N° d'ordre : 32/2016-C /mt

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

Doctorat 3ème cycle (LMD)

En mathématique

Option : Recherche opérationnelle et mathématique discrète

Présentée par

Assia Fettouma TEBTOUB

Thème

Aspects combinatoires liés à la monotonie des suites classiques

Soutenu publiquement le 31 Mai 2016, devant le jury composé de :

Mohand Ouamar HERNANE	Prof	USTHB	Président
Hacène BELBACHIR	Prof	USTHB	Directeur de thèse
Abdelkader BOUYAKOUB	Profr	U. d'Oran	Examinateur
Jean-Gabriel LUQUE	Prof	U. Rouen	Examinateur
István MEZŐ	Prof	U. Nanjing/Chine	Examinateur
Miloud MIHOUBI	Prof	USTHB	Examinateur
Jean-Christophe NOVELLI	Prof	U. Paris Est	Examinateur
Laszlo SZALAY	Prof	U. Hongrie	Examinateur

À mon grand-père,

mes parents et,

mon mari

Remerciements

C'est avec beaucoup d'émotion que je tiens à remercier les personnes qui jouent un rôle très important dans ma vie personnelle et académique.

Je ne peux cesser de remercier mes parents pour leur soutien et leur amour. Ils n'ont jamais douté de moi, leur présence m'a permis d'aller chercher au fond de moi-même, cette force nécessaire pour atteindre mon objectif. **Terminer ma thèse**.
Je remercie mon mari pour son encouragement, sa compréhension, sa patiente et surtout d'avoir cru en moi.
Je tiens à remercier mes soeurs, mon frère, ma fille, mes grands-mères, mes oncles et tantes, ma belle-famille et tata Sylvie pour leur soutien tout au long des années de ma thèse. Je leur dis du fond du coeur merci d'être dans ma vie.

Ma gratitude va à mon Directeur de thèse qui a cru en moi et m'a fait confiance. Je le remercie pour ses conseils de chercheur et de père. Je dois beaucoup à sa patience, à ses encouragements et à son soutien. Mille mercis Professeur BELBACHIR.

Je remercie le Professeur Mohand Ouamar HERNANE de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

C'est avec humilité que je tiens à remercier les honorables membres du Jury, les Professeurs : Abdelkader BOUYAKOUB, Jean-Gabriel LUQUE, István MEZŐ, Miloud MIHOUBI, Jean-Christophe NOVELLI et Laszlo SZALAY.

Je remercie beaucoup le Professeur Jean-Christophe NOVELLI pour son acceuil au sein de son équipe de combinatoire algébrique à l'université de Marnes la Vallée. J'ai vraiment apprécié son cours et sa manière de le rendre accessible. Le séminaire du Vendredi matin m'a permis de scruter d'autres horizons avec de nouveaux chercheurs. Je remercie aussi tous les membres de l'équipe et surtout le Professeur Matthieu JOSUAT-VERGES pour la lecture de mes articles et ses pertinentes remarques ainsi que Zakaria CHEMLI avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer.

Je remercie le Professeur Jean-Gabriel LUQUE de m'avoir donné l'occasion d'assister à son cours à l'université de Rouen.
Mes remerciments vont également aux Professeurs István MEZŐ, Miloud MIHOUBI et

Laszlo SZALAY pour leurs conseils, leurs encouragements et leurs gentillesses.

L'amour des mathématiques m'a accompagné depuis mon jeune age, cet amour que j'ai hérité de mon oncle le Professeur Bilal CHANANE. Je le dois aussi à mes Professeurs de collège, lycée, université et plus particulièrement à Khaled BELKACIMI, Fariza DEBIANE, Lila HADJEDJ, Hacène TRIFI, Mohamed YAGOUNI et bien sûr Hacène BELBACHIR. Je remercie aussi mes professeurs d'Anglais Djamel BENFODHIL et Halima CHANANE.

Je remercie tous les membres de notre équipe "CATI" du laboratoire RECITS, je pense en particulier à Amine BELKHIR et Imad-eddine BOUSBAA pour leur disponibilité, leur aide et leur conseils, et à Assia MEDJEREDDINE et Imene BENRABIA pour les bons moments qu'on a passé ensemble. Je remercie tous les enseignants, chercheurs et personnels de la faculté des mathématiques de Blida et de l'USTHB, Alger.

Je ne peux terminer mes remerciments sans citer mes amis qui représentent une force pour moi, je dois beaucoup et particulièrement à ma très chère Zineb BADAOUI.

Merci à tous.

Résumé

Cette thèse s'inscrit en combinatoire énumérative et porte sur l'étude de la monotonie, plus précisément de l'unimodalité des suites parcourant les transversales de triangles arithmétiques classiques comme ceux de Pascal, de Lucas, de Stirling de première et seconde espèce, de Lah, d'Euler et d'autres.

Dans un premier temps, nous étudions les suites liées aux transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce, nous donnons leur interprétation combinatoire, leur relation de récurrence, leur fonction génératrice ainsi qu'une forme explicite. Nous établissons par la suite leur unimodalité en passant par la log-concavité. Nous généralisons, en outre, nos résultats aux suites parcourant d'autres directions du dit triangle.

Dans un second temps, nous établissons la log-concavité et l'unimodalité des lignes du triangle de Stirling 3-associés de seconde espèce, le cas des nombres de Stirling 2-associés de seconde espèce étant résolu par Bóna et Mező.

Enfin, nous donnons des interprétations combinatoires aux suites parcourant des directions dans les triangles issus des nombres de Lah, des nombres de Stirling de première espèce et des nombres Eulériens. Nous donnons aussi les relations de récurrences et nous établissons l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales du triangle des nombres de Lah.

Abstract

This thesis comes within the scope of enumerative combinatorics and studies problems of monotony, specifically unimodality of sequences lying over diagonal rays in classical arithmetical triangles as those of Pascal, Lucas, Stirling, Lah and Euler triangles.

We first focus on sequences lying over principal diagonal rays of second kind's Stirling triangle, we give their recurrence relation, their generating function and their explicit formula. We also establish their unimodality. We generalize our results to sequences lying over other directions in second kind's Stirling triangle.

Secondly, we establish the log-concavity and the unimodality of lines of the second kind's 3-associated Stirling triangle, the case of 2-associated Stirling numbers of the second kind is solved by Bóna and Mezo.

Finally, we give combinatorial interpretations to some sequences lying overs some directions in Lah's triangle, first kind's Stirling triangle and Eulerian's triangle. We give further their recurrence relations and we establish the unimodality of sequences lying over principal diagonal rays of Lah's triangle.

Keywords : Enumerative Combinatorics ; Stirling numbers ; Lah numbers ; Eulerian numbers ; Unimodality ; Log-concavity ; Polynomials with real roots.

Notations

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels ;
$[n]$	l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$;
$:=$	égalité par définition (affectation) ;
$\bigcup$	union des ensembles ;
$\delta_{i,j}$	delta de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon ;
$\lfloor x \rfloor$	partie entière inférieure de x ;
$\lceil x \rceil$	partie entière supérieure de x ;
$x^{\overline{n}}$	factorielle ascendante : $x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\bar{0}} = 1$;
$x^{\underline{n}}$	factorielle descendante : $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\bar{0}} = 1$;
$a \equiv b[c]$	a congru à b modulo c ;
$\binom{n}{k}$	coefficient binomial : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;
$\left[{n \atop k}\right]$	nombres de Stirling de première espèce ;
$\left[{n \atop k}\right]^{(s)}$	nombres de Stirling s-associés de première espèce ;
$\left\{{n \atop k}\right\}$	nombres de Stirling de seconde espèce ;
$\left\{{n \atop k}\right\}^{(s)}$	nombres de Stirling s-associés de seconde espèce ;
$\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$	nombres de Lah ;
$\left\langle{n \atop k}\right\rangle$	nombres Eulériens

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

" Combinatorialists love to prove that counting sequences are unimodal"

D. Zeilberger

Ce mémoire de thèse intitulé *Aspects combinatoires liés à la monotonie des suites classiques* s'inscrit en combinatoire énumérative. Cette discipline reste à mis chemin entre les mathématiques et l'informatique théorique.

La combinatoire énumérative est considérée comme l'art de compter des objets tels : les nombres, les partitions, les permutations, *etc.* Elle donne un sens à des suites d'entiers. Elle relie différents objets par des bijections, *etc.* Certains experts situent sa naissance en tant que discipline avec le début de la théorie des probabilités au 17^{me} siècle. De même qu'on situe sa renaissance une deuxième fois, vers la fin du 19^{me} siècle. En Europe, on cite souvent Fibonacci comme l'un des précurseurs du domaine. On retrouve aussi Newton, Pascal et Euler. La combinatoire prend un nouvel essor vers le 20^{me} siècle avec l'arrivée de l'informatique.

Notre travail consiste essentiellement à introduire des triangles arithmétiques par un argument combinatoire, puis élaborer des propriétés combinatoires associées, et établir l'unimodalité des transversales parcourant ces triangles.

Une suite réelle $(a_k)_{k=0}^{n}$ est dite unimodale si elle croît jusqu'à un maximum k_0 et puis elle décroît, l'entier k_0 est appelé mode de la suite (a_k). Plusieurs suites combinatoires sont unimodales et l'exemple le plus connu est celui de la suite du binôme de Newton $\left\{\binom{n}{k}\right\}_k$. L'expression explicite des termes de cette suite étant simple, facilite la preuve de son unimodalité et la détection du mode. Le concept d'unimodalité est facile et évident à assimiler, mais son élaboration n'est pas chose facile, car les suites ne sont pas toujours explicites. Cette question d'unimodalité des suites fait l'objet de divers articles sous différents aspects : preuve d'unimodalité [TZ74, Har67, AE79], détection des modes [Ben96b] ou aussi l'énumération des méthodes pour prouver l'unimodalité [Sta89, Bre89, Bal90].

La question qui se pose : pourquoi on s'intéresse à prouver l'unimodalité d'une suite ?

Savoir si une suite est unimodale ou non, intervient dans de nombreux domaines comme : les probabilités, les statistiques, et plus précisément dans l'informatique. Le mode représente une valeur importante dans la programmation.

Nous nous intéressons dans notre travail à l'étude des suites liées aux différents triangles arithmétiques. Nous nous inspirons des travaux faits sur le triangle le plus connu qui est : le triangle de Pascal. Le premier résultat, sur l'unimodalité des suites liées au triangle de Pascal est dû à Tanny et Zuker [TZ74]. Plusieurs autres travaux traitent la question d'unimodalité des suites liées aux différentes directions de ce triangle. Enfin, vient le travail de Belbachir et Szalay [BS08], où ils montrent que toute suite parcourant les transversales liées à n'importe quelle direction finie dans le triangle de Pascal est unimodale. Par analogie à ces travaux nous proposons d'étudier l'unimodalité des suites liés à d'autres triangles arithmétiques.

L'étude de l'unimodalité d'une suite réelle et finie consiste en deux choses, premièrement prouver que la suite est unimodale, deuxièment localiser son mode. Dans tout notre travail nous répondons principalement à la première question pour les suites liées aux différents triangles arithmétiques.

Les suites considérées dans notre travail satisfont deux propriétés plus fortes que l'unimodalité. La première est la log-concavité. On dit qu'une suite $(a_k)_{k=0}^n$ est log concave si : $a_k^2 > a_{k+1}a_{k-1}$. La deuxième est que ces suites sont générées par des polynômes à zéros réels (négatifs), cette propriété est l'outil principal utilisé tout au long de notre travail. Newton, [Lie68] a établi que si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ possède que des racines réelles (négatives), alors : la suite (a_k) est strictement log-concave et donc unimodale.

L'étude des polynômes à racines réelles (négatives) a fait l'objet de plusieurs travaux, vu ses applications combinatoires. Nous citons comme applications : la localisation des modes des suites unimodales, la distribution normale des coefficients du polynôme, *etc.* Plusieurs chercheurs, intéressés par cette propriété ont pu la prouver pour certaines familles de polynômes sous certaines conditions. Nous citons par exemple : les travaux de Y. Wang et Y-N. Yeh [WY05] qui ont donné une preuve unifiée et simple de l'unimodalité de toutes les suites classiques (binôme de Newton, nombres de Striling, nombres Eulériens, *etc.*), les travaux de L. Liu [Liu12], *etc.* Dans notre travail nous traitons de nouvelles familles de polynômes et nous prouvons qu'ils possèdent des racines réelles.

Pour traiter toutes ces questions, nous partitionnons notre travail en six chapitres.

Chapitre 1 - Préliminaires, nombres de Stirling et unimodalité

Nous commençons par un chapitre préliminaire introduisant les notions dont nous avons besoin. Dans une première partie, nous rappelons la définition des objets qu'on va mani-

puler tout au long de cette thèse, à savoir : les partitions, les listes et les permutations.
Les nombres de Stirling des deux espèces sont largement étudiés. Nous donnons un aperçu de leurs propriétés fondamentales. Pour une approche plus complète nous invitons le lecteur à se reporter aux ouvrages suivants : [Rio12, Cha02, Cha05, Com74].
Sachant que de nombreuses suites de nature combinatoires sont unimodales. Nous en exposons une liste. Comme nous l'avons précisé précédemment, le concept d'unimodalité n'est pas toujours simple à prouver, chose qui a amené les chercheurs à développer plusieurs techniques et méthodes pour le prouver. Nous exposons quelques-unes dans cette partie ainsi que les résultats relatifs aux nombres de Stirling des deux espèces.
Le but de cette thèse est l'étude de l'unimodalité des suites parcourant les transversales de différentes directions dans les triangles arithmétiques. Nous définissons à la fin de ce chapitre, la notion de direction dans un triangle arithmétique.

Chapitre 2 - Unimodalité des suites liées aux transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce

Le premier objet de ce chapitre est d'introduire les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 et donner leur interprétation combinatoire. Ce résultat permet entre autres de donner une interprétation combinatoire aux suites liées aux transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Nous donnons ensuite leur relation de récurrence, leur forme explicite ainsi que leur relation aux fonctions symétriques. Nous donnons également leur fonction génératrice diagonale.
Dans une seconde phase, on se base sur le théorème de Bóna et Mező [BM16] lié aux polynômes à racines réelles négatives et à l'entrelacement des racines de ces polynômes. On définit le polynôme adéquat pour l'appliquer et conclure à la log-concavité, donc à l'unimodalité des suites parcourant les diagonales principales du triangle de Stirling de seconde espèce.
Nous introduisons à la fin de ce chapitre les nombres de Fibonacci Stirling.

Chapitre 3 - Unimodalité des suites liées à quelques directions dans le triangle de Stirling de seconde espèce

Ce chapitre représente une généralisation du précédent chapitre en considérant les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t. On généralise le concept en produisant des propriétés combinatoires analogues : relations de récurrence, fonction génératrice et forme explicite.
Nous étudions ensuite l'unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 3. Ce qui nous permet de conclure quant à la log-concavité et l'unimodalité des

suites parcourant les transversales de direction $(1, 2)$ du triangle de Stirling de seconde espèce classique. Nous suggérons que les transversales de direction $(1, \alpha)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce sont log-concaves et donc unimodales, nous exposons aussi les limites de notre preuve.
La fin de ce chapitre, dans la continuité du précédent, on introduit les nombres t-Fibonacci-Stirling, une généralisation naturelle des nombres de Fibonacci-Stirling.

Chapitre 4 - Unimodalité des nombres de Stirling 3-associés de seconde espèce

Dans ce chapitre, on répond à une question posée par Bóna et Mező dans [BM16], sur la log-concavité des suites issues des nombres de Stirling s-associés de seconde espèce. Le cas s égal à 2 étant résolu par les auteurs, nous proposons d'établir la log-concavité et l'unimodalité du cas où s est égal à 3, en prouvant que le polynôme qui génère cette suite possède que des zéros réels.

Chapitre 5 - Unimodalité des suites liées aux transversales principales du triangle des nombres de Lah

La première partie de ce chapitre s'intèresse aux suites liées aux directions principales du triangle des nombres de Lah. Introduits sous le nom de nombres de Lah associés avec succession d'ordre 2. Nous donnons une nouvelle interprétation combinatoire à ces suites. On s'intèresse aussi aux différentes formules de récurrences vérifiées par les nombres de Lah associés avec succession d'ordre 2. Nous établissons en seconde partie leur unimodalité et par conséquent celle des suites parcourant les transversales principales du triangle des nombres de Lah.
Nous verrons enfin qu'il est possible de généraliser ces résultats pour n'importe quelle suite, parcourant les transversales de direction $(1, \alpha)$ dans le triangle des nombres de Lah, sauf le résultat d'unimodalité qui reste encore a faire. Nous terminons ce chapitre par introduire les nombre t-Fibonacci-Lah.

Chapitre 6 - Suites liées aux transversales principales du triangle de Stirling de première espèce

Nous proposons dans ce chapitre, une interprétation combinatoire des suites qui parcourent les transversales principales du triangle de Stirling de première espèce ainsi que leur relation de récurrence. Nous généralisons ensuite ce résultat pour toutes les directions $(1, \alpha)$. Nous définissons à la fin de ce chapitre les nombres t-Fibonacci-Stirling de première espèce.

Chapitre 7- Suites liées aux transversales principales du triangle des nombres Eulériens

Nous terminons cette thèse par une interprétation combinatoire des suites qui parcourent les transversales principales du triangle des nombres Eulériens ainsi que leur relation de récurrence.

Listes des publications soumises et/ou publiées :

— **A. F. Tebtoub** et H. Belbachir. Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, nombres de Fibonacci-Stirling et unimodalité. C. R. Moth. Acod. Sci. Paris 353 (2015), no.9,767-771.

— **A. F. Tebtoub** et H. Belbachir. The t-successive associated Stirling numbers, t-Fibonacci-Stirling numbers and unimodality. Soumis.

— **A. F. Tebtoub** et H. Belbachir. Unimodality of the 3-associated Stirling numbers of second kind. Soumis.

— **A. F. Tebtoub** et H. Belbachir. Log-concavity of principal diagonal rays in the regular Lah triangle. Soumis.

— **A. F. Tebtoub** et H. Belbachir. Diagonal rays in the first kind's Stirling triangle. Soumis

— **A. F. Tebtoub**, H. Belbachir et Z. Chemli. Log-concavity of principal diagonal rays in the Eulerian triangle. En cours de rédaction.

1

Préliminaires, nombres de Stirling et unimodalité

Plan du chapitre

1.1 Introduction

Nous commençons ce mémoire par ce chapitre dans lequel on présente quelques notions de base de la combinatoire énumérative. Nous définissons par la suite les nombres de Stirling des deux espèces. Nous donnons leurs relations de récurrences, leurs fonctions génératrices, ainsi que leurs principales propriétés. Nous donnons ensuite le concept d'unimodalité qui est le thème principal de notre thèse. Nous exposons quelques techniques pour prouver cette propriété importante. Nous présentons aussi les travaux réalisés concernant l'unimodalité des nombres de Stirling des deux espèces. Nous exposons à la fin de ce chapitre, la notion de direction dans les triangles arithmétiques.

1.2 Partitions et permutations

Les notions de partitions, permutations et combinaisons sont les fondamentaux de la combinatoire énumérative. Ces derniers ont fait l'objet de plusieurs recherches durant des décennies.
Les permiers travaux sur les partitions d'ensembles sont dus à Saka (1782). Ce n'est qu'après une centaine d'années que le vrai intérêt envers cet objet combinatoire a émergé. Entre 1877 et 1974, les chercheurs se focalisent principalement sur les nombres de Stirling et les nombres de Bell, leurs relations de récurrences, leurs formes explicites, leurs généralisations ainsi que leurs comportements, *etc.* Plus tard les recherches trouvent des directions et des intérêts plus profonds aux partitions d'ensembles comme : les partitions d'ensembles sous certaines conditions, l'énumération asymptotiques, *etc.*
Pour plus de détails sur les partitions d'ensembles voir [Man12].

