

N° d'ordre : 22/2011-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Géométrie

Par : BEDROUNI Samir

THÈME

Sur les feuilletages de Painlevé

Soutenu publiquement, le 11/05/2011, devant le jury composé de :

Mr.	K. BETINA	Professeur,	à l'USTHB	Président
Mr.	D. BEHLOUL	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Melle.	A. LAOUDI	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examineur
Mr.	B. ABBACI	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examineur
Mr.	A. CHABOUR	Maître assistant/A,	à l'USTHB	Invité

À mes parents

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **D. Behloul**, mon Directeur de mémoire, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée.*

*J'exprime ici mes remerciements à Monsieur **K. Betina**, Professeur à l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de mémoire.*

*Je remercie vivement Monsieur **B. Abbaci**, Maître de Conférences à l'USTHB et Mademoiselle **A. Laoudi**, Maître de Conférences à l'USTHB et Monsieur **A. Chabour**, Chargé de Cours à l'USTHB qui ont bien voulu faire partie du jury.*

*Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail. En particulier, j'exprime ma profonde gratitude à Monsieur **D. Smaï**, Chargé de Cours à l'USTHB, pour sa générosité intellectuelle et ses précieux conseils.*

*Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère **Yacine** pour leur soutien tout au long de mes études.*

Sur les feuilletages de Painlevé

Résumé

Dans ce mémoire, nous précisons les notions de feuilletage de Painlevé et de feuilletages uniforme et P-uniforme pour une fibration, et nous établissons à partir des seuls résultats de Gérard-Sec concernant les feuilletages de Painlevé, deux théorèmes qui nous permettront de résoudre, dans une approche purement géométrique, les problèmes de Briot et Bouquet d'une part, de Fuchs d'autre part dans un cas particulier, et cela, sans faire usage du théorème de Ehresmann comme le fait Antoinette Sec.

Mots-clés : Feuilletage uniforme, feuilletage P-uniforme, feuilletage de Painlevé, théorème d'Ehresmann, problème de Briot et Bouquet, problème de Fuchs

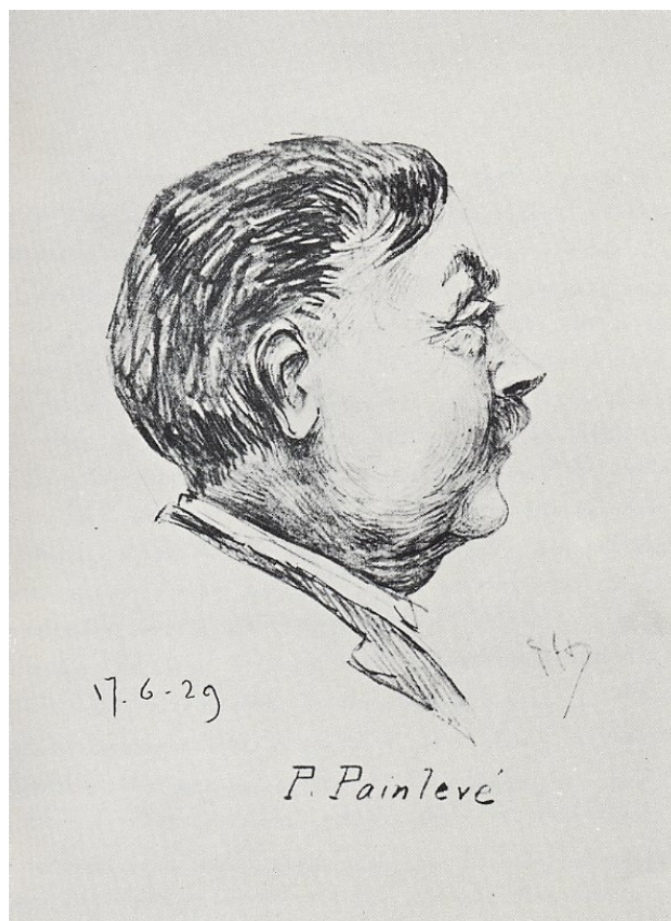
Table des matières

Introduction	1
1 Feuilletages analytiques complexes	5
1.1 Des équations différentielles aux feuilletages	5
1.2 Structure feuilletée sur une variété complexe	8
1.3 Feuilletage associé à un système différentiel holomorphe	11
1.4 Équations différentielles de la forme $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$	12
2 Feuilletages uniformes	15
2.1 Feuilletages transverses	15
2.1.1 Définition et exemples	15
2.1.2 Théorème de Ehresmann	17
2.2 Feuilletages uniformes	19
2.3 Feuilletages transverses et feuilletages uniformes. Théorème A	20
2.4 Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' . . .	20
2.4.1 L'équation de Riccati	21
2.4.2 Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y'	22
2.5 Étude de l'équation de Painlevé $y'' = 6y^2 + x$ (1)	23
3 Feuilletages de Painlevé	27
3.1 Définitions et exemples	27
3.1.1 Feuilletages simples	27
3.1.2 Feuilletages de Painlevé de 1 ^{re} espèce	28

3.1.3	Feuilletages de Painlevé de 2 ^e espèce	30
3.2	Propriétés locales des feuilletages simples	31
3.2.1	Notations et définitions	31
3.2.2	Lemmes fondamentaux	32
3.2.3	Théorème local d'existence de relèvements dans une feuille en un point	36
3.2.4	Définition de l'indice de Gérard-Sec	36
3.2.5	Propriété de l'indice de Gérard-Sec	37
3.3	Feuilletages simples et feuilletages de Painlevé de 1 ^{re} espèce	38
3.3.1	Relèvements de chemins dans une feuille donnée	38
3.3.2	Relèvements de chemins dans les feuilles voisines d'une feuille donnée	39
3.4	Feuilletages simples et feuilletages de Painlevé de 2 ^e espèce	41
3.5	Application	43
3.5.1	Équations différentielles et systèmes différentiels	43
3.5.2	Équations différentielles du 2 ^e ordre	48
3.5.3	Équations de Pfaff complètement intégrables	50
4	Feuilletages P-uniformes	53
4.1	Définition et exemples	53
4.2	Feuilletages transverses et feuilletages P-uniformes	55
4.2.1	Existence et unicité de relèvements de chemins dans une feuille don- née. Théorème B	55
4.2.2	Nouvelle démonstration du théorème A sans Ehresmann	56
4.3	Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'	57
4.3.1	L'équation de Riccati généralisée	57
4.3.2	Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'	58
	Conclusion générale	60
	Bibliographie	60

*« Les Mathématiques constituent un continent solidement agencé,
dont tous les pays sont bien reliés les uns aux autres; l'oeuvre
de Paul Painlevé est une île originale et splendide dans l'océan voisin. »*

H. Poincaré



Un portrait de Paul Painlevé en 1929

Introduction

Le sujet de ce mémoire se rattache aux deux problèmes classiques suivants.

Problème de Briot et Bouquet : Soit $f(y', y) = 0$ une équation différentielle dans le champ complexe, où f est un polynôme en y' et y . Une telle équation sera appelée équation de Briot et Bouquet.

Le problème de Briot et Bouquet consiste à choisir f pour que les solutions de l'équation $f(y', y) = 0$ soient méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Problème de Fuchs : Soit $f(x, y, y') = 0$ une équation différentielle dans le champ complexe où f est un polynôme en y, y' , et holomorphe en x .

Le problème de Fuchs consiste à choisir f pour que les solutions de $f(x, y, y') = 0$ n'aient pas de points critiques mobiles, c'est-à-dire pas de points critiques variant avec la solution considérée.

Les mathématiciens Briot et Bouquet ont résolu autrefois, en 1856, ([BB56]), le problème qui porte leurs noms. Le problème de Fuchs, qui généralise ce dernier, a été résolu partiellement par Fuchs lui-même ([Fuc84]) et Poincaré ([Poi85]) puis complètement par Painlevé [Pai95]. L'étude géométrique de ces deux problèmes a été réalisée complètement par ANTOINETTE SEC dans son exposé [Sec72]. Elle est essentiellement fondée sur l'utilisation du théorème de Ehresmann [Ehr50].

Dans notre contribution à travers ce mémoire, on résout, *géométriquement*, les deux problèmes particuliers suivants.

Problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' ,

Problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'

et ceci, *sans faire appel au théorème d'Ehresmann ([Ehr50]), en se basant uniquement sur les résultats de Gérard-Sec concernant les feuilletages de Painlevé [GS72].*

Le problème de Briot et Bouquet peut être abordé géométriquement de la façon suivante. Au lieu de nous donner une équation différentielle, donnons-nous un feuilletage $\mathcal{F}$ analytique complexe dans une variété analytique complexe E , munie d’une fibration π au-dessus d’une variété B , telle que $\mathcal{F}$ soit transverse à π . Alors, on est amené de façon naturelle, à se poser le problème : les feuilles d’un feuilletage transverse à une fibration sont-elles isomorphes à la base de cette fibration?

La réponse à ce problème se trouve dans le théorème A, que nous avons obtenu, dans un premier lieu, à l’aide du théorème de Ehresmann (sous-sec. 2.1.2), puis, dans un deuxième lieu, par *une nouvelle démonstration en se basant sur le théorème 3.3.1 de Gérard-Sec* [GS72]. *Dans ce théorème, le feuilletage $\mathcal{F}$ est supposé de dimension égale à celle de B , et il est transverse à π ; la démonstration est donnée dans le cas où (E, π, B) est une fibration analytique localement triviale à fibre compacte et à base simplement connexe, mais le résultat est encore valable si on remplace la fibration (E, π, B) , à fibre compacte, par une submersion propre (section 2.3).*

Dans le texte, ce théorème est énoncé à l’aide du vocable de feuilletage uniforme que nous définissons dans le chapitre 2.

Comme application à cette étude, on résout le problème de Briot et Bouquet dans le cas où f est du premier degré en y' .

Concernant le problème de Fuchs, l’idée a germé à partir d’une remarque de Gérard et Sec ([GS72]), ils écrivent : “*Les diverses situations décrites par PAINLEVÉ peuvent être considérées comme cas particuliers de la situation suivante. Au lieu de nous donner une équation différentielle ou un système différentiel, donnons-nous un feuilletage $\mathcal{F}$ analytique complexe dans une variété analytique complexe E , munie d’une projection π sur une variété B , telle que $\mathcal{F}$ soit simple pour π (déf. 3.1.1). Puisque cette notion de feuilletage simple généralise celle de feuilletage transverse, on est amené de façon naturelle, comme PAINLEVÉ, à se poser le problème de relèvement des chemins dans les feuilles d’un feuilletage simple.*”

Cette étude particulière faite par Painlevé se rattache implicitement à la notion de feuilletage holomorphe ; Painlevé a posé le problème de relèvement des chemins dans les graphes des solutions d’une équation différentielle. Notre tâche, est de refaire cette étude en utilisant la notion de feuilletage.

La réponse à ce problème est consignée dans le théorème B (sous-sec. 4.2.1), que nous avons obtenu à partir du théorème 3.3.1 de Gérard-Sec [GS72]. *Dans ce théorème, le feuilletage $\mathcal{F}$ est supposé de dimension égale à celle de B , et il est transverse à π ; la démonstration est donnée dans le cas où (E, π, B) est une fibration analytique localement triviale à fibre compacte, mais le résultat reste vrai dans le cas, plus large, où π est une submersion propre (section 4.2).*

Dans le texte, le théorème B est énoncé à l'aide du vocable de feuilletage P-uniforme que nous définissons dans le chapitre 4. Il assure l'existence et l'unicité de relèvements de chemins. Comme application à cette étude, on résout le problème de Fuchs dans le cas où f est du premier degré en y' .

Suivant cet ordre d'idées, on a structuré notre mémoire en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques propriétés globales des feuilletages analytiques complexes.

Dans le deuxième chapitre, il s'agit de résoudre le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' . Nos démonstrations sont essentiellement fondées sur la considération d'un feuilletage $\mathcal{F}$ analytique dans une variété analytique V munie d'une fibration π analytique, localement triviale, à fibre compacte et à base simplement connexe. Alors, *d'après le théorème A*, le feuilletage $\mathcal{F}$ est uniforme pour π si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est transverse à π .

Dans la sous-section 2.4.1, construite sur un même plan, on met alors en évidence une fibration analytique π_1 et un feuilletage analytique $\mathcal{F}_1$ et on montre que $\mathcal{F}_1$ est uniforme pour π_1 . On en déduit (théorème 2.4.1) une solution particulièrement importante du problème de Briot et Bouquet, à savoir *l'équation de Riccati* $y' = ay^2 + by + c$.

On aura ainsi démontré géométriquement que les solutions de cette équation sont méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Inversement dans la sous-section 2.4.2, on détermine toutes les solutions du problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' .

Dans le troisième chapitre, nous rappelons quelques propriétés globales des feuilletages de Painlevé, à savoir les théorèmes 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1 et la proposition 3.3.1, qui assurent le relèvement des chemins dans les feuilles d'un feuilletage simple. Comme application, on

retrouve les résultats fondamentaux de Paul PAINLEVÉ concernant la nature des singularités mobiles et fixes des solutions des équations différentielles (premier et second ordre) et des systèmes différentiels d'ordre quelconque.

Dans le quatrième chapitre, nous abordons le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y' . Nos démonstrations sont essentiellement fondées sur la considération d'un feuilletage $\mathcal{F}$ analytique dans une variété analytique V munie d'une fibration π analytique, localement triviale, à fibre compacte. Alors, *d'après le théorème B*, le feuilletage $\mathcal{F}$ est P-uniforme pour π si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est transverse à π .

Ceci nous permet de mettre en évidence, dans la sous-section 4.3.1, construite sur un même plan, une fibration analytique π_3 et un feuilletage analytique $\mathcal{F}_3$ et on montre que $\mathcal{F}_3$ est P-uniforme pour π_3 . On en déduit (théorème 4.3.1) une solution particulièrement importante du problème de Fuchs, à savoir *l'équation de Riccati généralisée* :

$$qy' = ay^2 + by + c,$$

où q, a, b, c sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et q n'est pas la fonction nulle.

On aura ainsi démontré géométriquement que les solutions de cette équation n'aient pas de points critiques mobiles.

Inversement dans la sous-section 4.3.2, on détermine toutes les solutions du problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y' .

Nous avons ainsi montré qu'il est possible de résoudre géométriquement, dans le cas général, les deux problèmes cités plus haut et ceci, sans utiliser le théorème de Ehresmann, en se basant sur les théorèmes A et B, les résultats de Gérard-Sec [GS72] et en suivant le même calcul fait par Antoinette Sec dans sa résolution complète de ces problèmes [Sec72].

Chapitre 1

Feuilletages analytiques complexes

Avant d'aborder les feuilletages analytiques complexes, nous examinons comment dans le cas réel la notion de feuilletage se dégage de l'étude des équations différentielles et en est un outil très utile bien que non indispensable.

1.1 Des équations différentielles aux feuilletages

À la fin du XIX^e siècle, Poincaré constate qu'il est impossible d'intégrer explicitement une équation différentielle générale. Il initie alors l'étude qualitative globale des solutions d'une équation différentielle par des méthodes géométriques et topologiques où l'on considère les solutions comme des courbes *non paramétrées*. C'est le début de la géométrisation de l'étude des équations différentielles : *on essaie de déterminer l'allure générale des solutions et leurs positions relatives sur l'équation elle-même sans essayer de la résoudre*.

Plus explicitement, le second membre d'une équation différentielle autonome dans le plan définit un champ de vecteurs et donc, s'il est sans singularités, un champ de droites $D(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Une courbe intégrale de ce champ de droites est une courbe immergée dans le plan, tangente en chacun de ses points x à la droite $D(x)$. Le champ D est dit complètement intégrable si par chaque point du plan passe une courbe intégrale. Tout champ de droites de classe C^1 est complètement intégrable (cela résulte de l'existence de solutions pour les équations différentielles), et $\mathbb{R}^2$ est *l'union disjointe* des courbes intégrales maximales. Ces courbes intégrales sont les supports géométriques (ensembles de points du plan) des solutions

de l'équation différentielle sans paramétrage. On voit là apparaître, implicitement, *un feuilletage* du plan par des courbes dont *le modèle local* est, grâce au théorème du redressement d'un champ de vecteurs sans singularités, le feuilletage de $\mathbb{R}^2$ par des droites.

