

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE**



Faculté de Génie Mécanique et Génie des Procédés

***THESE DE MAGISTER***

**En Génie Mécanique**

**Spécialité : Mécanique et Fatigue des Matériaux**

**présentée par :**

**NEDER Mahmoud**

**THÈME :**

***Etude du comportement mécanique des plaques minces soumises aux chocs***

**Soutenue le : 03 / 07 / 2002 ,**

**devant le jury composé de :**

<b>Dr. BOUKHAROUBA T.</b>	<b>Maître de conférences (USTHB)</b>	<b>Président</b>
<b>Mr. MILOUDI A.</b>	<b>Chargé de cours (USTHB)</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Dr. DAMOU M.</b>	<b>Maître de conférences (EMP)</b>	<b>Examineur</b>
<b>Pr. SERIDI A.</b>	<b>Professeur (U.Boumerdès)</b>	<b>Examineur</b>
<b>Pr. RECHAK S.</b>	<b>Professeur (ENP)</b>	<b>Examineur</b>

*à mes parents,  
à mes frères et sœurs,  
à toute ma famille,  
à tout mes amis.*

## *Remerciements*

Je voudrais assurer Monsieur Abdelhamid MILOUDI, Enseignant-chercheur au L.M.A. de l'USTHB, de ma sincère reconnaissance et de l'estime que je lui porte pour avoir bien voulu diriger ce travail et en y apportant le soutien scientifique nécessaire.

Je remercie Monsieur Taoufik BOUKHAROUBA, Maître de conférences à l'USTHB, pour son soutien continu et pour les conseils qu'il n'a cessé de me donner, et que malgré ses multiples occupations, m'a fait honneur de bien vouloir examiner ce travail et de présider le jury.

Je tiens à remercier également Messieurs :

M. DAMOU, Directeur de recherches à l'Ecole Militaire Polytechnique,

A. SERIDI, Professeur à l'Université de Boumerdès,

S. RECHAK, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique,

qui ont bien voulu examiner et évaluer ce travail et me faire l'honneur de participer au jury de soutenance.

Ce m'est un agréable devoir de remercier tout ceux, qui de près ou de loin, m'ont aidé et encouragé jusqu'à l'achèvement de ce travail, et qu'ils trouvent, ici, l'expression de ma parfaite considération.

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I. Analyse bibliographique et position du problème</b>	
I.1. Introduction	3
I.2. Position du problème	3
I.3. Les aspects majeurs de la théorie du choc	4
I.3.1. Mécanique classique	4
I.3.2. Propagation de l'onde élastique	4
I.3.3. Mécanique de contact	4
I.3.4. Déformation plastique	4
I.4. Le modèle du coefficient de restitution	5
I.4.1. Variation du coefficient de restitution en fonction de la vitesse	6
I.5. Le modèle force-pénétration	6
I.5.1. La relation force-pénétration	7
I.6. Initiation sur la déformation plastique en contact	8
I.7. Conclusion	9
<b>Chapitre II. Caractéristiques dynamiques des plaques en flexion</b>	
II.1. Introduction	10
II.2. Champ de déplacement de la plaque	10
II.3. Etat de déformation de la plaque	11
II.3.1. Hypothèses de plaques minces	12
II.4. Les contraintes dans la plaque	12
II.5. Equation de mouvement de la plaque	13
II.5.1. Enoncé du principe de Hamilton	13
II.5.2. Expression de la fonctionnelle de Hamilton	14
II.5.3. Résolution de l'équation différentielle	15
II.5.4. Détermination du schéma modal par séparation des variables d'espace	16
II.6. Conditions aux limites de la plaque	17
II.6.1. Conditions aux limites du type AAAA	18
II.6.2. Conditions aux limites du type AEAE	19
II.6.3. Conditions aux limites du type AAEE	20
II.6.4. Conditions aux limites du type ALAE	21
II.6.5. Conditions aux limites du type ALAL	23
II.6.6. Conditions aux limites du type ALAA	24
II.7. Comportement dynamique de plaques impactées	25
II.8. Comportement mécanique de plaques impactées	26

II.9. Conclusion	26
------------------	----

### **Chapitre III. Modélisations de l'impact**

III.1. Introduction	27
III.2. Modélisation élastique de l'impact	28
III.2.1. Modèle bilan d'énergie	29
III.2.1.1. Energie de contact	29
III.2.1.2. Energie de flexion	30
III.2.2. Modèle masses-ressorts	31
III.3. Approche numérique de l'impact	33
III.4. Conclusion	34

### **Chapitre IV. Résolution numérique des équations**

IV.1 Introduction	35
IV.2. Description des procédures de calcul	35
IV.2.1. Calcul du schéma modal de plaque en flexion	35
IV.2.2. Calcul de la force d'impact	37
IV.2.3. Calcul de la réponse temporelle de la plaque	38
IV.2.4. Calcul des contraintes	38
IV.3. Conclusion	40

### **Chapitre V. Exploitations numériques**

V.1. But	41
V.2. Validation du calcul du schéma modal	41
V.2.1. Cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre bords AAAA	42
V.2.2. Cas d'une plaque encastree	42
V.2.3. Cas d'une plaque libre	43
V.2.4. Cas d'une plaque appuyée-encastree-appuyée-libre AEAL	43
V.3. Evolution temporelle de la force d'impact	43
V.4. Influence des paramètres sur la force du choc	44
V.4.1. Paramètres de la plaque	45
V.4.1.1. Influence du nombre de modes	45
V.4.1.2. Influence des conditions aux limites	46
V.4.1.3. Influence des dimensions de la plaque	47
V.4.1.4. Influence du matériau de la plaque	47
V.4.2. Paramètres de l'impacteur	48
V.4.2.1. Influence de la masse de l'impacteur	48
V.4.2.2. Influence du rayon de l'impacteur	49
V.4.2.3. Influence du module de Young de l'impacteur	49
V.4.3. Paramètres de l'impact	49

V.4.3.1. Influence de la position du point d'impact	50
V.4.3.2. Influence de la vitesse incidente	50
V.5. Evolution temporelle de la vitesse du projectile	51
V.5.1. Influence des paramètres de la plaque sur la vitesse du projectile	51
V.5.1.1. Influence des dimensions de la plaque	51
V.5.1.2. Influence du matériau de la plaque	51
V.5.1.2. Influence du matériau de la plaque	51
V.5.2. Influence des paramètres de l'impacteur	52
V.5.2.1. Influence de la masse de l'impacteur	52
V.5.2.2. Influence du module de Young de l'impacteur	52
V.6. Bilan énergétique lors de l'impact	53
V.7. Comportement dynamique de la plaque impactée	54
V.7.1. Evolution temporelle du déplacement en différents points de la plaque	54
V.7.2. Répartition spatiale des déplacements de la plaque	55
V.8. Comportement mécanique de la plaque	56
V.8.1. Validation de la méthode utilisée	56
V.8.2. Evolution temporelle des contraintes dans la plaque	57
V.8.2.1. Influence des dimensions de la plaque	57
V.8.2.2. Influence du matériau de la plaque	57
V.8.2.3. Influence des paramètres de l'impacteur	58
V.8.3. Répartition spatiale des contraintes de la plaque	59
V.9. Conclusion	60

## **Chapitre VI. Conclusion générale** 61

### **Références bibliographiques**

#### **Annexes**

AI. Schéma de Newmark

AII Résolution des systèmes non linéaires par la méthode de Newton-Raphsonion

AIII Analyse dynamique d'une plaque orthotrope

AIV La force de contact

## Résumé

L'objet de ce travail est l'élaboration d'un modèle numérique permettant l'analyse du comportement dynamique et mécanique des plaques soumises aux chocs.

Le modèle établi a été utilisé pour étudier l'influence de différents paramètres du choc, sur l'évolution temporelle de la force du choc. Les résultats obtenus concordent bien avec ceux donnés par la bibliographie et ceux obtenus par l'utilisation d'un code de calcul d'éléments finis.

Après sa validation, le modèle a été utilisé pour étudier la répartition des champs de déplacements et contraintes et leur évolution sous l'effet des différents paramètres d'impact.

## Abstract

The object of this work is to develop a digital model making it possible to study the dynamic and mechanical behavior of plates subjected to impact.

The established model is used to study the influence of various parameters of impact, on the temporal evolution of the impact force. The results obtained agree well with those given by the bibliography and by a finite element code of computation.

After its validation, the model was used to study the distribution fields of the displacements and the stresses and their evolution under the effect of the various impact parameters.

## ملخص

هذا العمل يتضمن انجاز نموذج رقمي بهدف دراسة الانفعال الديناميكي و الميكانيكي لطوائف معرضة للصدم.

هذا النموذج استعمل لدراسة عناصر الصدم على التغير الزمني لقوة الصدم الناتج المتحصل عليها تتوافق الى حد كبير مع تلك المعطاة في المطادر و كذلك مع تلك المحصل عليها بواسطة برنامج للحساب بالعناصر المعرفة (éléments finis).

بعد التاكيد من صحته، استعمل هذا النموذج لدراسة توزيع الحركات و الاجهادات في الطوائف، و كذلك تغييرها الزمني تحت تأثير مختلف عناصر الصدم.

## INTRODUCTION GENERALE

Le comportement des structures aux chocs a été toujours un centre d'intérêt pour les concepteurs. En effet, la prédiction des déformations locales dans la zone de contact permet d'en tenir compte lors de la conception pour une plus grande fiabilité ou un bon confort.

Les différentes structures en mécanique comme en génie civil sont exposées à des forces instantanées. On peut citer des exemples tels que les chocs dans les machines tournantes, les ondes de choc dans les avions lors de leur passage par des trous d'air, les chocs dans les accidents de voitures, etc. Les dangers du choc sont dus au fait qu'une partie très réduite de la structure qui supporte cette force et en un intervalle de temps très court ce qui augmente les risques d'endommagement de la structure et par conséquent des pertes économiques et humaines. D'où l'intérêt accordé à l'étude de ce phénomène.

L'objet de ce travail est d'établir une modélisation élastique de l'impact et de l'employer pour étudier l'influence des paramètres essentiels tels que les conditions d'appuis, les dimensions, la densité et le module d'élasticité de la plaque, ainsi que la masse, le rayons, la vitesse et le module de Young du projectile, sur le comportement dynamique et sur la répartition spatiale des contraintes au cours du temps d'une plaque impactée.

Dans cette étude nous effectuons des simulations numériques, par des modèles mathématiques, du comportement vibratoire et mécanique de plaques impactées selon le modèle de Hertz.

L'intérêt d'une telle étude réside dans l'importance à prédire le comportement des structures soumises aux chocs dont on retrouve beaucoup d'applications en industrie mécanique et en génie civil.

Plusieurs études ont été faites dans ce domaine dont des études expérimentales. Vu le coût très élevé de ces dernières et la nécessité d'équipements très sophistiqués, les chercheurs essayent de faire des approches analytiques et numériques pour étudier les chocs.

Dans le présent document, a été réalisée une étude du comportement mécanique d'une plaque carrée soumise à un choc par un impacteur sphérique. Dans cette étude un modèle numérique basé sur une discrétisation du système projectile-cible a été utilisé pour déterminer la force d'impact ainsi que l'influence de différents paramètres de la plaque, de l'impacteur et des conditions d'impact, sur l'évolution temporelle de la force, ensuite une approche numérique basée sur l'analyse modale pour étudier l'influence de ces mêmes paramètres sur le comportement vibratoire et mécanique de la plaque.

Le chapitre(I) est consacré à l'analyse bibliographique des différentes modélisations de l'impact. Dans cette partie, nous nous sommes beaucoup plus intéressés à présenter les principaux concepts mis en jeu lors de l'impact, qu'à présenter la chronologie des modèles élaborés.

Dans le chapitre(II) est développée la théorie des vibrations transversales des plaques et la détermination des schémas modaux pour différentes configurations de conditions aux limites de la plaque.

Deux modélisations de l'impact ont été présentées au chapitre(III). Il s'agit de la modélisation élastique de l'impact pour un système masse-ressort et une modélisation numérique, que nous avons proposé dans le cadre de cette étude.

Dans le chapitre(IV), nous avons présenté les différentes procédures de calcul numérique des schémas modaux, de la force d'impact ainsi que le comportement vibratoire et mécanique de la plaque impactée.

Dans le chapitre(V), sont exploités les résultats numériques, de différentes simulations, obtenus par les procédures de calcul numérique décrites dans le chapitre précédent, établi sur la base de la théorie développée aux chapitres (II) et (III).

La validité de la méthode est étudiée en comparant les résultats obtenus à ceux publiés dans la littérature ainsi que ceux obtenus par l'utilisation d'un code de calcul d'éléments finis (Cosmos/M).

Nous concluons enfin dans le dernier chapitre en analysant l'influence des paramètres les plus prépondérants dans le comportement vibratoire et mécanique des plaques impactées, de même, nous donnons les perspectives de ce travail.

## Chapitre I

### ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE ET POSITION DU PROBLEME

#### I.1. Introduction

La compréhension des phénomènes d'impact et des mécanismes d'endommagement est essentielle pour le développement de matériaux améliorés. Beaucoup de travaux expérimentaux ont permis une caractérisation satisfaisante de certains matériaux et l'identification des dommages induits par les chocs. Cependant de tels travaux demeurent très onéreux et nécessitent un matériel sophistiqué. C'est pourquoi, une étude analytique ou numérique, permettant d'approcher convenablement le comportement de ces structures est toujours appréciable.

L'analyse dynamique des systèmes multicorps avec contraintes cinématiques est un domaine de mécanique bien établi. La modélisation mathématique est possible, les corps sont considérés parfaitement rigides et sans déformation des joints. Beaucoup de programmes de calcul ont été réalisés sur la base de ces hypothèses bien qu'ils incluent des surestimations pour le cas des modèles de corps flexibles, friction, et les rigidités et amortissements non linéaires. L'un des phénomènes physiques les plus difficiles, à modéliser est l'impact entre deux corps. Le choc peut être défini comme étant un changement (instantané) brusque de la quantité de mouvement de chacun des corps en contact sans changement correspondant en position.

L'impact est un sujet qui attire l'intérêt des scientifiques et des ingénieurs de différents domaines, de l'astrophysique à la robotique. Le but commun est de développer des théories capables de prévoir le comportement au choc des objets. Les ingénieurs en mécanique intéressés par les problèmes de choc sont motivés par le désir de développer des modèles valables pour les systèmes mécaniques dont l'impact est lié à leur fonctionnement (ex : emboutissage, presse, etc...). D'autres phénomènes qui rentrent en jeu dans les joints et l'endommagement dû à un choc accidentel ou fonctionnel sont aussi intéressants, à comprendre.

Dans l'évolution de la théorie des chocs, quatre aspects surgissent comme des sujets distincts d'intérêt. La dépendance des caractéristiques de choc (vitesse, matériau,...), les hypothèses faites et la dispersion des résultats conduisent à des approches de l'analyse du choc. Ces quatre aspects sont :

- mécanique classique,
- propagation d'ondes de contraintes élastiques,
- mécanique de contact,
- déformation plastique.

#### I.2. Position du problème

Dans cette étude, il s'agit de présenter une modélisation analytique et numérique du phénomène d'impact et d'en déduire le comportement vibratoire et mécanique de plaques impactées.

Par ailleurs, nous essayons de délimiter les zones pour lesquelles le choc s'effectue avec ou sans endommagement de la structure.

Une fois la modélisation adoptée, nous effectuons une analyse assez fine de tous les paramètres susceptibles d'influer sur l'intensité de la force d'impact, la durée de l'impact ainsi que sur le comportement dynamique de la plaque impactée.

### **I.3. Les aspects majeurs de la théorie du choc [1]**

#### **I.3.1. Mécanique classique**

Elle introduit l'application des lois fondamentales de la mécanique classique pour prévoir les vitesses après le choc. La loi de la quantité de mouvement est le cœur de cette approche. Goldsmith [2], dans son travail, consacre un chapitre à l'application de cette théorie pour différents problèmes de choc. Brach [3] utilise cette approche exclusivement pour modéliser numériquement des problèmes pratiques. La nature algébrique de cette méthode rend le développement mathématique facile et accessible pour les ingénieurs comme on peut le voir dans le travail de Brach [3]. La perte d'énergie liée à chaque processus de choc réel est prise en compte par l'introduction du coefficient de restitution. L'exactitude de ce coefficient est cruciale pour obtenir des résultats suffisamment bons. Malheureusement, cette approche est incapable de prévoir la force de contact entre les corps ou les contraintes dans les corps.

#### **I.3.2. Propagation de l'onde élastique**

Le choc est accompagné par une onde de contrainte qui se propage dans les corps en contact à partir de la zone de choc. Si l'énergie, ainsi transférée en vibrations, devient une importante fraction de l'énergie totale, alors l'approche classique devient insuffisante pour examiner le problème du choc. Goldsmith [2] applique cette approche pour beaucoup de problèmes, parmi eux on cite : le choc longitudinal de deux barres, le choc d'une masse sur une barre, choc de traction d'une masse sur une barre et l'effet de la viscoélasticité sur le comportement au choc. L'approche de la propagation d'onde est aussi couverte extensivement par Zukas et al. [4].

#### **I.3.3. Mécanique de contact**

La mécanique de contact conventionnelle qui est principalement conçue pour les contacts statiques, a été conduite pour approcher le contact lors d'un impact. Pour les surfaces sphéroïdales, la théorie de Hertz est utilisée pour obtenir la relation force-déformation nécessaire pour calculer la durée du choc et la pénétration maximale. Cette approche a été étendue pour le cas des chocs avec déformation plastique, avec l'hypothèse que le matériau a un point de limite élastique. Des modèles numériques [8] de la zone de contact sont aussi utilisés quand la théorie de Hertz n'est pas applicable. Un terme d'amortissement s'ajoute à l'équation force-déformation pour considérer la dissipation dans la zone de contact, ainsi, nous pouvons modéliser effectivement la zone de choc comme étant un système ressort-amortisseur.

#### **I.3.4. Déformation plastique**

Quand les déformations plastiques sont importantes, le modèle de propagation de l'onde élastique devient incapable d'analyser les problèmes d'impact. C'est le domaine de choc à grandes vitesses généralement associé aux explosives et aux projectiles. Goldsmith [2] présente une étude étendue sur le sujet en utilisant deux approches : la théorie hydrodynamique du comportement des corps solides et la théorie de propagation de l'onde plastique. Dans la théorie hydrodynamique, la déformation permanente est considérée comme

étant le résultat d'un changement dans la densité. Une équation d'état du matériaux qui lie la pression aux changements de densité et de la température ou de l'entropie est utilisée avec les lois de conservation de la quantité de mouvement, d'énergie et de masse. Dans la théorie de propagation de déformation plastique, le matériau est considéré comme étant incompressible dans le domaine plastique. L'équation d'état liant la contrainte, la déformation et la vitesse de déformation est supposée indépendante de la température.

Que fournissent ces quatre aspects aux besoins de l'ingénieur ?

Dans beaucoup de problèmes, l'ingénieur en mécanique cherche la réponse à deux questions :

1. quelle est la relation entre les vitesses avant et après le choc ?
2. quelle est la force au point d'impact ?

L'approche par la quantité de mouvement peut répondre à la première question en introduisant ce qui est connu par le coefficient de restitution. Comme il a été mentionné ci-dessus, elle est incapable de répondre à la deuxième question. La théorie de propagation de l'onde est nécessaire pour prévoir les contraintes à l'intérieur du solide mais son intégration à l'analyse dynamique des systèmes mécaniques multicorps peut être une tâche délicate. L'approche de la mécanique de contact offre la possibilité de traiter la région de contact comme étant un système ressort-amortisseur, offrant la possibilité de traiter le choc comme étant un phénomène continu dans le temps. La théorie de large déformation plastique est plus utile dans le domaine de pénétration par projectiles, comme en balistique.

#### I.4. Le modèle du coefficient de restitution

Selon Kozlov [5], la première investigation du choc remonte à 1668, elle est reportée par Wallis, Wren et Huygens. Plus tard, Newton se réfère à l'étude de Wren dans son célèbre ouvrage « les fondations mathématiques de la philosophie naturelle » publié en 1687.

Le résultat du travail de Huygens était essentiellement la dérivation de la loi de conservation de la quantité de mouvement qui est fondamentale dans la théorie de choc. L'hypothèse majeure dans cette théorie est que les corps en collision sont parfaitement rigides. Par conséquent, la durée du choc est nulle. La loi de conservation de la quantité de mouvement n'est pas toujours suffisante pour prévoir les vitesses des deux corps en collision après le choc. Deux cas limites sont considérés dans la théorie élémentaire de l'impact : un choc parfaitement élastique, et un choc parfaitement inélastique. Le premier cas implique que l'énergie cinétique du système est conservée. Le dernier cas suppose que les deux corps se collent et se déplacent comme une seule masse après le choc. La vitesse de la masse combinée peut alors être déterminée en utilisant la conservation de la quantité de mouvement.

Cependant, la majorité des chocs ne sont pas complètement élastiques ni complètement inélastiques. Cette perte partielle de l'énergie cinétique est exprimée en terme d'un coefficient de restitution « e » introduit originellement par Newton. Ce coefficient lie les vitesses relatives avant et après le choc par l'équation :

$$V_{1f} - V_{2f} = -e(V_{1i} - V_{2i}) \quad (\text{I-1})$$

Les indices 1 et 2 désignent les corps par contre les indices *i* et *f* désignent l'état initial et final. Cette équation fournit une information supplémentaire nécessaire pour compléter la résolution d'un problème de choc. La quantité « e » est un coefficient adimensionnel compris entre 0 et 1 où la valeur 0 correspond à un choc totalement inélastique et 1 à un choc parfaitement élastique. Le coefficient de restitution est une évaluation globale de la perte d'énergie durant le choc. Il peut comporter différentes formes de dissipations telles que le

travail viscoélastique accompli dans les matériaux des corps en collision, la déformation plastique des surfaces en contact et les vibrations dans les deux corps.

Le coefficient de restitution n'est pas une propriété intrinsèque du matériau. Il dépend des matériaux des corps, de la géométrie de leurs surfaces et de la vitesse d'impact [2]. L'avantage majeur du coefficient de restitution réside dans sa simplicité mathématique ( la relation algébrique simple entre les vitesses avant et après le choc facilitera la détermination des vitesses après le choc ). La détermination exacte de sa valeur nécessite en général des travaux expérimentaux. Par ailleurs, la force de contact dans le point d'impact ne peut être déterminé par ce modèle. Malgré sa signification fondamentale incertaine, le coefficient de restitution demeure un outil utile pour l'analyse de plusieurs problèmes choc. Brach [3] résout numériquement des problèmes pratiques en utilisant le coefficient de restitution. Il introduit aussi «  $\mu$  » qui est le rapport des composantes tangentielle et normale de l'impulsion. Ce coefficient, nommé rapport d'impulsion, est nécessaire pour traiter les problèmes d'impact oblique, il lie les vitesses tangentielles relatives. Le coefficient «  $\mu$  » est lié au coefficient dynamique de friction si cette dernière est prise en compte lors de la résolution des problèmes d'impact. Il peut être positif ou négatif pour assurer que la force tangentielle est dissipative, comme c'est le cas assez souvent.

Brach [3] a noté aussi que le coefficient de restitution peut prendre des valeurs négatives comprises entre 0 et  $-1$ . Cela veut dire qu'une certaine énergie est perdue durant l'impact mais sans inversement du sens de la vitesse. Considérons, par exemple, un projectile pénétrant à travers un obstacle. Le travail de pénétration réduit la vitesse du projectile sans l'inverser. Pour les contacts obliques, Brach [3] propose d'utiliser le coefficient de restitution tangentiel «  $e_t$  » pour exprimer les vitesses tangentielles avant et après le choc. Il montre aussi que «  $\mu$  » et «  $e_t$  » sont liés. Par conséquent, seulement deux coefficients indépendants «  $e$  » et «  $\mu$  » sont nécessaires pour résoudre les problèmes de choc. Un résultat important est tiré de l'analyse de Brach : l'énergie finale du système ne peut être égale à zéro pour un choc parfaitement inélastique et sans frottement ( $e = 0$  et  $\mu = 0$ ).

#### **I.4.1. Variation du coefficient de restitution en fonction de la vitesse**

La variation du coefficient de restitution en fonction de la vitesse relative initiale des corps en contact a été examinée dans différents articles. Il y a une concordance générale dans les modèles théoriques en ce qui concerne la relation entre la vitesse de contact et le coefficient de restitution. Plusieurs références ont discuté la relation :

$$e(v) = 1 - f(v^{1/5}) \quad (\text{I-2})$$

A travers la relation inverse, on peut conclure qu'aux vitesses de choc élevées, le coefficient de restitution est plus faible, ce qui veut dire que l'énergie dissipée est plus importante quand les corps en contact se déplacent plus vite. La relation ci-dessus est déterminée à partir des modèles de comportement purement viscoélastique. En réalité, il y a toujours d'autres mécanismes de dissipation à bien considérer. A des vitesses de choc élevées, l'énergie, dissipée sous forme d'onde élastique, augmente, tout comme la perte d'énergie par déformation plastique [6]. A des basses vitesses d'impact, les effets de certains phénomènes comme l'adhérence [7] et la gravité deviennent significatifs [6].

