N° d'ordre : 17 /2010-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité : Géométrie

OMANI Malika

Sujet

Systèmes Différentiels Linéaires Singuliers Dans le Champ Complexe

Soutenue publiquement, le 10/ Mars /2010, devant le jury composé de:

Mme LAOUDI AINI,	Maître de Conférences, /A	à l'USTHB,	Présidente
M. REZAOUI Med-Salem,	Maître de Conférences, /A	à l' USTHB,	Directeur de mémoire
M. BETINA Kamel,	Professeur,	à l'USTHB,	Examinateur
M. BENCHERIF Farid,	Maître de Conférences, /A	à l'USTHB,	Examinateur

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma belle famille, à ma famille en particulier mes parents, mon mari et mon fils yannis. *.*

Je le dédie avec émotion à la mémoire de mes grand parents et de mon beau père.

Remerciements

En premier lieu, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir prêté main pour la réalisation de ce travail.

À Mr REZAOUI Med-Salem, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, j'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su me guider durant les travaux de recherches.

Mes sincères remerciements vont aussi à Melle LAOUDI Aini, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également à Mr BETINA Kamel, Professeur à l'U.S.T.H.B et à Mr BENCHERIF Farid, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B pour leur gratitude et leur dévouement qui ont permis d'honorer le jury.

Je ne saurais oublier tous ceux qui mon aidé de prés ou de loin .

RÉSUMÉ

L'objectif de ce mémoire, est de mettre en évidence les structures de décomposition des systèmes différentiels linéaires singuliers, puis décrire leur représentation de monodromie ainsi que le lien avec le problème de Riemann-Hilbert. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre p:

$$y^{(p)} + q_1(z)y^{(p-1)} + \cdots + q_n(z)y = 0 \tag{1}$$

On note par D l'ensemble $\{a_1, \cdots, a_n\}$ des points singuliers de (1) sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D consiste en les pôles de $q_1(z) \cdots q_p(z)$ et le point à l' ∞ .

On fixe un point z_0 dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus D$ et on se donne une représentation

$$\chi : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus D, z_0) \to GL(p;\mathbb{C}) \tag{2}$$

du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus D$.

Nous avons alors les résultats suivants:

Pour toute représentation irréductible (2) de dimension $p = 3$, le problème deRiemann-Hilbert est résoluble.

Pour tous points a_1, a_2, a_3 et toute représentation (2) de dimension $p = 3$, le problème de Riemann-Hilbert est résoluble.

Pour tout $n > 3$, toute suite de points $a_1, ..., a_n$ et tout $p \geqslant 3$, il existe une représentation (2) pour laquelle il n'y a pas de système différentiel fuchsien qui réalise cette représentation.

Table des matières

,

Introduction

L'objectif de cette thèse est de mettre en évidence les structures de décomposition des systèmes différentiels linéaires singuliers, puis décrire leurs représentation de monodromie ainsi que les liens avec le problème de Riemann-Hilbert.
1−Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre p.

$$y^{(p)} + q_1(z)y^{(p-1)} + \cdots + q_n(z)y = 0 \tag{E}$$

à coefficients rationnels $q_i(z)$ définis sur le plan complexe $\mathbb{C}$; il y a un groupe associé à (E) appelé le groupe de monodromie de l'équation (E). On note par D l'ensemble $\{a_1, \cdots, a_n\}$ des points singuliers de (E) sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D consiste en les pôles de $q_1(z) \cdots q_P(z)$ qui appartiennent au plan complexe et peut être aussi le point à l'infini "∞" (dans le cas où certains coefficients de l'équation réduite obtenue de (E) par la transformation $\xi = \dfrac{1}{z}$ ont un pôle en $\xi = 0$). On fixe un point z_0 dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus D$ et une base $(y_1, \cdots, y_n)$ dans l'espace des solutions de (E) dans un voisinage $\theta(z_0) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus D$. Les fonctions $y_1, \cdots, y_p$ admettent des prolongements analytiques le long de tout chemin ne rencontrant pas D. Soit β un lacet contenu dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus D$ ayant z_0. comme point initial et final Le prolongement analytique de $y_1, \cdots, y_p$ le long de β donne lieu à des fonctions $\widetilde{y_1}, \cdots, \widetilde{y_p}$ qui forment encore une base de l'espace des solutions de (E), et et vérifiant une relation de la forme :

$$(\widetilde{y_1}, \ldots, \widetilde{y_p})G = (y_1, \ldots, y_p)$$

La correspondance $\beta \to G$, dépendent uniquement de la classe d'homotopie $[\beta]$ du lacet β et définit l'homomorphisme

$$\chi : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0) \to GL(p;\mathbb{C}) \tag{1}$$

du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\ D$ dans le groupe $GL(p;\mathbb{C})$ des matrices complexes inversibles d'ordre p.

L'homomorphisme (1) est appelé la représentation monodromie ou monodromie de l'équation (E), et le groupe image $\mathcal{I}m(\chi)$ est appelé le groupe de monodromie de cette équation. Si on remplace le point z_0 par $z_0^{,}$ ou si on change la base $(y_1, \cdots, y_n)$, alors les matrices de monodromie G prennent la forme $S^{-1}GS$, où S est une matrice constante inversible. Ainsi, la monodromie de l'équation (E) est définie à cette équivalence près.

Par analogie, on peut définir la représentation de monodromie pour un système d'équations différentielles linéaires.

$$df = W \cdot f \tag{2}$$

où $W = (w_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, est la matrice d'un 1-forme différentielle holomorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D$.

Parmi les systèmes (2), il y a la classe des systèmes fuchsiens. Ces systèmes sont ceux dont les formes différentielles matricielles W possèdent des pôles simples dans D. On note par $\beta^i = res_{a_i}W$ le résidu de W aux point a_i. Si l'∞ n'est pas parmi les points singuliers du systèmes fuchsien (2), alors le système est de la forme

$$df = (\sum_{i=1}^{n} B^i \frac{dz}{z-a_i}) \cdot f \tag{3}$$

où

$$\sum_{i=1}^{n} B^i = 0 \tag{4}$$

Tous les points singuliers d'un système fuchsien (3) sont réguliers.

La classe des systèmes (2) à points singuliers réguliers contient la classe des systèmes fuchsiens comme un sous-ensemble propre.

Dans le cas de l'équation (E), la notion de système fuchsien est équivalente à celle d'un système à points singuliers réguliers. Si $a_i \in D$ est un point singulier régulier pour (E), alors on peut montrer que:

$$q_i(z) = \frac{r_i(z)}{(z-a_i)^j}; j = 1, ..., p \tag{5}$$

où $r_i(z)$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage de a_i Les équations (E) et (5) sont dites fuchsiennes en a_i .

2−Riemann fut le premier a mentionner le problème de la reconstruction d'une équation fuchsienne à partir de sa représentation de monodromie (1) dans une note à la fin des années 1850. En 1900, Hilbert l'inclut comme problème No XXI dans sa liste des "problèmes mathématiques". Il fut formulé comme suit [2]:
<Montrer qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de type fuchs ayant des points singuliers donnés et un groupe monodromie donné>.

Une tradition a été adoptée dans la littérature pour que le problème des systèmes fuchsiens soit appelé le problème de "Riemann-Hilbert". Par l'application d'une transformation conforme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on peut toujours se ramener au cas où l'∞ n'est pas parmi les points singuliers de (2). Ainsi, le problème de Riemann-Hilbert peut être formulé comme suit :

< Etant donné la représentation (1). Montrer qu'il y existe toujours un système (3), ou (4) ayant la monodromie (1) donnée>.
Le problème de Riemann-Hilbert a été étudié par plusieurs mathématiciens.(même dans le cas de plusieurs variables, dont nous ne faisons pas mention dans ce cadre). Il ya diverses réponses affirmatives sur la solubilité de ce problème (dans le cas des systèmes singuliers réguliers l'analogue de ce problème est souvent soluble).

Dans le chapitre 1, sont rappelés en bref aperçu, quelques resultats bien connus concernant ce problème. Dans le chapitre 2, nous présentons quelques résultats dus à Levelt [3], sur la construction des espaces des solutions des systèmes fuchsiens et des systèmes singuliers réguliers. Dans le chapitre 3, certains résultats de la théorie des systèmes réductibles sont énoncés et certains résultats techniques de base sont décrits et utilisés, sera intoduite, notamment, la notion de poids fuchsien de la représentation (1) et ses propriétés sont étudiées. Les théorèmes suivants constituent les principaux résultats de ce mémoire:

Théorème1 : Pour toute représentation irréductible (1) de dimension $p = 3$, le problème de Riemann-Hilbert est résoluble.

Théorème 2 : Pour tous points a_1, a_2, a_3 et toute représentation (1) de dimension $p = 3$, le problème de Riemann-Hilbert est résoluble .

Théorème 3 : Pour tous $n > 3$, et toute suite de points $a_1, \cdots, a_n$ et tout $p \geq 3$, il existe une représentation (1) pour laquelle il n y a pas de systèmes fuchsiens qui réalisent la représentation.

Chapitre 1

Rappels de certains résultats

1.1 La théorie de AHM Levelt

La théorie des exposants de Levelt joue un rôle important dans l'étude du problème de Riemann-Hilbert.

Le problème de la caractérisation locale des systèmes fuchsiens parmi les systèmes réguliers a été complètement résolut par A.H.M. Levelt (cf.[Le]). Pour résoudre se problème, Levelt a introduit la notion de valuation d'une solution du système (2) en un point singulier régulier a_i. Toute composante y_j d'une fonction vectorielle y solution de (2) s'exprime au voisinage d'un point singulier régulier comme une somme finie

$$y_j(z) = \sum_{k,l \in K} h_{k,l}(z)(z - a_i)^{\rho_i^k} \ln^{b_l}(z - a_i) \tag{6}$$

où les nombres complexes ρ_i^k vérifiet $0 \leq \operatorname{Re} \rho_i^k < 1$, les nombres b_l sont des entiers positifs et les $h_{k,l}$ sont des fonctions méromorphes en a_i. Levelt définit la valuation $\nu_i(y_j)$ de y_j au point a_i par $\nu_i(y_j) = \min_{k,l} val(h_{k,l})_{a_i}$où $val()_{a_i}$désigne la valuation usuelle d'une fonction méromorphe au point a_i; il appelle valuation de y au point a_i l'entier défini par $\nu_i(y) = \min_{1 \leq j \leq p} \nu_i(y_j)$. Levelt montre qu'il existe une matrice fondamentale Y de (2) dont les colonnes $e_1, \ldots.., e_p$ constituent une base de solutions de (2), et qui admet au voisinage de a_i la décomposition

$$y(z) = U(z)(z - a_i)^{A_i}(z - a_i)^{E_i} \tag{7}$$

où $U(z)$ est une matrice holomorphe en a_i et A_i la matrice diagonal $A_i = diag(v_i(e_1), ..., v_i(e_p))$ et où l'on a posé $E_i = \frac{1}{2i\pi} \ln G_i$ (G_i désigne la matrice de monodromie). La caractérisation locale s'exprime alors comme suit: Le système (2) singulier régulier au point a_i est fuchsien en ce point si seulement si la matrice $U(z)$ est holomorphe inversible en a_i.

Pour tout $j = 1, ..., p$ on désigne par ρ_i^j les valeurs propres de la matrice E_i les nombres complexes $B_i^j = \nu_i(y_j)+ \rho_i^j$ sont appelés exposants de système (2) au point a_i et jouent un rôle fondamental dans la caractérisation globale des systèmes fuchsiens parmi les systèmes réguliers. En effet, on associe à tout point singulier a_i le nombre $\delta_i = \sum_{j=1}^{p} B_i^j$. Levelt a montré que pour un système (2) dont les points singuliers $a_1, \cdots, a_n$ sont réguliers, la somme $\sum = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ est un nombre entier négatif, et qu'un tel système est fuchsien en $a_1, \cdots, a_n$ si seulement si $\sum = 0$ (cf.[Le]). On dit alors que ce système est fuchsien sur $P^1(\mathbb{C})$ (voir chapitre 1).

1.2 Historique du problème

Comment reconstruire une équation différentielle fuchsienne à partir de son groupe de monodromie ?

Historiquement, trois variantes de ce problème furent considérées: Pour les équations différentielles fuchsiennes scalaires; pour les systèmes différentiels ayant des singularités et pour les systèmes différentiels fuchsiens.

Pour les équations scalaires, il était bien connu au $XXI^{ème}$siècle que le problème n'admet pas de solution, une équation fuchsienne d'ordre p, des singularités $a_1, \cdots, a_n$, contient en effet moins de paramètres que l' ensemble des classes de conjugaison de la représentation χ. Ce résultat remonte à l'époque de poincaré (cf.[Po]). Ainsi, il est en général impossible de construire une équation fuchsienne sans l'apparition de points singuliers apparents.

On a longtemps pensé que le problème de Riemann-Hilberte avait été complètement résolu par plemelj en 1908 (cf [PI]. Or l'argument invoqué par Plemelj est insuffisant. En 1954 Gantmacher trouve bien un contre exemple à un résultat de Birkhoff de 1913 (qui reprenait et <clarifiait> la solution de plemelj) mais n'en tire aucune conséquence. C'est en 1978-79 seulememt, à Paris dans le cadre du séminaire < Mathématique et physique> de L'ENS (exposés publiés en 1983) qu'ArmandoTreibich corrige le résultat de Plemelj, en montrant que celui-ci tient la route à condition de supposer l'une des matrices de monodromie $M_1, ..., M_P$ diagonalisable, et il se trouve que plemelj obtenait, en fait une réponse positive dans le seul cas des systèmes réguliers.