Dès le XIX^e siècle, les mathématiciens se trouvent confrontés à une généralisation de l'intégrabilité d'un champ de droites. Étant donné un champ de plans Π dans l'espace euclidien à 3 dimensions, on appelle surface intégrale de Π une surface Σ immergée, tangente en chacun de ses points x au plan $\Pi(x)$. Le champ Π est dit complètement intégrable si par chaque point de $\mathbb{R}^3$ passe une surface intégrale. Contrairement à un champ de droites, un champ de plans n'est pas toujours intégrable comme on le voit sur les deux exemples suivants.

1) En chaque point $p = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, on considère le plan

$$\Pi(p) = \{q = p + h; h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3; h_2 - e^x h_1 = 0\}.$$

Ce champ de plans est complètement intégrable. La surface intégrale Σ_p qui passe par le point p est la surface

$$\Sigma_p = \{q = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3; v - e^u - c = 0\},$$

où la constante c est déterminée en écrivant que $p = (x, y, z) \in \Sigma_p$. L'espace $\mathbb{R}^3$ se décompose alors en *la réunion disjointe* des surfaces Σ_p :

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^3} \Sigma_p.$$

Avant de donner un exemple de champ de plans non intégrable, faisons deux remarques :

(i) La donnée du champ de plans Π équivaut à la donnée des deux champs de vecteurs

$$\begin{cases} X(p) = (0, 0, 1), \\ Y(p) = (1, e^x, 0). \end{cases}$$

Une condition nécessaire pour que Π soit complètement intégrable est que $[X, Y](p)$ soit une combinaison linéaire de $X(p)$ et $Y(p)$. Le théorème de Frobenius nous dit que cette condition est en fait suffisante.

(ii) On a une formulation duale, à l'aide de 1-formes, de l'intégrabilité d'un champ de plans. La donnée du champ de plans Π équivaut à la donnée de la forme de Pfaff

$$\omega(p) = dy - e^x dx,$$

le plan $\Pi(p)$ est le noyau de $\omega(p)$. La condition de complète intégrabilité de Frobenius s'écrit

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

2) En chaque point $p = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, on considère le plan

$$\Pi(p) = \{q = p + h; h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3; h_3 - xh_2 + yh_1 = 0\}.$$

Ce champ de plans n'est pas complètement intégrable. Le long de l'axe Oz le champ est horizontal et l'intersection avec un cylindre d'axe Oz est un champ de vecteurs tangentes à des spirales.

De façon analogue à (i), le champ Π est donné par les deux champs de vecteurs

$$\begin{cases} X(p) = (0, 1, x), \\ Y(p) = (1, 0, -y) \end{cases}$$

et si on prend $p = (0, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$, on aura $[X, Y](p) = (0, 0, -2) \notin \Pi(p)$, ce qui remontre la non intégrabilité de Π .

Dualement, le plan $\Pi(p)$ est donné par l'annulation de la forme de Pfaff

$$\omega_p = dz - xdy + ydx.$$

Ce champ de 1-formes ne vérifie pas la condition de complète intégrabilité de Frobenius, en effet un calcul immédiat montre que $\omega \wedge d\omega \neq 0$.

On ne saurait parler de l'apport nouveau de Painlevé ([Pai97]) à l'étude qualitative des équations différentielles mieux que le fait Étienne GHYS ([Ghy99]) ; voici ce qu'il écrit : *"Painlevé, [...], commence une étude de la nature des singularités des solutions des équations différentielles générales. Il a l'intuition de la notion de structure feuilletée et comprend qu'il est préférable de considérer les "solutions" comme des surfaces de Riemann non paramétrées qui sont en général non singulières mais dont les projections sur les axes de coordonnées présentent des singularités. La porte est ouverte pour une étude globale du comportement qualitatif, indépendamment des coordonnées utilisées."*

Cette approche qualitative, développée dans de nombreux travaux dont ceux de Bendixson, Denjoy, Kneser, Seifert..., aboutit à la notion de feuilletage introduite dans les années 1940-1950 par Reeb et Ehresmann ([ER44, Ree52]). D'un point de vue historique,

on peut dire qu'un feuilletage est la géométrisation d'un système différentiel complètement intégrable, *les feuilles* étant les variétés intégrales de ce système.

Les définitions suivantes ont été données, dans le cas réel, par G. Reeb dans sa thèse ([Ree52]). On en trouvera des exposés plus récents dans les textes de Haefliger ([Hae64]), Godbillon ([God91]) et Camacho [CN85].

1.2 Structure feuilletée sur une variété complexe

a) Structure feuilletée triviale de codimension p sur $\mathbb{C}^n$.

Identifions l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^n$ de dimension n au produit $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$; désignons par $x = (x_1, \dots, x_p)$ les p premières coordonnées de $\mathbb{C}^n$ et par $y = (y_1, \dots, y_{n-p})$ les $n - p$ dernières coordonnées.

L'exemple le plus simple d'une structure feuilletée de codimension p sur $\mathbb{C}^n$ est celle dont les feuilles sont les plans $x = Cte$. Désignons par $\mathcal{F}_p$ cette structure. Un *automorphisme local* h de $\mathcal{F}_p$ est par définition un isomorphisme local de $\mathbb{C}^n$ qui préserve localement les feuilles : au voisinage de tout point (x, y) où h est défini, l'isomorphisme $h(x, y) = (X, Y)$ s'exprime par des équations de la forme :

$$\begin{cases} X = h_1(x) \\ Y = h_2(x, y). \end{cases}$$

où h_1 est un isomorphisme local de $\mathbb{C}^p$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une "plaque" dans U est une composante connexe de la trace d'une feuille sur U .

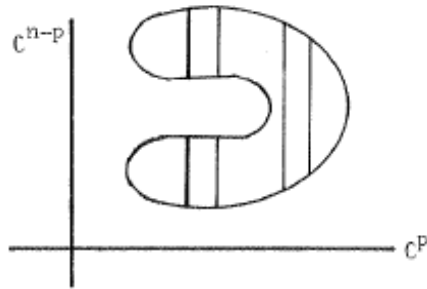


Fig. 1.1

b) Structure feuilletée sur une variété analytique complexe.

Sur une variété complexe V_n de dimension n et à base dénombrable, une structure feuilletée (ou feuilletage) $\mathcal{F}$ de codimension p , ou de dimension $n - p$, est un atlas maximal $\mathcal{A} = (U_i, f_i)_{i \in I}$ tel que pour tout (i, j) , $h_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ est un automorphisme local pour le feuilletage $\mathcal{F}_p$ sur $\mathbb{C}^n$.

Une "plaque" dans U_i pour cette structure feuilletée est, par définition, l'image inverse par f_i d'une "plaque" dans $f_i(U_i)$ pour la structure feuilletée triviale de codimension p sur $\mathbb{C}^n$.

Un ouvert U de V_n est dit *distingué* s'il est isomorphe à un produit de deux disques $P_p \subset \mathbb{C}^p$, $P_{n-p} \subset \mathbb{C}^{n-p}$ tels que les images inverses des "plaques" dans $P_p \times P_{n-p}$ sont des "plaques" dans U .

Il est facile de voir que :

- 1) tous les ouverts distingués de V_n contenant un point m forment un système fondamental de voisinages du point m ;
- 2) pour tout (i, j) , h_{ij} induit un isomorphisme de chaque "plaque" de $f_i(U_i \cap U_j)$ sur une "plaque" de $f_j(U_i \cap U_j)$;
- 3) l'intersection d'un nombre fini de "plaques" est une réunion de "plaques".

La dernière propriété permet de définir une nouvelle structure analytique complexe sur V_n ; les ouverts de cette nouvelle structure sont les "plaques". Il est clair que cette nouvelle structure est plus fine que la structure "initiale" ; V_n munie de cette structure est une variété analytique complexe de dimension $n - p$.

Une *feuille* de la structure feuilletée de codimension p sur V_n est, par définition, une composante connexe de V_n pour la structure fine et avec cette structure une feuille est une sous-variété analytique de dimension $n - p$ de V_n .

Une feuille est dite *propre* si la topologie définie sur la feuille par les "plaques" est la même que la topologie induite sur la feuille par la topologie naturelle de V_n .

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique de codimension p sur une variété analytique complexe V_n et $\mathcal{A} = (U_i, f_i)_{i \in I}$ l'atlas qui définit ce feuilletage.

Une application $g : U \subset V_n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ (U ouvert) est dite *distinguée* si elle est localement de la forme $g = \pi \circ f_i$ où π est la projection canonique de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^p$. Pour tout $i \in I$, les "plaques" dans $U \cap U_i$ sont les images inverses des points de $\mathbb{C}^p$ (Fig. 1.2).

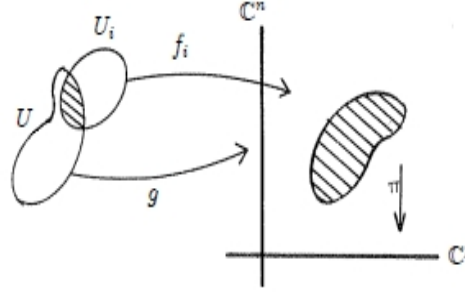


Fig. 1.2

Si f et g sont deux applications distinguées ayant une partie commune dans leur domaine de définition, alors il existe un isomorphisme local h de $\mathbb{C}^p$ telle que $f = h \circ g$.

Maintenant, il est facile de voir qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension p sur V_n est aussi donné par une famille $\{V_i, f_i\}_{i \in J}$ telle que :

- 1) les V_i forment un recouvrement de V_n ;
- 2) $f_i : V_i \longrightarrow \mathbb{C}^p$ sont des submersions ;
- 3) la famille $\{V_i, f_i\}_{i \in J}$ est complète dans le sens suivant : si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ (U ouvert) est une submersion, alors, pour tout i tel que $U \cap V_i \neq \emptyset$ et pour tout $x \in U \cap V_i$, il existe un isomorphisme local h de $\mathbb{C}^p$, tel que $f = h \circ f_i$ au voisinage de x .

Cette définition de feuilletages est la plus naturelle pour l'étude des équations différentielles dans le domaine complexe.

Maintenant, rappelons quelques propriétés élémentaires des feuilles qui seront utilisées plus tard :

- 1) Théorème de la continuité : Si m et m' sont deux points appartenant à la même feuille, alors, pour chaque voisinage distingué U' de m' , il existe un voisinage distingué U de m , tel que chaque feuille rencontrant U transverse U' (Fig. 1.3).

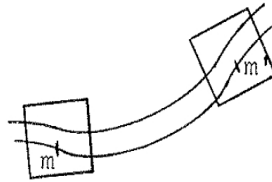


Fig. 1.3

- 2) La relation d'équivalence dont les classes sont les feuilles de $\mathcal{F}$ est ouverte (i.e. les feuilles rencontrant un ouvert de V_n forment un ouvert de V_n).
- 3) L'adhérence dans V_n d'une réunion de feuilles est une réunion de feuilles.

1.3 Feuilletage associé à un système différentiel holomorphe

Soit

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (1.1)$$

un système différentiel holomorphe dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$; cela signifie que F est une application holomorphe de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Choisissons un point (a, b) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Le théorème de dépendance des conditions initiales tel qu'énoncé dans Dieudonné [Die90, page 309] nous permet d'affirmer que pour tout point (a, b) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, il existe un disque ouvert $U \subset \mathbb{C}$ de centre a et un polydisque ouvert $V \subset \mathbb{C}^n$ de centre b tels que, pour tout point $(x_0, y_0) \in U \times V$, il existe une solution unique $x \mapsto \varphi(x, x_0, y_0)$ de (1.1), définie dans U , à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, et telle que $\varphi(x_0, x_0, y_0) = y_0$. De plus, il existe un polydisque ouvert $W \subset V$ de centre b telle que, pour toute donnée initiale (x_0, y_0) dans $U \times W$, la solution $x \mapsto \varphi(x, x_0, y_0)$ est définie dans U et prend ses valeurs dans V . Alors, les graphes dans $U \times W$ des solutions de (1.1) sont des images inverses des points de $\mathbb{C}^n$ par l'application

$$\begin{aligned} \varphi(a, ., .) : U \times W &\longrightarrow V \subset \mathbb{C}^n \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(a, x, y) ; \end{aligned}$$

en effet, si (x_0, y_0) est un point de $U \times W$, on voit que

$$\begin{aligned} \Gamma\varphi(., x_0, y_0)|_{U \times W} &= \Gamma\varphi(., a, \varphi(a, x_0, y_0))|_{U \times W} \\ &= \{(x, y) \in U \times W, y = \varphi(x, a, \varphi(a, x_0, y_0))\} \\ &= \{(x, y) \in U \times W, \varphi(a, x_0, y_0) = \varphi(a, x, y)\} \\ &= \varphi(a, ., .)^{-1}(\varphi(a, x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que la collection $(U \times W, \varphi(a, ., .))$ constitue un système d'applications distinguées pour le feuilletage défini par le système différentiel donné.

1.4. Équations différentielles de la forme $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$

L'application $\varphi(a, \cdot, \cdot)$ est une submersion au voisinage de (a, b) ; en effet,

$$\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x, y) = (a, b)} \varphi(a, x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=b} \varphi(a, a, y) = \frac{\partial y}{\partial y} \Big|_{y=b} = I_n.$$

Soit maintenant $(U_1 \times W_1, \varphi(a_1, \cdot, \cdot))$, $(U_2 \times W_2, \varphi(a_2, \cdot, \cdot))$ deux telles applications définies au voisinage des points (a_1, b_1) , (a_2, b_2) respectivement. Alors, si $(U_1 \times W_1) \cap (U_2 \times W_2)$ est non vide, l'application $y \mapsto \varphi(a_2, a_1, y)$ est un isomorphisme local de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie $\varphi(a_2, x, y) = \varphi(a_2, a_1, \varphi(a_1, x, y))$ sur $(U_1 \times W_1) \cap (U_2 \times W_2)$.

On peut aussi regarder ce feuilletage de la manière suivante : prenons un point (a, b) dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et soit $y = \psi(x, a, b)$ une solution locale en ce point, le prolongement analytique de ψ est une solution de notre système, et le graphe dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de ce prolongement analytique nous donne une feuille du feuilletage associé (Fig. 1.4).

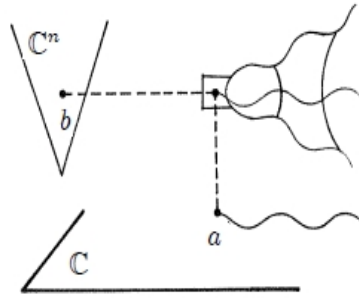


Fig. 1.4

Cette deuxième approche au feuilletage que l'on trouve dans les leçons de Painlevé à Stockholm (1894) (voir [Pai95]) préfigure la notion moderne de feuilletages, et *de ce point de vue, Painlevé aura été le premier feuilleteur* (dixit G. Reeb!!)

1.4 Équations différentielles de la forme $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$

Soient P et Q deux polynômes en y , premiers entre eux, à coefficients holomorphes en x , et où Q n'est pas identiquement nul.

On rappelle que pour une telle équation, il existe deux types de singularités pour une solution (un pôle n'est pas considéré comme une singularité).

1) Singularités fixes : Ces singularités peuvent être déterminées explicitement sur l'équation.

Ce sont :

a) les points $\zeta \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe un η satisfaisant

$$P(\zeta, \eta) = 0 \text{ et } Q(\zeta, \eta) = 0.$$

Les points (ζ, η) sont les singularités du champ de vecteurs défini par l'équation dans $\mathbb{C}^2$.

b) les points $\tilde{\zeta}$ tel que $Q(\tilde{\zeta}, y) = 0$ quel que soit y .

2) Singularités mobiles : Ces singularités dépendent du choix de la solution et ne peuvent pas être déterminées explicitement, sans connaître la solution considérée.

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\omega = Q(x, y)dy - P(x, y)dx = 0$$

et prolongeons cette équation à une équation $\tilde{\omega} = 0$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$.