Définition 1. *Soient $n, k \in \mathbb{N}$, tel que $k \leq n$. Soit $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, où $B_i \subseteq [n]$, pour tout $i \in [k]$, tel que les B_i sont non vides et deux à deux disjoints, et que $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = [n]$. Alors on dit que B est* ***une partition*** *de l'ensemble $[n]$ en k blocs.*

Il existe plusieurs représentations des partitions d'ensemble. Dans ce qui suit nous proposons de les présenter sous forme séquentielle, (voir [Man12]).

Exemple 2. Les partitions de l'ensemble $[3]$ sont : $1,2,3$; $1/2,3$; $1,2/3$; $1,3/2$; $1/2/3$.

Une partition minie d'un ordre complet sur ses parts est appelée : **une liste**.
Les partitions d'ensembles en liste est aussi appelée : **permutitions**.

Exemple 3. Les partitions en listes de l'ensemble $[2]$ sont : $1,2$; $2,1$; $1/2$.

Une permutation est un objet simple et fondamental en combinatoire. Ce concept est connu depuis longtemps mais ce n'est qu'au 19^{me} siècle qu'il prend de l'ampleur avec la théorie des groupes introduite par Galois. Beaucoup de recherches se sont approfondies depuis. Pour plus de détails sur les permutations voir [Rio12, Bón12, Sta86].

Définition 4. ***Une permutation*** *p d'un ensemble fini E est une bijection de E dans E.*
Une n-permutation est une bijection d'un ensemble fini de cardinal n dans lui même.

Exemple 5. *Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. $p = 3214$ est une 4-permutation de E.*

Définition 6. *Soit $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ une permutation. On dit que i est une montée de p (respectivement une descente de p), si $p_i < p_{i+1}$ (respectivement si $p_i > p_{i+1}$).*

Exemple 7. *Soit $p = 3412576$. Alors $1, 3, 4$ et 5 sont des montées de p et 2 et 6 sont des descentes de p.*

Les permutations peuvent être écrites de différentes manières, dans le Chapitre 6, nous utilisons la notation par cycles.
La permutation $(215)(43)$ signifie que 2 est remplacé par 1, 1 par 5, 5 par 2 et 4 par 3, 3 par 4. Chaqu'une des parts séparée est appelé : **un cycle**.
Pour plus de détails sur les permutations et les cycles, nous invitons le lecteur à consulter le livre de Riordan [Rio12], où il consacre tout un chapitre sur les permutations et les cycles.

1.3 Nombres de Stirling

Les nombres de Stirling de première et de seconde espèces introduisent par James Stirling dans son ouvrage *Methodus Differentialis*, [Sti64]. Ils représentent respectivement les coefficients à appliquer aux puissances ordinaires pour obtenir les puissances factorielles, et aux puissances factorielles pour obtenir les puissances ordinaires.
Ces nombres, sous différentes appellations intéressent plusieurs mathématiciens dans le 18^{me} et 19^{me} siècles. Ch. Jordan dans [Jor65], donne une présentation approfondie de ces nombres dans son ouvrage sur les différences finies. L. Lagrange s'intéresse aux relations de récurrence et aux propriétés théoriques des nombres de Stirling de première espèce, ensuite, P. S. Laplace et A. Cayley fournissent plusieurs approximations de ces nombres. A. Cauchy, N. Nielsen et d'autres étudièrent plus profondément les nombres des deux espèces.
On adopte pour ce qui suit les notations utilisées par Graham, Knuth and Patashnik [GKP89] pour désigner les nombres de Stirling des deux espèces.

Définition 8. *Les nombres de Stirling de première espèce, notés $\left[{n \atop k}\right]$, comptent le nombre des n-permutations à k cycles.*
Ils vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \left[{n \atop k}\right] &= \delta_{0,n} && \textit{si } k = 0, \\ \left[{n \atop k}\right] &= (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right] && \textit{si } k > 0. \end{aligned}$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce, notés $\left\{{n \atop k}\right\}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k sous-ensembles non vides. Ils sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \left\{{n \atop k}\right\} &= \delta_{0,n} && \textit{si } k = 0, \\ \left\{{n \atop k}\right\} &= k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} && \textit{si } k > 0. \end{aligned}$$

Exemple 9.

— $\left[{3 \atop 1}\right] = 2$, *en effet on a deux* 2*-permutation ayant* 1 *cycle, les perumations sont les suivantes : (123) et (132).*
— $\left\{{3 \atop 2}\right\} = 3$, *en effet on trois partitions de l'ensemble* $[3]$ *en* 2 *blocs, les partitions sont les suivantes :* 1, 2/3 ; 1, 3/2 ; 2, 3/1.

1.3.1 Valeurs particulières

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$, $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$, $\left\{{n \atop 1}\right\} = 1$, $\left\{{n \atop 2}\right\} = 2^{n-1} - 1$, $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$.

1.3.2 Fonctions génératrices

On ne connaît pas de forme close (simple) de fonction génératrice ordinaire pour la suite des nombres de Stirling de première espèce.
La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k (\ln(1-x))^k}{k!}.$$

La fonction génératrice mixte est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] \frac{x^n}{n!} z^k = (1-x)^{-z}.$$

La fonction génératrice ordinaire des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n\geq k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

La fonction génératrice exponentielle est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k.$$

La fonction génératrice factorielle des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = x^n.$$

où : $x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$

1.3.3 Formes explicites

Les nombres de Stirling de première espèce ont la forme explicite suivante :

$$\left[{n \atop k} \right] = \sum_{0\leq j\leq h\leq n-k} (-1)^{j+h} \binom{h}{j} \binom{n-1+h}{n-k+h} \binom{2n-k}{n-k-h} \frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!}.$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce satisfont la forme explicite :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} \binom{k}{p} p^n.$$

Pour plus de propriétés et de détails sur les nombres de Stirling des deux espèces ainsi que leurs généralisations, voir [Rio12, Cha02, Cha05, Com74].

1.4 L'unimodalité

Les suites log-concaves et unimodales jouent un rôle de plus en plus important dans la combinatoire, les probabilités, les statistiques, l'optimisation, l'économétrie et d'autres domaines des mathématiques appliquées, voir [Sta89, Bre89].
Un grand nombre de suites sont log-concaves ou à défaut unimodales. Ces deux propriétés sont difficiles à démontrer et non conservées par les transformations linéaires en général.

1.4.1 Suites unimodales

Dans tout ce qui suit, toutes les suites sont finies et positives, (les définitions restent vraies dans le cas infini).

Définition 10. *Soit $(a_k)_{k=0}^n$ une suite finie réelle positive. On dit qu'elle est unimodale s'il existe deux entiers*

$$k_1, k_2 \ (k_1 \leq k_2)$$

tel que la suite a_k est croissante pour $0 \leq k \leq k_1$, constante pour $k_1 \leq k \leq k_2$, décroissante pour $k_2 \leq k \leq n$.
Les entiers l, $k_1 \leq l \leq k_2$ sont appelés les modes de la suite a_k.
Si $k_1 = k_2$ on dit que (a_k) a un pic sinon on dit qu'elle a un plateau à $(k_2 - k_1 + 1)$ éléments.

Pour plus de détails sur le calcul des modes, voir [Dar64].
Quelques exemples des suites unimodales

1. La suite des coefficients du binôme de Newton $\binom{n}{k}$.
2. La suite liée aux nombres de Fibonacci $\left(\binom{n-k}{k}\right)_k$, [TZ74].
3. La suite liée aux nombres de Lucas $\left(\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}\right)_k$, [Ben03, BB06a].
4. La suite liée aux nombres de Pell et sa suite compagnon $\left(2^{n-2k}\binom{n-k}{k}\right)_k$, $\left(2^{n-2k}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}\right)_k$, [BB11].
5. Les suites parcourant toute transversale du triangle de Pascal $\left(\binom{n-\alpha k}{u+\beta k}\right)_k$, [BS08].
6. Les suites parcourant les transversales de la Pyramide de Pascal, [BS11].
7. La suite des coefficients q-binomiaux, [But90].
8. La suite des coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^n (1 + x^k)$, [Hug77].
9. Les suites $\sum_{n \leq x, \omega(n)=k} \frac{1}{n}$, $\sum_{n \leq x, \omega(n)=k} \frac{\mu(n)^2}{n}$ et $\sum_{n \leq x, \Omega(n)=k} \frac{1}{n}$, sont unimodales en k, pour x assez grand, [Erd48].
10. Les suites des nombres de Stirling de première et seconde espèce, [WY05].
11. Les suites des nombres de Stirling de première et seconde espèce associés, [Kur72].
12. La suite des nombres r-Lah $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r\right)_k$,[NR15].
13. La suite des nombres de Lah associés, [AE79].
14. La suite des nombre Eulériens, [WY05].
15. La suite des nombres de Whitney, [Ben99].
16. La suite des nombres de Holiday de première et seconde espèce, [Szé87].
17. *etc.*

1.4.2 Quelques méthodes pour prouver l'unimodalité des suites

La mise au point de méthodes permettant de prouver l'unimodalité ont fait l'objet de nombreux travaux. Citons à titre d'exemple : M. Balazard [Bal90], R. Stanley [Sta89] et F. Brenti [Bre89]. Nous allons dans cette partie en décrire quelques unes.

1. **La log-concavité**

   Définition 11. *La suite $(a_k)_{k=0}^{n}$ est dite log-concave (LC en abrégé), si pour $k = 2, \dots, n-1$, on a : $a_k^2 \geq a_{k+1}a_{k-1}$.*
   Elle est strictement log-concave (SLC en abrégé) si l'inégalité est stricte.
   Ennonçons maintenant le théorème classique suivant [Wil13] :
   Proposition 12. *Une suite réelle log-concave est, ou monotone ou unimodale ; de plus si, dans ce dernier cas, elle est strictement log-concave, alors elle a au plus deux modes consécutifs.*

   Démonstration. Soit a_k une suite réelle positive log-concave :
   $$a_k^2 \geq a_{k+1}a_{k-1}, \;\; k = 1, \dots, n-1.$$
   Considérons la suite $u_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = 1, \dots, n-1$, qui est décroissante.
   Si $u_0 \leq 1$, la suite a_k est décroissante.
   Si $u_{n-1} \geq 1$, alors elle est croissante.
   Si $u_0 \geq 1$ et $u_{n-1} \leq 1$ alors la suite est unimodale.
   Dans ce dernier cas, si a_k est strictement log-concave, alors on a au plus un i pour lequel $u_i = 1$, ce qui donne un plateau à deux éléments. □

2. **Polynôme à racines réelles et suites de fréquence de Pólya**

   Une des méthodes classiques pour attaquer le problème d'unimodalité est le théorème suivant dû à Newton [Lie68].
   Théorème 13. *Si le polynôme $a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ admet que des racines réelles négatives, alors*
   $$a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}\frac{k}{k-1}\frac{n-k+1}{n-k}, \;\; pour \;\; k = 2, \dots, n-1.$$
   L'inégalité de Newton implique la log-concavité stricte, voir Hammersley [Ham51] et Erdös [Erd53] .
   Darroch, dans [Dar64], prouve que si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ possède seulement des zéros réels, alors la suite unimodale $a_0, a_1, \dots, a_n$ a au plus deux modes consécutifs et que chaque mode satisfait l'inégalité suivante :
   $$\left\lfloor \frac{P'(1)}{P(1)} \right\rfloor \leq m \leq \left\lceil \frac{P'(1)}{P(1)} \right\rceil. \tag{1.1}$$

Ce résultat a été repris par Benoumhani dans [Ben03].

Les suites associées à ces polynômes ne sont pas seulement unimodales, mais elles vérifient une propriété plus forte qui est la fréquence de Pólya. Cette propriété relève de la théorie de la positivité totale.

Définition 14. *Soit $A = (a_{ij})_{i,j\geq 0}$ une matrice infinie, on dit que A est **totalement positive** (TP, en abrégé) si tout ses mineurs ont des déterminants positifs. Une suite infinie $a_0, a_1, \ldots$ à termes positifs est dite suite **de fréquence de Pólya** (PF, en abrégé) si la matrice $(a_{i-j})_{i,j\geq 0}$ est une matrice TP (où $a_k = 0$ pour $k < 0$). Une suite finie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ est PF si la suite infinie $a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots$ est PF.*

Par définition une suite PF est nécessairement log-concave. Pour plus de détails sur la TP ou PF, voir [WY05, Kar68].

Théorème 15. *(**Aissen-Schoenberg-Whitney** [ASW52])*
Une suite finie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ est PF si et seulement si $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ possède seulement des zéros réels.

Brenti dans [Bre89], est le premier à avoir utilisé cette technique pour prouver la log-concavité et l'unimodalité des suites.

Plusieurs suites en combinatoire connues comme log-concaves et unimodales, sont des suites PF et à polynômes possédant seulement des racines réelles, pour cette raison on s'intéresse à ces deux propriétés même si notre but est l'unimodalité.

3. **Méthode analytique** L'idée est d'obtenir une expression analytique pour chaque terme a_k de la suite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et par la suite utiliser des techniques analytiques afin d'estimer suffisament a_k pour prouver l'unimodalité. Le prototype de cette méthode est un résulat de Szekeres [Bre89] concernant les nombres de Stirling de seconde espèce.

1.5 Unimodalité des nombres de Stirling

L'étude d'unimodalité des triangles de Stirling des deux espèces a fait l'objet de plusieurs travaux, nous citons dans ce qui suit les théorèmes principaux concernant ce concept.

Théorème 16. *(Hammersley [Ham51], Erdös [Erd53],). La suite des nombres de Stirling de première espèce $\left(\left[{n \atop k}\right]\right)_k$ est strictement log-concave, donc unimodale .*

Erdös a prouvé que le mode est un pic. Le mode $K_n^{(1)}$, est donné par les bornes suivantes :

$$\left[\ln n - \frac{1}{2}\right] < K_n^{(1)} < [\ln n]$$

Théorème 17. *(Canfield et Pomerance [CP02], Dobson [Dob68], Lieb [Lie68], Mullin [Mul69]). La suite des nombres de Stirling de seconde espèce* $\left(\left\{ n \atop k \right\}\right)_k$ *est strictement log-concave, donc unimodale.*

Canfield dans [Can78], montre que la suite $\left(\left\{ n \atop k \right\}\right)_k$ a au plus deux modes consécutifs $K_n^{(2)}$ et $K_n^{(2)} + 1$, où $K_n^{(2)} \approx \frac{n}{\ln n}$.
Engel dans [Eng94], conjecture que τ_n est concave, $2\tau_n^2 \geq \tau_{n-1}^2 + \tau_{n+1}^2$, pour $n \geq 2$.
Griggs, vérifie la conjecture pour $2 \leq n \leq 1200$.
Canfield dans [Can95], prouve la conjecture pour n suffisament grand.

1.6 Directions dans un triangle arithmétique

Dans cette partie nous définissons la notion de direction dans les triangles arithmétiques.

Définition 18. *Soit* $\{a(n,k)\}_{0\leq k\leq n}$ *un triangle d'entiers positifs alors :*
La suite $\{a(n-qk, p+rk)\}_k$*, est la suite d'entiers parcourant pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, la transversale de direction* (r,q) *initialisé à la position* p*.*
Avec : $r+q \geq 0$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $q \in \mathbb{Z}$ *et* $0 \leq p \leq r$*.*

Exemple 19. *Prenons l'exemple du triangle de Pascal, la suite* $\left\{\binom{n-qk}{p+rk}\right\}_k$*, est la suite d'entiers parcourant pour* $n \in \mathbb{N}$*, la transversale de direction* (r,q) *initalisée à la position* p*.*

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5
6	1	6	15	20	15

FIGURE 1.1 – Illustation de la direction $(r,q)=(1,1)$ dans le triangle de Pascal avec $p=0$

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5
6	1	6	15	20	15

FIGURE 1.2 – Illustation de la direction $(r, q) = (1, 2)$ dans le triangle de Pascal avec $p = 0$

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5
6	1	6	15	20	15

FIGURE 1.3 – Illustation de la direction $(r, q) = (1, 2)$ dans le triangle de Pascal avec $p = 1$

2

Unimodalité des suites liées aux transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce

Plan du chapitre

2.1 Introduction

Le premier résultat, sur l'unimodalité dans le triangle de Pascal autre que celui des coefficients binomiaux est dû à Tanny et Zuker [TZ74]. Ces derniers ont prouvé la log-concavité, et donc l'unimodalité, de la suite $\left\{\binom{n-k}{k}\right\}_k$, avec au plus deux modes consécutifs. Ils ont aussi précisé le point où le maximum est atteint. Ils ont prouvé qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles cette suite possède un plateau à deux points.

Par analogie à ces travaux, nous nous proposons d'établir l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Harper dans [Har67] montre que $\sum_k {n \brace k} x^k$ possède que des racines réelles négatives et distinctes, il en déduit l'unimodalité. Canfield [Can78] établit autrement l'unimodalité de la suite $\left({n \brace k}\right)_k$ et prouve qu'elle admet au plus deux modes consécutifs. Plusieurs autres travaux ont eu comme objet l'unimodalité des lignes du triangle de Stirling de seconde espèce (voir Canfield et Pomerance [CP02], Dobson [Dob68], Lieb [Lie68], Mullin [Mul69]). Par contre la question d'unimodalité des suites liées aux différentes directions des transversales de ce triangle n'est, à notre connaissance pas traitée. On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude du comportement de la suite $\left({n-k \brace k}\right)_k$, c'est à dire la suite qui parcourt les transversales de direction $(1,1)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce.

Dans le chapitre précédant nous avons énoncé quelques approches pour prouver l'unimodalité d'une suite. Dans notre cas, nous considérons la transformation qui envoie les diagonales principales du triangle de Stirling classique comme lignes d'un autre triangle arithmétique.

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1
5	0	1	15	25	10
6	0	1	31	90	65

FIGURE 2.1 – Direction $(1,1)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce.

2.2 Interprétation combinatoire et relation de récurrence

Nous donnons une interprétation combinatoire des nombres issus de ce nouveau triangle, ces nombres sont appelés **les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre** 2, commençons cette partie par les introduire.

Définition 20. *Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2*, notés par* $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$*, comptent le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en k parts non vides, tel que chaque part contient au moins deux nombres consécutifs et que le nombre n satisfait l'une des conditions suivantes : soit il forme avec son prédécesseur une part en soi, soit il appartient à une part qui contient au préalable deux nombres consécutifs.*

Nous donnons quelques exemples pour clarifier et simplifier notre interprétation combinatoire.

Exemple 21.

1. *Pour* $n = 5$*,* $\left\{ {5 \atop 2} \right\}^{[2]}$ *compte le nombre de partitions de* $[5]$ *en* 2 *parts et tel que une des deux conditions soit satisfaite, en effet on a les partitions suivantes :* $1, 2, 3/4, 5; 1, 2/3, 4, 5;$ $1, 2, 5/3, 4$.
   La partition $2, 3/1, 4, 5$ *ne peut être considérée, car le* 5 *ème élément, n'est pas dans une part qui contient au préalable deux éléments consécutifs.*

2. *Pour* $n = 6$*,* $\left\{ {6 \atop 2} \right\}^{[2]} = 7$*, on a les partitions* $1, 2, 3, 4/5, 6; 1, 2, 3, 6/4, 5; 1, 2, 3/4, 5, 6;$ $1, 2, 6/3, 4, 5; 1, 2/3, 4, 5, 6; 1, 2, 5, 6/3, 4; 1, 2, 5/3, 4, 6$.
   $\left\{ {6 \atop 3} \right\}^{[2]} = 1$*, il existe une seule façon de partitionner un ensemble de six éléments en trois parts et tel que chaque part contient au moins deux éléments consécutifs et tel que une des deux conditions soit satisfaite* $1, 2/3, 4/5, 6$.

