\
 -i\omega\mathcal{C}^2 &\left(\begin{array}{c} 2T_3(\mu A, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + 2T_3(I, I, \mu A)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + 2T_3(I, \mu A, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \end{array} \right) - i\omega \frac{1}{\omega^2} \mathcal{C} \nabla_\Gamma \left(\begin{array}{c} 2T_3(\frac{1}{\varepsilon}, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + T_3(I, \frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \end{array} \right) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma \\
 &\quad + i\omega \left(\begin{array}{c} 2T_3(2\mu, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + T_3(I, 2\mu, I)(\alpha, \alpha, \alpha) \end{array} \right) \mathcal{C}(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}).
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet 3 &\left(\begin{array}{c} [T_2(\mathbb{M}, \mathbb{M})(\alpha, \alpha)]_{11} \\ + [T_2(\mathbb{M}^{(1)}, I)(\alpha, \alpha)]_{11} \\ - 2([T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{11})^2 \end{array} \right) [T_1(\mathbb{M})(\alpha)]_{12} = \\
 &\quad i\omega \left(\begin{array}{c} +T_3(\mu A, \frac{1}{\mu} B, \mu A)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ 2T_3(\mu A, \mu A, \frac{1}{\mu} B)(\alpha, \alpha, \alpha) \end{array} \right).
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

Maintenant, après avoir calculé et développé chaque terme dans le coefficient de δ^3 , ce dernier vaut

$$i\omega \frac{1}{3} \left(\begin{array}{c} T_3(\mu A, \mu A, \frac{1}{\mu} B)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + 2T_3(\mu, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\ + \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma (T_3(\frac{1}{\varepsilon}, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{div}_\Gamma) \end{array} \right). \tag{6.71}$$

Alors, la deuxième forme de la condition d'impédance à l'ordre 3 est donnée par

$$\begin{aligned}
 0 = \mathbf{E}_T(0) &\quad + i\omega\delta T_1(\mu A)(\alpha)(\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0) \\
 &\quad + \frac{1}{2} i\omega\delta^2 \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma (T_2(\frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \operatorname{div}_\Gamma) \\ - 2T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H}) \end{array} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0) \\
 &\quad + \frac{1}{3} i\omega\delta^3 \left(\begin{array}{c} T_3(\mu A, \mu A, \frac{1}{\mu} B)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + 2T_3(\mu, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\ + \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma (T_3(\frac{1}{\varepsilon}, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \operatorname{div}_\Gamma) \end{array} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0),
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

avec

$$A = A(\varepsilon, \mu) = 1 + \frac{1}{\omega^2 \mu} \nabla_{\Gamma} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_{\Gamma} \right), \quad (6.73)$$

$$B = B(\varepsilon, \mu) = \omega^2 \varepsilon \mu - \nabla_{\Gamma} \times \operatorname{curl}_{\Gamma}, \quad (6.74)$$

et

$$\varepsilon = (\varepsilon)_{1 \leq i \leq N}, \quad \mu = (\mu)_{1 \leq i \leq N}.$$

Troisième forme : En substituant par les formules des opérateurs A et B dans (6.72), nous obtenons

$$0 = \mathbf{E}_T(0) + i\omega\delta(\dots)(\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0),$$

$$(\dots) = \left\{ \begin{array}{l} T(\mu)(\alpha) - \delta T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H}) \\ + \frac{2}{3} \delta^2 T_3(\mu, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) \\ + \frac{1}{3} \delta^2 \omega^2 T_3(\mu, \mu, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ + \frac{1}{3} \delta^2 T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\alpha, \alpha, \alpha)(\nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} - \nabla_{\Gamma} \times \operatorname{curl}_{\Gamma}) \\ \frac{1}{\omega^2} \nabla_{\Gamma} \left(\begin{array}{l} T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha) \\ + \frac{1}{2} \delta T_2(\frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha) 2\mathcal{H} \\ + \frac{1}{3} \delta^2 T_3(\frac{1}{\varepsilon}, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)(4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) \\ + \frac{1}{3} \delta^2 T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha) \operatorname{div}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \\ + \frac{1}{3} \omega^2 \delta^2 T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \mu, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha) + \frac{1}{3} \omega^2 \delta^2 T_3(\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha) \\ - \frac{1}{3} \omega^2 \delta^2 T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\alpha, \alpha, \alpha) \end{array} \right) \operatorname{div}_{\Gamma} . \end{array} \right. \quad (6.75)$$