#### **I.5. Le modèle force-pénétration**

La théorie élémentaire de choc revue ci-dessus est basée sur l'hypothèse simplificatrice des corps parfaitement rigides. Les objets physiques actuels sont souples et par conséquent la durée du choc est strictement supérieure à zéro. Cette vue plus réaliste du phénomène du choc

conduit plusieurs chercheurs à considérer des modèles dynamiques continus ( de collision ) où les corps se déforment pendant le choc et que ce dernier sera traité comme étant un phénomène dynamique continu dans le temps. Dans sa forme générale, la relation force-indentation peut se présenter comme suit :

$$F = F_c(\delta) + F_v(\delta, \dot{\delta}) + F_p(\delta, \dot{\delta}) \quad (\text{I-3})$$

où,  $F_c$  est la partie élastique (conservatrice) de la force de contact  $F$ ,  $F_v$  la partie d'amortissement visqueux et  $F_p$  la partie dissipative par déformation plastique. La dissipation visqueuse peut être liée aux propriétés rhéologiques des matériaux. La dissipation par déformation plastique peut être déterminée par la courbe contrainte-déformation du matériau.

### I.5.1. La relation force-pénétration

Le plus grand repère dans la mécanique de contact est le travail de Hertz sur le contact élastique des solides semi-infinis, publié en 1882. Johnson [8] donne un excellent rapport sur cette théorie avec un sommaire de formules en annexe. La théorie de Hertz prévoit la distribution de la contrainte dans la zone de contact entre deux corps ayant une surface de révolution. Elle nous permet aussi de calculer la contrainte normale et celle de cisaillement à l'intérieur du solide. Ceci révèle certains intérêts et des effets importants. Par exemple, la contrainte de cisaillement maximale, qui est la cause directe de la rupture du matériau, apparaît au dessous de la surface de contact, causant potentiellement une déformation plastique indécélable. Un résultat très fréquemment utilisé est la relation force-indentation pour un contact sphère-sphère [8] :

$$F = K \delta^{3/2} \quad (\text{I-4})$$

où :  $F$  : est la force normale pressant les deux solides,

$\delta$  : est l'approche des deux sphères, i.e., la somme des déformations des deux surfaces,

$K$  : est une constante dépendante des propriétés élastiques des matériaux et des rayons des sphères.

L'équation(I-4) a été combinée avec les équations de mouvement par Timoshenko [9], pour traiter le choc entre deux sphères. Ceci permet de déterminer l'indentation maximale et la durée du choc. Un traitement similaire est trouvé aussi par Goldsmith [2] et Johnson [8]. Cette analyse constitue ce qu'on appelle « théorie du choc de Hertz ». L'équation (I-4) est aussi valable pour quelques contacts de solides en 3D. Pour des cylindres à axes parallèles en contact, la distance d'approche dépendra des informations sélectionnées [8]. Ainsi, une équation similaire à l'équation (I-4) ne peut être trouvée pour les cylindres car la zone de contact n'est pas elliptique. Young [10] donne une formule de l'approche des centres de cylindres quand le rapport longueur/diamètre est grand.

Il est important de noter que les formules de Hertz ne sont applicables que pour les chocs non conformales. Autrement dit, elles ne peuvent être utilisées quand les rayons de courbure au point de contact sont à peu près égaux, comme dans les coussinets ou pour un choc plan-plan. L'aire de contact doit aussi être petite par rapport aux dimensions des corps et au rayon de courbure au point de contact. Par conséquent, les formules de Hertz doivent être utilisées avec soin pour les matériaux possédant une très grande déformation plastique tels que le caoutchouc.

Deux autres problèmes classiques d'impact, le chargement linéaire et le chargement ponctuel d'un demi-espace élastique, sont analysés ( Johnson [8] ) par indentation d'un poinçon plat et rigide. Pour les coussinets et d'autres jonctions utilisés en machinerie, Rivin [11] donne une analyse détaillée de leurs compliances soutenue par des données

expérimentales et des exemples pratiques. Pour le cas d'une jonction cylindrique, il base son analyse sur une distribution sinusoïdale entre l'arbre et le coussinet. Pour calculer la distribution de pression, il considère deux modèles, pour l'équation force-déformation, linéaire et quadratique :

$$F = K \delta \quad (\text{I-5a})$$

$$F = K' \delta^2 \quad (\text{I-5b})$$

Les résultats expérimentaux montrent qu'avec la fonte ou l'acier dur, le modèle quadratique offre une meilleure corrélation de la force-déflexion dans un coussinet, quand un chargement élevé par unité de longueur est appliqué. Pour des chargements faibles, le modèle linéaire représente une meilleure approche [11].

### 1.6. Initiation sur la déformation plastique en contact

La compréhension des mécanismes de déformation lors du contact est nécessaire pour développer une expression appropriée pour la relation force-indentation et pour prévoir certains endommagements par déformation plastique. Dépassant le chargement élastique, nous considérons deux stades, élastoplastique et complètement plastique. Dans le stade élastoplastique, la déformation plastique est assez petite et peut se présenter par une extension de l'aire de contact. Quand la charge augmente la zone plastique grandie et la matière s'écoule vers les cotés de l'indenteur. Pour cette analyse, le modèle du matériau plastique parfaitement rigide est généralement utilisé. On suppose que la déformation élastique est assez petite qu'on peut la négliger et la matière s'écoule plastiquement sous une contrainte constante en traction  $Re$ .

Pour un contact sphère-sphère, Johnson [8] montre qu'avec ces hypothèses, la déformation (plastique) commence quand la pression moyenne de contact  $P_m$  atteint  $1.1Re$  et l'écoulement deviendra complètement plastique à environ  $P_m = 3.0 Re$ . Stronge [12] prend la même approche pour déduire une expression du coefficient de restitution qui reflète la dissipation due au travail plastique sous différentes conditions de frictions. En se basant sur le modèle plastique parfaitement rigide et sur la théorie de choc de Hertz, Johnson [8] calcule la vitesse  $V_Y$  nécessaire pour initialiser la déformation. Pour une sphère pénétrant une surface plane d'un corps massif, il montre que :

$$\rho \frac{V_Y}{Re} = 26 \left( \frac{Re}{E^*} \right)^4 \quad (\text{I-6})$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la sphère et  $E^*$  est le module élastique équivalent. Par exemple, pour un acier d'une dureté moyenne,  $Re = 1000 \text{ N/mm}^2$  et  $V_Y = 0,14 \text{ m/s}$ .

Logiquement, cette vitesse est tout à fait faible et on a constaté que beaucoup d'impact entre des corps métalliques, produisent une certaine déformation plastique. Pour étudier l'impact au stade plastique, Johnson propose d'utiliser des contraintes calculées sous des conditions statiques pour des vitesses modérées (supérieures à  $500 \text{ m/s}$  comme une première approche). Sous déformation complètement plastique, la pression de contact moyenne est constante et égale à  $3.0Re$ . En considérant l'énergie durant la compression et le rebondissement, Johnson détermine une expression pour le coefficient de restitution « e ». Il a trouvé qu'il est proportionnel à  $V^{1/4}$ . Ce résultat est confirmé par des mesures de Goldsmith [2] réalisés pour plusieurs paires de matériaux. Un autre résultat important est que « e » est proportionnel à  $Y_d^{5/8}$  et dépend ainsi de la dureté du matériau à travers la résistance limite

dynamique  $Y_d$ . Pour que cette théorie simplifiée, devient valable, Johnson réexamine l'hypothèse initiale d'indentation peu profonde (superficielle) qui implique que :

$$\delta = \frac{a^2}{2R} \quad (\text{I-7})$$

où,  $a$  : est le rayon de la surface de contact.

et  $R$  : est le rayon de la sphère.

L'expression ci-dessus, de  $\delta$  est une bonne approximation pour :  $\frac{a}{R} < 0.5$ .

Johnson montre aussi que cette condition implique que :

$$\frac{1}{2} \frac{m V^2}{P_d R^3} < 0.05 \quad (\text{I-8})$$

Pour un choc d'une sphère en acier sur une plaque en acier, on peut aller jusqu'à  $V < 100$  m/s. En d'autres termes, une large déformation plastique commence à une vitesse d'impact d'environ 100 m/s.

### **I.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu global sur l'impact ainsi que les différentes issues du traitement de ce phénomène. Nous avons aussi défini quelques notions liées au choc, on s'est étalé sur le coefficient de restitution car il est très utilisé dans les problèmes de choc du fait qu'il conduit à des équations souples et faciles à résoudre et qu'il prend en compte tout les mécanismes de dissipation. La difficulté dans l'utilisation du coefficient de restitution est l'hypothèse faite que le choc est très bref et qu'il ne donne pas des informations sur le comportement des structures pendant l'impact, entre autre l'histoire de la force de contact et l'endommagement local. L'approche force-indentation, malgré les hypothèses sur lesquelles elle est basée, donne une meilleure description du choc permettant d'avoir l'évolution temporelle de la force d'impact qui est nécessaire dans l'analyse du comportement dynamique et mécanique de la structure. Ce modèle est utilisé pour la suite lors du traitement de l'influence des paramètres du choc sur la réponse des structures impactées.

## Chapitre II

### CARACTERISATION DYNAMIQUE ET MECANIQUE DES PLAQUES EN FLEXION

#### II.1. Introduction

La modélisation du comportement dynamique des plaques couvre un champ d'investigation extrêmement vaste, comme en témoigne le nombre important de publications sur le sujet. Il paraît donc indispensable de fixer " un cahier des charges " dicté par le domaine d'applications envisagé ici : comportement des plaques à l'impact.

Dans ce chapitre, nous procédons à la mise en équation du mouvement de flexion d'une plaque rectangulaire excitée par une force ponctuelle. Nous déterminons également les schémas modaux pour différentes configurations de conditions aux limites, ainsi que l'étude des contraintes dans les plaques en flexion.

On va considérer donc, une plaque d'épaisseur  $h$  dont le feuillet moyen (plan neutre) est situé dans le plan  $z=0$  d'un repère cartésien,  $(O, x, y, z)$ , comme représenté sur la figure(I-1).

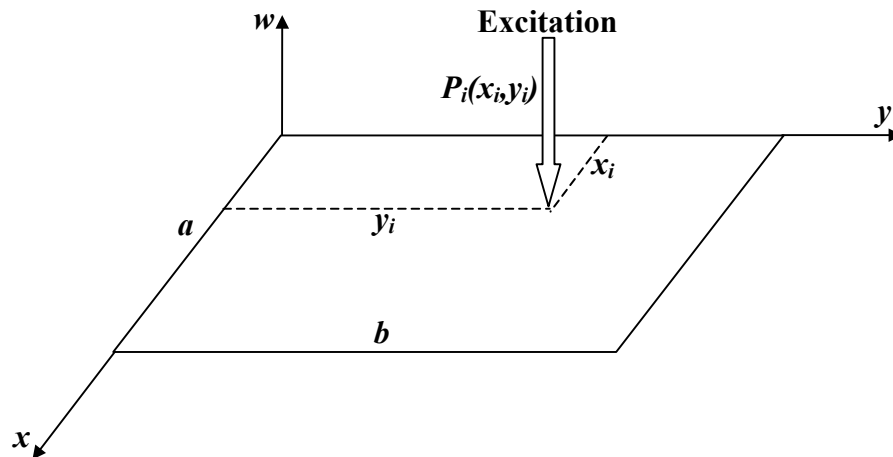


Figure I-1 : Plaque rectangulaire en flexion

#### II.2. Champ des déplacements de la plaque

Considérons une plaque carrée impactée par une masse volante. Les déplacements correspondants de la plaque peuvent s'écrire en développement de Taylor par rapport à la variable 'z'. En négligeant les termes de 'z' de degrés supérieurs à '1', ces derniers peuvent être donnés par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u(x, y, 0, t) + z \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} \\
 v(x, y, z, t) &= v(x, y, 0, t) + z \frac{\partial v(x, y, 0, t)}{\partial z} \\
 w(x, y, z, t) &= w(x, y, 0, t) + z \frac{\partial w(x, y, 0, t)}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{II-1}$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont, respectivement, les déplacements suivant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en tout point de la plaque.

Pour le cas des vibrations transversales avec effet de membrane négligé (petites déformations  $w < 0.2h$  (Shivakumar [17]), les déplacements suivant  $x$  et  $y$  du feuillet moyen sont négligés c'est à dire :  $u(x, y, 0, t) = v(x, y, 0, t)$ .

De plus, si on néglige l'effet de pompage :  $\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = 0$ , les déplacements correspondants de la plaque s'écriront :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= z \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} \\ v(x, y, z, t) &= z \frac{\partial v(x, y, 0, t)}{\partial z} \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, 0, t) \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

### II.3. Etat de déformation de la plaque

Une fois l'expression des déplacements est défini, le passage aux déformations peut être obtenu en utilisant le système d'équations (II-3). Ces six équations décrivent l'état de déformation de la plaque :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

Si on applique ces relations aux déplacements trouvés précédemment autour de n'importe quel point de la plaque, on aboutira aux déformations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= z \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v(x, y, 0, t)}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= z \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v(x, y, 0, t)}{\partial z} \right) \right] \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

### II.3.1. Hypothèses de plaques minces

Cette hypothèse est équivalente à celle d'Euler-Bernoulli pour les poutres. Elle revient à supposer le cisaillement transversal nul, c'est l'hypothèse de Love-Kirchoff. En terme de déplacements, elle consiste à évaluer les rotations dans l'épaisseur aux pentes respectives du déplacement transversal. On a donc :  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$

d'où on aura :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} &= -\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} &= -\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{II-5})$$

Ainsi, le champ de déplacement de la plaque en flexion peut s'écrire :

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, 0, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, 0, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, 0, t)\end{aligned}\quad (\text{II-6})$$

et l'état de déformation correspondant de la plaque s'écrira donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{XX} &= -z \left( \frac{\partial^2 w(x, y, 0, t)}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{YY} &= -z \left( \frac{\partial^2 w(x, y, 0, t)}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{XY} &= 2\varepsilon_{XY} = -z \left( \frac{\partial^2 w(x, y, 0, t)}{\partial x \partial y} \right) \\ \varepsilon_{ZZ} &= \varepsilon_{XZ} = \varepsilon_{YZ} = 0\end{aligned}\quad (\text{II-7})$$

### II.4. Les contraintes dans la plaque

Les contraintes engendrées dans un milieu continu peuvent être déterminées à partir des déformations par l'application de la loi de Hook généralisée. Pour le cas d'une plaque homogène et isotrope, les contraintes sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{XY} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \varepsilon_{XY} \\ \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YZ} \end{Bmatrix}\quad (\text{II-8})$$

avec :  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  sont les coefficients de Lamé.

avec  $E$  : le module de Young du matériau de la plaque,

$\nu$  : le coefficient de Poisson,  
 $G$  : le module de cisaillement.

En tenant compte des hypothèses précédentes, on aura :

$$\begin{aligned}\sigma_{XX} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\varepsilon_{XX} + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}\varepsilon_{YY} \\ \sigma_{YY} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}\varepsilon_{XX} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\varepsilon_{YY} \\ \sigma_{XY} &= \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{XY} \\ \sigma_{ZZ} &= \sigma_{YZ} = \sigma_{XZ} = 0\end{aligned}\quad (\text{II-9})$$

## II.5. Equation de mouvement de la plaque

Pour la mise en équation, notre choix consiste à formuler le problème dynamique en termes énergétiques, c'est à dire, à construire la fonctionnelle d'énergie  $\psi$  et à la minimiser en utilisant le principe de Hamilton et les techniques de calcul variationnel.

$$\delta \psi = 0 \quad (\text{II-10})$$

### II.5.1. Enoncé du principe de Hamilton

Le principe de Hamilton permet de définir le mouvement d'un système conservatif entre deux instants, prenons par exemple  $t_0$  et  $t_1$  :

$$\psi = \int_{t_0}^{t_1} (E_C + E_P) dt \quad (\text{II-11})$$

soit stationnaire c'est à dire que :

$$\delta \psi = \delta \int_{t_0}^{t_1} (E_C + E_P) dt = 0 \quad (\text{II-12})$$

où  $E_C$  est l'énergie cinétique et  $E_P$  est l'énergie potentielle totale :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_V \rho U^2 dv \quad \text{et} \quad E_P = E_{PE} + E_{PI}$$

$U$  est le vecteur déplacement et  $E_{PI}$  est l'énergie potentielle interne ou énergie de déformation qui peut être donnée par :

$$E_{PI} = E_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II-13})$$

$E_{PE}$  est l'énergie potentielle externe, elle est due aux forces de volume et de surface et qui dépend uniquement de la position du corps et non des déformations. Pour notre cas on ne tient pas compte de l'énergie potentielle externe, d'où on aura :

$$\psi = \int_{t_0}^{t_1} (E_C + E_d) dt \quad (\text{II-14})$$

soit en remplaçant :

$$\psi = \frac{I}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V (\rho \dot{U}^2 + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dv \right] dt \quad (\text{II-15})$$

où  $\dot{U}$  désigne le vecteur vitesse de déplacement.

### II.5.2. Expression de la fonctionnelle de Hamilton

La fonctionnelle de Hamilton associée à l'état de déformation de la plaque s'écrit :

$$\psi = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V \left( \rho \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) + (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + 2 \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) \right) dv \right] dt \quad (\text{II-16})$$

d'où on obtient :

$$\psi = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V \left( \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2(1-\nu) \varepsilon_{xy}^2) \right) dv \right] dt \quad (\text{II-17})$$

en développant l'expression (II-17) on trouve :

$$\psi = \frac{I}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V \left( \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{z^2 E}{1-\nu^2} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right) \right) dv \right] dt \quad (\text{II-18})$$

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$  : est la courbure de Gauss qui est nulle pour les faibles déformations.

Pour que le système soit stationnaire, il faut que :

$$\delta\psi = 0 \Rightarrow \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (\text{II-19})$$

où :  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité à la flexion de la plaque.

Cette équation se résout numériquement en tenant compte des conditions aux limites de la plaque.

Les conditions aux limites standards, de plaque sont mentionnées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
w = 0 & \quad ; && \text{déplacement suivant z nul} \\
\frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \quad ; && \text{rotation autour de y nulle.} \\
\frac{\partial w}{\partial y} = 0 & \quad ; && \text{rotation autour de x nulle.} \\
D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 & \quad ; && \text{moment fléchissant autour de x nul.} \\
D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 & \quad ; && \text{moment fléchissant autour de y nul.} \\
D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = 0 & \quad ; && \text{effort tranchant sur le bord de normale x nul.} \\
D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = 0 & \quad ; && \text{effort tranchant sur le bord de normale y nul.}
\end{aligned}$$

Ces expressions seront utilisées ultérieurement pour faire les combinaisons de différentes conditions aux limites de la plaques permettant la résolution du problème.

### II.5.3. Résolution de l'équation différentielle

La résolution de l'équation différentielle de mouvement se fait par séparation de la variable du temps des variables d'espace dans la solution finale. On peut donc écrire :

$$w(x, y, t) = g(t).f(x, y) \quad (\text{II-20})$$

Cette séparation de variables nous permet de découpler l'équation de mouvement en deux équations, l'une en fonction du temps et l'autre en fonction des variables d'espace. En injectant  $w(x, y, t)$  dans l'équation de mouvement, on aura :

$$\rho h f(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + D g(t) \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (\text{II-21})$$

En séparant les variables, il vient :

$$\frac{1}{g(t)} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = - \frac{D}{\rho h} \frac{1}{f(x, y)} \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) = cst \quad (\text{II-22})$$

L'égalité n'est vérifiée que si chaque membre est égale à une constante. Cette constante peut être positive, négative ou nulle. La constante nulle abouti à des déplacements uniformes qui caractérisent les mouvements rigides pouvant apparaître pour certaines conditions aux limites (plaque libre en particulier). La constante positive conduit à la solution triviale lors de l'application des conditions aux limites. La constante négative conduit à un mouvement vibratoire qui est notre cas.

En posant la constante égale à ‘ $-\omega^2$ ’ nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \omega^2 g(t) = 0 \quad (II-23)$$

$$-\omega^2 \rho h f(x, y) + D \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) = 0$$

La première équation (temporelle) se résout facilement, la solution est du type :

$$g(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (II-24)$$

La deuxième équation de l’espace est par contre délicate à résoudre puisqu’elle reste une équation aux dérivées partielles. La recherche de solutions sous forme de variables séparées est stérile dans de nombreux cas de conditions aux limites car la solution ne présente pas toujours cette particularité ; elle est cependant applicable dans certains cas qui sont d’ailleurs les seuls où le schéma modal possède une forme analytique.

#### II.5.4. Détermination du schéma modal par séparation des variables d’espace

Malgré tous les efforts fournis depuis plus d’un siècle, les modes propres de plaques rectangulaires libres ne sont toujours pas connus analytiquement : comme l’expliquait Rayleigh dès 1894, ceci provient principalement du fait qu’il n’existe pas de solution à variables séparées en espace qui vérifie les conditions aux limites de bords libres. Ainsi le calcul du schéma modal de plaques rectangulaires nécessite l’emploi de méthodes numériques.

Comme on a avancé précédemment, la technique de séparation de variables, n’est pas applicable pour tous les cas de conditions aux limites standards. Cependant elle est très efficace pour le cas des plaques avec deux bords opposés simplement appuyés.

La fonction d’espace de la plaque avec les deux bords de normale ‘x’ simplement appuyés peut s’écrire par séparation de variable comme suit :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot h_m(y) \quad (II-25)$$

La fonction sinus est due à la décompositions des vibrations en modes harmoniques. Elle vérifie aussi les conditions aux limites suivant ‘x’.

La décomposition de la solution d’espace du problème en sinus offre la double propriété de définir une base fonctionnelle et de vérifier les conditions aux limites d’appuis en  $x = 0$  et  $x = a$ . Il reste d’une part à vérifier l’équation d’espace (II-23) puis les conditions aux limites restantes en  $y = 0$  et  $y = b$ .

Sur les deux autres bords on peut, donc, appliquer n’importe quelles conditions aux limites standards, telles que, appui simple, encastrement ou bord libre.

L’équation différentielle peut s’écrire alors :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \left[ \frac{d^4 h_m}{dy^4} - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 h_m}{dy^2} + \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 - \omega^2 \frac{\rho h}{D} \right) h_m \right] \quad (II-26)$$

Pour découpler les équations, on utilise la propriété d'orthogonalité des fonctions sinus :

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{p\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq p \\ \frac{a}{2} & \text{si } m = p \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

en multipliant l'équation (II-27) par  $\sin \frac{p\pi}{a} x$ , puis en intégrant de '0' à 'a' il vient :

$$\frac{d^4 h_m(y)}{dy^4} - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 h_m(y)}{dy^2} + \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 - \omega^2 \frac{\rho h}{D} \right) h_m(y) = 0 \quad (\text{II-28})$$

C'est une équation différentielle qui se résout facilement en posant :

$$h_m(y) = A e^{ry}$$

en remplaçant, on trouve :

$$r_{1m} = \pm \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \quad \text{et} \quad r_{2m} = \pm j \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \quad (\text{II-29})$$

d'où on tire l'expression de  $h_m(y)$  :

$$h_m(y) = C \sin r_{2m} y + D \cos r_{2m} y + E \operatorname{sh} r_{1m} y + F \operatorname{ch} r_{1m} y \quad (\text{II-30})$$

## II.6. Conditions aux limites de la plaque

Dans ce qui suit nous considérons les cas de plaques appuyées sur deux bords opposés. Ce cas de conditions aux limites permet de trouver une solution analytique pour le schéma modal. Nous présentons dans ce qui suit les différentes conditions aux limites classiques écrites sur un bord de la plaque normal à l'axe  $y$ .

### □ Condition de bord appuyé

Dans ce cas le déplacement transversal est nul sur le bord en question et aucune contrainte ne s'exerce sur le couple de rappel.

$$\begin{cases} w(x, y, t) = 0 \\ \text{et} \\ M_x = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

Cette condition se simplifie encore un peu car la première condition  $w(x, y, t) = 0$  entraîne que  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t) = 0$ , on a donc pour le bord appuyé :

$$\begin{cases} w(x, y, t) = 0 \\ \text{et} \\ D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-32})$$

❑ **Condition de bord encastré**

C'est une condition pour laquelle le déplacement ainsi que sa dérivée normale sont nuls sur le bord considéré. On a alors :

$$\begin{cases} w(x, y, t) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-33})$$

❑ **Condition de bord libre**

Aucune contrainte extérieure ne s'exerce sur la plaque. C'est une condition aux limites naturelle, pour laquelle, on a :

$$\begin{cases} D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t) \right] = 0 \\ \text{et} \\ -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, y, t) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}(x, y, t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-34})$$

Dans ce qui suit, nous considérons le même. Nous supposons que les deux bords appuyés sont les bords  $x = 0$  et  $x = a$  ; la solution (II-30) est alors adaptée. Pour les deux autres bords de la plaque, toutes les conditions aux limites standard, sont envisageables.