Remarque 22. *Les lignes du triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 *sont exactement les transversales de direction* $(1, 1)$ *du triangle de Stirling de seconde espèce.*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = \left\{ {n-k \atop k} \right\}. \tag{2.1}$$

Sur OEIS (A136011) [So03], une deuxième interprétation combinatoire est donnée aux suites parcourant les transversales de direction $(1, 1)$ du triangle de Stirling de seconde esèpce.

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	0											
2	0	1										
3	0	1										
4	0	1	1									
5	0	1	3									
6	0	1	7	1								
7	0	1	15	6								
8	0	1	31	25	1							
9	0	1	63	90	10							
10	0	1	127	301	65	1						
11	0	1	255	966	350	15						
12	0	1	511	3025	1701	140	1					
13	0	1	1023	9330	7700	1050	21					
14	0	1	2047	28501	34105	6951	266	1				
15	0	1	4095	86526	145750	42525	2646	28				
16	0	1	8191	261625	611501	246730	22827	462	1			
17	0	1	16383	788970	2532530	1379400	179487	5880	36			
18	0	1	32767	2375101	10391745	7508501	1323652	63987	750	1		
19	0	1	65535	7141686	42355950	40075035	9321312	627396	11880	45		
20	0	1	131071	21457825	171798901	210766920	63436373	5715424	159027	1155	1	
21	0	1	262143	64439010	694337290	1096190550	420693273	49329280	1899612	22275	55	
22	0	1	524287	193448101	2798806985	5652751651	2734926558	408741333	20912320	359502	1705	1

TABLE 2.1 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2.

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 vérifient la relation de récurrence suivante :

Théorème 23. *Pour $n \geq 2k$, on a*

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}^{[2]} = k\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-1}{k}^{[2]} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2}{k-1}^{[2]}, \tag{2.2}$$

où $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{0}{0}^{[2]} = 1$, $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{n-1}^{[2]} = 0$ *et* $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{0}^{[2]} = 0$ $(n \geq 1)$.

Démonstration. Il suffit de raisonner sur la part qui contient l'élément n. Soit cet élément est seul avec son prédécesseur dans une part alors on a $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2}{k-1}^{[2]}$ façons de partitionner les $n-2$ éléments restants avec les conditions citées. Soit l'élément n n'est pas seul avec son prédécesseur, on a $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-1}{k}^{[2]}$ possibilités de partitionner les $n-1$ éléments restants en k parts tel que chaque part contient au moins deux éléments consécutifs et tel que l'une des conditions soit satisfaite, avec k possibilités de placer l'élément n dans chacune des parts constituées. □

Remarque 24. *On a pour tout $n \geq 4$, $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{2}^{[2]} = 2^{n-3} - 1$.*

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, vérifient la relation de récurrence verticale suivante.

Théorème 25. *Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2k$. On a*

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}^{[2]} = \sum_{i=0}^{n-2k} k^i \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-i-2}{k-1}^{[2]}. \tag{2.3}$$

Démonstration. De la relation de récurrence (2.2), on a, pour $n \geq 2k$,

$$\begin{aligned}
\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}^{[2]} &= k\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-1}{k}^{[2]} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2}{k-1}^{[2]}, \\
k\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-1}{k}^{[2]} &= k^2\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2}{k}^{[2]} + k\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2-1}{k-1}^{[2]}, \\
&\vdots \\
k^{n-2k-1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2k+1}{k}^{[2]} &= k^{n-2k}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2k}{k}^{[2]} + k^{n-2k-1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1+2(k-1)}{k-1}^{[2]}, \\
k^{n-2k}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2k}{k}^{[2]} &= k^{n-2k+1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2k-1}{k}^{[2]} + k^{n-2k}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2(k-1)}{k-1}^{[2]}.
\end{aligned}$$

En faisant la somme de toutes les égalitÃ©s, on obtient

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{k}^{[2]} = \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2}{k-1}^{[2]} + k\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-2-1}{k-1}^{[2]} + \cdots + k^{n-2k+1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2k-1}{k}^{[2]} + k^{n-2k}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2(k-1)}{k-1}^{[2]},$$

et à partir des conditions initiales, on a : $k^{n-2k+1}\left\{ {2k-1 \atop k} \right\}^{[2]} = 0$, le résultat est ainsi obtenu. □

2.3 Fonction génératrice

À présent nous allons étudier la fonction génératrice associée aux diagonales de la Table 2.1. Rappelons que la fonction génératrice des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n\geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

Il est donc naturel de considérer la fonction génératrice des transversales de direction $(1,1)$ de ce triangle.

Théorème 26. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$A_k(x) := \sum_{n\geq 2k} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} x^n = \frac{x^{2k}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}, \tag{2.4}$$

avec $A_0(x) = 1$.

Démonstration. A partir de la relation de récurrence (2.2), on a, pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n\geq 2k} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} x^n = \sum_{n\geq 2k} k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[2]} x^n + \sum_{n\geq 2k} \left\{ {n-2 \atop k-1} \right\}^{[2]} x^n,$$

par conséquent

$$A_k(x) = kxA_k(x) + x^2 A_{k-1}(x), \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

d'où

$$A_k(x) = x^2(1-kx)^{-1} A_{k-1}(x), \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

donc

$$\begin{aligned} A_{k-1}(x) &= x^2(1-(k-1)x)^{-1} A_{k-2}(x), \\ A_{k-2}(x) &= x^2(1-(k-2)x)^{-1} A_{k-3}(x), \\ &\vdots \\ A_2(x) &= x^2(1-2x)^{-1} A_1(x), \\ A_1(x) &= x^2(1-x)^{-1} A_0(x). \end{aligned}$$

Et en substituant chaque terme $A_{i-1}(x)$ dans $A_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, on obtient

$$A_k(x) = x^2(1-(k-1)x)^{-1} x^2(1-(k-2)x)^{-1} \cdots x^2(1-x)^{-1} A_0(x).$$

Et à partir des conditions initiales, on a le résultat. □

Corollaire 27. *Expression de la fonction génératrice en terme de factorielle descendante,*

$$\sum_{n\geq 2k} \left\{ n \atop k \right\}^{[2]} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^k (z)_{k+1}}, \tag{2.5}$$

où $(z)_{k+1} = z(z-1)\cdots(z-k)$.

Démonstration. On pose $x = 1/z$ dans (2.4). □

Nous donnons maintenant la fonction génératrice exponentielle et la fonction génératrice double de $\left\{ n+k \atop k \right\}^{[2]}$.

Corollaire 28. *On a les fonctions génératrices suivantes,*

$$\sum_{n\geq k} \left\{ n+k \atop k \right\}^{[2]} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k, \tag{2.6}$$

$$\sum_{n} \sum_{k} \left\{ n+k \atop k \right\}^{[2]} \frac{x^n}{n!} y^k = e^{y(e^x - 1)}. \tag{2.7}$$

Démonstration. On a d'aprés l'équation (38) dans [Bro84, Th. 16],

$$\sum_{n\geq k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^x (e^x - 1)^k,$$

et d'après (2.1) le résultat est obtenu.

De même pour la fonction génératrice double, on a d'aprés l'équation (39) dans [Bro84, Th. 16],

$$\sum_{n} \sum_{k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = e^{y(e^x - 1)},$$

et en vue du lien (2.1) le résultat est obtenu. □

2.4 Forme explicite

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, $\left\{ n \atop k \right\}^{[2]}$, $k = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ satisfont la forme explicite suivante.

Théorème 29. *Pour* $n \geq 2k$, *on a*

$$\left\{ n \atop k \right\}^{[2]} = \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} \binom{k}{p} p^{n-k}. \tag{2.8}$$

Cette formule peut aussi être écrite comme suit :

$$\left\{ n \atop k \right\}^{[2]} = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} 2^{n-(t-1)k} + \binom{k}{3} 3^{n-(t-1)k} + \cdots + (-1)^{(k-1)} \binom{k}{k} k^{n-(t-1)k}.$$

Démonstration. La formule (2.8) satisfait la relation de récurrence (2.2), ainsi la récurrence donne,

$$\begin{aligned}
\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} &= k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[2]} + \left\{ {n-2 \atop k-1} \right\}^{[2]} \\
&= k\frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}\binom{k}{p}p^{n-1-k} + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{(k-p-1)}\binom{k-1}{p}p^{n-1-k} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}\binom{k}{p}p^{n-1-k} - \sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}\binom{k-1}{p}p^{n-1-k}\right) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}p^{n-1-k}\left(\binom{k}{p} - \binom{k-1}{p}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}p^{n-1-k}\binom{k-1}{p-1} \\
&= \sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}p^{n-k}\frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{p}\frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}p^{n-k}\frac{k!}{p!(k-p)!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{(k-p)}p^{n-k}\binom{k}{p},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve, aprés avoir vérifier l'hypothèse de réccurence. □

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$, sont donnés par la somme suivante qui les lient aux fonctions symétriques .

Théorème 30. *Pour $k = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$, on a,*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = \sum 1^{r_1}2^{r_2}\cdots k^{r_k}, \tag{2.9}$$

où la sommation porte sur les r_j entiers naturels, $j = 1, \ldots, k$, avec $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n - 2k$.

Démonstration. En développant chaque terme dans (2.4), et à l'aide de la série géométrique, on trouve

$$\begin{aligned}
A_k(x) &= \sum_{n\geq 2k}\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} x^n \\
&= x^{2k}\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{r_j=0}^{\infty}k^{r_j}x^{r_j}\right) \\
&= \sum_{n\geq 2k}\left(\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n-2k}1^{r_1}2^{r_2}\cdots k^{r_k}\right)x^n.
\end{aligned}$$

Le résultat est obtenu par identification. □

Corollaire 31. *Relation avec les fonctions symétriques*

$$\left\{ {2n+k \atop n} \right\}^{[2]} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} i_1 i_2 \cdots i_k. \tag{2.10}$$

Démonstration. A partir de l'équation (23) du Théorème [Bro84, Th. 8], on a

$$\left\{ {n+k \atop n} \right\} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} i_1 i_2 \cdots i_k.$$

et en vue du lien (2.1) le résultat est obtenu. □

2.5 Unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2

Dans cette section, nous nous inspirons de la preuve de Bóna et Mező [BM16], pour prouver que le polynôme qui génère les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 vérifie le Théorème de Newton. Par conséquent, la suite générée par ces nombres, est log-concave et donc unimodale.

Théorème 32. *Soit* $P_n(x) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\}^{[2]} x^j$*, alors les racines de* $P_n(x)$ *sont réelles, distinctes, et négatives pour tout* $n = 1, 2, \ldots$*.*
De plus, les racines de $P_n(x)$ *et de* $P_{n-1}(x)$ *s'entrelacent de la manière suivante :*
Si $P_n(x)$ *et* $P_{n-1}(x)$ *sont tous les deux de même degré* d *et tels que leurs racines sont,* $0 = x_0 > x_1 > \cdots > x_{d-1}$ *et* $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{d-1} > y_{d-1}.$$

Si $P_n(x)$ *est de degré* $d+1$ *et* $P_{n-1}(x)$ *est de degré* d *et leurs racines sont :* $0 = x_0 > x_1 > \cdots > x_d$ *et* $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{d-1} > y_{d-1} > x_d.$$

Expressions de $P_n(x)$ **pour** $n \leq 6$ **:**
$P_0(x) = 1,$
$P_1(x) = 0,$
$P_2(x) = x,$
$P_3(x) = x,$
$P_4(x) = x + x^2,$
$P_5(x) = x + 3x^2,$
$P_6(x) = x + 7x^2 + x^3.$

Démonstration. La relation de récurrence (2.2) donne

$$P_n(x) = x\left[P'_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)\right]. \tag{2.11}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour les premières valeurs de n.

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il reste vrai à l'ordre n. En premier lieu, considérons le cas où $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ ont le même degré d, ce qui veut dire que n est impair. Soit $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ les racines de $P_{n-1}(x)$.

Etape 1 : Soient 0 et y_1 les deux plus grandes racines de $P_{n-1}(x)$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]y_1, 0[$ tel que $P'_{n-1}(c) = 0$. Comme les coefficients de $P_{n-1}(x)$ sont positifs, $P_{n-1}(x)$ est décroissante sur $]y_1, c[$ et croissante sur $]c, 0[$, ce qui implique que $P_{n-1}(x) < 0$, pour tout $x \in]y_1, 0[$.

Etape 2 : Posons maintenant $x = y_1$ dans (2.11).

— On sait, par hypothèse de récurrence, que les racines de $P_{n-2}(x)$ sont $0 = z_0 > z_1 > \cdots > z_{d-2}$ et s'entrelacent avec celles de $P_{n-1}(x)$ comme suit : $0 > y_1 > z_1 > y_2 > z_2 > \cdots > z_{d-2} > y_{d-1}$.

  D'après l'étape 1, on a $P_{n-2}(x) < 0$, pour tout $x \in]z_1, 0[$, et particulièrement pour $x = y_1$ ce qui implique que $P_{n-2}(y_1) < 0$.

— On sait que $P_{n-1}(x)$ admet d racines réelles négatives donc $P'_{n-1}(x)$ doit avoir $d-1$ racines.

  De plus, par le Théorème de Rolle, il existe une racine de $P'_{n-1}(x)$ entre deux racines consécutives de $P_{n-1}(x)$, donc il existe une racine de $P'_{n-1}(x)$ dans $]y_1, 0[$, et le signe de $P'_{n-1}(y_1)$ est différent de celui de $P'_{n-1}(0)$ donc $P'_{n-1}(0) > 0$, ainsi $P'_{n-1}(y_1) < 0$.

Pour $x = y_1$, on a montré que $y_1\left[P'_{n-1}(y_1) + P_{n-2}(y_1)\right]$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs et par conséquant $P_n(y_1) > 0$.

Or $P_n(x) < 0$ dans l'intervalle $]y_1, 0[$, car $P'_{n-1}(x) > 0$ dans l'intervalle $]y_1, 0[$ d'aprés l'étape 1, et $P_{n-2}(x) < 0$ dans l'intervalle $]y_1, 0[$, car il est négatif dans $]z_1, 0[$ par hypothèse de récurrence, alors $P_n(x)$ a une racine dans l'intervalle $]y_1, 0[$.

Prouvons maintenant que $P_n(x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $P_n(y_i)$ et $P_n(y_{i+1})$ ont des signes différents.

— Il est clair qu'à travers le Théorème de Rolle que $P'_{n-1}(y_{i+1})$ et $P'_{n-1}(y_i)$ ont des signes différents.

— $P_{n-2}(y_{i+1})$ et $P_{n-2}(y_i)$ ont des signes différents, par hypothèse de récurrence.

— D'aprés le Théorème de Rolle, P'_{n-1} change de signe i fois dans l'intervalle $]y_i, 0[$, et par l'hypothèse de récurrence P_{n-2} change son signe $i-1$ fois dans le même intervalle, or il existe un petit voisinage de 0 où $P'_{n-1}(x) > 0$ et $P_{n-2}(x) < 0$, par conséquent $P'_{n-1}(y_i)$ et $P_{n-2}(y_i)$ sont de même signe.

D'aprés (2.11), $P_n(y_i)$ et $P_n(y_{i+1})$ ont des signes différents, ce qui implique que $P_n(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$.

Comme $P_n(x)$ a un nombre impair de racines dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, car il change de signe dans chaque borne de cet intervalle. On sait que le nombre de racines de $P_n(x)$ dépasse au plus, d'une racine celui de $P_{n-1}(x)$, par conséquent $P_n(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, ce qui complète la preuve de ce cas.

Considérons maintenant le cas où $P_n(x)$ est de degré $d+1$ et que $P_{n-1}(x)$ est de degré d, ce qui veut dire que n est pair.

La preuve est la même que celle du premier cas. De plus on sait que la dernière racine de $P_n(x)$ doit être négative. Elle ne peut être dans aucun intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, ce qui implique qu'elle appartient à l'intervalle $]-\infty, y_{d-1}[$, ce qui termine la preuve. □

On déduit les théorème suivants :

Théorème 33. *La suite* $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}\right)_k$ *est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème 13 et le Théorème 32. □

Théorème 34. *La suite* $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}\right)_k$ *est une suite PF.*

Démonstration. D'aprés le Théorème 15 et le Théorème 32. □

Nous terminons cette section par prouver la stricte log-concavité ainsi que l'unimodalité de toute suite parcourant les transversales de direction $(1,1)$ du triangle de Stirling de seconde espèce.

Théorème 35. *La suite* $\left(\left\{ {n-k \atop k} \right\}\right)_k$ *est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème 33 et la relation (2.1). □

2.6 Les nombres de Fibonacci-Stirling

Il est bien établi que les nombres de Fibonacci s'éxpriment comme somme des éléments parcourant la diagonale principale du triangle de Pascal, voir par exemple [BB06b], ceci nous suggère d'introduire les nombres de Fibonacci-Stirling.

Définition 36. *On définit la suite de Fibonacci-Stirling* $(\varphi_n)_n$*, pour tout* $n \geq 2k$*, par* $\varphi_0 = 1$*,* $\varphi_1 = 0$*, et*

$$\varphi_{n+1} := \sum_k \left\{ \begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{2.12}$$

Remarque 37. *La relation entre les nombres de Fibonacci-Stirling et les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 *est représentée par la relation suivante,*

$$\varphi_{n+1} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{[2]}. \tag{2.13}$$

La suite (φ_n) est aussi appelée suite de Bell associée avec succession d'ordre 2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi_n^{(2)}$	1	0	1	1	2	4	9	22	58	164	495	1587	5379

TABLE 2.2 – Quelques valeurs des nombres Fibonacci-Stirling, (Sloane, A171367).

3

Unimodalité des suites liées à quelques directions dans le triangle de Stirling de seconde espèce

Plan du chapitre

3.1 Introduction

On présente dans ce chapitre une généralisation des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 [BT15], ou cas où la succession est d'ordre t, on y présente leurs relations de récurrences, leurs fonctions génératrices, ainsi que leurs forme explicite. Nous établissons par la suite l'unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 3, et par conséquent celle des suites parcourant les transversales de direction $(1,2)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce classique, voir la Figure 3.1.
Par analogie aux travaux de Tanny et Zucker dans [TZ78, TZ76], où ils montrent que pour un α donné la suite $\left(\binom{n-\alpha k}{k}\right)_k$ est unimodale. Nous pensons fortement que toute suite parcourant les transversales de direction $(1,\alpha)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce est unimodale (même log-concave). Nous définissons à la fin de ce chapitre les nombres t-Fibonacci-Stirling.

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1
5	0	1	15	25	10
6	0	1	31	90	65

FIGURE 3.1 – Direction $(1,2)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce.

3.2 Interprétation combinatoire et relations de récurrence

Commençons par introduire les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t.

Définition 38. *Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t, notés par $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k parts (non vides), tel que chaque part contient au moins t nombres consécutifs et tel que le nombre n satisfait l'une des conditions suivantes : soit il forme avec les $t-1$ nombres qui le précède une part en soi, soit il appartient à une part qui contient au préalable t nombres consécutifs.*

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0								
2	0								
3	0	1							
4	0	1							
5	0	1							
6	0	1	1						
7	0	1	3						
8	0	1	7						
9	0	1	15	1					
10	0	1	31	6					
11	0	1	63	25					
12	0	1	127	90	1				
13	0	1	255	301	10				
14	0	1	511	966	65				
15	0	1	1023	3025	350	1			
16	0	1	2047	9330	1701	15			
17	0	1	4095	28501	7770	140			
18	0	1	8191	86526	34105	1050	1		
19	0	1	16383	261625	145750	6951	21		
20	0	1	32767	788970	611501	42525	266		
21	0	1	65535	2375101	2532530	246730	2646	1	
22	0	1	131071	7141686	10391745	1379400	22827	28	
23	0	1	262143	21457825	42355950	7508501	179487	462	
24	0	1	524287	64439010	171798901	40075035	1323652	5880	1
25	0	1	1048575	193448101	694337290	210766920	9321312	36987	36
26	0	1	2097151	580606446	2798806985	1096190550	63436373	627396	750

TABLE 3.1 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 3.