Par ailleurs, en 1934, Lappo-Danilevskii avait donné une solution du problème lorsque toute les matrices M_j sont proche de l'identité, en 1990, A.A.Bolibrukh publia un important contre exemple au problème de Riemann-Hilbert pour une représentation de dimension 3 ayant 4 points singuliers, il donna, de plus, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une représentation de dimension 3 soit réalisable comme représentation de monodromie d'un système fuchien (cf.[A.Boli.]) pour résoudre ce problème. Bolibrukh développa considérablement la théorie introduite par Levelt et utilisa la méthode des transformations de jauge méromorphes consistant à passer d'un système (2) ayant des singularités régulieres à un système différentiel fuchsien de fonction inconnue:

$$g = \Gamma(z) \cdot y \tag{8}$$

où $\Gamma(z)$ est une matrice méromorphe en les singularités de (2). En 1992, à l'aide de la théorie des fibrés vectoriels, Bolibrukh donna une réponse positive au problème de Riemann-Hilbert dans le cas des représentation irréductibles (cf.[A.Boli.1]) (résultat également indépendamment obtenu par V.P.Kos]).

1.3 Critère pour les systèmes à points singuliers réguliers

Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dX}{dz} = P(z) \cdot X \tag{1.1}$$

En désignant par X une matrice intégrale : c'est-à-dire une matrice dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes, on a la formule de jacobi

$$|X| = c\exp(\int_{z_0}^{Z} trPd\zeta) \tag{1.2}$$

on suppose ici que z_0 et tous les points du contour le long du quel $\int_{z_0}^{z}$ est calculée sont des points réguliers de la fonction analytique uniforme

$$trP(z) = P_{11}(z) + P_{22}(z) + \cdots + P_{nn}(z) \tag{1.3}$$

Comme on est dans le cas complexe alors pour une fonction $P(z)$ uniforme, la matrice intégrale $X(z)$ peut parfaitement être une fonction multiforme de z

Comme exemple, considérons les systèmes de cauchy

$$\frac{dX}{dz} = \frac{U}{z-a}X \tag{1.4}$$

où U une matrice constante

L'une des solutions de ce système, comme dans le cas d'un argument réel est la matrice intégrale

$$X = \exp ULn(z-a) = (z-a)^U \tag{1.5}$$

Pour le domaine G. Prenons la totalité du plan Z, à l'exception du point $z = a$.

Tous les points de ce domaine sont des points réguliers de la matrice des coefficients

$$P(z) = \frac{U}{z-a} \tag{1.6}$$

Si $U \neq 0$, $z = a$ est un point singulier (un pôle d'ordre 1) de la fonction (1.6) entourant exactement une fois la singularité a dans la direction positive, un élément de la matrice intégrale (1.5) prend une nouvelle valeur qui est obtenue, à partir de l'ancienne par la multiplication à droite par la matrice constante

$$V = \exp 2i\pi U$$

Dans le cas général d'un système (1.1) nous voyons par le même raisonnement que pour un argument réel, que les solutions uniformes X et $\widetilde{X}$ sont toujours reliées, dans une partie du domaine G, par la formule

$$X = \widetilde{X}C;$$

où C est une matrice constante, la formule reste vraie pour tout prolongement analytique des fonctions $X\ (z)$ et $\widetilde{X}(z)$ dans G.

Pour plus de détails considérons le système différentiel à coefficients rationnels de la forme

$$\frac{dX}{dz} = \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{z - a_j} X \tag{1.7}$$

où U_j sont des matrices constantes d'ordre n, a_j des nombres complexes.

Pour la solution normalisée Ω_b^z, Lappo-danilevsky donne une expression explicite en fonction des matrices de définition $U_1, U_2\ , ..., U_m$ de (1.7) ; introduisons des fonctions analytiques particulières, les fonctions hyperlogarithmiques définies par les relations récurrentes suivantes :

$$L_b(z; a_{j_1}) = \int_b^z \frac{dz}{z - a_{j_1}}$$

$$L_b(z; a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{v_v}}) = \int_b^z \frac{L_b(z; , a_{j_2}, ..., a_{j_v})}{z - a_{j_1}} dz$$

Alors la solution normalisée Ω_b^z sous la forme de la série

$$\Omega_b^z = E + \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{j_1,...,j_{v_v}}^{(1....m)} L_b(z; a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{v_v}}) U_{j_1} U_{j_2} ..... U_{j_V} \tag{1.8}$$

où ($j_1, j_2, ..., j_v = 1, 2, ..., m$; $v = 1, 2, 3, ...$)

Si dans (1.8), l'argument z parcourt une seule fois le tour du point a_j dans le sens positif, le long d'un contour qui ne contient pas d'autre point a_j (pour $i \neq j$), nous obtenons l'expression de la substitution intégrale v_j correspondant au point $z = a_j$

$$V_j = E + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_{v_v}}^{(1\dots.m)} P_j(b; a_{j_1}, a_{j_2}, \dots.., a_{j_{v_v}}) U_{j_1} U_{j_2} \dots.. U_{j_v} \tag{1.9}$$

$$(j = 1, 2, \dots.., m)$$

$$P_j(b; a_{j_1}) = \int_{(a_j)} \frac{dz}{z - a_{j_1}};$$

$$P_j(b; a_{j_1}, a_{j_2}, \dots.., a_{j_{v_v}}) = \int_{(a_j)} \frac{L_b(z; , a_{j_2}, \dots.., a_{j_v})}{z - a_{j_1}} dz;$$

.

La série (1.9) est une fonction entière de $U_{j_1} U_{j_2} \dots.. U_{j_m}$.

Dans la suite de ce chapitre nous rappelons des résultats sur les systèmes d'équations différentielles à points singuliers et fuchsiens dans le plan complexe.
Considérons un système différentiel linéaire

$$Y'(z) = A(z) Y(z) \tag{A}$$

où $A(z)\ dz$ une forme différentielle méromorphe sur la sphère de Riemann à valeurs dans $M_p(\mathbb{C})$; admettant comme simple singularités des pôles simples.
Autrement dit, on a

$$A(z) = \sum_{a_i \in D} \frac{A_{a_i}}{z - a_i}$$

où $D = \{a_1, \dots, a_n\}$ est l'ensemble des points singuliers de (A), et les A_α des matrices complexes. Nous supposons toujours que le système n'a pas de singularité à l'infini, ce qui veut dire $\sum_{a_i \in D} A_{a_i} = 0$.

1.4 Rappels et Définitions:

Définition 1.4.1 *: Le système (A) est dit singulier régulier au point $a_i \in \mathbb{C}$ si pour toute solution $f(y)$ de (A) il existe un réel ν tel que*

$\lim\limits_{\substack{\pi(y)\to 0\\ y\in K}} (y-a_i)^\nu f(y) = 0$

où π désigne la projection du revêtement universel $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D$, et K, est un ouvert tel que $\pi(K)$ est contenu dans un secteur ouvert de sommet a_i et d'angle $< 2\pi$.

Le système (A) est dit fuchsien en $a_i \in \mathbb{C}$, si la matrice $A(z)$ a un pôle d'ordre un en a_i , le système (A) est dit fuchsien sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, s'il est fuchsien en tous les points a_i ; $i = 1....n$.

1.4.1 Représentation de monodromie

Le système (A) admet des solutions multiformes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D$ "fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}^p$" qui forment un espace vectoriel de dimension p sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D}$

$$(\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D}, y_0) \xrightarrow{\Pi} (\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0) \tag{1.1}$$

Sur lequel le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, \bigstar)$ opère, ainsi nous pouvons définir une action $g^\bigstar$ d'un élément g de $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0)$ sur une fonction f de X par

$$g^\bigstar(f) = f \circ g^{-1} \tag{1.2}$$

Si $(e) = (e_1(y), ..., e_p(y))$ est une base sur X, alors d'après (1.2) on a

$$(g^\bigstar T)(y) = T(y^{-1}g) = T(y)\chi(g)$$

où $T(y)$ est la matrice fondamentale de X construite de (e) et $\chi(g)$ matrice inversible appartenant à $GL(p, \mathbb{C})$. (Ceci veut die, en particulier que l'espace des solutions X est invariant sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0)$ donné par (1.2) ainsi on peut définir l'homomorphisme

$$\chi : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$$

du groupe fondamental $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D$ dans le groupe libre engendré par $\gamma_1, ..., \gamma_n$, pour tout $i = 1, ..., n$, où γ_i désigne la classe d'homotopie d'un lacet de point de base z_0 tournant une fois autour de la singularité a_i; vérifiant la relation $\prod_{i=1}^{p} \gamma_i = e$.
L'homomorphisme (1) est appelé la représentation de monodromie de cette équation.

Remarque 1.4.1 *: si z_0 est remplacé par z_0' où la base $(y_1, \cdots, y_n)$ est changée, alors la matrice de monodromie devient $S^{-1}GS$ où S est une matrice inversible.*

Soient θ_i les voisinages simplement connexe deux à deux disjoints des points a_i dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et soient

$$(\widetilde{\theta}_i, y_i^0) \xrightarrow{\pi_I} (\theta_i \backslash\ a_i, z_i^o)$$

les recouvrements universels correspondants. Soit δ_i un lacet dans $\theta_i \backslash\ a_i$ passant une fois autour de la singularité a_i et ayant z_i^o comme origine et extemité.
On fixe les chemins γ_i joignant z_0 à z_i^0contenus dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\ D$ de telle sorte que le lacet $\prod_{i=1}^{n}(\gamma_i \delta_i \gamma_i^{-1})$ soit homotope au chemin constant.
On note la classe des lacets $\gamma_i \delta_i \gamma_i^{-1}$par g_i , ainsi $\widetilde{\theta}_i \subset \widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D}$ et

$$\gamma_i^{\bigstar} : \pi_1(\theta_i \backslash\ a_i, z_i^o) \to \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0) \tag{1.3}$$

De cette manière on aura construit la $i^{ème}$ représentation locale de la représentation (1)

$$\chi_i : \pi_i(\theta_i \backslash\ a_i, z_i^o) \to GL(p, \mathbb{C}) \tag{1.4}$$

où $\chi_i = \chi \circ \gamma_i^{\bigstar}$
(1.3) nous permet de définir l'action de l'élément $g_i \in \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0)$ décrit ci-dessus sur toute fonction définie sur $\widetilde{\theta}_i$ en particulier sur la fonction $\ln(y - a_i)$ définie comme suite

$$\ln(y - a_i) = \int_{\gamma} \frac{d(z - a_i)}{z - a_i}$$

où γ est une lacet dans $\theta_i \backslash\ a_i$ joignant z_i^oet $\Pi_i(y)$ tel que $y_i^0\gamma = y$. Il vient de (1.1) et (1.2) que

$$g^{\star}Ln(y-a_i) = \ln(y-a_i) + 2i\pi.$$

A partir de maintenant, $(y-a_i)^{E_i}$ désignera la fonction

$$(y-a_i)^{E_i} = \exp(E_i \ln(y-a_i))$$

définie sur $\widetilde{\theta}_i$.

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0)$ pourrait être considéré comme un groupe à n générateurs $g_1, ..., g_n$ satisfaisant l'identité $g_1...g_n = e$. On désigne par G_i et E_i les matrices

$$G_i = H(g_i), E_i = \frac{1}{2\pi i}\ln G_i,\ 0 \leq \operatorname{Re}\rho_i^j < 1. \tag{A'}$$

où ρ_i^j sont les valeurs propres de E_i.

Exemple 1.4.1

On se donne l'équation différentielle

$$Y'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)Y(z)$$

Une solution est $Y(z) = (\frac{z-1}{z+1})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ sur tout domaine simplement connexe de $S^2\backslash\{-1,1\}$ (en effet il n'y a pas de pôle à l'∞).Où l'on a une détermination de $z \to z^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Nous obtenons donc une fonction multiforme sur $S^2\backslash\{-1,1\}$.

Maintenant, considérons le lacet :$\varphi(t) = 1 + \exp 2i\pi t$: En chaque point de ce lacet, il existe une solution locale (par exemple, ici une série entière de rayon 1). On prolonge continument de proche en proche la solution en suivant φ. L'argument de $y\circ\varphi(z)$ vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}(Arg(\exp 2i\pi t) - Arg(\exp 2i\pi + 2))$ qui passe de $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ à$\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$ lorsque t varie de 0 à 1. La solution locale de notre équation différentielle est donc multipliée par $\exp\frac{2i\pi}{\sqrt{2}}$ lorsqu'on a suivi le lacet φ. Cette multiplication par une constante devient une multiplication par une matrice inversible associée à φ dans le cas d'un système différentiel, on a donc une représentation de π_1 associée au système différentiel.

Remarque 1.4.2 *Notre fonction est en fait définie naturellement sur le revêtement universel de $S^2\backslash\{-1,1\}$, c'est ce qu'on nomme fonction multiforme.*

1.4.2 Caractérisation locale des systèmes fuchsiens parmi les systèmes réguliers

Dans la suite on se réfère au travail de A-H-M Levelt (cf. [Le]) sur ce problème.

Remarque 1.4.3 *La classe des systèmes à point singuliers réguliers contient la classe des systèmes fuchsien comme un sous ensemble propre.*

Proposition 1.4.1 *Si le système* (2) *est fuchsien au point* $a_i \in \mathbb{C}$*, alors il est singulier régulier en* $a_i \in \mathbb{C}$*.*

On procède à la description due à Levelt de la construction de l'espace des solutions de (2) dans un voisinage d'un point singulier a_i.