### II.6.1. Conditions aux limites du type AAAA

Dans ce cas, nous avons affaire à une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords ; qui est le cas le plus simple et qui conduit à des calculs assez courts. En appliquant les conditions aux limites (II-27), on obtient pour les bords  $y = 0$  et  $y = b$  :

❑ Pour  $y = 0$

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 \\ \text{et} \\ D \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-35})$$

❑ Pour  $y = b$

$$\begin{cases} f(x, b) = 0 \\ \text{et} \\ D \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, b) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-36})$$

En appliquant ces conditions aux limites à l'équation (II-30), on obtient le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -r_{2m}^2 & 0 & r_{1m}^2 \\ \sin r_{2m}b & \cos r_{2m}b & sh r_{1m}b & ch r_{1m}b \\ -r_{2m}^2 \sin r_{2m}b & -r_{2m}^2 \cos r_{2m}b & r_{1m}^2 sh r_{1m}b & r_{1m}^2 ch r_{1m}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-37})$$

soit :

$$[A]\{X\} = \{0\} \quad (\text{II-38})$$

pour aboutir à des solutions non triviales, il faut et il suffit que :  $\det [A] = 0$  d'où l'équation aux fréquences :

$$(r_{1m}^2 + r_{2m}^2)^2 sh r_{1m}b \sin r_{2m}b = 0 \Rightarrow \sin r_{2m}b = 0 \quad (\text{II-39})$$

qui est vérifiée pour :  $r_{2m} = \frac{n\pi}{b}$

et la déformée propre sera du type :

$$f_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{II-40})$$

Nous constatons qu'on retrouve bien l'expression analytique de la déformée modale d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords.

### II.6.2. Conditions aux limites du type AEAE

En plus des conditions d'appui pour les deux bords parallèles à  $y$  ( $x = 0$  et  $x = a$ ) qui sont simplement appuyés, nous prenons un encastrement pour les bords  $y = 0$  et  $y = b$  :

□ Pour  $y = 0$

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-41})$$

□ Pour  $y = b$

$$\begin{cases} f(x, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, b) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-42})$$

En appliquant ces conditions aux limites à l'équation (II-30), on obtient le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ r_{2m} & 0 & r_{1m} & 0 \\ \sin r_{2m}b & \cos r_{2m}b & sh r_{1m}b & ch r_{1m}b \\ r_{2m} \cos r_{2m}b & -r_{2m} \sin r_{2m}b & r_{1m} ch r_{1m}b & r_{1m} sh r_{1m}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-43})$$

d'où l'équation aux fréquences propres :

$$2r_{1m}r_{2m} + (r_{1m}^2 - r_{2m}^2) \sin r_{2m}b \operatorname{sh} r_{1m}b - 2r_{1m}r_{2m} \cos r_{2m}b \operatorname{ch} r_{1m}b = 0 \quad (\text{II-44})$$

La résolution de l'équation aux fréquences n'est pas triviale et nécessite un traitement numérique. Notons cependant que  $r_{1m}$  et  $r_{2m}$  ne sont pas des variables indépendantes, mais au contraire, sont reliées à la pulsation  $\omega$  par les équations (II-29). Pour chaque indice  $m$  on trouve une infinité dénombrable de solutions  $n = 1, \dots, \infty$ , chacune est repérée par un double indiciage  $\omega_{mn}$ .

Le calcul des déformées propres nécessite la résolution du système linéaire (II-43) pour chaque racine de l'équation aux fréquences. Ici aussi, un traitement informatique s'avère nécessaire dans le cas général.

Considérons le mode  $(m, n)$  de pulsation  $\omega_{mn}$ , on lui associe les deux nombres d'ondes  $r_{1mn}$  et  $r_{2mn}$ , qui bien sûr annulent le déterminant du système d'équations (II-43). Il y a en conséquence une infinité de vecteurs solutions, on peut cependant en choisir un, en normant le vecteur solution. Normons par exemple, le vecteur par rapport à la première composante :

$$\begin{Bmatrix} C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \\ F_{mn} \end{Bmatrix} \text{ devient : } \begin{Bmatrix} 1 \\ D_{mn}/C_{mn} \\ E_{mn}/C_{mn} \\ F_{mn}/C_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ D'_{mn} \\ E'_{mn} \\ F'_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-45})$$

On aura 4 équations à 3 inconnues, on choisit 3 équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_{1mn} & 0 \\ \cos r_{2mn}b & \operatorname{sh} r_{1mn}b & \operatorname{ch} r_{1mn}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{mn} \\ E'_{mn} \\ F'_{mn} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r_{2mn} \\ \sin r_{2mn}b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-46})$$

Finalement la déformée propre du mode  $(m, n)$  peut être donnée par :

$$f_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \left[ \sin r_{1mn}y + D'_{mn} \cos r_{1mn}y + E'_{mn} \operatorname{sh} r_{2mn}y + F'_{mn} \operatorname{ch} r_{2mn}y \right] \quad (\text{II-47})$$

### II.6.3. Conditions aux limites du type AAAE

En plus des conditions d'appui pour les deux bords parallèles à  $y$  ( $x = 0$  et  $x = a$ ) qui sont simplement appuyés, nous prenons un appui simple pour le bords  $y = 0$  et un encastrement pour  $y = b$  :

□ Pour  $y = 0$  (bord appuyé)

$$\begin{cases} w(x, 0, t) = 0 \\ M_x = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0, t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-48})$$

□ Pour  $y = b$  (bord encastré)

$$\begin{cases} w(x, b, t) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 \\ D \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, b) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-50})$$

En appliquant ces conditions aux limites à l'équation (II-26), on obtient le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -r_{2m}^2 & 0 & r_{1m}^2 \\ \sin r_{2m}b & \cos r_{2m}b & sh r_{1m}b & ch r_{1m}b \\ r_{2m} \cos r_{2m}b & -r_{2m} \sin r_{2m}b & r_{1m} ch r_{1m}b & r_{1m} sh r_{1m}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-51})$$

en annulant, par la suite, le déterminant de la matrice on abouti à l'équation aux fréquences propres :

$$(r_{1m}^3 + r_{1m}r_{2m}^2) \sin r_{2m}b \, ch r_{1m}b - (r_{2m}^3 + r_{1m}^2r_{2m}) \cos r_{2m}b \, sh r_{1m}b = 0 \quad (\text{II-52})$$

Pour un mode (m,n) de pulsation propre  $\omega_{mn}$ , et en normant par rapport à la 1<sup>ère</sup> composante, on obtient le vecteur solution par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} -r_{2mn}^2 & 0 & r_{1mn}^2 \\ \cos r_{2mn}b & sh r_{1mn}b & ch r_{1mn}b \\ -r_{2mn} \sin r_{2mn}b & r_{1mn} ch r_{1mn}b & r_{1mn} sh r_{1mn}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{mn} \\ E'_{mn} \\ F'_{mn} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin r_{2mn}b \\ r_{2mn} \cos r_{2mn}b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-53})$$

et la déformée propre du mode (m,n) sera calculée à partir de l'équation (II-47).

#### II.6.4. Conditions aux limites du type ALAE

Pour une plaque simplement appuyée sur deux bords opposés, le troisième libre et le quatrième encastré on aura :

□ sur le bord  $y = 0$  (bord libre)

$$\begin{cases} M_x = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0, t) \right] = 0 \\ T_y = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, 0, t) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, 0, t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-54})$$

□ sur le bord  $y = b$  (bord encastré)

$$\begin{cases} w(x, b, t) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-55})$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} D \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 f(x, 0) \right] = 0 \\ -D \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, 0) - (2 - \nu) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, b) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-56})$$

En appliquant ces conditions aux limites à l'équation (II-30), on obtient un système linéaire homogène de 4 équations. Pour des raisons d'allègement des équations, on introduit des variables intermédiaires. On pose :

$$\begin{aligned} \alpha &= -r_{2m}^2 - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \\ \beta &= r_{1m}^2 - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \\ \gamma &= -r_{2m}^3 - (2 - \nu) r_{2m} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \\ \varphi &= r_{1m}^3 - (2 - \nu) r_{1m} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II-57})$$

le système d'équations s'écrira donc :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & \varphi & 0 \\ \sin r_{2m} b & \cos r_{2m} b & \text{sh } r_{1m} b & \text{ch } r_{1m} b \\ r_{2m} \cos r_{2m} b & -r_{2m} \sin r_{2m} b & r_{1m} \text{ch } r_{1m} b & r_{1m} \text{sh } r_{1m} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-58})$$

En annulant le déterminant de la matrice on abouti à l'équation aux fréquences propres :

$$(r_{1m} \alpha \gamma + r_{2m} \beta \varphi) + (r_{1m} \alpha \varphi - r_{2m} \beta \gamma) \sin r_{2m} b \text{sh } r_{1m} b - (r_{1m} \beta \gamma + r_{2m} \alpha \varphi) \cos r_{2m} b \text{ch } r_{1m} b = 0 \quad (\text{II-59})$$

Pour un mode (m,n) de pulsation propre  $\omega_{mn}$ , et en normant par rapport à la 1<sup>ère</sup> composante, on obtient le vecteur solution par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \varphi & 0 \\ \cos r_{2p} b & \text{sh } r_{1p} b & \text{ch } r_{1p} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{mn} \\ E'_{mn} \\ F'_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \sin r_{2p} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-60})$$

et la déformée propre du mode (m,n) sera calculée à partir de l'équation (II-40).

### II.6.5. Conditions aux limites du type ALAL

Pour deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres libres, on aura :

$$\begin{cases} M_x = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t) \right] = 0 \\ T_y = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, y, t) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, y, t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-61})$$

ce qui donne :

□ sur le bord  $y = 0$  (bord libre)

$$\begin{cases} D \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 f(x, 0) \right] = 0 \\ -D \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, 0) - (2 - \nu) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-62})$$

□ sur le bord  $y = b$  (bord libre)

$$\begin{cases} D \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, b) - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 f(x, b) \right] = 0 \\ -D \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, b) - (2 - \nu) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, b) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-63})$$

en appliquant ces conditions aux limites à l'équation (II-30), et en introduisant les mêmes variables intermédiaires que le cas précédent  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ , on aura le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & \varphi & 0 \\ \alpha \sin r_{2m} b & \alpha \cos r_{2m} b & \beta \operatorname{sh} r_{1m} b & \beta \operatorname{ch} r_{1m} b \\ \gamma \cos r_{2m} b & -\gamma \sin r_{2m} b & \varphi \operatorname{ch} r_{1m} b & \varphi \operatorname{sh} r_{1m} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-64})$$

En annulant le déterminant de la matrice on abouti à l'équation aux fréquences propres :

$$2\alpha\beta\gamma\varphi(\cos r_{2m} b \operatorname{ch} r_{1m} b - 1) + (\beta^2 \gamma^2 - \alpha^2 \varphi^2) \sin r_{2m} b \operatorname{sh} r_{1m} b = 0 \quad (\text{II-65})$$

Pour un mode (m,n) de pulsation propre  $\omega_{mn}$ , et en normant par rapport à la 1<sup>ère</sup> composante, on obtient le vecteur solution par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \varphi & 0 \\ \alpha \cos r_{2mn} b & \beta \operatorname{sh} r_{1mn} b & \beta \operatorname{ch} r_{1mn} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{mn} \\ E'_{mn} \\ F'_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \sin r_{2mn} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-66})$$

La déformée propre du mode (m,n) sera calculée à partir de l'équation (II-47).

### II.6.6. Conditions aux limites du type ALAA

Pour trois bords simplement appuyés et le quatrième libre :

□ sur le bord  $y = 0$  (bord libre)

$$\begin{cases} M_x = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,0,t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,0,t) \right] = 0 \\ \Gamma_y = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x,0,t) + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x,0,t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-67})$$

□ sur le bord  $y = b$  (bord appuyé)

$$\begin{cases} w(x,b,t) = 0 \\ M_x = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,b,t) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,b,t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-68})$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} D \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0) - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 f(x,0) \right] = 0 \\ -D \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,0) - (2-\nu) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x,b) = 0 \\ D \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,b) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-69})$$

En appliquant ces conditions aux limites à l'équation (II-30), et en introduisant les mêmes variables intermédiaires du cas précédent  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ , on aura le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & \varphi & 0 \\ \sin r_{2m} b & \cos r_{2m} b & \text{sh } r_{1m} b & \text{ch } r_{1m} b \\ -r_{2m}^2 \sin r_{2m} b & -r_{2m}^2 \cos r_{2m} b & r_{1m}^2 \text{sh } r_{1m} b & r_{1m}^2 \text{ch } r_{1m} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-70})$$

En annulant le déterminant de la matrice on abouti à l'équation aux fréquences propres :

$$(r_{1m}^2 + r_{2m}^2) \alpha \varphi \sin r_{2m} b \text{ch } r_{1m} b - (r_{1m}^2 + r_{2m}^2) \beta \gamma \cos r_{2m} b \text{sh } r_{1m} b = 0 \quad (\text{II-71})$$

Pour un mode (m,n) de pulsation propre  $\omega_{mn}$ , et en normant par rapport à la 1<sup>ère</sup> composante, on obtient le vecteur solution par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \varphi & 0 \\ \cos r_{2mn} b & \text{sh } r_{1mn} b & \text{ch } r_{1mn} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{mn} \\ E'_{mn} \\ F'_{mn} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \sin r_{2mn} b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-72})$$

et la déformée propre du mode (m,n) sera calculée à partir de l'équation (II-47).

### II.7. Comportement dynamique de plaques impactées

La détermination du comportement de la plaque au choc revient à résoudre l'équation (II-19) avec un second membre qui représente la force d'impact. De cela, on voit la nécessité de la détermination de cette force. Le second membre de l'équation s'annule quand le choc se termine. L'équation régissant le mouvement de la plaque sera donc :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = P(t) \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) \quad (\text{II-73})$$

La solution de l'équation (II-73) s'écrit par séparation de variables et par décomposition modale :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) \quad (\text{II-74})$$

$f_{mn}(x, y)$  sont les déformées propres qui sont déjà déterminées lors du calcul du schéma modal.  $g_{mn}(t)$  décrivent le comportement temporelle de la plaque pour chaque mode séparément. En remplaçant dans l'équation (II-73), on trouve :

$$\rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{g}_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) + D \nabla^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) = P(t) \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) \quad (\text{II-75})$$

La résolution par décomposition modale consiste à résoudre l'équation pour chaque mode séparément puis de faire la sommation des solutions modales. Si on multiplie cette équation par la déformée propre  $f_{pq}(x, y)$  du mode  $(p, q)$ , et en intégrant sur toute la surface de la plaque, on obtient :

$$\rho h \iint \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{g}_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) f_{pq}(x, y) ds + D \iint \nabla^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) f_{pq}(x, y) ds = P(t) \iint \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) f_{pq}(x, y) ds \quad (\text{II-76})$$

En se basant sur la propriété de l'orthogonalité des modes propres, on a donc :

$$\rho h \iint \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{g}_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) f_{pq}(x, y) ds = \begin{cases} \rho h \ddot{g}_{mn}(t) \iint f_{mn}(x, y)^2 ds & \text{si } (m, n) = (p, q) \\ 0 & \text{si } (m, n) \neq (p, q) \end{cases} \quad (\text{II-77a})$$

$$D \iint \nabla^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, y) f_{pq}(x, y) ds = \begin{cases} D g_{mn}(t) \iint \nabla^4 f_{mn}(x, y) f_{pq}(x, y) ds & \text{si } (m, n) = (p, q) \\ 0 & \text{si } (m, n) \neq (p, q) \end{cases}$$

$$P(t) \iint \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) f_{pq}(x, y) ds = P(t) f_{pq}(x_o, y_o)$$

$$\text{Posons : } M_{mn} = \rho h \iint f_{mn}(x, y)^2 ds \quad \text{la masse modale} \quad (\text{II-77a})$$

$$K_{mn} = D \iint \nabla^4 f_{mn}(x, y) f_{mn}(x, y) ds \quad \text{la raideur modale}$$

l'équation (II-76) s'écrit donc :

$$M_{mn} \ddot{g}_{mn}(t) + K_{mn} g_{mn}(t) = P(t) f_{mn}(x_o, y_o) \quad (\text{II-78})$$

Qui est équivalente à l'équation de mouvement d'un système à un degré de liberté. La force  $P(t)$  n'étant pas harmonique, d'où cette équation sera résolue par une méthode numérique (dans notre cas on a opté pour celle de Newmark [28]). Après avoir déterminé l'amplitude modale  $g_{mn}(t)$  de chaque mode, la solution finale est obtenue en superposant les réponses de tous les modes pris en compte selon l'équation (II-74).

## II.8. Comportement mécanique de plaques impactées

Le comportement mécanique est aussi déterminé par décomposition modale. Ainsi, les déformations de la plaque sont données par le système d'équations (II-7) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XX} &= -z \left( \frac{\partial^2 w(x, y, \theta, t)}{\partial x^2} \right) & \text{soit } \varepsilon_{XX} &= -z \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \frac{\partial^2 f_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{YY} &= -z \left( \frac{\partial^2 w(x, y, \theta, t)}{\partial y^2} \right) & \text{soit } \varepsilon_{YY} &= -z \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \frac{\partial^2 f_{mn}(x, y)}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{XY} &= 2\varepsilon_{XY} = -z \left( \frac{\partial^2 w(x, y, \theta, t)}{\partial x \partial y} \right) & \text{soit } \gamma_{XY} &= -z \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(t) \frac{\partial^2 f_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \\ \varepsilon_{ZZ} &= \varepsilon_{XZ} = \varepsilon_{YZ} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-79})$$

et les contraintes seront déterminées par le système d'équations (II-9), que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{XX} + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{YY} \\ \sigma_{YY} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{XX} + \frac{E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{YY} \\ \sigma_{XY} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{XY} \\ \sigma_{ZZ} &= \sigma_{YZ} = \sigma_{XZ} = 0 \end{aligned}$$

## II.9. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques minces en flexion. Nous avons dérivé l'équation régissant le mouvement vibratoire des plaques minces en utilisant le principe de Hamilton. Nous avons, ensuite, déterminé le schéma modal pour différentes conditions aux limites.

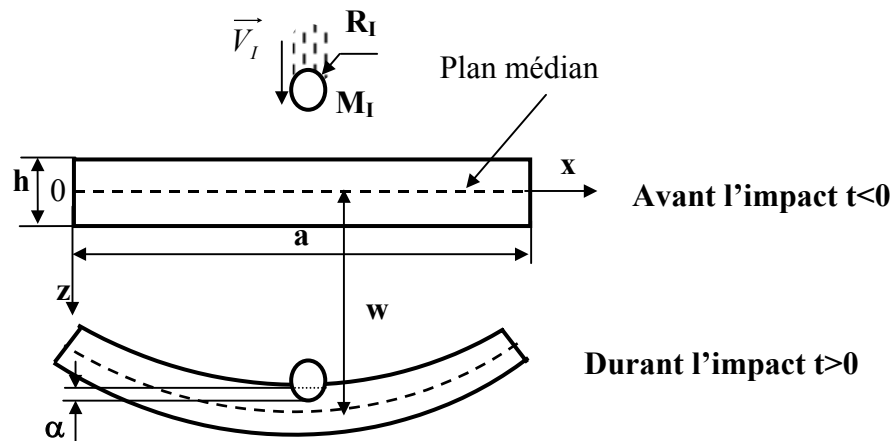
A ce stade, nous sommes capables de résoudre l'équation du mouvement de la plaque à n'importe quelle force ponctuelle dès qu'on connaît son évolution au cours du temps, en utilisant la décomposition modale. Les contraintes et les déformations de la plaque sont déduites dès qu'on détermine la répartition spatiale et temporelle des déplacements de la plaque.

## Chapitre III

### MODELISATION ELASTIQUE DE L'IMPACT

#### III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes modélisations de l'impact, produit par un impacteur à bout sphérique à une vitesse incidente  $V_I$  au centre d'une plaque rectangulaire. L'étude de la plaque au choc revient à résoudre l'équation différentielle du mouvement avec un second membre. La plaque sera donc excitée par une force extérieure dont l'évolution dans le temps est inconnue. La détermination de la force d'impact est très difficile. La connaissance de l'évolution de la force d'impact est nécessaire pour étudier le comportement des plaques au choc. Beaucoup de recherches ont été faites en utilisant des approches numériques ou des études expérimentales mais on n'arrive toujours pas à définir correctement l'évolution exacte de la force d'impact.



**Figure III-1** : Impact transversal au centre d'une plaque carrée

La modélisation du choc, par des vibrations, avec une vitesse initiale ou une force excitatrice instantanée, est peu convaincante car elle ne permet pas de prévoir les phénomènes qui apparaissent pendant le choc (dans un intervalle de temps très réduit) tels que le bruit, l'endommagement locale (au point d'impact) qui peuvent influencer par la suite sur le comportement dynamique de la structure et aussi altérer les caractéristiques mécaniques de cette dernière. De plus, la déduction de l'amplitude de cette impulsion de force (ou de vitesse) à partir des données du choc n'est pas évidente compte tenu de l'influence de plusieurs autres paramètres sur le comportement au choc.

De là, on peut deviner l'importance de trouver une approche qui peut prévoir l'évolution temporelle de la force mise en jeu pendant le contact lors d'un choc.

#### La loi de Hertz

La théorie de Hertz [34] permet de décrire l'interaction entre deux corps élastiques en contact. Elle repose sur l'hypothèse que les variations locales des rayons de courbure autour de la zone de contact sont assez faibles pour que l'on puisse approximer la surface de contact

par un paraboloïde. Nous ne rappelons pas ici les détails de cette théorie, celle-ci ayant fait l'objet d'une étude approfondie par plusieurs auteurs [35].

De manière générale, la loi de Hertz conduit à l'expression suivante de l'approche relative  $d(t)$  des deux solides en fonction de la force de contact  $P(t)$  :

$$d(t) = k_h F_h^{2/3}$$

Dans cette expression,  $k_h$  dépend des rayons de courbure des deux solides au point de contact, ainsi que de leurs propriétés élastiques. Pour la collision entre deux sphères isotropes, on a par exemple :

$$k_h = D_h^{2/3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{1/3}$$

$$\text{avec } D_h = \frac{3}{4} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

où  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont, respectivement, les rayons, les modules d'Young et les coefficients de Poisson des deux sphères. On peut constater que lorsque les deux matériaux sont de natures très différentes, le paramètre de raideur  $D_h$  est "contrôlé" par le module d'Young le plus faible. Cette remarque nous sera utile par la suite lorsqu'on s'intéressera à un impacteur en caoutchouc par exemple.

Il est possible de traiter le cas du contact sphère-plaque en faisant tendre  $R_1$  vers l'infini dans les équations précédentes (en supposant que  $E_1$  et  $\nu_1$  sont les paramètres élastiques de la plaque). L'une des conditions nécessaires à l'application de la relation de Hertz est alors que les déformations de la plaque s'annulent assez rapidement lorsque l'on s'éloigne de la zone de contact pour que l'on puisse négliger l'influence de la face libre située à l'opposé de l'impact (on s'accorde généralement à imposer que l'épaisseur de la plaque soit de l'ordre de grandeur du rayon de la sphère lorsque ces deux éléments sont constitués du même matériau).

### III.2. Modélisations élastique de l'impact [14]

Un impact peut être représenté de manière globale par un bilan énergétique. L'avantage principal de ce type de présentation, réside dans le fait que les paramètres d'entrée sont directement des paramètres caractéristiques de l'impact : vitesse incidente, propriétés géométriques et mécaniques de la plaque et de l'impacteur. Dans ses travaux, Greszczuk [16] a modélisé l'impact en sommant l'énergie de contact à celle de flexion. Shivakumar [17] a amélioré le modèle précédent en couplant à la flexion une rigidité de cisaillement  $K_s$  et en introduisant une rigidité de membrane  $K_m$  dans le cas des plaques minces.

Ainsi le bilan énergétique devient :

$$\frac{1}{2} M_I V_0^2 = E_c + E_{bs} + E_m \quad (\text{III-1})$$

Les énergies de contact  $E_c$ , de flexion, de cisaillement  $E_{bs}$  et de la membrane  $E_m$  sont calculées à partir des relations force - déplacement correspondantes.

D'après Shivakumar [17], des études ont prouvé que la durée d'impact est beaucoup plus importante que le temps mis par les ondes de déformation pour aller aux extrémités de la plaque et revenir. En outre, les effets des modes plus élevés, surtout quand la plaque subit de grandes déformations, sont petits et peuvent être négligés.

### III.2.1. Modèle bilan d'énergie

#### III.2.1.1. Energie de contact

Considérons le cas d'un choc entre un impacteur et une cible tous deux isotropes. En considérant la masse et la vitesse de l'impacteur  $m_1$  et  $v_1$  et celles de la cible  $m_2$  et  $v_2$  au moment de l'impact on aura :

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = P \quad ; \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = P \quad (\text{III-2})$$

Soit  $\alpha$  la distance d'approche des deux corps au point d'impact lié à la compression. La vitesse d'approche est donc donnée par :

$$\dot{\alpha} = v_1 + v_2 \quad (\text{III-3})$$

Dans ses travaux, Rayleigh (1906) a montré que si la durée de contact entre les deux corps est très longue par rapport à leurs fréquences propres, alors, les vibrations sont négligeables. La loi de contact de Hertz peut ainsi être appliquée :

$$P = n.\alpha^{3/2} \quad (\text{III-4})$$

avec :

$$n = \frac{4\sqrt{R_1}}{3\pi(K_1 + K_2)} \quad (\text{III-5})$$

et :

$$K_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi.E_1} \quad (\text{III-6})$$

$$K_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi.E_2} \quad (\text{III-7})$$

$R_1$  est le rayon de l'impacteur et  $E$  et  $\nu$  représentent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson et les indices 1 et 2, désignent l'impacteur et la cible respectivement.