On note par Σ l'ensemble des singularités de $\tilde{\omega}$. Alors, $\tilde{\omega} = 0$ définit dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} - \Sigma$ un feuilletage analytique. Ce feuilletage peut avoir des feuilles verticales (pour la projection sur $\mathbb{C}$). Ces feuilles sont incluses dans les fibres d'équation $x = \tilde{\zeta}$ tel que $Q(\tilde{\zeta}, y) = 0$ quel que soit y . Sur une telle fibre, il existe toujours un point singulier de $\tilde{\omega}$.

Soit Ξ la projection des points de Σ sur $\mathbb{C}(x)$. L'ensemble Ξ est formé de points isolés parce que P et Q sont premiers entre eux et parce que les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés. On note par $\tilde{\Xi}$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué par la réunion des points de $\mathbb{C}$ tel que la fibre au dessus de chaque point contient une feuille du feuilletage associé à l'équation $\tilde{\omega} = 0$. Les points de $\Xi \cup \tilde{\Xi}$ sont les singularités fixes de notre équation dans le sens donné ci-dessus. On verra plus loin (chapitre 3), que :

a) un point de Ξ est au plus un point singulier transcendant pour la solution et ne peut jamais être un point singulier essentiel.

b) un point de $\tilde{\Xi}$ peut être un point singulier essentiel pour la solution générale.

Une singularité mobile est un point où la feuille a une tangente verticale. Comme on le verra dans le chapitre 3, une telle singularité est au plus algébrique.

Maintenant, on va déterminer les équations de la forme ci-dessus sans singularités mobiles.

Cela signifie que pour une telle équation, le feuilletage associé dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ n'a pas

de feuilles à plan tangent vertical ; ce qui implique que Q doit être indépendant de y et l'équation a la forme suivante :

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x)}.$$

De même, au voisinage de l'infini en y , par le changement de variables $z = \frac{1}{y}$, notre équation s'écrit sous la forme :

$$\{Q(x)\frac{z'}{z^2} + P(x, \frac{1}{z})\}z^m = 0, \text{ où } m = \sup(d^0 P, 2).$$

Pour ne pas avoir des feuilles à plan tangent vertical, il faut que le degré de P est inférieur à 2. Donc, notre équation est une équation de Riccati de la forme :

$$q(x)y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b, c, q sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et q n'est pas la fonction nulle.

Il est facile de voir que cette équation de Riccati n'a pas de points singuliers mobiles.

Chapitre 2

Feuilletages uniformes

Dans ce chapitre, on introduit les notions globales de feuilletage transverse et de feuilletage uniforme pour une fibration.

Le problème abordé est alors d'établir que les feuilles d'un feuilletage transverse à une fibration sont isomorphes à la base de cette fibration. On traite ce problème dans le cas où la fibration est analytique complexe, à fibre compacte et à base simplement connexe. Tout d'abord, on démontre le théorème d'Ehresmann puis, en s'y basant, on obtient le théorème A qui nous permettra par la suite de résoudre, géométriquement, un cas particulier du problème de Briot et Bouquet.

Le théorème A est encore valable si on remplace la fibration analytique complexe à fibre compacte par une submersion analytique complexe propre.

2.1 Feuilletages transverses

2.1.1 Définition et exemples

Soient E et B deux variétés connexes analytiques réelles ou complexes de dimension finie, π une submersion analytique surjective de E sur B , $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Définition 2.1.1 *On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse à la submersion π si, en tout point m de E , la feuille et la fibre passant par m sont transverses.*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira aussi bien que le feuilletage est transverse à π , ou qu'il est transverse à la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Donnons quelques exemples pour illustrer cette notion fondamentale pour la suite.

Exemple 2.1 *Soit*

$$dy - P(x, y)dx = 0$$

une équation de Pfaff dans $\mathbb{C}^2$, où P est un polynôme en y à coefficients holomorphes en x . Cette équation définit dans $\mathbb{C}^2$ un feuilletage transverse à la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)^{(1)}$.

Exemple 2.2 *Soit*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

un système différentielle dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, où les f_i sont des fonctions algébriques en $y_1, \dots, y_n$ et méromorphes en x . Soit S l'ensemble des singularités fixes de (2.1). Alors, ce système définit dans $(\mathbb{C} - S) \times \mathbb{C}^n$ un feuilletage transverse à la fibration triviale de $(\mathbb{C}(x) - S) \times \mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}(x) - S$.

Dans un langage géométrique, ces singularités correspondent aux variétés intégrales de (2.1) dont une équation s'écrit $x = x_0$, où $x_0 \in S$.

Illustrons cet exemple par un cas particulier ; l'équation différentielle $xdy + y^3dx = 0$ a pour ensemble des singularités fixes $S = \{x = 0\}$ et définit dans $(\mathbb{C} - S) \times \mathbb{C}$ un feuilletage transverse à la fibration triviale de $(\mathbb{C}(x) - S) \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}(x) - S$.

Exemple 2.3 *L'équation différentielle $dy - e^z dz = 0$ définit dans $\mathbb{C}^3$ un feuilletage transverse à la fibration triviale de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}^2(x, y)$.*

Contre-exemple 2.1 *L'équation différentielle $dx = 0$ définit un feuilletage de $\mathbb{C}^2$ qui n'est pas transverse à la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$ car les fibres sont des intégrales. Mais ce feuilletage est transverse à la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(y)$.*

Contre-exemple 2.2 *L'équation différentielle $2ydy - dx = 0$ définit un feuilletage de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas transverse à la fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}(x)$ car une feuille qui passe par un point du plan d'ordonnée nulle est tangente à la fibre "verticale" qui passe par ce point. Mais ce feuilletage est transverse à la fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}(y)$.*

⁽¹⁾ $\mathbb{C}(x)$ désigne $\mathbb{C}$ pour lequel on note x la variable courante.

2.1.2 Théorème de Ehresmann

Le résultat suivant dû à EHRESMANN (voir [Ehr50, page 37]), est très utile pour l'étude globale des solutions d'équations différentielles ; dans toute la suite, nous le citerons, chaque fois que nous aurons à le faire, sous le nom " théorème de Ehresmann "

Théorème de Ehresmann *Soient (E, π, B) une fibration analytique à fibre compacte, $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à cette fibration avec $\dim \mathcal{F} = \dim B$. Alors, la restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est un revêtement.*

Remarque 2.1.1 *Ce théorème est encore vrai si $E \xrightarrow{\pi} B$ définit une submersion et si π est une application propre.*

Démonstration : Soit Γ une feuille de $\mathcal{F}$. Puisque, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une submersion, Γ est transverse aux fibres et $\dim(\Gamma) = \dim(B)$, il s'ensuit que $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow B$ est un isomorphisme local. Pour montrer que $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow B$ est un revêtement, il suffit de montrer que, pour tout $b \in B$, il existe un disque $U \subset B$, $b \in U$ tel que pour chaque $x \in U$ la fibre $\pi^{-1}(x)$ rencontre chaque feuille du feuilletage restreint $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(U)}$ en exactement un point.

En fait, les composantes connexes de $\Gamma \cap \pi^{-1}(U)$ sont des feuilles de $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(U)}$. Si V est l'une de ces composantes connexes et si $x \in U$, alors $\pi^{-1}(x) \cap V$ contient exactement un point, donc $\pi|_V : V \longrightarrow U$ est bijective et est un isomorphisme analytique, ce qui montre que $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow B$ est un revêtement.

Afin de construire U , nous montrons d'abord que pour chaque $a \in \pi^{-1}(b)$ il existe un voisinage ouvert distingué Ω_a de a tel que, pour tout $x \in \pi(\Omega_a)$, $\pi^{-1}(x)$ rencontre chaque plaque de Ω_a en exactement un point (Fig. 2.1).

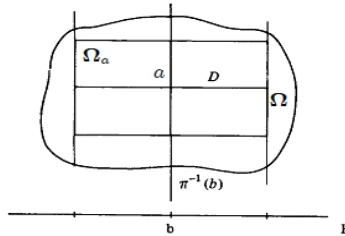


Fig. 2.1

Soit Γ_a la feuille de $\mathcal{F}$ passant par $a \in \pi^{-1}(b)$. Puisque a est un point isolé de $\pi^{-1}(b) \cap \Gamma_a$ dans la topologie fine de Γ_a , il existe un disque $a \in D \subset \Gamma_a$ tel que pour tout $y \in D$, la fibre $\pi^{-1}(\pi(y))$ rencontre D exactement au point y . Cela implique que l'application

$$h : \pi^{-1}(\pi(D)) \longrightarrow D; h(y) = \pi^{-1}(\pi(y)) \cap D$$

est une submersion et que $h(D) = D$. D'autre part, D aurait pu être choisi de sorte que $\overline{D}$ soit contenue dans une plaque d'un ouvert distingué Ω de $\mathcal{F}$. Il est facile de voir maintenant qu'il est possible de construire un voisinage ouvert distingué Ω_a de a tel que $\Omega_a \subset \Omega \cap \pi^{-1}(\pi(D))$ et les plaques de Ω_a rencontrent chaque fibre $\pi^{-1}(x)$ où $x \in \pi(D)$ en exactement un point. Nous laissons les détails au lecteur.

Puisque $\pi^{-1}(b)$ est compacte, on peut choisir un recouvrement fini $(\Omega_i = \Omega_{a_i})_{i=1}^k$ de $\pi^{-1}(b)$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, $\pi(\Omega_i)$ est un voisinage de b dans B , donc $\cap_{i=1}^k \pi(\Omega_i)$ est un voisinage de b dans B . Soit $U \subset \cap_{i=1}^k \pi(\Omega_i)$ un disque contenant b . Si L est une feuille de $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(U)}$, alors L est contenue dans une certaine plaque P de Ω_i pour un certain $i \in \{1, \dots, k\}$. Ainsi, nous pouvons conclure que $\pi|_L : L \longrightarrow U$ est injective. D'autre part, par l'injectivité, il s'ensuit que

$$\pi(L) = \pi(P \cap \pi^{-1}(U)) = \pi(P) \cap U = U.$$

Donc, $\pi|_L : L \longrightarrow U$ est un isomorphisme analytique, ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque 2.1.2 *Ce théorème de Ehresmann n'est plus vrai lorsque la fibre de la fibration n'est pas compacte, comme le montre le feuilletage de $\mathbb{R}^2$, défini par l'équation de Pfaff $dy - y^2 dx = 0$, transverse à la fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}(x)$, et représenté ci-dessous.*

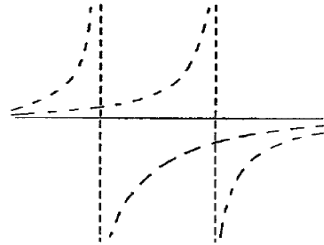


Fig. 2.2

2.2 Feuilletages uniformes

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B (application continue surjective), $\mathcal{F}$ un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Définition 2.2.1 ([Sec71, page 34]) *On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est uniforme pour π si toute feuille de $\mathcal{F}$ est homéomorphe à B par π .*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira indifféremment que $\mathcal{F}$ est un feuilletage uniforme pour π , ou un feuilletage uniforme pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Voici quelques exemples qui illustrent cette notion dont on aura besoin pour la suite.

Exemple 2.1 *L'équation différentielle $xdx + ydy = 0$ définit dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ un feuilletage uniforme pour la fibration triviale de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.*

Exemple 2.2 *L'équation différentielle $xdy + ydx = 0$ définit dans $(\mathbb{C}(x) - \{0\}) \times \mathbb{C}$ un feuilletage uniforme pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}(x) - \{0\}) \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}(x) - \{0\}$.*

Contre-exemple 2.1 *L'équation différentielle $dy + y^2dx = 0$ définit dans $\mathbb{C}^2$ un feuilletage qui n'est pas un feuilletage uniforme pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$ puisque la restriction de cette fibration aux feuilles n'est pas surjective.*

Contre-exemple 2.2 *L'équation différentielle $2xdy - ydx = 0$ définit dans $(\mathbb{C}(x) - \{0\}) \times \mathbb{C}$ un feuilletage qui n'est pas un feuilletage uniforme pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}(x) - \{0\}) \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}(x) - \{0\}$ puisque la restriction de cette fibration aux feuilles n'est pas injective.*

Remarque 2.2.1 *De manière plus générale, on pourrait appeler feuilletage uniforme dans une variété topologique E , tout feuilletage $\mathcal{F}$ de E pour lequel il existe une variété topologique B et une projection π de E sur B telle que $\mathcal{F}$ soit uniforme pour π .*

2.3 Feuilletages transverses et feuilletages uniformes.

Théorème A

Dans cette section, on se place dans un environnement analytique complexe mais, le théorème qui va suivre est aussi valable dans le domaine analytique réel.

On se donne (E, π, B) une fibration analytique complexe localement triviale à fibre compacte et à base simplement connexe. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique dans E de dimension égale à celle de B , transverse à (E, π, B) .

Nous étudions la possibilité d'établir que toute feuille de $\mathcal{F}$ est isomorphe à B par π .

Nous obtenons une propriété globale, pour une feuille quelconque de $\mathcal{F}$.

Théorème A *Si la fibration (E, π, B) est à fibre compacte et à base simplement connexe et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique transverse à cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage uniforme pour (E, π, B) .*

Remarque 2.3.1 *Le théorème A est encore vrai si on remplace la fibration analytique complexe (E, π, B) , à fibre compacte, par une submersion propre.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{F}$ est transverse à π , et soit Γ une feuille quelconque de $\mathcal{F}$. Puisque la fibration (E, π, B) est à fibre compacte, la restriction de π à Γ est un revêtement d'après le théorème de Ehresmann. Puisque B est simplement connexe, π restreinte à Γ est un isomorphisme analytique. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc uniforme. ■

2.4 Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y'

On montre dans cette partie qu'on peut finalement résoudre, géométriquement, le problème de Briot et Bouquet dans le cas où f est du premier degré en y' . On utilise, à cet effet, le théorème A de ce mémoire, et on en construit une solution particulièrement importante, à savoir l'équation de Riccati.

2.4.1 L'équation de Riccati

Soit

$$y' = ay^2 + by + c \quad (a, b, c \in \mathbb{C}) \quad (2.1)$$

une équation de Riccati.

Nous démontrons géométriquement la propriété (connue) suivante.

Théorème 2.4.1 *Les solutions de l'équation (2.1) sont méromorphes sur $\mathbb{C}$.*

Pour cela, on met en évidence un feuilletage $\mathcal{F}_1$ et une fibration π_1 à fibre compacte tels que le théorème 2.4.1 ci-dessus soit équivalent à la proposition 2.4.1 suivante.

Proposition 2.4.1 *Le feuilletage $\mathcal{F}_1$ est uniforme pour π_1 .*

Préambule : Les graphes des solutions de (2.1) sont les courbes intégrales du champ de directions

$$D : (x, y) \longrightarrow (1, ay^2 + by + c)$$

dans $\mathbb{C}^2$.

Il est clair que ces courbes sont les feuilles d'un feuilletage de $\mathbb{C}^2$ et que ce feuilletage est transverse à la fibration triviale :

$$\mathbb{C}(x) \times \mathbb{C}(y) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}(x).$$

Mais, la fibre de cette fibration n'est pas compacte.

Cela nous amène, selon la terminologie consacrée, à compactifier⁽¹⁾ $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Démonstration : La fibration π_1

La projection canonique de $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ définit dans $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ une fibration analytique π_1 triviale, à fibre compacte et à base simplement connexe.

Le feuilletage $\mathcal{F}_1$

⁽¹⁾En fait, il s'agit de compactifier la fibre $\mathbb{C}$ de π en $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit $(O, x, y), (O', x, z)$ un atlas de $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ avec le changement de cartes $yz = 1$. Le couple suivant d'équations de Riccati définit dans $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ un feuilletage $\mathcal{F}_1$:

$$\begin{cases} y' = ay^2 + by + c \\ -z' = a + bz + cz^2 \end{cases}$$

En effet, ces équations définissent respectivement dans O et O' des feuilletages, qui coïncident sur $O \cap O'$.

Conséquence

Il est clair que, dans ces conditions, le théorème 2.4.1 et la proposition 2.4.1 sont équivalents.

