N° d'ordre 10/2016-D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

THESE

Présentée Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques
En Spécialité : Systèmes Dynamiques

Par

Melle RIHANI Samira

Thème :

EXISTENCE ET PROPRIETES DE CERTAINS TYPES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES, ET MODELE DE DYNAMIQUE

Le jury proposé est composé de :

Mr. R. BEBBOUCHI	Professeur à l' USTHB	Président de Jury
Mr. A. KESSAB	Professeur à l' USTHB	Directeur de Thèse
Mr. F. CHERIF	Professeur à l' UNIV. SOUSSE-TUNISIE	Examinateur
Mr. M. KIRANE	Professeur à MIA. LA ROCHELLE	Co-Directeur de Thèse
Mr. L. MELKEMI	Professeur à l' UHL BATNA	Examinateur
Mr. M. S. MOULAY	Professeur à l' USTHB	Examinateur
Mr T. MOUSSAOUI	Professeur à ENS KOUBA	Examinateur

Novembre 2016

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de systèmes dynamiques de la faculté de mathématiques-USTHB et au laboratoire de mathématiques physiques de l'école supérieure des sciences et de technologie de Sousse-Tunisie.

Je tiens à remercier sincèrement Mr A. KESSAB qui a dirigé mes travaux de recherche pendant des années et depuis la thèse de magistère. J'ai apprécié tout particulièrement sa grande qualité humaine, qu'il trouve ma profonde gratitude pour tous ce qu'il a fait pour moi.

Toutefois l'aboutissement de ce travail n'aurait pas pu être possible sans le rôle prépondérant de Mr F. CHERIF. J'ai apprécié tout particulièrement sa grande qualité humaine, qu'il trouve ma profonde gratitude pour tous ce qu'il a fait pour moi.

Je tiens à remercier vivement Mr le Professeur R. BEBBOUCHI pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'adresse également tous mes vifs remerciements à Messieurs

L. MELKEMI, M S. MOULAY et T. MOUSSAOUI pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie et être examinateurs dans le jury de cette thèse.

DEDICACES

A la mémoire de mon père

A ma très chère maman

A mes sœurs et à mon frère

Je dédie cet humble travail

Table des matières

Chapitre 0

Introduction générale

0.1 Introduction et motivations

Fujita, dans son travail pionnier [44] a considéré le problème de Cauchy pour l'équation quasi-linéaire parabolique :

$$u_t = \Delta u + u^p \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \in C_0(\mathbb{R}^N) \equiv C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N),\ \phi \geq 0,\ \phi \not\equiv 0, \tag{2}$$

et a prouvé que :

1. Si $1 < p < p_*$ (cas sous-critique), toutes les solutions positives non-triviales du problème (1)-(2) explosent en temps fini, i.e. il existe $T \in (0,\infty)$ tel que $\|u(\cdot,t)\|_\infty < \infty$ pour $t < T$ et $\lim_{t\to T} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x,t)|_\infty \to \infty$.
2. Si $p > p_*$ (cas sur-critique), le problème (1)-(2) admet des solutions positives globales lorsque la donnée initiale ϕ est suffisamment petite, et $T = +\infty$,

où, $p_* = 1 + \frac{2}{N}$, est le nombre critique dit l'exposant critique de Fujita.

Notons que les travaux de Fujita ont fait l'objet de travaux plus étendus, pour plus de détails, voir les articles de K. Deng *et al.* [35] et H.A. Levine [65] qui présentent une synthèse des études liées au problème (1)-(2).

Faisant suite aux travaux de Fujita, il a été démontré que $p = p_*$ appartient au cas d'explosion dans les travaux de Hayakawa [52] pour $N = 1, 2$ et Kobayashi *et al.* [59] pour $N \geq 1$.

La valeur de l'exposant critique dans les problèmes paraboliqes est liée aux conditions suffisantes d'explosion, aux données initiales, au terme de source non linéaire, et à la géometrie du domaine considéré.

Cependant, il existe des solutions qui explosent en temps fini, continuent à exister au sens faible et deviennent régulières (dans certains cas, bornées) immédiatement après l'explosion, ce type de solutions a fait l'objet de plusieurs recherches [17].

On définit un point d'explosion $x_0 \in \Omega\,(\Omega \subseteq \mathbb{R}^N)$, par la donnée d'une suite

$$\{(x_i, t_i)\}_i \subset \Omega \times (0, T) \text{ tel que } x_i \to x_0, \quad t_i \to T \text{ et } u(x_i, t_i) \to_{i\to\infty} \infty.$$

L'ensemble de tous ces points est appelé "ensemble d'explosion."

Toutefois, si $\Omega = \mathbb{R}^N$, la solution peut rester bornée sur les compacts de $\mathbb{R}^N$ et explose à l'infini (par rapport à la variable espace), i.e. $u(x_i, t_i) \to \infty$ lorsque $|x_i| \to \infty$ et $t_i \to T$.

