

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

FACULTE DE GENIE CIVIL



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de MAGISTER

En GENIE CIVIL

Spécialité : Construction

Par

M^{elle} HAMMOUDI IMANE

Propagation de la Rupture en Mode Mixte à l'interface d'un élément poutre

Soutenance le 04/02 /2016 à 9h 00 à la salle de Conférences 60 de Génie Civil devant le jury composé de:

Président	D. BENOUAR	Professeur	à l'U.S.T.H.B
Directeur de mémoire	M. CHABAAT	Professeur	à l'U.S.T.H.B
Examineurs	M. TOUATI	M. C. A	à l'U.S.T.H.B
	H. HAMLİ BENZAHAR	M. C. A	U. K. Miliana
	A. KIBBOUA	Maître de Rech.	C.G. S

NB :Les membres du jury doivent être classés conformément au P.V de soutenance

Remerciements

Tous d'abord, je tiens à remercier **ALLAH** qui m'a donné le courage et la volonté pour pouvoir achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et toute ma gratitude envers Le Professeur M. Chabaat, mon directeur de thèse. Je le remercie vivement pour sa patience, ses encouragements, son expérience, ses conseils très précieux et surtout sa disponibilité manifeste à mon égard durant l'élaboration de cette thèse.

J'adresse mes très vifs remerciements aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à juger et évaluer ce mémoire. Merci au Professeur D. Benouar de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury, ainsi qu'aux examinateurs Dr. M. Touati Maître de Conférences à l'USTHB, Dr. H. Hamli Benzahar, Maître de Conférences à l'U. Khemis Miliana et Dr. A. Kibboua, Maître de Recherche au C.G.S qui ont bien voulu assurer la laborieuse tâche d'examiner ce modeste de travail.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble du corps de la Faculté de Génie Civil de l'U.S.T.H.B ayant contribué à mon encadrement durant la graduation et la post-graduation sans oublier tous mes amis du département de génie civil pour leur aimable contribution.

Mes derniers mots vont à ma famille en général et surtout à mes parents en particulier, qui m'ont soutenu en toutes circonstances. Un grand merci à ma maman, la lumière de ma vie, mon papa qui m'a encouragé pendant toute cette période, mes sœurs et mes frères.

ملخص

الإجهاد شدة الحرجة تتميز التي الهامة تصمم معلمة هي الهيكلية اللاصقة المواد من صلابة كسر شعاع الكابولي مزدوجة نوع من شطيرة واسع نطاق على ويستخدم كسر، الطاقة مجموعة أو K عامل الوقت في ما غراري على، SDCB من الطاقة تحديلا. اللاصقة المواد من صلابة لقياس عينة (DCB) تجاهل يتم الكراك الطرف عند ثابته يفترض التي تمسك من ناتج جزء سوى تماثل لا الحاضر، تجارب، الطاقة توازن إلى وبالتالي التطابق، تحميل نقاط عند تشريد إلى لاصقة بقية مساهمة على لاصقة المرنة خصائصها وكثافتها من قوي تأثير وجود إلى تشريد صلابة قياس.

الكلمات المفتاح: نظرية الكمون، الشق، معامل الإجهادات، كمية الطاقة المتبقية.

Résumé

La résistance à la rupture d'adhésifs structuraux est un paramètre important de la conception caractérisé par le facteur d'intensité de contrainte (**K**) ou par l'énergie de rupture **G**. Le type Sandwich Double Cantilever Beam (SDBC) spécimen est largement utilisé pour les mesures de la résistance des adhésifs.

L'analyse énergétique de SDBC, telle qu'elle est actuellement modélisée, ne représente que la partie en porte à faux de l'adhérent qui est supposé fixé à la pointe de la fissure.

La contribution de la couche d'adhésif pour le déplacement au niveau des points d'application de charge et donc de l'équilibre énergétique est ignorée. Des expériences indiquent cependant un fort effet de l'épaisseur et des propriétés élastiques de l'adhésif sur la mesure de la ténacité. Un modèle est proposé pour tenir compte de la couche d'adhésive.

Le modèle analyse l'interaction adhésive et exprime le taux de libération d'énergie en termes d'épaisseur obligatoire, la dimension de l'échantillon et les propriétés adhésives (colle).

On montre que la contribution de la couche d'adhésif à la quantité mesurée est importante.

Mots clés: Poutre mixte, poutre adhésive, poutre adhérente, fissure, facteur d'intensité de contrainte, déplacement, taux de restitution d'énergie.

Abstract

Fracture toughness of structural adhesives is an important design parameter characterized by the critical stress intensity factor K , or the fracture energy G_c . Sandwich-type Double Cantilever Beam (SDCB) specimen is widely used for the measurements of toughness of adhesives. The energy analysis of SDCB, as presently modelled, accounts only for the cantilever part of the adherent which is assumed fixed at the crack tip. The contribution of the adhesive layer to the displacement at the points of load application and thus to the energy balance is ignored. Experiments, however, indicate a strong effect of thickness and elastic properties of the adhesive on the toughness measurement. A model is proposed to account for the adhesive layer.

The model analyses adhesive-adherent interaction and expresses the energy release rate in terms of bond thickness, specimen dimension and adhesive-adherent properties. It is shown that the contribution of the adhesive layer to the measured quantity is significant.

Keywords: Double cantilever beam, adherent beam, adhesive beam, crack, stress intensity factor, displacement, energy release rates.

Notations

h : Hauteur de l'adhérent

$2t$: Epaisseur de l'adhésive

F : Force appliquée

l : Longueur de la fissure

L : Longueur de la poutre sur appuis élastiques.

B : Longueur de la poutre

E_1 : Module de Young de l'adhérent

E_2 : Module de Young de l'adhésive

l : Longueur de la fissure.

\vec{b} : Vecteur de Burgers.

b_x, b_y : Composantes du vecteur de Burgers.

c : Circuit fermé de Burgers.

d : Opérateur différentiel.

da : Variation de la longueur de la fissure.

$\varphi, \psi, C, D, \beta, \alpha$: Paramètres de calculs.

ν_2 : Module de Poisson.

J : Intégrale de Rice.

m_w : Module de Weibull.

r : Distance au fond de fissure.

r_i : Rayon intérieur d'un cylindre creux.

r_e : Rayon extérieur d'un cylindre creux.

(r, θ) : Coordonnées polaires.

t, e : Epaisseur de la plaque.

\vec{t} : Vecteur tangent définissant le sens de parcours de la ligne de dislocation.

P : Energie potentielle totale.

f : Energie de déformation de la poutre.

W : Travail due aux charges ou forces appliquées sur la poutre.

$f_P^{(1)}$: Energie de déformation due à la flexion des parties extrêmes des poutres en cantilever.

$f_P^{(2)}$: Energie de déformation due à la flexion des parties extrêmes des poutres attachées à la fondation élastique.

$f_c^{(2)}$: Energie de déformation de la couche adhésive (collées) .

δ : Déplacement total.

$\delta^{(1)}$: Déplacement du à la flexion des poutres en cantilever.

$\delta^{(2)}$: Déplacement du à la flexion et la rotation du reste de la poutre (partie collée élastique).

$P^{(1)}$: Energie potentielle due à la flexion des deux poutres

$P^{(2)}$: Energie potentielle due à la contribution de la couche adhésive.

$G_1^{(1)}$: Taux de restitution d'énergie de la poutre en cantilever.

$G_1^{(2)}$: Taux de restitution d'énergie de la poutre adhésive.

$G_{1b}^{(2)}$: Energie de la poutre sur appuis élastiques adhésifs.

G_{12} : Taux de restitution d'énergie de la poutre de partie (2).

K_I : Facteur d'intensité de contraintes pour le mode I.

$G = RT \rho / M_c$ (module de cisaillement)

$E = 3RT \rho / M_c$ (module de Young)

R : Contrainte des gaz parfaits

ρ : Densité de réticulation

T : Température absolue

M_c : Masse molaire entre nœud

E_f : Module de Young du matériau composite dans le sens des fibres.

E_{fib} : Module de Young des fibres.

E_m : Module d'Young de la matrice.

V_{fib} : Fraction volumique de fibre.

V_m : Fraction volumique de la matrice.

ff : Résistance en traction du matériau composite.

$ffib$: Résistance en traction de la matrice

Notons que dans ces équations.

$V_m + V_{fib} = 1$ Fraction volumique.

V_{fib} typique est de l'ordre de **0.6 - 0.65**.

α : Pente d'une droite, représente l'ordre de la singularité du champ des contraintes.

β : Angle d'orientation des dislocations par rapport à la fissure principale.

γ : Constante dépendant de μ , b et κ .

$\bar{\gamma}$: Conjuguée de γ .

γ_s : Energie par unité de surface.

θ : Angle d'orientation des dislocations par rapport à l'axe horizontal.

$$\kappa : \text{Coefficient} : \begin{cases} \kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu) & \text{pour un état de contrainte plane.} \\ K = \sqrt{\frac{G_2 c E_2}{1 - \nu_2^2}} & \text{pour un état de déformation plane} \end{cases}$$

ν : Coefficient de Poisson.

σ : Contrainte normale.

σ_N : Contrainte nominale.

σ_{xx} : Contrainte normale dans le sens xx.

σ_{yy} : Contrainte normale dans le sens yy.

σ_{xy} : Contrainte tangentielle.

σ_{rr} : Contrainte normale dans le sens radial en coordonnées polaires.

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte normale dans le sens rotationnelle en coordonnées polaires.

$\sigma_{r\theta}$: Contrainte tangentielle en coordonnées polaires.

Ψ : Ouverture (angle) de l'entaille.

Liste des Figures et Tableaux

Chapitre I

Figure 1.1 : Evolution de la production mondiale des composites et conséquences sur les prix

Figure 1.2 : principaux constituants d'un matériau composite

Figure 1.3 : principaux durcisseurs utilisés

Figure 1.4 : Etape schématique de la fabrication des fibres de carbone exemple de PAN

Figure 1.5 : conception de système

Figure 1.6 : tissu en fibres de carbone

Figure 1.7 : Evolution des propriétés mécaniques en fonction de la température

Figure 1.8: Matériaux Sandwiches

Figure 1.9 : Cœurs des poutres sandwiches

Figure 1.10 : Rupture fragile d'un bateau

Figure 1.11: (a) Accident du train allemand ICE à Eschede (Allemagne) en juin 1998.

(b) Rupture d'une roue fissurée Richard et al

Figure 1.12: Au voisinage de la fissure.

Figure 1.13: Zone plastique en pointe de fissure

Figure 1.14: Représentation d'une fissure dans une plaque chargée d'épaisseur t

Figure 1.15: Trois modes de fissuration (I, II et III).

Figure 1.16: Différentes zones autour d'une fissure.

Figure 1.17: Model de Griffith.

Chapitre II

Figure 2.1 : Géométrie du modèle proposé.

Figure 2.2 : Décomposition de la poutre sandwich pour l'analyse de contraintes.

a) Adhérent, b) Adhésive (colle),

Figure 2.3 : Diagramme de la décomposition des taux de restitution d'énergie.

Chapitre III

Figure 3.1: Schéma d'une fissure.

Figure 3.2: Schéma d'une entaille en V- notch aigue dans le modèle de Williams.

Figure 3.3 : Variation de l'énergie G_I en fonction de la longueur de la fissure.

Figure 3.4 : Distribution des contraintes au long de la fissure dans la couche adhésive.

Figure 3.5: Analyse des distributions des Contraintes de la poutre cantilever, (a) Poutre en cantilever; (b) Poutre sur appuis élastiques.

Chapitre IV

Figure 4.1 : Comparaison entre les résultats théoriques et pratiques du Facteur d'intensité de contrainte et le rapport (h/l) .

Figure 4.2 : Comparaison des infinités modèle de poutre de longueur augmentée avec des résultats à deux dimensions de calcul et expérimentales appropriées.

Figure 4.3 : Taux énergétique $\frac{G_2^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ en fonction de l/B pour différentes valeurs de γ .

Figure 4.4: Taux énergétique $\frac{G_2^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ en fonction de $\frac{E_1}{E_2}$ pour différentes valeurs de $\frac{l}{B}$.

Figure 4.5 : Taux énergétique $\frac{G_2^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ en fonction de $\frac{t}{h}$ et $\frac{l}{B}$.

Figure 4.6: Facteur d'intensité de contrainte K en fonction de $\frac{t}{h}$ et $\frac{l}{B}$.

Tableaux

Tableau 1-1 : Caractéristiques mécaniques des résines époxydes.

Tableau 1-2 : Comparaison des propriétés de tissus en fibres de carbone par rapport aux tissus de verre et d'aramide.

Tableau 1.3: Différents couples constituant un matériau sandwich.

Tableau 4.1: Résultats théoriques et pratiques du Facteur d'intensité de contrainte.

Tableau 4.2 : Différentes valeurs de γ .

Tableau 4.3 : Différentes valeurs de modules E_1/E_2 .

Tableau 4.5 : Différentes valeurs de t/h de la poutre composite.

Tableau 4.6 : Différentes valeurs pour les rapports t/h de la poutre composite.

Table des matières

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION GENERALE.....	13
1.) INTRODUCTION SUR LES COMPOSITES.....	14
1.1) DESCRIPTION ET CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES.....	16
1-1.1) AVANTAGES.....	17
1-1.2) INCONVENIENTS.....	18
1-1.3) CONSTITUANTS.....	19
1-2.MATRICES.....	19
1-2.1) ADDITIFS ET CHARGES.....	21
1-2.2) FIBRES DE RENFORT.....	21
1.3) CONCEPTION DE SYSTEME DE RENFORCEMENT PAR COMPOSITE.....	25
1.4) DIFFERENTS PROCEDES DE MISE EN ŒUVRE.....	26
1.4.1) MISE EN ŒUVRE PAR MOULAGE AU SAC.....	26
1.4.2) MISE EN ŒUVRE PAR ENROULEMENT FILAMENTAIRE.....	26
1.4.3) COLLAGE DE PLAQUES COMPOSITES.....	26
1.4.4) MISE EN ŒUVRE PAR STRATIFICATION DIRECTE DE TISSUS SECS.....	27
1.5) INFLUENCE DE L'ENVIRONNEMENT SUR LE COMPORTEMENT DES COMPOSITES.....	29
1.5.1) TEMPERATURE.....	29
1.5.2) HUMIDITE.....	30
1.5.3) INFLUENCE DE L'ULTRAVIOLET.....	30
1.5.4) FLUAGE, CORROSION SOUS CONTRAINTE.....	30
1.6) PROPRIETES MECANIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES.....	31
1.7) MATERIAUX SANDWICHES.....	32
1.7.1) PROPRIETES DES MATERIAUX SANDWICHES.....	34
1.7.1.1) AVANTAGES.....	34
1.7.1.2) INCONVENIENTS.....	34
1.7.2) MATERIAUX CONSTITUTIFS D'UN SANDWICH.....	34
2) MECANIQUE DE LA RUPTURE.....	35
2.1) HISTORIQUE.....	35
2.2) MECANIQUE LINEAIRE ET NON LINEAIRE DE LA POUTRE.....	38
2.3) MECANISMES DE RUPTURE.....	40
2.4) MODES DE FISSURATION.....	40
2.5) ZONES D'ENDOMMAGEMENT.....	42
2.6) THEORIE DE GRIFFITH.....	43
2.7) MODIFICATION DE LA THEORIE DE GRIFFITH PAR IRWIN.....	45

CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLEME

II. 1) INTRODUCTION46
II. 2) FORMULATION DU PROBLEME.....46
II. 3) ANALYSE ENERGETIQUE.....48
II. 4) FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME.....49

CHAPITRE III : FACTEUR D’INTENSITE DE CONTRAINTES

III.1) INTRODUCTION54
III.1.1) CONCEPT DU FACTEUR D’INTENSITE DE CONTRAINTES54
III.2) FACTEUR D’INTENSITE DE CONTRAINTES (CAS D’UNE ENTAILLE
INFINIMENT AIGUE).....56
III.3) CRITERE DE L’ENERGIE57
III.4) TAUX DE RESTITUTION D’ENERGIE.....58
III.5) TAUX DE RESTITUTION D’ENERGIE G159
III.6) EVALUATION DU TAUX DE RESTITUTION D’ENERGIE G161

CHAPITRE IV : APPLICATIONS

APPLICATIONS62

CONCLUSION73
PRESPECTIVES.....74
ANNEXES A.....75
ANNEXE B.....79
ANNEXE C.....83
ANNEXE D.....86

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....108

INTRODUCTION GENERALE

Cette recherche se propose d'étudier les phénomènes complexes qui apparaissent dans le comportement de poutres liées entre elles par une loi de connexion tangentielle avec propagation inélastique. Ce travail de recherche est composé de quatre parties :

- La première partie est consacrée à une étude détaillée des travaux de recherche récents (bibliographie) sur des thèmes similaires tels que la propagation de la rupture en mode I à l'interface d'un élément poutre.
- La deuxième partie consiste à formuler le problème dans le cas de matériaux composites. Cette dernière a été utilisée pour la détermination des forces d'images situant et orientant la propagation des fissures par rapport à la fissure principale.
- La troisième partie consiste à l'étude du facteur d'intensité de contrainte de la poutre en présence des fissures en mode I sans adhésif et avec adhésif au voisinage de la fissure principale.
- La quatrième partie consiste à comparer les résultats théoriques et les résultats numériques à ceux obtenus par Mostovoy 1967 [39], Kanninen 1973 [40] et Cross 1966 [41].

1) INTRODUCTION SUR LES COMPOSITES

Il existe différentes familles des matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, les matériaux sandwiches, les matériaux intelligents. Le développement et les changements rapides des produits, des pratiques technologiques et industrielles sont accompagnés par de nouvelles générations de matériaux. Parmi ces matériaux, les composites ne cessent d'évoluer vers des produits qui sont, soit les moins coûteux possibles, soit les plus performants, ou bien les deux à la fois. De plus, dans un souci de protection de l'environnement et de santé publique, les composites tendent à intégrer un caractère écologique. Ces matériaux occupent aujourd'hui une place importante dans les produits manufacturables. Issus des résultats de la recherche et des besoins de l'industrie, ils se classent en deux catégories importantes : les stratifiés et les sandwiches. Le choix d'un matériau composite pour la réalisation n'est plus réservé à des applications spécifiques produites à faible unité comme les satellites, le sport de compétition, les voitures de luxe... les constructions dans le domaine de génie civil, l'automobile, les loisirs envisagent désormais l'emploi de matériaux composites comme moyen d'innovation et d'augmentation des performances de leurs produits. La certification des nouvelles pièces est délicate en raison du changement radical des technologies utilisées, tant pour le dimensionnement que pour la fabrication. Aujourd'hui l'utilisation des matériaux composites occupent une place importante dans le domaine aérien, dans la fabrication d'un hélicoptère : en moyen de 25% à 30% de la masse est en composite, de plus un avion comme l'airbus est constitué de 20% de composite de la masse totale à vide. Le passage des matériaux métalliques aux matériaux composites engendre des coûts importants mais il s'agit en fait d'un investissement à moyen et long terme. L'inhomogénéité et l'anisotropie des matériaux composites rendent leurs mécanismes d'endommagement plus nombreux et plus complexes.

Au sein d'une structure composite, on peut voir apparaître l'endommagement constitué de micro-décohésions et de microfissures, des ruptures de pli, ruptures des fibres et des matrices, décohésion de l'interface.... Le délaminage des plis est un phénomène sensible qui peut apparaître à tout moment, mais comment le détecter ? L'opération de recherche sur les matériaux piézoélectriques entre dans le cadre plus large des matériaux « intelligents » et des structures multifonctionnelles, et s'intéresse, aux structures composites constituées de poutres et de plaques multicouches dont le comportement varié leur confèrent des applications dans le domaine des technologies avancées (structures adaptatives, contrôle de formes et de vibrations en aéronautique et aérospatiale, génie médical, etc.). L'intérêt majeur de ces structures composites

réside dans leur capacité d'engendrer des déformations contrôlables par application de champs électriques appropriés ou de capter, de façon sensible, des sollicitations mécaniques ; ce qui ne pourrait pas être obtenu avec des matériaux classiques. De nombreux travaux de recherche ont traité le comportement élastique des matériaux orthotropes, et ainsi la résistance de ces derniers à la rupture, Laurent et Lagrange [1] présentent une approche pour l'analyse du délaminage par la mécanique de l'endommagement auprès du bord d'une structure composite, ils utilisent des hypothèses de base « le bord est quasi -droit l'endommagement est concentré sur les interfaces entre les couches », il exploitent les résultats d'essais classiques de la mécanique de la rupture et par l'étude de l'initiation du délaminage auprès du bord libre d'une éprouvette en tension et en compression. Jean-luc R. [2] présente un modèle qui permet de décrire certaines transitions entre les différents endommagements, tout d'abord le modèle a permis de confirmer que l'initiation et l'évolution du premier mode d'endommagement, la fissuration transverse, est principalement pilotée par la contrainte normale dans les couches désorientées du stratifié. De plus l'amorçage de ces fissures est facilité dans les stratifiés avec des plis à 90° épais. Grandidier et Potier-Ferry [3], présentent un outil numérique qui permet d'étudier la rupture en compression par micro flambage plastique des composites à fibres longues. Le problème de micro flambage est défini à l'échelle mésoscopique, en introduisant une cinématique à double échelle dans le modèle homogénéisé proposé par (Drapier et al. 1994). Un élément fini spécifique associé à ce problème permet de rendre compte de l'influence sur le micro flambage de l'ondulation initiale des fibres et du comportement non linéaire de la matrice mais aussi des paramètres structuraux (épaisseur des plis, séquence d'empilement, chargement). Cet outil numérique permet, à de très faibles coûts de calculs, de déterminer la rupture de diverses configurations de plis unidirectionnels par des calculs de charges maximales. L'étude de Corrine [4] consiste à adapter le processus de fabrication développé à l'Institut des Matériaux Avancés (selon Petten) pour des composites à matrice Si₃N₄ renforcée par des fibres de carbone, Nicalon et Lorriot [5] donnant des procédures de mise en œuvre et d'interprétation d'essais de choc et de propagation de fissures par cycle mécanique, qui ont été développées afin de mettre en évidence d'éventuels effets dynamiques sur les paramètres de rupture de matériaux composites Carbone/Carbone stratifiés (2D-C/C). Des précautions particulières ont été prises de manière à éliminer des bilans énergétiques relatifs aux énergies d'endommagement parasites se produisant en dehors des zones de propagation des entailles.

Les comparaisons effectuées entre les résultats des essais montrent que les effets dynamiques liés à des impacts augmentent notablement les paramètres de rupture en retardant l'endommagement

de la matrice par rapport à la rupture des fibres. En revanche, les cyclages mécaniques influent modestement sur l'accroissement de ces paramètres de rupture bien qu'ils contribuent à développer l'endommagement de la matrice. Un article de Calard et Lamon [6] expose une théorie de la fragmentation matricielle basée sur une population effective de défauts dans la matrice d'un composite unidirectionnel. De cette population de défauts, ils déduisent une population effective de contraintes à rupture par la théorie classique de la rupture en mécanique linéaire. Le comportement du mini composite est alors simulé en discrétisant la matrice et en répartissant de manière aléatoire la population de contraintes à rupture. Différents lots de composites unidirectionnels, élaborés et testés au (Lissart, 1994), ont ainsi pu être simulés, ainsi que le modèle Aveston, Cooper et Kelly (ACK, 1971). D'autre part, les approches antérieures des composites unidirectionnels (ACK, Lissart, Lebrun) ont été comparées et interprétées en terme de populations de contraintes à rupture. PAYAN [7] étudie le comportement en dommageable de composites stratifiés carbone/epoxy composés de plis unidirectionnels sous chargements statiques et de fatigue. Le modèle présenté s'inscrit dans le cadre de la mécanique de l'endommagement; il est orthotrope et est écrit à l'échelle du pli, sous l'hypothèse des contraintes planes; il est unifié pour chargement statique et de fatigue et il est simplifié grâce à un critère d'arrêt à la première rupture de pli. Il donne comme supposition l'état d'endommagement diffus et l'absence de macro-fissures: notamment de délaminages. Cette approche s'adapte aux structures type tube et aux contextes industriels de sécurité. Malgré ces travaux de recherche qui traitent le comportement élastique des matériaux orthotropes, ainsi que sa résistance à la rupture, le risque des ruines des structures composites reste une force majeure dans l'industrie moderne (surtout dans le domaine aérien), toutes les modélisations et simulations restent insuffisantes pour les dimensionnements exacts des matériaux composites et sandwiches ; le volume occupé par la porosité, les conditions aux limites, l'alignement des fibres dans la matrice, les simulations des conditions de travail des pièces...rendent les conceptions des pièces insuffisantes.