Exemple 39.
Pour $t = 3$: $\left\{{7 \atop 2}\right\}^{[3]} = 3$, *compte le nombre de partitions de* $[7]$ *en* 3 *parts et tel que une des deux conditions soit satisfaite, en effet on a les partitions suivantes :* $1,2,3,4/5,6,7$; $1,2,3/4,5,6,7$; $1,2,3,7/4,5,6$.
La partition $2,3,4/1,5,6,7$ *ne peut être considérée, car le nombre* 7*, n'est pas dans une part qui contient au préalable trois nombres consécutifs.*

La relation de récurrence suivante est satisfaite.

Théorème 40. *Pour* $n \geq tk$*, on a*

$$\left\{{n \atop k}\right\}^{[t]} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\}^{[t]} + \left\{{n-t \atop k-1}\right\}^{[t]}, \tag{3.1}$$

où $\left\{{0 \atop 0}\right\}^{[t]} = 1$, $\left\{{n \atop n-1}\right\}^{[t]} = \left\{{n \atop n-2}\right\}^{(t)} = \cdots = \left\{{n \atop n-t+1}\right\}^{[t]} = 0$ *et* $\left\{{n \atop 0}\right\}^{[t]} = 0$, $(n \geq 1)$.

Démonstration. Il suffit de raisonner sur la part qui contient l'élément n. Soit cet élément est dans une part à t éléments, alors on a $\left\{{n-t \atop k-1}\right\}^{[t]}$ façons de partitionner les $n-t$ élements restants en $k-1$ parts avec les conditions citées. Soit il ne l'est pas, alors on a $\left\{{n-1 \atop k}\right\}^{[t]}$ possibiltés de partitionner $n-1$ éléments en k parts, tel que chaque part contient au moins t éléments consécutifs, tel que l'une des conditions soit satisfaite, et on a k possibilités de placer l'élément n dans chacune des parts constituées. □

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t, vérifient la relation de récurrence verticale suivante :

Théorème 41. *Soit* $n, k \in \mathbb{N}$ *tels que* $n \geq tk$*. On a*

$$\left\{{n \atop k}\right\}^{[t]} = \sum_{i=0}^{n-tk} k^i \left\{{n-i-t \atop k-1}\right\}. \tag{3.2}$$

Démonstration. De la relation de récurrence (3.1), on a, pour $n \geq tk$,

$$\begin{aligned}
\left\{{n \atop k}\right\}^{[t]} &= k\left\{{n-1 \atop k}\right\}^{[t]} + \left\{{n-t \atop k-1}\right\}^{[t]}, \\
k\left\{{n-1 \atop k}\right\}^{[t]} &= k^2\left\{{n-2 \atop k}\right\}^{[t]} + k\left\{{n-t-1 \atop k-1}\right\}^{[t]}, \\
&\vdots \\
k^{n-tk-1}\left\{{tk+1 \atop k}\right\}^{[t]} &= k^{n-tk}\left\{{tk \atop k}\right\}^{[t]} + k^{n-tk-1}\left\{{1+t(k-1) \atop k-1}\right\}^{[t]}, \\
k^{n-tk}\left\{{tk \atop k}\right\}^{[t]} &= k^{n-tk+1}\left\{{tk-1 \atop k}\right\}^{[t]} + k^{n-tk}\left\{{t(k-1) \atop k-1}\right\}^{[t]}.
\end{aligned}$$

En faisant la somme de toutes les équations on obtient :

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} = \left\{ {n-t \atop k-1} \right\}^{[t]} + k\left\{ {n-t-1 \atop k-1} \right\}^{[t]} + \cdots + k^{n-tk+1}\left\{ {tk-1 \atop k} \right\}^{[t]} + k^{n-tk}\left\{ {t(k-1) \atop k-1} \right\}^{[t]},$$

et à partir des conditions initiales, on a : $\left\{ {tk-1 \atop k} \right\}^{[t]} = 0$, ainsi le résultat est obtenu. □

3.3 Fonction génératrice

La fonction génératrice ordinaire des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t est donnée par :

Théorème 42. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$A_k(x) := \sum_{n \geq sk} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} x^n = \frac{x^{tk}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}, \tag{3.3}$$

avec $A_0(x) = 1$.

Démonstration. De la relation de récurrence (3.1), on a, pour $k = 1, 2, \ldots$, et pour t fixé,

$$\sum_{n \geq tk} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} x^n = \sum_{n \geq tk} k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[t]} x^n + \sum_{n \geq tk} \left\{ {n-t \atop k-1} \right\}^{[t]} x^n,$$

par conséquent

$$A_k(x) = kxA_k(x) + x^t A_{k-1}(x), \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

d'où

$$A_k(x) = x^t(1-kx)^{-1}A_{k-1}(x), \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

donc

$$\begin{aligned} A_{k-1}(x) &= x^t(1-(k-1)x)^{-1}A_{k-2}(x), \\ A_{k-2}(x) &= x^t(1-(k-2)x)^{-1}A_{k-3}(x), \\ &\vdots \\ A_2(x) &= x^t(1-2x)^{-1}A_1(x), \\ A_1(x) &= x^t(1-x)^{-1}A_0(x). \end{aligned}$$

En substituant chaque terme $A_{i-1}(x)$ dans $A_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$, on obtient

$$A_k(x) = x^t(1-(k-1)x)^{-1}x^t(1-(k-2)x)^{-1}\cdots x^t(1-x)^{-1}A_0(x).$$

A partir des conditions initiales, le résultat est obtenu. □

3.4 Forme explicite

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t, $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$, $k = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ satisfont la forme explicite suivante.

Théorème 43. *Pour $n \geq tk$, on a*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} = \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} \binom{k}{p} p^{n-(t-1)k}. \tag{3.4}$$

Cette formule peut aussi être écrite comme suit :

$$(-1)^{k-1} k! \left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} 2^{n-(t-1)k} + \binom{k}{3} 3^{n-(t-1)k} + \cdots + (-1)^{(k-1)} \binom{k}{k} k^{n-(t-1)k}.$$

Démonstration. La formule (3.4) satisfait la relation de récurrence (3.1), ainsi la réccurence donne

$$\begin{aligned}
\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} &= k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[t]} + \left\{ {n-t \atop k-1} \right\}^{[t]} \\
&= k \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} \binom{k}{p} p^{n-1-(t-1)k} \\
&\quad + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^{(k-p-1)} \binom{k-1}{p} p^{n-1-(t-1)k} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} \binom{k}{p} p^{n-1-(t-1)k} \\
&\quad - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} \binom{k-1}{p} p^{n-1-(t-1)k} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} p^{n-1-(t-1)k} \left(\binom{k}{p} - \binom{k-1}{p} \right) \right) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} p^{n-1-(t-1)k} \binom{k-1}{p-1} \\
&= \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} p^{n-(t-1)k} \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{p} \frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} &= \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} p^{n-(t-1)k} \frac{k!}{p!(k-p)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{(k-p)} p^{n-(t-1)k} \binom{k}{p},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve, aprés avoir vérifier l'hypothèse de réccurence. □

3.5 Unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 3

Dans cette partie, nous nous proposons de prouver la stricte log-concavité et l'unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 3.
Soit

$$P_n^{(t)}(x) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}^{[t]} x^j. \tag{3.5}$$

Proposition 44. *Soit $d \in \mathbb{N}$, le degré de $P_n^{(t)}(x)$ pour un t fixé,*
Si n est un multiple de t alors $P_{n-1}^{(t)}(x)$,...,$P_{n-t}^{(t)}(x)$ sont de degré $d-1$ avec $d = n/t$.
Si n n'est pas multiple de t, $n \equiv i[t]$, $1 \leq i \leq t-1$ alors $P_n^{(t)}(x), \ldots, P_{n-i}^{(t)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-i-1}^{(t)}(x), \ldots, P_{n-t}^{(t)}$ sont de degré $d-1$, où $d = \lfloor n/t \rfloor$

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence sur n.
Supposons que le résultat est vrai pour n et montrons qu'il reste vrai pour $n+1$. Soit d le degré de $P_n^{(t)}(x)$. La relation (4.2) donne,

$$P_{n+1}^{(t)}(x) = x\left[P_n^{(t)'}(x) + P_{n-(t-1)}^{(t)}(x)\right]. \tag{3.6}$$

1. **Si $n+1$ est un multiple de t, $n+1 \equiv 0[t]$** : cela implique que $n \equiv t-1[t]$ et par hypothèse de récurrence on a : $P_n^{(t)}(x), \ldots, P_{n-(t-1)}^{(t)}$ sont de degré d, où $d = \lfloor n/t \rfloor$ et d'aprés la relation (3.6), on aura que $P_{n+1}^{(t)}(x)$ est de degré $d+1$;
2. **Si $n+1$ n'est pas un multiple de t, $n+1 \equiv i[t]$, $1 \leq i \leq t-1$** : cela implique que $n \equiv i-1[t]$. On distingue deux cas
   (a) si $i = 1$, alors n est un multiple de t et par hypothèse de récurrence on a :$P_n^{(t)}(x)$ est de degré d et $P_{n-1}^{(t)}(x), \ldots, P_{n-(t-1)}^{(t)}, P_{n-t}^{(t)}(x)$ sont de degré $d-1$ et d'aprés la relation (3.6), on aura que $P_{n+1}^{(t)}(x)$ est de degré d ;
   (b) si $2 \leq i \leq t-1$, on a par hypothèse de récurrence : $P_n^{(t)}(x), \ldots, P_{n-i}^{(t)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-i-1}^{(t)}(x), \ldots, P_{n-t}^{(t)}$ sont de degré $d-1$, et d'aprés la relation (3.6), on aura que $P_{n+1}^{(t)}(x)$ est de degré d.

□

$P_0^{(2)}(x) = 1,$	$P_0^{(3)}(x) = 1,$	$P_0^{(4)}(x) = 1,$
$P_1^{(2)}(x) = 0,$	$P_1^{(3)}(x) = 0,$	$P_1^{(4)}(x) = 0,$
$P_2^{(2)}(x) = x,$	$P_2^{(3)}(x) = 0,$	$P_2^{(4)}(x) = 0,$
$P_3^{(2)}(x) = x,$	$P_3^{(3)}(x) = x,$	$P_3^{(4)}(x) = 0,$
$P_4^{(2)}(x) = x + x^2,$	$P_4^{(3)}(x) = x,$	$P_4^{(4)}(x) = x,$
$P_5^{(2)}(x) = x + 3x^2,$	$P_5^{(3)}(x) = x,$	$P_5^{(4)}(x) = x,$
$P_6^{(2)}(x) = x + 7x^2 + x^3,$	$P_6^{(3)}(x) = x + x^2,$	$P_6^{(4)}(x) = x,$
$P_7^{(2)}(x) = x + 15x^2 + 6x^3,$	$P_7^{(3)}(x) = x + 3x^2,$	$P_7^{(4)}(x) = x,$
$P_8^{(2)}(x) = x + 31x^2 + 25x^3 + x^4,$	$P_8^{(3)}(x) = x + 7x^2,$	$P_8^{(4)}(x) = x + x^2,$
$P_9^{(2)}(x) = x + 63x^2 + 90x^3 + 10x^4,$	$P_9^{(3)}(x) = x + 15x^2 + x^3,$	$P_9^{(4)}(x) = x + 3x^2,$
$P_{10}^{(2)}(x) = x + 127x^2 + 301x^3 + 65x^4 + x^5.$	$P_{10}^{(3)}(x) = x + 31x^2 + 6x^3.$	$P_{10}^{(4)}(x) = x + 7x^2.$

TABLE 3.2 – Expression de $P_n^{(t)}(x)$ pour $n \leq 10$ et $t \leq 4$.

Théorème 45. *Les racines de $P_n^{(3)}(x)$ sont réelles, distinctes, et négatives pour tout $n = 1, 2, \ldots$. De plus, les racines de $P_n^{(3)}(x)$, $P_{n-1}^{(3)}(x)$,$P_{n-2}^{(3)}(x)$ s'entrelacent de la manière suivante :*

Si $P_n^{(3)}(x)$ est de degré d et $P_{n-1}^{(3)}(x)$, $P_{n-2}^{(3)}(x)$ sont de même degré $d-1$ et tels que leurs racines sont,
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-1)}$, $0 = x_0^{(n-2)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-2)}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-1}^{(n)}. \tag{3.7}$$

Si $P_n^{(3)}(x), P_{n-1}^{(3)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-2}^{(3)}(x)$ est de degré $d-1$ et leurs racines sont :
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)} > x_d^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-1)}$, $0 = x_0^{(n-2)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-2)}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-1}^{(n)} > x_{d-1}^{(n-1)} \tag{3.8}$$

.

Si $P_n^{(3)}(x), P_{n-1}^{(3)}(x)$ et $P_{n-2}^{(3)}(x)$ sont tous de degré d et leurs racines sont :
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)} > x_d^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-1)}$, $0 = x_0^{(n-2)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-2)}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-1}^{(n)} > x_{d-1}^{(n-1)} > x_{d-1}^{(n-2)} \tag{3.9}$$

.

Démonstration. La relation (3.1) donne

$$P_n^{(3)}(x) = x\left[P_{n-1}^{(3)'}(x) + P_{n-3}^{(3)}(x)\right]. \tag{3.10}$$

Prouvons le Théorème par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour les premières valeurs de n.
Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il reste vrai à l'ordre n.
En premier lieu, considérons le cas où $P_n^{(3)}(x)$, $P_{n-1}^{(3)}(x)$, $P_{n-2}^{(3)}(x)$ sont de même degré d, ce qui veut dire que $n \equiv 2[3]$. Soit $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-1)}$ les racines de $P_{n-1}^{(3)}(x)$.
Etape 1 : Soient 0 et $x_1^{(n-1)}$ les deux plus grandes racines de $P_{n-1}^{(3)}(x)$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]x_1^{(n-1)}, 0[$ tel que $P_{n-1}^{(3)'}(c) = 0$. Vu que les coefficients de $P_{n-1}^{(3)}(x)$ sont positifs alors, $P_{n-1}^{(3)}(x)$ est décroissante sur $]x_1^{(n-1)}, c[$ et croissante sur $]c, 0[$, ce qui implique que $P_{n-1}^{(3)}(x) < 0$, pour tout $x \in]x_1^{(n-1)}, 0[$.
Etape 2 : Posons maintenant $x = x_1^{(n-1)}$ dans (3.10).

— On sait par hypothèse de récurrence que les racines de $P_{n-3}^{(3)}(x)$, sont : $0 = x_0^{(n-3)} > x_1^{(n-3)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-3)}$ et s'entrelacent avec celles de $P_{n-1}^{(3)}(x)$ et $P_{n-2}^{(3)}(x)$ comme suit : $0 > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > x_1^{(n-3)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-2}^{(n-3)} > x_{d-1}^{(n-1)} > x_{d-1}^{(n-2)}$.
D'aprés l'étape 1, on a $P_{n-3}^{(3)}(x) < 0$, pour tout $x \in]x_1^{(n-3)}, 0[$, et particulièrement pour $x = x_1^{(n-1)}$ ce qui implique que $P_{n-3}^{(3)}(x_1^{(n-1)}) < 0$.

— On sait que $P_{n-1}^{(3)}(x)$ admet d racines réelles négatives donc $P_{n-1}^{(3)'}(x)$ doit avoir $d-1$ racines.
De plus, par le Théorème de Rolle, il existe une racine de $P_{n-1}^{(3)'}(x)$ entre deux racines consécutives de $P_{n-1}^{(3)}(x)$, donc il existe une racine de $P_{n-1}^{(3)'}(x)$ dans $]x_1^{(n-1)}, 0[$.
Le signe de $P_{n-1}^{(3)'}(x_1^{(n-1)})$ est différent de celui de $P_{n-1}^{(3)'}(0)$ donc $P_{n-1}^{(3)'}(0) > 0$, ainsi $P_{n-1}^{(3)'}(x_1^{(n-1)}) < 0$.

Pour $x = x_1^{(n-1)}$, on a montré que $x_1^{(n-1)}\left[P_{n-1}^{(3)'}(x_1^{(n-1)}) + P_{n-3}^{(3)}(x_1^{(n-1)})\right]$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs et par conséquant $P_n^{(3)}(y_1) > 0$.
Or $P_n^{(3)}(x) < 0$ dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$, car $P_{n-1}^{(3)'}(x) > 0$ dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$ d'aprés l'étape 1, et $P_{n-3}^{(3)}(x) < 0$ dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$, car il est négatif dans $]x_1^{(n-3)}, 0[$ par hypothèse de récurrence. Alors $P_n^{(3)}(x)$ a une racine dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$.
Prouvons maintenant que $P_n^{(3)}(x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $P_n^{(3)}(x_i^{(n-1)})$ et $P_n^{(3)}(x_{i+1}^{(n-1)})$ ont des signes différents.

— Il est clair qu'à travers le Théorème de Rolle que $P_{n-1}^{(3)'}(x_{i+1}^{(n-1)})$ et $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$ ont des signes différents.

— $P_{n-3}^{(3)}(x_{i+1}^{(n-1)})$ et $P_{n-3}^{(3)}(x_i^{(n-1)})$ ont des signes différents, par hypothèse de récurrence.

— D'aprés le Théorème de Rolle, $P_{n-1}^{(3)'}$ change de signe i fois dans l'intervalle $]x_i^{(n-1)}, 0[$, et par l'hypothèse de récurrence $P_{n-3}^{(3)}$ change son signe $i-1$ fois. Or il existe un petit voisinage de 0 où $P_{n-1}^{(3)'}(x) > 0$ et $P_{n-3}^{(3)}(x) < 0$, par conséquent $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$ et $P_{n-3}^{(3)}(x_i^{(n-1)})$ sont de même signe.

D'aprés (3.10), $P_n^{(3)}(x_{i+1}^{(n-1)})$ et $P_n^{(3)}(x_i^{(n-1)})$ ont des signes différents, ce qui implique que $P_n^{(3)}(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$.
Comme $P_n^{(3)}(x)$ a un nombre impair de racines dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$, car il change de signe dans chaque borne de cet intervalle. On sait que le nombre de racines de $P_n^{(3)}(x)$ dépasse au plus par une racine celui de $P_{n-1}^{(3)}(x)$. Par conséquent $P_n^{(3)}(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$.
Prouvons maintenant que $P_n^{(3)}(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-2)}, x_i^{(n-2)}[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $P_n^{(3)}(x_i^{(n-2)})$ et $P_n^{(3)}(x_{i+1}^{(n-2)})$ ont des signes différents, on sait par hypotèse de récurrence que le $P_{n-3}^{(3)}(x_i^{(n-1)})$ et $P_{n-3}^{(3)}(x_i^{(n-2)})$

sont de même signes, de ce fait, on a juste à prouver que pour $0 \leq i \leq d-1$, $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$ et $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-2)})$ sont de même signe.