L'accélération d'approche est obtenue en dérivant l'équation (III-3), et la combinant avec les équations (III-2) et (III-4), il vient :

$$\ddot{\alpha} = n.M\alpha^{3/2} \quad (\text{III-8})$$

Avec :

$$M = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (\text{III-9})$$

En multipliant les deux membres de l'équation (III-8) par  $\alpha$  et en intégrant, on aboutit à l'expression suivante :

$$\dot{\alpha}^2 - V^2 = -\frac{4}{5}Mn\alpha^{5/2} \quad (\text{III-10})$$

$V$  est la vitesse d'approche des deux corps à  $t = 0$ , c'est à dire, au début de l'impact. Le maximum de déformation  $\alpha_1$  est obtenu pour  $\dot{\alpha} = 0$ .

$$\alpha = \left( \frac{5V^2}{4Mn} \right)^{5/2} \quad (\text{III-11})$$

La relation (III-11) peut être obtenue en passant par le bilan énergétique du système. En considérant que la cible est fixe et que l'impacteur mobile arrive à une vitesse  $V_I$ , le bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2} m_I V_I^2 = \int_0^{\alpha_1} P d\alpha \quad (\text{III-12})$$

L'introduction de l'équation (III-4) dans (III-12) suivie d'une intégration permet d'avoir :

$$\frac{1}{2} m_I V_I^2 = \frac{2}{5} n \alpha_1^{5/2} \quad (\text{III-13})$$

Notons que dans le cas où  $V_I = V$  et  $M = I/m_I$ , l'introduction de (III-11) dans (III-4) donnerait le résultat suivant :

$$P = n^{2/5} \left( \frac{5V^2}{4M} \right)^{3/5} \quad (\text{III-14})$$

Dans le cas d'un contact hertzien, d'un impacteur sphérique sur une plaque avec une force  $P$ , la relation entre  $P$  et le rayon  $a$  de la surface de contact est donnée par (Hertz (1881)) :

$$a = \left[ \frac{3\pi P}{4} (K_1 + K_2) R_I \right]^{1/3} \quad (\text{III-15})$$

En combinant les équations (III-14) et (III-15), le rayon maximum de l'aire de contact entre la plaque et l'impacteur sphérique serait :

$$a = \sqrt{R_I} \left( \frac{5V^2}{4Mn} \right)^{1/5} \quad (\text{III-16})$$

En conclusion, l'énergie de contact est obtenue par l'intégration du produit de la force  $P$  et du déplacement de contact  $\alpha$ .

$$E_c = \int_0^{\alpha_1} P d\alpha \quad (\text{III-17})$$

En remplaçant  $P$  par sa valeur de l'expression (III-4) et après intégration et simplification, on obtient l'énergie de contact  $E_c$  :

$$E_c = \frac{2}{5} \frac{P^{5/3}}{n^{2/3}} \quad (\text{III-18})$$

### III.2.1.2. Energie de flexion

La réponse à l'impact d'une plaque peut être obtenue en considérant les déformations subies d'une part à un contact hertzien  $\alpha$  en plus d'une déformation globale  $\delta$  de la plaque. La relation hertzienne force - déformation liée au contact est décrite par :

$$P_c = n.\alpha^{3/2} \quad (\text{III-19})$$

Quant à la relation force – déplacement d'une plaque sujette à une charge concentrée, elle est de la forme :

$$P_p = K_p.\delta_p \quad (\text{III-20})$$

Avec c et p, indices, désignant respectivement le contact et la plaque.  $K_p$  est lié aux constantes du matériau et aux conditions aux limites.

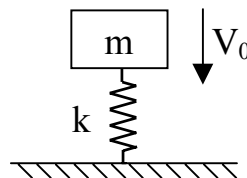
En utilisant ce modèle, dans sa thèse, Benmedekhène [14], a fait des prédictions des valeurs de déplacements et des charges maximales en fonction des énergies d'impact. Dans cette étude il a montré que les valeurs du modèle restent proches de l'expérience dans les basses énergies où les faibles endommagements ne changent pas le comportement global de la plaque.

### III.2.2. Modèles masses - ressorts

Le modèle basé sur le bilan d'énergie présenté précédemment permet de calculer les valeurs ultimes des déplacements et des forces, mais il ne permet pas de prédire l'histoire du chargement, de la vitesse ou du déplacement. Par contre, l'utilisation du modèle masse - ressort permettra de retracer toute l'histoire des différents paramètres de l'impact.

Différents types de modèles masses – ressorts ont été développés pour modéliser l'impact à basse vitesse. La caractéristique principale de ce type de modèle consiste dans le fait qu'ils ne prennent en compte aucune localisation de la déformation. Ainsi l'énergie incidente du projectile est absorbée sur tout le volume de la plaque.

Parmi les plus importants modèles présentés dans la littérature, celui de Caprino et al. [15]. Ces auteurs présentent l'impact par un seul degré de liberté, où la rigidité du ressort  $K$  correspond à la rigidité statique de la plaque. Une bonne corrélation est constatée jusqu'à une vitesse de 2.5m/s, entre la force calculée par ce modèle et la force mesurée.



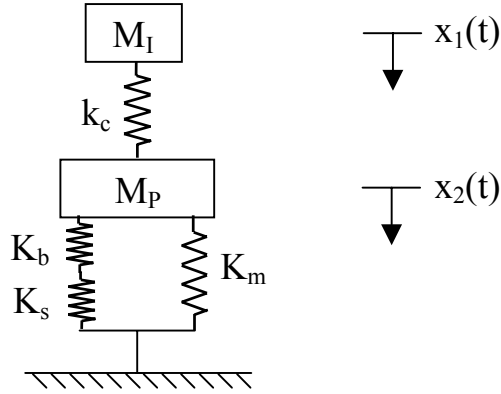
**Figure III-2 :** Modèle à un degré de liberté, Caprino et al. [15]

Dans ce type de modèle, les effets du contact et de l'inertie de la plaque ne sont pas pris en considération, d'où les limites d'utilisation pour des vitesses plus importantes. Sjoblom [26] a alors suggéré un modèle à deux degrés de liberté qui permet d'intégrer la non linéarité au niveau du contact. Avec ce modèle, il est possible de découpler le contact et la rigidité de la plaque.

Néanmoins, les effets de cisaillement localisés autour du point d'impact, importants pour les plaques épaisses ou pour les vitesses très élevées, ne sont pas pris en compte.

C'est pourquoi Lal [27] a développé un modèle à trois ressorts  $K_c$ ,  $K_b$  et  $K_s$  représentant respectivement les rigidités de poinçonnement, de flexion et de cisaillement. Ce modèle reste valable dans le cas des petits déplacements.

Shivakumar et al. [17] ont alors pris en considération les effets de membranes en utilisant des modèles masses – ressorts à un ou deux degrés de liberté avec quatre ressorts de rigidité  $K_m$ ,  $K_b$ ,  $K_s$  et  $K_c$ . Les indices m, s, b et c représentent respectivement la membrane, le cisaillement, la flexion et le contact de la plaque avec l'impacteur.



**Figure III-3** : Modèle à deux degrés de liberté, Shivakumar et al. [17]

Dans ce modèle, les deux masses  $M_I$  et  $M_P$  sont connectées par un ressort hertzien représentant la loi de charge – pénétration du contact. Les propriétés force – déplacement transversal sont représentées par la combinaison des ressorts de flexion, de cisaillement et de membrane.

Une étude précédente [31] faite sur des vibrations libres d'une plaque avec une masse concentrée attachée au centre a montré que la masse effective, contribuant à l'effet d'inertie de la plaque, est le quart de la masse totale de cette dernière.

Les déplacements  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  représentent la réponse en déplacement des deux masses à chaque instant t. Les vitesses correspondantes sont représentées par  $\dot{x}_1(t)$  et  $\dot{x}_2(t)$ .

Le déplacement transverse de la plaque est représenté par :  $\delta = x_2(t)$ , et la déformation de contact est représentée par :  $\alpha = x_1(t) - x_2(t)$ . L'équilibre du projectile et de la plaque peut alors s'écrire :

$$M_I \ddot{x}_1(t) + \lambda n [x_1(t) - x_2(t)]^{3/2} = 0 \quad (\text{III-21})$$

$$M_P \ddot{x}_2(t) + k_{bs} x_2(t) + k_m [x_2(t)]^3 - \lambda n [x_1(t) - x_2(t)]^{3/2} = 0 \quad (\text{III-22})$$

avec :

$$\lambda = 1 \quad \text{pour } x_1 > x_2$$

$$\lambda = -1 \quad \text{pour } x_1 < x_2$$

Les conditions initiales sont :

$$x_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_1(0) = V_I \quad , \quad x_2(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{III-23})$$

Ces deux équations couplées, sont des équations différentielles non linéaires sont résolues par une méthode d'intégration numérique selon le schéma de Newmark [28] (voir annexe I) jusqu'à ce que  $x_2(t)$  devienne nul ou négatif.

### III.3. Approche numérique de l'impact

Cette approche est simple, efficace, et donne des résultats très satisfaisants. Elle fait appel, elle aussi, à la théorie de contact de Hertz. Lors du contact, l'impacteur exerce une force  $P$  sur la plaque qui constitue la force du choc. A son tour, par le principe de l'action et de la réaction, la plaque exerce sur l'impacteur une force égale à  $P$  mais de sens opposé.

L'impacteur, ayant un bout sphérique, heurte la plaque au repos avec une vitesse incidente  $V_I$ . Ecrivons l'équation d'équilibre dynamique de l'impacteur :

$$\begin{cases} M_I \ddot{Z}_I + P = 0 \\ Z_I(0) = \dot{Z}_I(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{Z}_I(0) = V_I \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

pour la plaque, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} \rho h \ddot{W} + D \nabla^4 W = P \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) \\ W(x, y, 0) = \dot{W}(x, y, 0) = \ddot{W}(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

En réalité, pour une équation différentielle de second ordre, deux conditions initiales suffisent pour bien définir le problème. La méthode numérique de résolutions que nous avons adopté (annexe (I)) nécessite une troisième condition initiale pour démarrer les calculs.

$P$  est la force d'impact qui entre en jeu pendant le contact et s'annule lorsque ce dernier se termine. Cette force est donnée par la loi de contact de Hertz pour un contact sphère-plan :

$$P = n \alpha^{3/2} \quad (\text{III-26})$$

où  $\alpha$  est l'approche des deux corps ou la pénétration de l'impacteur dans la cible :

$$\alpha(t) = Z_I(t) - W(x_o, y_o, t) \quad (\text{III-27})$$

avec  $x_o, y_o$  sont les coordonnées du point d'impact.

Pour résoudre les deux équations de mouvement simultanément, on a recours à une méthode numérique itérative selon une procédure décrite ci-dessous, qu'on va essayer de décrire.

A l'instant initial  $t_0 = 0$  (début du choc), l'impacteur possède une vitesse incidente  $V_I$  et la force de contact  $P$  est toujours nulle. A l'instant  $t_1 = t_0 + dt$ , la force  $P$  prend une valeur non nulle dont on ignore l'intensité. Afin de déterminer cette force à l'instant  $t_1$ , on se fixe une valeur arbitraire, non nulle, pour la force d'impact et on l'injecte dans l'équation (III-24) dans le but de déterminer  $Z_I(t_1)$ . Par la suite, cette même force est injecté dans l'équation (III-25) pour déterminer le déplacement de la plaque au point de l'impact  $W(x_o, y_o, t_1)$  par décomposition modale, en utilisant le schéma d'intégration de Newmark [28]. La force  $P(t_1)$  est corrigée ensuite en utilisant la loi de contact de Hertz exprimée par le relation (III-26) après avoir déterminé la pénétration  $\alpha$  de l'impacteur dans la cible, donnée par l'expression (III-27). La valeur de  $P(t_1)$ , ainsi obtenue, est réinjectée dans les équations (III-24) et (III-25), afin de reprendre le processus itératif jusqu'à la convergence de  $P(t_1)$ . On procède de la même manière pour déterminer la force de choc point par point jusqu'à ce que celle-ci soit nulle.

Notons que le pas temporel  $dt$  doit être suffisamment petit pour assurer la convergence de la solution.

Une fois, l'évolution temporelle de la force d'impact est déterminée, nous pouvons calculer le déplacement de n'importe quel point de la plaque, ainsi que les contraintes, en utilisant la superposition des modes comme mentionné dans le chapitre (II).

#### **III.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation du phénomène d'impact. Un premier modèle analytique basé sur l'égalisation de la somme des énergies de contact et de flexion de la plaque avec l'énergie cinétique de l'impacteur. Ce modèle permet de calculer les déplacements ainsi que les charges maximales mais ne permet pas de prédire leurs histoires lors de l'impact. Un deuxième modèle, plus délicat à mettre en œuvre, est le modèle masse-ressort. Ce modèle permet de prédire les courbes de chargement et de déplacement. Un troisième modèle, qui est un modèle numérique, est proposé pour résoudre les équations de mouvement couplées des deux corps en collision. Ce modèle a donné entière satisfaction en comparant ses résultats avec ceux trouvés dans la bibliographie ou avec ceux déterminés par le modèle masse-ressort. Ce troisième modèle permet de tracer l'évolution des déplacements et des chargements sans négliger les modes d'ordre supérieurs à un (ce n'est pas le cas pour les deux premiers). Nous allons présenter dans le chapitre suivant la démarche de calcul suivie lors de la résolution avec le troisième modèle.

## Chapitre IV

### RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS

#### IV.1. Introduction

Tel qu'il a été cité auparavant, pour résoudre un problème de choc entre un projectile et une plaque, nous avons à résoudre un système de deux équations, l'une est une équation différentielle de second ordre en temps :

$$\begin{cases} M_I \ddot{Z}_I + P = 0 \\ Z_I(0) = \dot{Z}_I(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{Z}_I(0) = V_I \end{cases} \quad (\text{IV-1})$$

et l'autre est une équation différentielle partielle régissant le mouvement transversal d'une plaque en flexion :

$$\begin{cases} \rho h \ddot{W} + D \nabla^4 W = P \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) \\ W(x, y, 0) = \dot{W}(x, y, 0) = \ddot{W}(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-2})$$

Nous constatons que, les deux équations sont couplées par le terme  $P$  qui est la force de contact pendant le choc et qui est donnée par la relation du contact de Hertz :

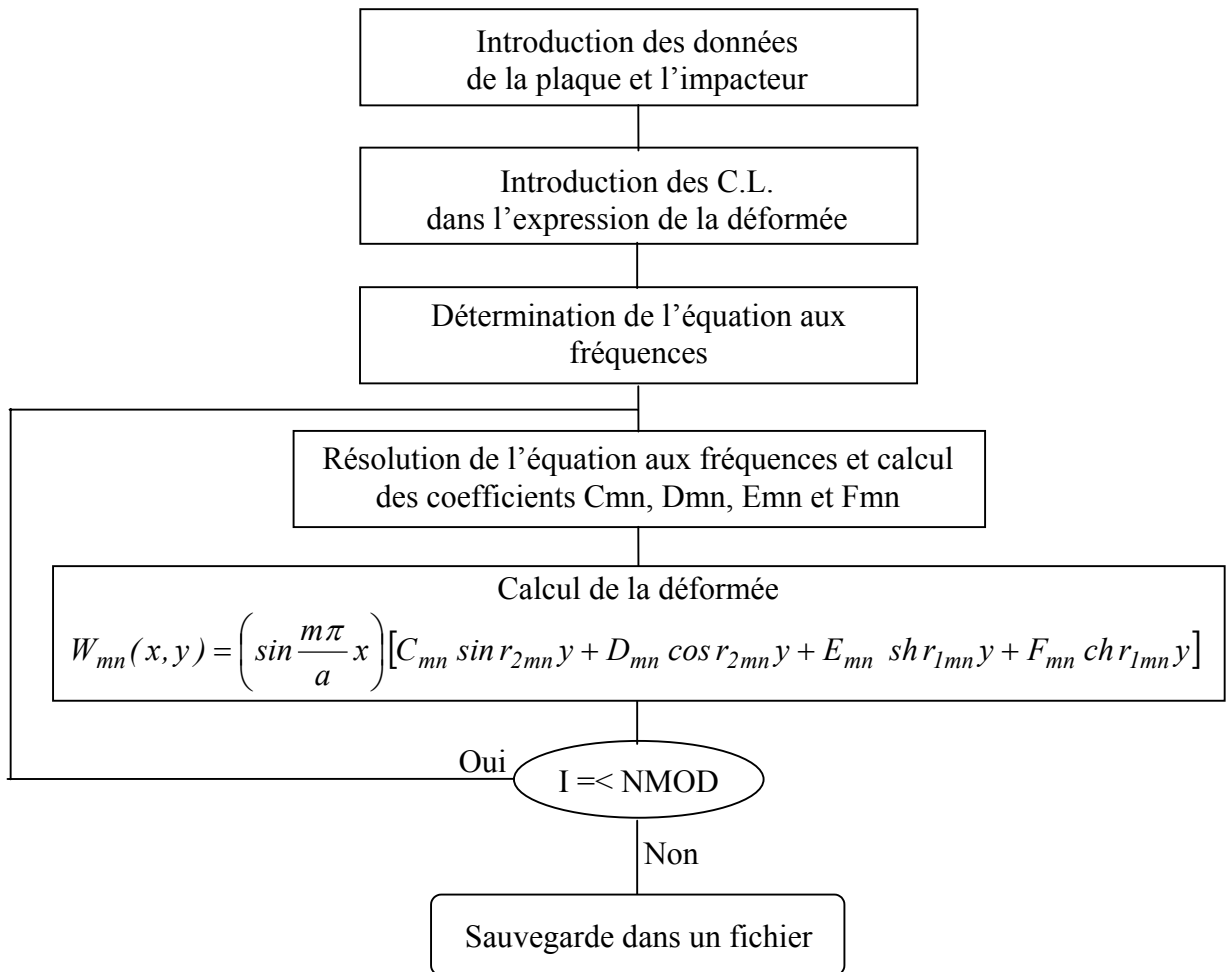
$$P = n(Z_I(t) - W(x_o, y_o, t))^{3/2} \quad (\text{IV-2})$$

La résolution de ce système est très délicate, on propose, par la suite, la procédure suivie pour résoudre le problème.

#### IV. 2. Description de la procédure de calcul

##### IV. 2. 1. Calcul du schéma modal de la plaque

La résolution de l'équation différentielle régissant le mouvement de la plaque est faite par décomposition modale. Pour cela, la connaissance du schéma modal est indispensable. Les fréquences propres, pour différentes conditions aux limites, sont déterminées en résolvant numériquement ou graphiquement les équations aux fréquences (II-39, II-44, II-52, II-59, II-65 et II-71 ). Les coefficients  $r_1$  et  $r_2$ , ainsi obtenus, seront injectés dans les systèmes d'équations fréquences ( II-37, II-43, II-51, II-58, II-64 et II-70) obtenues après utilisation des conditions aux limites dans l'expression de la déformée. Les coefficients de la déformée propre C, D, E et F sont, alors, déterminés pour chaque mode en résolvant numériquement le système d'équations précédent. La procédure de calcul du schéma modale est décrite par l'organigramme de la figure (IV-1).



**Figure IV-1** : Schéma bloc du calcul du schéma modal

### IV. 2. 2. Calcul de la force d'impact

Comme il a été cité dans le chapitre (III), on donne pour chaque instant une force arbitraire puis on la corrige en l'injectant dans les deux équations (IV-1), gouvernant les mouvements de l'impacteur et de la plaque respectivement, et avec l'utilisation de l'équation (IV-2) et cela en suivant un processus itératif. La fin de l'impact correspond à l'instant où la force s'annule. Nous décrivons, dans la figure (IV-2), l'algorithme de calcul de la force d'impact.

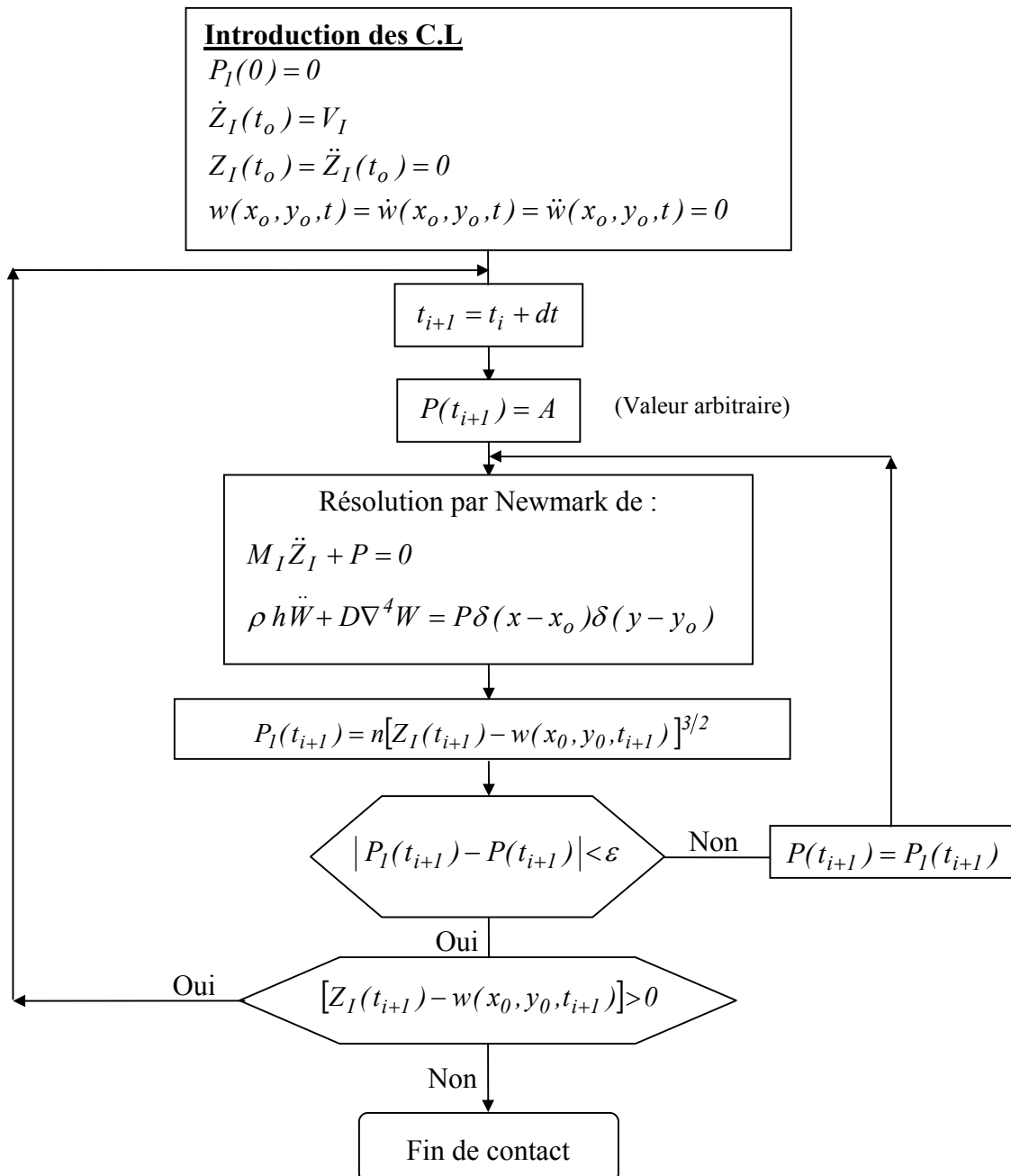


Figure IV-2 : Schéma bloc du calcul de la force d'impact

### IV. 2. 3. Calcul de la réponse temporelle de la plaque

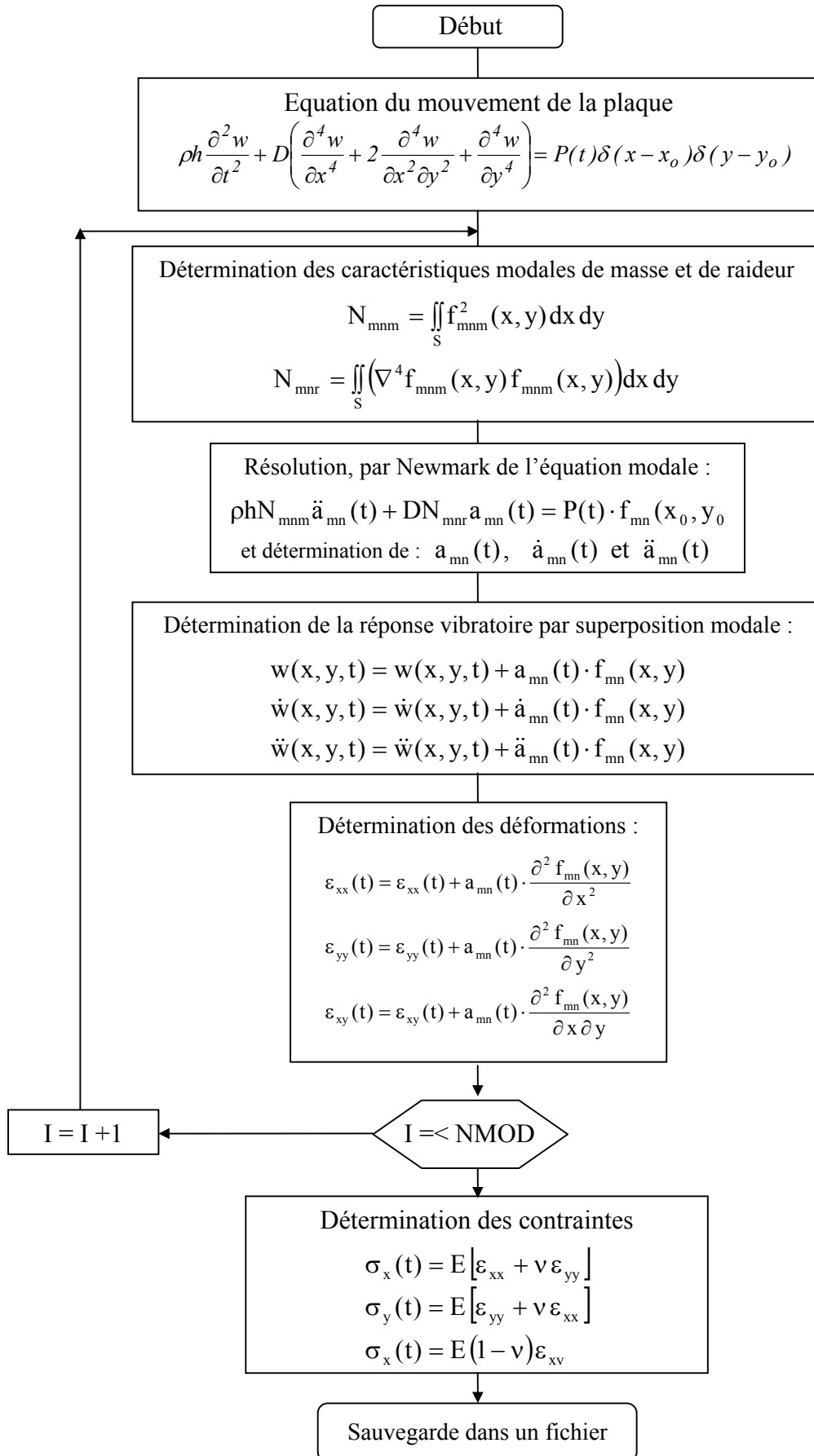
La réponse temporelle sera donc aisée à déterminer, puisque la difficulté majeure dans les problèmes de choc réside dans la détermination de la force excitant la structure, donc on a, à résoudre :

$$\rho h \ddot{W} + D \nabla^4 W = P \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) \quad (\text{IV-3})$$

La résolution de cette équation a été faite par décomposition modale, et donc la détermination de la réponse de chaque mode à part puis en faisant la somme de ces réponses. La procédure est décrite dans la figure (IV-3).