Proposition 1.4.2 *Choisissons une base de l'espace des solutions* X *de* (2)*, notons* G_i *les matrices de monodromie relatives à* a_i*,* $i = 1, ..., n$*, de* (2) *dans la base des colonnes de* Y*. La matrice* Y *Peut alors s'écrire dans un voisinage de* θ_i *sous la forme*

$$Y(z) = M_i(z)(y - a_i)^{E_i} \tag{1.5}$$

où $M_i(z)$ est une matrice à coefficients méromorphes, holomorphes inversibles sur $\theta_i \backslash \{a_i\}$ et où $E_i = \frac{1}{2i\pi} LnG_i$ et $G_i = \chi(g_i)$; alors, toute composante $f_j(y)$ d'une solution $f(y) \in X_{/\widetilde{\theta_i}}$ peut être représentée comme la somme logarithmique

$$f_j(y) = \sum_{k,p} (y - a_i)^{l_k} h_{kl}(z) Ln^{b_l}(y - a_i) \tag{1.6}$$

où la somme est finie, $0 \leq \operatorname{Re} l_k < 1$, $b_l \in \mathbb{Z}, b_l > 0$; et chaque $h_{kl}(z)$ est une série de Laurent à partie principale finie.

Définition 1.4.2 *: L'ordre du zéro (i.e: l'ordre du pôle avec un signe moins) de* $h_{kl}(z)$ *en* a_i *est appelé la valuation* $\varphi_i(h_{kl}(z))$ *en* a_i *ou la* $i^{\text{ème}}$*valuation de la série Laurent* $h_{kl}(z)$ *à partie principale finie.*

Autrement dit le plus grand entier m tel que $(z - a_i)^{-m} h_{kl}(z)$ soit holomorphe en a_i.

Définition 1.4.3 *:le nombre*

.

$$\varphi_i(f_j) = \min_{k,l\in\sigma}\varphi_i(h_{kl})$$

est appelé valuation en $a_i \in \mathbb{C}$ de $f_j(y)$. Le nombre

$$\varphi_i(f(y)) = \min_{j=1,....,p}\varphi_i(f_j)$$

est appelé la i^{eme} valuation en $a_i \in \mathbb{C}$ de la fonction vectorielle f.

Exemple 1.4.2 *:* $f_1(z) = z^2 - \frac{1}{Z}$ *;* $f_2(z) = y^{\frac{1}{2}}\frac{1}{z^3}Ln^2y$ *et* $f_3(y) = (z, z, Lny, z^2)$*, les valuations* $\varphi(f)$ *en 0 sont*

$\varphi(f_1) = -1$; $\varphi(f_2) = -3$; $\varphi(f_3) = 1$
D'après les définitions (1.4.2), (1.4.3) de la forme (1.6) d'une composante d'une fonction $f(y) \in X_{/\ \widetilde{\theta}_i}$ ci-dessus, il est facile d'établir que les valuations ont les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.3 *:*

1) $\varphi_i(g_i^\star f) = \varphi_i(f)$ pour $i = 1, ..., n$.
2) $\varphi_i(cf) = \varphi_i(f)$ pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus 0$.
3) $\varphi_i(f + g) \geq \min(\varphi_i(f), \varphi_i(g))$ et si $\varphi_i(f) \neq \varphi_i(g)$, alors $\varphi_i(f + g) = \min(\varphi_i(f), \varphi_i(g))$.
4) $f(y)(y - a_i)^{-\lambda} \to 0$ pour tout $\lambda < \varphi_i(f)$ quand z tend vers a_i sur tout secteur ouvert de sommet a_i et d'angle strictement inférieur à 2π .De plus, $\varphi_i(f)$ est le plus grand des entiers k satisfaisant la condition ci-dessus pour tout $\lambda < k$. .

1.4.3 Base faible de Levelt

L'espace $X_{/\ g_i}$ Peut être décomposé en somme directe des sous espaces m_X de dimension p_m invariants sous l'action de $g_i^\star$ et correspondant au valeurs propres x_m de $g_i^\star$. La valuation φ_i prend k_m valeurs finies distinctes $m_{\varphi_i^1} > ..... > m_{\varphi_i^{k_m}}$ sur m_X $(k_m \leq p_m)$ et définit une filtration de m_X par des sous espaces $0 \subset m_{X^1} \subset ..... \subset m_{X^{k_m}} = m_X$ où $m_{X^l} = \left\{ f \in m_X \backslash \varphi_i(f) \geq m_{\varphi_i^l} \right\}$. De plus, d'après la propriété 1, de la proposition (1.4.3), l'opérateur de monodromie $g_i^\star$ préserve la filtration. On choisit une base $m_{e_1}, ..., m_{e_{l_1}}$ dans m_{X^1} dans laquelle l'opérateur $g^\star_{i\ /\ m_X}$ a une forme triangulaire supérieure et on complète la base de telle sorte qu'elle devienne une base dans m_{X^2} dans laquelle $g^\star_{i\ /\ m_{X^2}}$ posséde encore une forme triangulaire supérieure, et ainsi de suite. De cette manière, on obtient une base (m_l) de m_X.

Définition 1.4.4 *: De (m_l) on forme une base $(e) = (e_1, ..., e_p)$ de l'espace des solutions $X_{/\ \widetilde{\theta}_i}$ du système (2), celle-ci est appelée base faible de Levelt si les conditions suivantes sont vérifiées.*

a) la valuation φ_i prend toutes ces valeurs sur les éléments de (e) (en comptant les multiplicités).
b) $\varphi_i(m_{e_j}) \geq \varphi_i(m_{e_j+1})$ pour tout m, j.
c) La matrice G_i de $g_i^\star$posséde une forme triangulaire supérieure dans la base (e).

1.4.4 Structure de l'espace des solutions d'un système régulier.

On désigne par A_i La matrice diagonale des valuations $A_i = diag(\varphi_i(e_1), ..., \varphi_i(e_p))$ pour la base associée (e) de l'espace $X_{/\ \widetilde{\theta}_i}$. Des propriétés b) et c) on obtient immédiatement le résultat suivant :

Proposition 1.4.4 *La matrice*
$(z - a_i)^{A_i} E_i (z - a_i)^{-A_i}$
où E_i est donnée par (A'), est holomorphe au voisinage θ_i de a_i. Pour tout $\epsilon > 0$, la matrice $(z-a_i)^{A_i}\ (y-a_i)^{E_i}(z-a_i)\ {}^{-A_i}\ (z-a_i)^{\epsilon}$ tend vers zéro quand z tend vers a_i sur tout secteur ouvert 0 distinct du plan complexe $\mathbb{C}$, de sommet en a_i.

On désigne par $T_i(y)$ la matrice fondamental de l'espace des solutions $X_{/\ \widetilde{\theta}_i}$ construite de la base associée (e).

Proposition 1.4.5 *: $T_i(y)$ peut s'exprimer sous la forme*

$$T_i(y) = U_i(z)(z - a_i)^{A_i}(y - a_i)^{E_i} \tag{1.7}$$

où la matrice $U_i(z)$ est holomorphe dans un voisinage de a_i.

Une telle décomposition est appelée décomposition de Levelt.

Démonstration. Pour montrer que $U_i(z)$ est holomorphe, il suffit de montrer que $U_i(z)(y-a_i)^{\epsilon} \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ quand z tend vers a_i sur tout voisinage distinct de $\mathbb{C}$. Mais ■

$U_i(z)(y-a_i)^{\epsilon} = T_i(y)(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}\ (y-a_i)^{\epsilon}$

$= S_1(y)S_2(y),$

où $S_1(y) = T_i(y)(y-a_i)^{-A_i+\frac{\epsilon}{2}I}$

$S_2(y) = (y-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\frac{\epsilon}{2}}$

Comme la j^{eme} colonne de $S_1(y)$ est égale à $e_j(y)(y-a_i)^{-\varphi_i(e_j)+\frac{\epsilon}{2}}$ il vient de la propriété 3) des valuations que $S_1(y) \to 0$ quand $z = \Pi_1(y)$ tend vers a_i car $\varphi_i(e_j) - \frac{\epsilon}{2} < \varphi_i(e_j)$ de la proposition 1.4.3 on obtient la même propriété pour $S_2(y)$.

La caractérisation locale s'exprime alors comme suit :

Proposition 1.4.6 *: Le système (2) singulier régulier au point a_i est fuchsien en ce point si seulement si pour une base de Levelt (e) la matrice $U(z)$ est holomorphe inversible en a_i dans la décomposition (1.7)*

$$\det U_i(z) \neq 0. \tag{1.8}$$

Démonstration. : (preuve suffisance)

D'aprés la (1.7) la formule matricielle du système (2) a la forme suivante:

$$A(z)dz = dT_i \cdot T_i^{-1} = \tag{1.9}$$

$= d\left(U_i(z)(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}\right) \cdot ((y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}U_i^{-1}(z))$ ■

$= \left[\frac{dU_i}{dz}(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i} + A_i(z-a_i)^{A_i-I}U_i(z)(y-a_i)^{E_i} + E_i\frac{1}{z-a_i}(y-a_i)^{E_i}\right] \cdot$
$\left((y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}U_i^{-1}(z)\right)$

$A(z)\ dz = \left[\frac{dU_i}{dz} + \frac{U_i}{z-a_i}(A_i + (z-a_i)^{A_i}E_i(z-a_i)^{-A_i})U_i^{-1}\right] dz$

dans un voisinage de a_i. Si $\det U_i(a_i) \neq 0$, alors $A(z)$ a un pôle du premier ordre en $a_i \in \mathbb{C}$, nous déduisons que $(z-a_i)A(z)dz$ est holomorphe en $a_i \in \mathbb{C}$.

Corollaire 1.4.1 *: supposons que le système (2) admette sur $\widetilde{\theta}_i$ une matrice fondamentale $Y_i(y)$ de la forme.*

$$Y_i(y) = U_i(z)(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}$$

Où A_i est une matrice diagonale à coefficients entiers et $U_i(z)$ est holomorphe inversible sur $\widetilde{\theta}_i$. Si la matrice $(z-a_i)^{A_i}E_i(z-a_i)^{-A_i}$ est holomorphe sur θ_i, alors le système (2) est fuchsien en a_i.

Définition 1.4.5 *: On appelle exposants de l'espace des solutions X au point a_i, les nombres complexes définis par $B_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$, pour $j = 1, ..., p$ où φ_i^j valeur de la valuation φ_i et ρ_i^j ; $j = 1, ..., p$ valeurs propres de E_i.*

Corollaire 1.4.2 *: Les valeurs propres de chaque matrice $B_i = \lim(z-a_i)A(z)$ d'un système fuchsien au point a_i, coïncide avec les exposants B_i^j, $j = 1, ..., p$ de l'espace des solutions X de (2) au point a_i.*

La preuve suit de (1.7) puisque

$$B_i = \lim_{Z\to a_i}(z-a_i)\frac{dT_i}{dz}T_i^{-1} = U_i(a_i)L_iU_i^{-1}(a_i) \tag{1.9'}$$

Remarque 1.4.4 *On suppose que dans le système $df = Wf$ où $W = (w_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, est la matrice d'une 1-forme différentielle qui holomorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash D$, la forme W peut s'écrire*

$$W = \frac{B^i}{z-a_i}dz + \Psi$$

dans un voisinage de a_i, où Ψ est une forme holomorphe. D'après (1.9) on trouve que:

$$\begin{aligned} B^iU_i(a_i) &= U_i(a_i)L_i, && (1.9``)\\ L_i &= A_i + \lim_{z\to a_i}(z-a_i)^{A_i}E_i(z-a_i)^{-A_i} \end{aligned}$$

Proposition 1.4.7 *: la somme $\sum$ de tous les exposants B_i^j, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., p$ de l'espace des solutions X en tous les points $a_1, ..., a_n$ du système (2) est un entier négatif :*

$$\sum = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{P} B_i^j \leq 0 \tag{1.10}$$

Le système (2) à points singuliers réguliers est un système de type fuchsien sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\sum = 0 \tag{1.11}$$

Preuve. Considérons la forme $sp\ A(z)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si $T(y)$ est la matrice fondamentale de l'espace des solutions X, alors :

$$SpW = dLn \det T$$

ainsi on trouve de (1.7) que

$$\operatorname{Re} s_{a_i} Sp\ W = b_i + \sum_{j=1}^{P} B_i^j$$

où b_i est l'ordre du zéro du $\det U_i(z)$ en a_i . Par le théorème sur la somme des résidus

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{P} B_i^j + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

■

Chapitre 2

Méthode de résolution

La méthode utilisée pour montrer les théorèmes 1 et 2 énoncés dans l'introduction consiste à modifier le système (2) à points singulières réguliers $a_1, ..., a_n$ et à représentation de monodromie (1) donnée, par des transformations méromorphes de telle sorte qu'il devienne un système fuchsien. En effet, par cette transformation

$$g = \Gamma(z)f, \tag{2.1}$$

sous les quelles (2) devient un système de laforme $dg = W'g$, avec:

$$W' = d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma W \Gamma^{-1} \tag{2.2}$$

Si la fonction matricielle $\Gamma(z)$ est méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et holomorphe inversible en dehors de D, alors le système (2) muni de la transformation (2.2) devient aussi un système à points singuliers réguliers $a_1, ..., a_n$ et à la même représentation de monodromie.
Pour ce faire on utilise les critères pour les systèmes fuchsiens énoncés dans les propositions (1.4.6) et (1.4.7) et une procédure technique appelée la procédure $A(a_i, l, j, k)$ et décrite dans le lemme suivant :

Lemme 2.0.1 *soit la l^{eme} ligne $u_l(z)$ d'une matrice $U(z)$ qui est holomorphe dans un voisinage θ_i de a_i la forme*

$$u_l(z) = (z - a_i)^k v_l(z) \tag{2.3}$$

où la j^{eme} composante $v_{lj}(z)$ du vecteur ligne $v_l(z)$ est holomorphe dans θ_i et $v_{lj}(a_i) \neq 0$. Il y a une matrice méromorphe $\Gamma(z)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et holomorphe inversible en tout point sauf a_i tel que la j^{eme} ligne $x_j(z)$ de la matrice $U' = \Gamma U$ a la forme

$$x_j(z) = (z - a_i)^k x'_j(z), \tag{2.4}$$

avec $x'_j(z)$ est holomorphe dans θ_i, $x'_{lj}(a_i) \neq 0$, et $x'_{mj}(a_i) = 0$ pour $m \neq l$, x'_{mk} étant la m^{eme} composante du vecteur ligne x'_j.