— Considérons le cas où $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$ est négatif, par hypothèse de récurrence $P_{n-1}^{(3)}(x)$ est positif sur l'intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$, $P_{n-2}^{(3)}(x)$ est positif sur $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-2)}[$ et négatif sur $]x_i^{(n-2)}, x_i^{(n-1)}[$, sachant que $P_{n-2}^{(3)'}(x)$ atteint son maximum en $x_i^{(n-2)}$ alors $P_{n-2}^{(3)'}(x_i^{(n-2)})$ est négatif or que $P_{n-2}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$ est positif alors $P_{n-2}^{(3)'}$ admet une racine dans cet intevalle notant là γ_i. De ce fait, $P_{n-2}^{(3)'}(x)$ est croissant négatif sur l'intervalle $]x_i^{(n-2)}, \gamma_i[$ et croissant positif sur l'intervalle $]\gamma_i, x_i^{(n-1)}[$.
Supposons maintenant que $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-2)})$ est positif. Soit β_i la racine de $P_{n-1}^{(3)'}(x)$, alors on a $P_{n-1}^{(3)}(x)$ est croisant sur $]x_{i+1}^{(n-1)}, \beta_i[$ et décroissant sur $]\beta_i, x_i^{(n-1)}[$.
Admettons que $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-2)}) > 0$, c'est à dire $\beta_i \in]x_i^{(n-2)}, x_i^{(n-1)}[$, distinguons deux cas :

1. $\beta_i \in]x_i^{(n-2)}, \gamma_i[$, on a d'aprés notre supposition, $P_{n-1}^{(3)}(\beta_i) - P_{n-1}^{(3)}(x_i^{(n-2)}) \geq 0$, ce qui implique que $\beta_i P_{n-2}^{(3)'}(\beta_i) + \beta_i P_{n-4}^{(3)}(\beta_i) - x_i^{(n-2)} P_{n-2}^{(3)'}(x_i^{(n-2)}) - x_i^{(n-2)} P_{n-4}^{(3)}(x_i^{(n-2)}) \geq 0$, or par hypothèse de récurrence et le paragraphe précédent, on a $\beta_i P_{n-2}^{(3)'}(\beta_i) - x_i^{(n-2)} P_{n-2}^{(3)'}(x_i^{(n-2)}) \leq 0$ et $\beta_i P_{n-4}^{(3)}(\beta_i) - x_i^{(n-2)} P_{n-4}^{(3)}(x_i^{(n-2)}) \leq 0$, d'où la contradiction, alors $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-2)})$ est négatif c'est à dire de même signe que $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$.

2. $\beta_i \in]\gamma_i, x_i^{(n-1)}[$, on a d'aprés notre supposition, $P_{n-1}^{(3)}(\beta_i) - P_{n-1}^{(3)}(x_i^{(n-2)}) \geq 0$, ce qui implique que $\beta_i P_{n-2}^{(3)'}(\beta_i) + \beta_i P_{n-4}^{(3)}(\beta_i) - \gamma_i P_{n-2}^{(3)'}(\gamma_i) - \gamma_i P_{n-4}^{(3)}(\gamma_i) \geq 0$, $\beta_i P_{n-2}^{(3)'}(\beta_i) + \beta_i P_{n-4}^{(3)}(\beta_i) - \gamma_i P_{n-4}^{(3)}(\gamma_i) \geq 0$ or par hypothèse de récurrence et le paragraphe précédent, on a $\beta_i P_{n-2}^{(3)'}(\beta_i) \leq 0$ et $\beta_i P_{n-4}^{(3)}(\beta_i) - \gamma_i P_{n-4}^{(3)}(\gamma_i) \leq 0$, d'où la contradiction, alors $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-2)})$ est négatif c'est à dire de même signe que $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$.

— Pour le cas où $P_{n-1}^{(3)'}(x_i^{(n-1)})$ est positif, le raisonnement est le même.

Ce qui complète la preuve de ce cas.
Considérons maintenant le cas où $P_n^{(3)}(x)$ et $P_{n-1}^{(3)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-2}^{(3)}(x)$ est de degré $d-1$, ce qui veut dire que $n \equiv 1[3]$, la preuve est la même.
Considérons maintenant le cas où $P_n^{(3)}(x)$ est de degré d, et que $P_{n-1}^{(3)}(x)$, $P_{n-2}^{(3)}(x)$ sont de degré $d-1$, ce qui veut dire que $n \equiv 0[3]$. La preuve est la même que celle du premier cas. De plus on sait que la dernière racine de $P_n^{(3)}(x)$ doit être négative. Elle ne peut être dans aucun intervalle $]x_{i+1}^{(n-2)}, x_i^{(n-2)}[$, ce qui implique qu'elle appartient à l'intervalle $]-\infty, x_{d-2}^{(n-2)}[$, ce qui termine la preuve. □

Théorème 46. *La suite* $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{[3]}\right)_k$ *est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème de Newton 13 et le Théorème 45. □

Théorème 47. *La suite* $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{[3]}\right)_k$ *est une suite PF.*

Démonstration. D'aprés le Théorème 15 et le Théorème 45. □

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t sont définis comme les éléments des transversales de direction $(1, \alpha)$, $\alpha = t - 1$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce.

Remarque 48. *Pour tout* $n \geq tk$, *on a*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} = \left\{ {n - \alpha k \atop k} \right\}. \tag{3.11}$$

Remarque 49. *Pour tout* $n \geq tk$, *on a*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[t]} = \left\{ {n - k \atop k} \right\}^{[t-1]} = \left\{ {n - \alpha k \atop k} \right\}.$$

Enonçons maintenant le résulat principal de cette partie.

Théorème 50. *La suite* $\left(\left\{ {n-2k \atop k} \right\}\right)_k$, *est strictement log-concave et donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème 46 et la relation (3.11), où $t = 3$. □

3.6 Sur l'unimodalité des suites de direction $(1, \alpha)$ dans le triangle de Stirling de seconde espèce

Motivé par nos résultats précédents et par analogie au Thérème de Tanny et Zucker [TZ76, TZ78], nous pensons fortement ce qui suit :

Conjecture 51. *Les racines de* $P_n^{(t)}(x)$ *sont réelles, distinctes, et négatives pour tout* $n = 1, 2, \ldots$. *De plus, les racines de* $P_n^{(t)}(x)$, $P_{n-1}^{(t)}(x), \cdots, P_{n-(t-1)}^{(t)}(x)$ *s'entrelacent de la manière suivante :*
Si $P_n^{(t)}(x)$ *est de degré* d *et* $P_{n-1}^{(t)}(x), \cdots, P_{n-(t-1)}^{(t)}(x)$ *sont de degré* $d - 1$ *et tels que leurs racines sont,*

$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-1)}$, $\cdots$,$0 = x_0^{(n-(t-1))} > x_1^{(n-(t-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n-(t-1))}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_1^{(n-(t-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-(t-1))} > x_{d-1}^{(n)}. \tag{3.12}$$

Si $P_n^{(t)}(x), \ldots, P_{n-i}^{(t)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-i-1}^{(t)}(x), \ldots, P_{n-(t-1)}^{(t)}$, $1 \leq i \leq t-1$, sont de degré $d-1$ et leurs racines sont :
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)} > x_d^{(n)}$,$\cdots$,$0 = x_0^{(n-i)} > x_1^{(n-i)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-i)}$, $\cdots$,$0 = x_0^{(n-(t-1))} > x_1^{(n-(t-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n-(t-1))}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > \cdots > x_1^{(n-i)} > \cdots > x_1^{(n-(t-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-i)} > \cdots$$
$$\cdots > x_{d-2}^{(n-(t-1))} > x_{d-1}^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-i)}. \tag{3.13}$$

Remarque 52.

— *Pour $t = 1$, on retrouve le résultat de Harper [Har67] ;*
— *Pour $t = 2$, on retrouve le résultat du Théorème 32 ;*
— *Pour $t = 3$, on retrouve le résultat du Théorème 45.*

Ainsi les suites $\left(\left\{{n \atop k}\right\}^{[t]}\right)_k$ et $\left(\left\{{n-\alpha k \atop k}\right\}\right)_k$ sont strictement log-concaves, donc unimodales avec au plus deux modes consécutifs.

3.6.1 Etapes de la preuve et limite de la méthode utilisée

Nous avons tenté de prouver le cas de t quelconque en utilisant la même technique que celle du Théorème 45.
Supposons le résultat vrai pour l'ordre $n-1$ et montrons qu'il reste vrai pour l'ordre n.
Suivant les mêmes étapes que celle de notre précédante preuve, nous obtenons les résultats suivants :

— $P_n^{(t)}(x_i^{(n-1)})$ et $P_n^{(t)}(x_{i+1}^{(n-1)})$ sont de signe différents, ce qui implique que $P_n^{(t)}(x)$ possède une racine entre chaque couple de racines consécutives de $P_{n-1}^{(t)}(x)$;

— $P_n^{(t)}(x_i^{(n-2)})$ et $P_n^{(t)}(x_{i+1}^{(n-2)})$ sont de signe différents, ce qui implique que $P_n^{(t)}(x)$ possède une racine entre chaque couple de racines consécutives de $P_{n-2}^{(t)}(x)$;

— $P_n^{(t)}(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-2)}[$.

Or que notre but est de prouver que $P_n^{(t)}(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-(t-1))}[$. D'où la limite de notre méthode.

3.7 Les nombres t-Fibonacci-Stirling

De la même maniére que dans le chapitre précédant, on généralise le concept des nombres de Fibonacci-Stirling, comme suit.

Définition 53. *On définit la suite de t-Fibonacci-Stirling $(\varphi_n)_n$, pour tout $n \geq tk$, par*

$$\varphi_{n+1}^{(t+1)} := \sum_k \left\{ \begin{matrix} n - tk \\ k \end{matrix} \right\}, \tag{3.14}$$

avec : $\varphi_0^{(t)} = 1, \varphi_1^{(t)} = 0$.

Remarque 54. *La relation entre les nombres de t-Fibonacci-Stirling et les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t est représentée par la relation suivante,*

$$\varphi_{n+1}^{(t+1)} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{[t+1]}. \tag{3.15}$$

La suite $\left(\varphi_n^{(t)}\right)$ est appelée suite de Bell associée avec succession d'ordre t.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi_n^{(3)}$	1	0	0	1	1	1	2	4	8	17	38	89	219

TABLE 3.3 – Quelques valeurs des nombres 3-Fibonacci-Stirling.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi_n^{(4)}$	1	0	0	0	1	1	1	1	2	4	8	16	33

TABLE 3.4 – Quelques valeurs des nombres 4-Fibonacci-Stirling.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi_n^{(4)}$	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	4	8

TABLE 3.5 – Quelques valeurs des nombres 5-Fibonacci-Stirling.

4

Unimodalité des nombres de Stirling 3-associés de seconde espèce

Plan du chapitre

4.1 Introduction

En vue de l'importance des nombres de Stirling des deux espèces, ces derniers ont eu plusieurs généralisations, nous citons parmi elles : les nombres r- Stirling de première et seconde espèce [Bro84], les nombres de Lah [Cha05], les nombres de Stirling associés [Rio12, Com74], les nombres de r-Stirling associés [BB14], les nombres $r_1, \ldots, r_p$-Stirling [MM12], les nombres de Whitney [Ben96a], *etc.*

Nous nous intéressons dans cette partie aux **nombres de Stirling s-associés**. Ces nombres sont introduits par J. Riordan [Rio12]. Ils représentent les coefficients du développement des nombres de Stirling $\left[{n \atop n-k}\right]$ et $\left\{{n \atop n-k}\right\}$ en coefficient binomiaux et tels que Comtet dans [Com74] les définit en ajoutant une restriction du nombre d'éléments par cycle ou par partition.

Définition 55. *Les nombres de Stirling s-associés de première espèce, noté par $\left[{n \atop k}\right]^{(s)}$, comptent le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ à k cycles et tel que chaque cycle contient au moins s éléments.*
Les nombres de Stirling s-associés de seconde espèce, noté par $\left\{{n \atop k}\right\}^{(s)}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k parts et tel que chaque part contient au moins s éléments.

Les nombres de Stirling s-associés de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante, voir [How80] :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(s)} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^{(s)} + \binom{n-1}{s-1}(s-1)!\begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}^{(s)}, \tag{4.1}$$

avec $\left[{0 \atop 0}\right]^{(s)} = 1$, $\left[{n \atop 0}\right]^{(s)} = 0$, $n \geq 1$.

Les nombres de Stirling s-associés de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante, voir [Com74] :

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^{(s)} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}^{(s)} + \binom{n-1}{s-1}\begin{Bmatrix} n-s \\ k-1 \end{Bmatrix}^{(s)}, \tag{4.2}$$

avec $\left\{{0 \atop 0}\right\}^{(s)} = 1$, $\left\{{n \atop 0}\right\}^{(s)} = 0$, $n \geq 1$.

Nous allons étudier le cas de la seconde espèce. Pour plus de détails sur les nombres de Stirling s-associés, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages suivants [Com74, Rio12, How80, BB14].

4.2 Unimodalité des nombres de Stirling 3-associés

Bòna et Mező ont prouvé dans [BM16], que le polynôme qui génère les partitions sans singleton admet que des racines réelles négatives. Par conséquent la suite des partitions

sans singleton est strictement log-concave et donc unimodale. Cette suite est exactement la suite des nombres de Stirling 2-associés de seconde espèce, ce qui nous permet de conclure quant à l'unimodalité des nombres de Stirling 2-associés de seconde espèce.
Notre but est de généraliser le résultat de Bòna et Mező et d'étudier l'unimodalité des suites parcourant les lignes des triangles formés par les nombres de Stirling s-associés de seconde espèce.
Soit

$$P_n^{(s)}(x) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}^{(s)} x^j.$$

Proposition 56. *Soit $d \in \mathbb{N}$ le degré de $P_n^{(s)}(x)$ pour un s fixe,*
Si n est un multiple de s alors $P_{n-1}^{(s)}(x),\ldots,P_{n-s}^{(s)}(x)$ sont de degré $d-1$ avec $d = n/s$.
Si n n'est pas multiple de s, $n \equiv i[s]$, $1 \leq i \leq s-1$ alors $P_n^{(s)}(x), \ldots, P_{n-i}^{(s)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-i-1}^{(s)}(x), \ldots, P_{n-s}^{(s)}$ sont de degré $d-1$, où $d = \lfloor n/s \rfloor$.

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence sur n.
Supposons que le résultat est vrai pour n et montrons qu'il reste vrai pour $n+1$. Soit d le degré de $P_n^{(s)}(x)$. La relation (4.2) donne,

$$P_{n+1}^{(s)}(x) = x\left[P_n^{(s)'}(x) + \binom{n-1}{s-1} P_{n-(s-1)}^{(s)}(x)\right]. \tag{4.3}$$

1. **Si** $n+1$ **est un multiple de** s**,** $n+1 \equiv 0[s]$: cela implique que $n \equiv s-1[s]$ et par hypothèse de récurrence on a : $P_n^{(s)}(x), \ldots, P_{n-(s-1)}^{(s)}$ sont de degré d, où $d = \lfloor n/s \rfloor$ et d'aprés la relation (4.3), on aura que $P_{n+1}^{(s)}(x)$ est de degré $d+1$;
2. **Si** $n+1$ **n'est pas un multiple de** s**,** $n+1 \equiv i[s]$, $1 \leq i \leq s-1$: cela implique que $n \equiv i-1[s]$. On distingue deux cas
   (a) si $i = 1$, alors n est un multiple de s et par hypothèse de récurrence on a :$P_n^{(s)}(x)$ est de degré d et $P_{n-1}^{(s)}(x), \ldots, P_{n-(s-1)}^{(s)}, P_{n-s}^{(s)}(x)$ sont de degré $d-1$ et d'aprés la relation (4.3), on aura que $P_{n+1}^{(s)}(x)$ est de degré d ;
   (b) si $2 \leq i \leq s-1$, on a par hypothèse de récurrence : $P_n^{(s)}(x), \ldots, P_{n-i}^{(s)}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-i-1}^{(s)}(x), \ldots, P_{n-s}^{(s)}$ sont de degré $d-1$, et d'aprés la relation (4.3), on aura que $P_{n+1}^{(s)}(x)$ est de degré d ;

□

$$
\begin{array}{ll}
P_0^{(3)}(x) = 1, & P_0^{(4)}(x) = 1, \\
P_1^{(3)}(x) = 0, & P_1^{(4)}(x) = 0, \\
P_2^{(3)}(x) = 0, & P_2^{(4)}(x) = 0, \\
P_3^{(3)}(x) = x, & P_3^{(4)}(x) = 0, \\
P_4^{(3)}(x) = x, & P_4^{(4)}(x) = x, \\
P_5^{(3)}(x) = x, & P_5^{(4)}(x) = x \\
P_6^{(3)}(x) = x + 10x^2, & P_6^{(4)}(x) = x, \\
P_7^{(3)}(x) = x + 35x^2, & P_7^{(4)}(x) = x, \\
P_8^{(3)}(x) = x + 91x^2, & P_8^{(4)}(x) = x + 35x^2, \\
P_9^{(3)}(x) = x + 210x^2 + 280x^3, & P_9^{(4)}(x) = x + 126x^2, \\
P_{10}^{(3)}(x) = x + 456x^2 + 2100x^3, & P_{10}^{(4)}(x) = x + 336x^2, \\
P_{11}^{(3)}(x) = x + 957x^2 + 10395x^3, & P_{11}^{(4)}(x) = x + 792x^2, \\
P_{12}^{(3)}(x) = x + 1969x^2 + 42735x^3 + 15400x^4. & P_{12}^{(4)}(x) = x + 1749x^2 + 5775x^3.
\end{array}
$$

TABLE 4.1 – Expression de $P_n^{(s)}(x)$ pour $n \leq 12$ et $3 \leq s \leq 4$.

Nous proposons dans cette partie une preuve d'unimodalité des nombres de Stirling 3-associés de seconde espèce. Pour simplifier les notations nous posons $P_n(x) = P_n^{(3)}(x)$.

Théorème 57. *Les racines de $P_n(x)$ sont réelles, distinctes, et négatives pour tout $n = 1, 2, \ldots$. De plus, les racines de $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ et $P_{n-2}(x)$ s'entrelacent de la manière suivante :*

Si $P_n(x)$ est de degré d et $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x)$ sont de même degré $d-1$ et tels que leurs racines sont,
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-1)}$, $0 = x_0^{(n-2)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-2)}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-1}^{(n)}. \tag{4.4}$$

Si $P_n(x), P_{n-1}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-2}(x)$ est de degré $d-1$ et leurs racines sont :
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)} > x_d^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-1)}$, $0 = x_0^{(n-2)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-2)}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-1}^{(n)} > x_{d-1}^{(n-1)}. \tag{4.5}$$

Si $P_n(x), P_{n-1}(x)$ et $P_{n-2}(x)$ sont tous de degré d et leurs racines sont :
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)} > x_d^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-1)}$, $0 = x_0^{(n-2)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-2)}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-1}^{(n)} > x_{d-1}^{(n-1)} > x_{d-1}^{(n-2)}. \tag{4.6}$$

Démonstration. La relation (4.2) pour $s = 3$ donne,

$$P_n(x) = x\left[P'_{n-1}(x) + \binom{n-1}{2} P_{n-3}(x)\right], \tag{4.7}$$

où $P_0(x) = 1, P_i(x) = 0$, si $i < 3$ et $P_i(x) = x$, si $3 \leq i < 6$.
Prouvons notre Théorème par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour les premières valeurs de n.

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il reste vrai à l'ordre n.
En premier lieu, considérons le cas où $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x)$ sont de même degré d, ce qui veut dire que $n \equiv 2[3]$. Soit $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-1)}$ les racines de $P_{n-1}(x)$.
Etape 1 : Soient 0 et $x_1^{(n-1)}$ les deux plus grandes racines de $P_{n-1}(x)$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]x_1^{(n-1)}, 0[$ tel que $P'_{n-1}(c) = 0$. Vu que les coefficients de $P_{n-1}(x)$ sont positifs alors, $P_{n-1}(x)$ est décroissante sur $]x_1^{(n-1)}, c[$ et croissante sur $]c, 0[$, ce qui implique que $P_{n-1}(x) < 0$, pour tout $x \in]x_1^{(n-1)}, 0[$.
Etape 2 : Posons maintenant $x = x_1^{(n-1)}$ dans (3.10).