Remarque 6.14 Nous rappelons les deux identités vectorielles suivantes, que nous utilisons par la suite

$$\Delta_{\Gamma} = \operatorname{div}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma}, \quad (6.76)$$

$$\overrightarrow{\Delta}_{\Gamma} = \nabla_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} - \nabla_{\Gamma} \times \operatorname{rot}_{\Gamma}. \quad (6.77)$$

Nous pouvons encore écrire la condition d'impédance à l'ordre trois sous la forme suivante

$$0 = \mathbf{E}_T(0) + i\omega\delta \left(\begin{array}{l} T_1(\mu)(\alpha) \left(1 + \delta P_{\delta} + \frac{1}{3} \delta^2 g \overrightarrow{\Delta}_{\Gamma} \right) \\ + \frac{1}{\omega^2} \nabla_{\Gamma} T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha) \left(1 + \delta a_{\delta} + \frac{1}{3} \delta^2 h \Delta_{\Gamma} \right) \operatorname{div}_{\Gamma} \end{array} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0), \quad (6.78)$$

6.5. Approximation de l'opérateur d'impédance

avec

$$P_\delta = -\frac{T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)}(\mathcal{C} - \mathcal{H}) + \delta \frac{2}{3} \frac{T_3(\mu, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)}(\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) + \delta \frac{1}{3} \omega^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)}, \quad (6.79)$$

$$g = \frac{T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)}, \quad (6.80)$$

$$a_\delta = \frac{T_2(\frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} \mathcal{H} + \frac{\delta}{3} \frac{T_3(\frac{1}{\varepsilon}, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} (4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) + \frac{1}{3} \delta \omega^2 \frac{T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \mu, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} + \frac{1}{3} \delta \omega^2 \frac{T_3(\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} - \frac{1}{3} \delta \omega^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)}, \quad (6.81)$$

et

$$h = \frac{T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)}. \quad (6.82)$$

Remarque 6.15 *La condition d'impédance donnée par la formule (6.78) contient un opérateur de dérivation à l'ordre quatre. Dans la suite, pour remédier ce problème, nous essayons de remplacer les termes*

$$\left(1 + \delta P_\delta + \frac{1}{3} \delta^2 g \overrightarrow{\Delta}_\Gamma\right), \quad (6.83)$$

et

$$\left(1 + \delta a_\delta + \frac{1}{3} \delta^2 h \Delta_\Gamma\right), \quad (6.84)$$

par leurs inverses.

Remarque 6.16 *À l'ordre deux, nous avons*

$$(1 + a\delta + b\delta^2)^{-1} = (1 + a'\delta + b'\delta^2), \quad (6.85)$$

tels que

$$\begin{aligned} a' &= -a, \\ b' &= a^2 - b. \end{aligned}$$

Chapitre 6. Calcul de l'opérateur d'impédance pour une géométrie non plane

Suivant cette dernière remarque, à l'ordre deux, nous avons

$$\bullet \left(1 + \delta P_\delta + \frac{1}{3} \delta^2 g \overrightarrow{\Delta_\Gamma} \right) = \left(1 + \delta Q_\delta - \frac{1}{3} \delta^2 g \overrightarrow{\Delta_\Gamma} \right)^{-1}. \quad (6.86)$$

Avec

$$Q_\delta = \frac{T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)} (\mathcal{C} - \mathcal{H}) + \delta \left(\frac{T_2(\mu, I)(\alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)} (\mathcal{C} - \mathcal{H}) \right)^2 - \delta \left(\frac{2 T_3(\mu, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)}{3 T_1(\mu)(\alpha)} (\mathcal{C} - \mathcal{H})(\mathcal{C} - 2\mathcal{H}) + \frac{1}{3} \omega^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)} \right). \quad (6.87)$$

$$\bullet \left(1 + \delta a_\delta + \frac{1}{3} \delta^2 h \Delta_\Gamma \right) = \left(1 + \delta b_\delta - \frac{1}{3} \delta^2 h \Delta_\Gamma \right)^{-1}. \quad (6.88)$$