1-1) DESCRIPTION ET CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES

Un matériau composite signifie que deux ou plusieurs matériaux sont combinés à l'échelle macroscopique pour former un troisième matériau [8]. Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites unidirectionnels sont les plus utilisés. En fait, on appelle de façon courante matériau composite unidirectionnel des arrangements parallèles des fibres continues ou non d'un matériau résistant appelé « le renfort » qui est noyé dans une matrice « résine » dont la résistance est beaucoup plus faible [9].

Afin de comprendre et cerner la problématique de la conception des matériaux composites on répond dans ce qui suit aux trois questions suivantes :

- 1- Les avantages ? 2- Les constituants ? 3- Les propriétés ?

1-1.1) AVANTAGES

L'utilisation des matériaux composites apporte de nombreux avantages en termes de propriétés des matériaux. En effet, le but de leur fabrication est de profiter des bonnes propriétés de chaque constituant afin d'en former un qui sera mieux adapté à certaines applications [8 - 10]. Voici un bref résumé des avantages et des inconvénients liés à l'utilisation des composites comme matériaux de construction :

- Rapport résistance - poids très élevé.
- Très grande rigidité.
- Résistance à la fatigue acceptable.
- Résistance à la corrosion.
- Facilité de mise en place.
- Possibilité d'optimisation (choix de renforcement, direction).
- Multifonctionnalité (résistance mécanique, résistance à l'eau et à la corrosion, etc.).

1-1.2) INCONVENIENTS

- Coût relativement élevé du produit de base jusqu'à 10 fois le coût de l'acier pour une masse identique.
- Connaissances limitées sur leurs propriétés à long terme, notamment en ce qui concerne :
 - l'adhérence à l'interface béton- composite
 - Manque de ductilité.
 - Absence de normes de design.

On note également que durant ces dernières années, le coût ne devient plus un grand problème en raison du :

- Développement qu'a connu l'industrie des composites durant les trois dernières décennies et la crise qu'a traversé l'industrie aéronautique depuis le début des années 90, ce qui avait comme conséquence une baisse des prix des composites (voir Figure 1-1).

- Dans les applications traditionnelles, les matériaux ne représentent que 20% des coûts, alors que la main-d'œuvre en représente 80 %. Ainsi, si l'on considère le coût total des travaux, il peut être possible de faire des économies sur la main-d'œuvre, puisque les matériaux composites sont plus faciles à installer que l'acier. L'utilisation des matériaux composites peut donc devenir compétitive sur le marché [10, 11].

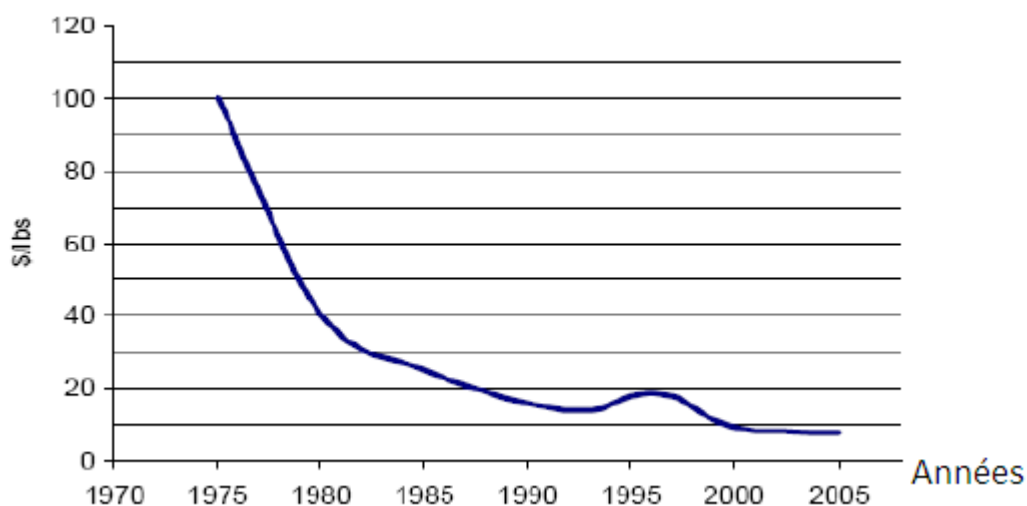
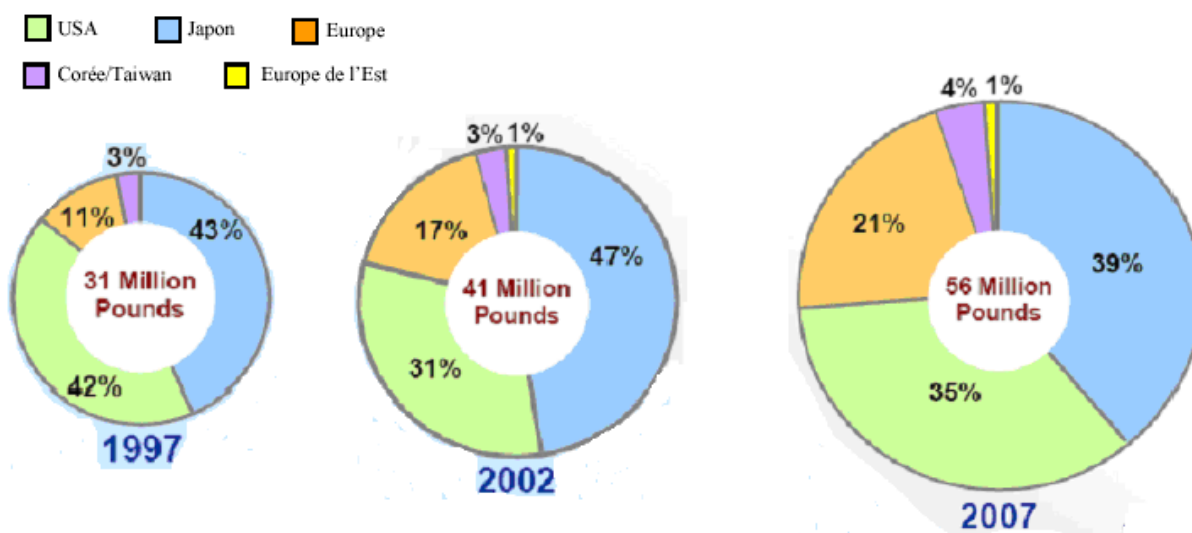


Figure 1.1 : Evolution de la production mondiale des composites et conséquences sur les prix

1-1.3) CONSTITUANTS

Les matériaux composites de par leurs constituants sont résumés dans la Figure 1.2 [9], [12].

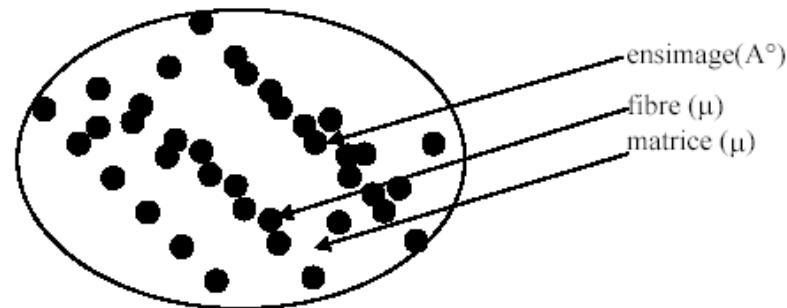


Figure 1 .2 : Principaux constituant d'un matériau composite

1-2 MATRICES

Ce sont des résines isotropes qui ont pour rôle de [13] :

- lier les fibres renforts
- Répartir les contraintes encaissées
- Apporter la tenue chimique de la structure
- Donner la forme désirée au produit

Ces résines qui sont des polymères se distinguent en deux grandes catégories selon leur structure [13] :

1. les polymères thermodurcissables (TD) : ce sont les plus utilisés dans le domaine de génie civil et sont en général associés avec des fibres longues : par exemples le polyester, le vinylester, l'époxy et le phénolique.

2. les polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes.

Les polymères époxy sont des résines thermodurcissables et qui réticulent de façon irréversible. Les polymères époxy sont transformés à l'aide de durcisseurs et d'accélérateurs afin d'obtenir une structure macromoléculaire tridimensionnelle. Parmi les durcisseurs, les amines aliphatiques permettent le durcissement à température ambiante. La polycondensation du système pré polymère époxyde/agent réticulant (durcisseur) conduit à la formation d'un réseau amorphe tridimensionnel. La réaction de réticulation peut se faire à froid avec des amines aliphatiques ou à chaud avec des amines aromatiques (Figure 1.3).

En général, les polymères **durcis** à **chaud** possèdent de meilleures caractéristiques mécaniques que ceux durcis à froid [14].

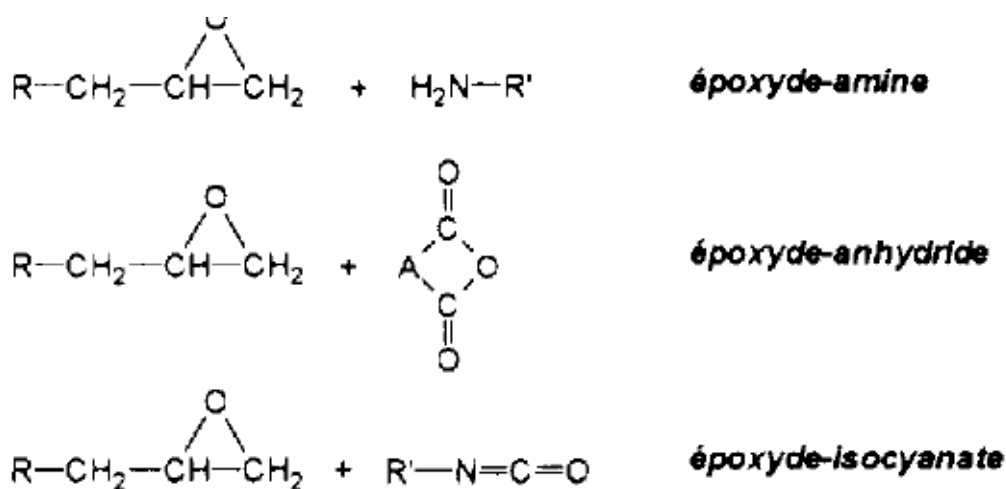


Figure 1.3 : Principaux durcisseurs utilisés.

L'un des principaux avantages des polymères époxy provient de la réaction de polyaddition. Par définition, cette réaction se fait sans perte de matière et présente ainsi un faible retrait avec la possibilité d'obtenir par coulée, des masses très importantes. La faible absorption d'eau et l'absence de post-retrait assurent au polymère une bonne résistance aux divers agents chimiques. Ces deux propriétés permettent d'obtenir une protection importante contre la corrosion [14].

Propriété mécanique de polymère époxy :

Les polymères époxy ont de bonnes propriétés en traction, en flexion et en compression. Seule, la résistance aux chocs est un point faible (voir tableau 1-1.).

La dureté sera plus ou moins élevée en fonction de la compacité du réseau tridimensionnel et de la présence d'adjuvants [9].

Tableau 1-1 : Caractéristiques mécaniques des résines époxydes.

Résistance à la traction (MPa)	50 à 80
Module d'élasticité en traction (GPa)	3 à 10
Allongement à la rupture (%)	1 à 1.5
Résistance à la compression (MPa)	140 à 150
Résistance au choc (MPa)	7 à 10

Les principales caractéristiques des époxy sont :

- Une adhérence remarquable sur tous les types de support.
- Une bonne résistance à la chaleur liée à Tg.
- Une relative neutralité vis-à-vis de l'organisme.
- Une excellente résistance chimique aux huiles, aux hydrocarbures, à l'eau.

De plus, les polymères époxy montrent une mauvaise résistance chimique à l'acide nitrique et à l'acide sulfurique, aux cétones et une faible reprise d'humidité mais une excellente tenue à la fatigue .

1-2.1) ADDITIFS ET CHARGES

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières. Les quantités de produits peuvent varier de quelques dizaines de pourcentage dans le cas de charges à quelques pourcentages et moins dans le cas d'additifs. Les propriétés particulières qui peuvent généralement être améliorées portent sur les résistances mécaniques (compression) et les propriétés de mise en œuvre (thixotropie). Nous pouvons ainsi citer en exemple les charges renforçantes qui se présentent sous formes sphériques (microbilles de verre) ou non sphériques (écailles de mica), les charges non renforçantes qui ont pour rôle de diminuer le coût de la résine et peuvent contribuer à l'augmentation de certaines propriétés (masse volumique, dureté, module d'élasticité). Il est important de noter que l'ensemble de ces ajouts modifient les propriétés physiques et mécaniques des résines [12].

1-2.2) FIBRES DE RENFORT

La fibre est constituée de plusieurs filaments élémentaires dont les diamètres varient entre 5 μ m et 25 μ m, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donnent au matériau un effet de résistance orientée [15] et contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites. Les trois grandes familles de fibre actuellement utilisées sont : le carbone, l'aramide et le verre [13].

La fibre de carbone

Le graphite a une structure hexagonale d'atome de carbone disposé en plan cristallographique parallèle. Les plans sont décalés de telle sorte qu'un atome de carbone se projette au milieu d'un hexagone des plans voisins. Les liaisons entre atomes de carbone des plans voisins sont faibles, et confèrent au graphite de bonnes propriétés de conduction thermique et électrique. Par contre les liaisons entre atomes voisins d'un même plan sont fortes et donnent au graphite des propriétés mécaniques élevées dans la direction parallèle au plan cristallographique [16].

ELABORATION DE FIBRE DE CARBONE

- les meilleures fibres sont produites à partir de fibre organique de POLYACRYLONITRILE ou PAN
- les fibres bas de gamme sont préparées à partir de BRAI [17].

➤ A PARTIR DES FIBRES ACRYLIQUES

Les fibres de carbone sont élaborées à partir d'un polymère de base appelé précurseur se présentant lui-même sous forme de fibres acryliques élaborées à partir du poly acrylonitrile (PAN) [1]. Pour produire le carbone avec le PAN nous procédons comme suit :

- on dissout le polymère dans un solvant,
- il s'écoule ensuite à travers une fibre pour donner une fibre coagulée,
- on procède à l'oxydation sous atmosphère d'azote à 300°,
- dans les fours à pyrolyses, on procède à la carbonisation et à la graphitisation. On favorise ainsi le départ des atomes d'hydrogène, d'azote et d'oxygène (température 1800°c toujours sous azote).

Après extraction de ces produits volatiles, il ne reste plus que les atomes de carbone. Il ne subsiste alors que la chaîne hexagonale des atomes de carbone. On obtient des filaments noirs et brillants de structure graphitique (97% à 98% de carbone) [17]. Nous donnons dans ce qui suit quelques explications sur les procédés de production de carbone avec le PAN.

L'oxydation : Les fibres acryliques étant fusibles, la phase d'oxydation a pour but de supprimer artificiellement le point de fusion. Cette opération est effectuée en chauffant les fibres à environ 300°c en atmosphère d'oxygène. Il se produit alors une oxydation conduisant à une réticulation des chaînes moléculaires et à la création d'un réseau tridimensionnel [12].

La carbonisation : Le but de cette étape est de débarrasser la chaîne moléculaire en chauffant progressivement les fibres réticulées de 300°C à 1110°C environ. Alors il y a élimination de l'eau et de l'acide cyanhydrique. Seuls le carbone est conservé dans la chaîne. Après cette phase les fibres donnent de bonnes caractéristiques mécaniques et sont alors dénommées fibre HR (haute résistance) ou fibre HT (haute ténacité) [12].

La graphitisation : Cette phase est utilisée lorsque l'on souhaite obtenir des fibres à module de Young élevé, en effectuant à la suite de la carbonisation une pyrolyse des fibres en atmosphère inerte jusqu'à 2600°C ou à des températures supérieures. La graphitisation provoque une réorientation des réseaux hexagonaux de carbone suivant l'axe de la fibre ce qui aboutit à une augmentation du module d'Young et à une diminution de la contrainte à la rupture suivant le taux de graphitisation. On obtient des fibres HM (fibre à haut module) ou des fibres THM (à très haut module) [12].

Le traitement de surface : Il consiste en un traitement de surface par oxydation ménagée en acide (nitrique ou sulfurique). Cette phase a pour objet d'accroître la rugosité des filaments ainsi que la nature des liaisons chimiques afin d'améliorer la liaison fibre - résine [12]. Le schéma de la Figure I.4 présente toutes les étapes [18].

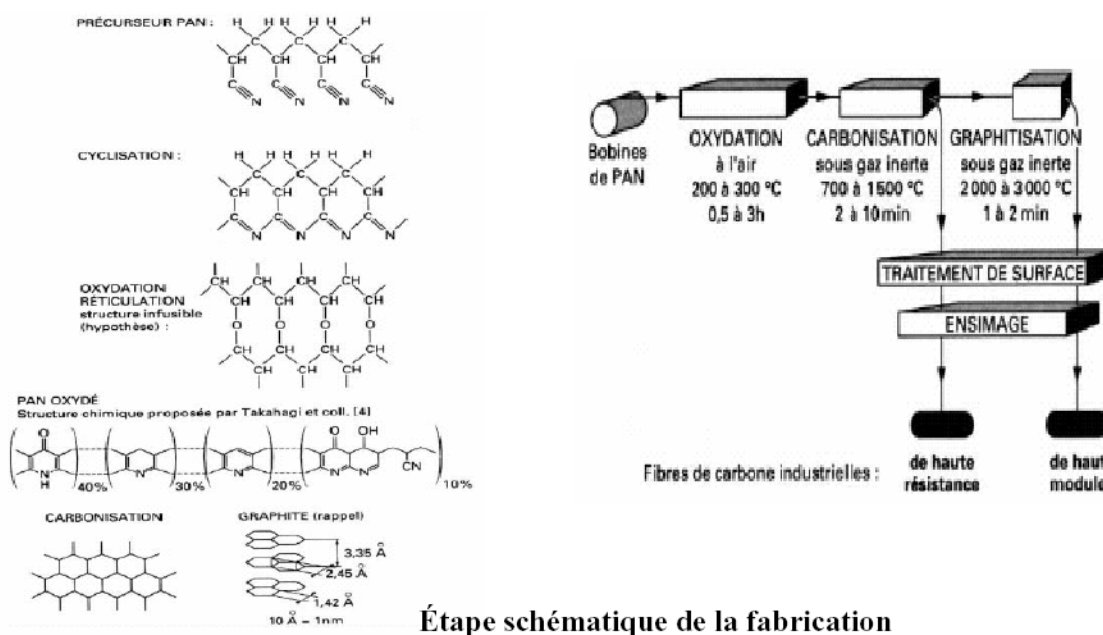


Figure 1.4 : Etape schématique de la fabrication des fibres de carbone exemple de PAN.

➤ À PARTIR DE PRECURSEUR BRAI

Le brai est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille dans ce procédé le brai est chauffé à 350°C - 450°C pour obtenir une mésophase (intermédiaire entre liquide et carbonisé, et en fin pyrolyse à des températures supérieures à 2000°C pour obtenir des fibres haut module. Les avantages de ce nouveau procédé sont : -un rendement massique : précurseur/filament de l'ordre de 80% (50% pour le procédé PAN) - une vitesse de graphitisation plus élevée - une matière première bon marché.

AVANTAGES

Les fibres de carbone bénéficient de caractéristiques mécaniques et de propriétés physiques très intéressantes [17-18]:

- absorption des vibrations
- grande stabilité dimensionnelle
- très bonne tenue en température (grande résistance à l'usure)
- dilatation thermique nulle
- grande stabilité thermique (sont pratiquement incombustibles)
- bonne conductivité thermique et électrique
- grande résistance à la corrosion vis-à-vis des acides, des bases des sels et des produits organiques
- transparence aux rayons
- bonne tenue à l'humidité
- usinage aisé
- faible densité

INCONVENIENTS

- prix très élevé
- précaution à prendre dans la mise en œuvre (fibre cassante)
- tenue limitée aux chocs et à l'abrasion
- mauvais comportement chimique avec oxygène à 400°C.

TISSAGE

Les fibres sont filées comme du coton. La qualité du fil est proportionnelle à la quantité de fibres exprimée en milliers, qui le compose. Par exemple le fil de carbone 3K (3000 fibres) est 3 fois plus résistant qu'un fil de 1K, mais il est également trois fois plus lourd. Ce fil est ensuite tissé. L'apparence de ce tissu de carbone dépend de la taille du fil et de la méthode de tissage [19].

Le tableau 1-2 dresse une comparaison des caractéristiques de tissu de fibre de carbone par rapport aux autres tissus :

Tableau I-2 : Comparaison des propriétés de tissu en fibre de carbone par rapport aux tissus de verre et d'aramide.

Caractéristique	Tissu fibre de verre	Tissu en fibre d'aramide	Tissu en fibre carbone
Résistance à la traction	Très bonne	Très bonne	Très bonne
Résistance à la compression	Bonne	Bonne	Bonne
Résistance à la fatigue statique	Faible	Bonne	Excellente
Raideur	Faible	Grande	Très grande
Résistance à la fatigue cyclique	Assez bonne	Bonne	Excellente
Densité	Assez faible	Très faible	Faible
Résistance au produit chimique	Faible	Bonne	Très bonne
Coût	Bon	Assez cher	Cher

Ce tableau permet de voir pourquoi la fibre de carbone est souvent la plus retenue pour la confection d'un composite [20].

1.3) CONCEPTION DE SYSTEME DE RENFORCEMENT PAR COMPOSITE

Le principe de la technique de renforcement par composite est résumé dans la Figure 1.5 [21].

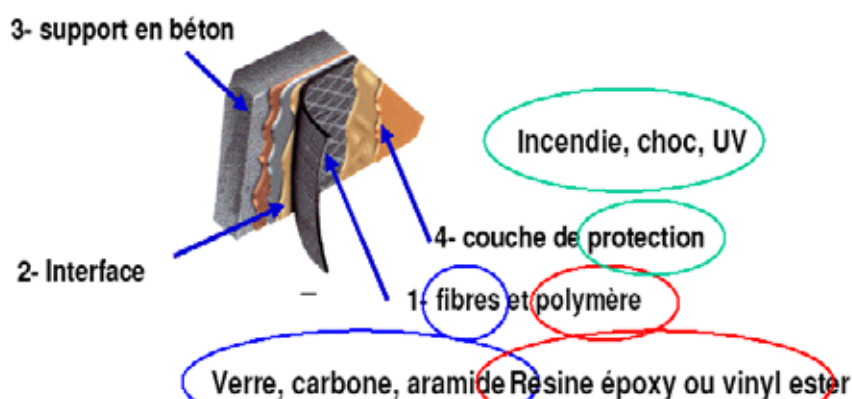


Figure 1.5 : Conception du système.

1.4) DIFFERENTS PROCEDES DE MISE EN ŒUVRE

Toute mise en œuvre de matériaux composites sur une structure endommagée nécessite d'abord un ragréage de la surface à réparer. Celle-ci doit être plane et propre.

Dans la plupart des cas, une injection dans la fissure et un traitement de surface par sablage sont réalisés.

1.4.1) MISE EN ŒUVRE PAR MOULAGE AU SAC

Les tissus pré imprégnés sont obtenus en usine à partir de tissus secs (cas des tissus multidirectionnels) ou à partir de fils de carbone joints sous forme de nappe (cas des tissus unidirectionnels), sur lesquels est déposé un excès de résine. Le produit, avant utilisation, est conservé à froid, généralement à -18 °C , pour éviter la polymérisation de la résine, avant d'être ramené à la température ambiante pour être utilisable. Le principal avantage de cette méthode est la quasi absence de bulles dans le renfort en composite après polymérisation. Le principal problème d'un tel procédé réside dans la phase de la remontée à la température ambiante et dans les difficultés matérielles pour assurer de bonnes conditions de polymérisation sur chantier [22].