Or, le feuilletage $\mathcal{F}_1$ est transverse à π_1 . Donc, d'après le théorème A, le feuilletage $\mathcal{F}_1$ est uniforme. ■

Remarque 2.4.1 *Le théorème 2.4.1 est encore vrai si a, b, c sont des fonctions entières. Mais ceci est, pour le moment, en dehors de notre sujet.*

2.4.2 Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y'

Soit

$$f(y', y) = a_0(y)y' + a_1(y) = 0 \tag{2.2}$$

une équation de Briot et Bouquet, où a_0 et a_1 sont des polynômes premiers entre eux.

Dans ce cas, la réponse au problème de Briot et Bouquet s'exprime classiquement de la façon suivante :

Théorème 2.4.2 *L'équation de Riccati est la seule solution au problème de Briot et Bouquet lorsque le degré de f est égal à 1.*

Nous en donnons la démonstration géométrique suivante.

Démonstration : Le feuilletage $\mathcal{F}_2$

En adoptant les mêmes notations que dans la sous-section 2.4.1, on voit que le couple d'équations suivant définit un feuilletage $\mathcal{F}_2$ dans $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$:

$$\begin{cases} a_0(y)y' + a_1(y) = 0, \\ \{-a_0(\frac{1}{z})\frac{z'}{z^2} + a_1(\frac{1}{z})\}z^m = 0, \text{ où } m = \sup(d^0a_1, 2 + d^0a_0). \end{cases}$$

Conséquence

Si les solutions de (2.2) sont méromorphes sur $\mathbb{C}$, le feuilletage $\mathcal{F}_2$ est transverse à la fibration π_1 . Il s'ensuit que le degré de a_0 est nul et que le degré de a_1 est inférieur à 2. Donc, l'équation (2.2) est de Riccati.

Ainsi, compte tenu du théorème 2.4.1, le théorème 2.4.2 est démontré. ■

2.5 Étude de l'équation de Painlevé $y'' = 6y^2 + x$ (1)

Lorsque l'on a une équation de type $y'' = f(x, y, y')$ avec f holomorphe en (x, y, y') on pose habituellement : $y' = z$ ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

qui définit une structure feuilletée dans $\mathbb{C}^3_{(y,z,x)}$.

En particulier pour l'équation (1) on obtient :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 6y^2 + x \end{cases} \quad (2.1)$$

et si l'on raisonne en termes de champs de vecteurs dans $\mathbb{C}^3$, elle correspond aux champs de composantes :

$$\begin{cases} Y = z \\ Z = 6y^2 + x \\ X = 1 \end{cases}$$

Ce qui montre, puisque $X = 1$, que le feuilletage est transverse aux fibres de la fibration triviale :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} &\xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \\ ((y, z), x) &\longrightarrow x \end{aligned}$$

Malheureusement cette propriété ne donne pas de renseignements topologiques suffisants qui nous permettraient de conclure à *l'uniformité des solutions*. On va alors essayer de compactifier la fibre $\mathbb{C}^2$ de π pour obtenir de nouveaux résultats.

Compactification de $\mathbb{C}^2$:

1) $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$:

On considère dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ les cartes naturelles : $(O_1, \phi_1), (O_2, \phi_2), (O_3, \phi_3), (O_4, \phi_4)$ et les coordonnées locales correspondantes : $(y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$, les changements de cartes étant :

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{y_1}, & z_2 &= z_1 & \text{sur } O_1 \cap O_2 \\ y_3 &= y_1, & z_3 &= \frac{1}{z_1} & \text{sur } O_1 \cap O_3 \\ y_4 &= \frac{1}{y_1}, & z_4 &= \frac{1}{z_1} & \text{sur } O_1 \cap O_4. \end{aligned}$$

On identifie $\mathbb{C}^2$ à O_1 . Dans O_4 le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} -y'_4 z_4 = y_4^2 \\ -z'_4 y_4^2 = (xy_4^2 + 6)z_4^2 \end{cases}$$

On voit que : — le point $y_4 = z_4 = 0$ est un point singulier du système ;

- $y_4 = 0, z_4 \neq 0$ est une solution particulière ;
- $y_4 \neq 0, z_4 = 0$ est aussi une solution particulière.

Les feuilles correspondant à ces solutions particulières seront dites singulières.

Lorsque l'on enlève l'ensemble singulier $y_4 = z_4 = 0$ on obtient une structure feuilletée transverse aux fibres de π , sauf pour les feuilles singulières (deux dans chaque fibre) et cette propriété est due à la forme très particulière de l'équation considérée.

Les renseignements obtenus sont néanmoins insuffisants pour conclure. On va essayer une compactification de $\mathbb{C}^2$ qui permet de résoudre le problème dans le cas des équations différentielles des fonctions elliptiques.

2) 2^e compactification de $\mathbb{C}^2$:

On identifie $\mathbb{C}^2$ à l'espace tangent $T(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ et on plonge analytiquement $\mathbb{C}^2$ dans $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{P}^1(\mathbb{C}))$, qui est le compactifié du fibre tangent à $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ obtenu en ajoutant un point à l'infini dans chaque fibre. On peut alors utiliser un atlas possédant quatre cartes $(O_1, \phi_1), (O_2, \phi_2), (O_3, \phi_3), (O_4, \phi_4)$, les changements de cartes étant alors donnés par :

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{y_1}, & z_2 &= -\frac{z_1}{y_1^2} & \text{sur } O_1 \cap O_2 \\ y_3 &= y_1, & z_3 &= \frac{1}{z_1} & \text{sur } O_1 \cap O_3 \\ y_4 &= \frac{1}{y_1}, & z_4 &= -\frac{y_1^2}{z_1} & \text{sur } O_1 \cap O_4. \end{aligned}$$

(y_i, z_i) étant les coordonnées locales dans la carte (i) , et $\mathbb{C}^2$ étant identifié à O_1 .

Dans la carte 2 on obtient le système :

$$\begin{cases} y'_2 = z_2 \\ y_2 z'_2 = 2z_2^2 - 6y_2 - xy_2^3. \end{cases}$$

Mais cela ne nous donne pas beaucoup plus de résultats que la compactification précédente. On va maintenant essayer d'utiliser l'idée originale de Painlevé.

3) Compactification de Painlevé :

Considérons d'abord : $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ (le plongement de $\mathbb{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ étant habituel) et l'application ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^* \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) & \mathbb{C}^* &= \mathbb{C} - \{0\} \\ (u, v) &\longmapsto \left(y = \frac{1}{u^2}, z = -2u^{-3} - \frac{xu}{2} - \frac{u^2}{2} + vu^3 \right) \end{aligned}$$

Recollons $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ le long de ϕ . L'espace quotient obtenu est homéomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, donc compact. il est en outre muni d'une structure complexe qu'il serait très intéressant d'étudier. Cette compactification de $\mathbb{C}^2$ due à Painlevé a des

propriétés remarquables : En un point (u, v) le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} u' = 1 + \frac{xu^4}{4} + \frac{u^5}{4} - \frac{vu^6}{2} \\ v' = \frac{x^2u}{8} + \frac{3xu^2}{8} + \frac{u^3}{4} - xvu^2 - \frac{3}{4}vu^4 + \frac{3}{2}v^2u^5 \end{cases} \quad (2.2)$$

Remarquons que la deuxième équation ressemble à une équation de Riccati, d'ailleurs lorsque l'on change v en $V = \frac{1}{v}$ on obtient une équation analogue. Le changement montre de plus que le point $u = V = 0$ est un point singulier. On va néanmoins pouvoir conclure. En effet :

Pour $u = 0, v = v_0$ le feuilletage est bien défini et transverse à cette droite puisque $u' = 1$. Comme $y = \frac{1}{u^2}$ les solutions qui passent par $u = 0$ sont des solutions régulières ayant des pôles d'ordre 2 en $u = 0$.

Pour terminer la démonstration, il reste à montrer que les feuilles du feuilletage n'ont pas de points " $V = 0$ " dans leur adhérence, ce que l'on fait en utilisant un raisonnement difficile, de type "analyse" que l'on trouve dans Hille ou dans les travaux de Painlevé par exemple.

Le seul point singulier du système (2.2) étant le point $u = V = 0$, on aura donc prouvé que toutes les solutions sont méromorphes et la propriété sera démontrée.

Chapitre 3

Feuilletages de Painlevé

Dans ce chapitre, on introduit les notions (locales) de feuilletage simple et (globales) de feuilletage de Painlevé pour une fibration.

Le problème abordé est alors celui du relèvement des chemins dans les feuilles d'un feuilletage simple. On traite ce problème dans le cas où la fibration est analytique complexe et à fibre compacte. En se basant sur les résultats de Gérard-Sec ([GS72]), on obtient les théorèmes 3.3.1 et 3.4.1 qui sont une généralisation géométrique naturelle des résultats fondamentaux de Paul PAINLEVÉ concernant la nature des singularités mobiles et fixes des solutions des équations différentielles (premier et second ordre) et des systèmes différentiels d'ordre quelconque.

Ces résultats sont encore valables si on remplace la fibration analytique complexe à fibre compacte par une submersion analytique complexe propre.

3.1 Définitions et exemples

3.1.1 Feuilletages simples

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie. On se donne une projection π de E sur B (application continue surjective).

Définition 3.1.1 ([GS72]) *On dira qu'un feuilletage défini dans E est simple pour la projection π de E sur B si, en tout point m de E , il existe un voisinage distingué de m dans lequel la plaque de m rencontre $\pi^{-1}(\pi(m))$ au point isolé m .*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira aussi bien que le feuilletage est simple pour π , ou qu'il est simple pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Exemple 3.1 *Tout feuilletage transverse à une fibration de E est simple pour cette fibration.*

Exemple 3.2 *Si (E, π, B) est un revêtement de B , tout feuilletage de E est simple pour cette fibration.*

Exemple 3.3 *Soit*

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (3.1)$$

une équation de Pfaff dans $\mathbb{C}^2$ dont les coefficients P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Soit S l'ensemble des points singuliers de ω . Alors, si l'équation (3.1) n'admet pas de variété intégrale $x = Cte$, elle définit dans $\mathbb{C}^2 - \pi^{-1}(\pi(S))$ un feuilletage simple pour la fibration triviale $(\mathbb{C}^2 - \pi^{-1}(\pi(S)), \pi, \mathbb{C}(x) - \pi(S))$, où π est la projection canonique de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$.

Un exemple analogue est donné par une forme de Pfaff complètement intégrable sur $\mathbb{C}^n$.

3.1.2 Feuilletages de Painlevé de 1^{re} espèce

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B , $\mathcal{F}$ un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Un chemin dans B (resp. dans E) est un couple (l, I) constitué par un segment I de $\mathbb{R}$ (fermé ou semi-ouvert) et une application continue de I dans B (resp. dans E).

Définition 3.1.2 ([GS72]) *Soient $(l, [0, 1])$ un chemin dans B , et m un point de $\pi^{-1}(l(0))$.*

On dira que $(l, [0, 1])$ est relevable en m dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par m s'il existe dans E un chemin $(\hat{l}, [0, 1])$ d'origine m , tel que $\pi \circ \hat{l} = l$ et tel que $\hat{l}([0, 1])$ soit contenu dans la feuille de m .

Le chemin $(\hat{l}, [0, 1])$ est appelé un relèvement en m de $(l, [0, 1])$ dans la feuille de m .

Définition 3.1.3 ([GS72]) *On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π si tout chemin $(l, [0, 1])$ dans B est relevable en tout point m de $\pi^{-1}(l(0))$ dans la feuille de m .*

Conséquence 3.1.1 ([GS72]) *La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est surjective.*

Démonstration : Soient Γ une feuille arbitraire de $\mathcal{F}$, et x un point de B . Montrons qu'il existe a dans Γ tel que $\pi(a) = x$. Si m est un point quelconque de Γ , comme B est connexe, donc connexe par arcs, soit $(l, [0, 1])$ un chemin dans B d'origine $\pi(m)$ et d'extrémité x . Puisque $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce, le chemin $(l, [0, 1])$ est relevable en m dans la feuille Γ . Soit $(\hat{l}, [0, 1])$ un relèvement en m de $(l, [0, 1])$ dans la feuille Γ . Il suffit donc de prendre $a = \hat{l}(1)$. ■

Exemple 3.1 *Tout feuilletage transverse à une fibration à fibre compacte est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour cette fibration. Ceci découle du théorème de Ehresmann d'une part, c'est à dire du fait que la restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est un revêtement et, d'autre part, du fait que les revêtements ont la propriété de relèvement des chemins.*

Exemple 3.2 *L'équation différentielle $\frac{dp}{d\theta} = p(1 - p^2)$ (où p et θ sont les coordonnées polaires d'un point du plan) définit un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ sur le cercle $p = 1$.*

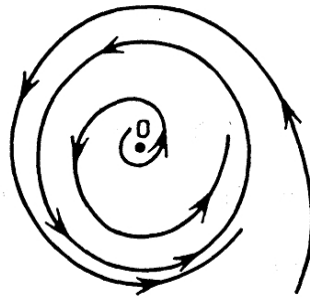


Fig. 3.1

Exemple 3.3 *L'équation différentielle $2ydy - dx = 0$ définit dans $\mathbb{C}^2$ un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$. (Ce feuilletage n'est pas transverse à la fibration.)*

Contre-exemple 3.1 *L'équation différentielle $dy - P(x, y)dx = 0$, où P est un polynôme de degré supérieur à 1, définit un feuilletage de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}(x)$ car les feuilles admettent des asymptotes $x = Cte$.*

Contre-exemple 3.2 *L'équation $dx = 0$ définit un feuilletage de $\mathbb{C}^2$ qui n'est pas un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$: seuls, les chemins dont l'image est réduite à un point sont relevables dans les feuilles.*

Remarque 3.1.1 *De manière plus générale, on pourrait appeler feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce, dans une variété topologique E , tout feuilletage $\mathcal{F}$ de E pour lequel il existe une variété topologique B et une application continue surjective π de E sur B telle que $\mathcal{F}$ soit de Painlevé de 1^{re} espèce pour π .*

3.1.3 Feuilletages de Painlevé de 2^e espèce

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B , S un sous-ensemble non vide de E tel que, pour tout x de B , l'ensemble S rencontre $\pi^{-1}(x)$ en des points isolés.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage défini dans $E - S$, dont la dimension est celle de B .

Définition 3.1.4 *([GS72]) On dira que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour π si, pour tout chemin $(l, [0, 1])$ de B relevable en un point m de $\pi^{-1}(l(0)) - S$ dans la feuille de m , le chemin $(l, [0, 1])$ est relevable en m dans l'adhérence de la feuille de m relativement à E .*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira indifféremment que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour π , ou un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Conséquence 3.1.2 *([GS72]) La restriction de π à l'adhérence dans E d'une feuille est surjective.*

Remarque 3.1.2 Soit m un point de $\pi^{-1}(l(0)) - S$, et soient Γ et $\bar{\Gamma}$ la feuille de m et l'adhérence de Γ relativement à E . Conformément à la définition précédente, il peut arriver que le relèvement de $(l,]0, 1])$ en m se trouve dans $\bar{\Gamma} - \Gamma$.

Mais, si le feuilletage $\mathcal{F}$ est à la fois un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour π , et un feuilletage simple pour π , un tel fait ne peut plus se produire à cause du théorème 3.2.1.

Exemple 3.1 L'équation différentielle $x dx + y dy = 0$ définit dans $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$ [tout chemin de $\mathbb{C}(x)$ est relevable dans l'adhérence dans $\mathbb{C}^2$ de la feuille $x + iy = 0$, mais il existe des chemins non relevables dans cette feuille].

Exemple 3.2 L'équation de Pfaff $z dz + y dy + (z^2 + y^2) dx = 0$ définit dans $\mathbb{C}^3$ privé de la droite complexe $y = z = 0$ un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}^2(x, y)$.

3.2 Propriétés locales des feuilletages simples

3.2.1 Notations et définitions

E, B , variétés analytiques complexes connexes de dimension finie ;

(E, π, B) , fibration analytique complexe localement triviale ;

n , dimension de B ;

$n + p$, dimension de E ;

a , point quelconque de E ;

$\mathcal{F}$, feuilletage analytique dans E de dimension n , simple pour (E, π, B) ;

Ω_a , voisinage ouvert distingué de a ;

$\gamma_a, \gamma_a = \pi^{-1}(\pi(a)) \cap \Omega_a$;

$(l, [0, 1])$, chemin dans B tel que $l(0) = \pi(a)$.