Néanmoins, il est intéressant de se demander ce que devient ce phénomène d'explosion en temps fini, des "solutions" (veut dire "solutions pas forcément maximales") des équations différentielles définies sur tout I, i.e. sur tout l'intervalle de temps sur lequel est définie l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$. Cette solution cesse d'être définie avant d'atteindre la borne sup de l'intervalle de temps I. Si de plus la norme de la solution ne tend pas vers l'infini quand elle cesse d'être définie, alors cette solution peut être prolongée.

On peut observer le même phénomène pour les temps négatifs (lorsqu'on s'intéresse à des problèmes différentiels comportant des échelles de temps trés différentes).

Dans cette optique, nous citons quelques uns des travaux qui nous ont motivés et suscités l'essentiel des questions abordées dans cette thèse.

Galaktionov et Pohozaev [47] ont traité le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^m u &= u^p, \qquad u > 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0,\ m > 1,\ p > 1, && (3)\\ u(x, 0) &= u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N), && (4) \end{aligned}$$

où, ils ont introduit une nouvelle méthode basée sur l'équation modifiée préservant l'ordre des opérateurs, et via un principe de comparaison avec les solutions auto-similaires de l'équation construite écrites sous la forme :

$$b(x,t) = t^{-N/2m} f(\eta), \quad \eta = x/t^{1/2m},$$

où

$$b(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{p(\omega)t}\right)\ f(\eta) \equiv (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{p(\omega)t - i(\omega\cdot x)}\, d\omega,$$

$p(\omega)$ est le polynôme caractéristique de l'opérateur $(-\Delta)^m$,

et $f(\eta)$ est la solution radiale associée à (3)-(4), ils ont montré que pour

$p > pc = 1 + 2m/N$, le problème (3)-(4) admet pour une donnée initiale u_0 suffisamment petite, une solution globale, tandis-que pour $p \in (1, pc]$, $u_0 \not\equiv 0$ et $\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \geq 0$, la solution de (3)-(4) explose en temps $T > 0$ fini, et $\|u(.,t)\|_\infty > [D(p-1)]\,(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \to +\infty$ lorsque $t \to T^-$, où $D = D(m,N)$ est une constante.

Le problème (3)-(4) a été étendu par P.Y.H. Pang *et al.* [80] au système

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^m u = |v|^p & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ \\ v_t + (-\Delta)^m v = |u|^q & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \end{cases} \tag{5}$$

avec les données initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Leur résultat dépend principalement des deux critères suivants :

si

$$\frac{N}{2m} > max\left\{\frac{1+p}{pq-1}, \ \frac{1+q}{pq-1}\right\},$$

alors, toute solution existe globalement en temps.

D'autre part, si

$$\frac{N}{2m} < max\left\{\frac{1+p}{pq-1}, \ \frac{1+q}{pq-1}\right\},$$

alors, toute solution avec donnée initiale positive n'existe pas globalement en temps.

Fino et Kirane [43] ont établi pour le problème parabolique semi-linéaire avec un terme source non local en temps

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{1}{(1-\gamma)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} |v|^{p-1} v(s)\, ds & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ v_t - \Delta v = \dfrac{1}{(1-\delta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\delta} |u|^{q-1} u(s)\, ds & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{6}$$

les résultats suivants, sous des conditions appropriées :

Soient, $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ avec $u_0,\, v_0 > 0$, si

$$\frac{N}{2} \leq max \left\{ \frac{(2-\delta)p + (1-\gamma)pq + 1}{pq-1},\ \frac{(2-\gamma)q + (1-\delta)pq + 1}{pq-1} \right\}$$

alors, il existe une unique solution mild au problème (6), tandis que, si

$$p < \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad q < \frac{1}{\gamma}$$

alors, toute solution (u,v) de (6) explose en temps fini.

Plus récemment, M. Loayza *et al.* [71] ont présenté un travail intéressant concernant le problème (6) avec $0 \leq \gamma_1,\ \gamma_2 < 1$; $p, q \geq 1$ et des données initiales $u(0),\ v(0) \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Ils ont prouvé que l'exposant critique n'est pas donné par la technique du scaling tel qu'il a été démontré par Fujita.

Si $u(t,x)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= |u|^{p-1} u,\ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

alors $\forall \lambda > 0,\ \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi solution, avec pour donnée initiale $\lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x)$, et on a

$$\|\lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x)\|_{L^q} = \lambda^{\frac{2}{p-1} - \frac{N}{q}} \|u_0\|_{L^q}.$$

Une première motivation à l'étude des fonctions presque périodiques est que nous couvrons l'ensemble de combinaison des fonctions à différentes périodes, comme par exemple la fonction $x \rightarrow \cos x + \cos 3x$ qui est périodique, même lorsqu'on remplace 3 par un nombre rationnel. Cependant, la somme des fonctions périodiques $x \rightarrow e^{ix}$ et $x \rightarrow e^{i\sqrt{2}x}$ n'est pas périodique. Ce dernier est très utile lorsque l'on veut comprendre les propriétés des fonctions presque périodiques (Bohr a. p.). Plus généralement, les solutions d'un système autonome d'équations différentielles linéaires bornées en dimension finie sont presque périodiques, et en termes physiques, les trajectoires presque périodiques sont les trajectoires à spectre discret.