— On sait par hypothèse de récurrence que les racines de $P_{n-3}(x)$, sont : $0 = x_0^{(n-3)} > x_1^{(n-3)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-3)}$ et s'entrelacent avec celles de $P_{n-1}(x)$ et $P_{n-2}(x)$ comme suit : $0 > x_1^{(n-1)} > x_1^{(n-2)} > x_1^{(n-3)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-1)} > x_{d-2}^{(n-2)} > x_{d-2}^{(n-3)} > x_{d-1}^{(n-1)} > x_{d-1}^{(n-2)}$.
D'aprés l'étape 1, on a $P_{n-t}(x) < 0$, pour tout $x \in]x_1^{(n-t)}, 0[$, et particulièrement pour $x = x_1^{(n-1)}$ ce qui implique que $P_{n-3}(x_1^{(n-1)}) < 0$.

— On sait que $P_{n-1}(x)$ admet d racines réelles négatives donc $P'_{n-1}(x)$ doit avoir $d-1$ racines.
De plus, par le Théorème de Rolle, il existe une racine de $P'_{n-1}(x)$ entre deux racines consécutives de $P_{n-1}(x)$, donc il existe une racine de $P'_{n-1}(x)$ dans $]x_1^{(n-1)}, 0[$.
Le signe de $P'_{n-1}(x_1^{(n-1)})$ est différent de celui de $P'_{n-1}(0)$ donc $P'_{n-1}(0) > 0$, ainsi $P'_{n-1}(x_1^{(n-1)}) < 0$.

Pour $x = x_1^{(n-1)}$, on a montré que $x_1^{(n-1)}\left[P'_{n-1}(x_1^{(n-1)}) + \binom{n-1}{2} P_{n-3}(x_1^{(n-1)})\right]$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs et par conséquant $P_n(y_1) > 0$.
Or $P_n(x) < 0$ dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$, car $P'_{n-1}(x) > 0$ dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$ d'aprés l'étape 1, et $P_{n-3}(x) < 0$ dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$, car il est négatif dans $]x_1^{(n-t)}, 0[$ par hypothèse de récurrence. Alors $P_n(x)$ a une racine dans l'intervalle $]x_1^{(n-1)}, 0[$.
Prouvons maintenant que $P_n(x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $P_n(x_i^{(n-1)})$ et $P_n(x_{i+1}^{(n-1)})$ ont des signes différents.

— Il est clair qu'à travers le Théorème de Rolle que $P'_{n-1}(x_{i+1}^{(n-1)})$ et $P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$ ont des signes différents.

— $P_{n-3}(x_{i+1}^{(n-1)})$ et $P_{n-3}(x_i^{(n-1)})$ ont des signes différents, par hypothèse de récurrence.

— D'aprés le Théorème de Rolle, P'_{n-1} change de signe i fois dans l'intervalle $]x_i^{(n-1)}, 0[$, et par l'hypothèse de récurrence P_{n-3} change son signe $i-1$ fois. Or il existe un petit voisinage de 0 où $P'_{n-1}(x) > 0$ et $P_{n-3}(x) < 0$, par conséquent $P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$ et $P_{n-3}(x_i^{(n-1)})$ sont de même signe.

D'aprés (3.10), $P_n(x_{i+1}^{(n-1)})$ et $P_n(x_i^{(n-1)})$ ont des signes différents, ce qui implique que $P_n(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$.
Comme $P_n(x)$ a un nombre impair de racines dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$, car il change de signe dans chaque borne de cet intervalle. On sait que le nombre de racines de $P_n(x)$ dépasse au plus par une racine celui de $P_{n-1}(x)$. Par conséquent $P_n(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$.
Prouvons maintenant que $P_n(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]x_{i+1}^{(n-2)}, x_i^{(n-2)}[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $P_n(x_i^{(n-2)})$ et $P_n(x_{i+1}^{(n-2)})$ ont des signes différents, on sait par hypotèse de récurrence que le $P_{n-3}(x_i^{(n-1)})$ et $P_{n-3}(x_i^{(n-2)})$ sont de même signes, de ce fait, on a juste à prouver que pour $0 \leq i \leq d-1$,

$P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$ et $P'_{n-1}(x_i^{(n-2)})$ sont de même signe.

— Considérons le cas où $P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$ est négatif, par hypothèse de récurrence $P_{n-1}(x)$ est positif sur l'intevalle $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-1)}[$, $P_{n-2}(x)$ est positif sur $]x_{i+1}^{(n-1)}, x_i^{(n-2)}[$ et négatif sur $]x_i^{(n-2)}, x_i^{(n-1)}[$, sachant que $P'_{n-2}(x)$ atteint son maximum en $x_i^{(n-2)}$ alors $P'_{n-2}(x_i^{(n-2)})$ est négatif or que $P'_{n-2}(x_i^{(n-1)})$ est positif alors P'_{n-2} admet une racine dans cet intevalle notant là γ_i. De ce fait, $P'_{n-2}(x)$ est croissant négatif sur l'intervalle $]x_i^{(n-2)}, \gamma_i[$ et croissant positif sur l'intervalle $]\gamma_i, x_i^{(n-1)}[$.
Supposons maintenat que $P'_{n-1}(x_i^{(n-2)})$ est positif. Soit β_i la racine de $P'_{n-1}(x)$, alors on a $P_{n-1}(x)$ est croisant sur $]x_{i+1}^{(n-1)}, \beta_i[$ et décroissant sur $]\beta_i, x_i^{(n-1)}[$.
Admettons que $P'_{n-1}(x_i^{(n-2)}) > 0$, c'est à dire $\beta_i \in]x_i^{(n-2)}, x_i^{(n-1)}[$, distinguons deux cas :

1. $\beta_i \in]x_i^{(n-2)}, \gamma_i[$, on a d'aprés notre supposition, $P_{n-1}(\beta_i) - P_{n-1}(x_i^{(n-2)}) \geq 0$, ce qui implique que $\beta_i P'_{n-2}(\beta_i) + \beta_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\beta_i) - x_i^{(n-2)} P'_{n-2}(x_i^{(n-2)})$
$-x_i^{(n-2)} \binom{n-2}{2} P_{n-4}(x_i^{(n-2)}) \geq 0$, or par hypothèse de récurrence et le paragraphe précédent, on a $\beta_i P'_{n-2}(\beta_i) - x_i^{(n-2)} P'_{n-2}(x_i^{(n-2)}) \leq 0$ et
$\beta_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\beta_i) - x_i^{(n-2)} \binom{n-2}{2} P_{n-4}(x_i^{(n-2)}) \leq 0$, d'où la contradiction, alors $P'_{n-1}(x_i^{(n-2)})$ est négatif c'est à dire de même signe que $P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$.

2. $\beta_i \in]\gamma_i, x_i^{(n-1)}[$, on a d'aprés notre supposition, $P_{n-1}(\beta_i) - P_{n-1}(x_i^{(n-2)}) \geq 0$, ce qui implique que $\beta_i P'_{n-2}(\beta_i) + \beta_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\beta_i) - \gamma_i P'_{n-2}(\gamma_i)$
$-\gamma_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\gamma_i) \geq 0$, $\beta_i P'_{n-2}(\beta_i) + \beta_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\beta_i) - \gamma_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\gamma_i) \geq 0$ or par hypothèse de récurrence et le paragraphe précédent, on a $\beta_i P'_{n-2}(\beta_i) \leq 0$ et $\beta_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\beta_i)$
$-\gamma_i \binom{n-2}{2} P_{n-4}(\gamma_i) \leq 0$, d'où la contradiction, alors $P'_{n-1}(x_i^{(n-2)})$ est négatif c'est à dire de même signe que $P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$.

— Pour le cas où $P'_{n-1}(x_i^{(n-1)})$ est positif, le raisonnement est le même.

Ce qui complète la preuve de ce cas.
Considérons maintenant le cas où $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ sont de degré d, et $P_{n-2}(x)$ est de degré $d-1$, ce qui veut dire que $n \equiv 1[3]$, la preuve est la même.
Considérons maintenant le cas où $P_n(x)$ est de degré d, et que $P_{n-1}(x)$, $P_{n-2}(x)$ sont de degré $d-1$, ce qui veut dire que $n \equiv 0[3]$. La preuve est la même que celle du premier cas. De plus on sait que la dernière racine de $P_n(x)$ doit être négative. Elle ne peut être dans aucun intervalle $]x_{i+1}^{(n-2)}, x_i^{(n-2)}[$, ce qui implique qu'elle appartient à l'intervalle $]-\infty, x_{d-2}^{(n-2)}[$, ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 58. *La suite* $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{(3)}\right)_k$*, est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème de Newton 13 et le Théorème 57. □

4.3 Sur l'unimodalité des nombres de Stirling s-associés de seconde espèce

Motivée par les travaux de Bóna et Mezo dans [BM16] et le théorème précédent, nous pensons le résultat vrai pour $t > 3$.

Conjecture 59. *Les racines de* $P_n^{(s)}(x)$ *sont réelles, distinctes, et négatives pour tout* $n = 1, 2, \ldots$. *De plus, les racines de* $P_n^{(s)}(x)$, $P_{n-1}^{(s)}(x)$,$\cdots$, $P_{n-(s-1)}^{(s)}(x)$ *s'entrelacent de la manière suivante :*
Si $P_n^{(s)}(x)$ *est de degré* d *et* $P_{n-1}^{(s)}(x)$, $\cdots$, $P_{n-(s-1)}^{(s)}(x)$ *sont de degré* $d-1$ *et tels que leurs racines sont,*
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)}$, $0 = x_0^{(n-1)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-1)}$, $\cdots$,$0 = x_0^{(n-(s-1))} > x_1^{(n-(s-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n-(s-1))}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1^{(n)} > x_1^{(n-1)} > \cdots > x_1^{(n-(s-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > x_{d-2}^{(n-1)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-(s-1))} > x_{d-1}^{(n)}. \tag{4.8}$$

Si $P_n^{(s)}(x), \ldots, P_{n-i}^{(s)}(x)$ *sont de degré* d*, et* $P_{n-i-1}^{(s)}(x), \ldots, P_{n-(s-1)}^{(s)}$, $1 \leq i \leq s-1$*, sont de degré* $d-1$ *et leurs racines sont :*
$0 = x_0^{(n)} > x_1^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n)} > x_d^{(n)}$,$\cdots$,$0 = x_0^{(n-i)} > x_1^{(n-i)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-i)}$, $\cdots$,$0 = x_0^{(n-(s-1))} > x_1^{(n-(s-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n-(s-1))}$ *respectivement, alors :*

$$\begin{aligned} 0 > x_1^{(n)} > \cdots > x_1^{(n-i)} > \cdots > x_1^{(n-(s-1))} > \cdots > x_{d-2}^{(n)} > \cdots > x_{d-2}^{(n-i)} > \cdots \\ \cdots > x_{d-2}^{(n-(s-1))} > x_{d-1}^{(n)} > \cdots > x_{d-1}^{(n-i)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

.

Ainsi la suite $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{(s)}\right)_k$, est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.

Remarque 60.

— *Pour* $s = 2$*, on retrouve le résultat de Bóna et Mező [BM16] ;*
— *Pour* $s = 3$*, on retrouve le résultat du Théorème 58 ;*
— *Les étapes de la preuve sont les même que celle de la conjecture 51, (voir le chapitre précédant).*

5

Unimodalité des suites liées aux transversales principales du triangle des nombres de Lah

Plan du chapitre

5.1 Introduction

Considéré comme les nombres de Stirling de troisième espèce, les nombres de Lah introduits par le mathématicien Ivo Lah en 1955 [Lah54, Lah55], sont les coefficients du développement des factorielles ascendantes en factorielles déscendantes. Dans ce qui suit nous utilisons la notation de Karamath-Knuth introduite dans [PP02].

Définition 61. *Les nombres de Lah, notés* $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$, *comptent le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *listes ordonnées.*

Ils vérifient la relation de récurrence suivante

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = (n+k-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor + \left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor,$$

où : $\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor = \left\lfloor {1 \atop 1} \right\rfloor = 1$, $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = 0$, et $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = 0$, pour $n < k$.
Pour plus de propriétés sur les nombres de Lah, nous invitons le lecteur à se reporter aux références suivantes [Cha02, Cha05].
Comme les nombres de Stirling des deux espèces, les nombres de Lah ont eu plusieurs généralisations, les nombres r-Lah [BB13], les nombres de Lah associés [AE79], les nombres de Lah s-associés [BB14], *etc.*
Nous proposons dans cette partie, et par analogie à nos précédents travaux, à donner une interprétation combinatoire aux suites parcourant les transversales principales du triangle des nombres de Lah, donner leur relation de récurrence. Dans [NR15], G. Nyul et G. Rácz ont prouvé la log-concavité des nombres r-Lah, ce qui implique pour $r = 0$, la log-concavité et l'unimodalité des lignes du triangle des nombres de Lah classiques, nous prouvons dans ce qui suit l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales de ce triangle.
Nous définissons à la fin de ce chapitre les nombres t-Fibonacci-Lah.

5.2 Interprétation combinatoire et relation de récurrence

Nous introduisons dans cette partie les *nombres de Lah associés avec succession d'ordre* 2.

Définition 62. *Les nombres de Lah associés avec succession d'ordre* 2, *notés* $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]}$, *comptent le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *listes, tels que les deux plus petits nombres dans chaque liste sont consécutifs dans l'ordre suivant :* $i, i+1$.

Nous donnons quelques exemples pour clarifier et simplifier notre interpretation combinatoire.

Exemple 63.

— $\left\lfloor\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right\rfloor^{[2]} = 2$, *on a* $1,2,3\,;\ 3,1,2$. *Les listes* $2,1,3\,;\ 3,2,1\,;$ *ne sont pas acceptées, vu que les deux plus petits nombres* $1,2$ *ne sont pas consécutifs dans l'ordre imposé, et les listes* $1,3,2\,;\ 2,3,1\,;$ *ne sont pas acceptées aussi, car* 1 *et* 2 *ne sont pas consécutifs.*

— $\left\lfloor\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}\right\rfloor^{[2]} = 6$, *on a* $1,2,3,4\,;\ 1,2,4,3\,;\ 3,1,2,4\,;\ 3,4,1,2,;\ 4,3,1,2\,;\ 4,1,2,3.$

— $\left\lfloor\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right\rfloor^{[2]} = 1$, *on a* $1,2/3,4$.

Remarque 64. *Les lignes du triangle des nombres de Lah associés avec succession d'ordre* 2 *sont exactement les transversales de direction* $(1,1)$ *du triangle de Lah.*

$$\left\lfloor\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\rfloor^{[2]} = \left\lfloor\begin{matrix}n-k\\k\end{matrix}\right\rfloor. \tag{5.1}$$

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	2	1		
3	0	6	6	1	
4	0	24	36	12	1
5	0	120	240	120	20
6	0	720	1800	1200	300

FIGURE 5.1 – Direction $(1,1)$ dans le triangle de Lah

Les nombres de Lah associés avec succession d'ordre 2, vérifient la relation de récurrence suivante.

Théorème 65. *Pour* $n \geq 2k$, *on a.*

$$\left\lfloor\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\rfloor^{[2]} = (n-1)\left\lfloor\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right\rfloor^{[2]} + \left\lfloor\begin{matrix}n-2\\k-1\end{matrix}\right\rfloor^{[2]}, \tag{5.2}$$

avec $\left\lfloor\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right\rfloor^{[2]} = 1$, $\left\lfloor\begin{smallmatrix}n\\0\end{smallmatrix}\right\rfloor^{[2]} = 0$, $(n \geq 1)$.

Démonstration. Il suffit de raisonner sur la part qui contient l'élément n. Soit il est seul avec son prédécesseur dans l'ordre imposé $n-1, n$, alors il reste à former $(k-1)$ listes à partir des $(n-2)$ éléments restants, et on $\left\lfloor\begin{smallmatrix}n-2\\k-1\end{smallmatrix}\right\rfloor^{[2]}$ façons de le faire. Soit l'élément n n'est pas seul avec son prédécesseur, alors on forme k listes à partir des $(n-1)$ élements tel que les conditions soient satisfaitent, et on rajoute l'élement n aux k listes. On peut rajouter l'élement n avant chaque nombre et à la fin de chaque liste, et donc on a $n-1+k$ possibilités de le faire, or qu'on ne peut pas l'ajouter entre les deux plus petit nombres dans chaque liste car ils doivent être consécutifs, et il existe k possibilités, alors on a $(n-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor^{[2]}$ possibilités. Ce qui termine la preuve. $\square$

Les nombres de Lah associés avec succession d'ordre 2, vérifient la relation de récurrence verticale suivante.

Théorème 66. *Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2k$. On a*

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]} = \sum_{i=0}^{n-2k} \prod_{j=1}^{i} (n-j) \left\lfloor {n-2-i \atop k-1} \right\rfloor^{[2]}. \tag{5.3}$$

Démonstration. De la relation de récurrence (5.2), on a, pour $n \geq 2k$,

$$\begin{aligned}
\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]} &= (n-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor^{[2]} + \left\lfloor {n-2 \atop k-1} \right\rfloor^{[2]}, \\
(n-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor^{[2]} &= (n-1)(n-2)\left\lfloor {n-2 \atop k} \right\rfloor^{[2]} + (n-1)\left\{ {n-3 \atop k-1} \right\}^{[2]}, \\
&\vdots \\
(n-1)(n-2)\cdots(n+2k)\left\lfloor {2k+1 \atop k} \right\rfloor^{[2]} &= (n-1)\cdots(2k+1)(2k)\left\lfloor {2k \atop k} \right\rfloor^{[2]} \\
&+ (n-1)\cdots(n+2k)\left\lfloor {1+2(k-1) \atop k-1} \right\rfloor^{[2]}, \\
(n-1)\cdots(2k+1)(2k)\left\lfloor {2k \atop k} \right\rfloor^{[2]} &= (n-1)\cdots(2k)(2k-1)\left\lfloor {2k-1 \atop k} \right\rfloor^{[2]} \\
&+ (n-1)\cdots(2k)\left\lfloor {2(k-1) \atop k-1} \right\rfloor^{[2]}.
\end{aligned}$$

En faisant la somme de toutes les équations, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]} &= \left\lfloor {n-2 \atop k-1} \right\rfloor^{[2]} + (n-1)(n-2)\left\lfloor {n-2-1 \atop k-1} \right\rfloor^{[2]} + \cdots + (n-1)\cdots(2k)(2k-1)\left\lfloor {2k-1 \atop k} \right\rfloor^{[2]} \\
&+ (n-1)\cdots(2k)\left\lfloor {2(k-1) \atop k-1} \right\rfloor^{[2]},
\end{aligned}$$

et à partir des conditions initiales, on a : $\left\lfloor {2k-1 \atop k} \right\rfloor^{[2]} = 0$, le résultat est ainsi obtenu. $\square$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0							
2	0	1						
3	0	2						
4	0	6	1					
5	0	24	6					
6	0	120	36	1				
7	0	720	240	12				
8	0	5040	1800	120	1			
9	0	40320	15120	1200	20			
10	0	362880	141120	12600	300	1		
11	0	3628800	1451520	141120	4200	30		
12	0	39916800	16329600	1693440	58800	630	1	
13	0	479001600	199584000	21772800	846720	11760	42	
14	0	6227020800	2634508800	299376000	12700800	211680	1176	1
15	0	87178291200	37362124800	4390848000	199584000	3810240	28224	56

TABLE 5.1 – Triangle des nombres de Lah associés avec succession d'ordre 2.

5.3 Unimodalité des nombres de Lah associés avec succession d'ordre 2

Dans cette section, nous prouvons la stricte log-cocavité et par conséquent l'unimodalité des nombres de Lah avec succession d'ordre 2.