Définition 3.2.1 ([GS72]) Nous dirons que deux chemins $(l_1, [0, \varepsilon_1])$ et $(l_2, [0, \varepsilon_2])$, dans une variété V , définissent le même germe de chemin au point $l(0)$, s'il existe ε dans $]0, \inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}]$ tel que $l_1|_{[0, \varepsilon]} = l_2|_{[0, \varepsilon]}$, $l_1(0) = l_2(0) = l(0)$.

Définition 3.2.2 ([GS72]) *Le germe de chemin, défini par $(l, [0, 1])$ au point $l(0)$, est relevable en a dans la feuille de a , s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le chemin $(l|_{[0, \varepsilon]}, [0, \varepsilon])$ soit relevable en a dans la feuille de a .*

Définition 3.2.3 ([GS72]) *Si $(\hat{l}, [0, \varepsilon])$ est un relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$, le germe, défini au point a par $(\hat{l}, [0, \varepsilon])$, est un relèvement en a dans la feuille de a du germe défini au point $l(0)$ par $(l, [0, 1])$ [ou par $(l, [0, 1])$].*

Le problème qui se pose est celui de l'existence de relèvements de germes de chemins dans une feuille de $\mathcal{F}$ en un point donné de cette feuille.

Pour cela, on démontre deux lemmes fondamentaux.

Remarque 3.2.1 *Les résultats qui suivent, établis dans l'article de Gérard-Sec ([GS72]), sont valables dans le domaine analytique complexe grâce aux théorèmes de Remmert ([RS53]), mais non en général dans le domaine analytique réel, comme le montre, par exemple, le feuilletage de $\mathbb{R}^2$ représenté ci-dessous [fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}(x)$].*

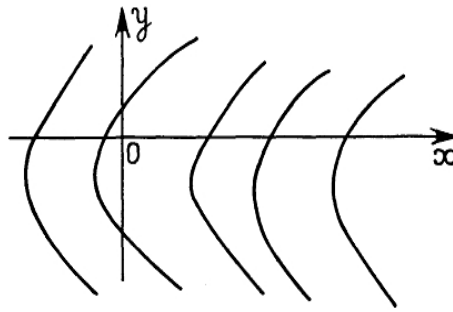


Fig. 3.2

Remarque 3.2.2 *On se limite au cas où $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, de façon à rendre le mémoire plus clair. Mais les résultats obtenus sont encore valables si π est une submersion (voir la remarque 3.2.3) comme on le constate aisément dans les démonstrations qui suivent.*

3.2.2 Lemmes fondamentaux

Lemme 3.2.1 ([GS72]) *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour la fibration localement triviale (E, π, B) , et si la dimension de $\mathcal{F}$ est égale à celle de B , il existe, pour tout*

point a de E , un voisinage ouvert distingué Ω_a de a tel que toute plaque de $\mathcal{F}$ dans Ω_a rencontre toute fibre dans Ω_a . Le nombre de points de rencontre est fini.

Démonstration : Puisque la fibration est localement triviale, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans E , des polydisques $U : |x| < \alpha$ dans $\mathbb{C}^n$ et $V : |y| < \beta$ dans $\mathbb{C}^p$ et des isomorphismes analytiques φ_a et φ'_a tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_a & \xrightarrow{\varphi_a} & U \times V \\ \pi|_{V_a} \downarrow & & \downarrow p \\ \pi(V_a) & \xrightarrow{\varphi'_a} & U \end{array}$$

(p est la projection canonique de $U \times V$ sur U).

On supposera $\varphi_a(a) = (0, 0)$.

Puisque φ_a est un isomorphisme de fibrés, le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ dans V_a se transforme par φ_a en un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ (de dimension n) dans $U \times V$, qui est simple pour la fibration triviale de $U \times V$ sur U .

Il suffit donc de démontrer le lemme pour le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ et de transporter le résultat dans (E, π, B) par l'isomorphisme φ_a^{-1} .

Soit Ω_0 un voisinage ouvert distingué de $(0, 0)$ pour $\tilde{\mathcal{F}}$ tel que la plaque de $(0, 0)$ rencontre la fibre de 0 au seul point $(0, 0)$.

Il existe un isomorphisme analytique h_0 de Ω_0 sur le produit du polydisque $U_1 : |x| < 1$ de $\mathbb{C}^n$ et du polydisque $V_1 : |y| < 1$ de $\mathbb{C}^p$ tels que :

- (1) $h_0(0, 0) = (0, 0)$;
- (2) toute plaque dans $U_1 \times V_1$ est une variété linéaire d'équation $y_1 = y_1^0$

$$\begin{array}{ccc} U \times V \supset \Omega_0 & \xrightarrow{h_0} & U_1 \times V_1 \\ \downarrow p & \downarrow p|_{\Omega_0} & \downarrow p_1 \\ U \supset p(\Omega_0) & & U_1 \end{array}$$

Soit

$$\begin{cases} x = h(x_1, y_1), \\ y = k(x_1, y_1) \end{cases}$$

l'expression de h_0^{-1} .

Une plaque dans Ω_0 est l'ensemble des points (x, y) tels que

$$\begin{cases} x = h(x_1, y_1^0), \\ y = k(x_1, y_1^0). \end{cases}$$

Puisque $\tilde{\mathcal{F}}$ est un feuilletage simple pour p , le système

$$\begin{cases} 0 = h(x_1, 0), \\ y = k(x_1, 0) \end{cases}$$

admet la seule solution $(x_1, y) = (0, 0)$.

Soit G la variété analytique d'équations

$$\begin{cases} x = h(x_1, y_1), \\ y = k(x_1, y_1) \end{cases}$$

dans $U \times V_1 \times U_1 \times V$, muni de la projection canonique $\tilde{p}$ sur $U \times V_1$.

Puisque le système

$$\begin{cases} 0 = h(x_1, 0), \\ y = k(x_1, 0) \end{cases}$$

a pour seule solution $(x_1, y) = (0, 0)$, $\tilde{p}^{-1}(0, 0)$ rencontre G au seul point $(0, 0, 0, 0)$.

On peut appliquer le théorème de plongement de Remmert à G .

Donc, il existe un polydisque $U' \subset U$ et un polydisque $V'_1 \subset V_1$ tels que la trace de G sur $\tilde{p}^{-1}(U' \times V'_1)$ soit un revêtement ramifié (à k feuillets) de $U' \times V'_1$ par $\tilde{p}^{-1}$.

Alors, si on pose $h_0^{-1}(U' \times V'_1) = \Omega'_0$, on a la propriété suivante. Pour tout x de U' , $p^{-1}(x)$ rencontre toute plaque dans Ω'_0 .

L'intersection de Ω'_0 et $p^{-1}(U')$ est donc un voisinage de $(0, 0)$ qui a la propriété requise.

■

Lemme du relèvement local des chemins : ([GS72])

Soient U le polydisque $|x| < \alpha$ dans $\mathbb{C}^n$ et V le polydisque $|y| < \beta$ dans $\mathbb{C}^p$. Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est simple pour la fibration triviale $U \times V \xrightarrow{p} U$, et si la dimension de $\mathcal{F}$ est

égale à n , le germe de chemin défini dans U par $(l, [0, 1])$ au point $l(0) = 0$ est relevable au point 0 de $p^{-1}(l(0))$ dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par ce point.

Démonstration : Si la feuille de 0 est transverse à la fibre, le théorème est évident.

Sinon, on considère un voisinage ouvert distingué Ω_0 de 0 tel que la plaque P_0 de 0 rencontre la fibre de 0 au seul point 0 dans Ω_0 .

Cette plaque P_0 est une variété analytique de dimension n dans Ω_0 .

Nous pouvons lui appliquer le théorème de plongement de Remmert ([RS53], p.276).

On en déduit qu'il existe un polydisque $\tilde{U} : |x_i| < \alpha'_i < \alpha$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et un polydisque $\tilde{V} : |y_i| < \beta'_i < \beta$ ($i = 1, 2, \dots, p$) et un plongement $\mathcal{M}$ de P_0 dans $\tilde{U} \times \tilde{V}$ tels que

(i) $\mathcal{M}$ est défini par q équations pseudopolynomiales distinguées :

$$P_i(x, y_i) = y_i^{k_i} + a_{i1}(x)y_i^{k_i-1} + \dots + a_{ik_i}(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, q),$$

où les $a_{ij}(x)$ sont des fonctions holomorphes sur $\tilde{U}$ et nulles au point $x = 0$.

(ii) $P_0 \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ est une composante irréductible $\mathcal{M}_\lambda$ de $\mathcal{M}$ dans $\tilde{U} \times \tilde{V}$.

(iii) L'ensemble $\mathcal{M}_\lambda^*$ des points de $\mathcal{M}_\lambda$, où $\mathcal{M}_\lambda$ est transverse à la fibration triviale $\tilde{U} \times \tilde{V} \xrightarrow{p} \tilde{U}$ est dense dans $\mathcal{M}_\lambda$.

Tout revient alors à montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$ en 0 dans $\mathcal{M}_\lambda$.

Pour cela, on se réfère à la démonstration de la proposition 2 de ([RS53], p.276).

Soit W un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_\lambda$, et soit m un point de $W \cap \mathcal{M}_\lambda^*$.

Dans un voisinage de m dans U , $\mathcal{M}_\lambda^*$ est représenté par des équations de la forme

$$\begin{aligned} y_1 + c_1(x) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ y_p + c_p(x) &= 0, \end{aligned}$$

où $c_1, c_2, \dots, c_p$ sont holomorphes sur un voisinage de $p(m)$ dans $\tilde{U}$.

On montre dans [RS53] que ces fonctions se prolongent à $\tilde{U}$ de façon continue (mais multiforme) et leurs prolongements sont racines des pseudopolynômes $P_i(x, y_i)$ qui définissent $\mathcal{M}$.

Puisque la restriction de p à $\mathcal{M}_\lambda$ est surjective, et d'après (ii), on a un relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$ en 0 dans $\mathcal{M}_\lambda$ qui est donné par

$$t \rightarrow (x, y) = (l(t), c(l(t))),$$

où c a pour composantes $c_1, c_2, \dots, c_p$ (on choisit une branche quelconque pour chaque fonction multiforme).

Remarque : La projection canonique p de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ sur $\tilde{U}$ définit $P_0 \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ comme revêtement ramifié de $\tilde{U}$ ayant un nombre fini k de feuillets.

Il s'ensuit que, pour tout point x de $\tilde{U}$, tout germe de chemin en x est relevable en un point quelconque de $P_0 \cap p^{-1}(x)$ dans $P_0 \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ et le nombre de relèvements est inférieur ou égal à k . ■

3.2.3 Théorème local d'existence de relèvements dans une feuille en un point

Nous allons maintenant démontrer des lemmes précédents le théorème ci-dessous, en gardant les mêmes notations que dans la sous-section 3.2.1.

Théorème 3.2.1 ([GS72]) *Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple pour cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), alors pour tout chemin $(l, [0, 1])$ dans B et pour tout a de $\pi^{-1}(l(0))$, le germe défini par $(l, [0, 1])$ au point $l(0)$ est relevable en a dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par a . le nombre de relèvements est majoré par un nombre entier k ne dépendant que du point a .*

Démonstration : Comme dans la démonstration du lemme 3.2.1, il suffit de transporter dans (E, π, B) , par l'isomorphisme φ_a^{-1} , le résultat du lemme du relèvement local des chemins.

Soit donc $(l, [0, \varepsilon_1])$ un chemin dans B qui définit le même germe au point $l(0)$ que le chemin donné $(l, [0, 1])$ et qui vérifie la relation $\varphi'_a(l([0, \varepsilon_1])) \subset \tilde{U}$.

Le germe de chemin défini dans U par $(\varphi'_a \circ l, [0, \varepsilon_1])$ au point $\varphi'_a(l(0)) = 0$ est relevable au point $\varphi_a(a)$ dans la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ qui passe par ce point. Soit $(\hat{l}, [0, \varepsilon])$ un représentant de ce relèvement. Alors, le chemin $(\varphi_a^{-1} \circ \hat{l}, [0, \varepsilon])$ est un relèvement cherché. ■

3.2.4 Définition de l'indice de Gérard-Sec

Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), le théorème précédent

permet de définir une fonction sur E à valeurs dans $\mathbb{N}$, qu'on appellera *indice du feuilletage* $\mathcal{F}$ par rapport à la projection π , et qu'on notera

$$a \longrightarrow \text{Ind}_\pi(\mathcal{F}, a)$$

Pour tout point a de E , le nombre $\text{Ind}_\pi(\mathcal{F}, a)$ est égal au nombre maximal de relèvement en a dans la plaque de a des germes de chemins en $\pi(a)$ dans B .

3.2.5 Propriété de l'indice de Gérard-Sec

Théorème 3.2.2 ([GS72]) *La fonction $\text{Ind}_\pi(\mathcal{F}, a)$ est localement bornée sur E .*

Démonstration : Il suffit de démontrer ce théorème pour un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini dans le produit de deux polydisques $U : |x| < 1$ de $\mathbb{C}^n$ et $V : |y| < 1$ de $\mathbb{C}^p$ et simple pour la projection canonique de $U \times V$ sur U . On peut supposer que le point a est en $(0, 0)$.

Dans le lemme 3.2.1, on a construit un voisinage ouvert Ω'_0 de $(0, 0)$ tel que toute plaque dans Ω'_0 rencontre toute fibre dans Ω'_0 en un nombre de points fini.

On va montrer qu'il existe un entier naturel $k_0 \neq 0$ tel que tout germe de chemin en un point x^0 de $U' = p(\Omega'_0)$ admet en tout point m de $\Omega'_0 \cap p^{-1}(x^0)$ un nombre de relèvements dans la plaque de m qui est inférieur ou égal à k_0 .

Pour cela, on désigne par $(l, [0, 1])$ un représentant du germe de chemin donné, et on lui associe le chemin $(\tilde{l}, [0, 1])$ de $U' \times V'_1$ défini par

$$\tilde{l}(t) = (l(t), y_1^0) \quad (y_1^0 \in V'_1) \quad (l(0) = x^0, m = (x^0, y^0)).$$

D'après le lemme du relèvement local des chemins, on peut assurer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le chemin $(\tilde{l}, [0, \varepsilon])$ admette en (x^0, y_1^0, x_1^0, y^0) dans $G \cap \tilde{p}^{-1}(U' \times V'_1)$ un nombre de relèvements inférieur ou égal à k_0 ($X_1^0 = p_1(h_0(m))$).

Chacun de ces relèvements définit un relèvement dans la plaque du point (x^0, y^0) . En effet, si un tel relèvement s'écrit $(l(t), y_1^0, l_1(t), \lambda(t))$, il vérifie les relations

$$\begin{cases} x = h(x_1, y_1^0), \\ y = k(x_1, y_1^0) \end{cases}$$

qui sont les équations de la plaque du point $(x^0, y^0) = m$. ■

Remarque 3.2.3 *Tous ces résultats sont encore valables dans le cas plus général où l'application π de E sur B est une submersion. En effet, à tout point m de E , il correspond alors :*

- 1) *un voisinage ouvert V_m de m dans E ;*
- 2) *des polydisques U et V dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ respectivement ;*
- 3) *des isomorphismes analytiques φ_m et φ'_m tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} V_m & \xrightarrow{\varphi_m} & U \times V \\ \pi|_{V_m} \downarrow & & \downarrow p \\ \pi(V_m) & \xrightarrow{\varphi'_m} & U \end{array}$$

(p étant la projection canonique de $U \times V$ sur U).

3.3 Feuilletages simples et feuilletages de Painlevé de 1^{re} espèce

3.3.1 Relèvements de chemins dans une feuille donnée

Les données sont les mêmes que celles de la sous-section 3.2.2, avec, en plus, l'hypothèse que la fibre de (E, π, B) est *compacte*.

Nous étudions la possibilité de relever en a , dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par a , le chemin $(l, [0, 1])$.

Nous obtenons une propriété globale, pour une feuille quelconque de $\mathcal{F}$.