1.4.2) MISE EN ŒUVRE PAR ENROULEMENT FILAMENTAIRE

La fibre est produite sous forme de fibres continues de très grande longueur. Elle est déposée et enroulée régulièrement autour d'un mandrin. La longueur de fibres continues peut varier de 600 m à 5 km (soit 0,8 g au mètre linéaire). Ce procédé de renforcement est naturellement limité aux colonnes ou aux pylônes. Le principal avantage de ce procédé est l'automatisation complète du système de pose. Son principal inconvénient est le fait qu'une pose manuelle est nécessaire pour renforcer les extrémités des piles et des colonnes et que cette méthode demande en outre du temps et des manipulations importantes pour installer le matériel [22].

1.4.3) COLLAGE DE PLAQUES COMPOSITES

Les plaques composites sont obtenues à partir des fibres continues qui sont enduites par passage en continu dans un bain de résine. L'ensemble des mèches pré imprégnées passe ensuite dans une filière où l'excès de résine est éliminé, puis dans un four de polymérisation. Les produits

finis se présentent sous forme de bandes ou de joncs, plus ou moins rigides suivant les épaisseurs et les diamètres.

À partir de ces bandes putrides, la technique de renforcement est similaire à celle du plat collé métallique selon le procédé L'Hermitte. L'avantage de cette méthode est la facile extrapolation des résultats obtenus par le collage de tôles d'acier à ceux obtenus avec des produits pultrudés également collés, la technique du renforcement restant la même. Cependant, l'inconvénient par l'utilisation de cette technique, comme celle du plat collé métallique, permet difficilement de maîtriser les épaisseurs de colle en raison de la rigidité des aciers et des composites. Les fibres de carbone permettent comme beaucoup de fibres longues de fabriquer des tissus [22].

1.4.4) MISE EN ŒUVRE PAR STRATIFICATION DIRECTE DE TISSUS SEC

Les fibres de carbone permettent comme beaucoup de fibres longues de fabriquer des tissus de différentes formes et tailles. Ces tissus sont obtenus par assemblage des fibres orientées à 90° dans la chaîne et dans la trame de manière à créer une armure souple et déformable. Généralement les tissus sont des tissus bidirectionnels à sens de résistance privilégié dans la chaîne constituée de 70% de fibres dans le sens de la chaîne et de 30% de fibres dans le sens de trame (Figure 1.6) [23].

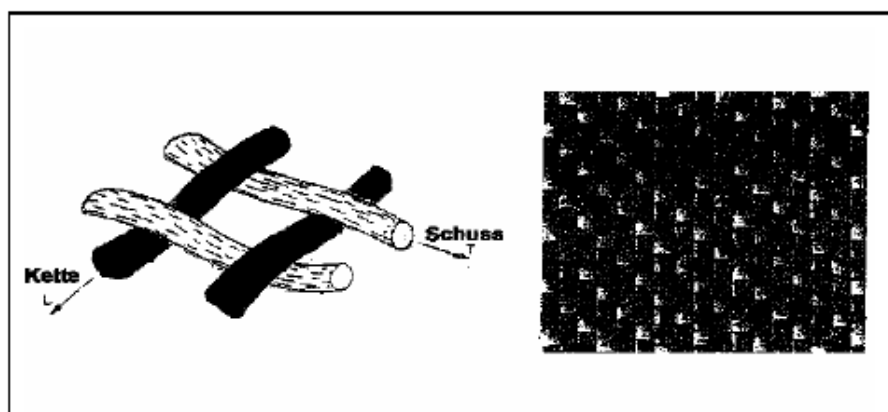


Figure 1.6 : Tissu en fibres de carbone.

Le repérage du sens privilégié est simple dans la mesure où le tissu est livré en largeurs standard et que le sens de la meilleure résistance est le sens longitudinal du coupon. De ce fait il est important d'indiquer sur les plans d'implantation des renforcements, l'orientation de pose du

tissu. Le renforcement des structures à partir d'un tissu sec se fait in situ par la pose de ce dernier sur une couche de résine qui recouvre l'élément à renforcer et qui sert de liant. Après marouflage, une couche de résine de fermeture permet de parfaire l'imprégnation. Ce procédé nécessite l'utilisation d'une résine synthétique à imprégner le tissu et à assurer la liaison avec le support à renforcer. Les résines utilisées sont des colles bi composant (résine +durcisseur). La consommation moyenne d'adhésif varie suivant la nature de l'état de surface du support. La durée pratique d'utilisation des mélanges dépend de la qualité de mise en œuvre (effet de masse) et de la température ambiante (exotherme). La vitesse de durcissement après l'application, liée à la température ambiante conditionnée au délai avant de mise en service [24]. Le faible poids spécifique du tissu de fibre de carbone, associé à la grande souplesse des textiles, présente de nombreux avantages parmi lesquels on peut citer :

- la souplesse du composite permet le parfait moulage aux irrégularités de forme du support
- contrairement aux armatures composites rigides, le tissu est directement stratifié sur l'élément de structure. Au lieu de deux interfaces (structures - colle et colle - composite), le procédé présente une interface unique (structure - composite matricé) ce qui garantit une distribution plus homogène des contraintes de cisaillement.
- Les conditions de mise en œuvre, sans manutention de lamelles en plaques encombrantes, ni besoin de pression de plaquage, se prêtent à tous les sites, même les plus difficiles d'accès ; la possibilité d'assurer la continuité de l'armature par simple recouvrement permet de réaliser des superpositions de plusieurs couches, des croisements de bandes [25].
- Quant à leur durabilité et à leur résistance, elles ne subissent pas de corrosion ni d'autres attaques chimiques. Elles offrent une meilleure résistance au feu et à la fatigue [26].
- Face au feu, que le renfort soit fait avec des platines en acier ou avec des lamelles, la ruine est provoquée par la dégradation de la résine époxy. Mais l'acier se dégrade beaucoup plus vite et présente des risques de chutes par décollement. Les CFRP, par contre, restent accrochées plus longtemps et la transmission de chaleur est moins rapide que dans l'acier ; de plus, comme elles sont légères, les risques d'accident sont écartés [26].
- En utilisant des polymères qui polymérisent à température ambiante, il est possible de réaliser une stratification directe, en respectant les étapes suivantes :

Préparation de la surface, application de la couche primaire : application d'une première couche de tissu sec, application d'une seconde couche de polymère époxyde, en suite protection et finition.

1.5) INFLUENCE DE L'ENVIRONNEMENT SUR LE COMPORTEMENT DES COMPOSITES

1.5.1) TEMPERATURE

Les performances des composites sont principalement conditionnées par l'adhésif. En revanche, le point important concerne la température de transition vitreuse T_g qui est de l'ordre de 30°C à 80°C, pour l'époxy polymérisant à froid. Elle peut atteindre une valeur importante voisine de 170°C. Les propriétés mécaniques sont directement liées à la T_g puisque cette dernière dépend de la rigidité des chaînes polymères. Les équations 1 et 2 relient les propriétés mécaniques à la densité de réticulation ρ [27].

$$G = RT \rho / M_c \text{ (module de cisaillement)}$$

$$E = 3RT \rho / M_c \text{ (module de Young)}$$

Avec;

R : contrainte des gaz parfaits

ρ : densité de réticulation

T : température absolue

M_c : masse molaire entre nœud

Les propriétés mécaniques diminuent à l'approche du seuil de température (Figure 1.7) pour éviter une rupture issue de l'adoucissement de l'adhésif ou de la résine. La température maximale de service doit être inférieure à T_g .

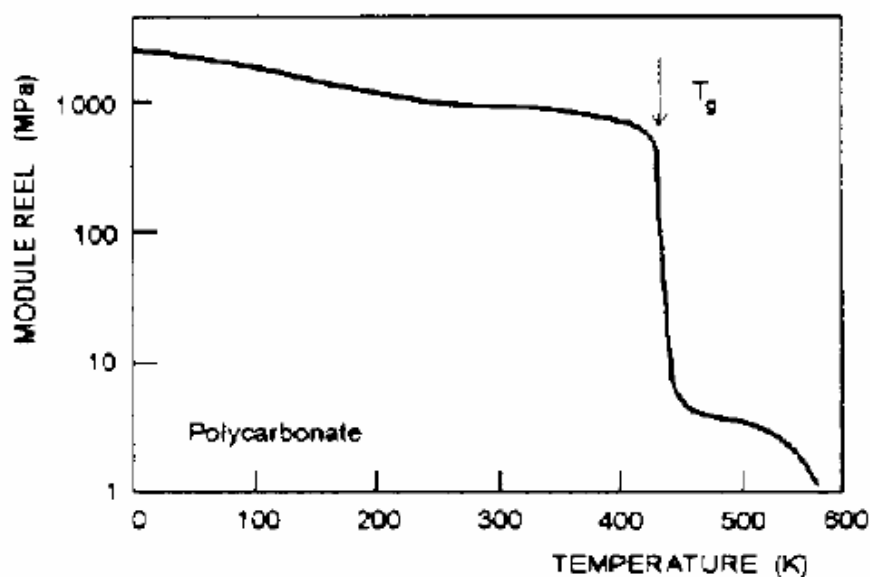


Figure 1.7 : Evolution des propriétés mécaniques en fonction de la température.

Pour des conditions de fiabilité, le composite doit être utilisé dans les conditions de température T définies comme suit : $-20 < T < T_g - 10^\circ\text{C}$. Cette remarque complète les recommandations de L'AFGC qui soulignent que T_g ne doit pas descendre en dessous de 45°C . MORCHAT et coll ont montré que la post-cuisson améliore les propriétés mécaniques du matériau. Une température élevée pourrait réagir comme une post-cure sur la résine et donc augmenter T_g . En revanche, l'absorption d'humidité par les résines va conduire à une diminution de T_g . Pour une structure sensée résister à une température élevée (mais inférieure à T_g), deux choix sont possibles :

- Utiliser une résine avec une cure en froid mais ayant une haute T_g initiale.
- Utiliser une résine à une T_g améliorée après une post-cure [27].

1.5.2) HUMIDITE

La résine de la matrice absorbe l'eau. La quantité d'eau absorbée dépend du type de résine et de la température de l'eau. Les deux conséquences immédiates en sont la réduction de la température de transition vitreuse et l'adoucissement de la résine. Dans le cas d'une résine époxy, ces deux phénomènes sont partiellement réversibles lors du séchage [28].

1.5.3) INFLUENCE DE L'ULTRAVIOLET

Les ultraviolets peuvent produire une réduction de la transmissibilité des rayons lumineux. La couleur du composite peut changer. Ce changement de couleur ou décoloration est dû à l'influence des rayons ultraviolets sur la résine de la matrice qui n'implique aucune dégradation structurale et physique. Les caractéristiques mécaniques des matériaux composites sont très légèrement influencées par les rayons ultraviolets [28].

1.5.4) FLUAGE, CORROSION SOUS CONTRAINTE

Le fluage des composites à fibre de carbone n'est pas un facteur déterminant pour le dimensionnement du renforcement d'éléments structuraux, car les structures renforcées ont généralement déjà subi leur propre fluage.

L'atmosphère ou l'environnement ambiant est en général insuffisant pour causer une corrosion du composite. Néanmoins, il peut y avoir corrosion lorsque le composite est soumis à un certain niveau de contrainte. Ce phénomène est dépendant du temps, du niveau de contrainte, du type de matrice et de la fibre. Les fibres de carbone n'en sont que très légèrement affectées, lorsque le niveau de contrainte reste inférieur à 80% de la résistance ultime. Les niveaux de sollicitations réels des composites en place sont tels que les risques sont très limités [28].

1.6) PROPRIETES MECANIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES

Dans les matériaux composites, les fibres reprennent principalement des efforts. Dans la direction des fibres la matrice transfère les contraintes entre les fibres et les protège. D'après la FIB (FIB bulletin 14, 2001), les propriétés mécaniques des matériaux composites unidirectionnels peuvent être estimées par les équations suivantes :

$$E_f = E_{fib} V_{fib} + E_m V_m \quad \sigma_f = \sigma_{fib} V_{fib} + \sigma_m V_m$$

où ;

E_f : le module d'Young du matériau composite dans le sens des fibres.

E_{fib} : le module d'Young des fibres.

E_m : le module d'Young de la matrice.

V_{fib} : la fraction volumique de fibre.

V_m : la fraction volumique de la matrice.

σ_f : la résistance en traction du matériau composite.

σ_{fib} : la résistance en traction de la matrice.

Notons que dans ces équations.

$V_m + V_{fib} = 1$ La fraction volumique.

V_{fib} typique est de l'ordre de **0.6 - 0.65**.

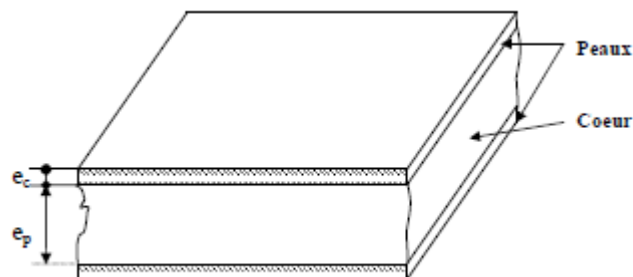
La résistance et le module d'Young des fibres sont plus importants par rapport à ceux de la matrice. Le comportement mécanique des matériaux composites est donc piloté par les propriétés mécaniques des fibres et la quantité de fibres (fraction volumique).

1.7) MATERIAUX SANDWICHES

Les structures dites « sandwich » occupent un large créneau de la construction des pièces composites. Elles apparaissent dans quasiment tous les domaines d'application. Historiquement ce sont les premières structures composites allégées et performantes. Dans la majorité des cas on doit les confectionner dans un but bien spécifique ; cependant, certains matériaux sandwichs sont disponibles dans le commerce sous forme de demi-produits.

Les sandwichs sont des matériaux composés de deux parties différentes, l'une s'appelle : « revêtement (semelles ou peaux) », et l'autre : « cœur (ou âme) ».

La semelle est une partie de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant le cœur de forte épaisseur et faible résistance comme schématisée sur la Figure 1.8.



$$10 \leq \frac{e_c}{e_p} \leq 100$$

Figure 1.8: Matériaux Sandwichs.

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux de haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité. Ils ont pour avantages : une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associée à un faible poids par unité de surface.

L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

La fabrication d'un sandwich met en jeu trois couches de natures différentes. La complexité de ces structures provient du nombre de matériaux différents, susceptibles d'être employés :

- Matériau des peaux : tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche est candidat... que ce soit un métal, un matériau composite...
- Matériau de l'âme : il se présente principalement sous quatre formes, comme mentionné dans la Figure 1.9:

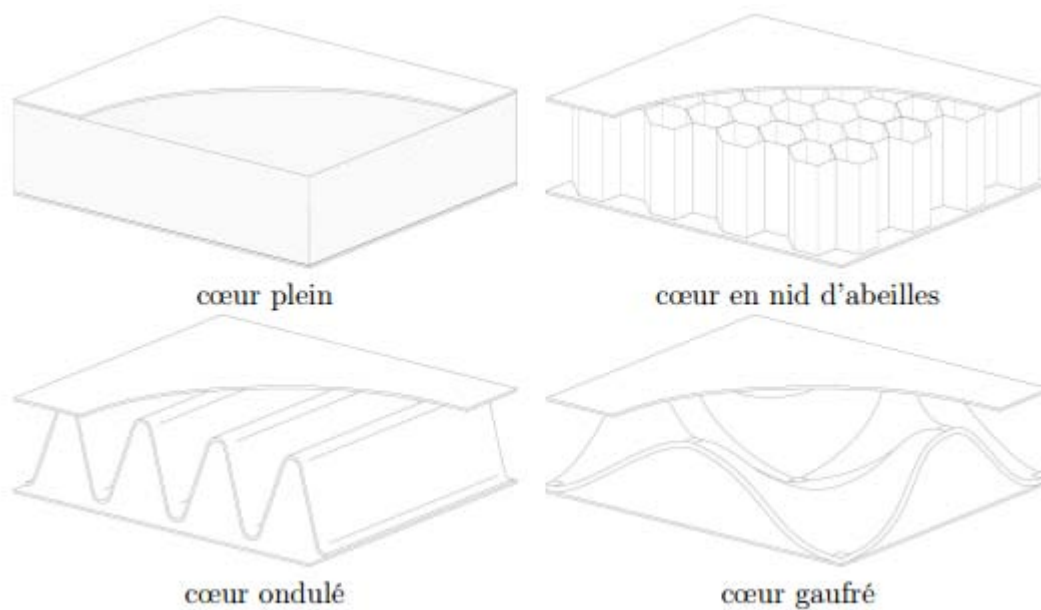


Figure 1.9 : Cœurs des poutres sandwiches.

- Plein ou alvéolaire : considéré comme homogène isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions) .
- en nid d'abeilles : considéré comme orthotrope (3 plans orthogonaux de symétrie : 9 constantes indépendantes) ou isotrope transverse (5 composantes indépendantes) ;
- Ondulé : considéré comme monoclinique (1 plan de symétrie : 13 constantes indépendantes) ;
- Gaufré : considéré comme anisotrope (21 constantes indépendantes) ou parfois comme monoclinique. Il est peu employé, ainsi que son mode d'assemblage : collage, soudage, brasage.

Comme on le voit, l'aspect géométrique de l'âme est souvent compliqué et peut conduire à des propriétés mécaniques locales extrêmement complexes. On est donc amené à simplifier le modèle correspondant au matériau de l'âme pour des raisons pratiques et numériques. Ainsi les différentes théories font généralement l'hypothèse d'un matériau homogène pour l'âme (c'est-à-dire macroscopiquement homogène), ce qui implique que la contrainte de cisaillement transverse τ est constante (ou quasi-constante). On pourra par exemple utiliser des méthodes d'homogénéisation basées sur l'énergie [30] ou sur l'étude du comportement d'un motif répétitif (problème dans la cellule) [31]. De plus, nous supposons aussi que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait, c'est-à-dire, il n'y a ni décollement ni glissement aux interfaces.

1.7.1) PROPRIETES DES MATERIAUX SANDWICHES

1.7.1.1) Avantages

- Une grande légèreté
- Une grande rigidité de flexion due à l'écartement des semelles (augmentation du moment quadratique de flexion)
- Excellents caractéristiques d'isolation thermique

1.7.1.2) Inconvénients

- Mauvaise isolation acoustique (n'amortissent pas).
- La tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes.
- Les risques de flambement sont plus élevés que pour les structures classiques.

1.7.2) Matériaux constitutifs d'un sandwich.

Les revêtements sont en matériaux de nature très diverse ; les matériaux constituant le cœur étant choisis aussi légers que possible. On peut citer comme couples de matériaux compatibles pour constituer le sandwich (voir tableau ci-dessous):

Tableau 1.3: Différents couples constituant un matériau sandwich.

REVETEMENT	CŒUR
Métal stratifié /contreplaqués thermoplastiques/amiante/ciment	Matériaux expansés
Métal stratifié	Plaque nervurée en métal stratifié
Contreplaqué stratifié	Planches de bois/carton imprégné
Aluminium stratifié	Aluminium déployé

2) MECANIQUE DE LA RUPTURE

La mécanique de la rupture est une science qui met en jeu les paramètres habituels de la mécanique à partir d'une discontinuité existante telle une fissure ou un défaut. Elle permet dans certains cas de prévoir, en fonction des dimensions d'une fissure et de l'état de chargement, la vitesse de propagation de la fissure et la dimension à partir de laquelle cette fissure peut entraîner une rupture brutale.

La mécanique de la rupture a donc pour objet l'étude des fissures macroscopiques. Elle se propose, d'une part, de déterminer les champs de contraintes et de déformations correspondants et, d'autre part, d'établir des données expérimentales à même de juger des cinétiques de propagation des défauts et de la taille critique au-delà de laquelle une rupture brutale se produira.

La théorie de la mécanique de la rupture est un moyen pour estimer la stabilité des fissures qui peuvent survenir à cause des défauts. Elle permet de prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure.

2.1) HISTORIQUE

Grâce aux progrès réalisés dans le domaine de la mise en forme des métaux durant les trois derniers siècles, le fer et l'acier ont progressivement remplacé le bois et le ciment comme matériaux structuraux de base. Malgré leurs hautes caractéristiques, les structures réalisées à partir de ces matériaux ont connu des accidents importants dès le milieu du 19^{ème} siècle.

L'origine de ces accidents était la rupture inattendue de composants critiques de ces structures. L'un des premiers incidents enregistré sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en **mars 1830** en Grande Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (**1962**) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (**1967**). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux.

Entre **1860** et **1870**, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, des pétroliers, ou encore sur des avions. En **1950**, deux avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'un problème de rupture par fatigue sur les trous des rivets près des hublots, lesquels étaient de forme carrée ! Ces risques d'accidents étaient d'autant plus grands que l'utilisation d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques (ténacité, rigidité...), permettant la réalisation de structures de plus en plus complexes et sollicitées, a énormément augmenté. En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, et les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité.

Si Griffith [32] est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ses travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer l'article de Wieghardt, paru en **1907**, dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue.

A partir de ces résultats, Griffith s'est intéressé en **1920** au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard taux de restitution d'énergie TRR) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau. Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Sneddon [33] en **1946**, puis Irwin [34] en **1957**, ont permis de définir les facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre **1960** et **1980**, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre

en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période; on peut citer par exemple Rice [35] en 1968 et Bui [36] en 1973 qui introduisent la notion d'*intégrales indépendantes du contour* telles que l'intégrale J, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés (Sih (1964), Erdogan (1965) et Comninou (1977)).

Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointe de fissure nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométries simples, et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

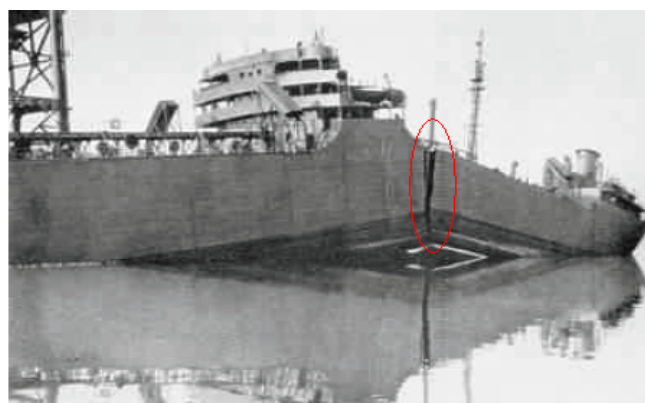


Figure 1.10: Rupture fragile d'un bateau.



Figure 1.11: (a) Accident du train allemand ICE à Eschede (Allemagne) en juin 1998. (b) Rupture d'une roue fissurée Richard et al [48]

2.2) MECANIQUE LINEAIRE ET NON LINEAIRE DE LA RUPTURE

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on distingue deux types de rupture:

- **Rupture fragile:** Elle est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique (mécanique linéaire de la rupture), et donc par la propagation des fissures avec faible consommation d'énergie. Le matériau fragile subit alors une rupture brutale par la propagation d'une fissure venant "déchirer" l'éprouvette.
- **Rupture ductile :** Elle est caractérisée par la présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Le matériau ductile subit une déformation plastique très importante autour de la zone pré-fissurée avant de rompre.

Concernant l'étude des fissures, on peut distinguer deux approches :

- **L'approche locale:** Elle est caractérisée par une étude des champs de contraintes et de déformations au voisinage du front de fissure.
- **L'approche globale ou énergétique :** Elle est caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée sur le plan énergétique.
- **Approche locale**

L'approche locale consiste à déterminer les paramètres en mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déformations locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, on introduit alors la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Ces champs sont fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure.

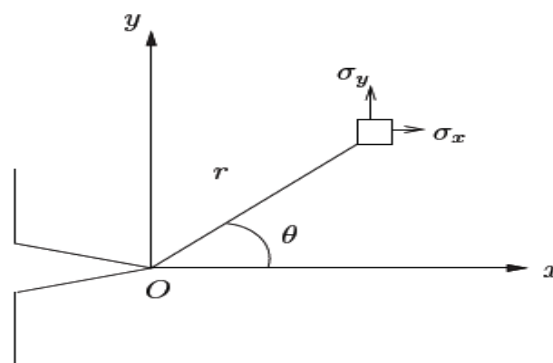


Figure 1.13: Contraintes au voisinage de la fissure.

En mécanique linéaire élastique de la rupture, le comportement des matériaux est décrit de façon simple. Cependant, lorsque la fissure s'accompagne d'une forte déformation plastique, il n'est plus possible de se placer dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, c'est le cas en fatigue où certains phénomènes sont liés à la variation de taille de la zone plastique (Figure II.5) en tête de fissure qui ne peut donc plus être négligée.