Théorème 67. *Soit* $L_n(x) := \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]} x^j$*, alors les racines de* $L_n(x)$ *sont rèelles, distinctes, et nègatives pour tout* $n = 1, 2, \ldots$.
De plus, les racines de $L_n(x)$ *et de* $L_{n-1}(x)$ *s'entrelacent de la manière suivante :*
Si $L_n(x)$ *et* $L_{n-1}(x)$ *sont tous les deux de même degré* d *et tels que leurs racines sont,* $0 = x_0 > x_1 > \cdots > x_{d-1}$ *et* $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{d-1} > y_{d-1}.$$

Si $L_n(x)$ *est de degré* $d+1$ *et* $L_{n-1}(x)$ *est de degré* d *et leurs racines sont :* $0 = x_0 > x_1 > \cdots > x_d$ *et* $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ *respectivement, alors :*

$$0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{d-1} > y_{d-1} > x_d.$$

Expressions de $L_n(x)$ **pour** $n \leq 7$ **:**
$L_0(x) = 1,$
$L_1(x) = 0,$
$L_2(x) = x$
$L_3(x) = 2x,$
$L_4(x) = 6x + x^2,$
$L_5(x) = 24x + 6x^2,$
$L_6(x) = 120x + 36x^2 + x^3,$
$L_7(x) = 720x + 240x^2 + 12x^3,$
$L_8(x) = 5040x + 1800x^2 + 120x^3 + x^4.$

Démonstration. La relation de récurrence (5.2) donne

$$L_n(x) = (n-1)L_{n-1}(x) + xL_{n-2}(x). \tag{5.4}$$

Prouvons notre Théorème par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour les premières valeurs de n.

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il reste vrai à l'ordre n.

En premier lieu, considérons le cas où $L_n(x)$ et $L_{n-1}(x)$ ont le même degré d, ce qui veut dire que n est impair. Soit $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ les racines de $L_{n-1}(x)$.

Etape 1 : Soient 0 et y_1 les deux plus grandes racines de $L_{n-1}(x)$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]y_1, 0[$ tel que $L'_{n-1}(c) = 0$. Vu que les coefficients de $L_{n-1}(x)$ sont positifs alors, $L_{n-1}(x)$ est décroissante sur $]y_1, c[$ et croissante sur $]c, 0[$, ce qui implique que $L_{n-1}(x) < 0$, pour tout $x \in]y_1, 0[$.

Etape 2 : Posons maintenant $x = y_1$ dans (5.4).

— On sait, par hypothèse de récurrence, que les racines de $L_{n-2}(x)$ sont $0 = z_0 > z_1 > \cdots > z_{d-2}$ et s'entrelacent avec celles de $L_{n-1}(x)$ comme suit : $0 > y_1 > z_1 > y_2 > z_2 > \cdots > z_{d-2} > y_{d-1}$.

  D'aprés l'étape 1, on a $L_{n-2}(x) < 0$, pour tout $x \in]z_1, 0[$, et particulièrement pour $x = y_1$ ce qui implique que $L_{n-2}(y_1) < 0$.

— $L_{n-1}(y_1)$=0.

Pour $x = y_1$, on a montré que $L_{n-1}(y_1) + y_1 L_{n-2}(y_1)$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs et par conséquant $L_n(y_1) > 0$.

Etape 3 : Posons maintenant $x = y_2$ dans (5.4).

— On sait, par hypothèse de récurrence, que les racines de $L_{n-2}(x)$ sont $0 = z_0 > z_1 > \cdots > z_{d-2}$ et s'entrelacent avec celles de $L_{n-1}(x)$ comme suit : $0 > y_1 > z_1 > y_2 > z_2 > \cdots > z_{d-2} > y_{d-1}$.

  D'aprés l'étape 1, on a $L_{n-2}(x) > 0$, pour tout $x \in]z_2, z_1[$, et particulièrement pour $x = y_2$ ce qui implique que $L_{n-2}(y_2) > 0$.

— $L_{n-1}(y_2)$=0.

Pour $x = y_2$, on a montré que $L_{n-1}(y_2) + y_2 L_{n-2}(y_2)$ est négatif, par conséquant $L_n(y_2) < 0$.

D'aprés l'etape 2 et l'etape 3, $L_n(x)$ a une racine dans l'intervalle $]y_2, y_1[$, notant cette racine par x_2.

Prouvons maintenant que $L_n(x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $L_n(y_i)$ et $L_n(y_{i+1})$ ont des signes différents.

— $L_{n-1}(y_{i+1}) = L_{n-1}(y_i) = 0$.

D'aprés (5.4), $L_n(y_i)$ et $L_n(y_{i+1})$ ont des signes différents, ce qui implique que $L_n(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$.

Comme $L_n(x)$ a un nombre impair de racines dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, car il change de signe dans chaque borne de cet intervalle. On sait que le nombre de racines de $L_n(x)$

dépasse au plus, d'une racine celui de $L_{n-1}(x)$, par conséquent $L_n(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$.

Etape 4 : On sait de l'etape 2 que $L_n(x)$ est croissant pour $x \in]x_2, y_1[$, ce qui implique que $L_n^{'}(x)$ est possitif dans l'intervalle $]x_2, y_1[$.
Autrement, on a $L_n^{'}(x) = (n-1)L_{n-1}^{'}(x) + L_{n-2}(x) + xL_{n-2}^{'}(x)$, et il existe un voisinage de y_1 où $L_{n-1}^{'}(x) < 0$, $L_{n-2}(x) < 0$, et $L_{n-2}^{'}(x) > 0$ ce qui implique que $L_n^{'}(x)$ est négatif à ce voisinage. Ce qui implique que $L_n^{'}(x)$ doit avoir une racine dans $]x_2, 0[$, notant la α. De plus, on a $L_n^{'}(0) = (n-1)L_{n-1}^{'}(0) > 0$. alors $L_n^{'}(x)$ est croissant sur $]\alpha, 0[$, ce qui implique qu'il doit avoir une racine dans $]\alpha, 0[$, notant la β.
D'aprés l'etape 4, $L_n(x)$ doit avoir une racine dans $]y_1, 0[$. ce qui compète la preuve.

Considérons maintenant le cas où $L_n(x)$ est de degré $d+1$ et que $L_{n-1}(x)$ est de degré d, ce qui veut dire que n est pair. La preuve est la même que celle du premier cas. De plus on sait que la dernière racine de $L_n(x)$ doit être négative. Elle ne peut être dans aucun intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, ce qui implique qu'elle appartient à l'intervalle $]-\infty, y_{d-1}[$, ce qui termine la preuve. □

Théorème 68. *La suite* $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]}\right)_{k=0}^{n}$ *est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème 13 et le Théorème 67. □

Théorème 69. *La suite* $\left(\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[2]}\right)_{k=0}^{n}$ *est une suite PF.*

Démonstration. Par le Théorème 15 et le Théorème 67. □

Nous terminons cette section par prouver la stricte log-concavité ainsi que l'unimodalité de toute suite parcourant les transversales de direction $(1, 1)$ du triangle des nombres de Lah.

Théorème 70. *La suite* $\left(\left\lfloor {n-k \atop k} \right\rfloor\right)_{k}$ *est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Démonstration. Par le Théorème 69 et la relation (5.1). □

Théorème 71. *La suite* $\left(\left\lfloor {n-k \atop k} \right\rfloor\right)_{k}$ *est une suite PF.*

Démonstration. D'aprés le Théorème 15 et le le Théorème 69. □

5.4 Suites parcourant les transversales de direction $(1,\alpha)$ dans le triangle des nombres de Lah

Dans cette partie nous proposons une généralisation de la Définition 62 et du Théorème 65, cette dernière représente une interpretation combinatoire des suites parcourant la direction $(1,\alpha)$ dans le triangle des nombres de Lah.

5.4.1 Interpretation combinaoitre

Définition 72. *Les nombres de Lah associés avec succession d'ordre t, notés $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[t]}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k listes, tels que les t plus petits nombres dans chaque liste sont consécutifs dans l'ordre suivant : $i, i+1, \ldots, i+t-1$.*

Nous donnons quelques exemples pour clarifier et simplifier notre interpretation combinatoire.

Exemple 73.

— $\left\lfloor {5 \atop 1} \right\rfloor^{[3]} = 6$, *on a* $1,2,3,4,5$; $1,2,3,5,4$; $4,5,1,2,3$, $5,4,1,2,3$; $5,1,2,3,4$; $4,1,2,3,5$.

— $\left\lfloor {6 \atop 1} \right\rfloor^{[3]} = 24$, *on a* $1,2,3,4,5,6$; $1,2,3,4,6,5$; $1,2,3,6,4,5$; $1,2,3,6,5,4$; $1,2,3,5,6,4$; $1,2,3,5,4,6$; $4,1,2,3,5,6$; $4,1,2,3,6,5$; $5,1,2,3,4,6$; $5,1,2,3,6,4$; $6,1,2,3,4,5$; $6,1,2,3,5,4$; $4,5,,1,2,3,6$; $5,4,1,2,3,6$; $4,6,1,2,3,5$; $6,4,1,2,3,5$; $5,6,1,2,3,4$; $6,5,1,2,3,4$; $4,5,6,1,2,3$; $4,6,5,1,2,3$; $6,4,5,1,2,3$; $6,5,4,1,2,3$; $5,6,4,1,2,3$; $5,4,6,1,2,3$.

$\left\lfloor {6 \atop 2} \right\rfloor^{[3]} = 1$, *on a* $1,2,3/4,5,6$.

— $\left\lfloor {5 \atop 1} \right\rfloor^{[4]} = 2$, *on a* $1,2,3,4,5$; $5,1,2,3,4$.

— $\left\lfloor {6 \atop 1} \right\rfloor^{[4]} = 6$, *on a* $1,2,3,4,5,6$; $1,2,3,4,6,5$; $5,1,2,3,4,6$; $6,1,2,3,4,5$; $5,6,1,2,3,4$; $6,5,1,2,3,4$.

Remarque 74. *Les lignes du triangle des nombres de Lah associés avec succession d'ordre t sont exactement les transversales de direction $(1,\alpha)$ du triangle de Lah.*

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor^{[t]} = \left\lfloor {n-\alpha k \atop k} \right\rfloor, \tag{5.5}$$

où $\alpha = t-1$.

n k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0					
2	0					
3	0	1				
4	0	2				
5	0	6				
6	0	24	1			
7	0	120	6			
8	0	720	36			
9	0	5040	240	1		
10	0	40320	1800	12		
11	0	362880	15120	120		
12	0	3628800	141120	1200	1	
13	0	39916800	1451520	12600	20	
14	0	479001600	19595520	141120	300	
15	0	6227020800	275063040	3003840	4200	1

TABLE 5.2 – Triangle des nombres de Lah associés avec succession d'ordre 3.

5.4.2 Relation de récurrence

Les nombres de Lah associés avec succession d'ordre t, vérifient la relation de récurrence suivante

Théorème 75. *Pour $n \geq tk$, on a.*

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor^{[t]} = (n-1+(2-t)k)\left\lfloor \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rfloor^{[t]} + \left\lfloor \begin{matrix} n-t \\ k-1 \end{matrix} \right\rfloor^{[t]}, \tag{5.6}$$

avec $\lfloor \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \rfloor^{[t]} = 1$, $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \rfloor^{[t]} = 0$, $(n \geq 1)$.

Démonstration. Il suffit de raisonner sur la part qui contient l'élément n. Soit il est seul avec ses $t-1$ prédécesseurs dans l'ordre imposé $n-(t-1), \ldots, n-1, n$, alors il reste a former $(k-1)$ listes à partir des $(n-t)$ éléments restants, et on a $\lfloor \begin{smallmatrix} n-t \\ k-1 \end{smallmatrix} \rfloor^{[t]}$ façons de le faire. Soit l'élément n n'est pas seul avec ses $t-1$ prédécesseurs, alors on forme k listes à partir des $(n-1)$ élements tel que les conditions soient satisfaites, et on rajoute l'élement n aux k listes. On peut rajouter l'élement n avant chaque nombre et à la fin de chaque liste, et donc on a $n-1+k$ possibilités de le faire, or on ne peut pas l'ajouter entre les t plus petits nombres dans chaque liste car il doivent être consécutifs, et il existe $(t-1)k$ possibilités, alors on a $(n-1+(2-t)k)\lfloor \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \rfloor^{[t]}$ possibilités. Ce qui termine la preuve. □

5.5 Les nombres t-Fibonacci-Lah

On introduit les nombres de t-Fibonacci-Lah,

Définition 76. *On définit la suite de t-Fibonacci-Lah $(FL_n)_n$, pour tout $n \geq tk$, par*

$$FL_{n+1}^{(t+1)} := \sum_k \left\lfloor \begin{matrix} n-tk \\ k \end{matrix} \right\rfloor, \tag{5.7}$$

avec : $FL_0^{(t)} = 1, FL_1^{(t)} = 0$.

Remarque 77. *La relation entre les nombres de t-Fibonacci-Lah et les nombres de Lah associés avec succession d'ordre t est représentée par la relation suivante,*

$$FL_{n+1}^{(t+1)} = \sum_k \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor^{[t+1]}. \tag{5.8}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FL_n^{(2)}$	1	0	1	2	7	30	157	972	6961	56660	516901

TABLE 5.3 – Quelques valeurs des nombres 2-Fibonacci-Lah.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FL_n^{(3)}$	1	0	0	1	2	6	25	126	756	5281	42132

TABLE 5.4 – Quelques valeurs des nombres 3-Fibonacci-Lah.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FL_n^{(4)}$	1	0	0	0	1	2	6	24	121	726	5076

TABLE 5.5 – Quelques valeurs des nombres 4-Fibonacci-Lah.

6

Suites liées aux transversales principales du triangle de Stirling de première espèce

Plan du chapitre

6.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés dans les chapitres précédents à l'étude des suites liées au triangle de Stirling de seconde espèce, dans ce chapitre nous prenons en considération le cas des suites liées au triangle de Stirling de première espèce [Cha05].
Rappelons qu'au premier chapitre, à la Section 1.5, nous avons énoncé que la suite liée aux lignes du triangle de Stirling de première espèce est unimodale. On s'intèresse dans ce qui suit à étudier le comportement des suites liées aux transversales principales de ce triangle. On donne ensuite une nouvelle interprétation combinatoire des suites qui parcourent les transversales principales du triangle de Stirling de première espèce, ainsi que leur relation de récurrence. On propose une généralisation à la fin de chapitre.

6.2 Interprétation combinatoire et relation de récurrence

Nous donnons maintenant, une interprétation combinatoire aux lignes de ce nouveau triangle, qu'on appelle par la suite **le triangle des nombres Stirling associés avec succession d'ordre** 2 **de première espèce**.

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	2	3	1	
4	0	6	11	6	1
5	0	24	50	35	10
6	0	120	274	225	85

FIGURE 6.1 – Direction $(1, 1)$ dans le triangle de Stirling de première espèce.

Définition 78. *Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 *de première espèce, notés par* $\left[{n \atop k}\right]^{[2]}$, *représentent le nombre des n-permutations à k cycles, tels que les deux plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre* $i, i+1$.

Nous donnons quelques exemples pour clarifier et simplifier notre interpretation combinatoire.

Exemple 79.

— $\left[{4 \atop 1}\right]^{[2]} = 2$ *compte le nombre de* 4*-permutations possédant* 1 *cycle tels que les deux plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre* $i, i+1$*, en effet on a les permutations suivantes :* (1234) ; (1243)*. Les permutations* (1423) ; (1432) ; (1324) ; (1342) *ne sont pas acceptées car les nombres* 1 *et* 2 *ne sont pas conséutifs.*

— $\left[{4 \atop 2}\right]^{[2]} = 1$*, en effet on a la permutation suivante :* (12)(34)*.*

— $\left[{5 \atop 1}\right]^{[2]} = 6$ *compte le nombre de* 5*-permutations possédant* 1 *cycle tels que les deux plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre* $i, i+1$*, en effet on a les permutations suivantes :* (12345) ; (12354) ; (12534) ; (12543) ; (12453) ; (12435)*.*

— $\left[{5 \atop 2}\right]^{[2]} = 3$*, en effet on a les permutations suivantes :* (12)(345) ; (123)(45) ; (125)(34)*.*

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante.

Théorème 80. *Pour* $n \geq 2k$*, on a*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{[2]} = (n-1-k)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^{[2]} + \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}^{[2]}, \tag{6.1}$$

avec $\left[{0 \atop 0}\right]^{[2]} = 1$, $\left[{n \atop n-1}\right]^{[2]} = 0$ *et* $\left[{n \atop 0}\right]^{[2]} = 0$ $(n \geq 1)$*.*

Démonstration. On considère le nombre n :
Soit il forme avec son prédécesseur un cycle et par conséquent on a $\left[{n-2 \atop k-1}\right]^{[2]}$ façons d'avoir des permutations à $k-1$ cycles d'un ensemble à $n-2$ éléments, tels que les deux plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre imposé.
Soit il est contenu dans un autre cycle non réduit à deux éléments, et donc on va avoir $\left[{n-1 \atop k}\right]^{[2]}$ façons d'avoir k cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments, tel que les deux plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre imposé. Et on a $(n-1)$ façons de le placer le $n^{\text{ième}}$ nombre sauf les positions des nombres consécutifs, on aura ainsi $(n-1-k)$ façons de le placer. Ce qui termine la preuve. □

Remarque 81. *Pour tout* $n \geq 2k$*, on a*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{[2]} = \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}.$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0						
2	0	1					
3	0	1					
4	0	2	1				
5	0	6	3				
6	0	24	11	1			
7	0	120	50	6			
8	0	720	274	35	1		
9	0	5040	1764	225	10		
10	0	40320	13068	1399	85	1	
11	0	362880	109584	11557	735	15	
12	0	3628800	1026576	105524	6544	175	1

TABLE 6.1 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 de première espèce.

6.3 Sur l'unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 de première espèce

Afin d'étudier l'unimodalité de cette suite, nous avons défini le polynôme qui génère les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 de première espèce comme suit. Soit

$$Q_n(x) = \sum_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^{[2]} x^j,$$

à partir de la relation de récurrence (6.1), on a :

$$Q_n(x) = (n-1)Q_{n-1}(x) - xQ'_{n-1}(x) + xQ_{n-2}(x). \tag{6.2}$$

Expressions de $Q_n(x)$ pour $n \leq 6$:
$Q_0(x) = 1,$
$Q_1(x) = 0,$
$Q_2(x) = x,$
$Q_3(x) = x,$
$Q_4(x) = 2x + x^2,$
$Q_5(x) = 6x + 3x^2,$
$Q_6(x) = 24x + 11x^2 + x^3.$

En calculant les racines de ce polynôme, on remarque que ces dernières sont négatives mais ne s'entrelacent pas entre elles nécessairement, ce qui ne nous permet pas d'utiliser l'approche usitée dans les chapitres précédents, et de conclure quant à l'unimodalité de cette suite. Par conséquent celle des suites liées aux diagonales principales du triangle de Stirling de première espèce. Nous donnons l'exemple des polynômes $Q_4(x)$ et Q_5, ces derniers ont les mêmes racines 0 et -2.

6.4 Suites parcourant les transversales de direction $(1, \alpha)$ dans le triangle des nombres de Stirling de première espèce

Dans cette partie nous proposons une interprétation combinatoire des suites parcourant la direction $(1, \alpha)$ dans le triangle des nombres de Stirling de première espèce.

6.4.1 Interprétation combinatoire

Définition 82. *Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t de première espèce, notés par $\left[{n \atop k}\right]^{[t]}$, représentent le nombre des n-permutations à k cycles, tels que les $t-1$ plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre $i, i+1, \ldots, i+(t-1)$.*

Nous donnons quelques exemples pour clarifier et simplifier notre interpretation combinatoire.

Exemple 83.

— $\left[{5 \atop 1}\right]^{[3]} = 2$, *on a* (12345) ; (12354).
— $\left[{6 \atop 1}\right]^{[3]} = 6$, *on a* (123456) ; (123465) ; (123645) ; (123654) ; (123564) ; (123546).
$\left[{6 \atop 2}\right]^{[3]} = 1$, *on a* $(123)(456)$.