Théorème 3.3.1 ([GS72]) *Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$) ; si, de plus, la fibre de (E, π, B) est compacte, $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour (E, π, B) .*

Conséquence 3.3.1 ([GS72]) *La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est surjective.*

Remarque 3.3.1 *Le théorème 3.3.1 est encore vrai si $E \xrightarrow{\pi} B$ définit une submersion et si π est une application propre.*

Démonstration du théorème 3.3.1 :

1) Le lemme 3.2.1 et la compacité des fibres permettent de montrer que, si $(l, [0, \varepsilon])$, ($\varepsilon < 1$) est un chemin dans B tel que $(l, [0, \varepsilon[)$ soit relevable en a dans la feuille de a , alors le chemin $(l, [0, \varepsilon])$ est aussi relevable en a dans la feuille de a .

En effet, soit $(\hat{l}, [0, \varepsilon])$ un relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$. Si v_ε est un voisinage compact assez petit de $l(\varepsilon)$ dans B , il est clair que $\pi^{-1}(v_\varepsilon)$ est compact. Donc, pour toute suite infinie croissante (t_n) de points de $[0, \varepsilon[$ convergeant vers ε , il existe une suite extraite (t_{n_k}) telle que la suite $\hat{l}(t_{n_k})$ converge vers un point b de $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$.

D'après le lemme 3.2.1, il existe un voisinage distingué Ω de b tel que toute plaque dans Ω rencontre $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$.

Or b appartient à $\overline{\hat{l}([0, \varepsilon])} - \hat{l}([0, \varepsilon])$; donc Ω rencontre $\hat{l}([0, \varepsilon])$ en un point m . Puisque la plaque de m dans Ω rencontre $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$, le relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$ est assuré par prolongement de $(\hat{l}, [0, \varepsilon])$.

2) La démonstration se termine par un raisonnement par l'absurde. Supposons que l'on ait pu, de proche en proche, relever les restrictions de l à $[0, \varepsilon_1], [\varepsilon_1, \varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}]$, où (ε_n) est une suite croissante dans $[0, 1]$. Supposons que la borne supérieure de (ε_n) soit un nombre ε différent de 1.

D'après le théorème 3.2.1, il est encore possible de relever le germe défini par $(l, [0, 1])$ au point $l(\varepsilon)$.

D'où il existe $\alpha > 0$ tel que la restriction de l à $[0, \varepsilon + \alpha[$ soit relevable en a dans la feuille de a .

Ceci est contraire à l'hypothèse. D'où $\varepsilon = 1$.

3.3.2 Relèvements de chemins dans les feuilles voisines d'une feuille donnée

Les notations sont les mêmes que celles de la sous-section précédente.

On suppose que le chemin $(l, [0, 1])$ est fixé et que le point a varie dans $\pi^{-1}(l(0))$. On étudie comment varie le nombre de relèvements de $(l, [0, 1])$ en a dans la feuille de a .

Proposition 3.3.1 ([GS72]) *Pour tout relèvement $(\hat{l}, [0, 1])$ de $(l, [0, 1])$ dans une feuille de $\mathcal{F}$, il existe un entier naturel k non nul et un voisinage V de $\hat{l}(0)$ dans $\pi^{-1}(l(0))$ tels que, pour tout point m de V , les relèvements de $(l, [0, 1])$ au point m dans la feuille de m sont en nombre inférieur ou égal à k et ont leurs extrémités dans un voisinage de $\hat{l}(1)$ dans $\pi^{-1}(l(1))$.*

Démonstration : Soit Δ l'ensemble des nombres α de $[0, 1]$ pour lesquels il existe :

- 1) un entier naturel $k_\alpha \neq 0$;
- 2) un recouvrement fini de $\hat{l}([0, \alpha])$ par une chaîne de voisinages ouverts distingués $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ tels que, pour tout point m de $\Omega_1 \cap \pi^{-1}(l(0))$, le nombre de relèvements de $(l, [0, \alpha])$ au point m dans la feuille de m qui sont contenus dans $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ est inférieur ou égal à k_α .

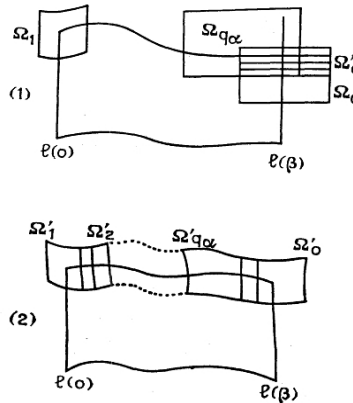
D'après le théorème 3.2.2, Δ est non vide : c'est le cas où la chaîne est réduite à un ouvert distingué Ω_1 .

Il nous suffit de montrer que $\Delta = [0, 1]$. Pour cela : si β désigne la borne supérieure de Δ , il suffit de montrer que $\beta = 1$ et que β appartient à Δ .

Soit Ω_0 un voisinage ouvert distingué de $\hat{l}(\beta)$ qui satisfait au théorème 3.2.1 . Si α est un réel de $[0, 1]$, tel que $\alpha < \beta$ et $l(\alpha) \in \pi(\Omega_0)$, α appartient à Δ , et il existe une chaîne $\Omega_1, \dots, \Omega_{q_\alpha}$ de voisinages ouverts distingués, tels que $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ est un recouvrement de $\hat{l}([0, \alpha])$, et $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha} \cup \Omega_0$ est un recouvrement de $\hat{l}([0, \beta])$ [resp. $\hat{l}([0, \gamma])$ si $l(\gamma) \in \pi(\Omega_0)$, avec $\gamma > \beta$].

On va montrer que si $\beta \neq 1$, α appartient à Δ , et si $\beta = 1$, β appartient à Δ .

On remplace le recouvrement $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha} \cup \Omega_0$ par un recouvrement plus fin obtenu de la façon suivante : Ω_0 est remplacé par Ω'_0 saturé de $\Omega_0 \cap \Omega_{q_\alpha}$ pour la relation d'équivalence



$\rho(\Omega_0)$ associée aux plaques de Ω_0 ([Ree52], A. I. 8) ; Ω_{q_α} est remplacé par Ω'_{q_α} saturé de $\Omega'_0 \cap \Omega_{q_\alpha}$ pour la relation d'équivalence $\rho(\Omega_{q_\alpha})$ associée aux plaques de Ω_{q_α} ; et ainsi de suite : d'une façon générale Ω_i est remplacé par Ω'_i saturé de $\Omega_{i+1} \cap \Omega_i$ pour $\rho(\Omega_i)$ ($i = q_\alpha - 1, \dots, 1, 0$) [fig. (1), (2)].

Tout relèvement de $(l, [0, \gamma])$ [resp. $(l, [0, \beta])$] s'obtient en composant un relèvement de $(l, [0, \alpha])$ et un relèvement de $(l, [\alpha, \gamma])$ [resp. $(l, [\alpha, \beta])$]. Un relèvement de $(l, [0, \gamma])$ [resp. $(l, [0, \beta])$], est situé dans $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{q_\alpha} \cup \Omega'_0$ si, seulement si, il est composé d'un relèvement de $(l, [0, \alpha])$ situé dans $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{q_\alpha}$ et d'un relèvement de $(l, [\alpha, \gamma])$ [resp. $(l, [\alpha, \beta])$] situé dans Ω'_0 .

D'après l'hypothèse, et d'après le choix de Ω_0 , le nombre de relèvements situé dans $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{q_\alpha} \cup \Omega'_0$ est donc inférieur ou égal à $k_0 k_\alpha$. Donc γ (resp. β) appartient à Δ . Donc $\Delta = [0, 1]$.

Remarque : Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse à π en tout point de $l([0, 1])$, il existe un recouvrement $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ de $\hat{l}([0, 1])$ tel que $k = 1$. Alors, les relèvements de $(l, [0, 1])$ définissent un isomorphisme analytique de $\Omega_1 \cap \pi^{-1}(l(0))$ sur $\Omega_{q_\alpha} \cap \pi^{-1}(l(1))$. ■

3.4 Feuilletages simples et feuilletages de Painlevé de 2^e espèce

Notations : (E, π, B) , fibration analytique complexe localement triviale à *fibres compactes* ; S , sous-ensemble analytique ⁽¹⁾ de E qui ne rencontre chaque fibre de E qu'en

des points isolés ;

$\mathcal{F}$, feuilletage analytique défini dans $E - S$, *simple*, pour la projection $\pi|_{E-S}$

de $E - S$ sur B , et de dimension égale à celle de B ;

$(l, [0, 1])$, chemin dans B ;

a , point de $\pi^{-1}(l(0)) - S$.

⁽¹⁾Rappelons qu'une partie S de E est dit un sous-ensemble analytique de E , s'il est fermé, et si tout point $x \in S$ possède un voisinage U_x dans lequel S est l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes dans U_x .

Problème : Nous étudions la possibilité de relever le chemin $(l, [0, 1])$ en a dans l'adhérence relativement à E de la feuille de a .

Théorème 3.4.1 ([GS72]) Si la fibration (E, π, B) est à fibre compacte et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique dans $E - S$, simple pour $\pi|_{E-S}$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour (E, π, B) .

Démonstration : Il suffit de montrer que, si $(l, [0, 1])$ est un chemin dans B tel que $(l, [0, 1])$ soit relevable en a dans la feuille de a , alors, le chemin $(l, [0, 1])$ est relevable en a dans l'adhérence de la feuille de a .

Grâce à la compacité de la fibre, on construit un point b de $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$ qui est adhérent à $\hat{l}([0, \varepsilon])$ [relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$]. Puis on distingue les trois cas suivants :

1^{er} cas : b est dans $E - S$. Alors, grâce au lemme 3.2.1, on termine la démonstration comme celle du théorème 3.3.1 .

2^e cas : b est dans S , et l'adhérence de $\hat{l}([0, \varepsilon])$ rencontre $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$ au seul point b . Alors un relèvement de $(l, [0, \varepsilon])$ est assuré.

3^e cas : b est dans S , l'intersection de l'adhérence de $\hat{l}([0, \varepsilon])$ et de $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$ est contenue dans S et comprend au moins deux points, b et b' .

On montre que ce cas ne peut se produire sans contredire l'hypothèse selon laquelle S ne rencontre $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$ qu'en des points isolés.

Pour cela, puisque la fibre est compacte, il suffit de montrer que l'on peut construire une suite infinie de points de $S \cap \pi^{-1}(l(\varepsilon))$.

Or on peut trouver :

- (i) des voisinages V_b et $V_{b'}$ respectifs de b et b' dans $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$ tels que $V_b \cap V_{b'} = \emptyset$;
- (ii) deux suites (t_n) et (t'_n) de $[0, 1]$ convergeant en croissant vers ε et telles que

$$\begin{aligned} (n \rightarrow \infty) &\implies (\hat{l}(t_n) \rightarrow b), \\ (n \rightarrow \infty) &\implies (\hat{l}(t'_n) \rightarrow b'), \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n &< t'_n < t_{n+1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si V_ε est un voisinage compact assez petit de $l(\varepsilon)$ dans B , il existe une suite (t_n'') de $[0, 1]$ convergeant en croissant vers ε et telle que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n < t_n'' < t_n', \\ \hat{l}(t_n'') &\notin V_\varepsilon \times V_b, \\ \hat{l}(t_n'') &\notin V_\varepsilon \times V_{b'}.\end{aligned}$$

Alors, on peut extraire de $\hat{l}(t_n'')$ une suite convergeant vers un point de $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$, différent de b et b' . Ce point b'' est dans l'adhérence de $\hat{l}([0, \varepsilon])$ et dans $\pi^{-1}(l(\varepsilon))$, donc b'' est dans S .

Ainsi est construite, de proche en proche, une suite infinie de points de $S \cap \pi^{-1}(l(\varepsilon))$. ■

3.5 Application

3.5.1 Équations différentielles et systèmes différentiels

On montre dans cette sous-section qu'on peut finalement retrouver les théorèmes fondamentaux de Painlevé comme corollaires des théorèmes 3.3.1, 3.4.1, et de la proposition 3.3.1 de ce chapitre.

Équations du 1^{er} ordre

On lit dans [Pai97](Introduction, p. 8) : La théorie analytique des équations du premier ordre

$$F(y', y, x) = 0 \tag{3.1}$$

algébriques en y' , y , analytiques en x , repose sur les deux propositions suivantes, dont aucune ne subsiste pour le second ordre :

Théorème I : *Une intégrale $y(x)$ de (3.1) ne peut admettre comme points singuliers non algébriques que certains points fixes $x = \xi$ qui se mettent en évidence sur l'équation même.*

Théorème II : *Soit y_0 la valeur de $y(x)$ pour $x = x_0$ et soit $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ l'intégrale de (3.1). Si $\bar{x}$, $\bar{x}_0$ désignent deux valeurs numériques quelconques, distinctes des valeurs*

ξ , la fonction $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ ne présente dans tout le plan des y_0 que des points singuliers algébriques.

Démonstration du théorème I de Painlevé :

1^{er} cas (cf. [Pai97], p. 21 à 26) :

Hypothèse 3.5.1 On suppose que l'équation (3.1) peut se mettre sous la forme

$$Q(x, y)dy - P(x, y)dx = 0.$$

Les fonctions P, Q sont des polynômes en y qui sont premiers entre eux pour x quelconque et ont leurs coefficients holomorphes sur $\mathbb{C}$. Le polynôme Q n'est pas identiquement nul.

Notations : $\tilde{\omega} = 0$, équation obtenue en prolongeant l'équation (3.1) à $\mathbb{C}(x) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$;

π , projection canonique de $\mathbb{C}(x) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}(x)$;

S_1 , ensemble des points singuliers de $\tilde{\omega} = 0$;

S_2 , sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ constitué par la réunion des variétés intégrales d'équation $x = Cte$;

$S = S_1 \cup S_2$; on note θ la projection par π de S sur $\mathbb{C}(x)$: c'est l'ensemble des «points ξ » de Painlevé. On remarquera que $\mathbb{C} - \theta$ n'est pas vide.

Lemme 3.5.1 Le feuilletage défini par $\tilde{\omega} = 0$ dans $(\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ est de Painlevé de 1^{er} espèce pour la projection canonique sur $\mathbb{C} - \theta$.

Démonstration : L'ensemble θ est formé de points isolés parce que P et Q sont premiers entre eux et parce que les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés. donc $\mathbb{C} - \theta$ est un ouvert dense et connexe dans $\mathbb{C}$ (non vide).

Il est facile de voir que l'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit dans $(\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ un feuilletage simple pour π puisqu'on a enlevé les variétés intégrales d'équation $x = Cte$. C'est un feuilletage simple pour la fibration triviale à fibre compacte de $(\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $(\mathbb{C} - \theta)$.

Donc, d'après le théorème 3.2.1, c'est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour $((\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}), \pi, (\mathbb{C} - \theta))$. ■

Application du lemme 3.5.1 à la démonstration du théorème I :

La restriction de π à toute feuille est surjective ; donc, toute intégrale $Y(x)$ est définie en tout point de $\mathbb{C} - \theta$.

Tout germe de chemin en x_0 dans $\mathbb{C} - \theta$ a un nombre fini de relèvements en un point quelconque de $\pi^{-1}(x_0)$ dans la feuille de ce point ; donc, tout point x_0 de $\mathbb{C} - \theta$ est un point singulier algébrique au sens de Painlevé ou un point ordinaire pour toute intégrale $Y(x)$.

Ceci démontre le théorème I de Painlevé.

Application du lemme 3.5.1 à la démonstration du théorème II :

Le lemme 3.5.1 nous permet d'appliquer notre proposition 3.3.1. Donc, pour tout chemin $(l, [0, 1])$ de $\mathbb{C} - \theta$, d'origine x_0 et d'extrémité x_1 , et pour tout relèvement $(\hat{l}, [0, 1])$ de $(l, [0, 1])$ qui a pour extrémité b , il existe :

- 1) un entier naturel k , différent de 0 ;
- 2) un voisinage V_a de a dans $\pi^{-1}(x_1)$;
- 3) un voisinage V_b de b dans $\pi^{-1}(x_1)$,

tels que, pour tout point (x_0, y_0) de V_a , les relèvements de $(l, [0, 1])$ qui ont pour origine (x_0, y_0) sont en nombre inférieur à k et ont leurs extrémités dans V_b .