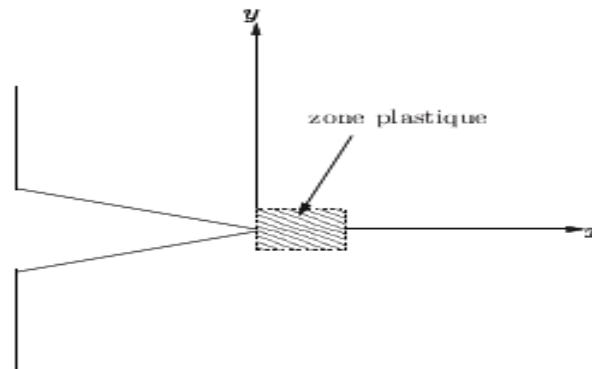


Figure 1.14: Zone plastique en pointe de fissure.

L'approche locale basée sur la seule analyse des contraintes en pointe de fissure peut être contestée sur le plan physique. Une autre approche dite globale permet d'analyser la propagation de fissures sur un plan énergétique : c'est l'approche énergétique.

- **Approche globale**

L'approche globale de la rupture a pour objet de décrire l'évolution des fissures (phénomène dissipateur d'énergie) dans un milieu continu en fonction du chargement auquel il est soumis. Griffith construit, dès 1920, un modèle de fissuration qui tient en deux hypothèses:

- A chaque fissure est associée une énergie de surface qui est proportionnelle à l'aire créée.
- Le critère de propagation des fissures est basé sur un bilan d'énergie : une fissure se propage si l'énergie que restituerait le milieu, lors d'un accroissement virtuel infinitésimal de la fissure, compense l'énergie de surface que nécessiterait sa création et que, au contraire, la fissure ne se propage pas si cette restitution n'est pas suffisante.

L'approche globale de la mécanique de la rupture est un cadre théorique qui permet de focaliser l'attention sur les bases physiques essentielles de la fissuration des structures. En

effet, il y a dans cette approche d'étude globale une description de la propagation d'une fissure qui implique toute la structure et le chargement extérieur auxquelles elle est soumise.

2.3) Mécanismes de rupture

Les mécanismes de rupture et de fissuration d'un matériau sont souvent traités par la mécanique linéaire de la rupture. Le concept de base de cette théorie a été introduit vers les années vingt (1920) par Griffith à propos des ruptures fragiles dans le cas d'un matériau tel que le verre.

Cette théorie, quoique conçue au départ pour les matériaux fragiles, trouva son ampleur au début des années quarante (1940) où elle fut amplement appliquée aux métaux (notamment pour la conception des engins militaires lors de la deuxième guerre mondiale). Des améliorations considérables ont été apportées à la théorie initiale, telle la classification des modes de rupture appelés mode I, II et III et la prise en compte du développement de la plasticité au voisinage du front de fissure.

2.4) MODES DE FISSURATION

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure (Figure 1.15), ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants.

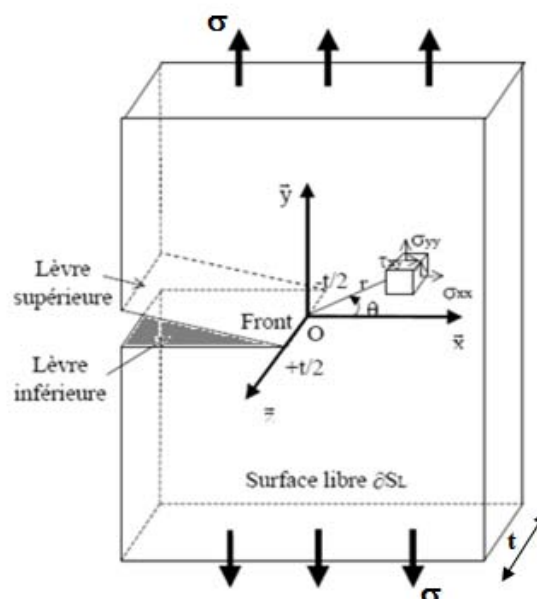


Figure 1.15: Représentation d'une fissure dans une plaque chargée d'épaisseur t .

Les mouvements cinématiques possibles des lèvres inférieure et supérieure de la fissure, l'une par rapport à l'autre, se décomposent en trois mouvements élémentaires indépendants schématisés ci-dessous (Figure 1.16), auxquels sont associés trois modes de fissuration. En ne considérant que les fissures planes se propageant dans leur plan, on montre que toute fissuration peut être ramenée à la superposition de trois modes élémentaires.

- **Mode I (Mode d'ouverture)** : C'est le mode pour lequel les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées, perpendiculairement au plan de fissuration. Ce mode est physiquement le plus important puisqu'une fissure en mode I se propage dans son propre plan, par raison de symétrie, sans bifurcation, l'ouverture de la fissure conduisant facilement à la rupture.

- **Mode II (Mode de cisaillement dans le plan)** : Pour ce mode, les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, le champ lointain de sollicitation extérieure est un cisaillement perpendiculaire au front de fissure.

- **Mode III (Mode de cisaillement hors plan)** : C'est le mode où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction parallèle au front de fissure.

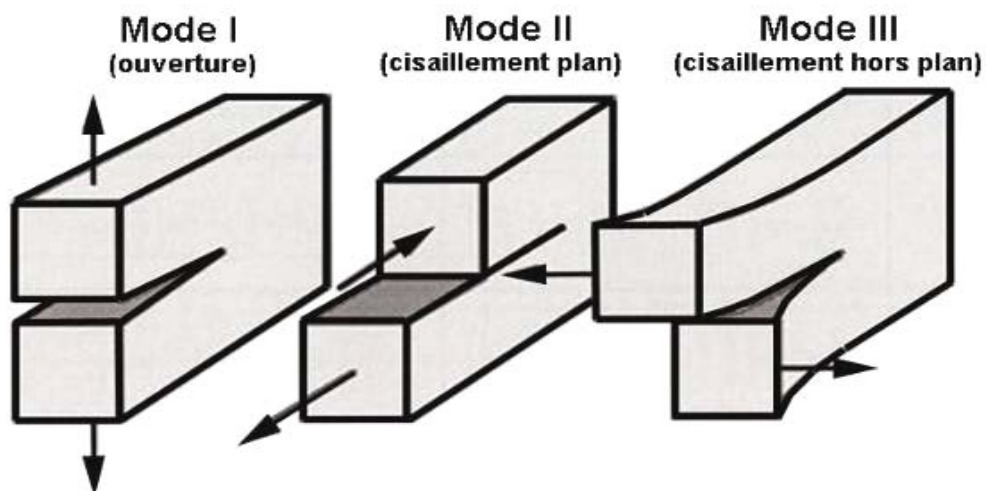


Figure 1.16: Trois modes de fissuration (I, II et III).

2.5) ZONES D'ENDOMMAGEMENT

Il est possible de distinguer trois zones au voisinage d'une fissure comme montré sur la Figure 1.17 :

- Une zone d'élaboration (1), considérée comme ponctuelle, qui se situe en toute pointe de fissure et où les contraintes sont importantes et le matériau très endommagé. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans.
- Une zone de singularité élastique (2), définie comme une zone dans laquelle les champs mécaniques sont continus et possèdent une structure autonome, elle est l'objet principal de la mécanique linéaire de la rupture et où le champ de contraintes est caractéristique de la fissure.
- Une zone élastique (3) qui se situe au delà des deux précédentes et dans laquelle le champ de contraintes se raccorde au champ lointain correspondant aux conditions limites du chargement.

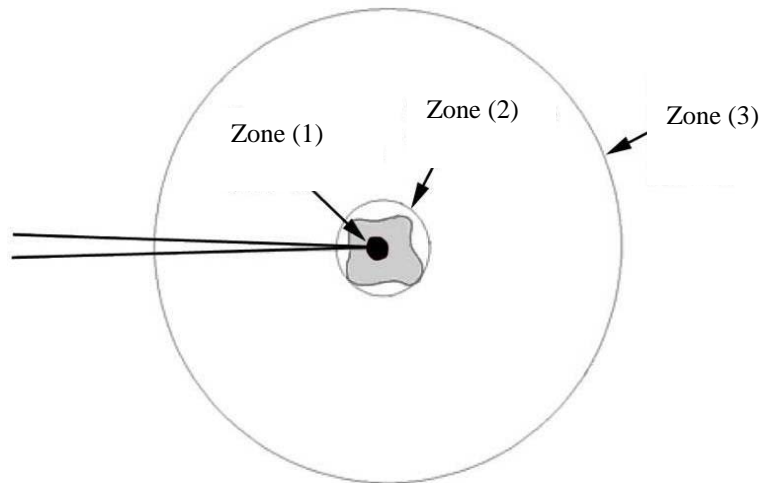


Figure 1.17: Différentes zones autour d'une fissure

2.6) THEORIE DE GRIFFITH

Bien que Griffith [32], ait posé les bases de la mécanique linéaire de la rupture, son travail est passé inaperçu pendant plus de 30 ans.

Pour expliquer comment on atteint la cohésion intermoléculaire alors que la contrainte nominale appliquée est très inférieure à la valeur théorique, Griffith a émis l'hypothèse selon laquelle un matériau fragile, ici le verre, contient une quantité énorme de microfissures provoquant des concentrations élevées de contraintes.

Quand une des fissures se propage subitement (fracture fragile), la surface des parois de la fissure augmente. Il faut de l'énergie pour vaincre la force de cohésion des atomes, autrement dit, l'énergie de surface doit augmenter.

Cette augmentation de l'énergie de surface ne peut provenir que de l'énergie de déformation élastique (énergie potentielle) qui se libère lors de l'avancée de la fissure.

Pour expliquer la propagation d'une fissure, Griffith a établi le critère suivant : *"la propagation se déclenche quand la diminution du taux de libération de l'énergie de déformation élastique stockée (énergie potentielle) est au moins égale au taux de création d'énergie de formation de surface de fissure"*. Ce critère peut être utilisé pour déterminer la valeur de contrainte appliquée en traction qui fait en sorte qu'une fissure de certaines dimensions se propage subitement (fracture fragile).

Griffith a déterminé la valeur de l'énergie de déformation élastique qui se libère lorsqu'une fissure de longueur $2a$ apparaît sur une plaque d'épaisseur unitaire sollicitée par la contrainte appliquée en traction σ (voir modèle schématisé sur la Figure 1.18).

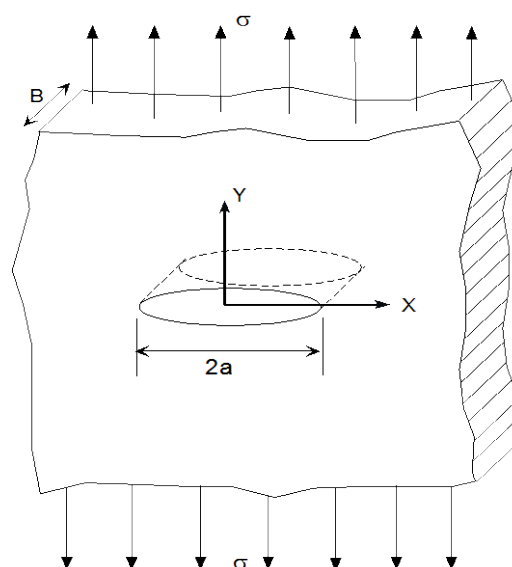


Figure 1.18: Modèle de Griffith.

En état de contrainte plane, cette valeur correspond à ;

$$U = -\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} \quad (1.1)$$

et, en état de déformation plane, elle équivaut à ;

$$U = -\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (1.2)$$

où, σ est la contrainte appliquée en traction qui agit normalement au voisinage de la fissure de longueur $2a$. Le signe négatif est utilisé parce que la propagation de la fissure libère de l'énergie de déformation élastique.

L'équation (1.1) peut être comprise si l'on considère que l'énergie de déformation se circonscrit à deux zones circulaires de rayon a autour de la fissure. L'énergie de déformation par unité de volume correspond à $\frac{\sigma^2}{2E}$. Par conséquent, U , énergie de déformation élastique par unité d'épaisseur, correspond à :

$$\frac{\sigma^2 (\pi a^2)}{E} \quad (1.3)$$

Cependant, l'énergie nécessaire à la création d'une fissure de longueur $2a$ est $U_s = Y_s$

Ainsi, lors de la propagation d'une microfissure, la consommation d'énergie de surface est supérieure à l'énergie de déformation élastique libérée. Les conditions d'énergie propices à la propagation ne sont donc pas réunies. Toutefois, à partir d'une certaine valeur critique de a , a_c , ces conditions s'inversent, étant donné que l'énergie de déformation élastique libérée est proportionnelle à a^2 tandis que l'énergie superficielle est proportionnelle à a .

En d'autres termes, la condition de propagation est représentée par ;

$$\left| \frac{\delta U}{\delta a} \right| \geq \left| \frac{\delta U_s}{\delta a} \right| \quad (1.4)$$

$$\frac{\pi \sigma^2 a}{E} \geq 2\gamma_s \quad (1.5)$$

et ainsi, on définit une valeur critique de a pour une tension appliquée déterminée, ou une valeur critique de tension σ_c , pour chaque valeur de a .

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (1.6)$$

2.7) MODIFICATION DE LA THEORIE DE GRIFFITH PAR IRWIN

Il a fallu attendre les travaux d'Irwin [34] en 1948 qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Entre temps, Westergaard [37] avait proposé une méthode semi-inverse pour caractériser les champs de contraintes et de déplacements près de l'extrémité d'une fissure sous chargement donné. Utilisant les travaux de Westergaard, Irwin et Williams [38] montrent que d'une manière générale, le champ des contraintes peut s'exprimer, dans le cas d'un comportement élastique linéaire, par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) \quad (1.7)$$

où, σ_{ij} est le tenseur des contraintes, f_{ij} une fonction sans dimensions de θ , r est la distance au front de fissure et θ la coordonnée angulaire mesurée dans le sens trigonométrique à partir de l'axe OX.

Dans l'équation (1.7), K est le facteur d'intensité de contraintes qui caractérise l'amplitude de la singularité au fond de fissure et qui dépend du chargement et de la géométrie du problème. Pour une valeur donnée de K , l'état de contrainte et de déformation au voisinage de la fissure dans un matériau de caractéristiques élastiques données est parfaitement connu. D'où l'importance de ce facteur dans le calcul de la rupture.

II. 1) INTRODUCTION

Les poutres composites considérées dans cette étude sont classées comme poutres mixtes ou poutres à connexions partielles (poutres en bois lamellées collées) ou les poutres sandwichs à trois couches.

Ces systèmes structuraux sont gouvernés par la même nature d'équations différentielles, tant pour le comportement dans le plan que pour le comportement hors du plan.

Les éléments multicouches avec connexion partielle sont typiquement rencontrés dans le domaine de la construction en bois, où les éléments sont assemblés par boulonnage ou par collage.

Dans le domaine du bâtiment, les poutres mixtes acier-béton ou bois-béton sont couramment utilisées, pour leurs propriétés mécaniques et économiques (globales optimales).

Le formalisme de la théorie du comportement dans le plan et hors-plan des poutres mixtes est donné, et les résultats de l'ingénieur, simples d'interprétation, sont proposés pour la poutre mixte de section rectangulaire et simplement appuyée. Ces résultats sont analogues à ceux obtenus pour les vibrations dans le plan (tant pour les poutres mixtes que pour les poutres sandwichs) où les fréquences propres augmentent aussi avec la rigidité de la connexion. Le traitement des conditions de chargements plus complexes est envisagé à partir de procédures numériques, telle que la méthode des éléments finis.

II. 2) FORMULATION DU PROBLEME

Il s'agit de comprendre le comportement de propagation de la rupture aux interfaces de poutre, comme décrit à la Figure 2.1 (poutre type sandwich encadrée). Pour le calcul de la poutre, objet de notre recherche, les hypothèses suivantes sont prises en considération :

- Adhérent (poutre) et adhésif sont linéairement élastiques.
- Mode I de Rupture.
- $E_1 > E_2$
- $t \ll h$
- La poutre (adhérent) est considérée sur fondation élastique en d'autres termes, une flexion aux extrémités des poutres.
- $t \ll h, B, L$, signifie que la contribution de la couche adhésive par rapport au déplacement total et à l'énergie d'équilibre peut-être évaluée sur la base de la solution asymptotique pour le cas d'une fissure dans un élément de poutre sous un déplacement prescrit. Ce dernier est déterminé par la flexion de la poutre.

- Déformation plane.

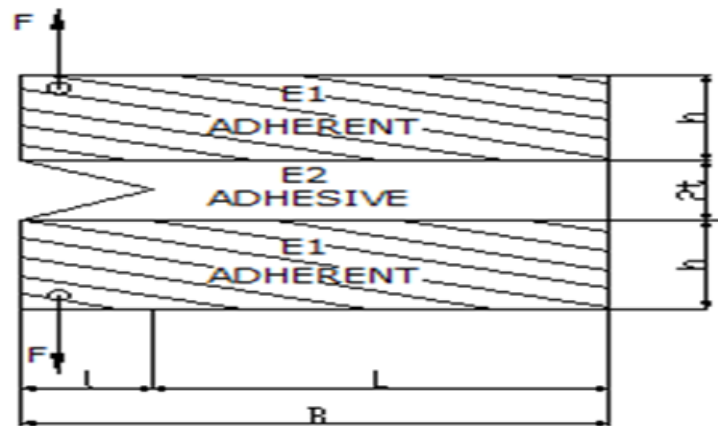


Figure 2.1 :Géométrie du modèle proposé.

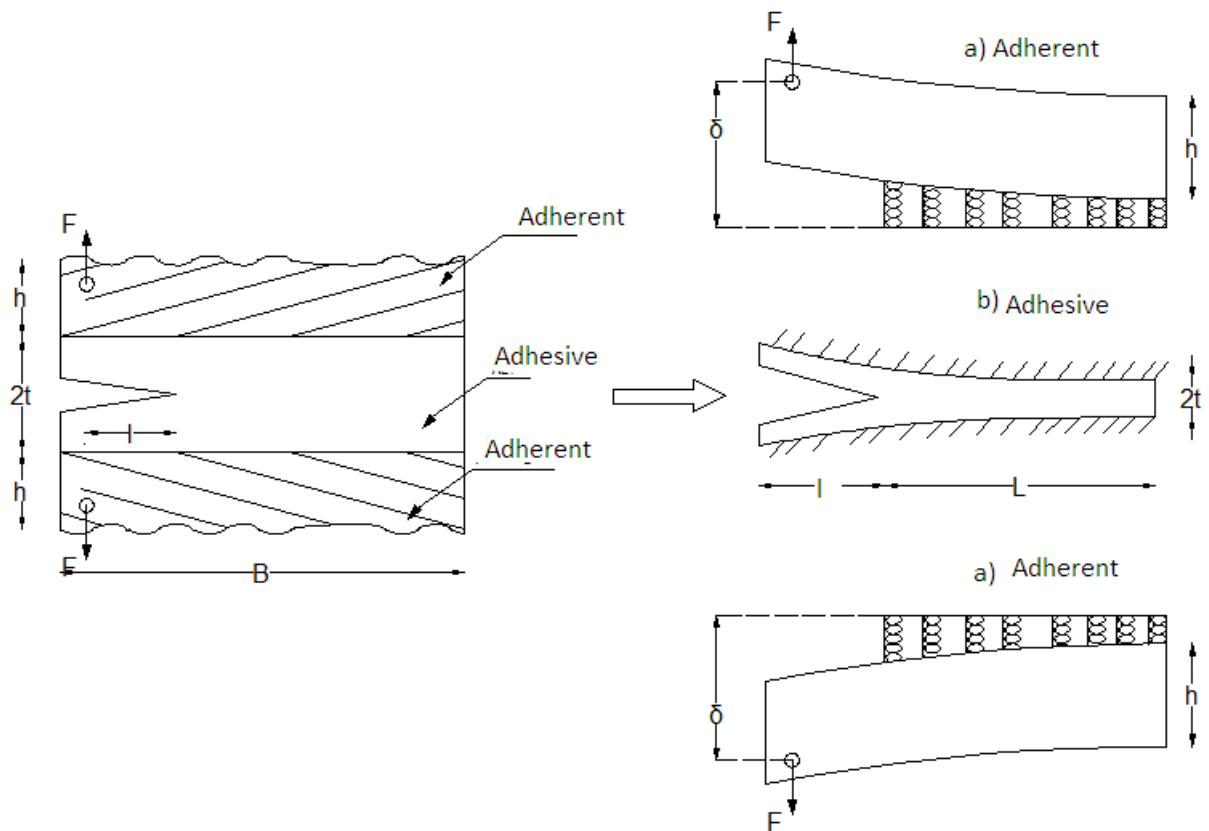


Figure 2.2 : Décomposition de la poutre sandwich pour l'analyse des contraintes.

- a) Adhérent Adhésive (colle).

II. 3) ANALYSE ENERGETIQUE

L'énergie potentielle totale est définie par la relation suivante :

$$P = f - W \quad (2.1)$$

où; f correspond à l'énergie de déformation de la poutre et W est le travail fait par les charges ou forces données sur la poutre.

Pour une poutre sandwich, l'énergie de déformation est la somme successive des énergies de déformation due à la poutre adhérente (partie supérieure) et celle due à la partie adhésive (partie inférieure) et l'énergie de déformation due à la couche adhésive (se référer à la Figure 2.2).

En d'autres termes, on obtient la relation énergétique ;

$$f = f_p^{(1)} + f_c^{(2)} \quad (2.2)$$

avec ;

$f_p^{(1)}$ = Energie de déformation due à la flexion des parties extrêmes des poutres en cantilever.

$f_p^{(2)}$ = Energie de déformation due à la flexion des parties extrêmes des poutres attachées à la fondation élastique.

$f_c^{(2)}$ = Energie de déformation de la couche adhésive (collées) .

L'équation 2.2 devient ainsi ;

$$f_p = f_p^{(1)} + f_p^{(2)} \quad (2.3)$$

Par ailleurs, le travail total des forces extérieures appliquées sur deux poutres est formulé comme suit ;

$$W = 2f \delta \quad (2.4)$$

Dans notre étude, le déplacement total δ est donné comme suit ;

$$\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)} \quad (2.5)$$

et où ;

- $\delta^{(1)}$: déplacement due à la flexion des poutres en cantilever.
- $\delta^{(2)}$: déplacement due à la flexion et la rotation du reste de la poutre (partie collée élastique). Ce déplacement est déterminé à partir des équations précédentes (2.1) à (2.5)(détails voir Annexe B).

L'énergie potentielle de la poutre est donc la superposition de l'énergie potentielle $P^{(1)}$ due à la flexion des deux poutres et l'énergie potentielle $P^{(2)}$ due à la contribution de la couche adhésive.