### IV. 2. 4. Calcul des contraintes

Les contraintes agissant sur la plaque sont liées aux déformations, par la loi de Hook généralisée, et par conséquent aux déplacements. La procédure de calcul des contraintes consiste à dériver la réponse de chaque mode : deux fois par rapport à « x » pour le calcul de  $\sigma_x$ , deux fois par rapport à « y » pour  $\sigma_y$  et une fois par rapport à « x » et une fois par rapport à « y » en même temps pour  $\tau_{xy}$ . Les contraintes  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  étant nulles ( voir les hypothèses faites au chapitre II ). Une fois les déformations de chaque mode sont déterminées, une sommation de ces dernières donnera les déformations ultimes de la plaque. Les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  agissant sur la plaque seront ensuite déterminées en appliquant la loi de Hook généralisée ( équation (II-8) ) (voir figure (IV-3)).



**Figure IV-3 :** Schéma bloc du calcul de la réponse dynamique et mécanique de la plaque

### IV. 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la procédure de calcul de la force d'impact, la réponse dynamique et la réponse mécanique ( contraintes et déformations ) de la plaque. Un organigramme est donné pour chaque étape de calcul. L'implémentation numérique a été faite sous environnement « Matlab ». Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, une confrontation des résultats obtenus pour chaque étape a été faite avec ceux donnés par la bibliographie, un code de calcul par éléments finis [24] et aussi donnés par d'autres approches. Cette confrontation a donné lieu à des résultats très satisfaisants, comme nous allons le constater dans le chapitre (V).

## Chapitre V

### EXPLOITATIONS NUMERIQUES

#### V.1. But

Le but de ce chapitre est d'exploiter, le programme numérique établi sur la base de la théorie développée dans les chapitres (II) et (III). Notre attention sera principalement portée sur les paramètres suivants :

- ❖ schéma modal de plaque,
- ❖ la force d'impact,
- ❖ déplacements et contraintes de la plaque.

La structure étudiée est une plaque rectangulaire dont nous ferons varier les paramètres pour voir leur influence sur la force d'impact et sur le comportement vibratoire et mécanique de la plaque.

Les paramètres d'études sont : l'évolution temporelle de la force d'impact, afin de déterminer plus précisément son amplitude maximale et sa durée, les répartitions spatiales et temporelles des déplacements et des contraintes au niveau de la plaque.

Notre programme nous permet de calculer le schéma modal de différentes combinaisons de conditions d'appuis de la plaque, à condition d'avoir à chaque fois au moins deux bords opposés simplement appuyés comme il a déjà été cité au chapitre (II).

En ce qui concerne le calcul de la force d'impact, les résultats obtenus seront comparés à ceux tirés de la bibliographie. Une fois la validation des résultats est assurée, nous procédons à la variation de différents paramètres susceptibles d'influer sur la force d'impact, tant en terme d'amplitude que de durée d'impact.

Par ailleurs, nous signalons que le programme établi permet de calculer les répartitions spatiale et temporelle des caractéristiques mécaniques (contraintes) et vibratoires (déplacements, vitesses et accélérations) de la plaque soumise à n'importe quel type de force d'excitation ponctuelle dès qu'on connaît l'évolution de cette dernière dans le temps.

#### V.2. Validation du calcul du schéma modal

Afin de valider les résultats des différents schémas modaux, une première étape consiste à réaliser un double calcul : le premier par le biais de mon programme écrit sous environnement Matlab, et le second en utilisant un code de calcul d'éléments finis, en l'occurrence Cosmos/M. Une seconde étape consiste à comparer les deux résultats à ceux de Blevins [25].

Les résultats mentionnés ci-dessous, sont obtenus pour une plaque carrée dont les caractéristiques sont :

- ✓ dimensions :  $0.5 \times 0.5 \text{ m}^2$ ,
- ✓ épaisseur : 2 mm,
- ✓ masse volumique :  $7800 \text{ kg/m}^3$ ,
- ✓ module de Young :  $2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,
- ✓ coefficient de Poisson: 0.3.

Nous comparons dans les tableaux ci-dessous, les fréquences des six premiers modes d'une plaque carrée pour six combinaisons de conditions d'appuis de la plaque.

### V.2.1. Cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre bords AAAA

Signalons d'abord que, dans le cas de la plaque simplement appuyée sur ses quatre bords, notre solution est exacte car elle utilise les formes propres classiques d'une plaque simplement appuyée, dont la solution est donnée par l'équation :

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

Ordre des fréquences	Méthode des Eléments Finis				Blevins [25]	Notre approche
	5 X 5 (*)	20 X 20(*)	26 X 26(*)	46 X 46(*)		
1 ( 1 , 1 )	38.96	39.43	39.44	39.46	39.46	39.46
2 ( 2 , 1 )	95.87	98.52	98.57	98.63	98.66	98.65
3 ( 1 , 2 )	95.87	98.52	98.63	98.63	98.66	98.65
4 ( 2 , 2 )	148.02	157.37	157.56	157.75	157.86	157.85
5 ( 3 . 1 )	185..24	196.91	197.07	197.23	197.32	197.31
6 ( 1 , 3 )	185.24	196.91	197.07	197.23	197.32	197.31

(\*) : nombre des éléments

**Tableau V-1 :** Les six premières fréquences propres d'une plaque AAAA

Nous constatons que les résultats obtenus par notre approche sont mieux que ceux donnés par les éléments finis surtout lorsqu'on monte en fréquence où la méthode des éléments finis nécessite un maillage de plus en plus fin, d'où une augmentation de la capacité de la mémoire de l'ordinateur et un temps de calcul assez conséquent.

### V.2.2. Cas d'une plaque encastree

Nous donnons, dans le tableau ci-dessous, la combinaison de l'appui simple et de l'encastrement, on prend pour le premier cas une plaque simplement appuyée sur trois bords et encastree sur le quatrième (AAAE), et pour le second cas une plaque avec deux bords opposés appuyés et les deux autres encastrés (AEAE).

Ordre des fréquences	Plaque AAAE			Plaque AEAE		
	M.E.F.	Blevins [25]	Notre approche	M.E.F.	Blevins [25]	Notre approche
1 ( 1 , 1 )	47.22	47.28	47.27	57.80	57.87	57.87
2 ( 2 , 1 )	103.12	103.30	103.30	109.20	109.44	109.44
3 ( 1 , 2 )	117.04	117.28	117.25	138.30	138.59	138.60
4 ( 2 , 2 )	171.57	172.19	172.20	188.29	189.11	189.10
5 ( 3 . 1 )	199.99	200.52	200.46	203.79	204.32	204.35
6 ( 1 , 3 )	225.79	226.31	226.36	257.30	258.10	258.10

**Tableau V-2 :** Les six premières fréquences propres d'une plaque AAAE et AEAE

On peut constater que l'encastrement produit un effet de raideur qui augmente bien sûr les fréquences propres, cet effet est d'autant plus marqué que le mode est de bas rang.

### V.2.3. Cas d'une plaque libre

En combinant l'appui simple à l'appui libre, nous obtenons les résultats ci-dessous :

<i>Plaque ALAL</i>				<i>Plaque AAAL</i>			
Ordre des fréquences	M.E.F.	Blevins [25]	Notre approche	Ordre des fréquences	M.E.F.	Blevins [25]	Notre approche
1 ( 1 , 0 )	19.25	19.25	19.73	1 ( 1 , 1 )	23.35	23.35	23.36
2 ( 2 , 0 )	32.20	32.26	32.01	2 ( 2 , 1 )	55.31	55.49	55.49
3 ( 1 , 1 )	72.88	73.43	72.34	3 ( 1 , 2 )	82.33	82.36	82.36
4 ( 2 , 1 )	77.86	77.87	78.92	4 ( 2 , 2 )	117.74	118.09	118.08
5 ( 3 . 0 )	93.33	93.44	93.38	5 ( 3 . 1 )	122.82	123.67	123.67
6 ( 1 , 2 )	140.58	141.43	140.69	6 ( 1 , 3 )	180.41	180.51	180.51

a) cas d'une plaque avec deux bords opposés simplement appuyés et les autres libres (ALAL)

b) cas d'une plaque simplement appuyée sur trois bords et le quatrième libre (AAAL)

**Tableau V-3 :** Les six premières fréquences propres d'une plaque ALAL et AAAL

En comparant les résultats mentionnés dans le tableau ci-dessus, nous constatons que plus la plaque a des contraintes aux bords et plus les fréquences glissent vers les hautes fréquences ceci est dû bien sûr à la rigidification de la structure par les contraintes imposées par les appuis.

### V.2.4. Cas d'une plaque appuyée-encastree-appuyée-libre AEAL

De même, pour une plaque simplement appuyée sur deux bords opposés, libre et encastree sur les deux autres bords nous obtenons des résultats très proches les uns des autres, ce qui nous permet d'adopter la méthode employée pour la recherche des schémas modaux.

Ordre des fréquences	M.E.F.	Blevins [25]	Notre approche
1 ( 1 , 1 )	25.35	25.37	25.35
2 ( 2 , 1 )	65.88	66.11	66.10
3 ( 1 , 2 )	83.34	83.36	83.36
4 ( 2 , 2 )	125.51	125.97	125.97
5 ( 3 . 1 )	143.57	144.74	144.73
6 ( 1 , 3 )	181.04	181.15	181.14

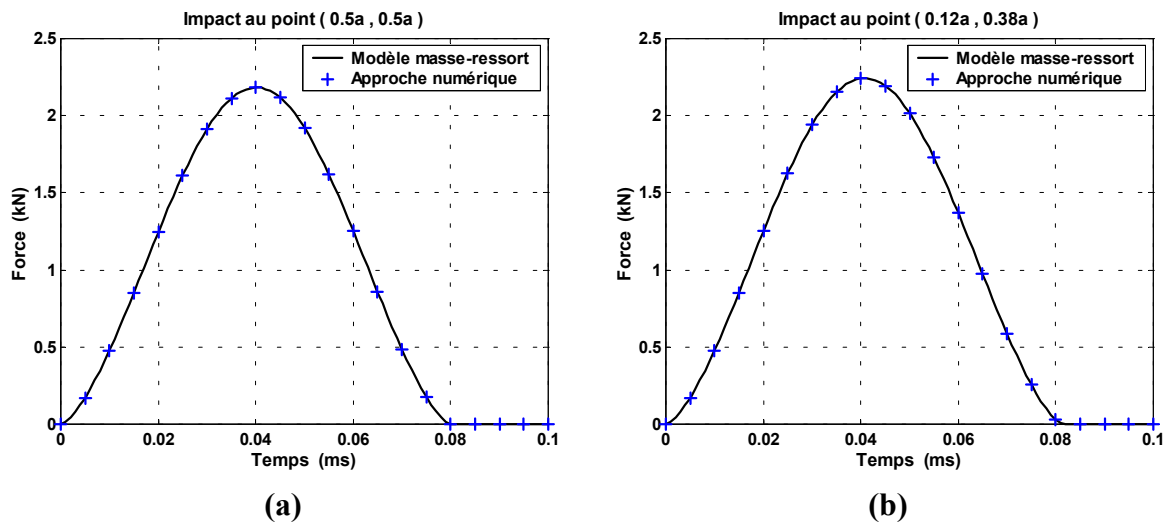
**Tableau V-4 :** Les six premières fréquences propres d'une plaque AEAL

Une fois le calcul des schémas modaux validé, nous nous intéressons maintenant à l'évolution temporelle de la force d'impact pendant le choc. Celle-ci sera d'abord validée par la modélisation masse-ressort et une comparaison avec les résultats obtenus dans la bibliographie.

## V.3. Evolution temporelle de la force d'impact

Afin de valider la méthode utilisée, il sera procédé à une comparaison entre la force d'impact déduite à partir de l'approche numérique proposée et celle déterminée par la modélisation de

l'impact par un système masse-ressort. La comparaison est faite pour deux positions de points d'impact (figure V-1).



**Figure V-1 :** Evolution temporelle de la force d'impact

Nous constatons que les résultats obtenus par les deux méthodes coïncident parfaitement. Ces résultats ont été obtenus pour la contribution du premier mode uniquement dans le calcul de la réponse vibratoire au point d'impact.

D'après Shivakumar [17], des études ont prouvé que la durée d'impact est beaucoup plus importante que le temps mis par les ondes de déformation pour se propager jusqu'aux extrémités de la plaque et revenir au point impacté. En outre, les effets des modes plus élevés, surtout quand la plaque subit de grandes déformations, sont petits et peuvent être négligés [17].

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet des différents paramètres affectant le comportement des plaques impactées, les paramètres étudiés sont : les caractéristiques géométriques et de matériau de la plaque, les caractéristiques de l'impacteur ainsi que les conditions de l'impact.

#### V.4. Influence des paramètres sur la force du choc

Pour étudier l'influence des différents paramètres sur le comportement dynamique des plaques impactées, commençons d'abord par analyser leurs influences sur la force d'impact en terme d'amplitude maximale et de durée d'impact.

Pour cela des plaques de mêmes caractéristiques mécaniques feront l'objet d'exemple d'application.

Ainsi, nous avons pris des caractéristiques mécaniques de la plaque et de l'impacteur identiques, comme mentionné sur le tableau ci dessous.

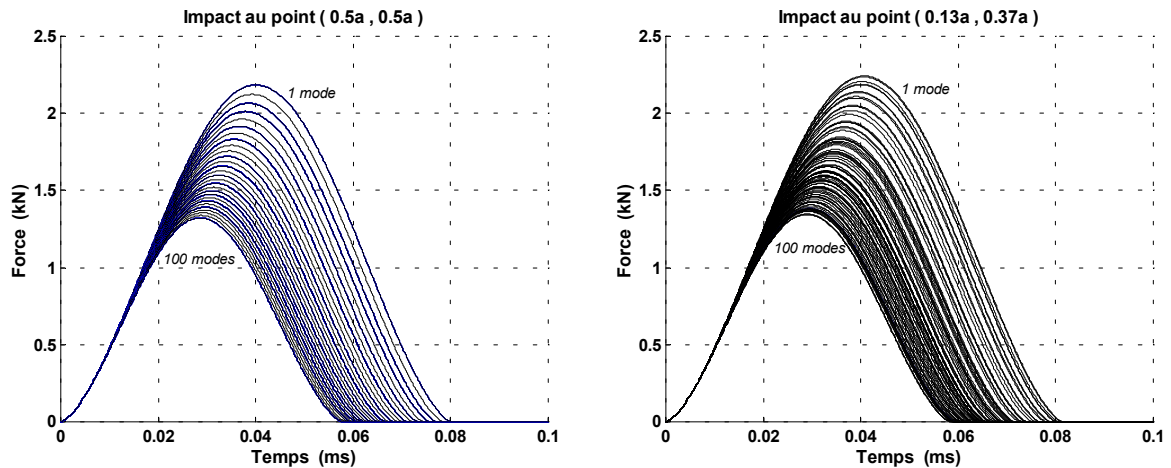
Caractéristiques	Valeurs
Masse volumique	$\rho = 7800 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$
Module de Young	$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$
Module de cisaillement	$G = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$

**Tableau V-5 :** Caractéristiques de la plaque et de l'impacteur

### V.4.1. Paramètres de la plaque

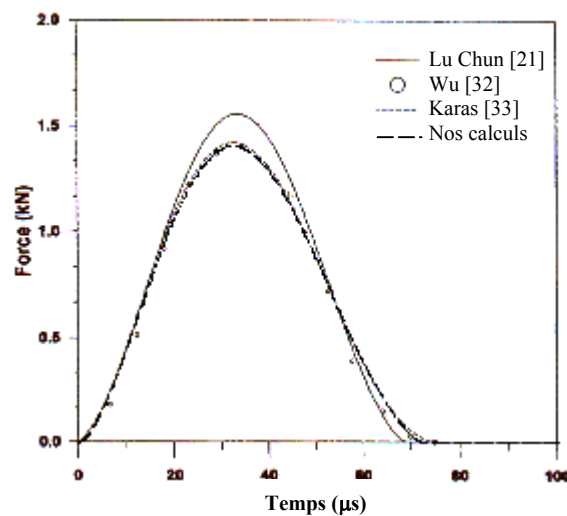
#### V.4.1.1. Influence du nombre de modes

Avant tout calcul du comportement vibratoire de la plaque, il serait judicieux d'étudier la convergence des séries modales dont dépend énormément la réponse de la plaque. Ainsi nous étudions dans ce qui suit l'influence du nombre de modes sur la force d'impact.



**Figure V-2 :** Influence du nombre de modes sur la force d'impact d'une plaque AAAA

Nous représentons sur la figure V-2, l'influence du nombre de modes, pris en compte, sur l'évolution temporelle de la force d'impact. Nous constatons d'une part que la force d'impact diminue en amplitude et en durée de choc avec l'augmentation du nombre de modes propres pris en compte, de plus la force d'impact est moins importante au centre de la plaque qu'à proximité des bords de celle-ci. Ceci s'explique par le fait que la plaque est plus flexible au centre qu'au voisinage des appuis. Comme on vient de le constater l'influence du nombre de modes pris en compte lors du calcul de la réponse vibratoire au point d'impact est assez importante, contrairement à ce qui a été avancé par Shivakumar [17]. Ceci est dû au fait que dans notre cas, la masse de la plaque n'est pas faible devant celle de l'impacteur comme ce fut le cas de Shivakumar [17] où la masse de l'impacteur est plus que quatre fois plus grande que celle de la plaque. A cet effet, nous comparons nos résultats à ceux obtenus dans la bibliographie [21],[32]et[33] où nous avons pris en compte l'effet de 49 premiers modes.



**Figure V-3 :** Force d'impact avec prise en compte des 49 premiers modes propres

L'analyse des résultats obtenus par notre approche montre qu'ils sont proches de ceux obtenus par les références [21], [32] et [33] mentionnées sur la figure V-3. Ainsi pour la suite nous considérons, dans la réponse vibratoire de la plaque, la contribution des 49 premiers modes propres de la plaque.

#### V.4.1.2 Influence des conditions aux limites

Nous étudions à présent, l'influence des conditions d'appuis de la plaque sur la force d'impact tout particulièrement sur la durée du choc et l'amplitude maximale. A cet effet, nous effectuons des simulations numériques sur la même plaque que précédemment avec les caractéristiques de l'impact suivantes :

- ✓ masse de l'impacteur : 50 g,
- ✓ masse volumique de l'impacteur :  $7800 \text{ kg/m}^3$ ,
- ✓ module de Young :  $2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,
- ✓ rayon de l'impacteur : 10 mm,
- ✓ vitesse incidente : 1 m/s.

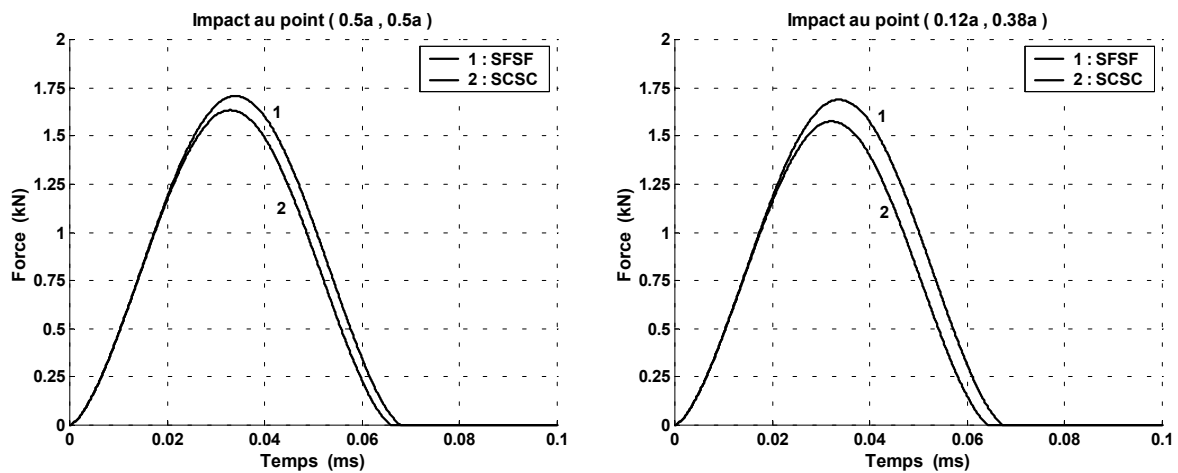


Figure V-4 : Influence des conditions aux limites sur la force d'impact

Nous avons représenté sur la figure V-4, les deux cas extrêmes de conditions aux limites, c'est à dire les cas de plaques la plus rigide et la plus flexible. Nous résumons dans le tableau V-6, l'influence des conditions aux limites sur la force d'impact en terme d'amplitude maximale et de durée de choc.

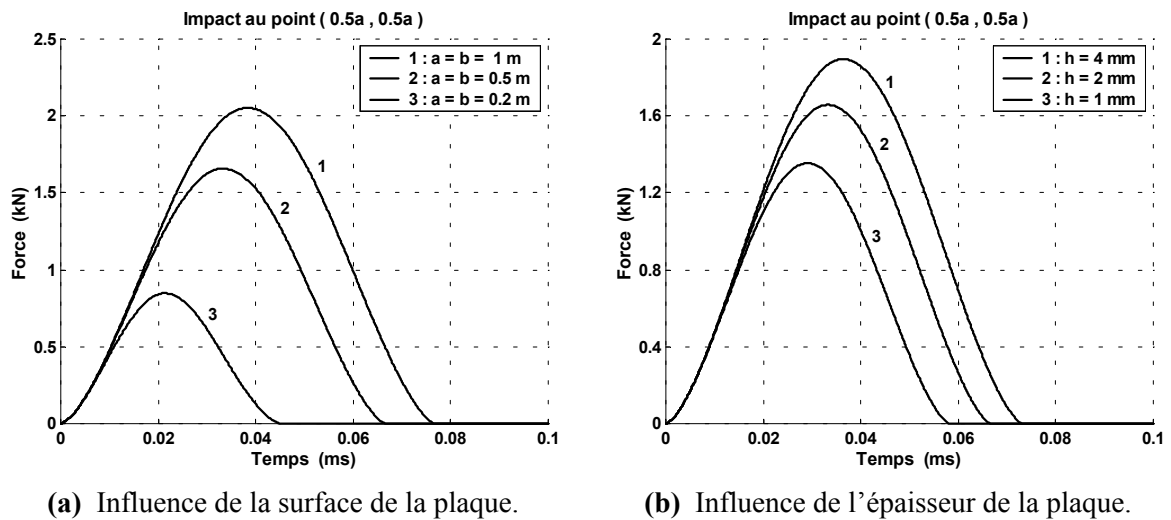
Conditions aux limites.	Impact au point ( 0.5a , 0.5a )		Impact au point ( 0.12a , 0.38a )	
	Amplitude Maximale ( N )	Durée de l'impact ( ms )	Amplitude maximale ( N )	Durée de l'impact ( ms )
ALAL	1706,0	$6.81 \times 10^{-2}$	1687.5	$6.76 \times 10^{-2}$
AAAL	1645.5	$6.65 \times 10^{-2}$	1623.6	$6.59 \times 10^{-2}$
AEAL	1634.5	$6.62 \times 10^{-2}$	1609.2	$6.55 \times 10^{-2}$
AAAA	1657.2	$6.68 \times 10^{-2}$	1598.5	$6.52 \times 10^{-2}$
AAAE	1643.2	$6.64 \times 10^{-2}$	1587.1	$6.49 \times 10^{-2}$
AEAE	1633.6	$6.62 \times 10^{-2}$	1575.9	$6.46 \times 10^{-2}$

Tableau V-6 : Influence des conditions aux limite sur l'amplitude maximale et la durée de l'impact

L'analyse de ces résultats permet d'affirmer que l'intensité maximale de la force d'impact et sa durée diminuent avec l'augmentation de la rigidité de la plaque.