Avec

$$b_\delta = - \frac{T_2(\frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} \mathcal{H} + \delta \left(\frac{T_2(\frac{1}{\varepsilon}, I)(\alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} \mathcal{H} \right)^2 - \frac{\delta T_3(\frac{1}{\varepsilon}, I, I)(\alpha, \alpha, \alpha)}{3 T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} (4\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}) - \frac{1}{3} \delta \omega^2 \frac{T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \mu, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} - \frac{1}{3} \delta \omega^2 \frac{T_3(\mu, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} + \frac{1}{3} \delta \omega^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)}. \quad (6.89)$$

La formule finale de l'approximation de l'impédance à l'ordre 3, pour un domaine multicouche est donnée par

$$0 = \mathbf{E}_T(0) + i\omega \delta \left(\begin{array}{c} T_1(\mu)(\alpha) \left(1 + \delta Q_\delta - \frac{1}{3} \delta^2 \frac{T_3(\mu, \mu, \frac{1}{\mu})(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\mu)(\alpha)} \overrightarrow{\Delta_\Gamma} \right)^{-1} \\ + \frac{1}{\omega^2} \nabla_\Gamma T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha) \left(1 + \delta b_\delta - \frac{1}{3} \delta^2 \frac{T_3(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon)(\alpha, \alpha, \alpha)}{T_1(\frac{1}{\varepsilon})(\alpha)} \Delta_\Gamma \right)^{-1} \operatorname{div}_\Gamma \end{array} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{H})(0). \quad (6.90)$$

Les coefficients Q_δ et b_δ sont donnés par (6.87) et (6.89), respectivement.

Annexes

Solution de l'équation de Helmholtz

Les fonctions de Hankel sphériques de première espèce et les harmoniques sphériques apparaissent lors de la résolution de l'équation de Helmholtz homogène

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad (\text{A.1})$$

avec $\kappa \in \mathbb{C}$ et $\Im(\kappa) \geq 0$.

En utilisant la méthode de séparation des variables, en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , la solution s'écrit de la forme suivante

$$u(\mathbf{x}) = \varrho(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (\text{A.2})$$

Le laplacien se décompose de la manière suivante

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathcal{S}^2} u, \quad (\text{A.3})$$

avec $\Delta_{\mathcal{S}^2}$ représente l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité \mathcal{S}^2 de \mathbb{R}^3 , il est donné par

$$\Delta_{\mathcal{S}^2} u = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.4})$$

La solution correspondante à la partie radiale $\varrho(r)$ est donnée par la fonction de Hankel sphérique de première espèce $h_n^{(1)}$. La partie angulaire $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ correspond aux fonctions harmoniques sphériques $Y_{n,m}(\theta, \phi)$. Ces dernières sont les modes propres du problème aux valeurs propres de l'équation de Laplace-Beltrami sur la sphère unité

$$-\Delta_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\mathbf{x}) = n(n+1) Y_{n,m}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.5})$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $|m| \leq n$. Le lecteur pourra se référer par exemple à [15], [38], [43] ou bien [44].

Avant de donner une formule explicite des fonctions harmoniques sphériques, nous définissons tout d'abord les polynômes de Legendre d'ordre n (voir [43, Section 9.3]).

Annexe A. Solution de l'équation de Helmholtz

Définition A.1 Nous notons par $P_{n,m}$ le m -ème polynôme de Legendre d'ordre n , donné par

$$P_{n,m}(t) = (1-t^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dt} \right)^m P_n(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.6})$$

pour tous m , $n \in \mathbb{N}$. Les polynômes P_n sont donnés par la formule suivante (dite formule de Rodrigues)

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

Ces derniers représentent les solutions de l'équation différentielle de Legendre

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-t^2) \frac{\partial}{\partial t} P_n + n(n+1)P_n = 0. \quad (\text{A.8})$$

Définition A.2 La m -ème fonction harmonique sphérique d'ordre n est donnée par

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_{n,|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi), \quad (\text{A.9})$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $|m| \leq n$.