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} \quad (2.6)$$

Par conséquent ; on obtient les relations suivantes ;

$$P^{(1)} = F_p^{(1)} - 2f \delta^{(1)} \quad (2.7)$$

$$P^{(2)} = F_p^{(2)} - 2f \delta^{(2)} + f_c^{(2)} \quad (2.8)$$

II.4) FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

D'après l'équation de Kanninen[40], le taux de restitution d'énergie de la poutre de partie (2) est donné comme suit (détails voir Annexe C) :

$$G_{12} = G_1^{(1)} [\phi^2 - 1] \quad (2.9)$$

où l'équation du taux de restitution d'énergie de la partie collée élastique [45] est telle que (détails voir Annexe C) ;

$$G_{1L} = \frac{\alpha E_2}{t} \delta_L^2 = \alpha \Psi^2 G_1^{(1)} \quad (2.10)$$

Par ailleurs, le taux de restitution d'énergie de l'adhésive est donnée par la formule suivante :

$$G_1^{(2)} = G_1^{(1)} * [\phi^2 + \alpha \psi^2 - 1] \quad (2.11)$$

Dans les deux équations précédentes, les paramètres suivants ϕ et ψ sont exprimés comme suit (se référer à l'Annexe B) ;

$$\phi = \left[\left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \frac{1}{\beta l} \times \left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L + \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$\psi = \sin \beta L - \frac{1}{\beta l} \left(\frac{C-1}{2} \right) \sin \beta L \cos \beta L + \frac{D}{\beta l} \cos \beta L \cosh \beta L - \frac{1}{\beta l} \left(\frac{C+1}{2} \right) \cos \beta L \sinh \beta L \quad (2.13)$$

où ;

$$C = \left[\left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + 2\beta l \times \left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L + \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right]$$

$$D = \left[\left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L - \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \beta l \times \left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right]$$

$$\alpha = \frac{1 - \nu_2}{[(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)]}$$

$$\beta = \left[\frac{K}{4I_1 E_1} \right] = \left[\frac{3 \frac{E_2}{E_1}}{\text{th}^3} \right]^{\frac{1}{4}}$$

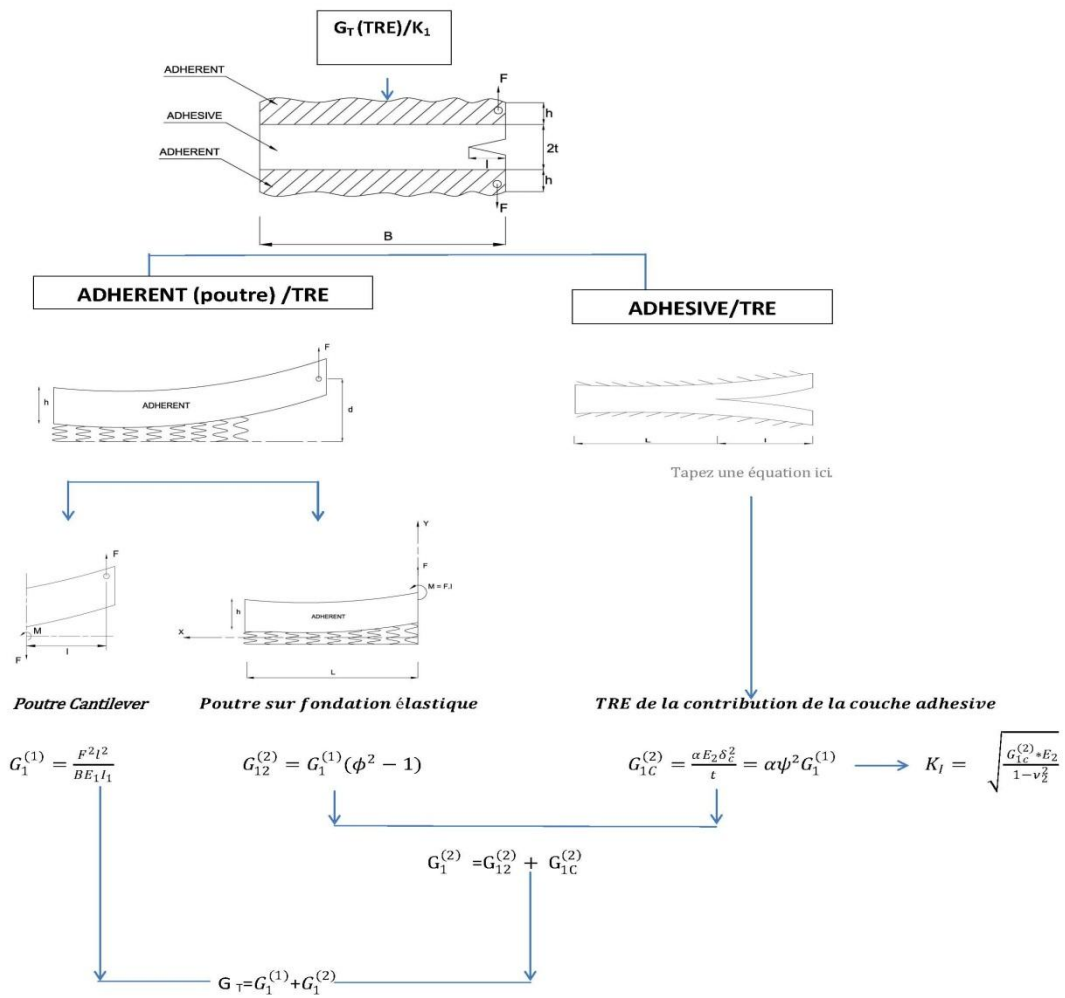


Diagramme de la décomposition des TRE

La charte de la méthodologie du travail s'exprime comme suit :

Le taux de restitution d'énergie totale de la poutre est la somme des taux de restitution d'énergie de la poutre adhésive (colle) et le taux de restitution d'énergie de la partie adhérent.

La poutre adhérente est décomposée en deux parties comme suit :

La première partie est considérée comme une poutre cantilever (libre), sa longueur est celle de la fissure dont laquelle l'effort tranchant est négligeable. Par conséquent, on a ;

$$M = F \cdot l \quad (2.14)$$

Le taux de restitution d'énergie de la poutre cantilever est donné comme suit ;

$$G_1^{(1)} = \frac{F^2 l^2}{b E_1 I_1} \quad (2.15)$$

La deuxième partie, la poutre agit comme une fondation élastique. Ceci nous amène à l'équation de Kanninen, donc on a ;

$$x(x) = \frac{6F}{E b h^3 \beta^3} \begin{cases} \frac{\beta^3 x^3}{3} + l \beta^3 - C \beta x + D & \text{pour } -l \leq x \leq \\ l \beta \sin \beta x \cos \beta x - \left(\frac{C-1}{2}\right) \sin \beta x \cosh \beta x + B \cos \beta x \cosh \beta x - \left(\frac{C+1}{2}\right) \cos \beta x \sinh \beta x & \end{cases} \quad (2.16)$$

En d'autres termes, le taux de restitution d'énergie d'une poutre sur une fondation élastique est donné comme suit :

$$G_{12}^{(2)} = G_1^{(1)} (\phi^2 - 1) \quad (2.17)$$

Par ailleurs, le taux de restitution d'énergie de l'adhésive est formulé comme suit ;

$$G_{1C}^{(2)} = \frac{\alpha E_2 \delta_c^2}{t} = \alpha \psi^2 G_1^{(1)} \quad (2.18)$$

Sur la base des formules précédentes, le facteur d'intensité de contrainte prend la forme suivante ;

$$K_I = \sqrt{\frac{G_{1c}^{(2)} * E_2}{1 - \nu_2^2}} \quad (2.19)$$

On en déduit le taux de restitution d'énergie totale pour la poutre, objet de notre étude sous la forme globale suivante ;

$$G_T = G_1^{(1)} + G_1^{(2)} = G_1^{(1)} + G_{12}^{(2)} + G_{1c}^{(2)} \quad (2.20)$$

III.1 INTRODUCTION

Une fissure idéale est mathématiquement une coupure du plan. Cette définition conduit à une singularité de contraintes. Pour un rayon d'entaille fini, la contrainte maximale a une valeur finie.

Irwin en 1948 a utilisé le fait que le produit d'une des composantes du tenseur des contraintes de la distribution singulière par la racine carrée de la distance au fond de fissure est une constante et s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij}\sqrt{r} = \text{constante} \quad (3.1)$$

III.1.1 CONCEPT DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE

- Distribution de contraintes en fond de fissure

Irwin proposa de décrire la distribution des contraintes admissibles au voisinage du front d'une fissure par la relation suivante ;

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (3.2)$$

Le paramètre K_I est fonction du chargement et de la géométrie de l'éprouvette, et s'appelle '*Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC)*'. C'est cette quantité qui est utilisée pour décrire le niveau du chargement au voisinage de la fissure et dimensionner la structure, plutôt que la '*contrainte maximale*'. Ainsi, au lieu de ne considérer que le point où se trouve le '*maximum*', l'ensemble de la singularité spatiale du champ des contraintes est pris en compte.

Les critères en contrainte stipulent alors que la fissuration devient instable lorsque le facteur d'intensité des contraintes excède une certaine valeur limite. Cette valeur limite est appelée '*ténacité*', et est généralement considérée comme une *propriété intrinsèque du matériau* dans un état donné (température, traitements thermiques...). (Signalons qu'il existe une autre famille de critères de propagation, basés sur l'énergie potentielle libérée lors de l'avancement de la fissure ; nous ne les développons pas dans cette ressource.)

Le facteur d'intensité des contraintes peut évoquer, par son rôle, les coefficients de concentration de contraintes utilisés pour dimensionner les structures comportant des accidents géométriques. Il est vrai que ces deux grandeurs décrivent la solution au voisinage du défaut et peuvent être trouvées dans des abaques ou des formulaires pour un grand nombre de problèmes-type. Cependant, l'analogie s'arrête là : les coefficients de concentration de contraintes sont des nombres sans dimension donnant directement la valeur maximale de la contrainte, tandis que le facteur d'intensité des contraintes s'exprime en $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ (c'est-à-dire le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur) et caractérise l'ensemble du champ des contraintes autour de la pointe de fissure...

Le facteur d'intensité de contraintes K_I représente l'amplitude de la distribution des contraintes, les paramètres r et θ définis dans la Figure 3.1 sont les coordonnées polaires de la zone mesurée à partir du fond d'entaille. Irwin montra que la seule connaissance du facteur d'intensité de contraintes permet d'écrire la distribution des contraintes au voisinage du fond de fissure.

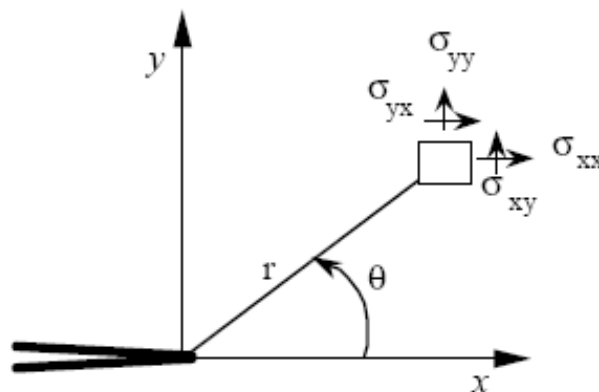


Figure 3.1: Schéma d'une fissure.

Si on considère que la fissure représentée par la Figure III.1 est sollicitée en mode d'ouverture I, le champ des contraintes est donné par la formule suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \end{cases} \quad (3.3)$$

Il est clair que la distribution des contraintes à la pointe de la fissure présente une singularité de la forme $r^{-1/2}$ et par conséquent, le facteur d'intensité de contraintes est défini en fonction de la distribution des contraintes σ_{yy} par la relation suivante :

$$K_I = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ (\theta=0)}} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \quad (3.4)$$

III.2 FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES (CAS D'UNE ENTAILLE INFINIMENT AIGUE)

Williams [38] exprima, pour la première fois en 1952, la singularité des contraintes à la pointe d'une entaille infiniment aigue sur une plaque de longueur infinie, sous la forme d'une série de fonctions complexes en utilisant la fonction d'Airy.

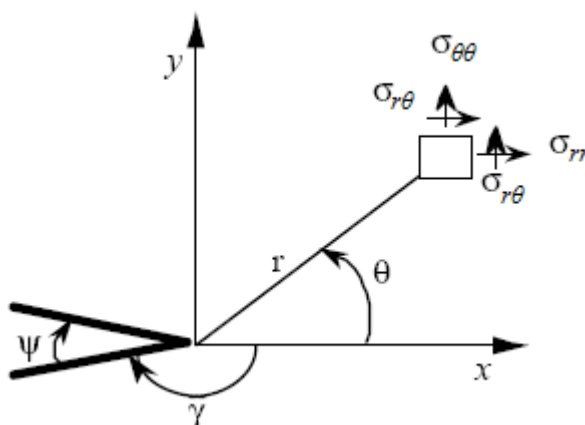


Figure 3.2: Schéma d'une entaille en V-aiguë dans le modèle de Williams.

La Figure 3.2 représente la zone, près de la pointe de l'entaille, possédant un angle d'ouverture définie par :

$$\{(r, \theta) / 0 < r < 1; -\gamma < \theta < \gamma\} \quad (3.5)$$

où ; $\gamma = \pi - \frac{\Psi}{2}$

Les expressions des composantes du champ des contraintes au voisinage du fond d'entaille s'expriment par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{K_I^*}{C_1(2\pi r)^\alpha} \left[\cos(\alpha - 2)\theta \cos(\alpha\gamma) - \frac{\alpha+2}{\alpha-2} \cos(\alpha - 2)\gamma \cos(\alpha\theta) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I^*}{C_1(2\pi r)^\alpha} \left[-\cos(\alpha - 2)\theta \cos(\alpha\gamma) + \cos(\alpha - 2)\gamma \cos(\alpha\theta) \right] \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_I^*}{C_1(2\pi r)^\alpha} \left[\sin(\alpha - 2)\theta \cos(\alpha\gamma) - \frac{\alpha}{\alpha-2} \cos(\alpha - 2)\gamma \cos(\alpha\theta) \right] \end{cases} \quad (3.6)$$

avec ;

α est l'exposant de la singularité des contraintes, et C_1 la première racine de l'équation:

$$\cos(\alpha - 2)\gamma - \cos(\alpha\gamma) = 0 \quad (3.7)$$

Le facteur d'intensité de contraintes pour une entaille infiniment aigue K_I^* ainsi obtenu, s'accorde avec la définition de Irwin pour l'analyse des fissures;

$$K_I^* = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^\alpha \sigma_{\theta\theta} \quad (3.8)$$

Dans ce cas, la singularité des contraintes à la pointe de la fissure est de la forme $r^{-\alpha}$.

III.3 CRITERE DE L'ENERGIE

Lorsque la variation d'énergie élastique est supérieure à la variation d'énergie superficielle il y a propagation de la fissure ce qui correspond à une diminution de l'énergie libre du système. Dans une plaque de dimension infinie en matériau idéalement élastique contenant une fissure.

Pour un état de déformation plane comme pour les cas de structures épaisses ;

$$K_I = \sqrt{\frac{G_{1c} E_2}{1 - \nu_2^2}} \quad (3.9)$$

avec ;

ν_2 : Module de Poisson.

E_2 : Module de Young de l'adhésive.

III.4) TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

INTRODUCTION

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau : cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

L'énergie de Griffith notée G (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la **variation d'énergie par unité de surface fissurée**, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique.

Depuis les travaux de Griffith dans les années 1920, l'analyse du phénomène de rupture a fait de nombreux progrès. Irwin a ouvert la voie à l'application des solutions élastiques et a fourni ainsi la théorie mathématique de la rupture fragile. Au point de vue énergétique, les analyses de Griffith [32] et Irwin [34] ont montré que si on néglige l'énergie cinétique, le bilan de l'énergie est donnée par la relation suivante:

$$w_e = E_e + w_f \quad (3.10)$$

où E_e est l'énergie élastique, w_f est l'énergie dépensée par fissuration et qui conduit à la définition du taux de restitution de l'énergie G . L'intégrale J due à Rice [35.47] permet d'obtenir une expression indépendante du contour choisi. Dans ce cas, la rupture est considérée comme un phénomène consommateur d'énergie. Cette dernière est selon Griffith, la différence entre l'état énergétique des atomes avant et après fissuration. L'origine physique de l'énergie de rupture n'est pas clairement établie mais on admet que le phénomène de rupture dépense de l'énergie. De nombreuses généralisations de la notion de restitution de l'énergie ont été proposées, mais à ce jour elles n'ont pas encore de réponses entièrement satisfaisantes. Parmi les résultats intéressants, on cite les travaux de Rice [35 .47].

III. 5) Taux de restitution d'énergie G_1

- Sans adhésif

Pour les matériaux linéaires élastiques, G_1 peut être reliée au facteur d'intensité de contraintes par une substitution directe de la solution singulière en mode I (voir détails annexe C)

- Pour le cas de contrainte plane :

$$G_1 = \frac{K_1^2}{E} \quad (3.11)$$

- Pour le cas d'une déformation plane :

$$G_1 = K / (1 - \nu) \quad (3.12)$$

L'expression $G_1 = \frac{K_1^2}{E}$ peut être reformulée comme suit :

$$G_1 = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (3.13)$$

Pour le cas étudié, on considère les valeurs données de σ et de E et par conséquent ; la variation de l'énergie G_1 en fonction de la longueur de la fissure est illustrée par la Figure 3.3.

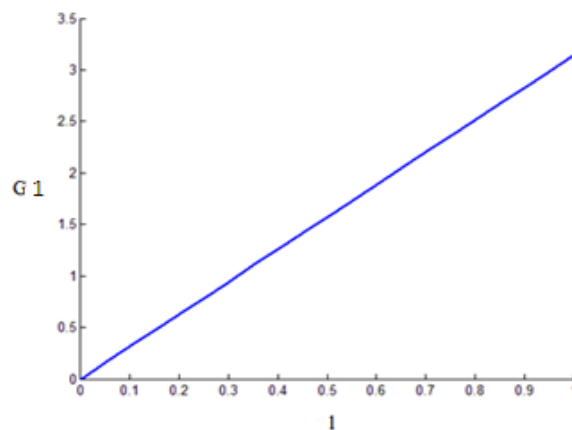


Figure 3.3 : Variation de l'énergie G_1 en fonction de la longueur de la fissure.

Il est évident que l'énergie est directement reliée à la longueur de la fissure. On peut ainsi constater que la propagation d'une fissure emmagasine de l'énergie élastique pour une formation

de fissures. L'énergie augmente au fur et à mesure que la fissure se propage d'où une longueur importante de la fissure.

- Avec adhésif (Griffith)

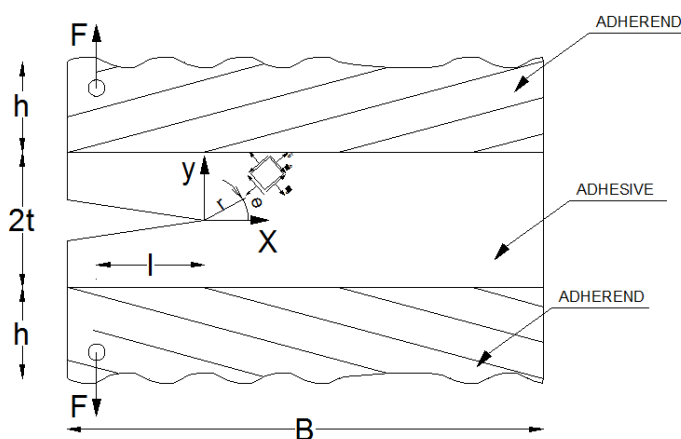
Le taux de restitution d'énergie d'après Chudnovsky [45] G_1 est considéré comme une force de l'extension de la fissure est donnée comme suit (Voir détails Annexe C):

$$G_1 = \frac{\partial P}{\partial a} = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial a} + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial a} = G_1^{(1)} + G_1^{(2)} \quad (3.14)$$

où ;

$G_1^{(1)}$ est le taux de restitution d'énergie de la poutre cantilever.

$G_1^{(2)}$ est le taux de contribution d'énergie de la couche adhésive.



h : Hauteur de l'adhérent

$2t$: Epaisseur de l'adhésive

F : Force appliquée

l : Longueur de la fissure

B : Longueur de la poutre

E_1 : Module de Young de l'adhérent

E_2 : Module de Young de l'adhésive

Figure 3.4 : Distribution des contraintes au long de la fissure dans la couche adhésive

La distribution des contraintes dans la couche adhésive comme montrée sur la Figure 3.4 est directement reliée à la rupture de la couche adhésive. Cette distribution de contraintes de la couche adhésive est analysée à travers par l'étude de facteur d'intensité de contrainte K_{I1} .

III. 6) EVALUATION DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE G_1

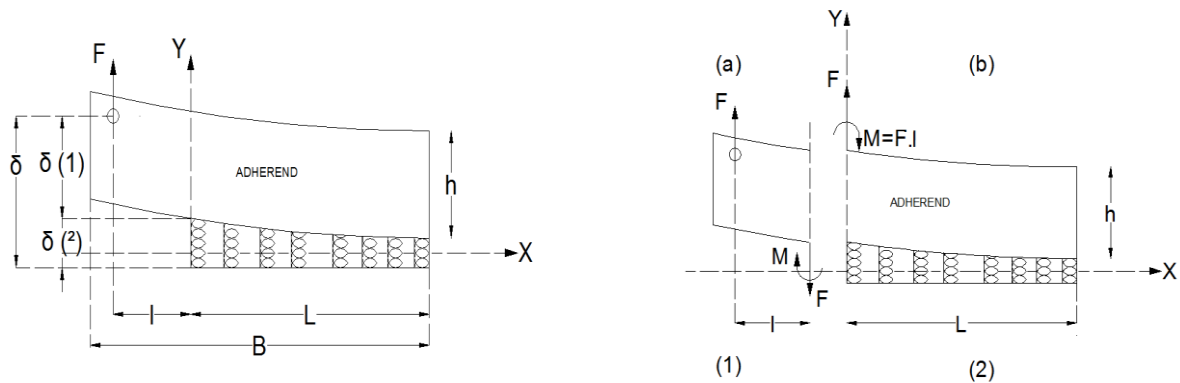


Figure 3.5: Analyse des distributions des Contraintes de la poutre cantilever, (a) Poutre en cantilever; (b) Poutre sur appuis élastiques.

$$G_1^{(1)} = \frac{\partial P^{(1)}}{b d a} = \frac{F^2 l^2}{b E_1 I_1} \quad (3.15)$$

Dans notre cas, $G_1^{(2)}$ l'énergie de la partie 2 (Figure 3.5 b) est décomposée en deux énergies :

$G_{1b}^{(2)}$: Energie de la poutre sur appuis élastiques adhésifs.

$G_{1c}^{(2)}$: Energie de la partie 2 due à la contribution de la couche

On en déduit que ;

$$G_{1b}^{(2)} = \frac{\partial P}{b d a} = \frac{-(f_p^2 - F \delta^{(2)})}{b d a} - \frac{\partial f_c}{b d a} = G_{1a}^2 + G_{1c} \quad (3.16)$$

$$G_{1c} = \frac{\alpha E_2 \delta_L^2}{t} \quad (3.17)$$

Dans ce chapitre, la relation entre le taux de restitution d'énergie et les dimensions de la poutre cantilever est établie et plusieurs graphes sont présentés.

Graphe 1

Selon Kanninen [40], les équations des facteurs d'intensité des contraintes sont telles que suit :

$$K = 2\sqrt{3} \frac{P}{bh^2} \left[\beta L * \left(\frac{\sinh \beta L^2 + \sin \beta L^2}{\sinh \beta L^2 - \sin \beta L^2} \right) + \left(\frac{\sinh \beta L \cosh \beta L - \sin \beta L \cos \beta L}{\sinh \beta L^2 - \sin \beta L^2} \right) \right]^2 \quad (4.1)$$

où ;

$$\beta = \frac{1.565}{h} \quad (4.2)$$

En remplaçant β par la formule dans l'équation (4.1), on obtient ainsi ;

$$K = 2\sqrt{3} \frac{Pl}{bh^2} \left[1 + 0.64 \frac{h}{l} \right] \quad (4.3)$$

En guise de comparaison avec les résultats théoriques obtenus, les résultats pratiques de Gross et Srawley [41] et Mostovoy [42] comme indiqué dans la figure 4.1 sont pris en considération.

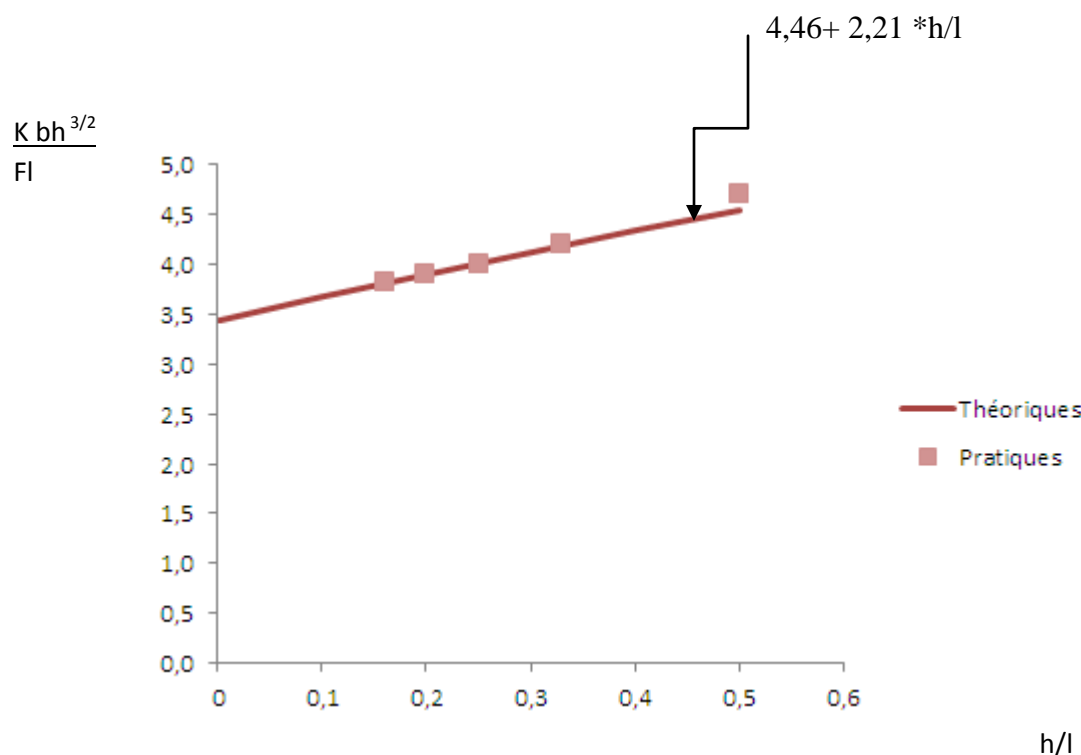


Figure 4.1 : Comparaison entre les résultats théoriques et pratiques du Facteur d'intensité de contrainte et le rapport (h/l).