Si le secteur ligne $v_l(z)$ dans (2.3) est holomorphe dans θ_i, alors tous les éléments de U' sont aussi holomorphe dans θ_i

Preuve. considérons un élément $u_{mj}(z)$ de la matrice $U(z)$ avec $m \neq l$. Si $u_{mj}(z) \neq 0$, alors l'élément peut être écrit comme $(z - a_i)^s t(z)$, où $t(z)$ est une

fonction holomorphe dans θ_i et $t(a_i) \neq 0$. Soit $0 \leq s \leq k$. il y a un polynôme $Q_m(\frac{1}{z-a_i})$ du degré $k - s$ tel que:

$$Q_m(\frac{1}{z - a_i})u_{lj}(z) + u_{mj}(z) = (z - a_i)^{k+s} f(z) \tag{2.5}$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans θ_i.

Les coefficients du polynôme $Q_m(\frac{1}{z-a_i})$ sont définis comme suit. Le coefficient noté par c_1 correspondant à $(\frac{1}{z-a_i})^{k-s}$ on prend

$$c_1 = -\frac{t(a_i)}{v_{lj}(a_i)}.$$

Il est évident que

$$\frac{c_1}{(z - a_i)^{k-s}} u_{lj}(z) + u_{mj}(z) = (z - a_i)^r t'(z),$$

où $s < r$ et $t'(z)$ est une fonction holomorphe dans θ_i telle que $t'(a_i) \neq 0$. Si $r \leq k$, alors on pose $c_2 = -\frac{t'(a_i)}{v_{lj}(a_i)}$ pour le coefficient c_2 correspondant au terme suivant $\frac{1}{(z-a_i)^{k-r}}$, et ainsi de suite. Mais si l'ordre s de zéro de $u_{mj}(z)$ en a_i dépasse k, alors on pose $Q_m = 0$. On considère la matrice

$$\Gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & Q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & & Q_{l-1} & & & \\ \vdots & & & & 1 & & & \\ & & & & Q_{l+1} & & & \\ & & & & \vdots & & & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & Q_P & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

De la construction de $\Gamma(z)$ et (2.5) on obtient l'assertion (2.4) du lemme.

Si la ligne $v_l(z)$ dans (2.3) est holomorphe dans θ_i , il vient que $U' = \Gamma U$ est holomorphe, puisque $U\ (z)$ est holomorphe et $\deg Q_m \leq k$ pour $m = 1, ..., \hat{l}, ...p$.

Le passage de U à $U' = \Gamma U$ et de X à $X' = \Gamma X$, où $\Gamma(z)$ est donnée par (2.6), serait appelée la procédure $A(a_i, l, j, k)$.

Considérons l'espace X des solutions d'un système (2) qui est fuchsien en $a_1, ..., \hat{\imath}, ..., a_n$ et a une singularité régulière en a_i. On considère les factorisation (1.7) pour X en $a_1, ..., a_n$.

■

Lemme 2.0.2 *Soit la l^{eme} ligne de la matrice U_i dans la factorisation (1.7) pour X en a_i de la forme:*

$$u_l(z) = (z - a_i)^k v_l(z) \tag{2.7}$$

où $k > 0$ et $v_l(z)$ est un vecteur ligne holomorphe dans θ_i avec $v_{lt}(a_i) \neq 0$. Si les valuations φ_i^t pour X satisfait l'inégalité $\varphi_i^{t-1} \geq \varphi_i^t + k$, alors l'espace $X' = \Gamma(z)X$ obtenu de X on appliquant la procédure $A(a_i, l, t, k)$ est l'espace des solutions d'un système (2) qui est fuchsien aux points $a_1, ..., \hat{\imath}, ..., a_n$ et les normalisations $'\varphi_m^j$ et φ_m^j pour X' et X sont reliées par les relations suivantes

$$'\varphi_m^j = \varphi_m^j\ ,\ j = 1, .., p\ ;\ m \neq i; \tag{2.8}$$

$$'\varphi_i^j = \varphi_i^t + k\ ;'\varphi_i^j \geq \varphi_{i\gamma}^j\ j = 1, ..., t\hat{}, ..., p. \tag{2.0.1}$$

Preuve. Le système (2) à l'espace de solution X' est fuchsien en $a_1, ..., \hat{\imath}, ..., a_n$ et la première égalité dans (2.7) a lieu par le bien fait des propositions (1.4.5) et (1.4.6) et le fait que les factorisations (1.7) pour X' ont la forme

$$T'_m(y) = \Gamma(z)U_m(z)(z-a_m)^{A_m}(y-a_m)^{E_m}$$

avec $\det \Gamma(a_m) \neq 0$ pour $m \neq i$, où $\Gamma(z)$ est donnée par (2.6)
On pose $c = dig(0, ..., 0, k_t, 0, ...0)$. Il vient du lemme 2.0.1 que $\Gamma(z)U_i(z)$ peut être écrite dans la forme

$$\Gamma(z)U_i(z) = U'_i(z)(z-a_i)^{c_\gamma}$$

où $U'_i(z)$ est holomorphe dans θ_i et $U'_{lt}(a_i) \neq 0$. Alors, T'_i peut être reprsenter dans la forme

$$T'_i(y) = U'_i(z)(z-a_i)^{A_i+C}(y-a_i)^{E_i}$$

De la condition $\varphi_i^{t-1} \geq \varphi_i^t + k$ et la définition (1.4.3) des normalisations on obtient

$$'\varphi_i^t = \varphi_i^t + k \ ; \ '\varphi_i^j \geq \varphi_{i\gamma}^j \ ; \ j \neq t.$$

■

Remarque 2.0.5 *Si dans la supposition du lemme (2.0.2) on laisse tomber la condition que les composantes $v_{lt+1}(z), ..., v_{lp}(z)$ du vecteur ligne $v_l(z)$ dans (2.7) soient holomorphe, alors (2.8) prendra la forme*

avec
$k_{t+1} = \max(0, k - l_{t+1})$, $k_{t+2} = \max(0, k - l_{t+1}, k - l_{t+2})$,..., $k_p = \max(0, k - l_{t+1}, ..., k - l_p)$, où l_j est l'ordre du zéro de $v_{lj}(z)$ en a_j si $v_{lj}(z) \neq 0$, et $l_j = k$ si $v_{lj}(z) = 0$.
Les inégalités (2.8$'$) viennent du fait que dans ce cas la matrice $\Gamma(z)U_i(z)$ peut être écrite sous la forme:

$$\Gamma(z)U_i(z) = U_i^{'}(z)(z-a_i)^{c'}$$

où $c' = diag(0, ..., 0, k, -k_{t+1}, ..., -k_p)$; $U'_i(z)$ est holomorphe dans θ_i, et $k \geq -k_{t+1} \geq ... \geq -k_p$.

De plus, on décrira une autre procédure qui appliquera dans les preuves des théorèmes 1-3 énoncés dans l'introduction. Cette procédure consiste à passer de l'espace X vers $X' = \Gamma(z)X$, où

$$\Gamma(z) = \left(\frac{z-a_j}{z-a_i}\right)^c,$$

$c = diag(c_{11}, ..., c_{pp})$, $c_{ll} \in \mathbb{Z}$, $l = 1, ..., p$, on l'appelle "procédure $B(a_i, a_j, c_{11}, ..., c_{pp})$".

2.1 Existence d'un systèmes singulier régulier ayant une représentation de monodromie donnée.

\bigskip Th\U{e9}or\U{e8}me d'existence

Théorème 2.1.1 *([Bo1] p43) Considérons une représentation*

$$\chi : \pi_1(P^1(\mathbb{C})\backslash\ \{a_1, ..., a_n\}\,; z_0) \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$$

et fixons un entier q tel que $1 \leq q \leq n$. Pour $i \in I_q = \{1, ..., \hat{q}, ..., n\}$, soit $\widetilde{G_i}$ une matrice triangulaire supérieure semblable à $\chi(\sigma_i)$ et E_i la matrice définie par $\frac{1}{2i\pi}\,Ln\,\widetilde{G_i}$. Considérons pour tout $i \in I_q$ une matrice diagonale A_i à coefficients entiers telle que $(z-a_i)^{A_i}E_i(z-a_i)^{-A_i}$ soit holomorphe en a_i. Il existe alors un système (2) singulier régulier au point a_q, fuchsien aux points a_i pour tout $i \in I_q$, ayant χ pour représentation de monodromie et tel que la matrice A_i soit la matrice de valuations du système (2) au point $a_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in I_q$.
Si la représentation χ est réductible, nous avons le résultat plus précis suivant :

Théorème 2.1.2 *([Bo1] p.119) avec les mêmes notations et sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.0.1. Supposons, de plus, que la représentation χ est réductible, admettant une sous représentation χ_l de dimension l. Il existe alors un système (2) singulier régulier au point singuliers a_q, fuchsien aux points a_i pour tout $i \in I_q$, ayant χ pour représentation de monodromie, tel que la matrice A_i soit la matrice de valuations du système (2) au point a_i pour tout $i \in I_q$ et ayant une matrice fondamentale de la forme*

$$Y(z) = \begin{pmatrix} Y^1 & \bigstar \\ 0 & Y^2 \end{pmatrix},$$

tel que χ_l soit la représentation de monodromie du système $dg = (B^1(z)\ dz)g$ où $B^1(z) = dY^1(y)(Y^1(y))^{-1}$.relativement à Y^1.

Le théorème 2.0.2 est, en fait, une réciproque du résultat ci-dessous.

Proposition 2.1.1 *La représentation de monodromie d'un système réductible*

$$dg = \left(\begin{pmatrix} B^1(z) & \bigstar \\ 0 & B^2(z) \end{pmatrix} dz \right) g$$

est réductible.

Lorsque la représentation réductible χ est réalisée comme représentation de monodromie d'un système fuchsien, nous avons le

Théorème 2.1.3 *([Bo1] p. 125) Considérons un système fuchsien (2) sur $P^1(\mathbb{C})$ ayant une représentation de monodromie χ réductible, et soit X_l un sous-espace invariant par la monodromie de l'espace des solutions X de (2). On note χ_l la sous représentation de χ déterminée par X_l. Si la somme de tous les exposants de X_l en les différents points $a_1, \ldots\ldots, a_n$ est nulle, alors il existe une matrice inversible constante S telle que la matrice B' du système fuchsien*

$$dg = (B^{'}(z)dz)g$$

obtenu à partir de (2) par le changement de fonction inconnue $g = S\ f$, a la forme

$$B'(z) = \begin{pmatrix} B_1'(z) & \bigstar \\ 0 & B_2'(z) \end{pmatrix},$$

où χ_l est la représentation de monodromie du système fuchsien $dh = (B_1'(z)dz)h$.

2.2 les systèmes à monodromie réductible

Dans ce qui suit on aurait besoin de certaines propriétés du système (2) reliées à la réductibilité de sa représentation de monodromie (1).

Lemme 2.2.1 *Si pour certaines composantes $f_j(y)$ de toute fonction $f(y)$ dans l'espace X des solutions d'un système (2) de monodromie (1)*

$$f_j(y) = 0$$

est vérifiée alors la représentation de monodromie (1) est réductible.

Preuve. On considère une base de $(e_1(y), ..., e_p(y))$ de X telle que

$$e_1(y) = f(y),\ f_{j1}(y) = \cdots = \ f_{jl}(y) = 0$$

et les fonctions $e_{jl+1}(y), ..., e_{jp}(y)$ sont linéairement indépendant. Il est évident que l doit satisfaire l'inégalité $1 \leq l \leq p$. Soit $m \leq l$ et $g \in \Pi_1(P^1(\mathbb{C})\backslash D, z_0)$. Considérons $g^{\bigstar} e_m = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i e_i$. Puisque, par construction, $e_{jm}(y) = 0$ Pour $1 \leq m \leq l$, il vient de (1.2) que

$$(g^{\bigstar} e_{jm})(y) = e_{jm}(g^{-1}y) = 0 = \sum_{i=1+1}^{p} \lambda_i e_{ji}(y).$$

Comme $e_{jl+1}(y), ..., e_{jp}(y)$ sont linéairements indépendantes, on a $\lambda_{l+1} = ... = \lambda_p$. Ceci voudrait dire que le sous espace $X_l \subset X$ généré par $e_1(y), ..., e_l(y)$ est un sous-espace invariant commun pour les opérateurs monodromies, et donc la représentation monodromie (1) pour le système (2) est réductible. ■

Lemme 2.2.2 *si la forme matricielle différentielle W pour le système (2) satisfait la condition*

$$w_{lj} = 0\ ;\ i = l+1, ..., p\ ; j = 1, ..., l; \quad l < p, \tag{2.8}$$

alors la représentation monodromie (1) pour le système (2) est réductible.