La préhistoire de la théorie des fonctions presque périodiques débute avec Esclangon et Bohl [39]. Cette théorie, a été progressivement développée par Bohr en 1923 dans ses trois longs articles titrés "Zur theorie der Fast Periodische Funktionen".

Les deux premiers articles établissent la théorie des fonctions Bohr a.p. à variables réelles tandis-que le dernier l'aborde dans l'espace complexe.

Postérieurement, la théorie a été continuellement bâtie par plusieurs mathématiciens tels que Besicovitch [19], Bochner [21], Amerio et Prouse [84], Levitan [66], Von-Neumann, Fréchét, Pontryagin, Lusternik, Stepanov, Weyl, etc., dont nous citons quelques références [19, 22, 32, 41, 42]. En 1933, Bochner [22] a défini et étudié les fonctions presque périodiques dans les espaces de Banach. Certaines extensions du concept de Bohr ont été introduites, notamment par Besicovitch, Stepanov, Weyl et Eberlein, ergo il y a un certain nombre de monographies couvrant un large spectre de ces notions de presque périodicité (voir à ce propos les références bibliographiques utilisées).

On peut aussi faire remarquer qu'en parlant de la métrique de Stepanov, Weyl ou Besicovitch, consiste à se mettre sur les espaces quotients associés. Alternativement, c'est la pseudo-métrique de Stepanov, Weyl ou Besicovitch qui est considérée.

Récemment, Zhang a étendu la notion de fonctions Bohr a.p. aux fonctions pseudo presque périodiques (p.a.p.) [103].

Aussitôt, ce nouveau concept vient mettre en œuvre une autre généralisation existante de (Bochner) presque périodique, par pseudo presque périodique dûe à Fréchet.

Une autre théorie des fonctions presque périodiques, qui ne fait pas l'objet de notre étude,

a été développée par N'Guerekata [76], où il a substitué les espaces de Banach par les espaces complets de Hausdorff localement convexes et espaces de Fréchet.
Du point de vue physique, l'étude de l'existence des solutions presque périodiques, pseudo presque périodiques et asymptotiquement presque périodiques est attractive en théorie qualitative des équations différentielles, en raison de leurs fréquentes applications en physique, mécanique, biologie mathématique, théorie du contrôle, etc.

0.2 Organisation et contenu de la thèse

Le présent travail est essentiellemnt orienté dans deux directions :

1. Etude des solutions d'équations d'évolution en dimension infinie, en appliquant des techniques de point fixe, et la méthode des fonctions test.
   (a) Etude des solutions non triviales du problème de Cauchy associé à l'équation de la chaleur d'ordre supérieur avec un terme source non local en temps

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^m u &= J^{\alpha}_{0|t}(|u|^p) \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, && (7)\\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^N, && (8) \end{aligned}$$

   où, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in (0,1)$, $p > 1$ et $J^{\alpha}_{0|t}$ représente l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

   (b) Généraliser l'étude précédente au cas du système

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{m_1} u = J^{\alpha_1}_{0|t}(|v|^{p-1}v(s)) \quad & x \in \mathbb{R}^N, t > 0,\\ v_t + (-\Delta)^{m_2} v = J^{\alpha_2}_{0|t}(|u|^{q-1}u(s)) \quad & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \end{cases} \qquad (9)$$

   avec les données initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \ \ x \in \mathbb{R}^N, \qquad (10)$$

   où $p, q > 1$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ et $m_1 \neq m_2$ ou $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

2. Cette étude a été motivée d'une part, par les travaux de recherche du Pr F. Chérif [27, 28, 29], et d'autre part, par un certain type d'équations à retard

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\alpha(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\, e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)} \\ x(s) &= \varphi(s), \varphi \in BC\left(]-\mu, 0], \mathbb{R}^+\right), \end{aligned}$$

dont les domaines d'application sont assez variés, et concernent ici la biologie cellulaire.

Le manuscrit de cette thèse est constituté de six chapitres décrits ci-dessous.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les définitions et notions fondamentales du calcul fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, nous pésentons les définitions et propriétés de base liées à la notion de fonctions pseudo-presque périodiques.

Dans le troisième chapitre, nous décrivons des résultats d'existence et d'unicité des solutions de problèmes de Cauchy semi-linéaires paraboliques.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons le premier travail qui se propose d'étudier le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur d'ordre supérieur avec un terme source non local en temps, nous montrons sous certaines conditions l'existence locale, globale et l'explosion de solutions mild.

Dans le cinquième chapitre, nous généralisons les résultats obtenus dans le chapitre précédent au cas d'un système.

Dans le dernier chapitre, nous généralisons un modèle de dynamique dit "Lasota-Wazewska".

Enfin, nous terminons par des conclusions et perspectives.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

Nous pésentons dans ce chapitre les définitions et propriétés de base liées à la notion de calcul fractionnaire. Pour plus de détails on peut se référer à [58, 78, 89, 92].