Tableau 4.1: Résultats théoriques et pratiques du Facteur d'intensité de contrainte et le rapport (h/l).

	h/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Théoriques	$K BH^{3/2}$	3,46	3,68	3,90	4,12	4,34	4,57
Pratiques	Fl		4,7	4,2	4,0	3,9	3,8

D'après la Figure 4.1, on constate que les données obtenues théoriquement sont comparables à celles déterminées expérimentalement par Srawley et Mostovoy [42]. Par ailleurs, la solution de localisation donnée par Wilson[44] et Wiederhon[46] dans laquelle le rapport $\frac{h}{l}$ pour une marge de l'ordre de 5 et pour de profondes failles dans l'échantillon de tensions compactes donne aussi des résultats similaires.

Graphe 2

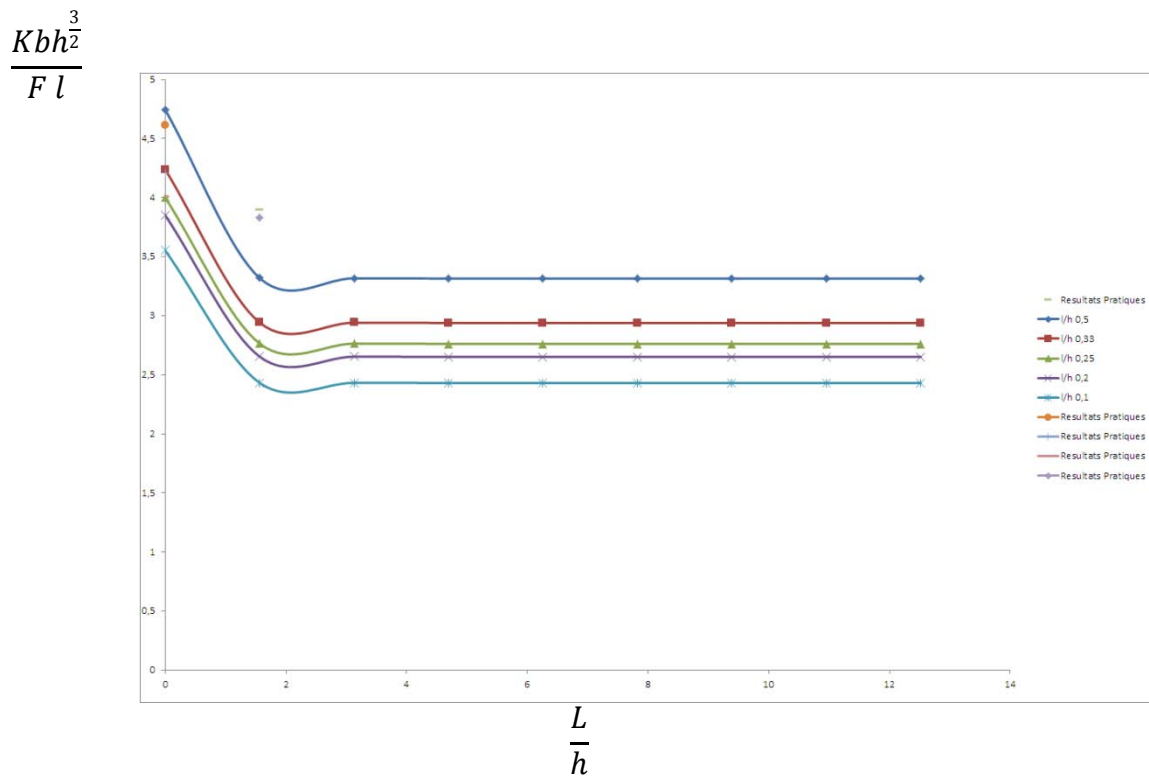


Figure 4.2 : Comparaison des infinités modèle de poutre de différentes longueurs en 2-D

aux résultats expérimentaux.

Une comparaison entre l'équation (4.1) et les résultats présentés par Gross et Srawley [41] est représenté sur la Figure 4.2. Dans le cas où $L, l \gg h$, le modèle DCB (Double Cantilever Beam) donne des résultats similaires sur une large gamme d'échantillons de différentes dimensions. Ces résultats ont également servi à délimiter l'importance de la longueur L. En particulier, lorsque l'effet de c est très fort pour $L < 2h$, par ailleurs les résultats obtenus sont tout à fait insensible à la longueur de la poutre L lorsque $L > 2h$. Dans cette situation, l'équation prend la forme suivante ;

Lorsque $L \longrightarrow 0$, l'équation (4.3) devient :

$$K = 2\sqrt{3} \frac{P}{\beta b h^2} * 2.21 * \left[\frac{l}{h} + \left(\frac{\sinh \beta L^2 + \sin \beta L^2}{\sinh \beta L^2 - \sin \beta L^2} \right) * \left(\frac{\sinh \beta L \cosh \beta L - \sin \beta L \cos \beta L}{\sinh \beta L^2 - \sin \beta L^2} \right) \right] \quad (4.4)$$

Graphe 3

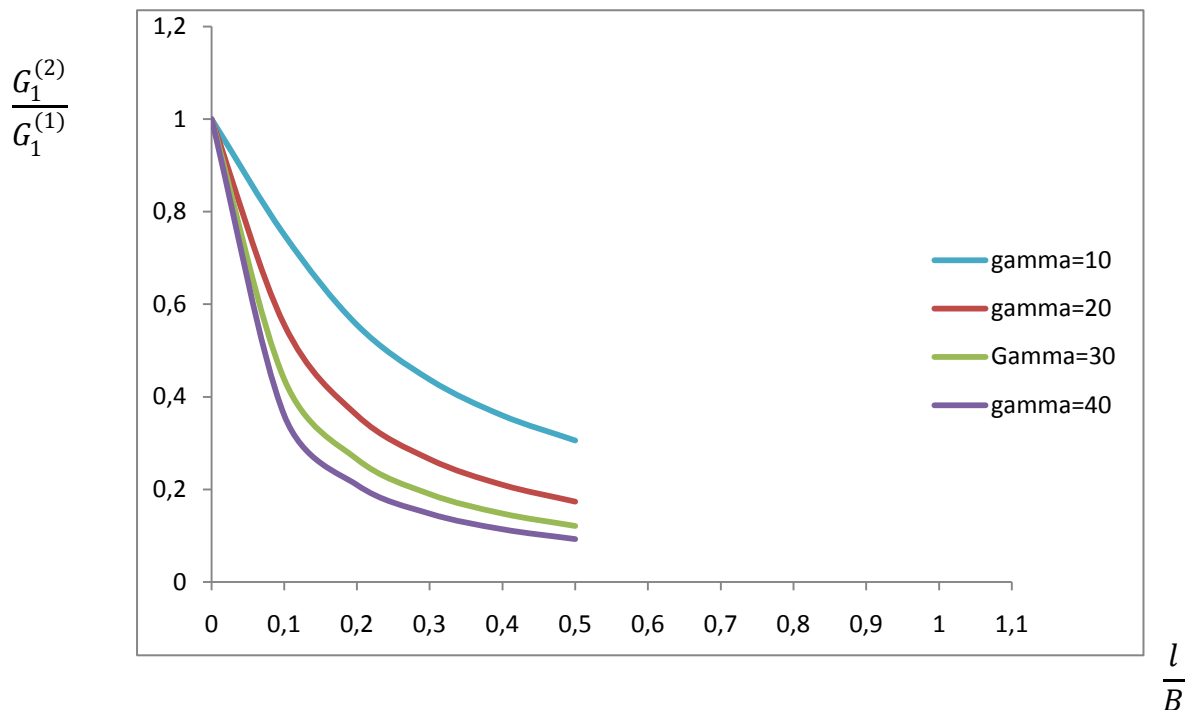


Figure 4.3: Taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ en fonction de l/B pour différentes valeurs de gamma.

Le taux de restitution d'énergie est formulé comme suit ;

$$\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}} = \frac{\varphi^2 + \alpha\psi^2 - 1}{\varphi^2 + \alpha\psi^2} \quad (4.5)$$

Les paramètres suivants φ et ψ sont exprimés comme suit (détails voir Annexe A) ;

$$\varphi = \left[\left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \frac{1}{\beta l} \times \left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L + \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$\psi = \sin \beta L - \frac{1}{\beta l} \left(\frac{C-1}{2} \right) \sin \beta L \cos \beta L + \frac{D}{\beta l} \cos \beta L \cosh \beta L - \frac{1}{\beta l} \left(\frac{C+1}{2} \right) \cos \beta L \sinh \beta L \quad (4.7)$$

avec ;

$$\beta L = \gamma \left(1 - \frac{1}{B} \right) \quad (4.8)$$

$$\beta l = \gamma \frac{1}{B} \quad (4.9)$$

$$\beta = \left[\frac{3E_2}{E_1 h^3 t} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.10)$$

Pour le cas de plusieurs données concernant les paramètres gamma, on considère les valeurs dans le Tableau suivant;

Tableau 4.2: Différentes valeurs de gamma.

$\gamma = \beta B$	10	20	30	40	∞
$\frac{1}{B}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

avec ;

$$C = \left[\left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + 2\beta l \times \left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L + \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right]$$

$$D = \left[\left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L - \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \beta l \times \left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right]$$

où ;

$$\alpha = \frac{1 - \nu_2}{[(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)]}$$

D'après la Figure 4.3, les remarques suivantes sont constatées ;

- Le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ diminue lorsque le rapport l/B (longueur de la fissure augmente) pour les différentes valeurs de $\gamma = \beta B$ et Le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ diminue lorsque $\gamma = \beta B$ augmente, cela signifie que le taux énergétique est sous-estimé pour des longueurs petites des fissures et des valeurs petites de βB , la différence entre $G_1^{(2)}$ et $G_1^{(1)}$ devient faible pour des valeurs grandes de βB et des longueurs de fissures trop grandes.
-
- On peut dire qu'une diminution sérieuse de la contribution de la couche adhésive a la performance d'un joint (colle).

La magnitude de βB est généralement contrôlée par le rapport $\frac{B}{h}$.

- Quand $\gamma = \beta B \rightarrow \infty$ le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}} \rightarrow 0$, correspond à une poutre sur appui simple.
- Pour évaluer la contribution de la performance d'un joint, des dimensions des spécimens doivent être sélectionnées d'une façon approchée pour $10 < \beta B < 50$.

Graphe 4

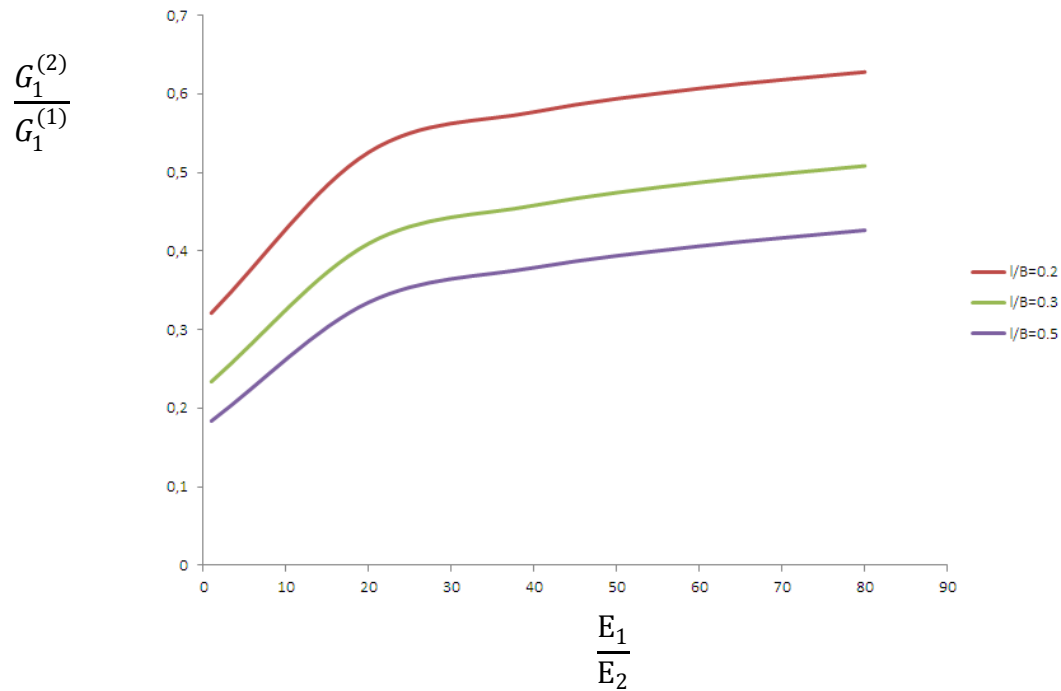


Figure 4.4: Taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ en fonction de $\frac{E_1}{E_2}$ pour différentes valeurs de $\frac{1}{B}$.

Le taux de restitution d'énergie est formulé comme suit ;

$$\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}} = \frac{\varphi^2 + \alpha\psi^2 - 1}{\varphi^2 + \alpha\psi^2} \tag{4.11}$$

avec ;

$$\beta L = 23.4 \frac{E_2^{\frac{1}{4}}}{E_1} \left(1 - \frac{1}{B}\right) \tag{4.12}$$

$$\beta l = 23.4 \frac{E_2^{\frac{1}{4}}}{E_1} \left(\frac{1}{B}\right) \tag{4.13}$$

$$\beta = \left[\frac{3E_2}{E_1 h^3 t} \right]^{\frac{1}{4}} \tag{4.14}$$

Pour le cas de plusieurs données concernant les modules E_1/E_2 , on considère les valeurs dans le tableau suivant :

Tableau 4.3 : Différentes valeurs de modules E_1/E_2 .

$\frac{E_1}{E_2}$	20	40	60	80
$\frac{l}{B}$	0.2	0.3	0.4	0.5

$$\frac{B}{h} = 10$$

$$\frac{t}{h} = 0.1$$

D'après la figure 4.4 nous remarquons que :

- Le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ augmente lorsque le rapport $\frac{E_1}{E_2}$ augmente pour des différentes valeurs de $\frac{l}{B}$ (B/h fixe et t/h fixe). Par contre le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ diminue lorsque le rapport $\frac{l}{B}$ augmente.
- On peut dire donc que le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ est important lorsque E_2 est très faible.
- La couche adhésive à base d'un matériau plus souple permet une déformation plus grande, ce qui donne un taux de restitution d'énergie plus élevé.
- Cet effet est illustré dans figure 4.3 qui montre la dépendance de $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ sur la rigidité relative pour le cas de $t/h = 0,1$ et pour différentes longueurs de fissure.
- La contribution de la liaison adhésive est plus grande pour les fissures courtes et bien sûr, pour les adhésifs plus doux pour une valeur fixe du coefficient de Poisson adhésif = 0,45 . En outre le taux de restitution d'énergie est intéressant de noter que pour un DCB (par exemple, $\frac{E_1}{E_2} = 1$) $G_1^{(2)}$ reste supérieure à $G_1^{(1)}$. Cet effet, selon Kanninen , est fondé sur l'idée que l'on agit comme une poutre sur fondation élastique .

Graph 5

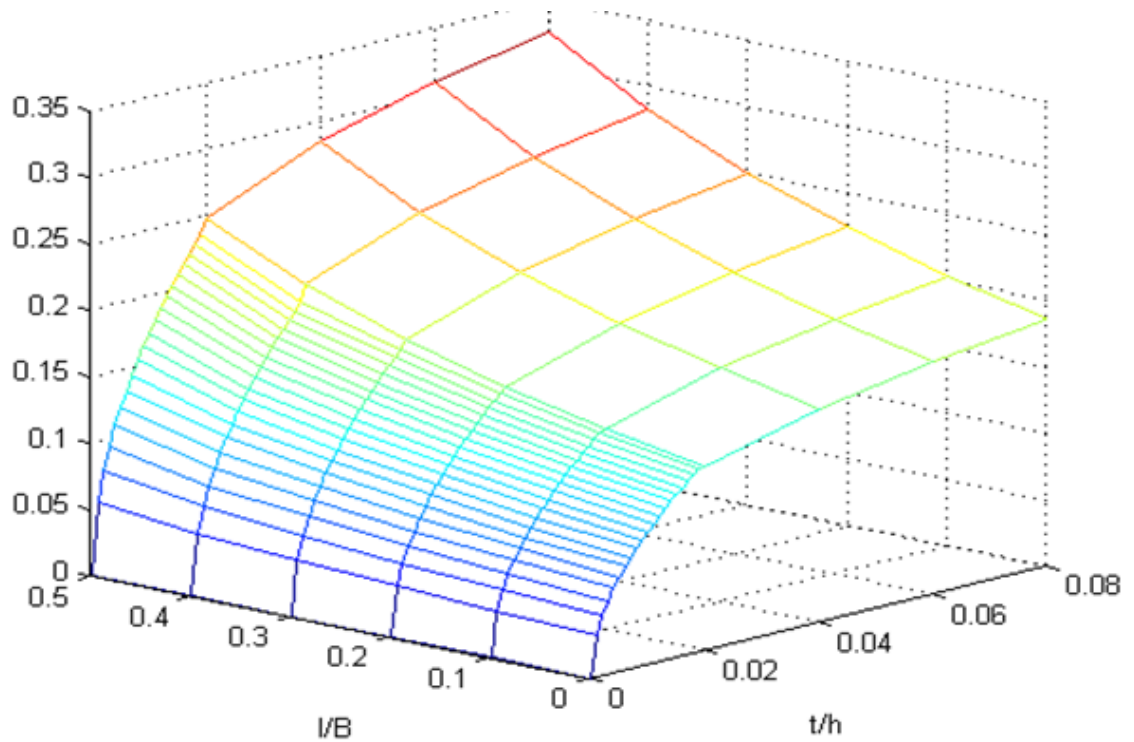


Figure 4.5 : Taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ en fonction de $\frac{t}{h}$ et $\frac{l}{B}$

L'équation du taux de restitution d'énergie est donnée comme suit :

$$\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}} = \frac{\phi^2 + \alpha\psi^2 - 1}{\phi^2 + \alpha\psi^2} \tag{4.15}$$

Avec :

$$\beta L = 4.9 \frac{t^{\frac{1}{4}}}{H} \left(1 - \frac{1}{B}\right) \tag{4.16}$$

$$\beta l = 4.9 \frac{t^{\frac{1}{4}}}{H} \left(\frac{1}{B}\right) \tag{4.17}$$

$$\beta = \left[\frac{\frac{3E_2}{E_1}}{E_1 h^3 t} \right]^{\frac{1}{4}} \tag{4.18}$$

Pour le cas de plusieurs données concernant les dimensions de rapport t/h, on considère les valeurs dans le Tableau suivant;

Tableau 4.4 : Différentes valeurs de t/h de la poutre composite.

$\frac{t}{h}$	20	40	60	80
$\frac{l}{B}$	0	0.1	0.2	0.3

Notons que les valeurs des rapports suivant sont pris comme valeurs constantes ;

$$\frac{B}{h} = 10$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 50$$

D'après la Figure 4.5 en 3-Dimensions, on constate que :

- Le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ diminue lorsque le rapport $\frac{l}{B}$ augmente (longueur de la fissure augmente) .
- Le taux énergétique $\frac{G_1^{(2)}}{G_1^{(1)}}$ augmente lorsque le rapport $\frac{t}{h}$ diminue (épaisseurs de couche adhésive) pour des valeurs fixes de $\frac{E_1}{E_2}$ et $\frac{B}{h}$.

Pour illustrer l'effet de l'épaisseur de la couche adhésive sur le taux de restitution d'énergie totale, nous considérons un échantillon avec un rapport largeur-hauteur (B / h) = 10.

Le rapport entre le module d'élasticité de l'adhérant E_1 à celle de l'adhésif E_2 est d'environ 50.

Le coefficient de Poisson ν_2 de l'adhésif P est pris comme 0,45. Nous remarquons que la contribution de la couche adhésive par rapport à l'énergie totale n'est pas négligée, cette contribution augmente avec l'épaisseur de l'adhésive et diminue avec la longueur de la fissure.

Graph 6

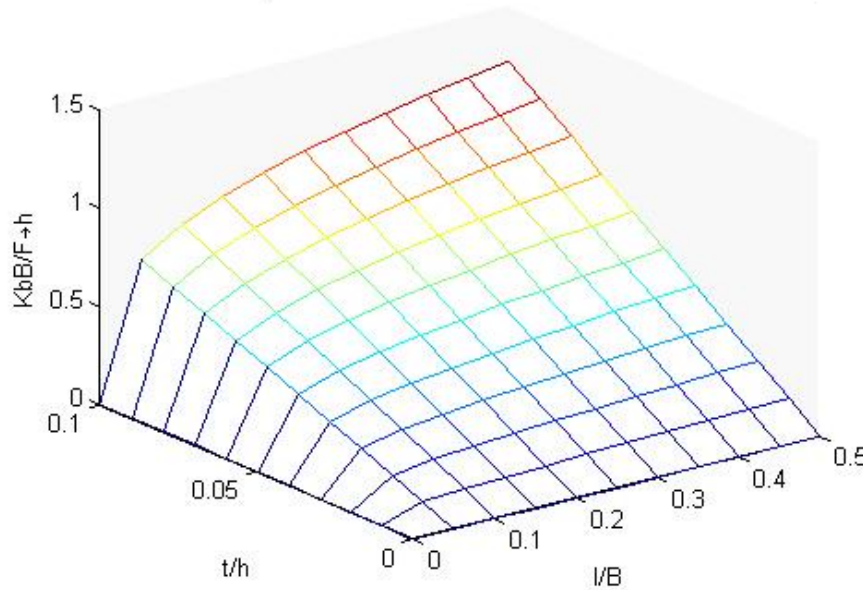


Figure 4.6: Facteur d'intensité de contrainte K en fonction de $\frac{t}{h}$ et $\frac{l}{B}$.

L'équation du taux de restitution d'énergie est donnée comme suit :

$$\frac{KbB}{F\sqrt{h}} = \frac{2\beta B}{1+\nu_2} \psi \sqrt{\frac{\frac{t}{h}}{(1-2\nu_2)}} \tag{4.19}$$

avec ;

$$\beta L = 4.9 \frac{t^{\frac{1}{4}}}{H} \left(1 - \frac{1}{B}\right) \tag{4.20}$$

$$\beta l = 4.9 \frac{t^{\frac{1}{4}}}{H} \left(\frac{1}{B}\right) \tag{4.21}$$

$$\beta = \left[\frac{\frac{3E_2}{E_1}}{E_1 h^3 t} \right]^{\frac{1}{4}} \tag{4.22}$$

Pour le cas de plusieurs données concernant les rapports t/h, on considère les valeurs dans le tableau suivant :

Tableau4.5 : Différentes valeurs pour les rapports t/h de la poutre composite.

$\frac{t}{h}$	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\frac{l}{B}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

Sachant que les rapports suivants sont pris comme valeurs constantes ;

$$\frac{B}{h} = 10$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 50$$

D'après la Figure 4.6en 3-D, on peut remarquer que le facteur d'intensité de contrainte augmente avec l'épaisseur de l'adhésive et la longueur de la fissure.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

1) Conclusion

Le travail assigné à ce mémoire a porté sur l'analyse des phénomènes complexes qui apparaissent dans le comportement de poutres mixtes par une loi de connexion tangentielle avec propagation inélastique.