Preuve. Considérons le système $df = W'f$, où $W' = \|w_{ij}\|$ avec $1 \leq i \leq l$ et $1 \leq j \leq l$. Si f' est une solution du système, alors la fonction $f = (f', 0, ..., 0)$ est une solution du système original (2). Le lemme 2.0.4 vient maintenant du lemme 2.0.3 ■

Lemme 2.2.3 *Soit la matrice $U_i(z)$ de la factorisation (1.7) pour l'espace des solutions X en a_i de la forme*

$$U_i(z) = (z - a_i)^c V(z) \tag{2.9}$$

avec $c = diag(0, ..., 0, c_{l+1l+1}, ..., c_{pp})$, où $c_{jj} \in \mathbb{Z}$, et $c_{jj} \geq 0$ pour $j = l+1, ..., p$, et $V(z) = \|v_{km}\|$ est une matrice qui est holomorphe inversible dans un voisinage θ_i de a_i. Si les éléments u^j_{km} des matrices U^j, ($j = 1, ..., n$) dans les factorisations en (2.9) en $a_1, ..., a_n$ et les éléments v_{km} de f satisfont les inégalités

$$u^j_{km}(a_j) = 0, \; v_{km}(a_i) = 0, \quad l+1 \leq k \leq p, \quad 1 \leq m \leq l \;, \; 1 \leq j \leq n, \tag{2.10}$$

alors la représentation (1) pour le système (2) est réductible.

Preuve. Il s'ensuit de la forme de $U_i(z)$ que les éléments u^j_{km}de $U_i^{-1}(z)$ pour $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq m \leq l$ sont holomorphe dans un voisinage θ_i de a_i et satisfont (2.10). Bien sûr, (2.10) a lieu pour les éléments des matrices $U_1^{-1}(z), ..., \hat{\imath}, ..., U_n^{-1}(z)$; qui par bien fait de la proposition 1.4.6, sont holomorphes en certains voisinages de $a_1, ..., \hat{\imath}, ..., a_n$ respectivement. On trouve à partir de (1.9) que pour $l+1 \leq k \leq p$ et $1 \leq m \leq l$ les éléments w_{km} de la forme différentielle matricielle W sont holomorphes en chacun des points $a_1, ..., a_n$. Puisque W est holomorphe sur $P^1(\mathbb{C}) \backslash D$, il s'ensuit que les formes w_{km} en question sont holomorphe par tout sur $P^1(\mathbb{C})$, ainsi $w_{km} = 0$ pour les indices k et m définis ci-dessus. Maintenant le lemme 2.0.5 se déduit à partir du lemme 2.0.4. ■

Définition 2.2.1 *S'il existe un sous-espace $X_l \subset X$ stable par $\sigma_i^\star$, $i = 1, ..., n$ (que nous appellerons dans la suite sous espace invariant par la monodromie) ou, de façon équivalante, s'il existe une base de X dans laquelle les matrices de monodromie G_i sont simultanément réductibles:*

$$G_i = \begin{pmatrix} G_i^1 & \star \\ 0 & G_i^2 \end{pmatrix}, \; i = 1, ..., n,$$

on dit que la représentation de monodromie χ de système (2) est réductible.

Il existe également une relation entre les exposants d'un sous-espace X_l de l'espace des solutions X de (2) invariant par la monodromie (si un tel sous espace existe) :

Proposition 2.2.1 *supposons que la représentation de monodromie χ du système* (2) *soit réductible. Soit X_l un sous-espace, invariant par la monodromie, de l'espace des solutions X de* (2)*. La somme $\sum_l$ de tous les exposants de X_l en tous les points a_i, $i = 1, ..., n$, est alors un entier négatif:*

$$\sum_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \varphi_i(e_j) + \rho_i^j \leq 0$$

Définition 2.2.2 *Une famille $\chi^L = (G_i^L)_{i=1,\ldots,n}$ de matrices est appelée décomposition relative à χ s'il existe une matrice inversible S^L et des entiers $t, d^{1,L}, ..., d^{t,L}$ tels que pour tout i les matrices ${S^L}^{-1}\chi(\sigma_i)S^L = G_i^L$ soient simultanément de la forme*

$$G_i^L = \begin{pmatrix} G_i^{L,1} & & & \bigstar \\ 0 & G_i^{L,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & G_i^{L,t} \end{pmatrix}$$

où, $\dim G_i^{L,j} = d^{j,L}$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., t$.

Le lemme suivant a été démontré par A.I. Gladyshev en dimension 4 (cf. [Gl 1]). Il s'agit d'un analogue du théorème de la base incomplète pour les bases faibles de Levelt.

Lemme 2.2.4 *Soit X l'espace des solutions du système fuchsien (3). Soit $X_1 \subset X$ de dimension $k < p$, un sous espace invariant par la monodromie. Il existe une base faible de Levelt $(e_1^i, ..., e_k^i)$ de $X_{1\backslash \widetilde{\theta}_i}$ où $\widetilde{\theta}_i$ désigne un voisinage de a_i dans $\mathbb{C}$ qui peut être complétée en une base faible de Levelt $(e_1^i, ..., e_k^i, e_{k+1}^i, ..., e_p^i)$ de $X\backslash_{\widetilde{\theta}_i}$.*

Preuve. *L'idée de la démonstration est la suivante. Tous les espaces vectoriels que l'on considère sont restreints à un voisinage θ_i de a_i. Considérons la décomposition en sous espace caractéristiques de X*

$$X = X^{\alpha_i^1} \oplus \cdots \oplus X^{\alpha_i^{p_1}} \qquad (A)$$

où α_i^j *est une valeur propre de multiplicité* n_i^j *de l'opérateur* $\sigma_i^{\star}$ *et* $X^{\alpha_i^j} = Ker(\sigma_i^{\star} - \alpha_i^j id)^{n_i^j}$ *pour* $j = 1, ..., n$. *Pour* $q = 1, ..., p_1$ *on définit la filtration de Levelt de* $X^{\alpha_i^q}$ *par*

$$X^{1,\alpha_i^q} \subset \cdots \subset X^{m_q,\alpha_i^q} = X^{\alpha_i^q}, \qquad (B)$$

où les espaces vectoriels X^{h,α_i^q} *sont construits de la façon suivante (cf.[Bo1], p15). La valuation* $\varphi_i(\ )$ *prend un nombre fini de valeurs* $\infty > \varphi_i^{1,\alpha_i^q} > ... > \varphi_i^{m_q,\alpha_i^q}$ *sur* $X^{\alpha_i^q}$, *pour* $h = 1, ..., m_q$. *On définit l'espace vectoriel* X^{h,α_i^q} *par*

$$X^{h,\alpha_i^q} = \left\{ f \in X^{\alpha_i^q}_{\backslash \widetilde{\theta}_i} : \varphi_i(f) \geq \varphi_i^{h,\alpha_i^q} \right\}.$$

Soit X_1 *un sous-espace de* X *invariant par la monodromie. Comme* X_1 *est en particulier stable par* $\sigma_i^{\star}$, *on a*

$$X_1 = X_1 \cap X^{\alpha_i^1} \oplus \cdots \oplus X_1 \cap X^{\alpha_i^{p_1}} \qquad (C)$$

On considère le sous-espace $X^{\alpha_1^i}$ *et la filtration* $X_1 \cap X^{\alpha_i^1}$,

$$X_1 \cap X^{1,\alpha_i^1} \subset \cdots \subset X_1 \cap X^{m_1,\alpha_i^1} = X_1 \cap X^{\alpha_i^1}.$$

on choisit une base (e_1) *de* $X_1 \cap X^{1,\alpha_i^1}$ *que on complète en une base* $(e_1^{'})$ *de* X^{1,α_i^1} *de telle sorte que la matrice de l'opérateur induit par* $\sigma_i^{\star}$ *sur le quotient* $X^{1,\alpha_i^1} \diagup X_1 \cap X^{1,\alpha_i^1}$ *soit triangulaire supérieure. On choisit alors une base* (e_2) *de* $X_1 \cap X^{2,\alpha_i^1}$ *qui complète la base* (e_1) *de telle sorte que la matrice de l'opérateur induit par* $\sigma_i^{\star}$ *sur le quotion* $X_1 \cap X^{2,\alpha_i^1} \diagup X_1 \cap X^{1,\alpha_i^1}$ *soit triangulaire supérieure. On complète la base* (e_2) *en une base* $(e_2^{'})$ *de* X^{2,α_i^1} *de telle sorte que la matrice de l'opérateur induit par* $\sigma_i^{\star}$ *sur* $X^{2,\alpha_i^1} /\ X_1 \cap X^{1,\alpha_i^1}$ *soit triangulaire supérieure. La base* $(e_2^{'})$ *complète la base* $(e_1^{'})$ *dans* X^{2,α_i^1}. *En continuant ainsi, on peut construire une base faible de Levelt* $(e^{'})^{\alpha_i^1}$ *de* $X^{\alpha_i^1}$ *qui complète une base faible de Levelt* $(e)^{\alpha_i^1}$ *de* $X_1 \cap X^{\alpha_i^1}$. *On construit de la même façon, pour tout* $j = 2, ..., p_1$, *une base* $(e^{'})^{\alpha_i^j}$ *de* $X^{\alpha_I^j}$ *qui complète une base* $(e)^{\alpha_i^j}$ *de* $X_1 \cap X^{\alpha_i^j}$. *Comme dans la démonstration du lemme 1.1.2 de [Bo1] on montre que* $(e) = ((e)^{\alpha_i^1}, ..., (e)^{\alpha_i^{p_1}})$ *est une base faible de Levelt de* X_1 *d'après (C) et que* $(e^{'}) = ((e^{'})^{\alpha_i^1}, ..., (e^{'})^{\alpha_i^{p_1}})$ *est une base faible de Levelt de* X *d'après (A).*
On obtient ainsi une base faible $(e^{'})$ *de* X *complétant une base faible* (e) *de* X^1. ■

Lemme 2.2.5 *Soit une représentation (2) de dimension* $p = 3$ *réductible et supposons que tous les opérateurs de monodromie ont un sous-espace invariant commun de dimension*

$l = 1$ où $l = 2$. Alors, il y a un système d'équation (2) à points singuliers réguliers $a_1, ..., a_n$, fuchsien en $a_2, ..., a_n$, dont la représentation de monodromie coïncide avec (2) et il a une matrice fondamentale $T(y)$ pour l'espace X des solutions du système dont les éléments e_{km} satisfont les identités

$$e_{km}(y) = 0,\ l + 1 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq m \leq l. \tag{3.14}$$

Preuve. On considère un système (2) a singularités régulieres en $a_1, ..., a_n$ qui est fuchsien en $a_2, ..., a_n$ et dont la monodromie coïncide avec (1). Choisissons une base associée (e) dans l'espace $X_{/\widetilde{S}_l}$ pour le système de telle manière à ce qui les premiers l éléments de (e) constituent une base d'un sous-espace $X_l \subset X$ invariant par monodromie. On peut supposer que pour les éléments u_{km} de la matrice $U_l(z)$ dans la factorisation (1.7) de la matrice fondamentale $T(y)$ construite de (e), les égalités

$$u_{21}(a_1) = u_{31}(a_1) = u_{32}(a_1) = 0. \tag{3.15}$$

.a lieu. On peut être sûr que les conditions (3.15) sont satisfaites par application des transformations linéaires des lignes de $U_l(z)$, qui correspond au passage du système (2) à espace des solutions X à un espace des solutions $X^{'} = SX$, où S est une matrice non singulière constante.

1- Pour commencer, on considère le cas $l = 1$. Supposons que :

$$u_{j1}(a_1) \neq 0,\ j = 2, \text{ou } j = 3. \tag{3.16}$$

On désigne par r l'ordre du zéro de $u_{j1}(z)$ en a_1. Il vient de (3.15) que $r > 0$.

Par l'application la procédure $A(a_1, j, 1, r)$ à l'espace X, on obtient $X^{'} = \Gamma_1(z)X$. D'après le lemme 2.0.1, la somme S des puissances de $X_1^{'} = \Gamma_1(z)X_1$ est reliée à la somme s des puissances des X_1 par l'inégalité

$$s^{'} = s + r > s \tag{3.17}$$

On porterait l'espace X' de retour à la forme (3.15). Si (3.16) est vérifiée pour un élément $u'_{j1}(z)$ de la matrice $U'_1(z)$, on applique la procédure $A(a_1, j, 1, r')$ une fois de plus, et ainsi de suite. Il vient d'après la proposition 2.0.9 et (3.17) qu'après un nombre fini d'étapes on obtiendrait l'espace $\widetilde{X}$ des solutions d'un système (2) à singularités régulieres en $a_1, ..., a_n$ qui est fuchsien en $a_2, ..., a_n$ à représentation de monodromie donnée (1) telle que les éléments de la matirice $\widetilde{U_i}(z)$ dans (1.7) satisfont les identités $u_{21}(z) = u_{31}(z) = 0$, et donc $e_{21}(z) = e_{31}(z) = 0$.

2- Maintenant, on considère le cas $l = 2$. Le sous-cas suivants sont possibles:

a) La représentation monodromie deux-dimensionnel χ_2 pour l'espace X_2 est réductible.

b) χ_2 est irréductible.