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Quand la partie réelle de z est strictement positive ($Re(z) > 0$), cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$.

En intégrant par parties l'équation précédente, nous pouvons montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (Re(z) > 0). \tag{1.2}$$

Notons que pour $x > 1$:

$$x^\alpha = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-\alpha)} & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}, \\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-\alpha+1) & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}^+, \\ \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-\alpha+1)} & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2. *On définit la fonction Bêta d'Euler par l'intégrale*

$$B(z,w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1}\, dx, \quad Re(z),\ Re(w) > 0. \tag{1.3}$$

On a la relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3. *La fonction de Mittag-Leffler E_α d'indice $\alpha > 0$, est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par le développement en série entière*

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}, \tag{1.4}$$

où, Γ *désigne la fonction Gamma d'Euler. Cette série converge pour tout* $z \in \mathbb{C}$*.*

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions d'intégrales et de dérivées d'ordre non entier, qui ne sont pas en général équivalentes. Nous nous restreignons ici à celles de Riemann-Liouville et Caputo (voir [58, 83]).

1.2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Le noyau de convolution d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour les intégrales fractionnaires, est donné par

$$\Phi_\alpha(t) := \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+),$$

où

$$t_+^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

et

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / \, f 1_K \in L^1(\mathbb{R}^+) \, \text{pour tout compact } K \subset \mathbb{R}^+ \right\}.$$

On note aussi

$$t_-^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0, \\ |t|^{\alpha-1} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Tenant compte, du fait que la distribution δ de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution, on peut donc écrire :

$$\Phi_\alpha * \Phi_{-\alpha} = \delta,$$

où, $\Phi_{-\alpha}$ est la fonction généralisée au sens de Schwartz et est l'unique inverse convolutif de Φ_α dans l'algèbre de convolution $D'_+(\mathbb{R})$.

Soient α, $\beta \in \mathbb{C}$. On a

$$\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}. \tag{1.5}$$

Montrons cette formule d'abord pour $\mathrm{Re}\alpha > 0$ et $\mathrm{Re}\beta > 0$. On a

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha * \Phi_\beta &= \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{t_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \\ &= \int_0^t \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(t-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, d\xi, \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec $\Phi_{\alpha+\beta} = \dfrac{t_+^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. On a besoin de montrer que

$$\int_0^t \xi^{\alpha-1}(t-\xi)^{\beta-1}\, d\xi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1}.$$

En effet, on pose $\xi = ty$ dans (1.6), on obtient

$$t^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\, dy = t^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) = t^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Par prolongement analytique, et le fait que

$$\frac{d}{dt}\Phi_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha-1)t_+^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{t_+^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} = \Phi_{\alpha-1}, \tag{1.7}$$

l'équation (1.5) peut être prouvée pour d'autres valeurs de α et β, par exemple, si $-1 < \mathrm{Re}\alpha < 0$, alors

$$\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{d}{dt}\frac{t_+^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{t_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{t_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * \frac{t_+^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right), \\ &= \frac{d}{dt}\frac{t_+^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}, \\ &= \frac{t_+^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}.\end{aligned}$$

En vertu de la formule de Cauchy

$$g_n(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_{n-1}} \cdots \int_0^{\xi_2}\int_0^{\xi_1} g(\xi)\, d\xi d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t g(\xi)(x-\xi)^{n-1} d\xi,$$

on peut écrire

$$g_n(t) = g(t) * \frac{t_+^{n-1}}{(n-1)!} = g(t) * \frac{t_+^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

où $g(t) = 0$ pour $t < 0$.

Plus généralement, si l'on considère $\alpha \in \mathbb{C}$ et $t \geq 0$, avec

$$g_\alpha(t) = g(t) * \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = g(t) * \Phi_\alpha, \tag{1.8}$$

qui est bien définie au sens des distributions dès que les supports de g et Φ_α sont contenus dans un même ensemble borné, et le fait que

$$\left.\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right|_{\alpha=-n} = \frac{\mathrm{res}|_{\alpha=-n}\, t_+^{\alpha-1}}{\mathrm{res}|_{\alpha=-n}\,(t_+^{\alpha-1}, e^{-t})} = \frac{(-1)^n \delta^{(n)} n!}{(-1)^n (\delta^{(n)}(t), e^{-t}) n!} = \delta^{(n)},$$

on a

$$\begin{aligned} g_0(t) &= g(t) * \Phi_0 = g(t) * \delta(t) = g(t), \\ g_{-1}(t) &= g(t) * \Phi_{-1} = g(t) * \delta'(t) = g'(t), \\ g_{-2}(t) &= g(t) * \Phi_{-2} = g(t) * \delta''(t) = g''(t), \\ &\dots \\ g_1(t) &= g(t) * \Phi_1 = g(t) * \theta(t) = \int_0^t g(\xi)\, \xi, \\ &\dots \end{aligned}$$

où,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Il est à noter que l'équation (1.8) avec un α quelconque, permet de calculer les dérivées et les intégrales de $g(t) \in D'(\mathcal{R}_+)$.