Dans ce travail de recherche, nous avons étudié l'influence des caractéristiques mécaniques et les dimensions de la géométrie sur les poutres mixtes. En d'autres termes, cette étude nous a permis d'aboutir aux remarques suivantes :

- a. Epaisseur de la couche d'adhésif influe sur le taux d'énergie libérée. Cet aspect n'a pas été pris en considération dans l'interprétation du test standard [41].
- b. Contribution de la couche adhésive sur la totalité des taux de restitution d'énergie en tenant compte de l'épaisseur de l'adhésif. Par ailleurs, l'effet énergétique diminue avec la longueur de la fissure.
- c. Le taux de restitution d'énergie pour une géométrie spécifiée de l'échantillon est plus grand pour un adhésif doux.
- d. Le facteur d'intensité de contrainte K_I est proportionnel à la racine quatrième de la couche d'adhésif épais. Ce facteur augmente avec la longueur de la fissure [48].

2) Perspectives

Les perspectives d'un travail de recherche future sont nombreuses. Parmi ces travaux considérés comme importants, on cite par ordre de priorité :

Dans un premier temps, il est nécessaire de considérer dans une étude future :

- La construction d'une manipulation pour mesurer les propagations de rupture aux interfaces.
- Etude de la propagation de fissures par l'utilisation d'ondes acoustiques.
- Détermination et détection des zones endommagées.
- Comparaisons entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Il est indispensable qu'un travail expérimental doit être mené à bien et où les résultats obtenus doivent faire l'objet d'une analyse minutieuse pour une meilleure compréhension du phénomène de propagations de la rupture en Mode mixte à l'interface d'un élément poutre et voir aussi pour une comparaison effective avec ceux trouvés manuellement.

Notre travail est une contribution dont laquelle nous avons supposé des géométries simples. Pour un travail futur, nous préconisons aussi d'étudier des problèmes dont la géométrie est plus complexes et où l'utilisation de l'outil informatique s'avérera plus performant.

DETERMINATION DU PARAMETRE δ^2

On considère la partie (2) de la poutre adhésive qui est traitée comme une poutre sur appuis élastiques :

En utilisant la théorie de Euler – Bernoulli et Winkler ,on a :

Rappel :

$$EIy''(x) = -M(x) \quad (A.1)$$

$$\begin{cases} T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -EI_z y'''(x) \\ \frac{dT(x)}{dx} = -q(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dM(x)}{dx} \right) = -q(x) \end{cases} \quad (A.2)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) = EI_z y^{IV} = q(x) \quad (A.3)$$

$$r(x) = -K y(x) \quad (A.4)$$

Avec :

K est le coefficient de rigidité de la poutre adhésive .

On a :

$$q(x) = q_0(x) + r(x) \quad (A.5)$$

Remplaçons $q(x)$ par ca formule on obtient la formule suivante :

$$EI_z y^{IV} = q_0(x) + r(x) \quad (A.6)$$

Remplaçons $r(x)$ par ca formule dans l'équation (A.6) on obtient la formule suivante :

$$y^{IV} + 4 \left(\frac{K}{4EI_z} \right) y = \frac{q_0(x)}{EI_z} \quad (A.7)$$

$$y^{IV} + 4\beta^4 y = \frac{q_0(x)}{EI_z} \quad (A.8)$$

Avec :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI_z}}$$

Equation homogène linéaire est comme suit :

$$y^{IV} + 4\beta^4 y = 0 \quad (\text{A. 9})$$

L'équation (A.9) est de la forme suivante :

$$r^4 + 4\beta^4 = 0 \quad (\text{A. 10})$$

$$r^4 + 4\beta^4 = 0 \Rightarrow r^4 = -4\beta^4 \quad (\text{A. 11})$$

Solution de la forme :

$$y^2(x) = e^{\lambda x} \quad (\text{A. 12})$$

On sait que :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (\text{A. 13})$$

et :

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = \sqrt[n]{(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} \quad (\text{A. 14})$$

On note que :

$$\lambda = \sqrt[4]{-4\beta^4} = \sqrt{2} \beta \sqrt[4]{-1}$$

et :

$$\sqrt[4]{-1} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \beta\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \beta(i + 1) \\ \lambda_2 = \beta\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \beta(i - 1) \\ \lambda_3 = \beta\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \beta(-i - 1) \\ \lambda_4 = \beta\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \beta(-i + 1) \end{cases} \quad (\text{A. 15})$$

La Solution linéaire est :

$$y^2(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x} \Rightarrow$$

$$y^2(x) = e^{\beta x} (A_1 e^{i\beta x} + A_4 e^{-i\beta x}) + e^{-\beta x} (A_2 e^{i\beta x} + A_3 e^{-i\beta x}) \quad (\text{A. 16})$$

Méthode de la superposition :

On a :

$$y(X) = \int \eta(X, \xi) q(X) d\xi \quad (A.17)$$

Pour P=1:

X tend vers $(x - \xi)$

$\eta(X, \xi) = y(X)$ et par conséquent

$$\eta = \eta_p(x, \xi)$$

D'où :

$$q(\xi) * \Delta\xi = P$$

On sait que :

$$\int \varphi(x) \delta(x - \xi) dx = \varphi(\xi)$$

Donc :

$$q(x) = P \delta(x - \xi) \quad (A.18)$$

Remplaçons $q(x)$ par sa formule dans l'équation (A.8) nous obtiendrons la formule suivante :

$$y^{IV} + 4\beta^4 y = \frac{P \delta(x - \xi)}{EI_z} \quad (A.19)$$

On note que :

$$x' = x - \xi$$

Donc :

$$y^{IV} + 4\beta^4 y = \frac{P \delta(x')}{EI_z} \quad (A.20)$$

Les conditions aux limites de l'équation (A.20) sont données comme suit :

$$\begin{cases} \lim_{x' \rightarrow \infty} y(x') = 0 \\ y(-x') = y(x') \text{ symétrie} \\ y'(x') = 0 \\ \frac{P}{2} = -T \text{ quand } x' = 0 \end{cases}$$

Pour : $x' > 0$

$$y(x') = e^{-\beta x'} (B_1 \cos \beta x' + B_2 \sin \beta x') + e^{-\beta x'} (B_3 \cos \beta x' + B_4 \sin \beta x') \quad (A.21)$$

Conditions aux limites :

- 1) $\lim_{x' \rightarrow \infty} e^{-\beta x'} = 0 \Rightarrow B_3 = B_4 = 0.$
- 2) $y(-x') = y(x').$
- 3) $y'(x') = -\beta e^{-\beta x'} (B_1 \cos \beta x' + B_2 \sin \beta x') + \beta e^{-\beta x'} (-B_1 \sin \beta x' + B_2 \cos \beta x')$
Pour $x' = 0$, $B_1 = B_2 = B.$
- 4) $B = \frac{P}{8 \beta^3 E I_z}$

L'équation (A.17) devient comme suit :

$$\eta(x, \xi) = \frac{P}{8 \beta^3 E I_z} \begin{cases} e^{-\beta(x-\xi)} (\cos \beta(x-\xi) + \sin \beta(x-\xi)) & \text{pour } x > \xi \\ e^{+\beta(x-\xi)} (\cos \beta(x-\xi) - \sin \beta(x-\xi)) & \text{pour } x < \xi \end{cases} \quad (\text{A. 21})$$

$$y' = -\beta e^{-\beta x'} (\cos \beta x' + \sin \beta x') + \beta e^{-\beta x'} \beta (-\sin \beta x' + \cos \beta x') \quad (\text{A. 22})$$

$$y'' = \beta^2 e^{-\beta x'} (\cos \beta x' + \sin \beta x') + \beta e^{-\beta x'} \beta^2 (-\sin \beta x' - \cos \beta x') \quad (\text{A. 23})$$

$$y''' = -B \beta^3 e^{-\beta x'} (-\cos \beta x' + \sin \beta x') + \beta e^{-\beta x'} \beta^3 (\sin \beta x' - \cos \beta x') \quad (\text{A. 24})$$

$$y^{IV} = B \beta^3 + B \beta^3 = \frac{P}{2 E I_z} \quad (\text{A. 25})$$

Donc :

Le déplacement de la poutre sur appuis élastiques $\delta^2 = \frac{P}{4 \beta^3 E I_z}$

L'EQUATION DE KANNINEN

Notre modèle proposé voir Figure (2 .2) est décomposé en deux parties, la première partie est la poutre adhérente, la 2^{ème} partie est la poutre adhésive (colle). La partie adhérente est décomposée en deux parties (voir Figure 4.2) : poutre libre et poutre sur appui élastique. Les équations de Kanninen, basées sur les théories de Euler – Bernoulli et Winkler sont données comme suit :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 H(x)w = 0 \quad (B.1)$$

avec :

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

et où :

$$\beta = \left[\frac{K}{4I_1 E_1} \right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{3\frac{E_2}{E_1}}{th^3} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (B.2)$$

Les conditions aux limites de l'équation (B.1) sont données comme suit :

$$w''(-l) = 0 \quad (B.3)$$

$$w'''(-l) = \frac{F}{EI} = \frac{12F}{Ebh^3} \quad (B.4)$$

$$w'''(L) = w''(L) = \frac{12F}{Ebh^3} \quad (B.5)$$

La solution de l'équation (B.1) est donnée comme suit :

$$x(x) = \frac{6F}{Ebh^3\beta^3} \begin{cases} \frac{\beta^3 x^3}{3} + l\beta^3 - C\beta x + D & \text{pour } -l \leq x \leq \\ l\beta \sin \beta x \cos \beta x - \left(\frac{C-1}{2}\right) \sin \beta x \cosh \beta x + B \cos \beta x \cosh \beta x - \left(\frac{C+1}{2}\right) \cos \beta x \sinh \beta x & \end{cases} \quad (B.6)$$

Avec :

$$C = \left[\left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + 2\beta l \times \left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L + \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (B.7)$$

$$D = \left[\left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L - \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \beta l \times \left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (B.8)$$

Pour : $\delta = w(-l)$, le déplacement de la poutre libre devient comme suit :

$$\frac{\delta^1}{F} = \frac{\emptyset}{Eb} \quad (B.9)$$

Avec :

$$\emptyset = \left[\left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \frac{1}{\beta l} \times \left(\frac{\sinh \beta L \times \cosh \beta L + \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (B.10)$$

$$\psi = \sin \beta L - \frac{1}{\beta l} \left(\frac{C-1}{2} \right) \sin \beta L \cos \beta L + \frac{D}{\beta l} \cos \beta L \cosh \beta L - \frac{1}{\beta l} \left(\frac{C+1}{2} \right) \cos \beta L \sinh \beta L \quad (B.11)$$

Le rôle de la poutre sur appui élastique est de compenser la moitié de la poutre manquante de spécimen, pour cela le paramètre k ne sera pas indépendant , au contraire, sa valeur sera obtenue en associant le rapport de la déflexion à mi-hauteur de la poutre transversale à la force moyenne dans l'échantillon, donc on peut écrire la relation suivante :

$$\sigma = \frac{K w(x)}{b} = E\varepsilon = \frac{E w(x)}{\frac{h}{2}} \quad (B.12)$$

Donc :

$$k = \frac{2Eb}{h} \quad (B.13)$$

Remplaçons la formule de K, on obtient la formule suivante :

$$\beta = \frac{1}{h} \sqrt[4]{6} \quad (B.14)$$

Pour $l \gg h$ l'équation (B.8) devient :

$$\frac{\delta^{(1)}}{F} = \frac{4l^3}{Eb h^3} \left[1 + 1.92 \frac{h}{l} + 1.22 \frac{h^2}{l^2} + 0.39 \frac{h^3}{l^3} \right] \quad (\text{B.15})$$

b) La déformation de la poutre élastique voir figure 2.1.b est calculée par la formule suivante :

$$w = F \delta^{(2)} \quad (\text{B.16})$$

Pour $x = l$, l'équation (B.16) devient :

$$w(a) = \frac{F^2}{Eb} \phi = \frac{Eb \delta^{(2)}}{\phi} \quad (\text{B.17})$$

FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE :

$$K_I^2 = \frac{E}{b} \begin{cases} \frac{dw}{dl} & \text{pour } F = \text{constante} \\ -\frac{dw}{dl} & \text{pour } \delta^{(2)} = \text{constante} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

L'équation (B.18) devient :

$$K_I^2 = \frac{E F^2}{b^2} \phi \text{ pour } F=\text{constante} \quad (\text{B.19})$$

$$K_I^2 = \frac{E^2 (\delta^{(2)})^2}{\phi^2} \phi \text{ pour } \delta^{(2)}=\text{constante} \quad (\text{B.20})$$

Avec :

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial l} - \frac{\partial \phi}{\partial L} = \frac{12}{\beta^2 h^3} \left[\beta l \left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \left(\frac{\sin \beta L \times \cosh \beta L - \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (\text{B.21})$$

Pour une force F constante et $L < 2h$, $l \gg h$, le facteur d'intensité da contrainte est donné par l'équation suivante :

$$K_I = 2\sqrt{3} \frac{F}{b h^3} \left[\beta l \left(\frac{\sinh^2 \beta L + \sin^2 \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) + \left(\frac{\sin \beta L \times \cosh \beta L - \sin \beta L \times \cos \beta L}{\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L} \right) \right] \quad (\text{B.22})$$

Par contre pour $L > 2h$, le facteur d'intensité da contrainte est donnée par l'équation suivante :

$$K_I = 2\sqrt{3} \frac{F l}{b h^{3/2}} \left[1 + 0.64 \left(\frac{h}{l} \right) \right] \quad (\text{B.23})$$

Par contre pour L tend ver 0 , le facteur d'intensité de contrainte est donné par l'équation suivante :

$$K_I = 2\sqrt{3} \frac{F B h^{1/2}}{b l^2} \quad (\text{B. 24})$$

LE TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Le taux de restitution d'énergie d'après Chudnovsky [45] G_1 est considéré comme une force de l'extension de la fissure ; il est donné comme suit :

$$G_1 = \frac{\partial P}{\partial a} = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial l} + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial l} = G_1^{(1)} + G_1^{(2)} \quad (C.1)$$

(a) Le taux de restitution d'énergie $G_1^{(1)}$:

Le taux de restitution d'énergie de la première partie de la poutre adhésive (freebeam) voir Figure (III.5 a) est donné comme suit :

$$G_1^{(1)} = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial l} = \frac{F^2 l^2}{b E_1 I_1} \quad (C.2)$$

Avec :

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} : \text{Le moment d'inertie de la section transversale de la poutre .}$$

a) Le taux de restitution d'énergie $G_1^{(2)}$:

Le taux de restitution d'énergie de la deuxième partie de la poutre adhésive (poutre sur appui élastique) voir Figure (III.5 b) est donné comme suit :

$$G_1^{(2)} = \frac{\partial P^{(2)}}{\partial l} = \frac{-(f_p^2 - F\delta^{(2)})}{\partial l} - \frac{\partial f_c}{\partial l} = G_{1b}^{(2)} + G_{1c}^{(2)} \quad (C.3)$$

Dans notre cas, $G_1^{(2)}$ l'énergie de la partie 2 (Figure III.5 b) est décomposée en deux énergies :

$G_{1b}^{(2)}$: Energie de la poutre sur appui élastique adhésive.

$G_{1c}^{(2)}$: Energie de la partie 2 due à la contribution de la couche

On en déduit que ;

$$G_{1b}^{(2)} = \frac{\partial P}{\partial a} = \frac{-(f_p^2 - F\delta^{(2)})}{\partial a} - \frac{\partial f_c}{\partial a} = G_{1a}^{(2)} + G_{1c} \quad (C.4)$$

Nous avons d'après l'équation de Kanninen :

$$\frac{\delta}{F} = \frac{\phi}{E_b} \quad \text{ce qui nous donne } \delta = \frac{F \phi}{E_b}$$

D'après l'équation (C.2) : $G_1 = \frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{F^2 l^2}{b E_{111}} \delta^2 = G_1^{(1)} \delta^2$

Donc l'équation (C.1) devient comme suit :

$$G_1^{(1)} \delta^2 = G_1^{(1)} + G_1^{(2)} \rightarrow G_1^{(2)} = G_1^{(1)} (\delta^2 - 1) \quad (C.5)$$

Pour déterminer le taux énergétique de la poutre adhésive voir Figure III.5, cette dernière est considérée comme une bande mince sur un déplacement prescrit et déterminé par la flexion de la poutre.

$$P_C = F_C = \int f(\epsilon) dv = b \int_{-l}^l dn \int_{-t}^t f(\epsilon) dy \quad (C.6)$$

Avec :

f : Energie de déformation de la poutre.

ϵ : Tenseur de déformation de la poutre.

Nous avons d'après le principe de Kanninen :

$$\sigma = \frac{K w(x)}{b} = E \epsilon = \frac{E w(x)}{\frac{h}{2}}$$

$$\sigma = \frac{E}{1 + \nu} \epsilon + \lambda \epsilon \delta \quad (C.7)$$

Avec :

λ : constante de la lame donnée par la formule suivante:

$$\lambda = \frac{E \nu_2}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}$$

ν_2 : Coefficient de Poisson .

Dans notre cas de déformation plane :

$$G_1 = \frac{1 - \nu_2^2}{E} K_1^2 \quad (C.8)$$

Remplaçons les équations (C.7) et (C.8) dans l'équation (C.6) nous obtiendrons le taux énergétique de la poutre adhésive suivant :

$$G_{1C} = \frac{\alpha E_2 \delta^{(2)}}{t} \quad (C.9)$$

Nous utilisons le déplacement trouvé dans l'équation de Kanninen lorsque ($x=L$) et nous le remplaçons dans l'équation précédente (C.9) qui nous donnera la formule suivante :

$$G_{1C} = \alpha \psi^2 G_1^{(1)} \quad (C.10)$$

Nous combinons les équations (C.4) ; (C.5) et (C.10) pour obtenir l'équation du taux énergétique de la poutre adhésive qui est donnée par la formule suivante :

$$G_1^{(2)} = G_1^{(1)} (\phi^2 + \alpha \psi^2 - 1) \quad (C.11)$$

Les paramètres ψ et ϕ sont donnés dans l'annexe B .

FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE :

Pour obtenir l'équation de facteur d'intensité de contrainte, nous combinons les équations (C.8) et (C.9) :

$$K_1 = E_2 |\delta_L| \sqrt{\frac{\alpha}{(1 - \nu_2^2)t}} \quad (C.12)$$

L'équation (C.12) devient :

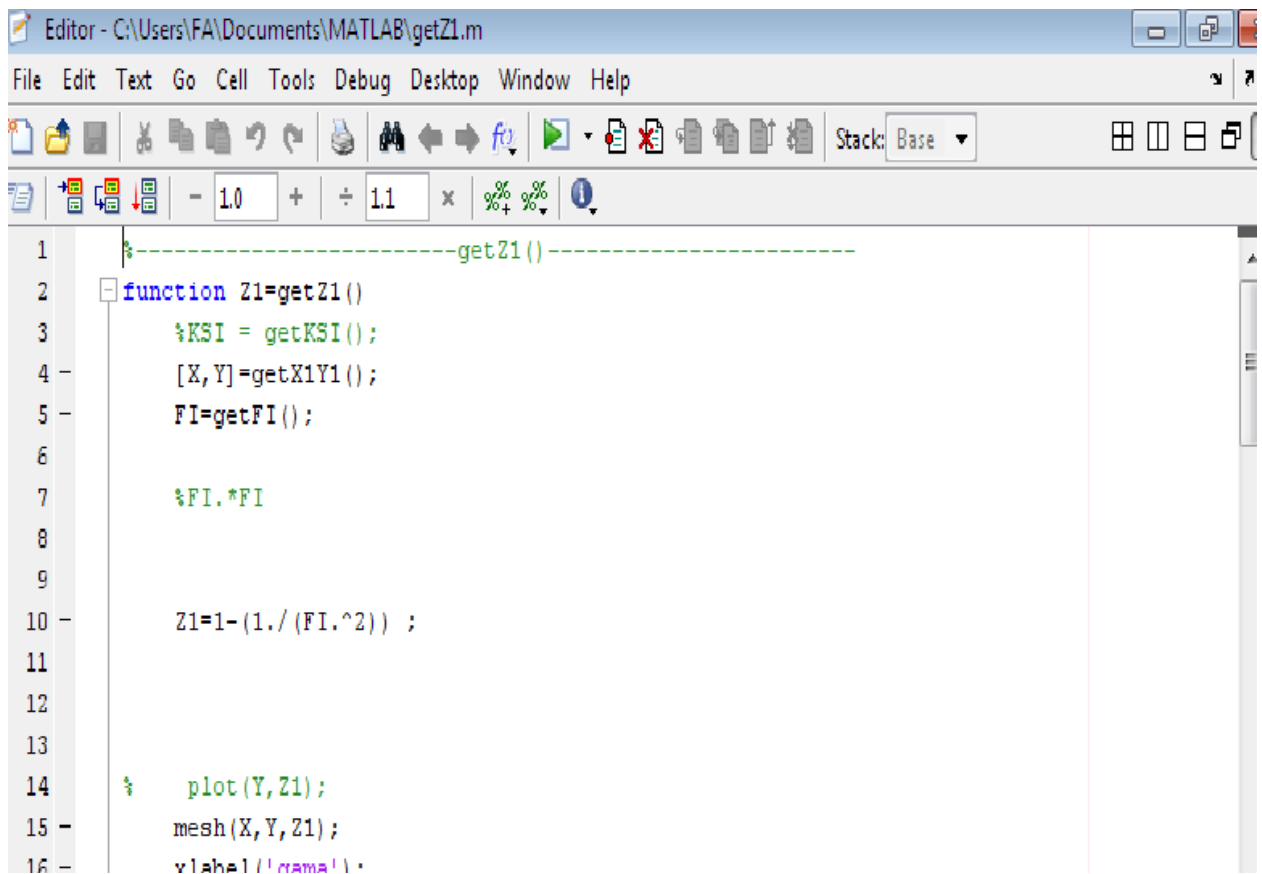
$$\frac{K_1 b\beta}{F\sqrt{h}} = \frac{2\beta B}{(1 + \nu_2)} |\psi| \sqrt{\frac{\frac{t}{h}}{(1 - 2\nu_2)}} \quad (C.13)$$

I. ELEMENTS MATLAB

MATLAB est un logiciel de calcul numérique produit par MathWorks, Il est disponible sur plusieurs plateformes, **MATLAB** est un langage simple et très efficace, optimisé pour le traitement des matrices, d'où son nom. Pour le calcul numérique, MATLAB est beaucoup plus concis que les langages (C, Pascal, Fortran, Basic). MATLAB contient une interface graphique puissante, ainsi qu'une grande variété d'algorithmes scientifiques.