Remarque A.1 Nous pouvons écrire $Y_{n,m}(\hat{\mathbf{x}})$, pour $\hat{\mathbf{x}}$ le vecteur unité avec les coordonnées (θ, ϕ) .

Rappel de résultats de théorie spectrale

Théorème B.1 Soient H un espace de Hilbert et $T : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire borné. Si T est compact auto-adjoint, alors il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n \geq 0}$ de H constituée de vecteurs propres de T tels que :

- (1) $T\phi_n = \lambda_n \phi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (2) $(\phi_n, \phi_m)_H = \delta_{nm}$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,
- (3) la suite des valeurs propres $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie : $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, strictement positive et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- (4) tout $u \in H$ s'écrit sous la forme d'une série convergente dans H

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \phi_n, \quad \text{avec} \quad u_n = (u, \phi_n)_H. \quad (\text{B.1})$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_{\mathcal{S}^2}$ vérifie les hypothèses de ce théorème dans l'espace $L^2(\mathcal{S}^2)$. Ses vecteurs propres sont donnés par les harmoniques sphériques $Y_{n,m}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $|m| \leq n$.

Théorème B.2 Les fonctions harmoniques sphériques $Y_{n,m}$ forment une base orthonormale pour l'espace $L^2(\mathcal{S}^2)$ (voir [43]).

Pour l'espace des champs tangents $\mathbf{L}_t^2(\mathcal{S}^2)$, nous avons le théorème suivant

Théorème B.3 La famille $(\nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}, \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m})$ constitue une base des vecteurs propres pour l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel $\overrightarrow{\Delta}_{\mathcal{S}^2}$ sur l'espace $\mathbf{L}_t^2(\mathcal{S}^2)$, c'est à dire

$$\overrightarrow{\Delta}_{\mathcal{S}^2} \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} = -n(n+1) \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}, \quad (\text{B.2})$$

$$\overrightarrow{\Delta}_{\mathcal{S}^2} \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} = -n(n+1) \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}, \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{\mathcal{S}^2} |\nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}|^2 d(\mathcal{S}^2) = \int_{\mathcal{S}^2} |\overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}|^2 d(\mathcal{S}^2) = n(n+1). \quad (\text{B.4})$$

Le lecteur pourra revenir à [44].

Annexe B. Rappel de résultats de théorie spectrale

Corollaire B.1 *Les fonctions harmoniques sphériques vectorielles*

$$\frac{1}{n(n+1)} \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n(n+1)} \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}, \quad (\text{B.5})$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m = -n, \dots, n$, forment une base orthonormale de $\mathbf{L}_t^2(\mathcal{S}^2)$.

Proposition B.1 [37] *Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathcal{S}^2}, \mathcal{S}^2)$. Alors \mathbf{u} admet la décomposition spectrale suivante :*

$$\mathbf{u}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ a_{n,m} \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\theta, \phi) + b_{n,m} \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\}, \quad (\text{B.6})$$

les coefficients spectraux $a_{n,m}$ et $b_{n,m}$ sont donnés par

$$a_{n,m}(r) = \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \rangle_{\mathcal{S}^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$b_{n,m}(r) = \left\langle \mathbf{u}, \overrightarrow{\text{rot}}_{\mathcal{S}^2} Y_{n,m} \right\rangle_{\mathcal{S}^2}. \quad (\text{B.8})$$