On définit le produit de convolution

$$g_{-\alpha}(t) = g(t) * \Phi_{-\alpha},$$

comme dérivée fractionnaire de la distribution $g(t)$ d'ordre α,

$$g_{-\alpha}(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} g,$$

où Re$\alpha \geq 0$, et comme intégrale fractionnaire si Re$\alpha < 0$. On a le résultat suivant (voir [67])

Théorème 1.2.1. *Soient $f, g \in D'(\mathbb{R}_+)$. L'intégrale d'Abel généralisée est donnée par*

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} \, d\xi,$$

qui a pour solution

$$f = g * \Phi_{\alpha-1},$$

où α quelconque. En particulier, si $-m < \alpha < -m+1$ pour $m \in \mathbb{Z}_+$, alors

$$f = g^{(m+1)} * \frac{t_+^{\alpha+m-1}}{\Gamma(\alpha+m)}.$$

Exemple 1.2.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}_+$, et soit la distribution*

$$g(t) = t_+^\alpha = \begin{cases} t^\alpha & si \ \ t > 0, \\ 0 & si \ \ t < 0. \end{cases}$$

On a que $\dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha} g(t) = \Gamma(\lambda+1) \dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha} \dfrac{t_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t_+^{\lambda-\alpha}$.
En particulier

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t_+ &= \frac{2t_+^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \\ \frac{d}{dt} t_+ &= \theta(t), \\ \frac{d}{dt} t_+^0 &= \frac{d}{dt}\theta(t) = \delta(t), \\ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t_+^0 &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} \theta(t) = \frac{t_+^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Par la formule d'Euler

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \Gamma(-\frac{1}{2}) &= -2\sqrt{\pi}, \\ \Gamma(-\frac{3}{2}) &= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}t_+^{-1.5} = \frac{\Gamma(-0.5)}{\Gamma(-1.5)}t_+^{-2.5} = -1.5t_+^{-2.5},$$

formule qui coincide avec $\dfrac{dt_+^\alpha}{dt} = \alpha t_+^{\alpha-1}$ *pour* $\alpha \neq -1, -2, \cdots$

Définition 1.2.1. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha > 0$*, d'une fonction* $f \in L^1([a,b])$ *(où,* $a, b \in \mathbb{R}$*) est définie par*

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t).$$

Moyennant cette définition, on a

$$J_{a|t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau, \quad \textit{intégrale à gauche}, \tag{1.9}$$

$$J_{t|b}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}\,d\tau \quad \textit{intégrale à droite}. \tag{1.10}$$

On peut observer dans cette formule, pour $\alpha = n\,(n \in \mathbb{N}^*)$, et le fait que $\Gamma(n) = (n-1)!$, la formule de Cauchy pour l'intégration successive, i.e.

$$\lim_{\alpha\to n} J_{a|t}^\alpha f(t) = J_{a|t}^n f(t) \text{ et } \lim_{\alpha\to n} J_{t|b}^\alpha f(t) = J_{t|b}^n f(t) \,\text{pour tout}\, \alpha > 0 \text{ et } m \in \mathbb{Z}^+,$$

avec

$$J_{a|t}^n f(t) = \int_a^t \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau\, dt_1 \cdots dt_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau,$$

et

$$J_{t|b}^n f(t) = \int_t^b \int_{t_{n-1}}^b \cdots \int_{t_1}^b f(\tau)d\tau\, dt_1 \cdots dt_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_t^b (\tau-t)^{n-1} f(\tau)d\tau.$$

Remarque 1.2.1. *Si* $f(t)$*, est bien définie sur* $[a,b]$ *et* $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = 0$ *pour tout* $\alpha > 0$ *et pour tout* $t \in [a,b]$*, alors* $f(t) \equiv 0$.

En pratique, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo sont généralement les plus utilisées. Nous nous limitons à ne définir que ces deux types.

1.2.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, d'une fonction $f \in L^1([a,b])$ (où, $a, b \in \mathbb{R}$) est définie par*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a|t} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} D^{-(n-\alpha)}_{a|t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\, d\tau, \quad \textit{dérivée à gauche}, \\ D^{\alpha}_{t|b} f(t) &= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} D^{-(n-\alpha)}_{t|b} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}\, d\tau \quad \textit{dérivée à droite}, \end{aligned}$$

où, $n-1 \leq \alpha < n \in \mathbb{Z}^+$.

Notons que, le symbole de l'intégration fractionnaire (à gauche ou à droite) peut être écrit comme

$$J^{\alpha} = D^{-\alpha}, \qquad \text{pour tout } \alpha > 0. \tag{1.11}$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 1.2.3. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$, d'une fonction f telle que $\left(\frac{d}{dt}\right)^n f \in L^1([a,b])$ (où, $a, b \in \mathbb{R}$) est définie par*

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}_{a|t} f(t) &= D^{-(n-\alpha)}_{a|t} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\, d\tau, \quad \textit{dérivée à gauche}, \\ {}^cD^{\alpha}_{t|b} f(t) &= (-1)^n D^{-(n-\alpha)}_{t|b} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}\, d\tau, \quad \textit{dérivée à droite}, \end{aligned}$$

où $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}^+$.

Nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}_{a|t} f(t) &= D^{\alpha}_{a|t} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(a) \right), \\ &= D^{\alpha}_{a|t} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}_{t|b}f(t) &= D^{\alpha}_{t|b}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-t)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(b)\right), \\ &= D^{\alpha}_{t|b}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-t)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(b). \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2. *Il est à noter que, les dérivées au sens de Riemann-Liouville et Caputo coincident lorsque* $f^{(k)}(a)=0,$ *et* $f^{(k)}(b)=0,$ *pour tout* $k\in\{0,\cdots,n-1\}.$

et Caputo coincident lorsque $f^{(k)}(a)=0,$ et $f^{(k)}(b)=0,$ pour tout $k\in\{0,\cdots,n-1\}.$

1.2.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Il s'impose toutefois, de remarquer que lorsque $\alpha\in(n-1,n)$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to(n-1)^{+}} {}^{c}D^{\alpha}_{a|t}f(t) &= f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0), \\ \lim_{\alpha\to n} {}^{c}D^{\alpha}_{a|t}f(t) &= f^{n}(t). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to(n-1)^{+}} D^{\alpha}_{a|t}f(t) &= f^{(n-1)}(t), \\ \lim_{\alpha\to n} D^{\alpha}_{a|t}f(t) &= f^{n}(t). \end{aligned}$$

Ce qui signifie qu'en l'absence de la condition de régularité de la fonction intervenant dans les dérivées de Riemann-Liouville, cette dernière peut coincider avec la dérivée classique, ce qui n'est pas le cas pour les dérivées de Caputo.

Certes, il est plus avantageux d'utiliser les dérivées de Caputo, et les problèmes faisant intervenir notamment ce type de dérivées ont connu une grande extension.

En effet, si l'on considère par exemple le problème

$${}^{c}D^{\alpha}_{0|t}u(t)=f(u),\quad \alpha\in(0,1),\ t>0,$$

en prenant simplement, la condition initiale

$$u(0)=u_0,$$

le problème est bien défini, et admet une solution [58].

Cependant, pour des problèmes où l'on prend la dérivèe fractionnaire de Riemann-Liouville

$$D^{\alpha}_{0|t}u(t) = f(u), \quad \alpha \in (0,1),\ t > 0,$$

la condition initiale, prend une intégrale (et/ou une dérivée) fractionnaire du type par exemple

$$\left[D^{\alpha-1}_{0|t}u(t)\right]|_{t=0} = u_0, \quad \text{si } \alpha \in (1,2),$$

qui s'écrit aussi

$$\left[D^{\alpha-2}_{0|t}u(t)\right]\Big|_{t=0} = u_0, \quad \text{et} \quad \left[D^{\alpha-1}_{0|t}u(t)\right]\Big|_{t=0} = u_0^{(1)}.$$

Plusieurs mathématiciens [58, 83, 92] ont démontré que la prise en compte de ces conditions initiales conduit à des résultats incohérents.

1.2.5 Propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires

Mentionnons d'abord que, les intégrales et dérivées fractionnaires citées plus haut conservent quelques propriétés tels que : linéarité, semi-groupe, etc.

O.P. Agarwal [1] a introduit de nouveaux opérateurs, donnant certaines de leurs propriétés, et définissant ainsi, une nouvelle classe de problèmes variationnels appelés problèmes variationnels généralisés (GVPS).

Il a montré que les intégrales et dérivées fractionnaires définies précédemment présentent un cas particulier de ces opérateurs.

En effet, considérons l'opérateur d'ordre $\alpha > 0$, défini par

$$\begin{aligned} K^{\alpha}_{\langle a,t,b,p,q\rangle}f(t) &= p\int_a^t k_\alpha(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + q\int_t^b k_\alpha(\tau,t)f(\tau)\,d\tau, && (1.12)\\ &= K^{\alpha}_{P}f(t), && (1.13)\end{aligned}$$

où, $-\infty \leq a < t < b \leq +\infty$; $p,q \in \mathbb{R}$; $P = \langle a,t,b,p,q\rangle$ l'ensemble des paramètres (appelé $P-$ensemble), et $k_\alpha(t,\tau)$ est un noyau dépendant des paramètres α, p, q.

$K^{\alpha}_{\langle a,t,b,p,q\rangle}$ est un opérateur linéaire satisfaisant la propriété

$$K^{\alpha}_{P} f(t) = pK^{\alpha}_{P_1} f(t) + qK^{\alpha}_{P_2} f(t),$$

avec, $P_1 = \langle a, t, b, 1, 0\rangle$ et $P_2 = \langle a, t, b, 0, 1\rangle$.