Dans le cas a), d'après le cas $l = 1$ discuté ci-dessus, on peut suppoer que $T(y)$ a déjà la forme

$$T(y) = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdot & \cdot \\ 0 & & \\ 0 & & \widetilde{T_2}(y) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

où $\widetilde{T_2}(y)$ est la matrice fondamentale de l'espace des solutions d'un système (3) dont la représentation monodromie coincide avec la représentation quotient correspondant de la représentation (1). Pour la représentation quotient, il y a un sous-espace invariant un-dimensionnel généré par $e_2 = (e_{22}, e_{32})$.Ainsi, il vient de la discussion du cas $l = 1$ qu'il y a une matrice $\Gamma'(z)$ telle que l'élémemts t_{21} de la matrice $\widetilde{T_2'} = \Gamma'\widetilde{T_2}$ satisfait l'égalité $t_{21}(y) = 0$. Considérons la matrrice

$$\Gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \Gamma'(z) \end{pmatrix}$$

Pour $T'(y) = \Gamma(z)T(y)$ on trouve que

$$e'_{21}(y) = e'_{31}(y) = e'_{32}(y) = 0. \tag{3.19}$$

Dans le cas b), on suppose que $u_{31}(z) \neq 0$ et on note les ordres des zéros de $u_{31}(z)$ et $u_{32}(z)$ en a_1 par r_1 et r_2. Il vient de (3.15) que $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$. (Si $u_{32}(z) = 0$ on pose $r_2 = r_1$). En appliquant la procédure $A(a_1, 3, l, r_1)$ à X, on obtient l'espace $X' = \Gamma_1(z)X$. D'après la remarque 2.0.5 la somme s' des puissances de l'espace $X_2' = \Gamma_1(z)X_2$ est reliée à la somme s des puissances de X_2 par l'inégalité

$$s' \geq s + r_1 - \max(0, r_1 - r_2) > s \tag{3.20}$$

On porterai l'espace X' de retour à la forme (3.15). Si l'élément $u_{31}'(z)$ de la matrice $U_1'(z) = \Gamma_1 U_1(z)$ ne disparait pas identiquement, alors on applique la procédure $A(a_1, 3, l, r_1')$ une fois encore, et ainsi de suite. Il vient de la proposition 2.0.9 et (3.20) qu'après un nombre fini d'étapes on obtiendra l'espace $\widetilde{X}$ des solutions d'un système (2) à points singuliers réguliers $a_1, ..., a_n$ qui est un système fuchsien en $a_2, ..., a_n$ à la représentation monodromie donnée (1), telle que l'élément $\widetilde{u}_{31}(z)$ de la matrice $\widetilde{U}_1(z)$dans (1.7) satisfait l'identité $\widetilde{u}_{31}(z) = 0$. Alors $\widetilde{e}_{31}(y) = 0$, et ainsi χ_2 est irréductible, $\widetilde{e}_{32}(y) = 0$. (Autrement, d'après le lemme 2.0.3, $e_1(y)$ serait un vecteur propre commun des opérateurs monodromies et χ_2 serait réductible). ■

Corollaire 2.2.1 *Si toutes les matrices monodromie d'une représentation (1) de dimension p peuvent être réduites simultanément à la forme triangulaire supérieure, alors il ya un système (2) à points singuliers réguliers $a_1, ..., a_n$ qui est fuchsien en $a_2, ..., a_n$ et tels que la matrice fondamentale $T(y)$ de l'espace des solutions d'un système a la forme triangulaire supérieure.*

Chapitre 3

Preuve des théorèmes 1,2 et 3, énoncés dans l'introduction.

3.1 La solubilité du problème de Riemann-Hilbert pour une représentation irréductible de dimension trois

On considère l'espace X des solutions du système (3) à point singulier régulier a_i et la factorisation (1.7) pour X en a_i.

Lemme 3.1.1 *Il y a une matrice $\Gamma(z)$ méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et holomorphe inversible en tout point sauf en a_i, et il y a une matrice $V_i(z)$ holomorphe inversible en un voisinage θ_i de a_i, telle que pour la matrice $U_i(z)$ dans (1.7) la factorisation*

$$\Gamma(z)U_i(z) = (z - a_i)^c V_i(z) \tag{4.1}$$

a lieu, avec $c = diag(c_{11}, ..., c_{pp})$, où $c_{ll} \in \mathbb{Z}$ pour $l = 1, ..., p$ et $0 \leq c_{11} \leq \cdots \leq c_{pp}$.

Preuve. On demande à ce que dans (4.1) $c_{ll} \geq 0$ pour tout l. Récrivons (4.1) dans la forme :

$$U_i(z)V_i^{-1}(z) = \Gamma^{-1}(z)(z - a_i)^c \tag{4.2}$$

Supposons que $c_{ll} < 0$ pour certain l. La matrice dans le côté gauche de (4.2) est holomorphe en a_i, ainsi la l^{eme} colonne $t(z)$ de la matrice du côté droit de (4.2) est aussi holomorphe en a_i. Mais

$$t(z) = (z - a_i)^c \gamma(z)$$

où $\gamma(z)$ est la l^{eme} colonne de la matrice $\Gamma^{-1}(z)$, et donc $\gamma(z) \to 0$ quand $z \to 0$. Ainsi, par vertu de théorème de Liouville, il s'ensuit que $\gamma(z) = 0$, qui contredit le fait que $\Gamma(z)$ est inversible holomorphe par tout sauf en a_i. La contradiction signifie que $c_{ll} > 0$. Par application d'une transformation linéaire des lignes de $\Gamma(z)U_i(z)$ (en multipliant $\Gamma(z)U_i(z)$ à gauche par une matrice constante non singulière S), on peut être sûr que la condition $0 \leq c_{11} \leq \cdots \leq c_{pp}$ a lieu. ■

Preuve. du théorème 1: Considérons l'espace X des solutions d'un système de trois équations (3) à points singuliers réguliers $a_1, ..., a_n$ qui est fuchsien en $a_2, ..., a_n$ et dont la représentation monodromie (1) est irréductible. D'après le critère (1.6) pour les systèmes fuchsien et la condition (1.10) pour montrer le théorème il suffit de montrer qu'il existe une fonction méromorphe matrice $\Gamma(z)$ sur $P^1(\mathbb{C})$ holomorphe inversible en dehors de l'ensemble des points $a_1, ..., a_n$ tels que les conditions suivantes soient vraies pour $X' = \Gamma(z)X$:
(4.3a) : X' est l'espace des solutions d'un système (3) qui est fuchsien pour tout sauf peut être en un des points $a_1, ..., a_n$;(4.3b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{3} \overset{,}{B}{}_i^{j} > \sum_{i=1}^{n}\sum_{J=1}^{3} B_i^j$

où $\overset{,}{B}{}_i^{j}$ et B_i^j sont les composantes de X' et X, respectivement.

Considérons la factorisation (1.7) pour X dans un voisinage de $a_1 = 0$. Nous passons de l'espace X à $X' = \Gamma(z)X$, où $\Gamma(z)$ est la matrice définie dans le lemme 3.1.1. On pose $U_1'(z) = \Gamma(z)U_1(z) = z^c V_1(z)$.

A partir de maintenant, la démonstration se divise en trois cas;

1) $c_{11} > 0$;

2) $c_{11} = 0$ et $c_{22} > 0$;

3) $c_{11} = c_{22} = 0$ et $c_{33} > 0$

1. Considérons le cas 1.Dans ce cas il s'ensuit de la définition 1.4.3 de la normalisation et de la forme de la factorisation (1.7) pour $X^{'}$ que

$$'\varphi_i^j \ \geq \varphi_i^j + c_{11}, \ j = 1, 2, 3,$$

où $'\varphi_i^j$ et φ_i^j sont des normalisations pour X et X' respectivement. De ces inégalités, on obtient les conditions (4.3a) et (4.3b).

2. Considérons le cas 2. On désigne X' à nouveau par X et on désigne U_1' par U_1. Il s'ensuit de l'irréductibilité de la représentation (1) et le lemme 2.0.5 que soit $v_{l1}(0) \neq 0$ pour les éléments de la matrice v_l dans (4.1) avec $l = 2$ où $l = 3$, ou il y a des nombres $2 \leq i \leq n$ et $2 \leq l \leq 3$ tels que l'élément $u_{l1}(z)$ de la matrice $U_i(z)$ dans la factorisation (1.7) pour X en a_i ne disparait pas en a_i; $v_{l1}(z) \neq 0$. Dans le cas précédent la l^{eme} ligne de $U_1(z)$ a la forme (2.3) avec $t = 1$. On applique la procédure $A(a_1, l, 1, c_{ll})$ à X, et du lemme 2.0.2 on trouve que les conditions (4.3a) et (4.3b) a lieu pour l'espace $X' = \Gamma(z)X$. Si, cependant, $v_{l1}(a_i) \neq 0$ alors on applique la procédure $B(a_1, a_i, 0, c_{22}, c_{33})$ qui est fuchsien en $a_1, ..., \hat{\imath}, ..., a_n$. La ligne U_l' de la matrice holomorphe $U_i' = \Gamma U_i$ sera de la forme (2.3) avec $t = 1$ et $c_{ll} = k > 0$. Appliquons la procédure $A(a_i, l, 1, c_{ll})$ à X'. Pour $X'' = \Gamma'(z)X'$ on obtient une fois de plus les conditions (4.3a) et (4.3b).

3. Pour $1 \leq l, m \leq 3$, on désigne par u_{lm}^i les éléments de la matrice $U_i(z)$ dans la factorisation (1.7) pour X en a_i, et on désigne par v_{lm} les éléments de la matrice $V_1(z)$ dans (4.1). Ce troisième cas est subdivisé en 2 sous cas :

a) un des nombres $v_{31}(0), u_{31}^2(a_2), ..., u_{31}^n(a_n)$ est non nul.

b) les fonctions $v_{31}(z), u_{31}^2(z), ..., u_{31}^n(z)$ ont des zéros d'ordre $k_1, k_2, ..., k_n$ en $a_1, ..., a_n$ avec $k_i > 0$ pour $i = 1, ..., n$.

cas 3a) peut être réduit au cas 2) discuté ultérieurement. Considérons le cas 3b). Puisque la représentation (1) est irréductible, il s'ensuit d' après le lemme 2.0.3 que $k_1, k_2, ..., k_n$ sont des nombres finis, on pose:

$$s = k_1 + c_{33} + k_2 + ... + k_n \tag{4.4}$$

Pour la somme des ordres des zéros des fonctions aux points $u_{31}^j(a_i)$; aux points a_i où $i = 1, ..., n$. En outre, en raison de l'irréductibilité de la représentation (1), il vient du lemme 2.0.5 que soit $v_{32}(0) \neq 0$ ou il y a un i tel que $u_{32}^i(a_i) \neq 0$. Dans le dernier cas, en appliquant la procédure $B(a_1, a_i, 0, 0, c_{33})$ à X on obtient l'espace $X' = \Gamma(z)X$ des solutions d'un système (3) qui est fuchsien en $a_1, ..., \hat{\imath}, ..., a_n$. La somme S dans (4.4) ne change pas sons ces opérateurs. On désigne l'espace une fois de plus par X. La matrice $U_i(z)$ dans la factorisation (1.7) pour cet espace a la forme (4.1) avec $c = diag(0, 0, c_{33})$. ■

La partie suivante de la démonstration est basée sur la procédure décrite ci-dessous, qu'on appelle la procédure L.

Il vient des propriétés de la base associée et de la définition 1.4.3 de la valuation, que la première colonne de U_i dans (1.7) contient a$_i$.

Description de la procédure L. Il vient de la remarque 3.1.1 que soit $u_{11}^j(a_i) \neq 0$ où $u_{21}^j(a_i) \neq 0$. Passons de X vers $X' = SX$, où S est une matrice constante non singulière de la forme:

$$S = \begin{pmatrix} S' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Telle que la première colonne x_1 de $U_i'(a_i) = S\ U_i(a_i)$ a la forme:

$$x_1 = (1, , 0, 0) \tag{4.6}$$

par application de la procédure $A(a_i, 3, 2, c_{33})$ à X', on obtient l'espace ${}^1X = \Gamma_1(z)X'$ que la matrice ${}^1U_i(z) = \Gamma_1(z)U_i'(z)$ a la forme

$${}^1U_i(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bigstar \\ 0 & 0 & \bigstar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Il s'ensuit du lemme 2.0.5 qu'il existe un nombre j tel que la valeur ${}^1u_{21}^j(a_j)$ de l'élément ${}^1u_{21}^j(z)$ de ${}^1U_j(z)$ en a_i est non nulle; ${}^1u_{21}^j(a_1) \neq 0$.

En appliquant la procédure $A(a_j, 2, 1, 0)$ à ${}^1X$, on obtient ${}^2X = \Gamma_2(z){}^1X$.