Bibliographie

- [1] A. Abdallaoui and K. Lemrabet. Mechanical impedance of a thin layer in asymmetric elasticity. *Applied Mathematics and Computation*, 316 :467–479, 2018.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [3] H. Ammari and C. Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(4) :673–692, 1999.
- [4] N. Bartoli. *Modèles pour la diffraction d’ondes par des obstacles revêtus de couches minces. Résolution de problèmes de diffraction d’ondes via une formulation intégrale de type point selle*. PhD thesis, Toulouse, INSA, 2000.
- [5] N. Bartoli and A. Bendali. Numerical solving of electromagnetic scattering by coated perfectly conducting obstacles. Technical report, Technical report TR/EMC/01/42, CERFACS, Toulouse, France, 2001.
- [6] N. Bartoli and A. Bendali. Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. *IMA journal of applied mathematics*, 67(5) :479–508, 2002.
- [7] H. Barucq, A. G. Dupouy St-Guirons, and S. Tordeux. Non-reflecting boundary condition on ellipsoidal boundary. *Numerical Analysis and Applications*, 5(2) :109–115, 2012.
- [8] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the helmholtz equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [9] A. Bendali and K. Lemrabet. Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell. *Asymptotic Analysis*, 57(3-4) :199–227, 2008.
- [10] A. Bendali, F. Mbarek, K. Lemrabet, and P. Sébastien. Recent developments in the scattering of an electromagnetic wave by a coated perfectly conducting obstacle. *Waves 09, Pau, France*, 2009.

Bibliographie

- [11] L. Bourgeois and H. Haddar. Identification of generalized impedance boundary conditions in inverse scattering problems. 2008.
- [12] K. E. Boutarene. *Approximation de l'impédance d'une inclusion mince contrastée pour un problème de transmission en diffraction des ondes*. PhD thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, 2015.
- [13] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [14] N. Chaulet. *Modèles d'impédance généralisée en diffraction inverse*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2012.
- [15] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology : Volume 1 Physical Origins and Classical Methods*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] M. Duruflé, H. Haddar, and P. Joly. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes Rendus Physique*, 7(5) :533–542, 2006.
- [18] M. Duruflé, V. Péron, and C. Poignard. Thin layer models for electromagnetism. *Communications in Computational Physics*, 16(01) :213–238, 2014.
- [19] B. Engquist and J.-C. Nédélec. Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Technical report, Technical Report of CMAP, 278, 1993.
- [20] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1*. Addison-Wesley, 1963.
- [21] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, et al. The feynman lectures on physics, vol. 2. *Reading : Addison-Wesley*, 1964.
- [22] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] F. Z. Goffi and K. Lemrabet. Approximation of the impedance for time-harmonic maxwell's system in non planar domain with thin contrasted multi-layers. *En préparation*.
- [24] F. Z. Goffi, K. Lemrabet, and T. Laadj. Transfer and approximation of the impedance for time-harmonic maxwell's system in a planar domain with thin contrasted multi-layers. *Asymptotic Analysis*, 101(1-2) :1–15, 2017.

-
- [25] F. Z. Goffi and S. Tordeux. Well-posedness problem for time-harmonic maxwell's system in a domain with thin contrasted multi-layers. *En préparation*.
- [26] H. Haddar and P. Joly. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings. *Journal of computational and applied mathematics*, 143(2) :201–236, 2002.
- [27] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles : The case of maxwell's equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(10) :1787–1827, 2008.
- [28] H. Haddar and A. Lechleiter. Electromagnetic wave scattering from rough penetrable layers. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 43(5) :2418–2443, 2011.
- [29] C. Hazard and M. Lenoir. On the solution of time-harmonic scattering problems for maxwell's equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(6) :1597–1630, 1996.
- [30] P. Huddleston and D.-S. Wang. An impedance boundary condition approach to radiation by uniformly coated antennas. *Radio science*, 24(04) :427–432, 1989.
- [31] P. Joly and A. Semin. Propagation of an acoustic wave in a junction of two thin slots. Technical report, 2008.
- [32] P. Joly and A. Semin. *Propagation of an acoustic wave in a junction of two thin slots*. PhD thesis, INRIA, 2008.
- [33] P. Joly and S. Tordeux. Asymptotic analysis of an approximate model for time harmonic waves in media with thin slots. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(1) :63–97, 2006.
- [34] P. Joly and S. Tordeux. Asymptotic analysis of an approximate model for time harmonic waves in media with thin slots. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(1) :63–97, 2006.
- [35] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots i : The asymptotic expansion. *Multiscale Modeling & Simulation*, 5(1) :304–336, 2006.
- [36] J. B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *Journal of computational physics*, 82(1) :172–192, 1989.
- [37] J. Labat. Diffraction d'une onde électromagnétique par de petits obstacles. Technical report, Rapport de stage réalisé à l'EPC Magique 3D-Université de Pau et des payes de l'Adour, 2016.