Nous énonçons le théorème d'intégration par parties

Théorème 1.2.2. *Soient $\alpha > 0$, et $f, g \in L^1([a, b])$ (où, $a, b \in \mathbb{R}$), alors*

$$\int_a^b f(t)K^{\alpha}_{P} g(t)\, dt = \int_a^b g(t)K^{\alpha}_{P^*} f(t)\, dt \quad \text{pour tout } t \in [a, b], \tag{1.14}$$

où $P = \langle a, t, b, p, q\rangle$ et $P^* = \langle a, t, b, q, p\rangle$.

Théorème 1.2.3. *Si $f \in L^1([a, b])$ et $k_\alpha(t, \tau) = k_\alpha(t - \tau)$ pour $\alpha > 0$, les opérateurs K^{α}_{P} et Q vérifient l'identité suivante*

$$QK^{\alpha}_{P} f(t) = K^{\alpha}_{P^*} Qf(t), \tag{1.15}$$

où, Q est un opérateur de réflexion donné par $(Qf)(t) = f(a + b - t)$.

Remarque 1.2.3. *A partir des opérateurs définis plus haut et $k_\alpha(t, \tau) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau)^{\alpha-1}$, on retrouve les formules suivantes :*

1. *Si $P = P_1 = \langle a, t, b, 1, 0\rangle$, alors $K^{\alpha}_{P_1} f(t)$ est l'intégrale à gauche de Riemann-Liouville de $f(t)$ d'ordre α.*
2. *Si $P = P_2 = \langle a, t, b, 0, 1\rangle$, alors $K^{\alpha}_{P_1} f(t)$ est l'intégrale à droite de Riemann-Liouville de $f(t)$ d'ordre α.*

On introduit les opérateurs A^{α}_{P} et B^{α}_{P} définis par

$$A^{\alpha}_{\langle a,t,b,p,q\rangle} f(t) = D^n K^{n-\alpha}_{P} f(t) = A^{\alpha}_{P} f(t),$$

et

$$B^{\alpha}_{\langle a,t,b,p,q\rangle} f(t) = K^{n-\alpha}_{P} D^n f(t) = B^{\alpha}_{P} f(t).$$

Par la linéarité de ces opérateurs, on énonce le résultat suivant

Théorème 1.2.4. *Si $f \in L^1([a,b])$ et $k_\alpha(t,\tau) = k_\alpha(t-\tau)$ pour $\alpha > 0$, les opérateurs A_P^α, B_P^α et Q vérifient les identités suivantes*

$$QA_P^\alpha f(t) = (-1)^n A_{P*}^\alpha Qf(t), \tag{1.16}$$

$$QB_P^\alpha f(t) = (-1)^n B_{P*}^\alpha Qf(t). \tag{1.17}$$

Remarque 1.2.4. *Pour $k_\alpha(t,\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}$, on a donc*

1. *Si $P = P_1 = \langle a,t,b,1,0\rangle$, alors $A_{P_1}^\alpha f(t)$ (resp. $B_{P_1}^\alpha f(t)$) est la dérivée à gauche de Riemann liouville de $f(t)$ d'ordre α, (resp. dérivée à gauche de Caputo).*
2. *Si $P = P_2 = \langle a,t,b,0,1\rangle$, alors $A_{P_2}^\alpha f(t)$ (resp. $B_{P_2}^\alpha f(t)$) est la dérivée à droite de Riemann liouville de $f(t)$ d'ordre α, (resp. dérivée à droite de Caputo).*

1.3 Résolution d'équations intégrales fractionnaires

1.3.1 Equations intégrales d'Abel d'ordre 1.

Considérons l'équation intégrale d'Abel d'ordre 1

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\, d\tau = f(t), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.18}$$

où, f est une fonction donnée. De (1.9), cette équation correspond à

$$J^\alpha(u(t)) = f(t), \tag{1.19}$$

d'après (1.11), elle se transforme en

$$u(t) = D^\alpha(f(t)).$$

Pour résoudre l'équation (1.18), on utilise la transformée de Laplace.

Rappelons que $J^\alpha(u(t)) = \Phi_\alpha(t) * u(t)$.

Donc, sa transformée de Laplace est donnée par

$$\mathcal{L}(J^\alpha(u(t))) = \frac{u(s)}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{1.20}$$

ce qui permet de transformer (1.19) en

$$\widetilde{u}(s) = s^{\alpha}\widetilde{f}(s). \tag{1.21}$$

Prenons la transformée de Laplace inverse de (1.21), on obtient

$$\widetilde{u}(s) = s\left[\frac{\widetilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}}\right],$$

il vient que

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau.$$

D'autre part, si on écrit

$$\widetilde{u}(s) = \frac{1}{s^{1-\alpha}}\left[s\widetilde{f}(s) - f(0^+)\right] + \frac{f(0^+)}{s^{1-\alpha}},$$

on a par conséquent,

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau + f(0^+)\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