#### V.4.1.3. Influence des dimensions de la plaque

Puisque les dimensions de la plaque, ont une influence considérable dans le calcul du schéma modal de cette dernière, nous analysons maintenant, leur influence sur l'évolution temporelle de la force d'impact, dans le cas d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords.



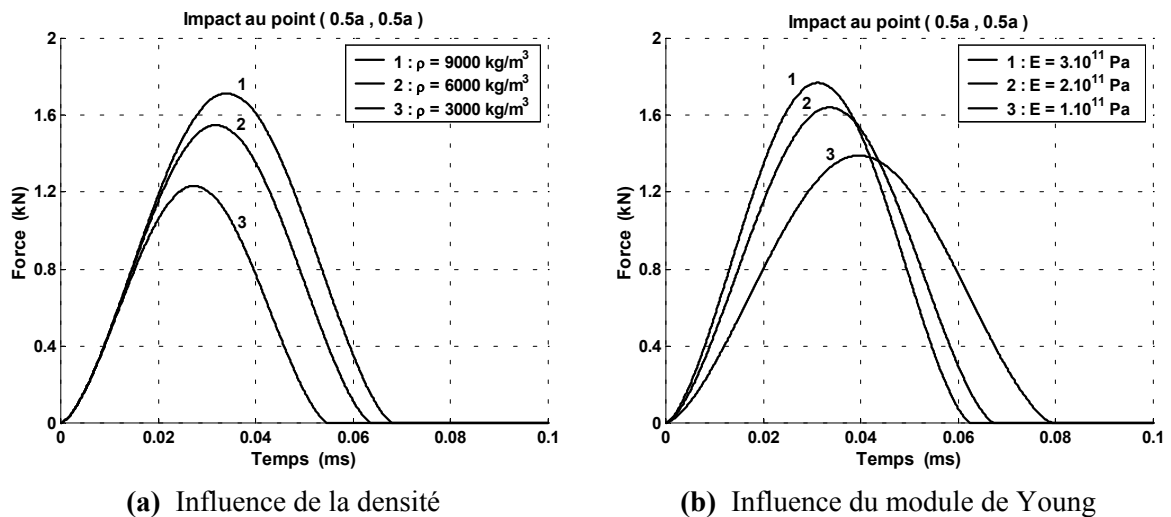
**Figure V-5 :** Influence des dimensions de la plaque sur la force d'impact

L'analyse de ces résultats montre que toute augmentation de la surface de la plaque ou de l'épaisseur entraîne une augmentation de la force d'impact tant en terme d'amplitude que de durée d'impact.

#### V.4.1.4. Influence du matériau de la plaque

Nous faisons varier maintenant les caractéristiques du matériau de la plaque, en l'occurrence sa densité et son module de Young. Les résultats obtenus sont illustrés par la figure V-6. L'analyse de ces derniers permet de dégager les tendances suivantes :

l'augmentation de la densité du matériau entraîne une augmentation de la force d'impact, aussi bien en terme d'amplitude qu'en terme de durée de l'impact, par contre l'augmentation du module de Young entraîne une augmentation de l'amplitude de la force d'impact, et une diminution de la durée de l'impact. Un tel comportement s'explique par le fait que l'augmentation du module de Young s'accompagne par une augmentation de la rigidité de la plaque tandis que l'augmentation de la densité s'accompagne par une augmentation de l'inertie de celle-ci.



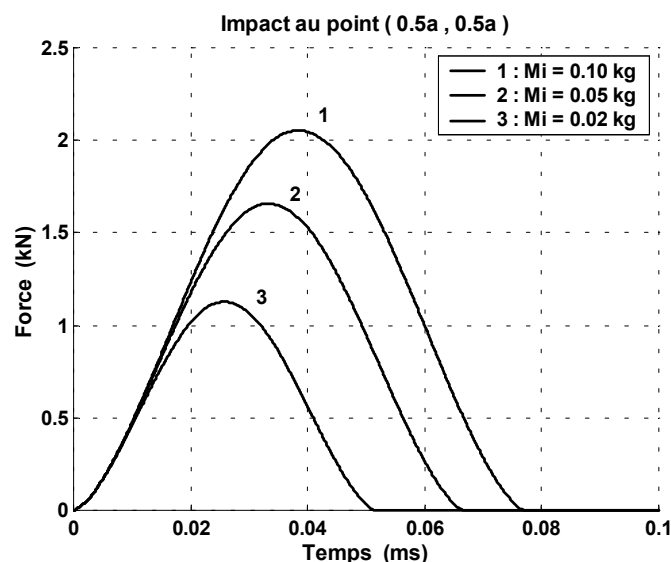
**Figure V-6 :** Influence du matériau de la plaque sur la force d'impact

#### V.4.2. Paramètres de l'impacteur

Après avoir analysé l'influence des principaux paramètres de la plaque, nous, nous intéressons à présent à l'analyse de l'influence des ceux liés à l'impacteur sur la force d'impact.

##### V.4.2.1. Influence de la masse de l'impacteur

Parmi les paramètres les plus importants dans l'analyse de la force d'impact, est sans conteste la masse de l'impacteur qui fait l'objet de l'analyse ci-dessous.



**Figure V-7 :** Influence de la masse de l'impacteur sur la force d'impact

On remarque, que l'augmentation de l'énergie d'impact à iso-vitesse provoque un changement dans l'histoire des chargements, relatif :

- ❖ à la valeur de la charge maximale,
- ❖ au temps correspondant au pic,
- ❖ à la durée de l'impact.

Ceci peut s'expliquer par l'augmentation de l'énergie cinétique qui fait croître en particulier l'énergie de flexion et de contact.

#### V.4.2.2. Influence du rayon de l'impacteur

L'augmentation du rayon de l'impacteur a pour effet d'augmenter l'amplitude de la force d'impact et une diminution de la durée de l'impact. Notons que pour le même matériau de l'impacteur l'augmentation du rayon de ce dernier entraîne une augmentation de la masse et une augmentation de la surface de contact lors de l'impact.

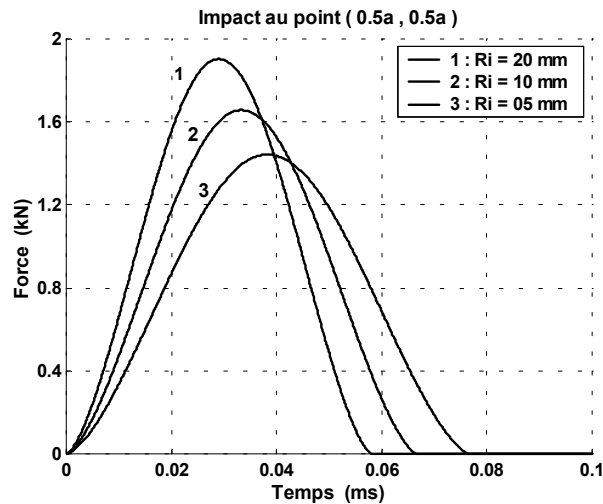


Figure V-8 : Influence du rayon de l'impacteur sur la force d'impact

#### V.4.2.3. Influence du module de Young de l'impacteur

Le module d'élasticité de l'impacteur a lui aussi une influence sur la force d'impact. En effet, le tracé de la force pour différentes valeurs de « E » nous a permis de constater que l'amplitude de la force augmente avec le module de Young, alors que la durée de l'impact diminue.

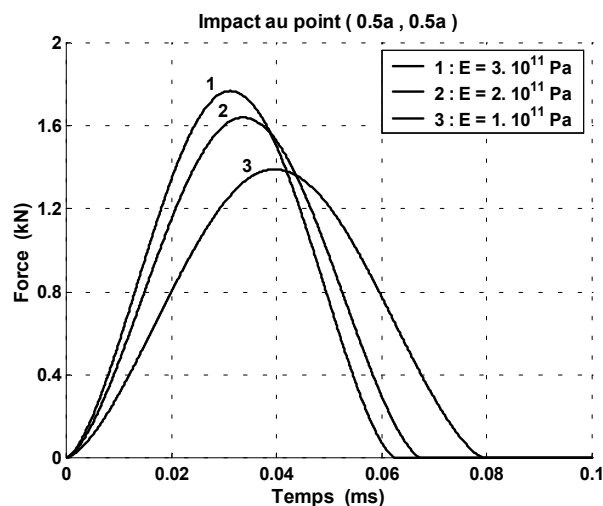


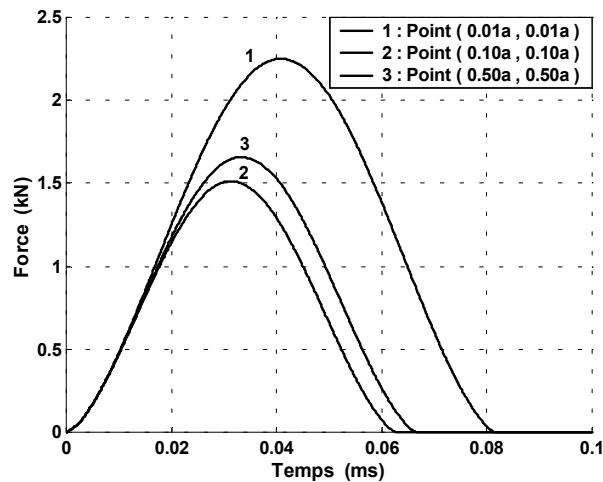
Figure V-9 : Influence du module de Young de l'impacteur sur la force d'impact

#### V.4.3. Paramètres de l'impact

Comme pour les paramètres de la plaque et ceux de l'impacteur, nous nous intéressons maintenant aux paramètres de l'impact qui se résume à la position du point d'impact et de la vitesse d'impact.

### V.4.3.1. Influence de la position du point d'impact

La figure V-10, représente l'évolution de la force d'impact au cours du temps pour trois positions distinctes du point d'impact.

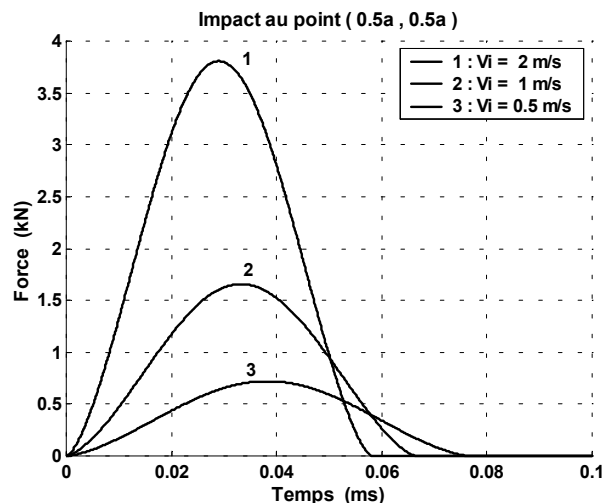


**Figure V-10 :** Influence de la position du point d'impact sur la force d'impact

Nous constatons dans la figure ci-dessus, que plus on s'approche des bords de la plaque et plus la force d'impact est plus importante en amplitude et en durée du choc. Ce résultat était prévisible, dans le sens où la plaque est plus rigide à l'approche des appuis.

### V.4.3.2. Influence de la vitesse incidente

De même que pour le paramètre : point d'impact, l'influence de la vitesse d'impact est étudiée. Cette influence est illustrée par les courbes de la figure V-11.



**Figure V-11 :** Influence de la vitesse incidente sur la force d'impact

Il faut remarquer que pour un même matériau, l'intensité de la force d'impact croît avec l'augmentation de la vitesse d'impact, par contre, la durée de choc diminue. Toute fois il est à signaler que pour les grandes vitesses d'impact la variation de la durée du choc reste sensiblement la même.

## V.5. Evolution temporelle de la vitesse du projectile

Dans le but de vérifier si l'impact produit reste globalement élastique ou pas, nous représentons par la suite l'évolution de la vitesse de l'impacteur lors de l'impact. Nous

remarquons que la vitesse incidente (début d'impact) et la vitesse de rebond (fin d'impact) sont différentes d'où on peut affirmer que le choc n'est pas parfaitement élastique.

### V.5.1. Influence des paramètres de la plaque sur la vitesse du projectile

#### V.5.1.1. Influence des dimensions de la plaque

Un autre paramètre très important à étudier est la variation de la vitesse de l'impacteur durant le choc. Celui-ci donne des informations concernant le type du choc élastique ou non élastique. Nous constatons que plus la surface de la plaque est importante, on s'approche d'un choc élastique avec une légère augmentation dans la durée de ce dernier, par contre, pour une épaisseur plus grande, l'augmentation de la durée devient importante tout en gardant la même tendance vers un choc élastique.

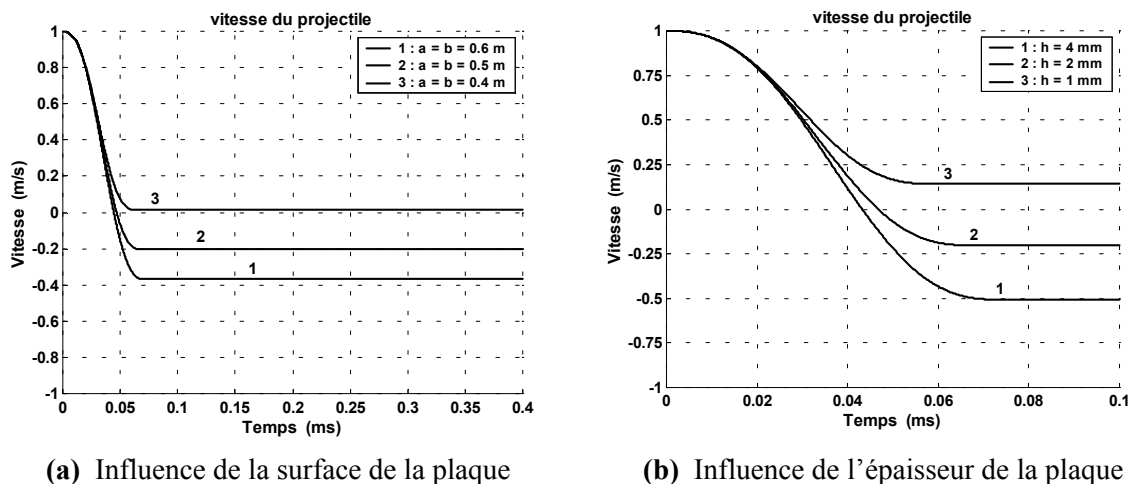


Figure V-12 : Influence des dimensions de la plaque sur la vitesse du projectile lors de l'impact

#### V.5.1.2. Influence du matériau de la plaque

Un autre paramètre influant sur le choc est la nature du matériau de la cible. La figure V-13 montre que pour un matériau plus dense, on tend vers un choc élastique, par contre, un module d'élasticité important aggrave la force et diminue la durée de contact, ce qui rend le choc plus dangereux sans influencer sur le type de choc (élastique ou non).

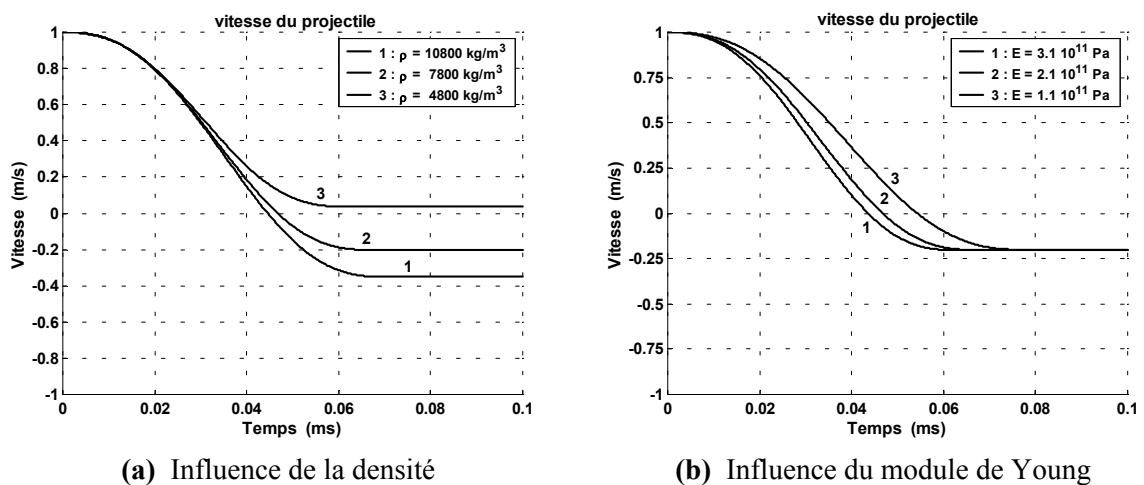


Figure V-13 : Influence du matériau de la plaque sur la vitesse du projectile lors de l'impact

### V.5.2. Influence des paramètres de l'impacteur

Nous, nous intéressons à présent à l'analyse de l'influence des principaux paramètres de l'impacteur sur l'évolution de la vitesse de l'impacteur.

#### V.5.2.1. Influence de la masse de l'impacteur

Comme il est illustré dans la figure V-14, l'augmentation de la masse de l'impacteur rend le choc moins élastique tout en augmentant la durée de ce dernier. Le rayon de l'impacteur a un effet inverse sur la durée sur la durée avec un même taux d'énergie transféré.

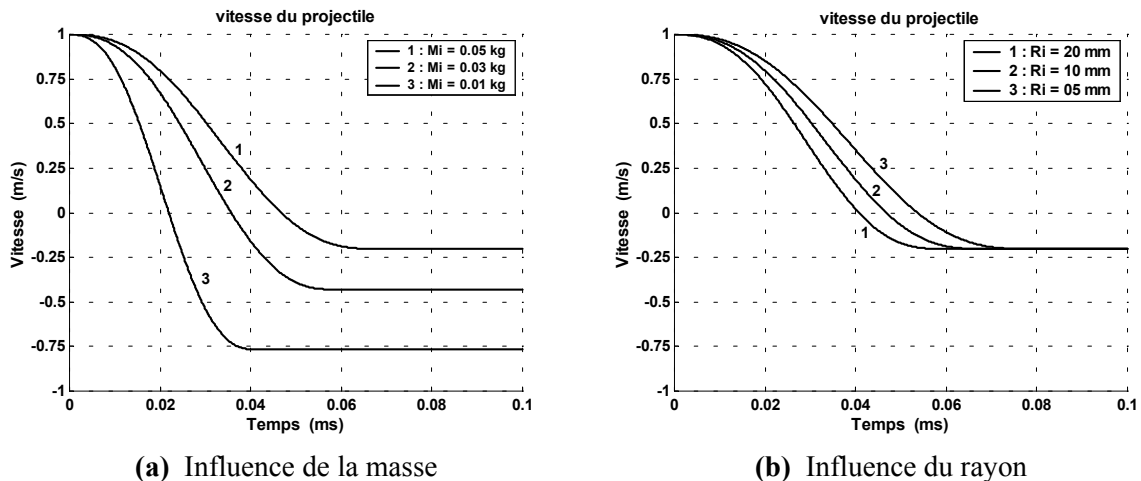


Figure V-14 : Influence des caractéristiques de l'impacteur sur sa vitesse lors de l'impact

#### V.5.2.2. Influence du module de Young de l'impacteur

Le module de Young de l'impacteur influe sur la durée mais n'influe pas sur le transfert d'énergie entre le projectile et la cible. La figure V-15 montre que plus on augmente le module d'élasticité du projectile, plus la durée sera minime. Pour la vitesse incidente, on observe le même effet.

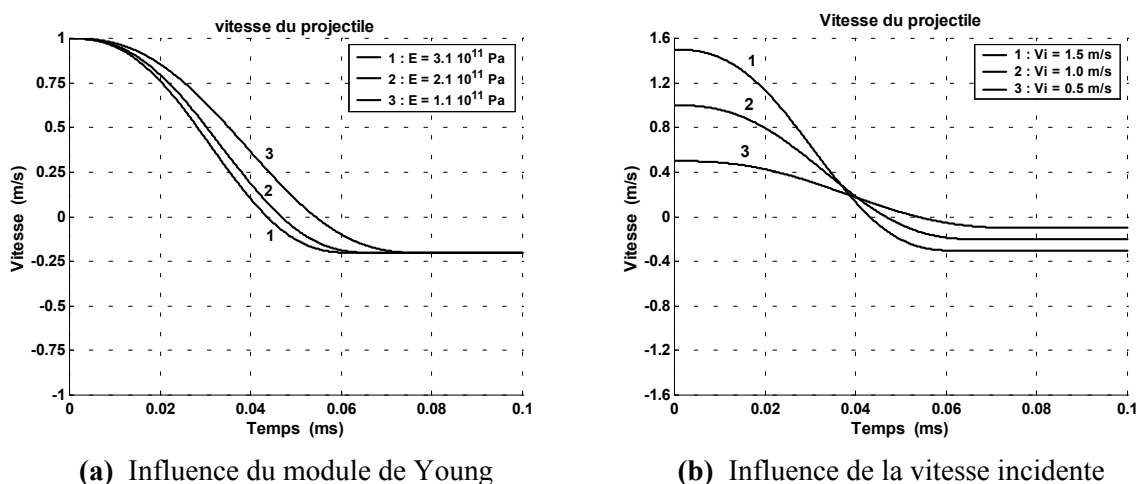
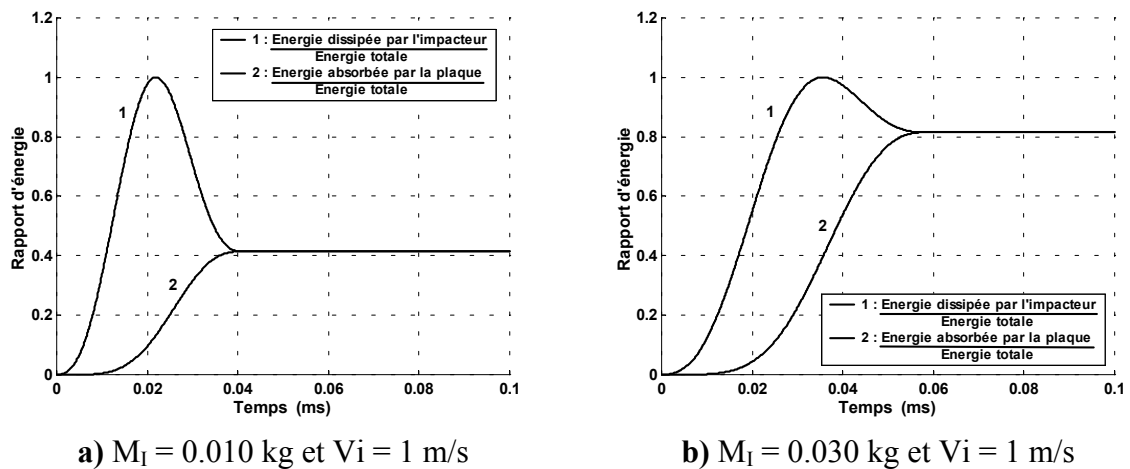


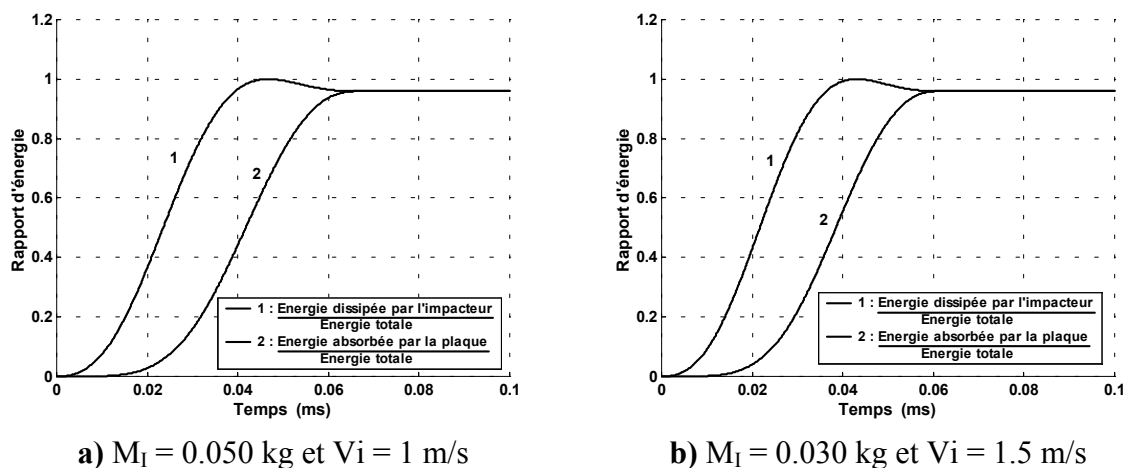
Figure V-15 : Influence des données de l'impacteur sur sa vitesse lors de l'impact

### V.6. Bilan énergétique lors de l'impact

L'énergie échangée entre l'impacteur et la plaque est également déterminée par la méthode proposée et est représentée sur la figure V-16, il en ressort que l'énergie absorbée par la déformation locale est considérable pendant l'impact.