II. PROGRAMMES ELABORES PAR MATLAB

Equation de la figure 4.2 :



```

Editor - C:\Users\FA\Documents\MATLAB\getZ1.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
- 1.0 + ÷ 1.1 x % % % % %
1 %-----getZ1()-----
2 function Z1=getZ1()
3     %KSI = getKSI();
4     [X,Y]=getX1Y1();
5     FI=getFI();
6
7     %FI.*FI
8
9
10    Z1=1-(1./(FI.^2)) ;
11
12
13
14    % plot(Y,Z1);
15    mesh(X,Y,Z1);
16    xlabel('rama');
  
```

```
%-----getZ1()-----
```

```
function Z1=getZ1()
```

```
    % KSI = getKSI();
```

```
[X,Y]=getX1Y1();
```

```
    FI=getFI();
```

```
    Z1=(1-(FI.^2)) ;
```

```
% plot(Y,Z1);
```

```
mesh(X,Y,Z1);
```

```
xlabel('gama');
```

```
ylabel('l/B');
```

```
zlabel('G2/G');
```

```
title('ttttt');
```

```
% gtext('texte');
```

```
end
```

```
%-----get X1Y1-----
```

```
function [X,Y]=getX1Y1()
```

```
    %P=1;
```

```
load 'X1Y1.txt';
```

```
    X=X1Y1(1,:);
```

```
    Y=X1Y1(2,:);
```

```
    %[X,Y]=meshgrid(X(1):P:X(2), Y(1):P/100:Y(2));
```

```
    [X,Y]=meshgrid(X,Y);
```

```
end
```

```
function M= getM()
```

```
    [X,Y]=getX1Y1;
```

```
    M=X.*(1-Y);
```

end

function N=getN()

[X,Y]=getX1Y1();

N= Y.*X;

end

%-----FI-----

function A=getA()

M=getM();

A=(sinh(M).^2)+(sin(M).^2);

end

function B=getB()

M=getM();

B=(sinh(M).^2)-(sin(M).^2);

end

function L=getL()

M=getM();

L=(sinh(M).*cosh(M));

end

function O=getO()

M=getM();

O=(sin(M).*cos(M));

end

function FI=getFI()

A=getA();

B=getB();

L=getL();

O=getO();

N=getN();

FI=(A./B)+((1./N).*((L-O)./B));

```
end
function KSI=getKSI()
    F=getF();
    H= getH();
    I= getI();
    J= getJ();
    N=getN();
    C=getC();
    D=getD();
    KSI=F-((1./N).*((C-1)/2).*H)+((D./N).*I)-((1./N).*((C+1)/2).*J);
end
```

```
function F=getF()
    M=getM();
    F=sin(M).*sinh(M);
```

```
end
function H= getH()
    M=getM();
    H=sin(M).*cos(M);
```

```
end
function I= getI()
    M=getM();
    I=cos(M).*cosh(M);
```

```
end
function J= getJ()
    M=getM();
    J=cos(M).*sinh(M);
```

```
end
function C=getC()
```

```
A=getA();
```

```
B=getB();
```

```
N=getN();
```

```
L=getL();
```

```
O=getO();
```

```
C=(A./B) + 2*N.* ((L+O)./B);
```

```
end
```

```
function D=getD()
```

```
A=getA();
```

```
B=getB();
```

```
N=getN();
```

```
L=getL();
```

```
O=getO();
```

```
D=((L-O)./B)+ N.*(A./B);
```

```
end
```

Equation de la figure 4.3 :

```

Editor - C:\Users\FA\Documents\MATLAB\getZ7.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
%-----getZ7()-----
1
2 function Z7=getZ7 ()
3     KI = getKI ();
4     [X,Y]=getX7Y7 ();
5
6     %KSI = abs (KSI);
7
8
9     Z7 = 2.21 * ((1.565 * (A./B)) + ((1/X) .* (L-O) ./B));
10
11     % mesh (Y,X,Z6);
12
13     %Z6=Z6';
14     %mesh (X,Y,Z6);
15     plot (Z7,T);
16     %Xlabel ('t/h');
17     %Ylabel ('l/B');
18
19 end
20
21 %-----get X7Y7-----
22
23 function [X,Y]=getX7Y7 ()
24     load 'X7Y7.txt';
25     X=X7Y7 (1,:);

```

```

%-----getZ7()-----
function Z7=getZ7 ()
    KI = getKI ();
    [X,Y]=getX7Y7 ();

%KSI = abs (KSI);

    Z7 = 2.21 * ((1.565 * (A./B)) + ((1/X) .* (L-O) ./B));

% mesh (Y,X,Z6);

%Z6=Z6';
%mesh (X,Y,Z6);
plot (Z7,Y);
%Xlabel ('t/h');
%Ylabel ('l/B');

end

%-----get X7Y7-----

function [X,Y]=getX7Y7 ()
load 'X7Y7.txt';
    X=X7Y7 (1,:);
    Y=X7Y7 (2,:);

```

```
v = 0.01;%----- 0.02
X = X(1):v:X(6);
Y = Y(1):v*5:Y(6);

[X,Y]=meshgrid(X,Y);
end

function M= getM()
[X,Y] = getXY7;
M=1.565.*Y;

end
%-----KI-----
function A=getA()
M=getM();
A=(sinh(M).^2)+(sin(M).^2);
end

function B=getB()
M=getM();
B=(sinh(M).^2)-(sin(M).^2);
end

function L=getL()
M=getM();
L=(sinh(M).*cosh(M));
end

function O=getO()
M=getM();
O=(sin(M).*cos(M));
end

function KI= getKI()
A= getA();
B= getB();
L= getL();
O= getO();

KI= 2.21*((1.565 * (A./B))+ ((1/X).* (L-O)./B));
end
```

Equation de la figure 4.3 :

```

1 %-----getZ2()-----
2 function Z2=getZ2()
3     [X,Y]=getX2Y2();
4     length(Y);
5     hold on;
6     W=1;
7     for W=1:length(Y)
8         %UU=input('');
9         %KSI = getKSI(W);
10        %disp(KSI);
11        FI=getFI(W);
12        %AA = (FI.^2) + (3.8*KSI.^2);
13        %Z2=((FI.^2)-1);
14        Z2= 1 -( 1 ./ FI.^2);
15
16        %mesh(X,Y,Z2);
17        %Z2 = smooth(Z2);
18        plot(X,Z2);
19    end
20    %xlabel('E1/E2');
21    %ylabel('G2/G');
22    %zlabel('1/B');
23    %title('tttttt');

```

```

%-----getZ2()-----
function Z2=getZ2()
    [X,Y]=getX2Y2();
length(Y);
hold on;
    W=1;
for W=1:length(Y)
    %UU=input('');
        %KSI = getKSI(W);
        %disp(KSI);
        FI=getFI(W);
        %AA = (FI.^2) + (3.8*KSI.^2);
%Z2=((FI.^2)-1);

```

```
Z2= 1 -( 1 ./ FI.^2);
```

```
%mesh(X,Y,Z2);
```

```
    %Z2 = smooth(Z2);
```

```
plot(X,Z2);
```

```
end
```

```
    %xlabel('E1/E2');
```

```
    %ylabel('G2/G');
```

```
    %zlabel('l/B');
```

```
    %title('ttttt');
```

```
    %gtext('texte');
```

```
end
```

```
%-----get X2Y2-----
```

```
function [X,Y]=getX2Y2()
```

```
load 'X2Y2.txt';
```

```
    X=X2Y2(1,:);
```

```
    Y=X2Y2(2,:);
```

```
    X(1)::X(5)
```

```
    %[X,Y]=meshgrid(X,Y);
```

```
end
```

```
function M= getM(W)
```

```
[X,Y]=getX2Y2();
```

```
    M=23.4*(X.^(-1/4)).*(1-Y(W));
```

```
end
```

```
function N=getN(W)
```

```
[X,Y]=getX2Y2();
```

```
N= 23.4*(X.^(-1/4)).*Y(W);
end
%-----FI-----
function A=getA(W)
    M=getM(W);
    A=(sinh(M).^2)+(sin(M).^2);
end

function B=getB(W)
    M=getM(W);
    B=(sinh(M).^2)-(sin(M).^2);
end

function L=getL(W)
    M=getM(W);
    L=(sinh(M).*cosh(M));
end

function O=getO(W)
    M=getM(W);
    O=(sin(M).*cos(M));
end

function FI=getFI(W)
    A=getA(W);
    B=getB(W);
    L=getL(W);
    O=getO(W);
    N=getN(W);
    FI=(A./B)+((1./N).*((L-O)./(B)));
end

function KSI=getKSI(W)
    F=getF(W);
    H= getH(W);
    I= getI(W);
```

```
J=getJ(W);  
N=getN(W);  
C=getC(W);  
D=getD(W);
```

```
KSI=F-((1./N).*((C-1)/2).*H)+((D./N).*I)-((1./N).*((C+1)/2).*J);
```

```
end
```

```
function F=getF(W)
```

```
M=getM(W);  
F=sin(M).*sinh(M);
```

```
end
```

```
function H= getH(W)
```

```
M=getM(W);  
H=sin(M).*cos(M);
```

```
end
```

```
function I= getI(W)
```

```
M=getM(W);  
I=cos(M).*cosh(M);
```

```
end
```

```
function J= getJ(W)
```

```
M=getM(W);  
J=cos(M).*sinh(M);
```

```
end
```

```
function C=getC(W)
```

```
A=getA(W);  
B=getB(W);  
N=getN(W);
```

L=getL(W);

O=getO(W);

C=(A./B) + 2*N.* ((L+O)./B);

end

function D=getD(W)

A=getA(W);

B=getB(W);

N=getN(W);

L=getL(W);

O=getO(W);

D=((L-O)./B)+ N.*(A./B);

end

Equation de la figure 4.4 :

```

Editor - C:\Users\FA\Documents\MATLAB\getZ3.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
%-----getZ3()-----
1 function Z3=getZ3()
2     [X,Y]=getX3Y3();
3     %[X,Y]= meshgrid(X,Y);
4     FI=getFI();
5
6     Z3 = 1-(1 ./ (FI.^2));
7
8
9     a = 0:0.001:0.019;
10    b=[a;a;a;a;a];
11
12    ay = Y(:,2);
13    by = ay;
14    for i = 2:size(a,2)
15        by = [by ay];

```

```
%-----getZ3()-----
```

```
function Z3=getZ3()
```

```
[X,Y]=getX3Y3();
```

```
%[X,Y]= meshgrid(X,Y);
```

```
FI=getFI();
```

```
Z3 = 1-(1 ./ (FI.^2));
```

```
a = 0:0.001:0.019;
```

```
b=[a;a;a;a;a];
```

```
ay = Y(:,2);
```

```
by = ay;
```

```
for i = 2:size(a,2)
```

```
by = [by ay];
```

```
end
```

```
Y = Y(:,2:1:5);
```

```
Y = [by Y];
```

X = X(:,2:1:5);

X = [b X];

d = Z3(2,2) / 19;

a2 = 0:d:Z3(2,2);

a2(20) = Z3(2,2);

d = Z3(3,2) / 19;

a3 = 0:d:Z3(3,2);

a3(20) = Z3(3,2);

d = Z3(4,2) / 19;

a4 = 0:d:Z3(4,2);

a4(20) = Z3(4,2);

d = Z3(5,2) / 19;

a5 = 0:d:Z3(5,2);

a5(20) = Z3(5,2);

d = Z3(6,2) / 19;

a6 = 0:d:Z3(6,2);

a6(20) = Z3(6,2);

a = sqrt(a);

a2 = sqrt(a2)/2.6;

a3 = sqrt(a3)/2.5;

a4 = sqrt(a4)/2.4;

a5 = sqrt(a5)/2.3;

a6 = sqrt(a6)/2.1;

b=[a;a2;a3;a4;a5;a6];

```
%plot(a,a.^2 * 0.001)

Z3 = Z3(:,2:1:5);
    Z3 = [b Z3];
%Z3(:,1) = zeros(size(Z3,1), 1)
    %plot(Z3,Y);

    % waterfall(X,Y,Z3);
meshc(X,Y,Z3);
    %contour(X,Y,Z3);
    %plot3(X,Y,Z3);
%surf(X,Y,Z3);
    %shading('flat');

%stem3(X,Y,Z3,'-');
    %colormap(copper(64));
%shading('flat');
hlight = light;
lighting('gouraud');
foraz=0:5:360
lightangle(hlight,az,5)
pause(0.05)
end

%figure
%subplot(2,2,1), meshz(X,Y,Z3), grid
    %subplot(2,2,2), meshz(Y,X,Z3), grid
    %subplot(2,2,3), meshz(Z3,X,Y), grid
    %subplot(2,2,4), meshz(Z3,Y,X), grid

xlabel('t/h');
ylabel('l/B');
zlabel('G2/G');
title('ttttt');
```

```
% gtext('texte');
end

%-----get X3Y3-----
function [X,Y]=getX3Y3()
load 'X3Y3.txt';
    X=X3Y3 (1,:);
    Y=X3Y3 (2,:);
    [X,Y]=meshgrid(X,Y);
end

function M= getM()
    [X,Y]=getX3Y3;
M=4.9*(X.^(-1/4)).*(1-Y);

end

function N=getN()
[X,Y]=getX3Y3();
    N= 4.9*(X.^(-1/4)).*Y;
end

%-----FI-----
function A=getA()
    M=getM();
    A=(sinh(M).^2)+(sin(M).^2);
end

function B=getB()
    M=getM();
    B=(sinh(M).^2)-(sin(M).^2);
end

function L=getL()
    M=getM();
```

```
L=(sinh(M).*cosh(M));  
end
```

```
function O=getO()  
M=getM();  
O=(sin(M).*cos(M));  
end
```

```
function FI=getFI()  
A=getA();  
B=getB();  
L=getL();  
O=getO();  
M=getM();  
FI=(A./B)+((1./M).*((L+O)./(B)));  
end
```

```
function KSI=getKSI()  
F=getF();  
H= getH();  
I= getI();  
J= getJ();  
N=getN();  
C=getC();  
D=getD();  
KSI=F-((1./N).*((C-1)/2).*H)+((D./N).*I)-((1./N).*((C+1)/2).*J);  
end
```

```
function F=getF()  
M=getM();  
F=sin(M).*sinh(M);  
  
end
```

```
function H= getH()  
M=getM();  
H=sin(M).*cos(M);
```

end

function I= getI()

M=getM();

I=cos(M).*cosh(M);

end

function J= getJ()

M=getM();

J=cos(M).*sinh(M);

end

function C=getC()

A=getA();

B=getB();

N=getN();

L=getL();

O=getO();

$C=(A./B) + 2*N.* ((L+O)./B);$

end

function D=getD()

A=getA();

B=getB();

N=getN();

L=getL();

O=getO();

$D=((L-O)./B)+ N.*(A./B);$

end

Equation de la figure 4.5 :

```

Editor - C:\Users\FA\Documents\MATLAB\getZ6.m*
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
1 %-----getZ6()-----
2 function Z6=getZ6()
3     KSI = getKSI();
4     [X,Y]=getX6Y6();
5
6
7     %KSI = abs(KSI);
8
9
10    Z6= (4.35*(X.^(1/4).* Y));
11    Z6= 1./Z6';
12    mesh(Y,X,Z6);
13
14    %Z6=Z6';
15    %mesh(X,Y,Z6);

```

```
%-----getZ6()-----
```

```
function Z6=getZ6()
```

```
    KSI = getKSI();
```

```
[X,Y]=getX6Y6();
```

```
    X
```

```
    Y
```

```
    %KSI = abs(KSI);
```

```
    Z6= (4.35*(X.^(1/4).* Y));
```

```
    Z6=Z6';
```

```
    mesh(Y,X,Z6);
```

```
    %Z6=Z6';
```

```
    %mesh(X,Y,Z6);
```

```
    %plot(Z6,X);
```

```
% Xlabel('t/h');
```

```
% Ylabel('l/B');
```

```
end
```

```
%-----get X6Y6-----
```

```
function [X,Y]=getX6Y6()
```

```
load 'X6Y6.txt';
```

```
X=X6Y6 (1,:);
```

```
Y=X6Y6 (2,:);
```

```
v = 0.01;%----- 0.02
```

```
X = X(1):v:X(6);
```

```
Y = Y(1):v*5:Y(6);
```

```
[X,Y]=meshgrid(X,Y);
```

```
end
```

```
function M= getM()
```

```
[X,Y] = getX6Y6;
```

```
M=5*(X.^(-1/4)).*(1-Y);
```

```
end
```

```
function N=getN()
```

```
[X,Y] = getX6Y6;
```

```
N= 5*(X.^(-1/4)).*Y;
```

```
end
```

```
%-----KSI-----
```

```
function A=getA()
```

```
M=getM();
```

```
A=(sinh(M).^2)+(sin(M).^2);
```

end

function B=getB()

M=getM();

B=(sinh(M).^2)-(sin(M).^2);

end

function L=getL()

M=getM();

L=(sinh(M).*cosh(M));

end

function O=getO()

M=getM();

O=(sin(M).*cos(M));

end

function KSI=getKSI()

F=getF();

H= getH();

I= getI();

J= getJ();

N=getN();

C=getC();

D=getD();

KSI= F-((1./N).*((C-1)/2).*H)+((D./N).*I)-((1./N).*((C+1)/2).*J);

end

function F=getF()

M=getM();

F=sin(M).*sinh(M);

end

```
function H= getH()
    M=getM();
    H=sin(M).*cos(M);
```

```
end
```

```
function I= getI()
    M=getM();
    I=cos(M).*cosh(M);
```

```
end
```

```
function J= getJ()
    M=getM();
    J=cos(M).*sinh(M);
```

```
end
```

```
function C=getC()
    A=getA();
    B=getB();
    N=getN();
    L=getL();
    O=getO();
```

```
    C=(A./B) + 2*N.* ((L+O)./B);
```

```
end
```

```
function D=getD()
    A=getA();
    B=getB();
    N=getN();
    L=getL();
    O=getO();
```

```
    D=((L-O)./B)+ N.*(A./B);
```

```
end
```

Bibliographie

- [1] Laurent David, Pierre Lagrange, Julian Le dieu et Jean Steinmetz, " Les matériaux de A à Z - 400 entrées et des exemples pour comprendre ", Dunod, (2008).
- [2] Jean Luc .R , " Comportement et endommagement des alliages d'aluminium 6061-T6 : approche micromécanique " (2013) .
- [3] J. C. Grandidiera et M. Potier .Ferry, " Evidence of thermo-oxidation phenomena occurring during hygrothermal aging of thermosetting resins for RTM composite applications". Composites Part A Applied Science and Manufacturing (2014).
- [4] C. Darvennes ; L. Lowe and C. Wilson, "Porosity determination in thin graphite-epoxy composite laminates using histograms of ultrasonic C-scans", Proc. SPIE 5393, Nondestructive Evaluation and Health Monitoring of Aerospace Materials and Composites III, 194 (2004).
- [5] T. Lorriot. "Specimen Loading Determined by displacement measurement in instrumented impact test". Engineering Fracture Mechanics, Volume 65, pp. 703-713, (2000).
- [6] V. Calard, J. Lamon . «Probabilistic approaches to the failure of ceramic matrix composites under 3- point and pseudo 4-point bending «(2009).
- [7] J. Payan , " Etude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue " (2004).
- [8] Fibre de carbone : article de wikipédia, l'encyclopédie libre <http://fr.wikipedia.org/wiki/fibre-de-carbone> .
- [9] Zakia Draidi.: "Renforcement et réparation des coques métalliques par matériaux composites " (TFC), thèse de doctorat à l'institut national des sciences appliquées à Lyon(2005).
- [10] Réparation et renforcement des structures en béton au moyen des matériaux composites (présentation du Guide AFGC), club ouvrage d'art la Rochelle (2004).
- [11] Review of strengthening technique using externally bonded fiber reinforced polymer composite, rapport 200-c-01 (CRC construction innovation) (2005).
- [12] Freyssinet: technical spécification – "Concrete Strengthening by Gluing Carbon Fibre Fabrics- the TFC process", 59707-PR(E) 10/c, (1999).
- [13] Freyssinet : cahier de clauses techniques, " Renforcement du Béton par Collage de Tissu de Fibre de Carbone Procède" TFC, R-F-TFC-PRF 10/D(2000).
- [14] Freyssinet : renforcement structural avec du TFC " structure béton, fiche technique"

Ref : T.F0021).

[15] J.Miranda Vizuete ; "Technique et système de renforcement des structures en béton".

Site web : ST-div.web.cern.ch/st-div/workshop/ST2000wS/proceedings/tecno2/jm.

[16] S. Marouani, L. Curtil, P. Hamelin ; "L'influence des conditions de mise en œuvre des composants à matrice polymère utilisés pour la réparation et/ou le renforcement des ouvrages en béton". Laboratoire mécanique des matériaux et structure (L2Ms), université de Lyon I, XXIIIème Rencontre universitaire de génie civil 2005. Risque et Environnement (2005).

[17] ZI VU WU ; "Etude expérimentale du comportement des poutres courtes en béton armé pré fissurées et renforcées par des matériaux composites sous chargement statique et de fatigue ", thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (2004).

[18] Paradis, François ; " Analyse du comportement structural d'un composite mince en béton". Université de Laval (2004).

[19] Alexandra Backelandt ; " Etudes des mécanismes d'adhérence à l'interface résine ciment en vue de la réparation des ouvrages de Génie Civil" . Thèse de doctorat à l'institut National des Etudes appliquées de Lyon (2005).

[20] Glossaire des matériaux composites – CARMA: Centre C.A.R.M.A. Centre d'animation régionale en matériaux avancés (2004).

[21] Philippe Lomothe ; " Essai de renforcement avec des matériaux composites pour poutre de pont en béton armé" ; mémoire de maîtrise et sciences appliquées, département de génie civil, université Sherbrooke (Québec), Canada(1999).

[22] Toray technologie; «Relevant Issues Of Carbon Files For The Engineering Wind Market Toray Carbon Fiber America INC», document technique 2004.

[23] J.M Berthelot ; "Matériaux Composites Comportement Mécanique Et Analyse Des Industries Françaises Des Matériaux Composites " ; études stratégiques réalisées par Nodal consultant pour le compte de digitip/ SIM (2002).

[24] Baeur .R.S; "Epoxy Resin Chemistry II»; ACS. Symposium series, (1983).

[25] Nadia Bahlouli ; " Matériaux Composites" Thèse de doctorat à l'institut national des sciences appliquées de Toulouse (2004).

[26] Jean Weiss Claude Bord ; " Les Matériaux Composites", tome II, calcul et essai et control-conception, édition de l'USINE nouvelle, Paris (1983).

[27] Berthelot; " Matériaux Composites" Technics-Builds,Paris 2000.

[28] Marc François ; " Matériaux Composites" Technique de L'Ingénieur, Paris 2001.

- [29] T. Pham Dang ; " Théories Des Plaques Sandwiches Elastiques Anisotropes" ; PhD thesis, U.T.C.,(1976).
- [30] M.S. El Shaikh. ; " Le Calcul Des Plaques Stratifiées et Sandwiches Par Eléments-Finis à L'aide D'un Matériau Equivalent". PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, (1980).
- [31] N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko ; " Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media" . (Nauka, 1984, en russe) Kluwer (traduction anglaise), Dordrecht, (1989).
- [32] A .Griffith, "The phenomenal of rupture and flow in solid" Philosophical Trans. Royal Soc of London, Serie A, Vol.221, (1920).
- [33] Sneddon I. N, "The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid",Proc. Roy. Soc. London 187A, (1946).
- [34] Irwin G. R. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 361 - 364 (1957).
- [35] J. R. Rice, G. F. "Rosengren, Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power- Law Hardening Material" , Journal of Mechanics ,Vol, 16, (1968).
- [36] Bui H. D. "Mécanique de la rupture fragile", Ed Masson, Paris (1978).
- [37] Westergaard H .M. "Dependence on near stress and stress amplitude of the fatigue", Journal of Applied Mechanics, Series A, Vol. 49 (1939).
- [38] Williams M. L. "Stress singularity resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", journal in Applied Mechanics, Vol.19, No.4. pp. 526-528 (1952).
- [39] S.Mostovoy , P. B. Crosley et E.J. Ripling; "Use of crack-line-loaded specimens for measuring plane strain fracture toughness " Journal of Materials 2 ,661 (1967).
- [40] M .F. Kanninen ; " An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest ", International Journal of fracture , Vol. 9, No.1, (1973).
- [41] B . Gross et J. E. Srawley ; " Stress-Intensity factors by boundary collocation for single-edge-notch specimens subject to splitting forces " , NASA TECH, note D-3295 (1966).
- [42] E .J . Ripling, S. Mostovoy et R.L.Moses, Mat.Res.Stds., 4, 129 (1964).
- [43] M.Chabaat , S.Djoude and M.Touati ; "Semi-empirical Stress Analysis of a Brittle Material in a Vicinity of Stress ‘, Concentrator’", International Journal of Applied Mechanics and Materials,Volume 3-4,pp.243-252,September 2005.
- [44] W. K. Wilson , Engineering Fracture Mechanics,2 ,169 (1970).
- [45] M. Benouezdou ; "Stress and energy analysis of toughness measurement for adhesive bonds " , PhD thesis ,CWR4 Cheveland Ohio (1987).
- [46] S. M. Wiederhorn, A. M. Shorb & R. L. Moses; J. Appl. Physics 39, 1569, (1968).

- [47] G. R. Irwin, “Analyses of stresses and strains Near End of crack Traversing a plate”.
Journal. Of Applied Mechanic (1957).
- [48] I. Hammoudi , M. Chabaat; “Crack propagation effect at the interface of a composite beam
”; International Conference on Shells, Plates and Beams (SPB2015) 9-11 September 2015,
Bologna, Italy.