Bibliographie

- [38] N. Lebedev. Special functions and their applications. revised edition, 1972.
- [39] M. Leontovich. Methods of solution for problems of electromagnetic waves propagation along the earth surface. *Bull. Acad. Sci. USSR, Phys. Ser.*, 8(1) :1622, 1944.
- [40] M. Leontovich. On the approximate boundary conditions for electromagnetic fields on the surface of well conducting bodies. *Investigations of propagation of radio waves*, pages 5–20, 1948.
- [41] J. Lions and E. Magenes. Problemes aux limites non homogenes et applications vol 1 (paris : Dunod). 1968.
- [42] M. A. Lyalinov and N. Y. Zhu. *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions : ISMB Series*. SciTech Publishing/IET, 2013.
- [43] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, 2003.
- [44] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer Science & Business Media, 2001.
- [45] L. Paquet. Problemes mixtes pour le systeme de maxwell. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, volume 4, pages 103–141, 1982.
- [46] V. Péron. *Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2009.
- [47] V. Péron and C. Poignard. *Approximate transmission conditions for time-harmonic Maxwell equations in a domain with thin layer*. PhD thesis, INRIA, 2008.
- [48] V. Péron, K. Schmidt, and M. Duruflé. Equivalent transmission conditions for the time-harmonic maxwell equations in 3d for a medium with a highly conductive thin sheet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76(3) :1031–1052, 2016.
- [49] C. Poignard. *Méthodes asymptotiques pour le calcul des champs électromagnétiques dans des milieux à couches minces. Application aux cellules biologiques*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon 1, 2006.
- [50] C. Poignard, P. Dular, L. Krähenbühl, L. Nicolas, and M. Schatzman. Méthodes asymptotiques pour le calcul de champs. In *Numelec*, pages pcn–104, 2006.

- [51] M. H. Protter. Unique continuation for elliptic equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(1) :81–91, 1960.
- [52] K. Schmidt and S. Tordeux. Asymptotic modelling of conductive thin sheets. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 61(4) :603–626, 2010.
- [53] K. Schmidt and S. Tordeux. High order transmission conditions for thin conductive sheets in magneto-quasistatics. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 45(6) :1115–1140, 2011.
- [54] T. B. Senior and J. L. Volakis. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. Number 41. Iet, 1995.
- [55] G. Soriano and M. Saillard. Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional rough surfaces with an impedance approximation. *JOSA A*, 18(1) :124–133, 2001.
- [56] I. Terrasse and T. Abboud. *Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes*. 2007.
- [57] S. Tordeux. *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*. PhD thesis, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004.
- [58] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, Paris, 2003.
- [59] S. V. Yuferev and N. Ida. *Surface Impedance Boundary Conditions : A Comprehensive Approach*. CRC Press, 2009.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques en régime harmonique par des obstacles parfaitement conducteurs tridimensionnels. Ces derniers sont entourés par des couches minces de substrats diélectriques superposées et contrastées. Tout d'abord, nous définissons les modèles physiques ainsi que le cadre fonctionnel approprié. Par la suite, nous démontrons le caractère bien posé d'un tel problème de transmission en utilisant l'alternative de Fredholm.

L'étude effectuée dans la deuxième partie de ce travail entre dans le cadre des applications des techniques des développements asymptotiques pour la modélisation de l'effet d'une couche mince par des conditions aux limites de type impédance. Ces dernières sont données à l'ordre trois pour deux types de géométries. Une notation tensorielle est adoptée pour donner des formules compactes. Elle englobe les caractéristiques physiques et géométriques de la multicouche. Dans un premier temps, nous considérons un obstacle plan. Une transformée de Fourier partielle est utilisée pour écrire une condition d'impédance exacte, puis, à l'aide d'un développement limité nous donnons des approximations de la condition d'impédance jusqu'à l'ordre trois. Dans un deuxième temps, nous considérons une géométrie régulière plus générale. Des notions de géométrie différentielle intrinsèque sont utilisées pour décrire la courbure de l'obstacle. Généralement, il n'est pas possible de donner l'opérateur d'impédance exact. Un développement de Taylor est alors appliqué à la condition de type conducteur parfait pour donner des approximations de l'opérateur d'impédance jusqu'à l'ordre trois.