**Figure V-16 :** Evolution temporelle des énergies échangées pendant l'impact pour différentes masses du projectile



**Figure V-17 :** Evolution temporelle des énergies échangées pendant l'impact pour différentes vitesses d'impact

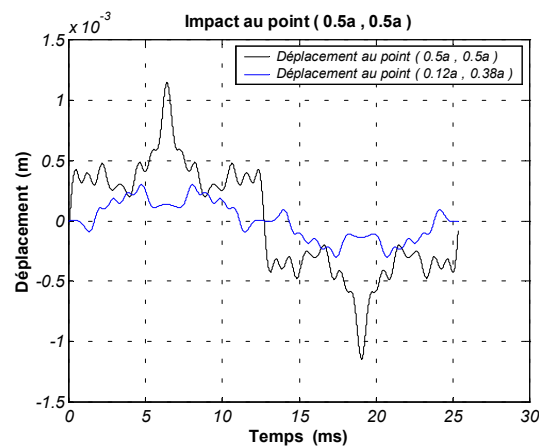
### V.7. Comportement dynamique de la plaque impactée

Nous nous intéressons maintenant aux déplacements en différents points de la plaque impactée ainsi que l'évolution de la répartition spatiale des déplacements au cours du temps. Notre attention sera particulièrement axée sur ce comportement pendant le choc.

### V.7.1. Evolution temporelle du déplacement en différents points de la plaque

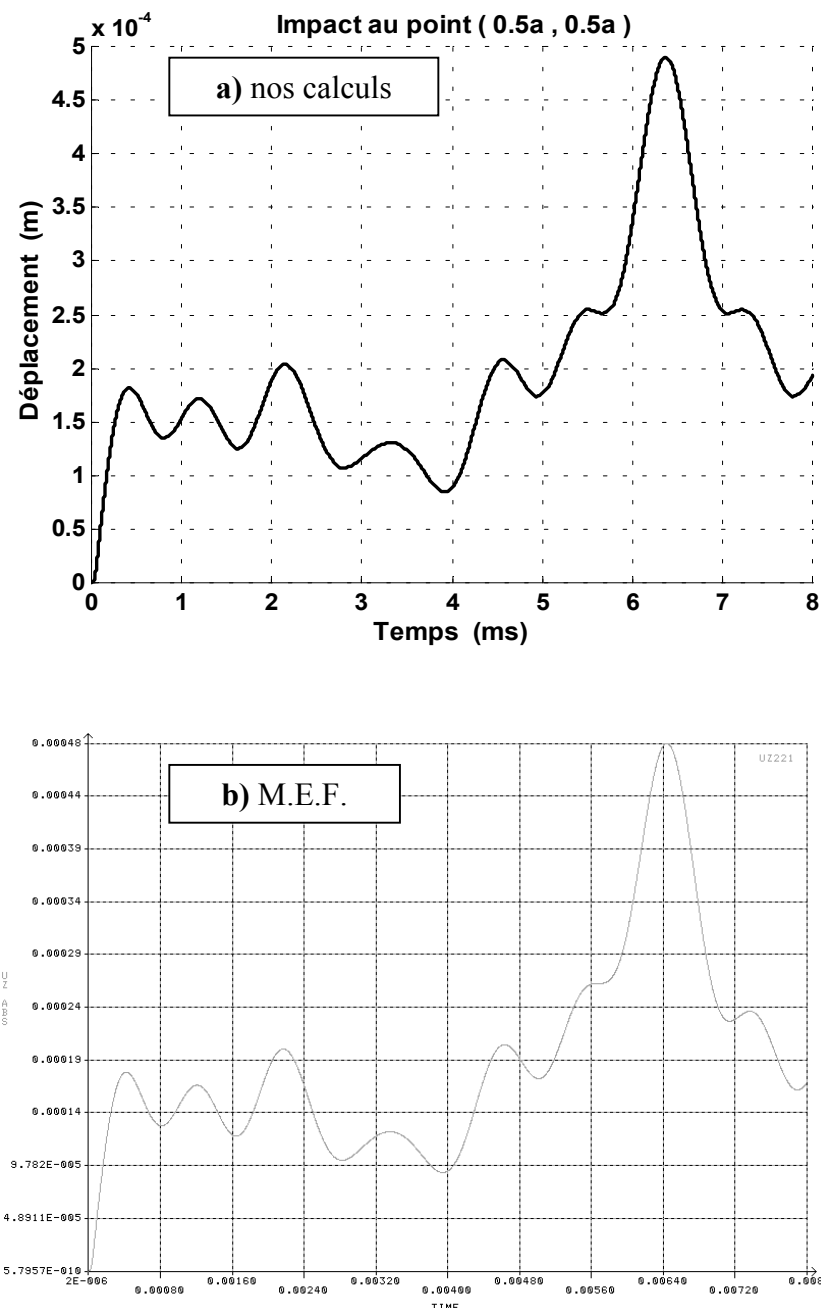
Pour déterminer la réponse de la plaque, on résout l'équation (II-73) par décomposition modale en utilisant le schéma de Newmark [28] avec :  $F(x, y, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0)$ .

Sur la figure V-18 sont représentés les déplacements en flexion au centre et en un point quelconque de la plaque sur une période de vibration de la plaque lors d'un impact central. Pour cela, nous avons pris une plaque de dimensions  $0.2 \times 0.2 \times 0.008 \text{ m}^3$  et un impacteur sphérique de rayon  $R_I = 10 \text{ mm}$ , d'une masse  $M_I = 0.0328 \text{ kg}$  et animée par une vitesse incidente  $V_I = 1 \text{ m/s}$ . Nous constatons que la réponse au centre est plus importante pour deux raisons : la plaque est moins rigide au centre, ajoutant à cela que la force d'impact est appliquée à ce point.



**Figure V-18 :** Déplacements en un point de la plaque impactée au centre

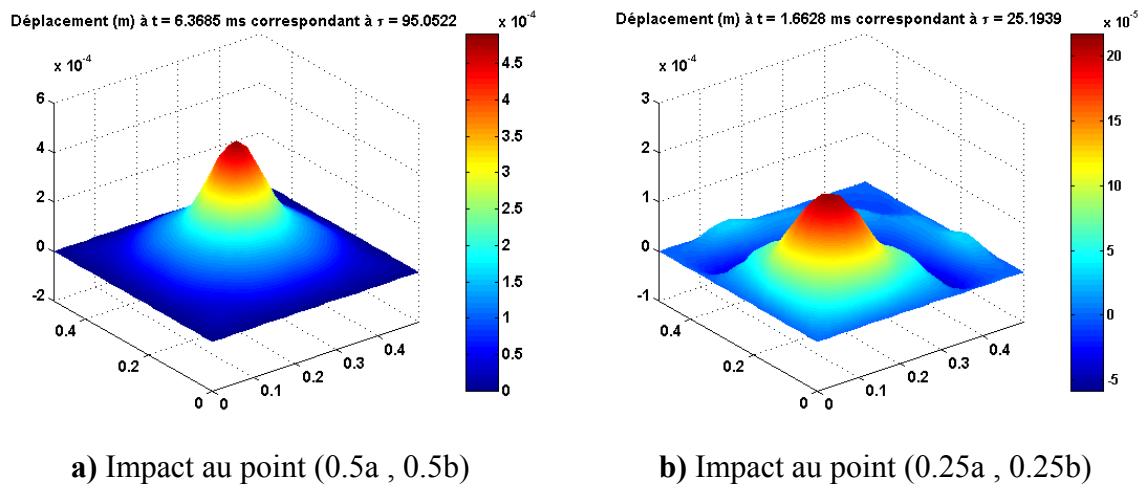
Une comparaison des déplacements au centre de la plaque pour un choc central a été faite avec un calcul par éléments finis (cosmos/M [24]). Les deux courbes sont clairement proches ce qui appuie bien notre approche.



**Figure V-19 :** Etude comparative du déplacement de la plaque au point d'application de l'impact

### V.7.2. Répartition spatiale des déplacements de la plaque

Le tracé de la répartition spatiale des déplacements nous a permis de constater que, pour un choc central, le déplacement maximale se trouve au centre de la plaque et à un instant égale à peu près au quart de la période du mode 1 de la plaque ce qui est évident. Tandis que, pour un choc situé à  $(0.25a, 0.25b)$ , le déplacement maximal est toujours au point d'impact et à un instant égale au quart de la période du mode  $(2, 2)$ . Donc on peut avancer que le déplacement maximale est apparaît au point d'impact et à un instant égale au quart de la période du mode excité (figure V-20).



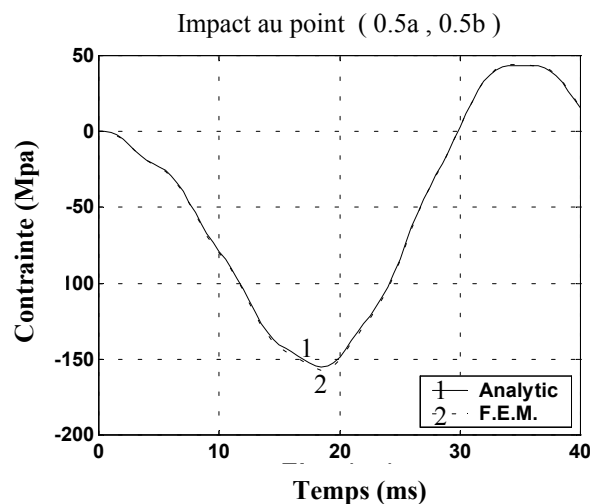
**Figure V-20 :** Répartition spatiale du déplacement de la plaque pour différents points d'impact

## V.8. Comportement mécanique de la plaque

Nous, nous intéressons maintenant aux contraintes, de la plaque impactée, en différents points ainsi que l'évolution de la répartition spatiale des contraintes au cours du temps. Notre intérêt sera particulièrement axé sur ce comportement pendant l'impact.

### V.8.1. Validation de la méthode utilisée

Afin de valider la méthode utilisée, il a été procédé, dans notre récent article [13], à la comparaison entre l'évolution de la contrainte déduite à partir de la méthode analytique proposée au chapitre (II) et celle déterminée par le code de calcul d'éléments finis en l'occurrence Cosmos/M. La comparaison est faite pour un impact dont la masse de l'impacteur est de 2 kg et la vitesse est de 2 m/s.



**Figure V-21 :** Étude comparative de la contrainte  $\sigma_x$  au point d'application de l'impact[13]

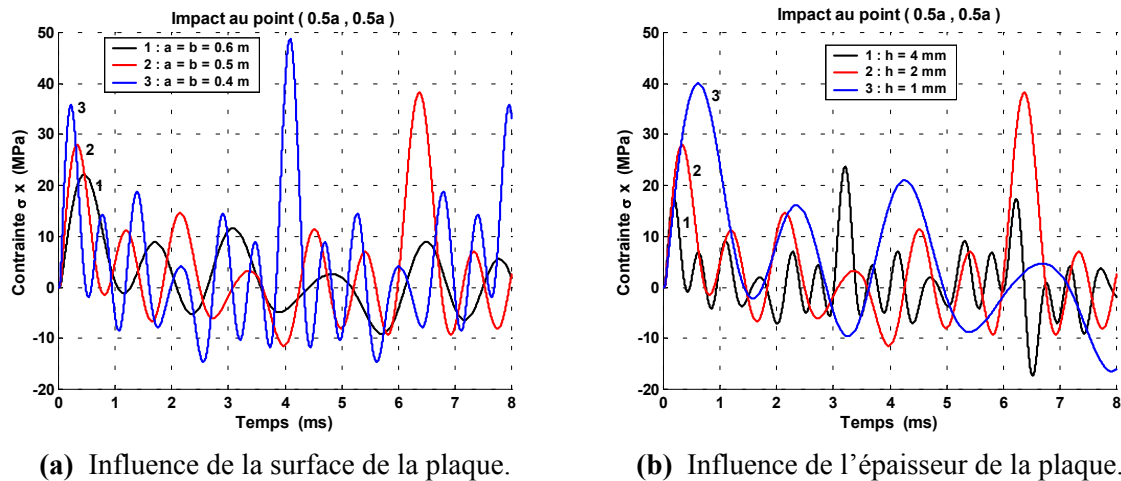
Cette comparaison est illustrée par les courbes de la figure V-21. Il faut remarquer que les résultats des deux méthodes concordent bien.

### V.8.2. Evolution temporelle des contraintes dans la plaque

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié l'évolution de la force d'impact sous la variation de différents paramètres d'impact. Ici sera étudiée l'évolution du champ de contraintes sous la variation de ces mêmes paramètres. Pour simplifier l'étude, seule l'évolution de la contrainte  $\sigma_x$  sera illustrée.

#### V.8.2.1. Influence des dimensions de la plaque

Les dimensions de la plaque ont une influence sur les fréquences propres, la force d'impact, la vitesse du projectile pendant le choc et par conséquent sur les contraintes engendrées dans la plaque. Pour illustrer cette influence, nous avons pris une plaque en acier ( $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ) simplement appuyée impactée en son centre par une bille en acier d'une masse  $M_I = 50 \text{ g}$ , d'un rayon  $R_I = 10 \text{ mm}$ , animée par une vitesse incidente  $V_I = 1 \text{ m/s}$ . Pour un premier cas, on a fixé l'épaisseur à  $h = 2 \text{ mm}$  et on a tracé l'évolution temporelle de la contrainte  $\sigma_x$  au centre de la plaque, où elle est la plus importante, pour différentes surfaces de la plaque. Nous avons constaté que, plus on diminue la surface de la plaque, la fréquence de la contrainte augmente ainsi que son amplitude. Pour un deuxième cas, on a fixé la surface ( $a = b = 0.5 \text{ m}$ ) et on a fait varier l'épaisseur. Cette fois-ci la fréquence de la contrainte augmente avec l'épaisseur et son amplitude diminue (figure V-22). Ces résultats affirment ce qu'avance la théorie puisque une plaque de dimensions réduites résiste moins.



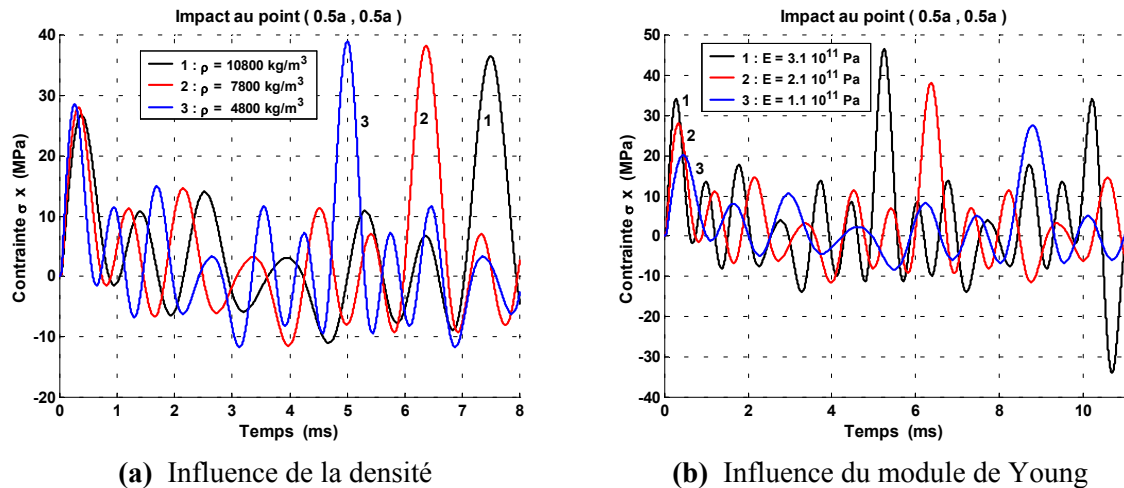
(a) Influence de la surface de la plaque.

(b) Influence de l'épaisseur de la plaque.

**Figure V-22 :** Influence des dimensions de la plaque sur la contrainte  $\sigma_x$  au point d'application de l'impact

#### V.8.2.2. Influence du matériau de la plaque

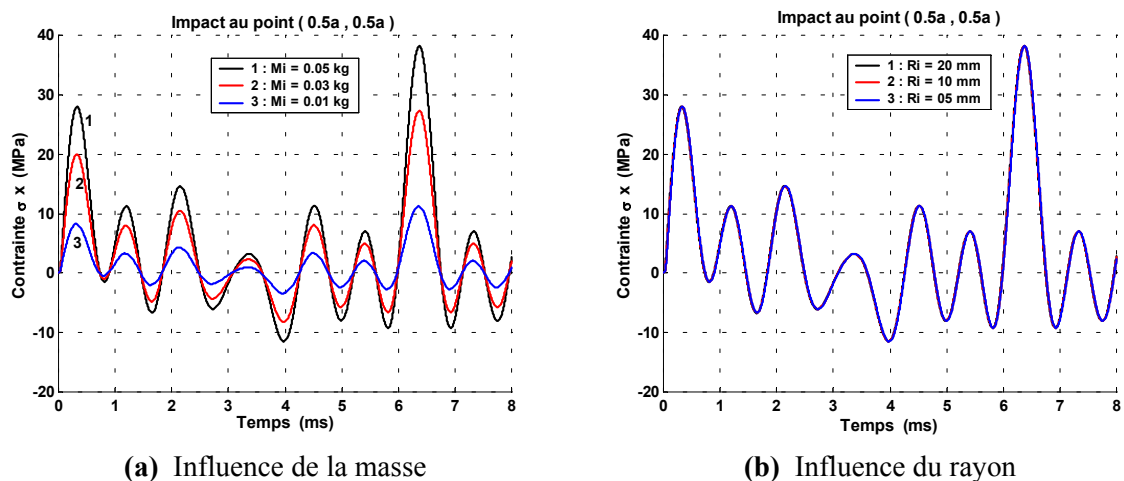
Le matériau de la plaque a lui aussi une influence sur le comportement de la plaque. Pour étudier son effet, nous avons fait varier la densité en premier lieu, ensuite le module d'élasticité. Les résultats obtenus sont montrés sur la figure V-23. Une diminution de la densité de la plaque fait augmenter la fréquence, avec une légère augmentation dans l'amplitude de la contrainte. Une augmentation du module d'élasticité fait augmenter la fréquence et l'amplitude de la contrainte.

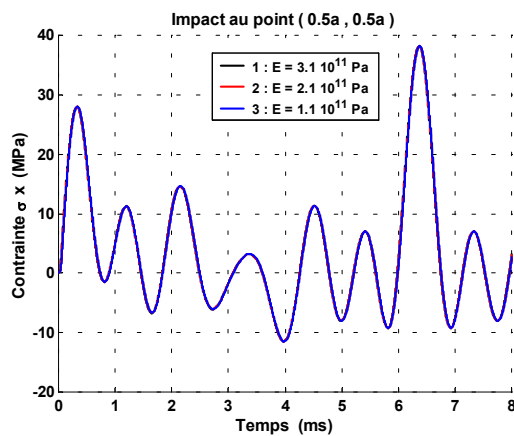


**Figure V-23 :** Influence du matériau de la plaque sur la contrainte  $\sigma_x$  au point d'application de l'impact

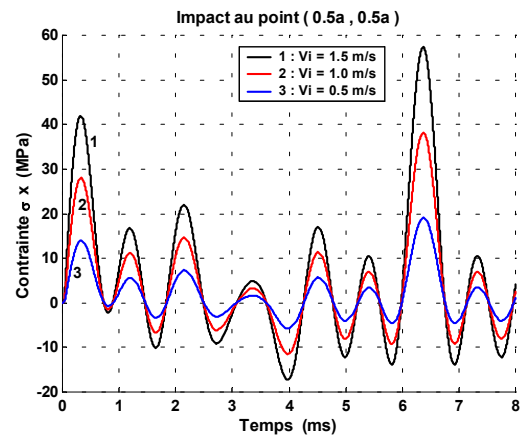
### V.8.2.3. Influence des paramètres de l'impacteur

Après avoir balayé l'influence des principaux paramètres de la plaque, nous nous intéressons à présent à l'analyse de l'influence des principaux paramètres de l'impacteur sur l'évolution de la contrainte. Nous avons repris la même plaque (  $0.5 \times 0.5 \times 0.002 \text{ m}^3$  ) et on a fait varier chaque fois un des paramètres de l'impacteur. Nous avons remarqué que ces paramètres n'influent pas sur la fréquence des contraintes. Nous avons également constaté que le rayon et le module de Young n'ont pas une influence sur l'amplitude de la contrainte, malgré la variation dans l'amplitude de la force d'impact, qui est compensée par la variation dans la durée, tandis que une augmentation de la masse ou de la vitesse de l'impacteur a pour effet d'augmenter l'amplitude de la contrainte.





(c) Influence du module de Young

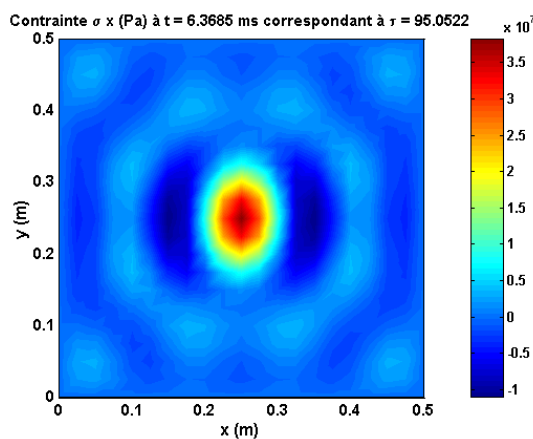


(d) Influence de la vitesse incidente

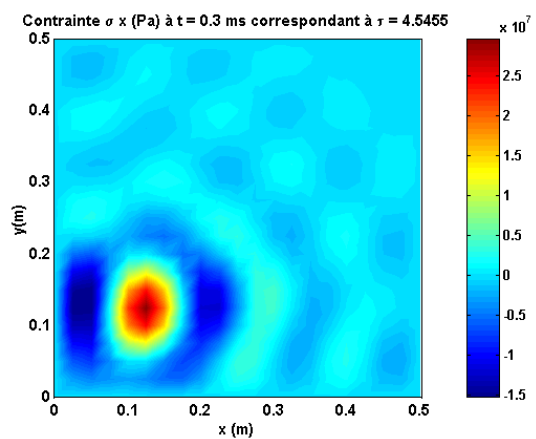
**Figure V-24 :** Influence des données de l'impacteur sur la contrainte  $\sigma_x$  au point d'application de l'impact

### V.8.3. Répartition spatiale des contraintes de la plaque

La répartition spatiale du champ de contraintes sur la surface de la plaque sollicitée par impact, est illustrée dans la figure V-25. Cette répartition est tracée à l'instant 't' correspondant à l'effort maximal sollicitant la plaque. Elle est tirée pour les 2 positions d'impact déjà choisis. Il est à signaler que la contrainte maximale est au point d'impact.



a) Impact au point ( 0.5a , 0.5b )



b) Impact au point ( 0.25a , 0.25b )

**Figure V-25 :** Répartition spatiale de la contrainte  $\sigma_x$  de la plaque pour différents points d'impact

### V.9. Conclusion

L'étude de l'influence des paramètres lors d'un choc nous a conduit aux conclusions suivantes :

- ◆ lors du calcul de la force d'impact, les modes d'ordre supérieur à un ne sont pas négligeables, quand la masse de la plaque est importante devant celle de l'impacteur,
- ◆ les conditions d'appuis de la plaque ont une influence notable sur la force d'impact,
- ◆ l'amplitude de la force d'impact augmente quand on augmente la surface, l'épaisseur, la densité et le module d'élasticité de la plaque, ainsi quand on augmente la masse, le rayon, le module de Young et la vitesse incidente de l'impacteur,
- ◆ le choc est moins élastique ( vitesse de rebond inférieure à la vitesse incidente ) si la surface, l'épaisseur ou la densité de la plaque sont petits, ou si la masse de l'impacteur est plus importante,
- ◆ les contraintes sollicitant la plaque sont plus importantes en diminuant la surface, l'épaisseur ou la densité de la plaque, en augmentant le module de Young de cette dernière ou bien en augmentant la masse ou la vitesse incidente de l'impacteur
- ◆ il est à noter aussi que le déplacement et la contrainte maximaux apparaissent au point d'impact.