Il s'ensuit de la forme de la transformation appliquée que les matrices ${}^2U_m(z) = \Gamma_2(z){}^1U_m(z)$ satisfont les conditions suivantes :

1) Pour $m = 1, ..., n$, la troisième ligne de ${}^2U_m(z)$ coïncide avec la troisième ligne de $U_m(z)$;

2)${}^2U_i(a_i)$ a la forme (4.7) ;

3) La première colonne de ${}^2U_j(a_j)$ a la forme $(0,{}^1u_{21}^j(a_j),0)$.
on applique la procédure $B(a_i,a_j,0,1,0)$ à ${}^2X$, et on note l'espace résultant par $\widetilde{X}$. La description de la procédure L est complète.
puisque ${}^2U_i(a_i)$ a la forme (4.7) il vient que :

$$\widetilde{\varphi_i^1}=\varphi_i^1,\ \ \widetilde{\varphi_i^2}\geq\varphi_i^2,\ \widetilde{\varphi_i^3}\geq\varphi_i^3-1, \tag{4.8}$$

où φ_i^j et $\widetilde{\varphi_i^j}$ sont les normalisations pour Xet $\widetilde{X}$ respectivement, puisque la première colonne de ${}^2U_j(a_j)$ a la forme donnée dans 3), il s'ensuit que :

$$\widetilde{\varphi_j^1}=\varphi_j^1+1,\ \widetilde{\varphi_j^2}=\varphi_j^2,\ \widetilde{\varphi_j^3}=\varphi_j^3, \tag{4.9}$$

et la factorisation (1.7) pour $\widetilde{X}$ et a_j a la forme :

$$\widetilde{T_j}(y)=\widetilde{U_j'}(z)(z-a_j)^{A_j+N}(y-a_j)^{E_j}, \tag{4.10}$$

où $N=diag(1,0,0)$ et $\widetilde{U_j'}(z)=\widetilde{U_j}(z)(z-a_j)^{-N}$. On trouve de 1) et de(4.10) que les sommes s et $\widetilde{s}$ définies par (4.4) pour les espaces X et $\widetilde{X}$ sont reliés par la relation

$$\widetilde{s}=s-1<s \tag{4.11}$$

Il s'ensuit de (4.8) et (4.9) que $\widetilde{X}$ satisfait la condition (4.3a) et

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\widetilde{B_k^m}\geq\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}B_k^m \tag{4.12}$$

Preuve. Revenons à la preuve du théorème 1. On applique la procédure L à X.
Si $\widetilde{X}$ satisfait la condition 3b), alors on applique la procédure L une fois de plus. Il s'ensuit de (4.11) qu'après pas plus que $\sum_{l=1,l\neq i}^{n}(k_l-1)+1$ étapes on obtiendrait un espace satisfaisant la condition 3a). En vertu de (4.12), dans ce cas la preuve du théorème peut être aussi réduit au cas 2 discuté ci-dessus. ■

3.2 Système fuchsien de deux équations sur la sphère de Riemann

3.2.1 Le poids fuchsien d'une représentation

On considérera un système fuchsien (3) de deux équations sur $P^1(\mathbb{C})$ et la factorisation (1.7) pour l'espace X des solutions du système en $a_1, ..., a_n$.
On peut supposer que les i^{eme} normalisations pour X satisfont les conditions:

$$\varphi_i^1 \geq \varphi_i^2 \tag{5.1}$$

Pour si la matrice monodromie G_i définie par (A$'$) est non diagonalisable, alors, d'après la condition b) pour la base associée en a_i, (5.1) est vraie. Cependant, si G_i est diagonalisable et $\varphi_i^1 < \varphi_i^2$ (qui est possible dans ce cas puisque les éléments e_1, et e_2 de la base associée (e) correspond aux différents blocs de G_i, alors on obtient une fois de plus (5.1) en remplaçant la base (e_1, e_2) de $X\backslash_{\widetilde{S}_i}$ en a_i par (e_2, e_1).
Le nombre

$$\gamma_w = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^1 - \varphi_i^2)$$

sera appelé le poids fuchsien d'un système fuchsien (3) de deux équations.
Considérons l'ensemble Ω de tous les systèmes fuchsien de deux équations sur $P^1(\mathbb{C})$ à représentation monodromie donnée. (D'après [6], cet ensemble est non vide).
On appellera le nombre

$$\gamma_\chi = \min_{\Omega} \gamma_w$$

le poids fuchsien de la représentation (2)
Pour toute représentation (1) de dimension $p = 2$, les inégalités.

$$\gamma_w \geq 0 \ , \ \gamma_\chi \geq 0 \tag{5.2}$$

a lieu, et la parité de $\gamma_w$et γ_χ coïncide avec celle de $\sum_{i=1}^{n} spE_i$. Si (1) est une représentation commutative qui ne peut être décomposée en une somme directe de représentation unidimensionnelles, alors $\gamma_\chi = 0$.
La première partie de la proposition s'en déduit de (5.1) et du fait que

$$\sum_{i=1}^{n}(B_i^1 + B_i^2) = \sum_{i=1}^{n} spE_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2.$$

Nous trouvons de (1.11) que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = -\sum_{i=1}^{n} spE_i,$$

et donc

$$\gamma_w = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i^1 - \varphi_i^2) = -\sum_{i=1}^{n} spE_i - 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2.$$

Si (1) est une représentation commutative qui ne peut être décomposée en une somme directe de représentation unidimensionnelles, alors les matrices G_i peuvent être réduites simultanément à la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \bigstar \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Dons,

$$T(y) = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} spE_i} \prod_{i=1}^{n}(z - a_i)^{E_i} \tag{5.3}$$

est la matrice fondamentale pour un système fuchsien (3) à la monodromie donné et à poids 0.

Corollaire 3.2.1 *Tout système fuchsien (3) de deux équations et de poids fuchsien $\gamma_{w'}$ peut être réduit par moyens de la transformation (8) à un système fuchsien (3) dont le poids fuchsien γ_w ne dépasse pas $\gamma_{w'}$ tel que les factorisations (1.7) pour l'espace X des solutions du dernier système de la forme suivante :*

$$T_i(y) = U_i(z)(y - a_i)^{E_i},\ i \neq l, \tag{5.4}$$

$$T_l(y) = U_l(z)(z - a_l)^{A_l}(y - a_l)^{E_l}, \tag{5.5}$$

où toutes les matrices $U_i(z)$ sont holomorphe inversible aux points a_j, les matrices E_i ont la forme triangulaire supérieure.

$$E_l = \begin{pmatrix} \rho_l^1 & \epsilon \\ 0 & \rho_l^2 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$A_l = \begin{pmatrix} b + \gamma_1 & 0 \\ 0 & b - \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

et

$$U_l(z) = \begin{pmatrix} 1 & c(z - a_l)^m \\ s(z - a_l)^k & 1 \end{pmatrix} (1 + \theta(1)), \tag{5.8}$$

où

$\gamma_{1=[\frac{\gamma_w+1}{2}]}$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_w$, $m > 0$, $k > 0$, $c \neq 0$. Si $u'_{12}(z) \neq 0$, et $s \neq 0$ si $u^l_{21}(z) \neq 0$ $[x]$ est la partie entière de x.

Proposition 3.2.1 *Soit un système fuchsien (3) à monodromie (1) peut être réduit à la forme (5.4)-(5.8). Si $c = 0$ dans (5.8) alors $\gamma_x = \gamma_w$ si $c \neq 0$, alors $\gamma_x = \gamma_w$ si et seulement si $m \geq \gamma_w$.*

Lemme 3.2.1 *soient (3) et (4) un système fuchsien réduit à (5.4)-(5.8). Alors la forme W du système peut être écrite comme :*

$$W = \begin{pmatrix} \frac{B_1^1}{z-a_l} & c(m - B_1^1 + B_1^2)(z - a_l)^{m-1} + \epsilon(z - a_l)^{\gamma_w - 1} \\ s(k + B_1^1 - B_1^2)(z - a_l)^{k-1} & \frac{B_1^2}{z-a_l} \end{pmatrix} (1+o(1))dz \tag{5.9}$$

dans un voisinage de a_l

On trouve à partir de (5.8) que

$$U_l^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -c(z-a_l)^m \\ -s(z-a_l)^k & 1 \end{pmatrix} (1+o(1)),$$

$$\frac{dU_l}{dz} = \begin{pmatrix} \alpha(z-a_l)^{t_1} & cm(z-a_l)^{m-1} \\ Sk(z-a_l)^{k-1} & \delta(z-a_l)^{t_2} \end{pmatrix} (1+o(1)),$$

où $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$, (5.9) s'ensuit maintenant de (1.9) .

Lemme 3.2.2 *Supposons qu'un élément $w_{pq}dz$ de la forme matricielle W d' un système fuchsien (3), (4) a une décomposition de la forme:*

$$w_{pq} = \frac{1}{z-a_l} c_{-1}^{pq} + c_0^{pq} + (z-a_1)c_1^{pq} + \cdots \tag{5.10}$$

dans un voisinage de a_l. Alors les éléments b'_{pq}de la matrice B^i dans (3) sont reliés avec les nombres c_k^{pq} par les relations suivantes :

$$\begin{cases} b_{pq}^l = c_{-1}^{pq} \\ \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} b_{pq}^i \dfrac{1}{(a_i-a_l)^r} = -c_{r-1}^{pq}\ ,\quad r=1,........ \end{cases} \tag{5.11}$$

Preuve. De (3) on obtient

$$W - B^l \frac{dz}{z-a_l} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} B^i \frac{dz}{z-a_i}$$

qui donne la preuve du lemme. ■

Proposition 3.2.2 *Le poids fuchsien γ_x de toute représentation (1) satisfait l'inégalité $\gamma_x < n-1$. Si (1) est une représentation irréductible, alors*

$$\gamma_x \leq n-2 \tag{5.12}$$

Preuve. Considérons un système fuchsien (3) à monodromie (1) et à poids fuchsien γ_x, réduit à la forme (5.4), (5.8). Supposons que $\gamma_x > n-2$. Alors, d'après la proposition 3.2.2, $m \geq n-1$, où m est le nombre dans (5.8). Dans ce cas, il s'ensuit du lemme 3.2.1 que l'élément w_{12} de la forme W du système peut être écrit comme $w_{12} = o((z-a_l)^{n-3})dz$ dans un voisinage de a_l. Il s'ensuit aussi de (3), $(1.9^{'})$, et la condition $\gamma_x > 0$ que $b_{12}^l = 0$ et $b_{12}^1 + \cdots + b_{12}^n = 0$. Alors, on trouve du lemme 3.2.2 que les nombres b_{12}^i pour $i \neq l$ satisfaient le système de $n-1$ équations de (5.11)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} b_{12}^i \frac{1}{(a_i - a_l)^r} = 0, \; r = 0, ..., n-2,$$

dont le déterminant est le déterminant de Vandermonde des nombres $\frac{1}{a_1 - a_l}, ..., \hat{l}, ..., \frac{1}{a_n - a_l}$, et donc il est nom nul. Ainsi, $b_{12}^i = 0$ pour $i = 1, ..., n$. Par conséquent toutes les matrices B^i de (3) ont la forme triangulaire, et d'après le corollaire1.4.2 on trouve que :

$$b_{11}^l = \rho_l^1 + \varphi_l^1, \; b_{22}^l = \rho_l^2 + \varphi_l^2, b_{11}^i = \rho_i^1, \; b_{22}^i = \rho_i^2, \; i \neq l. \tag{5.13}$$

Puisque (3) implique que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i^j + \varphi_i^j = 0$ pour $j = 1, 2$, et (A') implique que $0 \leq \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} \rho_i^j \leq n-1$ pour $j = 1, 2$, il s'ensuit des deux dernières égalités que $\varphi_l^1 - \varphi_l^2 \leq n-1$, qui en conjonction avec la supposition $\gamma_x > n-2$ elle résulte de l'équation $\gamma_x = n-1$.
Puisque les matrices B^i ont la forme triangulaire inférieure, il s'ensuit que la représentation (1) est réductible dans le cas en question. ■

Proposition 3.2.3 *Pour tous points $a_1, ..., a_n$ et tout nombre γ qui satisfait les inégalités :*

$$0 < \gamma \leq n-2 \tag{5.14}$$

Il y a une représentation irréductible (1) telle que $\gamma_x = \gamma$ et les matrices monodromies G_i pour le groupe $\mathrm{Im}\, H$ donné par (A') sont non diagonalisables.

Preuve. Supposons, comme précédemment, que $a_1 = 0$ et ∞ n'est pas parmi les points dans D (On peut toujours être sure que c'est le cas par application d'une transformation conforme de la sphère de Riemann).

1.En premier, on montrera la proposition dans le cas pour un pair $\gamma = 2\gamma\prime$. Considérons les deux systèmes suivants d'équations pour les inconnus $d_2, ..., d_n$ et $c_2, ..., c_n$:

$$\sum_{i=2}^{n} d_i \frac{1}{a_i^r} = \delta_{r,\gamma}, \tag{5.15}$$

$$\sum_{i=2}^{n} c_i \frac{1}{a_i^r} = x^2 \delta_{r,n-2}, \tag{5.16}$$

où $r = 0, 1, ..., n$ et $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$

Comme les déterminants de (5.15) et (5.16) et ne disparaissent pas, il y a un j tel que $d_j \neq 0$, d étant la solution de (5.15). Mais, toute solution c de (5.16) a la forme $c = x^2 t$ avec $t_i \neq 0$ pour $i = 2, ..., n$. Ainsi, on peut choisir les valeurs des racines $\sqrt{d_i t_i}$ donc $s = \sum_{i=2}^{n} \sqrt{d_i t_i} \neq 0$.

Posons $x = -\frac{\gamma}{2s} = -\frac{\gamma'}{s}$ dans (5.15). Alors $\sum_{i=2}^{n} \sqrt{d_i c_i} = xs = -\frac{\gamma}{2} = -\gamma'$, et donc les matrices

$$B^1 = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & -\gamma' \end{pmatrix}, \; B^i = \begin{pmatrix} \sqrt{d_i c_i} & d_i \\ -c_i & -\sqrt{d_i c_i} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Considérons un système fuchsien (3) avec (5.17). Du corollaire 1.4.2, et de la forme des matrices (5.17) on trouve que

$$\begin{cases} B_1^1 = \varphi_1^1 = \gamma',\; B_1^2 = \varphi_1^2 = -\gamma' \\ B_i^j = \rho_i^j = \varphi_i^j = 0,\; i \neq 1,\; j = 1,2 \end{cases} \tag{5.18}$$

pour les composantes de l'espace X des solutions du système

Considérons la factorisation (1.7) pour X et $a_1 = 0$:

$$T_1(y) = U_1(z) z^{A_1} y^{E_1} \tag{5.19}$$

Il s'ensuit de (5.18) que

$$A_1 = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & -\gamma' \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

De (5.17) et (1.9′) on trouve que

$$\begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & -\gamma' \end{pmatrix} = U_1(0) \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & -\gamma' \end{pmatrix} U_1^{-1}(0),$$

et donc

$$U_1(0) = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

On change la base de $X_{\backslash \widetilde{S}_i}$: $e_1' = \frac{e_1}{u_{11}}$ et $e_2' = \frac{e_2}{u_{22}}$. Dans la nouvelle base, qu'on appellera (e) comme précédemment, les matrices dans (5.19) ont la forme (5.8), (5.20) avec a_l remplacé par $a_1 = 0$ et avec α remplacé par $\epsilon = \alpha \frac{u_{11}}{u_{22}}$. De (5.15) et lemme 3.2.2 pour la forme matricielle W du système construit (2), (3), (5.16), on obtient

$$w_{12} = (z^{\gamma-1} + o(z^{\gamma-1}))dz. \tag{5.21}$$

Il s'ensuit de (5.21) et du lemme 3.2.1 que le nombre pour $U_1(z)$ dans (5.8) satisfait l'inégalité $m \geq \gamma$. De cette égalité et la proposition 3.2.2. on trouve que $\gamma_w = \gamma_x = \gamma$ pour le système construit.