Il s'ensuit que l'ordonnée de a est un point singulier algébrique ou un point régulier pour $\varphi(x, y_0, x_0)$.

Lemme 3.5.2 *L'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C} - \pi(S_2)) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \pi(S_2)$ un feuilletage de Painlevé de $\mathcal{E}$ espèce dans $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) - S_1 \cup S_2$.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème 3.4.1. En effet, on sait déjà qu'on a un feuilletage simple pour π . Il suffit donc de vérifier que S_1 rencontre chaque fibre en des points isolés, ce qui est le cas, puisque S_1 est formé lui-même de points isolés.

Définition 3.5.1 ([GS72]) *Un point x_0 de $\mathbb{C}$ est essentiel pour l'intégrale $y(x)$ s'il existe un chemin $(l, [0, 1])$ de $\mathbb{C}$ tel que $l(0) = x_0$ et qui n'est pas relevable dans le graphe de $y(x)$.*

Conséquence du lemme 3.5.2 :

Les points singuliers essentiels des solutions sont à chercher dans $\pi(S_2)$ ([Pai97], p. 26-27).

2^e cas (cf. [Pai97], p. 49 à 58) :

Hypothèse 3.5.2 *L'équation (3.1) s'écrit*

$$F(y', y, x) = a_p(x, y)y'^p + a_{p-1}(x, y)y'^{p-1} + \dots + a_1(x, y)y' + a_0(x, y) = 0,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_p$ sont des polynômes en y , à coefficients holomorphes sur $\mathbb{C}$.

On suppose que l'ensemble Σ d'équation $F(z, y, x) = 0$ est un ensemble analytique dans $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{C}(y) \times \mathbb{C}(z)$, dont les sections par $x = Cte$ sont irréductibles et non vides.

Démonstration : On se ramène de la façon suivante à la méthode de démonstration utilisée pour le 1^{er} cas.

On considère la forme ω induite par $dy - zdx$ sur Σ .

On considère le compactifié $\tilde{\Sigma}$ de Σ dans $\mathbb{C}(x) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, et on prolonge l'équation $\omega = 0$ en $\tilde{\omega} = 0$ à $\tilde{\Sigma}$.

Si π est la restriction à $\tilde{\Sigma}$ de la projection canonique de $\mathbb{C}(x) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}(x)$, on montre qu'il existe un ouvert connexe O , dense dans $\pi(\tilde{\Sigma}) = \mathbb{C}(x)$, et tel que :

- (i) $\pi^{-1}(O) \cap \tilde{\Sigma}$ est une variété analytique ;
- (ii) la projection π définit une fibration localement triviale dans $\pi^{-1}(O) \cap \tilde{\Sigma}$;
- (iii) l'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit dans $\pi^{-1}(O) \cap \tilde{\Sigma}$ un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π .

Alors les théorèmes I et II de Painlevé en résultent. ■

Systèmes du 2^e ordre

Soit

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \quad (3.2)$$

où f_1, f_2 sont rationnels en y, z .

On considère, comme le fait Painlevé, le système associé sur $\mathbb{C}(x) \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$

$$\Sigma : \frac{dx}{X} = \frac{tdy - ydt}{tA - yC} = \frac{tdz - zdt}{tA - zC},$$

où X, A, B, C sont des polynômes homogènes en y, z, t , le premier de degré q , les autres de degré $q + 1$, à coefficients holomorphes en x .

Painlevé énonce son théorème de la façon suivante ([Pai97], Introduction, p. 12 et 13) :

(I') : « Si les polynômes X, A, B, C sont les plus généraux de leur degré, l'intégrale générale

$$y = \varphi(x, y_0, z_0, \bar{x}_0), \quad z = \psi(x, y_0, z_0, \bar{x}_0), \quad t \equiv 1$$

ne peut admettre de singularités mobiles non algébriques. »

(II') : « Pour que l'intégrale générale $y = \varphi, z = \psi$ admette des singularités transcendentes mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que les égalités

$$X = 0, \quad tA - yC = 0, \quad yB - zC = 0, \quad zC - tB = 0,$$

soient compatibles (quel que soit x) pour des valeurs de y, z, t qui ne soient pas toutes nulles. »

(III') : « Pour que l'intégrale générale $y = \varphi, z = \psi$ admette des singularités essentielles mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que le polynôme $X(y, z, t, x)$ [ou l'un de ses diviseurs $X_1(y, z, t, x)$] définisse une intégrale première particularisée. »

Nous en donnons la démonstration suivante :

Démonstration (cf. [Pai97], p. 421 à 425) :

Soit π la projection canonique de $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$.

Soient S_1 l'ensemble des points singuliers du champ de directions défini par le système dans $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ et S'_1 l'ensemble des points (x, y, z, t) de S_1 tels que $\pi^{-1}(x)$ rencontre S_1 en des points non isolés.

Soit S_2 le sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ constitué par la réunion de S'_1 et des variétés intégrales dont une équation est $x = Cte$.

On sait que $\pi(S_1)$ et $\pi(S_2)$ sont des sous-ensembles analytiques de $\mathbb{C}$. Donc leur dimension est 0 ou 1. Si la dimension de $\pi(S_1)$ est 1, on a $\pi(S_1) = \mathbb{C}$. Si la dimension de $\pi(S_2)$ est 1, on a $\pi(S_2) = \mathbb{C}$. D'où trois cas :

- (a) $\pi(S_1) \neq \mathbb{C}$, $\pi(S_2) \neq \mathbb{C}$ (systèmes génériques) ;
- (b) $\pi(S_1) = \mathbb{C}$, $\pi(S_2) \neq \mathbb{C}$;
- (c) $\pi(S_2) = \mathbb{C}$.

Dans le cas (a), on désigne par θ la projection par π de $S_1 \cup S_2$ sur $\mathbb{C}(x)$ (ensemble des points ξ de Painlevé) et on démontre, comme pour les équations du 1^{er} ordre, que le système Σ définit par la fibration triviale de $(\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \theta$ un feuilletage de Painlevé de 1^{er} espèce.

On en déduit la partie (I') du théorème de Painlevé cité ci-dessus.

Dans le cas (b), on désigne par θ' , la projection par π de S_2 sur $\mathbb{C}(x)$ et on démontre le lemme suivant :

Lemme 3.5.3 *Lorsque $\pi(S_1) = \mathbb{C}$, $\pi(S_2) \neq \mathbb{C}$, le système Σ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C} - \theta') \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \theta'$ un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce dans $((\mathbb{C} - \theta') \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})) - S_1$.*

Démonstration : Il est clair que Σ définit dans $((\mathbb{C} - \theta') \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})) - S_1$ un feuilletage simple pour π , car on a enlevé les variétés intégrales d'équation $x = Cte$.

Par hypothèse, l'ensemble θ' est formé de points isolés. Donc la variété $(\mathbb{C} - \theta') \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ est connexe et munie canoniquement d'une fibration triviale à fibre compacte.

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.4.1, il ne reste plus qu'à vérifier que S_1 est un sous-ensemble analytique de $(\mathbb{C} - \theta') \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, qui ne rencontre chaque fibre qu'en des points isolés : il en est bien ainsi, car on a enlevé S'_1 . Ainsi, le lemme 3.5.3 est démontré. ■

Conséquence du lemme 3.5.3 :

- (i) *Les points singuliers transcendants d'une solution sont contenus dans $\pi(S_1)$.*
- (ii) *les points singuliers essentiels d'une solution sont contenus dans $\pi(S_2)$.*

3.5.2 Équations différentielles du 2^e ordre

Soit l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)}, \quad (3.3)$$

où P et Q sont des polynômes en y, y' , sans facteur commun pour x quelconque.

Soient p et q les degrés respectifs de P et Q relativement à y' . On suppose $p \geq q + 2$.

Nous démontrons le théorème de Painlevé suivant ([Pai97], p. 413) :

(I) : « Si $Q(y', y, x)$ n'admet pas de zéro $y = G(x)$ indépendant de y' et si $p > q + 2$, l'intégrale générale $y(x)$ de (3.3) et sa dérivée $y'(x)$ ne peuvent présenter de singularités essentielles mobiles. »

(II) : « Si $Q(y', y, x)$ admet au moins un zéro $y = G(x)$ indépendant de y' et si $p > q + 2$, l'intégrale générale $y(x)$ de (3.3) ne peut présenter de singularités essentielles mobiles. Mais $y'(x)$ peut en présenter. »

(III) : « Si $Q(y', y, x)$ n'admet pas de zéro indépendant de y' mais si $p = q + 2$, la fonction $y(x)$ peut présenter des singularités essentielles mobiles ; mais $y'(x)$ n'en présente pas. »

(IV) : « Si $Q(y', y, x)$ admet au moins un zéro indépendant de y' et si $p = q + 2$, les fonctions $y(x)$ et $y'(x)$ peuvent présenter des singularités essentielles mobiles. »

Démonstration (cf. [Pai97], p. 396 à 413) :

On pose $dy/dx = z$, et on remplace l'équation (3.3) par le système différentiel Σ suivant, dans $\mathbb{C}^3$:

$$\Sigma : \frac{dx}{Q(z, y, x)} = \frac{dy}{zQ(z, y, x)} = \frac{dz}{P(z, y, x)}.$$

On prolonge le système Σ à $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})(y) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})(z) \times \mathbb{C}(x)$ en un système $\tilde{\Sigma}$.

Notations : π , projection canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$;

S_1 , ensemble des points singuliers de $\tilde{\Sigma}$;

S'_1 , ensemble des points (x, y, z) de S_1 tels que $\pi^{-1}(x)$ rencontre S_1 en des points non isolés ;

S_2 , réunion des variétés intégrales de $\tilde{\Sigma}$, dont une équation s'écrit $x = Cte$ et de S'_1 .

Remarque 3.5.1 $\pi(S_1) = \mathbb{C}$, car S_1 contient l'ensemble des points (x, y, z) qui vérifient le système

$$\begin{cases} P(z, y, x) = 0, \\ Q(z, y, x) = 0. \end{cases}$$

Corollaire 3.5.1 *On a donc seulement deux cas :*

- (a) $\pi(S_2) \neq \mathbb{C}$ (équations génériques) ;
- (b) $\pi(S_2) = \mathbb{C}$.

La méthode est alors la même que dans le cas des systèmes différentiels : par exemple, si $\pi(S_2) = \theta$ est différent de $\mathbb{C}$, on démontre que le système $\tilde{\Sigma}$ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \theta$ un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce dans $((\mathbb{C} - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})) - S_1$.

On en déduit que les points singuliers essentiels sont contenus dans $\pi(S_2) = \theta$.

D'où la partie (I) du théorème de Painlevé.

Des interprétations géométriques analogues peuvent être également données dans les autres cas.

3.5.3 Équations de Pfaff complètement intégrables

On se propose, dans cette section, de démontrer pour les équations de Pfaff des théorèmes analogues à ceux de Painlevé pour les équations différentielles. On utilise, à cet effet, les théorèmes 3.3.1, 3.4.1, ainsi que la proposition 3.3.1.

Soit l'équation de Pfaff :

$$\omega \equiv Q(x, y)dy + \sum_i^n A_i(x, y)dx_i = 0. \quad (3.4)$$

On suppose réalisée la complète intégrabilité $\omega \wedge d\omega \equiv 0$.

En outre, on suppose que les fonctions $Q, A_1, \dots, A_n$ sont polynomiales en y , à coefficients holomorphes en $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On suppose qu'il existe x dans $\mathbb{C}^n$ tel que $Q(x, y), A_1(x, y), \dots, A_n(x, y)$ soient premiers entre eux et non nuls.

Soit $\tilde{\omega} = 0$, l'équation obtenue en prolongeant l'équation (3.4) à $\mathbb{C}^n(x) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Notations : S_1 , ensemble des points singuliers de $\tilde{\omega} = 0$;

S_2 , sous-ensemble de $\mathbb{C}^n \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ constitué par la réunion des variétés intégrales d'équation

$x = Cte$ (variétés de dimension 1) ;

$S = S_1 \cup S_2$;

π , projection canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$;

$\theta = \pi(S_1 \cup S_2)$.

Lemme 3.5.4 *L'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit pour la fibration triviale $(\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n - \theta$ un feuilletage de Painlevé de 1^{er} espèce dans $(\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.*

Démonstration : On sait que l'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit un feuilletage de dimension n dans $\mathbb{C}^n \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ à cause de la complète intégrabilité de ω (théorème de Fröbenius).

Ce feuilletage induit dans $(\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ un feuilletage simple pour π puisqu'on a enlevé les variétés intégrales d'équation $x = Cte$.

On vérifie que $\mathbb{C}^n - \theta$ est un ouvert connexe dense dans $\mathbb{C}^n$. En effet, $\pi(S_1)$ et $\pi(S_2)$ sont des ensembles analytiques, car π est une application propre ; par suite de l'hypothèse, $\pi(S_1)$ et $\pi(S_2)$ sont distincts de $\mathbb{C}^n$; donc, $\pi(S_1 \cup S_2)$ est nulle part dense dans $\mathbb{C}^n$, et $\mathbb{C}^n - \pi(S_1 \cup S_2)$ est connexe (non vide).

On a donc un feuilletage simple pour une fibration triviale à fibre compacte. D'après le théorème 3.3.1, c'est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour $((\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}^n - \theta)$. ■

Conséquence du lemme 3.5.4 :

(i) *La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est surjective ; donc toute intégrale est définie en tout point de $\mathbb{C}^n - \theta$.*

(ii) *Toute germe de chemin en x_0 dans $\mathbb{C}^n - \theta$ a un nombre fini de relèvements en un point quelconque de $\pi^{-1}(x_0)$ dans la feuille de ce point : on peut dire que x_0 est un point singulier algébrique ou un point ordinaire pour toute intégrale $Y(x)$.*

D'où une généralisation du théorème I de Painlevé :

Si une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ est une solution de $\tilde{\omega} = 0$, l'ensemble de ses points singuliers non algébriques est contenu dans θ .

Problème : Comme dans le cas de l'équation différentielle du premier ordre, on peut chercher quel sous-ensemble de θ est susceptible d'être un ensemble de points singuliers

essentiels pour une solution (même définition que la définition 3.5.1, en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}^n$).

Pour cela, on démontre le lemme 3.5.5 :

Soient S'_1 le sous-ensemble de S_1 qui est saturé pour la relation d'équivalence associée à π et $\theta' = \pi(S'_1 \cup S_2)$.

Lemme 3.5.5 *L'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}^n - \theta') \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n - \theta'$ un feuilletage de Painlevé de $\mathcal{E}$ espèce de dimension n , dans $((\mathbb{C}^n - \theta') \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})) - S_1$.*

Démonstration : On vérifie qu'on peut appliquer le théorème 3.4.1 de ce mémoire. En effet :

(i) $\tilde{\omega} = 0$ définit un feuilletage simple pour π dans $((\mathbb{C}^n - \theta') \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})) - S_1$, car on a enlevé $S'_1 \cup S_2$.

(ii) pour tout x de $\mathbb{C}^n - \theta'$, S_1 rencontre $\pi^{-1}(x)$ en des points isolés car on a enlevé S_1 .

■

Corollaire 3.5.2 *(Généralisation de [Pai97], p. 26-27). L'ensemble des points singuliers essentiels d'une solution est contenu dans θ' .*

Remarque 3.5.2 *D'après le lemme 3.5.4, la proposition 3.3.1 peut aussi bien s'appliquer aux équations de Pfaff (3.4). On peut donc généraliser le théorème II de Painlevé [pour les équations différentielles du 1^{er} ordre (3.1)] aux équations de Pfaff (3.4).*

Les résultats de Gérard-Sec ([GS72]), traités dans ce chapitre (i.e., théorème 3.3.1, théorème 3.4.1, théorème 3.2.1, proposition 3.3.1), sont susceptibles d'un grand nombre d'applications ; nous n'en avons donné ici que quelques-unes. Notamment, on pourra étudier, par cette méthode, les propriétés des systèmes de Pfaff complètement intégrables. Il est à prévoir que, comme dans le cas des équations de Pfaff complètement intégrables, beaucoup de propriétés restent inchangées quand on passe de une à plusieurs variables.