## CONCLUSION GENERALE

Dans cette investigation, nous avons étudié une approche numérique pour la détermination de la force d'impact, la réponse dynamique et mécanique d'une plaque rectangulaire sujette à un choc par un projectile sphérique. L'équation de mouvement libre de la plaque est dérivée par l'utilisation du principe de la fonctionnelle de Hamilton. Le schéma modale de la plaque a été validé par la littérature (Blevins [25]) et par un code de calcul par éléments finis (Cosmos/M). Les équations gouvernant le mouvement du système projectile-cible sont déterminées en écrivant l'équilibre dynamique de chaque corps avec l'introduction de la force de contact. La résolution du système d'équations nous a permis de déterminer la force d'impact mais aussi d'étudier l'influence des paramètres de choc sur le comportement de la plaque. La force d'impact ainsi obtenue, a été comparée à celle obtenue par l'approche masse-ressort. Une parfaite concordance a été constatée pour un seul mode de vibration de la plaque. Une autre confrontation est faite avec la force donnée par la bibliographie pour 49 modes, elle a donnée des résultats très satisfaisants. On a étudié, par la suite, l'influence des paramètres sur la force. On a montré que le nombre de modes pris en compte lors du calcul de la force influe beaucoup sur l'amplitude de cette dernière. Les conditions aux limites ont aussi une influence sur la force. On a montré aussi que la force est plus importante en augmentant la surface, l'épaisseur, la densité et le module d'élasticité de la plaque, ainsi qu'en augmentant la masse, le rayon, le module d'élasticité et la vitesse incidente de l'impacteur. On a étudié aussi l'influence de ces mêmes paramètres sur l'élasticité de l'impact et donc sur l'énergie cédée à la plaque sous forme de vibrations. On a trouvé que le choc est moins élastique (vitesse de rebond inférieure à la vitesse incidente) en diminuant la surface, l'épaisseur ou la densité de la plaque ou bien en augmentant la masse de l'impacteur. Un autre résultat, est que le déplacement et la contrainte maximaux apparaissent au point d'impact. La variation temporelle de la contrainte est aussi influencée par les paramètres d'impact. La diminution de la surface, de l'épaisseur ou de la densité de la plaque a pour effet d'augmenter l'amplitude de la contrainte qui varie aussi dans le sens de la variation du module de Young de l'impacteur. La fréquence de la contrainte est également influencée par ces paramètres. Les paramètres de l'impacteur n'ont pas une influence notable sur la contrainte, mis à part la masse et la vitesse dont l'augmentation fait augmenter l'amplitude mais sans altérer la fréquence. Malgré que les contraintes tracées ici sont faibles par rapport à la limite d'élasticité de la plaque, cela n'empêche pas d'avoir des déformations plastiques et des endommagements locaux au point d'impact dus à la contrainte de contact et aux fortes contraintes de cisaillement dans cette zone. La déformation plastique apparaît quand la pénétration du projectile dans la plaque dépasse une valeur critique  $\alpha_c$  (voir annexe (IV)). Cette valeur critique de la pénétration est souvent atteinte avant que la contrainte globale dans la plaque n'atteigne la limite élastique. Par conséquent, il faut bien prendre en considération l'endommagement local lors de la conception des structures destinées à travailler aux chocs.

Nous avons quand même pu constater que beaucoup de paramètres rentrent en jeu dans la détermination de la force d'impact. A cet effet, il serait judicieux de faire une analyse de sensibilité des paramètres influant sur l'impact et d'en faire une optimisation des paramètres prépondérants en vue de satisfaire les exigences de la conception en terme de force d'impact et de déformation locale.

De même, il serait intéressant de faire une analyse assez fine afin de délimiter clairement les zones pour lesquelles le choc est supposé dommageant ou non.

Enfin nous ne saurions terminer ce travail sans souhaiter qu'une étude expérimentale des chocs que nous avons traité sera menée en vue de comparer les résultats obtenus par simulations.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Faik S., Witteman H.,** *Modeling of Impact Dynamics: A Literature Survey*, 2000 International ADAMS User Conference (2000).
- [2] **Goldsmith W.,** *Impact*, Edward Arnold Publishers, London, (1960).
- [3] **Brach R.M.,** *Mechanical Impact Dynamics : Rigid Body Collisions*, Jhon Wiley & Sons, New York, (1991).
- [4] **Zukas J.A., Nicholas T., Swift H.F., Gruszczuk L.B. and Curran D.R.,** *Impact Dynamics*, Krieger Publishing Company, Malabar, FL, (1992).
- [5] **Kozlov V.V. and Treshchëv D.V.B.,** *A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*, American Mathematical Society, (1991).
- [6] **Falcon E., Laroche C., Fauve S. and Coste C.,** *Behavior of One Elastic Ball Bouncing Repeatedly off the Ground*, The European Physical Journal B, Vol.3, pp 45-57, (1998).
- [7] **Ramirez R., Pösch T., Brilliantov N.V. and Schwager T.,** *Coefficient of Restitution of Colliding Viscoelastic Spheres*, Physical Review E, Vol.60, No.4, pp 4465-4472, (1999).
- [8] **Johnson K.L.,** *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, (1985).
- [9] **Timoshenko S.P. and Goodier J.N.,** *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw Hill, New York, (1951).
- [10] **Young W.C.,** *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6<sup>th</sup> edition, McGraw Hill, (1989).
- [11] **Rivin E.I.,** *Stiffness and Damping in Mechanical Design*, Marcel Dekker, New York, (1999).
- [12] **Stronge W.,** *Theoretical Coefficient of Restitution for Planar Impact of Rough Elasto-Plastic Bodies*, AMD-Vol.205, Impact, Waves and Fracture, ASME, Edited by R.C. Batra et al., (1995).
- [13] **Hachemane B., Neder M., Ahmed Benyahia A., Miloudi A. and Boukharouba T.,** *Study of the Dynamic Behaviour of Plates Subjected to Impact –A Numerical Approach–*, Proceeding of the 7<sup>th</sup> International Conference on Production Engineering, Design and Control, PEDAC'2001, Vol. II, pp 661-669, Alexandria, Egypt.
- [14] **Benmedakhène S.,** *Etude Phénoménologique du Comportement à l'Impact des Matériaux Composites*, Thèse de Doctorat soutenue en 1996 à l'Université de Technologie de Compiègne, France.
- [15] **Caprino G., Crivelli-Visconti I. and Di Ilio A.,** *Elastic Behaviour of Composite Structures Under Low Velocity Impact*, Composites, 15, 3, pp 213-234, (1984).
- [16] **Greszczuk L.B.,** *Damage in Composite Materials due to Low Velocity Impact*, Impact Dynamics, ZA Zukas and al. Wiley editions, New York, pp 55-94 (1982).
- [17] **Shivakumar K.N., Elber W. and Illg W.,** *Prediction of Impact Force and Duration due to Low Velocity Impact on Circular Composite Laminates*, Journal of Applied Mechanics, Vol.52, pp 674-680 (1985).
- [18] **Mizutani Y., Nishiwaki F., Takemoto M.,** *Dynamics of Impact Force and Impact-Induced Fracture of PMMA Plates by Lamb Wave Analysis*, Fracture of Polymers Composites and Adhesives, Esis publication 27, pp 407-421 (2000).

- [19] **Faik S.**, *Modeling of Impact Dynamics : A literature Survey*, 2000 International ADAMS User Conference, (2000).
- [20] **Yigit S.A., Christoforou P.A.**, *Effect of Flexibility in Transverse Impact Problems*, Proceedings of the 16<sup>th</sup> Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, DETC'97, ASME, Sacramento, California, (1997).
- [21] **Lu Chun, Lam K.Y.**, *Dynamic Response of Fully-Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact of a Mass*, Int. J. Solids Structures, Vol.35, No.11, Elsevier Science Ltd., pp 963-979, (1998).
- [22] **Dahlquist G., Bjorck A.**, *Numerical Methods*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, New Jersey, (1974).
- [23] **Courbon J.**, *Plaques Minces Elastiques*, Editions Eyrolles, (1980).
- [24] **Ugura A.C.**, *Stresses in Plates and Shells*, Editions McGraw Hill, (1981).
- [25] **Blevins R.D.**, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, R.E. Kriegen Publishing, (1984).
- [26] **Sjoblom P.**, *Simple Design Approach Against Low Velocity Impact Damage*, Proceedings of the 32<sup>nd</sup> SAMPE Symposium, Anaheim, CA, pp 30-52, (1987).
- [27] **Lal K.M.**, Residual Strength Assessment of Low Velocity Impact Damage of Graphite Epoxy Laminates, Journal Reinf. Plast. Comp., 2 pp 226-238.
- [28] **Bathe K.J. and Wilson E.L.**, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hill, inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
- [29] **Conway H.D., Fernhham K.A. and Ku T.C.**, *The Indentation of Transversely Isotropic Half-space by a Rigid Sphere*, Jour. Appl. Mech., 34, 2, pp 491-492, (1967).
- [30] **Moon F.C.**, National Aeronautics and Space Administration, NASA, CR-121110.
- [31] **Leissa A.W.**, *Vibrations of Plates*, NASA SP-160, (1969).
- [32] **Wu H.Y.T. and Chang F.K.**, *Transient Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Subjected to Transverse Impact*, Computers and Structures, 31 (3), pp 453-466, (1989).
- [33] **Karas K.**, *Platten Unter Seitlichem Stoss*, Ingenieur Archiv, 10, pp 237-250, (1939).
- [34] **Hertz, H.**, *On the Contact of Solid Elastic Bodies*, J. Mathematik, 92:156, (1881).
- [35] **Doutaut, V.**, *Etude Expérimentale et Simulations Numériques de Percussion à Clavier*, thèse de PhD, université du Maine, (1986).

## ANNEXE I

### SCHEMA DE NEWMARK

#### I. Généralités

Le schéma de Newmark [28] est construit à partir des développements de Taylor des vecteurs déplacements et vitesses à l'instant  $t_1$  :

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + dt \dot{X}_0 + \frac{dt^2}{2} \ddot{X}_0 + \frac{dt^3}{6} (6\alpha) \ddot{X}_0 + 0(dt^4) \\ \dot{X}_1 &= \dot{X}_0 + dt \ddot{X}_0 + \frac{dt^2}{2} (2\delta) \ddot{X}_0 + 0(dt^3) \end{aligned} \quad (\text{AI-1})$$

Où  $\alpha$  et  $\delta$  sont des facteurs de pondération dont le but est de stabiliser la solution. Si l'on suppose que la dérivée troisième par rapport à  $t$  du vecteur déplacement est :

$$\ddot{X}_0 = \frac{\dot{X}_1 - \dot{X}_0}{dt} \quad (\text{AI-2})$$

Les relations (AI-1) s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + dt \dot{X}_0 + dt^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{X}_0 + \alpha \ddot{X}_1 \right] \\ \dot{X}_1 &= \dot{X}_0 + dt \left[ (1 - \delta) \ddot{X}_0 + \delta \ddot{X}_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{AI-3})$$

(AI-3) représente la forme générale du développement de Newmark, que nous utiliserons sous son expression la plus connue appelée « loi trapézoïdale », telle que :

$$\alpha = 0.25 \quad , \quad \delta = 0.5$$

on en tire le nouveau système :

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 &= \frac{4}{dt^2} [X_1 - X_0 - dt \dot{X}_0] - \ddot{X}_0 \\ \dot{X}_1 &= \dot{X}_0 + \frac{dt}{2} [\ddot{X}_0 + \ddot{X}_1] \end{aligned} \quad (\text{AI-4})$$

#### II. Résolution de l'équation de mouvement

L'équation d'équilibre d'un mouvement vibratoire s'écrit à l'instant  $t_1$  :

$$M \ddot{X}_1 + C \dot{X}_1 + K X_1 = F(t) \quad (\text{AI-5})$$

M, C et K étant respectivement les matrices masse, amortissement et raideur du système en mouvement.

L'introduction de (AI-4) dans (AI-5) conduit à :

$$\left[\frac{4}{dt^2}M + \frac{2}{dt}C + K\right]X_1 = M\left[\ddot{X}_0 + \frac{4}{dt}\dot{X}_0 + \frac{4}{dt^2}X_0\right] + C\left[\dot{X}_0 + \frac{2}{dt}X_0\right] + F(t_1) \quad (\text{AI-6})$$

Une fois  $X_1$  déterminé,  $\dot{X}_1$  et  $\ddot{X}_1$  seront déterminée par l'équation (AI-4). La solution est alors conduite de manière itérative.

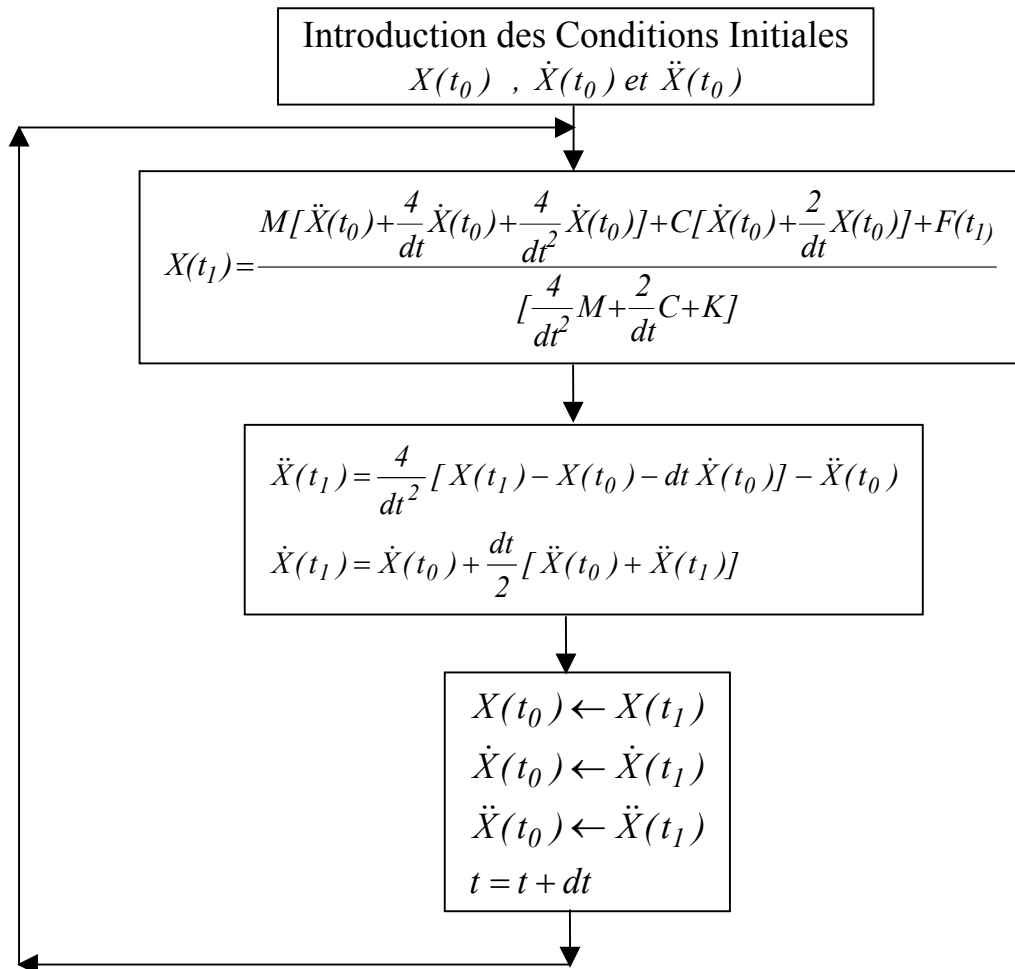


Figure AI-1 : Organigramme du schéma de résolution de Newmark

## ANNEXE II

RESOLUTION DES SYSTEMES NON LINEAIRES PAR  
LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON

La résolution du système d'équations, obtenu par le modèle masse-ressort, avec le schéma de Newmark conduit à son tour à un système d'équations non linéaires dont la résolution est faite par la méthode de Newton-Raphson.

La méthode de Newton-Raphson [22] pour le cas d'une seule variable consiste à résoudre l'équation :

$$f(x) = 0 \quad (\text{AII-1})$$

Cette méthode se base sur le développement de Taylor en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, on aura :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k) + 0((x_{k+1} - x_k)^2) \quad (\text{AII-2})$$

En égalisant  $f(x_{k+1})$  à zéro on trouve:

$$x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_k \quad (\text{AII-3})$$

La résolution sera conduite par un calcul itératif jusqu'à converger vers la solution exact ( avec une certaine tolérance ). La condition de convergence ( $f'(x_k) \neq 0$ ) et le choix de la valeur de départ qui doit être proche de la solution exact sont très importants.

Cette méthode est généralisable à « n » dimensions en prenant « x » comme vecteur de dimension « n »,  $f(x)$  devient un système de « n » équations à « n » inconnues

$$J_{(x_{k+1},h)} (x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = 0 \quad (\text{AII-4})$$

$f'(x)$  sera une matrice de dimension « n x n », qui est appelée matrice jacobienne, souvent notée par « J », avec comme éléments :

$$f'_{ij}(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (\text{AII-5})$$

Le système sera résolu si le déterminant de « J » est non nul. Pour parer à ce problème de singularité, on détermine « J » par la méthode décrite de Newton :

$$J_{(x_{k+1},h)} = [f(x + h_1) - f(x), \dots, f(x + h_n) - f(x)] H^{-1} \quad (\text{AII-6})$$

Où :  $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$

Pour avoir une convergence rapide, le choix de « h » doit être adéquat. Le choix évident est de prendre :

$$h = x_{k+1} - x_k \quad (\text{AII-7})$$

Ce choix est peu intéressant, alors Stiffensen propose de prendre :

$$h = f(x_k) \quad (\text{AII-8})$$

Ce choix est plus intéressant, il assure une convergence plus rapide.

## ANNEXE III

ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE  
PLAQUE ORTHOTROPE

L'équation régissant le mouvement de flexion d'une plaque, rectangulaire, orthotrope, de dimension (  $a \times b \times h$  ), sous l'effet d'une charge dynamique répartie sur sa surface, est donnée par [24] :

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = F(t, x, y) \quad (\text{AIII-1})$$

Où :  $D_x$  et  $D_y$  sont les rigidité à la flexion,  $H$  la rigidité au cisaillement avec :

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} , \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} , \quad H = D_{xy} + 2G_{xy} \quad (\text{AIII-2})$$

$$\text{et : } D_{xy} = \frac{E_x \nu_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{E_y \nu_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} , \quad G_{xy} = \frac{G h^3}{12}$$

$E_x$  ,  $E_y$  sont les modules d'élasticité dans les directions « x » et « y » respectivement.  $\nu_x$ ,  $\nu_y$  sont les coefficients de Poisson dans les directions « x » et « y » respectivement.  $G$  est le module de cisaillement.

Les valeurs de ces constantes sont obtenues par des tests de traction et de cisaillement sur le matériau, comme dans les matériaux isotropes.

Le déplacement  $w$ , la vitesse  $\dot{w}$  et l'accélération  $\ddot{w}$  s'écrivent, par séparation de variables de temps et d'espace, pour le cas d'une plaque simplement appuyée sous forme d'une série de Fourier :

$$w(t, x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\dot{w}(t, x, y) = \sum_m \sum_n \dot{a}_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (\text{AIII-3})$$

$$\ddot{w}(t, x, y) = \sum_m \sum_n \ddot{a}_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

La solution finale est définie si l'on connaît  $a_{mn}(t)$ ,  $\dot{a}_{mn}(t)$  et  $\ddot{a}_{mn}(t)$ . Ces fonctions de temps de chaque mode sont déterminées par résolution de l'équation suivante pour chaque mode  $m, n$  :

$$\rho h N_{mn} \ddot{a}_{mn}(t) + \left[ D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2H \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] N_{mn} a_{mn}(t) =$$

$$\iint_{00}^{ab} F(t, x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy \quad (\text{AIII-4})$$

Avec :

$$N_{mn} = \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy = \frac{ab}{4} \quad \text{est la norme}$$

$$M_{mn} = \rho h \frac{ab}{4} \quad \text{est la masse modale} \quad (\text{AIII-5})$$

$$K_{mn} = \left[ D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2H \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] \frac{ab}{4} \quad \text{est la raideur modale}$$

$$F_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^b F(t,x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$$

On peut alors calculer les pulsations propres de la plaque qui sont données par :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2H \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}{\rho h}} \quad (\text{AIII-6})$$

L'équation (AIII-4) s'écrit alors :

$$M_{mn} \ddot{a}_{mn}(t) + K_{mn} a_{mn}(t) = F_{mn}(t) \quad (\text{AIII-7})$$

Cette équation est équivalente à l'équation de mouvement d'un système à un degrés de liberté forcé dont la résolution se fait numériquement ou par convolution si la variation temporelle de la force est aléatoire.

Les moments agissants sur un élément de la plaque sont donnés par [24] :

$$\text{Autour de l'axe « y » : } M_x = -\left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{Autour de l'axe « x » : } M_y = -\left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{AIII-8})$$

$$\text{Dans la plan « x,y » : } M_{xy} = -2G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Les effort tranchant par :

$$\text{Sur le bord de normale « x » : } Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{AIII-9})$$

$$\text{Sur le bord de normale « y » : } Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

On peut déterminer également les contraintes agissants en tout point de la plaque par les relations suivantes [24] :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_x}{(1-\nu_x \nu_y)} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{(1-\nu_x \nu_y)} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{AIII-10}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{AIII-11}$$

## ANNEXE IV

### LA FORCE DE CONTACT

Le choc d'un projectile sur une cible donne naissance à une force agissant sur la cible mais aussi sur le projectile. Si la cible est initialement au repos et le projectile en mouvement, cette force tend à animer le corps en repos et à freiner le corps en mouvement.

Dans un choc réel, il y a toujours pénétration du projectile dans la cible. Cette pénétration est notée «  $\alpha$  ». La force d'impact est donnée par Hertz, pour un projectile sphérique pénétrant élastiquement un plan (plaque) :

$$P(t) = n\alpha^{3/2} \quad (\text{AIV-1})$$

Cette relation n'est valable que si on considère que le choc reste élastique au cours du temps et que le comportement d'un contact dynamique est le même qu'un contact statique.

$n$  : étant la résistance ou la rigidité à la pénétration.

Pour une bille isotrope pénétrant une plaque isotrope, «  $n$  » est donnée par :

$$n = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R_I}}{\pi (K_I + K_P)} \quad (\text{AIV-2})$$

Avec  $R_I$  est le rayon de l'indenteur.

$$K_I = \frac{1-\nu_I^2}{\pi E_I} \quad , \quad K_P = \frac{1-\nu_P^2}{\pi E_P} \quad (\text{AIV-3})$$

$E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Les indices I et P désignent respectivement l'indenteur et la plaque.

La valeur critique de la pénétration  $\alpha_c$  correspondant au début de la déformation plastique est donnée par[20] :

$$\alpha_c = \frac{0.68 Re'^2 \pi^2 R}{E^{*2}}$$

où  $Re'$  est la limite élastique du matériau le moins résistant des deux corps,  $R$  est le rayon du projectile et  $E^*$  est le module d'élasticité équivalent et qui est donné par :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_P^2}{E_P}$$

Dans le cas d'un choc entre un impacteur isotrope et d'une plaque orthotrope, l'expression de  $K_P$  n'a pas été déterminée vu la complexité de sa dérivation. Conway[29] donne une expression de  $K_P$  pour une plaque transversalement isotrope (isotrope dans le plan «  $x,y$  ») en appropriant une moyenne des propriétés ( $E_r$ ,  $\nu_r$ ) dans le plan de la plaque. L'indice  $r$  indiquera la direction radiale par rapport à l'empreinte, et  $z$  la direction suivant l'épaisseur.  $G$  est le module de cisaillement.

$$K_P = \frac{\sqrt{A_{22}} [(\sqrt{A_{11}A_{22}} + G_{zr})^2 - (A_{12} + G_{zr})^2]^{1/2}}{2\pi \sqrt{G_{zr}} (A_{11}A_{22} + A_{12}^2)} \quad (\text{AIV-4})$$

Avec :

$$A_{11} = E_z (1 - \nu_r) \beta \quad , \quad A_{22} = \frac{E_r (1 - \nu_{zr}^2 \xi) \beta}{1 - \nu_r} \quad , \quad A_{12} = E_r \nu_{zr} \beta \quad (\text{AIV-5})$$

$$\beta = \frac{I}{1 - \nu_r - 2\nu_{zr}^2 \xi} \quad , \quad \xi = \frac{E_r}{E_z}$$

Dans le cas d'une plaque orthotrope avec une anisotropie dans le plan, impactée avec une sphère rigide isotrope, Moon [30] montre que la surface de contact est elliptique.

Le paramètre  $K_P$  , pour un matériau orthotrope, peut être déterminé expérimentalement à travers un essai d'indentation statique. A partir des expressions (AIV-1), (AIV-2) et (AIV-3)  $K_P$  peut s'écrire :

$$K_P = \frac{4 (\alpha^3 R_I)^{1/2}}{3 \pi P} - \frac{1 - \nu_I}{\pi E_I} \quad (\text{AIV-6})$$

Durant l'essai, la mesure de P et de l'évolution de  $\alpha$  permet donc de déterminer  $K_P$  , connaissant les propriétés élastique de l'impacteur.