Mots-clés : Couches minces diélectriques, diffraction, système de Maxwell harmonique, condition d'impédance, développement de Taylor.

ملخص

تتمحور الدراسة في هذه الأطروحة حول حيود الأمواج الكهرومغناطيسية ضمن نظام متناسق من جراء حواجز كاملة التوصيل وثلاثية الأبعاد. تكون هذه الحواجز مغلقة بطبقات رقيقة من عوازل للكهرباء متراكبة ومختلفة التركيب والسمك. تقدم في البداية تعريف النماذج الفيزيائية وكذا الإطار الدالي (التحليلي الرياضي) المناسب الذي نعمل فيه، ثم نبرهن على وجود ووحدانية الحل لهذه المسألة (المسماة "مسألة إيصال" transmission) باستخدام بديلة فريدهولم Fredholm.

أما الدراسة المنجزة في الجزء الثاني من الأطروحة فتدرج ضمن إطار تطبيق تقنيات النشور المقاربة المتعلقة بنمذجة تأثير الطبقات الرقيقة -الحبيطة بالحواجز- من خلال شروط حدية من نوع المعاوقة impedance. تتم الدراسة بواسطة ذلك النشور المقارب للشرط الحدي إلى غاية الرتبة الثالثة باعتبار نوعين من الأشكال الهندسية (مستوية وغير مستوية). وقد تبيننا الترميز الموتري لاختصار كتابة العلاقات الرياضية. وهذا الترميز يشمل الخواص الفيزيائية والهندسية المميزة للطبقات الرقيقة.

اعتبرنا في المرحلة الأولى حاجزا مستويا واستعملنا تحويل فوريي Fourier الجزئي لكتابة شرط معاوقة دقيق. بعد ذلك، استعملنا النشور المحدود من أجل تقديم تقريبات لشرط المعاوقة إلى غاية الرتبة الثالثة. وفي مرحلة ثانية تناولنا حالة هندسية ملساء أكثر عمومية. واستخدمنا هنا مفاهيم خاصة مرتبطة بالهندسية التفاضلية وذلك بهدف وصف الانحناء الهندسي للحاجز. نلاحظ في الحالة العامة أنه من غير الممكن تقديم مؤثر المعاوقة بصفة دقيقة؛ ولذا لجأنا إلى نشر تايلور وتطبيقه على الشرط الخاص بنوع الموصل الكامل للحصول على تقريبات لمؤثر المعاوقة حتى الرتبة الثالثة.

الكلمات المفتاحية: طبقات رقيقة عازلة للكهرباء، حيود، جملة ماكسويل Maxwell، شرط المعاوقة، نشر تايلور.

Abstract

This thesis deals with the study of the scattering of time-harmonic Maxwell system with three dimensional perfectly conducting obstacle, which is covered by multi thin layers of contrasted dielectric materials. First, we define physical models and the appropriate functional framework. After that, we prove the well-posedness character of the transmission problem by using the Fredholm alternative.

The study carried out in the second part of this work falls within the framework of applying techniques of asymptotic analysis in order to model the effect of a thin layer by boundary conditions of type impedance up to the third order for two geometries. A tensor notation is adopted to give compact formulas. It encloses the physical and geometrical characteristics of the multi layer. At first, we consider a planar obstacle. A partial Fourier transform is used to write an exact impedance boundary condition, then, with the aid of a limited development we give approximations up to the third order. In a second step, we consider a more general regular geometry. Some concepts of intrinsic differential geometry are used to describe the curvature of the obstacle. Generally, it is not possible to give the exact impedance operator. A Taylor expansion is then applied on the perfect conductor condition to give approximations of the impedance operator up to order three.

Keywords : Thin dielectric layers, scattering, time-harmonic Maxwell system, impedance boundary condition, Taylor expansion.