Chapitre 4

Feuilletages P-uniformes

Dans ce chapitre, on introduit les notions globales de feuilletage P-uniforme pour une fibration.

Le problème abordé est alors celui de l'existence et l'unicité de relèvements de chemins dans les feuilles d'un feuilletage transverse. On traite ce problème dans le cas où la fibration est analytique complexe et à fibre compacte. En se basant sur les résultats de Gérard-Sec ([GS72]), traités dans le chapitre précédent, on obtient le théorème B qui nous permettra de résoudre, géométriquement, un cas particulier du problème de Fuchs et ceci, sans utiliser le théorème de Ehresmann comme le fait ANTOINETTE SEC dans son exposé [Sec72].

Le théorème B est encore valable si on remplace la fibration analytique complexe à fibre compacte par une submersion analytique complexe propre.

4.1 Définition et exemples

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B (application continue surjective), $\mathcal{F}$ un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Définition 4.1.1 *On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est P-uniforme pour π si tout chemin $(l, [0, 1])$ dans B a un relèvement unique en tout point m de $\pi^{-1}(l(0))$ dans la feuille de m .*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira indifféremment que $\mathcal{F}$ est un feuilletage P -uniforme pour π , ou un feuilletage P -uniforme pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Donnons quelques exemples pour illustrer cette notion fondamentale pour la suite.

Exemple 4.1 *Tout feuilletage uniforme pour une fibration de E est P -uniforme pour cette fibration.*

Exemple 4.2 *Tout feuilletage transverse à une fibration à fibre compacte est un feuilletage P -uniforme pour cette fibration. Ceci découle du théorème de Ehresmann d'une part, c'est à dire du fait que la restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est un revêtement et, d'autre part, du fait que les revêtements ont la propriété de relèvement unique des chemins. C'est exactement l'énoncé du théorème B de la section 4.2, auquel on va proposer une preuve indépendante du théorème de Ehresmann.*

Exemple 4.3 *L'équation différentielle $2xdy - ydx = 0$ définit dans $(\mathbb{C}(x) - \{0\}) \times \mathbb{C}$ un feuilletage P -uniforme pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}(x) - \{0\}) \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}(x) - \{0\}$. (Ce feuilletage n'est pas uniforme pour la fibration.)*

Contre-exemple 4.1 *L'équation différentielle $2ydy - dx = 0$ définit dans $\mathbb{C}^2$ un feuilletage qui n'est pas un feuilletage P -uniforme pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$: les chemins dont l'image est réduite à un point sont relevables de manière unique dans n'importe quelle feuille, les chemins non réduits à un point sont relevables de manière unique dans certaines feuilles, avec non unicité du relèvement dans d'autres.*

Remarque 4.1.1 *De manière plus générale, on pourrait appeler feuilletage P -uniforme, dans une variété topologique E , tout feuilletage $\mathcal{F}$ de E pour lequel il existe une variété topologique B et une application continue surjective π de E sur B telle que $\mathcal{F}$ soit P -uniforme pour π .*

4.2 Feuilletages transverses et feuilletages P -uniformes

4.2.1 Existence et unicité de relèvements de chemins dans une feuille donnée. Théorème B

Notations :

E, B , variétés analytiques complexes connexes de dimension finie ;

(E, π, B) , fibration analytique complexe localement triviale à fibre compacte ;

a , point quelconque de E ;

$\mathcal{F}$, feuilletage analytique dans E de dimension égale à celle de B , transverse à (E, π, B) ;

$(l, [0, 1])$, chemin dans B tel que $l(0) = \pi(a)$.

Problème : Nous étudions la possibilité de relever de façon unique en a , dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par a , le chemin $(l, [0, 1])$.

Théorème B Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique transverse à cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$) ; si, de plus, la fibre de (E, π, B) est compacte, $\mathcal{F}$ est un feuilletage P -uniforme pour (E, π, B) .

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin d'établir le lemme suivant.

Lemme 4.2.1 Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique défini dans E ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

- 1) Le feuilletage $\mathcal{F}$ est P -uniforme pour π .
- 2) La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est un revêtement analytique.
- 3) Le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π , transverse à π .

Démonstration du lemme 4.2.1 :

1) $\implies$ 3) On raisonne sur le modèle local avec $a = (0, 0)$. Si la feuille Γ de $\mathcal{F}$ qui passe par a est tangente à la fibre. Il existe au voisinage de a des coordonnées locales (x, y) telles que Γ soit définie par l'équation $y^n - x = 0$, où $n > 1$ étant l'ordre de tangence. Dans ces coordonnées, on voit très clairement que les chemins d'origine 0 non réduits à un point possèdent n relèvements au point a dans la feuille Γ .

3) $\implies$ 2) Soit Γ la feuille de $\mathcal{F}$ passant par a . Puisque, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une submersion, Γ est transverse aux fibres et $\dim(\Gamma) = \dim(B)$, il s'ensuit que $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow B$ est un isomorphisme local, et comme $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π , alors π restreinte à Γ est un revêtement.

2) $\implies$ 1) est évidente car les revêtements ont la propriété de relèvement unique des chemins.

Démonstration du théorème B : Puisque $\mathcal{F}$ est transverse à π , donc simple pour π , et puisque la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$ est à fibre compacte, on peut appliquer le théorème 3.3.1 de Gérard-Sec et dire que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π . Donc, par le lemme 4.2.1, le feuilletage $\mathcal{F}$ est P-uniforme pour π .

Remarque 4.2.1 *Le théorème B est encore vrai si on remplace la fibration analytique complexe (E, π, B) , à fibre compacte, par une submersion propre car, le théorème 3.3.1 de Gérard-Sec restant vrai avec cette dernière hypothèse.*

4.2.2 Nouvelle démonstration du théorème A sans Ehresmann

On rappelle ici l'énoncé du théorème A, en prenant en considération la notation 4.2.1 avec, en plus, l'hypothèse que la base B est simplement connexe.

Théorème A *Si la fibration (E, π, B) est à fibre compacte et à base simplement connexe et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique transverse à cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage uniforme pour (E, π, B) .*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{F}$ est transverse à π , et soit Γ une feuille quelconque de $\mathcal{F}$. Puisque la fibration (E, π, B) est à fibre compacte, on peut appliquer le théorème B et dire que $\mathcal{F}$ est un feuilletage P-uniforme pour π . Donc, par le lemme 4.2.1, la restriction de π à Γ est un revêtement. Puisque B est simplement connexe, π restreinte à Γ est un isomorphisme analytique. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc uniforme. ■

Remarque 4.2.2 *De ce qu'on vient d'établir il résulte que l'on peut résoudre le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' , traité dans le 2^{ème} chapitre, indépendamment du théorème d'Ehresmann.*

4.3 Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'

On se propose, dans cette partie, de résoudre géométriquement le problème de Fuchs dans le cas où f est du premier degré en y' . On utilise, à cet effet, le théorème B de ce mémoire, et on en construit une solution particulièrement importante, à savoir l'équation de Riccati généralisée.

4.3.1 L'équation de Riccati généralisée

Soit

$$q(x)y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (4.1)$$

une équation de Riccati généralisée, où q, a, b, c sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et q n'est pas la fonction nulle.

Nous démontrons géométriquement la propriété suivante.

Théorème 4.3.1 *L'équation (4.1) est à points critiques fixes.*

Pour cela, on met en évidence un feuilletage $\mathcal{F}_3$ et une fibration π_3 à fibre compacte tels que le théorème 4.3.1 soit équivalent à la proposition 4.3.1 suivante.

Proposition 4.3.1 *Le feuilletage $\mathcal{F}_3$ est P -uniforme pour π_3 .*

Préambule : L'ensemble Λ des zéros de q est formé de points isolés parce que les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés. Donc $\mathbb{C} - \Lambda$ est un ouvert dense et connexe dans $\mathbb{C}$ (non vide).

Les graphes des solutions de (4.1) sont les courbes intégrales du champ de directions

$$D : (x, y) \longrightarrow \left(1, \frac{a(x)}{q(x)}y^2 + \frac{b(x)}{q(x)}y + \frac{c(x)}{q(x)}\right)$$

dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbb{C}$.

Il est clair que ces courbes sont les feuilles d'un feuilletage de $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbb{C}$ et que ce feuilletage est transverse à la fibration triviale :

$$(\mathbb{C}(x) - \Lambda) \times \mathbb{C}(y) \longrightarrow \mathbb{C}(x) - \Lambda.$$

Mais, la fibre de cette fibration n'est pas compacte.

Cela nous amène à "compactifier" $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbb{C}$ en $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Démonstration : La fibration π_3

La projection canonique de $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \Lambda$ définit dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ une fibration analytique π_3 triviale, à fibre compacte.

Le feuilletage $\mathcal{F}_3$

Soit $(O, x, y), (O', x, z)$ un atlas de $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ avec le changement de cartes $yz = 1$. Le couple suivant d'équations de Riccati généralisées définit dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ un feuilletage $\mathcal{F}_3$:

$$\begin{cases} qy' = ay^2 + by + c \\ -qz' = a + bz + cz^2 \end{cases}$$

En effet, ces équations définissent respectivement dans O et O' des feuilletages, qui coïncident sur $O \cap O'$.

Conséquence

Il est clair que, dans ces conditions, le théorème 4.3.1 et la proposition 4.3.1 sont équivalents.

Or, le feuilletage $\mathcal{F}_3$ est transverse à π_3 . Donc, d'après le théorème B, le feuilletage $\mathcal{F}_3$ est P-uniforme. ■

4.3.2 Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'

Soit

$$f(x, y', y) = a_0(x, y)y' + a_1(x, y) = 0 \quad (4.2)$$

une équation de Fuchs, où a_0 et a_1 sont deux polynômes en y , premiers entre eux, à coefficients holomorphes en x .

Dans ce cas, la réponse au problème de Fuchs s'exprime classiquement de la façon suivante :

Théorème 4.3.2 *Les seules solutions du problème de Fuchs sont les équations de Riccati généralisées*

$$q(x)y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où q, a, b, c sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et q n'est pas la fonction nulle.

Nous en donnons la démonstration géométrique suivante.

Démonstration : Appelons p la projection canonique de $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{C}(y)$ sur $\mathbb{C}(x)$. Soit S l'ensemble des zéros communs de a_0 et a_1 ; $S = \{(x, y) \mid a_0(x, y) = a_1(x, y)\}$. On note Λ la projection par p de S sur $\mathbb{C}(x)$. On remarquera que $\mathbb{C} - \Lambda$ n'est pas vide.

Les graphes des solutions de (4.2) sont les courbes intégrales de l'équation de Pfaff

$$a_0(x, y)dy + a_1(x, y)dx = 0$$

dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbb{C}$.

Ces courbes sont les feuilles d'un feuilletage de $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbb{C}$.

Nous avons en vue d'utiliser le théorème B, pour cela nous devons "compactifier" $(\mathbb{C} - \Lambda) \times \mathbb{C}$ en $(\mathbb{C} - \Lambda) \times P^1(\mathbb{C})$.

La fibration π_4

La projection canonique de $(\mathbb{C} - \Lambda) \times P^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \Lambda$ définit dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \times P^1(\mathbb{C})$ une fibration analytique π_4 triviale, à fibre compacte.

Le feuilletage $\mathcal{F}_4$

Soit $(O, x, y), (O', x, z)$ un atlas de $(\mathbb{C} - \Lambda) \times P^1(\mathbb{C})$ avec le changement de cartes $yz = 1$. Le couple d'équations suivant définit dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \times P^1(\mathbb{C})$ un feuilletage $\mathcal{F}_4$:

$$\begin{cases} a_0(x, y)y' + a_1(x, y) = 0, \\ \{-a_0(x, \frac{1}{z})\frac{z'}{z^2} + a_1(x, \frac{1}{z})\}z^m = 0, \text{ où } m = \sup(d^0 a_1, 2 + d^0 a_0). \end{cases}$$

En effet, ces équations définissent respectivement dans O et O' des feuilletages, qui coïncident sur $O \cap O'$.

Conséquence

Si l'équation (4.2) est à points critiques fixes, le feuilletage $\mathcal{F}_4$ est transverse à la fibration π_4 . Il s'ensuit que $a_0(x, y) = a_0(x)$ et que le degré de a_1 est inférieur à 2. Donc, l'équation (4.2) est de Riccati généralisée.

Ainsi, compte tenu du théorème 4.3.1, le théorème 4.3.2 est démontré. ■

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons traité géométriquement deux problèmes, à savoir le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' ; et le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y' . Nos démonstrations sont basées uniquement sur les résultats de Gérard-Sec ([GS72]) et ceci, sans avoir recours au théorème d'Ehresmann ([Ehr50]) comme le fait Antoinette Sec dans son exposé [Sec72].

Nous pensons qu'il est possible de résoudre géométriquement, *dans le cas général*, le problème de Briot et Bouquet et le problème de Fuchs, sans utiliser le théorème de Ehresmann, en se basant sur les théorèmes A et B, les résultats de Gérard-Sec et en suivant le même calcul fait par Antoinette Sec dans sa résolution complète de ces problèmes [Sec72].

Bibliographie

- [BB56] C. Briot et J. C. Bouquet : *Mémoire sur l'intégration au moyen des fonctions elliptiques*. J. Ec. Poly. 21 (1856) 199-253. Théorie des fonctions elliptiques - (1875).
- [CN85] C. Camacho et A. L. Neto : *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [Die90] J. Dieudonné : *Eléments d'analyse - Tome 1 : Fondements de l'analyse moderne*. Editions Gauthier-Villars 1990.
- [EB05] A. El Kacimi Alaoui et R. Barre : *Foliations*. In F. Dillen et L. Verstraelen, éditeurs : Handbook of differential geometry. Elsevier, 2005.
- [Ehr50] C. Ehresmann : *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de topologie : Bruxelles, 1950, p. 29-55.
- [ER44] C. Ehresmann et G. Reeb : *Sur les champs d'éléments de contact complètement intégrables dans une variété continûment différentiable*, C.R.A.S. Paris 218 (1944), 955-957.
- [Fuc84] L. Fuchs : *Über differentialgleichungen deren integral festen verzweigungspunkte besitzen*. Sitzungsberichte der akad. Berlin (1884) 741-747.
- [Ghy99] E. Ghys : *Les systèmes dynamiques holomorphes*, Panor. et Synthèses **8** (1999), Soc. Math. France, Paris, p. 1-10
- [God01] Roger Godement : *Analyse mathématique III ; Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann*, Paris, Springer, 2001.

- [God91] C. Godbillon : *Feuilletages, études géométriques*. Progress in Mathematics Volume 98. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, Basel, 1991.
- [GS72] R. Gérard et A. Sec : *Feuilletages de Painlevé*. Bull. Soc. Math. France 100 (1972) p. 47-72.
- [Hae98] A. Haefliger : *Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov*. 1998.
- [Hae64] A. Haefliger : *Variétés feuilletées*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat. 16 (1964) 367-397.
- [Lor05] F. Loray : *Sur les théorèmes I et II de Painlevé*. Contemporary Mathematics, 389, 2005.
- [Oka79] K. Okamoto : *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales*, Japan. J. Math. 5 (1979) 1-79.
- [Pai95] P. Painlevé : *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm*. Paris, A. Hermann, 1895.
- [Pai97] P. Painlevé : *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm*. Paris, A. Hermann, 1897.
- [Poi85] H. Poincaré : *Sur un théorème de M. Fuchs*. Acta Mat. t. VII (1885).
- [Ree52] G. Reeb : *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, vol. 1183, Hermann, Paris, 1952.
- [Ree74] G. Reeb : *Feuilletages. Résultats anciens et nouveaux (Painlevé, Hector et Martinet)*. Les presses de l'Université de Montréal, 1974.
- [RS53] R. Remmert et K. Stein : *Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*, Math. Annalen, t. 126, 1953, p. 263-306.
- [Sec71] A. Sec : *Sur les feuilletages définis par certaines équations de PFAFF dans $\mathbb{C}^n \times \mathbf{P}_1$* . Thèse ronéotypée. Strasbourg. IRMA. (1971)

[Sec72] A. Sec : *Le problème de Briot et Bouquet*. Journées complexes de Metz, exposé (V) (1972).

[Spa81] E. Spanier : *Algebraic topology*, Tata McGraw-Hill, 1981.