Il reste à monter que les matrices de monodromies $G_1, ..., G_n$ du système construit (3),(5, 17) sont non diagonalisables et la représentation de monodromie du système est irréductible. En vertu de (A$'$) on montre que $G_1, ..., G_n$ sont non diagonalisables il suffit de montrer que telles sont $E_1, ..., E_n$. Il s'ensuit de (5.18)et (1.9") que pour $i \neq 1$ les matrices L_i dans (1.9$'$) coïncident avec E_i. Ainsi, en vertu de (1.9$'$) les matrices E_i sont non- diagonalisables puisque les matrices B_i dans (5.6) sont non diagonalisables pour $i \neq 1$.

On a aussi que E_i est non diagonalisable. Remarquons que si $c \neq 0$, alors $m = \gamma$, et si $c = 0$, alors l'expression $c(m - B_1^1 + B_1^2)$ dans (5.9) s'annule en vertu de (5.18). Alors, si $m \geq \gamma$, l'élément w_{12} dans (5.9) est de la forme :

$$w_{12} = (\epsilon z^{\gamma_w - 1} + o(z^{\gamma_w - 1}))dz$$

en comparant la dernière égalité avec (5.21) et en utilisant l'égalité $\gamma_w = \gamma_x = \gamma$, établie bien précédemment, on trouve que $\epsilon = 1$ et $\alpha = \frac{u_{22}}{u_{11}} \neq 0$, qui signifie que E_1 est une matrice non diagonalisable.

Cependant, si la représentation monodromie du système construit (3), (5 ,17) est réductible, alors le fait que $G_1, ..., G_n$ soient non diagonalisables impliquerait que la représentation est commutative.

Dans ce cas, on peut déduire de la proposition 3.2.1 que $\gamma_x = 0$, contrairement à l'égalité $\gamma_x = \gamma > 0$ déjà démontrée.

2. On considère le cas où $\gamma = 2\gamma^{``} + 1$ est impair. Dans ce cas la preuve est exactement identique à celle du cas γ pair mais avec la matrice B^i dans (5.17) remplacée par

$$B^1 = \begin{pmatrix} -n+2+\gamma^{``} & 0 \\ 0 & -n+1-\gamma^{``} \end{pmatrix} \tag{5.17'}$$

$$B^i = \begin{pmatrix} \sqrt{d_i c_i} + \frac{2n-3}{2n-2} & d_i \\ -c_i & -\sqrt{d_i c_i} + \frac{2n-3}{2n-2} \end{pmatrix}, \ i \neq 1,$$

avec A_1remplacé par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -n+2+\gamma^{``} & 0 \\ 0 & -n+1-\gamma^{``} \end{pmatrix},$$

et avec les composantes dans (5.18) remplacée par

$$\begin{cases} B_1^1 = \varphi_1^1 = -n+2+\gamma^{``},\ B_1^2 = \varphi_1^2 = -n+1-\gamma^{``}, \\ B_i^j = \rho_i^j = \frac{2n-3}{2n-2},\ i \neq 1,\ j = 1,2. \end{cases}$$

■

Remarque 3.2.1 *Puisque T_1 dans (5.19) a la forme (5.5).(5.8), il s'ensuit que :*

$$\varphi_1(e_{11}^1) = \gamma',\ \varphi_1(e_{12}^1) \geq 0,\ \varphi_1(e_{21}^1) \geq \gamma',\ \varphi_1(e_{22}^1) = -\gamma'.$$

pour les éléments e_{ij}^1 de T_1.

Exemple 3.2.1 *: la représentation monodtromie du système fuchsien*

$$df = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z+1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z-\frac{1}{2}} \right] f \tag{5.22}$$

à quatre points singuliers $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{2}$ de poids fuchsien $\gamma_x = 2$ et les matrices monodromies $G_1, ..., G_n$ sont non diagonalisables

Corollaire 3.2.2 *Le problème Riemann-Hilbert pour une représentation (1) de dimension $p = 3$ a une solution négative si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

a) Chaque générateur G_i du groupe $\operatorname{Im} g$ peut être réduit en un bloc de Jordan.
b) La représentation (1) est réductible.
c) La sous représentation deux dimensionnelle correspondante ou la représentation quotient χ_2 est irréductible et $\gamma_{\chi_2} > 0$.

Preuve. du théorème 2 : Considérons une représentation réductible (1) de dimension $p = 3$ telle que chacune des matrices G_i peut être réduite en un bloc de Jordan et la représentation 2- dimensionnelle correspondante où la représentation quotient χ_2 est réductible. Comme (1) est réductible, il s'ensuit que pour une sous représentation uni-dimensionnelle correspondante ou représentation quotient le nombre

$$r = \sum_{i=1}^{3} \rho_i$$

est un nombre entier, ρ_i étant les valeurs propres des blocs de Jordan E_i. Alors par la proposition 3.2.1, on conclut que γ_{χ_2} est un nombre entier. Puisque χ_2 est irréductible, il s'ensuit de la proposition 3.2.3 pour $n = 3$ que $\gamma_{\chi_2} \leq 1$, et donc $\gamma_{\chi_2} = 0$. Maintenant le théorème 2 suit du corollaire 3.2.2. ∎

Preuve. du théorème 3 :1.On montrera d'abord le théorème pour $p = 3$, il sera ainsi suffisant de construire une représentation (1) qui satisfait les conditions du corollaire 3.2.2. Considérons le système ((3), (5,17)). Comme le nombre de points n est supérieur à 3, il existe des.vecteurs $b_2, ..., b_n$ tels que $b_j \neq 0$ pour $j = 2, ..., n$, et

$$\sum_{j=2}^{n} b_j = 0, \; rang\, 'B^j = 2, \; j = 2, ..., n, \tag{6.1}$$

où on pose

$$'B^1 = \begin{pmatrix} 0 & z^{-\gamma'} & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & B^1 \end{pmatrix}, \quad 'B^i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ 0 & \\ 0 & B^i \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Ici B^j sont les matrices données par (5.17) et $\gamma' = \gamma_{\chi/2}$, où γ_χ est le poids fuchsien de la représentation monodromie (1) de ((3),(5.17)), et $\gamma_\chi > 0$.
Considérons le système ((3),(6.2)). En vertu de (6.1), le système satisfait la condition (4). On suppose que la représentation monodromie du système satisfait les conditions du corollaire 3.2.2.
Il vient de la construction de ((3), (6.2)) que les conditions b) et c) du corollaire 3.2.2 sont satisfaites.
Comme pour $i > 1$ les matrices $'B^i$données par (6.2) peuvent être réduites à des blocs de Jordan, on déduit de (1.9") et (1.9′) que la même chose est vraie pour les matrices E_i, et donc $G_i = \exp(2\pi_i E_i)$.
On considère l'espace des solutions de ((3). (6.2)) dans un voisinage de $a_1 = 0$. Soit $T_1(y)$ la matrice fondamentale de ((3), (5.17)) donnée par (5. 19). Alors :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} \\ 0 & & \\ 0 & & T_1 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

est la matrice fondamentale pour ((3), (6, 2)). En substituant $T(y)$ dans ce système, on obtient

$$\begin{cases} \frac{de_{12}}{dz} = z^{-\gamma'-1}e_{22} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{z-a_i}(b^i_{12}e_{22} + b^i_{13}e_{32}), \\ \frac{de_{13}}{dz} = z^{-\gamma'-1}e_{23} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{z-a_i}(b^i_{12}e_{23} + b^i_{13}e_{33}). \end{cases}$$

comme il s'ensuit de la remarque 3.1.1 que
où $\varphi_1(f)$ est la normalisation de f en $a_1 = 0$, on trouve de (6.4) que

$$\varphi_1(\frac{de_{12}}{dz}) = -1,\ \varphi_1(\frac{de_{13}}{dz}) = -\gamma' - 1 \tag{6.5}$$

Il s'ensuit de (6.5) que $a_1 = 0$ est un point singulier régulier pour ((3), (6.2)).
La matrice E_1 dans la factorisation (1.7) de $T(y)$ a la forme

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

Si l'égalité $\alpha = 0$ fûrent satisfaite, y^{E_1} serait de la forme

$$y^{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \ln y \\ 0 & 1 & \ln y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et e_{12} dans (6.3) serait une fonction méromorphe unique dans un voisinage de $a_1 = 0$. Mais alors $\varphi_1(\frac{de_{12}}{dz})$ serait non négatif si e_{12} (z) fûrent holomorphes et ils seraient inférieures à -1 si e_{12} ait un pôle en $a_1 = 0$. On obtenu une contradiction avec la première égalité dans (6.5). Ceci signifie que $\alpha \neq 0$ dans (6.6) et E_1peut être réduite à un bloc de Jordan. Alors, G_1 a la même propriété. Condition a) du corollaire 3.2.2 est satisfaite.
Ainsi, le problème de Riemann-Hilbert pour la représentation monodromie (2) de ((3) , (6 ,2)) a une solution négative.
2. Considérons les matrices

$${}_p^{\prime}B^i = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {}'B^i \end{pmatrix}}^{P}. \tag{6.7}$$

Pour la représentation monodromie (1). De ((4), (6.22)) il n' y a pas de système fuchsien qui réalisent la représentation. ■

Exemple 3.2.2 *Pour la représentation monodromie (1) du système*

$$df = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} \frac{dz}{z^2} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z+1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z-\frac{1}{2}} \right] f \tag{6.8}$$

à points singuliers réguliers $0, -1, 1, \frac{1}{2}$, il n'y a pas de systmes fuchsiens qui realisent la représentation.

Corollaire 3.2.3 *Soit une représentation (1) de dimension $p = 3$ satisfaisant les conditions a), b), c) du corollaire 3.2.2. Il existe alors un système (2) à monodomie (1) et à points singuliers réguliers $a_1, ..., a_n$ qui est fuchsien en tous les points sauf en un seul, où l'ordre du pôle de la matrice des coefficients est égal à $\frac{\gamma_{\chi_s}}{2} + 1$, et il n'y a pas de tels systèmes ayant un pôle d'ordre inférieur ou égal à $\frac{\gamma_{\chi_s}}{2} + 1$.*

De la proposition 3.1.3 et corollaire 3.2.3, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 3.2.4 *Pour toute représentation (1) de dimension $p = 3$, il y a un système (2) à points snguliers réguliers $a_1, ..., a_n$ et à monodromie (1) qui est fuchsien en tous les points sauf peut être en un point, où l'ordre du pôle de la matrice des coefficients est $\leq \left[\frac{n}{2}\right]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.*

Conclusion

Le problème de Riemann-Hilbert n'est pas résoluble pour une représentation

$$\chi : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1, ..., a_n\}; z_O) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C})$$

de dimension $p = 3$ si seulement si:

1) chacune des matrices $_i$ a une seule valeur propre γ_i et un seul bloc de Jordan.

2)χ n'est pas irréductible.

3) $\prod_{i \in \Sigma} \gamma_i \neq 1$ avec $\Sigma = \{1, \quad \cdots \quad , n\}$

le problème de Riemann-Hilbert n'est pas résoluble pour une représentation

$\chi : \pi_1(P^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1, ..., a_n\}\, ; z_0) \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$

de dimension $p = 3$ si seulement si:

1) chacune des matrices G_i a une seule valeur propre γ_i et un seul bloc de Jordan.

2) χ n'est pas irréductible.

3) $\prod\limits_{i \in \sum} \gamma_i \neq 1$ avec $\sum = \{1, \ldots, n\}$

Bibliographie

[1] A.BEAUVILLE: Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après Bolibruch), Séminaire Bourbaki, 765, 1992-93.

[2] A.A BOLIBRUKH: The Riemann-Hilbert Problem on a complex projective straight line, Mat. Zametki 46 (1989), 118-120.

[3] A.A BOLIBRUKH: Fuchsian systems with reductible monodromy and the Riemann-Hilbert problem. L.N in math 1520, springer-verlag, 1992.

[4] A.A BOLIBRUKH: The Riemann-Hilbert problem, Russian Math. Surveys, 45:2, 1-47 (1990).

[5] A.GANTMACHER: The theory of matrices, vol.II, Chelsea, (1955)

[6] E.A.GODDINGTON and L.LEVINSON: Theory of ordinary differential equations, Mac Graw-Hill, New-York, 1955.

[7] A.H.M.LEVELT: Hypergeometric functions, I-IV, Nederland Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 (1961)

[8] J.PLEMELJ: Problems in the sense of Riemann and Klein, Interscience, New-York, 1964.