— $\left[{5 \atop 1}\right]^{[4]} = 1$, *on a* (12345).
— $\left[{6 \atop 1}\right]^{[4]} = 1$, *on a* (123456) ; (123465).

Remarque 84. *Les lignes du triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t de première espèce sont exactement les transversales de direction $(1,\alpha)$ du triangle des nombres de Stirling de première espèce.*

$$\left[{n \atop k}\right]^{[t]} = \left[{n-\alpha k \atop k}\right], \tag{6.3}$$

où $\alpha = t-1$.

6.4.2 Relation de récurrence

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t de première espèce, vérifient la relation de récurrence suivante

Théorème 85. *Pour $n \geq tk$, on a*

$$\left[{n \atop k}\right]^{[t]} = (n-1-(t-1)k)\left[{n-1 \atop k}\right]^{[t]} + \left[{n-t \atop k-1}\right]^{[t]}, \tag{6.4}$$

où $\left[{0 \atop 0}\right]^{[t]} = 1$, $\left[{n \atop 0}\right]^{[t]} = 0$, $(n \geq 1)$.

Démonstration. On considère le nombre n :
Soit il forme avec ses $t-1$ prédécesseurs un cycle suivant l'ordre imposé est par conséquant on a $\left[{n-t \atop k-1}\right]^{[t]}$ façons d'avoir des permutations à $k-1$ cycles d'un ensemble à $n-t$ éléments, tels que les t plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre imposé.

Soit il est contenu dans un autre cycle non réduit à t éléments, et donc on va avoir $\left[{n-1 \atop k}\right]^{[t]}$ façons d'avoir k cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments, tel que les t plus petits nombres dans chaque cycle sont consécutifs dans l'ordre imposé. Et on a $(n-1)$ façons de le placer le $n^{\text{ième}}$ nombre saufs les positions des nombres consécutifs, on aura donc $(n-1-(t-1)k)$ façons de le placer. Ce qui termine la preuve. $\square$

n k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0					
2	0					
3	0	1				
4	0	1				
5	0	2				
6	0	6	1			
7	0	24	3			
8	0	120	11			
9	0	720	50	1		
10	0	5040	274	6		
11	0	40320	1764	35		
12	0	362880	13068	225	1	
13	0	3628800	109584	1399	10	
14	0	39916800	1026576	11557	85	
15	0	479001600	10628640	105524	735	1

TABLE 6.2 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 3 de première espèce.

6.5 Les nombres t-Fibonacci-Stirling de première espèce

On introduit les nombres de t-Fibonacci-Stirling de première espèce,

Définition 86. *On définit la suite t-Fibonacci-Stirling de première espèce $(FP_n)_n$, pour tout $n \geq tk$, par*

$$FP_{n+1}^{(t+1)} := \sum_k \begin{bmatrix} n - tk \\ k \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

avec $FP_0^{(t)} = 1$ et $FP_1^{(t)} = 0$.

Remarque 87. *La relation entre les nombres t-Fibonacci-Stirling de première espèce et les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre t de première espèce est donnée par*

$$FP_{n+1}^{(t+1)} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{[t+1]}. \tag{6.6}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FP_n^{(2)}$	1	0	1	1	3	9	36	176	1030	7039	54873

TABLE 6.3 – Quelques valeurs des nombres 2-Fibonacci-Stirling de première espèce.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FP_n^{(3)}$	1	0	0	1	1	2	7	27	131	771	532

TABLE 6.4 – Quelques valeurs des nombres 3-Fibonacci-Stirling de première espèce.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FP_n^{(4)}$	1	0	0	0	1	1	2	6	25	123	731

TABLE 6.5 – Quelques valeurs des nombres 4-Fibonacci-Stirling de première espèce.

7

Suites liées aux transversales principales du triangle des nombres Eulériens

Plan du chapitre

7.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux nombres Eulériens. Ces nombres introduits par Euler, représentent les coefficients du développement de x^n en somme de coefficients binomiaux.

Nous suivons dans ce qui suit la notation de Graham, Knuth and Patashnik [GKP89] pour les nombres Eulériens.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n}.$$

Le coefficient $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ est appelé **nombre Eulérien**.

Les nombres Eulériens $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, comptent le nombre des n-permutations qui ont k montés, ou bien $k-1$ descentes.

Ils vérifient la relation de récurrence suivante

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle.$$

La suite $(\left\langle {n \atop k} \right\rangle)_k$, liée aux lignes du triangle des nombres Eulériens est unimodale, voir [BE99, Wil98]. Pour plus de propriétés sur les nombres Eulériens, nous invitons le lecteur à consulter le livre de Bóna [Bón12].

Dans ce chapitre, nous donnons une interprétation combinatoire aux suites liées aux diagonales principales du triangle des nombres Eulériens, ainsi que leur relation de récurrence.

n/k	1	2	3	4	5
0	1				
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1
6	1	57	302	302	57

FIGURE 7.1 – Direction $(1,1)$ dans le triangle des nombres Eulériens.

7.2 Interprétation combinatoire et relation de récurrence

Par une approche combinatoire nous introduisons *les nombres Eulériens avec succession d'ordre* 2. On donne leur relation de récurrence.

Définition 88. *Soit $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ une permutation. On dit que i est une* 2*-montée de p, si $p_i < p_{i+1} < p_{i+2}$.*
Deux 2*-montée consécutives ont au plus un élément en commun.*

Exemple 89.
Soit $p = 245136$. Alors $1, 4$ sont des 2*-montées.*
Soit $p = 1234$. Alors p possède une seule 2*-montée, soit* 1*, soit* 2*.*

Définition 90. *Les nombres Eulériens avec succession d'ordre* 2*, notés $\left\langle {n \atop k} \right\rangle^{[2]}$, comptent le nombre des n-permutations qui ont k* 2*-montées. En outre le nombre n, s'il est consécutif avec son prédécesseur alors ils interviennent seulement dans les montées, sinon il intervient seul dans une permutation qui possède au préalable k* 2*-montées.*

Nous donnons quelques exemples pour clarifier et simplifier notre interpretation combinatoire.

Exemple 91.

— $\left\langle {4 \atop 0} \right\rangle^{[2]} = 1$*, en effet, on a la permutation suivante :* 4321.
— $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle^{[2]} = 4$*, en effet, on a les permutations suivantes :* 1243 *;* 4123 *;* 2134 *;* 2341*. La permutation* 1342 *n'est pas accéptée car* 3 *et* 4 *interviennent dans une montée. La aperumtation* 1234 *est aussi pas accéptée car* 123 *et* 234 *ont deux élément en commun, ce qui contre dit la définition d'une* 2*-montée.*

La relation de réccurence suivante est vérifiée

Théorème 92. *Pour tout $n > 2k$, on a*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle^{[2]} = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle^{[2]} + (n-2k)\left\langle {n-2 \atop k-1} \right\rangle^{[2]}, \tag{7.1}$$

avec $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle^{[2]} = 1$, $n \geq 0$.

Démonstration. Raisonnons sur le nombre n,
Soit il intervient seul sur une $(n-1)$-permutations avec k 2-montées, et donc il ne doit pas changer le nombre des 2-montées, c'est à dire, soit on le met au début de la permutation,

soit dans la dernière position d'une 2-montée, et donc on a $k+1$ possibilités de l'insérer. Soit il intervient avec son prédécesseur, dans ce cas on a déja les $(n-2)$-permutations avec $(k-1)$ 2-montées, donc on les insert dans toutes les positions sauf celles des (k-1) 2-montées existantes ainsi on aura $(n-2)-2(k-1)$ possibilités d'où les $n-2k$ positions possibles. $\square$

Remarque 93. *Les lignes du triangle des nombres Eulériens avec succession d'ordre* 2 *sont exactement les transversales de direction* $(1,1)$ *du triangle des nombres Eulériens.*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle^{[2]} = \left\langle {n-k \atop k} \right\rangle. \tag{7.2}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1							
2	1							
3	1	1						
4	1	4						
5	1	11	1					
6	1	26	11					
7	1	57	66	1				
8	1	120	302	26				
9	1	247	1191	302	1			
10	1	502	4293	2416	57			
11	1	1013	14608	15619	1191	1		
12	1	2036	47840	88234	15619	120		
13	1	4083	152637	455192	156190	4293	1	
14	1	8178	478271	2203488	1310354	88234	247	
15	1	16369	1479726	10187685	9738114	1310354	14608	1
16	1	32752	4537314	45533450	66318474	15724248	455192	502

TABLE 7.1 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2.

A

Tables relatifs aux différents triangles arithmétiques

n k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0							
2	0							
3	0							
4	0	1						
5	0	1						
6	0	1						
7	0	1						
8	0	1	1					
9	0	1	3					
10	0	1	7					
11	0	1	15					
12	0	1	31	1				
13	0	1	63	6				
14	0	1	127	25				
15	0	1	255	90				
16	0	1	511	301	1			
17	0	1	1023	966	10			
18	0	1	2047	3025	65			
19	0	1	4095	9330	350			
20	0	1	8191	28501	1701	1		
21	0	1	16383	86526	7700	15		
22	0	1	32767	261625	34105	140		
23	0	1	65535	788970	145750	1050		
24	0	1	131071	2375101	611501	6951	1	
25	0	1	262143	7141686	2532530	42525	21	
26	0	1	524287	21457825	10391745	246730	266	
27	0	1	1048575	64439010	42355950	1379400	2646	
28	0	1	2097151	193448101	171798901	7508501	22827	1

TABLE A.1 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 4.

n k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0	1					
6	0	1					
7	0	1					
8	0	1					
9	0	1					
10	0	1	1				
11	0	1	3				
12	0	1	7				
13	0	1	15				
14	0	1	31				
15	0	1	63	1			
16	0	1	127	6			
17	0	1	255	25			
18	0	1	511	90			
19	0	1	1023	301			
20	0	1	2047	966	1		
21	0	1	4095	3025	10		
22	0	1	8191	9330	65		
23	0	1	16383	28501	350		
24	0	1	32767	86526	1701		
25	0	1	65535	261625	7700	1	
26	0	1	131071	788970	34105	15	
27	0	1	262143	2375101	145750	140	
28	0	1	524287	7141686	611501	1050	
29	0	1	1048575	21457825	2532530	6951	
30	0	1	2097151	64439010	10391745	42525	1

TABLE A.2 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 5.

n k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0				
2	0				
3	0				
4	0	1			
5	0	2			
6	0	6			
7	0	24			
8	0	120	1		
9	0	720	6		
10	0	5040	36		
11	0	40320	240		
12	0	362880	1800	1	
13	0	3628800	15120	12	
14	0	39916800	141120	120	
15	0	479001600	1451520	1200	
16	0	6227020800	19595520	12600	1

TABLE A.3 – Triangle des nombres de Lah associés avec succession d'ordre 4.

n k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0				
2	0				
3	0				
4	0	1			
5	0	1			
6	0	2			
7	0	6			
8	0	24	1		
9	0	120	3		
10	0	720	11		
11	0	5040	50		
12	0	40320	274	1	
13	0	362880	1764	6	
14	0	3628800	13068	35	
15	0	39916800	109584	225	
16	0	479001600	1026576	1399	1

TABLE A.4 – Triangle des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 4 de première espèce.

Bibliographie

[AE79] J. C. Ahuja and E. A. Enneking. *Concavity property and a recurrence relation for associated Lah numbers*. *FIBONACCI QUARTERLY*, 17(2) :158–161, 1979. 1, 12, 57

[ASW52] M. Aissen, I. J. Schoenberg, and A. M. Whitney. *On the generating functions of totally positive sequences I*. *Journal d'Analyse Mathematique*, 2(1) :93–103, 1952. 14

[Bal90] M. Balazard. *Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres*. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 2(1) :13–30, 1990. 1, 13

[BB06a] H. Belbachir and F. Bencherif. *Les annales ROAD*. 2006. 12

[BB06b] H. Belbachir and F. Bencherif. *Linear recurrent sequences and powers of a square matrix*. *Integers*, 6 :A12, 2006. 29

[BB11] H. Belbachir and F. Bencherif. *Unimodality of sequences associated to Pell numbers*. *Ars Combinatoria*, 102 :305–311, 2011. 12

[BB13] H. Belbachir and A. Belkhir. *Cross recurrence relations for r-Lah numbers*. *Ars Combinatoria*, 110 :199–203, 2013. 57

[BB14] H. Belbachir and I-E. Bousbaa. *Associated Lah numbers and r-Stirling numbers*. *arXiv preprint arXiv :1404.5573*, 2014. 48, 57

[BE99] M. Bóna and R. Ehrenborg. *A combinatorial proof of the log-concavity of the numbers of permutations with k runs*. *arXiv preprint math/9902020*, 1999. 79

[Ben96a] M. Benoumhani. *On Whitney numbers of Dowling lattices*. *Discrete Mathematics*, 159(1) :13–33, 1996. 48

[Ben96b] M. Benoumhani. *Sur une proprieté des polynômes a racines réelles négatives*. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 75(2) :85–105, 1996. 1

[Ben99] M. Benoumhani. *Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices*. *Advances in Applied Mathematics*, 22(2) :186–189, 1999. 12

[Ben03] M. Benoumhani. *A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers*. *J. Integer Seq*, 6, 2003. 12, 14

[BM16] M. Bóna and I. Mező. *Real zeros and partitions without singleton blocks*. *European Journal of Combinatorics*, 51 :500–510, 2016. 3, 4, 27, 48, 54

[Bón12] M. Bóna. *Combinatorics of permutations*. CRC Press, 2012. 9, 79

[Bre89] F. Brenti. *Unimodal, Log-concave and P lya Frequency Sequences in Combinatorics*, volume 413. American Mathematical Soc., 1989. 1, 11, 13, 14

[Bro84] A. Broder. *The r-Stirling numbers*. *Discrete Mathematics*, 49(3) :241–259, 1984. 25, 27, 48

[BS08] H. Belbachir and L. Szalay. *Unimodal rays in the ordinary and generalized Pascal triangles*. *Journal of Integer Sequences*, 11(2) :3, 2008. 2, 12

[BS11] H. Belbachir and L. Szalay. *Unimodal rays in the regular and generalized Pascal pyramids*. *the electronic journal of combinatorics*, 18(1) :P79, 2011. 12

[BT15] H. Belbachir and A. F. Tebtoub. *Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, nombres de Fibonacci– Stirling et unimodalité*. *Comptes Rendus Mathematique*, 353(9) :767–771, 2015. 33

[But90] L. M. Butler. *The q-log-concavity of q-binomial coefficients*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 54(1) :54–63, 1990. 12

[Can78] E. R. Canfield. *On the location of the maximum Stirling number (s) of the second kind*. *Studies in Applied Mathematics*, 59(1) :83–93, 1978. 15, 20

[Can95] E. R. Canfield. *Engel's inequality for Bell numbers*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 72(1) :184–187, 1995. 15

[Cha02] Ch. Charalambides. *Enumerative combinatorics*. CRC Press, 2002. 3, 11, 57

[Cha05] Ch. Charalambides. *Combinatorial methods in discrete distributions*, volume 600. John Wiley & Sons, 2005. 3, 11, 48, 57, 70

[Com74] L. Comtet. *Advanced Combinatorics : The art of finite and infinite expansions*. Springer Science & Business Media, 1974. 3, 11, 48

[CP02] E. R. Canfield and C. Pomerance. *On the problem of uniqueness for the maximum Stirling number (s) of the second kind*. *INTEGERS : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 2(A01) :2, 2002. 15, 20

[Dar64] J. N. Darroch. *On the distribution of the number of successes in independent trials*. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1317–1321, 1964. 12, 13

[Dob68] AJ. Dobson. *A note on Stirling numbers of the second kind*. *Journal of Combinatorial Theory*, 5(2) :212–214, 1968. 15, 20

[Eng94] K. Engel. *On the average rank of an element in a filter of the partition lattice*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 65(1) :67–78, 1994. 15

[Erd48] P. Erdös. *On the integers having exactly k prime factors*. *Annals of Mathematics*, pages 53–66, 1948. 12

[Erd53] P. Erdös. *On a conjecture of Hammersley*. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2) :232–236, 1953. 13, 14

[GKP89] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Massachusetts : Addison-Wesley, 1989. 9, 79

[Ham51] JM. Hammersley. *The sums of products of the natural numbers*. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1) :435–452, 1951. 13, 14

[Har67] LH. Harper. *Stirling behavior is asymptotically normal*. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 410–414, 1967. 1, 20, 44

[How80] F. Howard. *Associated Stirling numbers*. *Fibonacci Quart*, 18(4) :303–315, 1980. 48

[Hug77] J. Hughes. *Lie algebraic proofs of some theorems on partitions*. Academic Press, New York, 1977. 12

[Jor65] Ch. Jordan. *Calculus of Finite Differences*. *Chelsea, New York*, 1965. 9

[Kar68] S. Karlin. *Total positivity*, volume 1. Stanford University Press, 1968. 14

[Kur72] D. C. Kurtz. *A note on concavity properties of triangular arrays of numbers*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 13(1) :135–139, 1972. 12

[Lah54] I. Lah. *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*. 1954. 57

[Lah55] I. Lah. *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*. *Mitteilungsbl. Math. Statist*, 7 :203–212, 1955. 57

[Lie68] E. H. Lieb. *Concavity properties and a generating function for Stirling numbers*. *Journal of Combinatorial Theory*, 5(2) :203–206, 1968. 2, 13, 15, 20

[Liu12] L. Liu. *Polynomials with real zeros and compatible sequences*. *the electronic journal of combinatorics*, 19(3) :P33, 2012. 2

[Man12] T. Mansour. *Combinatorics of set partitions*. CRC Press, 2012. 8

[MM12] M. Mihoubi and M. S. Maamra. *The (r1,..., rp)-Stirling numbers of the second kind*. *Intgers*, 12(5) :1047–1059, 2012. 48

[Mul69] R. Mullin. *On Rota's problem concerning partitions*. *Aequationes Mathematicae*, 2(1) :98–104, 1969. 15, 20

[NR15] G. Nyul and G. Rácz. *The r-Lah numbers*. *Discrete Mathematics*, 338(10) :1660–1666, 2015. 12, 57

[PP02] M. Petkovsek and T. Pisanski. *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*. 2002. 57

[Rio12] J. Riordan. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation, 2012. 3, 9, 11, 48

[So03] Neil J. A. Sloane and others. *The on-line encyclopedia of integer sequences*, 2003. 21

[Sta86] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*. Springer, 1986. 9

[Sta89] R. P. Stanley. *Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometrya*. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576(1) :500–535, 1989. 1, 11, 13

[Sti64] J. Stirling. *Methodus differentialis, sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Auctore Jacobo Stirling, RSS*. prostat apud J. Whiston & B. White, in Fleet-street, 1764. 9

[Szé87] L. A. Székely. *The analytic behavior of the holiday numbers*. *Acta Sci. Math*, 51 :365–369, 1987. 12

[TZ74] S. M. Tanny and M. Zuker. *On a unimodal sequence of binomial coefficients*. *Discrete Mathematics*, 9(1) :79–89, 1974. 1, 2, 12, 20

[TZ76] S. M. Tanny and M. Zuker. *On a unimodal sequence of binomial coefficients II*. *Combin. Inform. System Sci*, 1(1) :81–91, 1976. 33, 43

[TZ78] S. M. Tanny and M. Zuker. *Analytic methods applied to a sequence of binomial coefficients*. *Discrete Mathematics*, 24(3) :299–310, 1978. 33, 43

[Wil98] H. S. Wilf. *Real zeroes of polynomials that count runs and descending runs*. *Unpublished manuscript*, 1998. 79

[Wil13] H. S. Wilf. *Generatingfunctionology*. Elsevier, 2013. 13

[WY05] Y. Wang and Y-N. Yeh. *Polynomials with real zeros and Pólya frequency sequences*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 109(1) :63–74, 2005. 2, 12, 14