1.3.2 Equations intégrales d'Abel d'ordre 2.

Soit l'équation intégrale d'Abel d'ordre 2

$$u(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau = f(t), \quad \alpha > 0,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.22}$$

qui s'écrit en terme d'opérateur intégrale fractionnaire

$$(1 + \lambda J^{\alpha})u(t) = f(t),$$

et se résolve comme suit

$$u(t) = (1 + \lambda J^{\alpha})^{-1} f(t) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}\right) f(t),$$

Notons que (voir [58])

$$J^{\alpha n} f(t) = \Phi_{\alpha n}(t) * f(t) = \frac{t_+^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)} * f(t),$$

on peut écrire alors,

$$u(t) = f(t) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{t_+^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)}\right) * f(t).$$

D'après (1.4)

$$e_\alpha(t;\lambda) := E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad t>0, \quad \alpha>0; \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

où, E_α est la fonction de Mittag-Leffler d'ordre α, on note aussi que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{t_+^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} = \frac{d}{dt} E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = e'_\alpha(t;\lambda), \quad t>0.$$

Les séries ci-dessus sont convergentes pour tout t dans un intervalle borné.

Finalement la solution s'écrit

$$u(t) = f(t) + e'_\alpha(t;\lambda) = f(t).$$

Cependant, la transformée de Laplace nous permet d'avoir la solution sous une autre forme

$$\left[1 + \frac{\lambda}{s^\alpha}\right] \widetilde{u}(s) = \widetilde{f}(s) \Rightarrow \widetilde{u}(s) = \frac{s^\alpha}{s^\alpha+\lambda} \widetilde{f}(s),$$

par passage à la transformée de Laplace inverse, on peut écrire

$$e_\alpha(t;\lambda) := E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \div \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda},$$

on a donc

$$\widetilde{u}(s) = s\left[\frac{s^\alpha}{s^\alpha+\lambda} \widetilde{f}(s)\right],$$

il s'ensuit que

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\tau) e_\alpha(\tau;\lambda)\, d\tau,$$

qui s'écrit aussi

$$\widetilde{u}(s) = \frac{s^\alpha}{s^\alpha+\lambda}\left[s\widetilde{f}(s) - f(0^+)\right] + f(0^+)\frac{s^\alpha}{s^\alpha+\lambda},$$

et donc

$$u(t) = \int_0^t f'(t-\tau) e_\alpha(\tau;\lambda)\, d\tau + f(0^+) e_\alpha(\tau;\lambda).$$

Notons que, $e_\alpha(\tau;\lambda)$ est une fonction différentiable par rapport à t avec $e_\alpha(0^+;\lambda) = E_\alpha(0^+) = 1$, et la solution est donnée par

$$\widetilde{u}(s) = \left[s\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \right] \widetilde{f}(s) + \widetilde{f}(s).$$

Par conséquent

$$u(t) = \int_0^t f(t-\tau)e'_\alpha(\tau;\lambda)\,d\tau + f(t).$$

On conclut que la deuxième méthode est plus restrictive que la première, du fait qu'elle requiert que f soit différentiable et de dérivée $\mathcal{L}-$transformable.

$\square$

Chapitre 2

Fonctions presque périodiques, pseudo presque périodiques et oscillations d'une certaine classe d'équations différentielles à retard

Ce chapitre se veut comme une introduction aux fonctions presque périodiques et pseudo presque périodiques, ainsi que leurs propriétés de base. Nous donnerons l'essentiel de la théorie des oscillations pour une classe d'équations différentielles à retard de type neutre.

2.1 Fonctions presque périodiques

On pose K le corps des réels ou des complexes, on notera par X l'espace de Banach sur K.

La notation $BC^0(\mathbb{R}, X)$ signifie l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans X. On écrit $(BC(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach muni de la norme du "sup" définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$BC^k(\mathbb{R}, X) = \left\{ f \in C^k(\mathbb{R}, X) \,/\, \forall\, 0 \leq j \leq k, \frac{d^j f}{dt^j} \in BC^0(\mathbb{R}, X) \right\},$$

et pour tout $f \in BC^k(\mathbb{R}, X)$, on pose

$$\|f\|_{C^k} := \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|_\infty .$$

Donc, $(BC^k(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_{C^k})$ est un espace de Banach.

Pour tout $T > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k_T(\mathbb{R}, X)$ est l'espace des fonctions $T-$périodiques de classe C^k définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans X, et c'est un sous-espace de $BC^0(\mathbb{R}, X)$.

Définition 2.1.1. *Soit $f(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}, X)$, on dit que f est presque périodique (Bohr a.p.) ou uniformément presque périodique, si elle vérifie*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \ell_\epsilon > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \delta \in [\alpha, \alpha + \ell_\epsilon[,\ \ \|f(\cdot + \delta) - f(\cdot)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Rappelons qu'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense dans $\mathbb{R}$, si

$$\exists \ell > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, D \cap [\alpha, \alpha + \ell[\neq 0.$$

Posons $E(f, \epsilon) := \{r \in \mathbb{R}, \|f(\cdot + r) - f(\cdot)\|_\infty < \epsilon\}$, on peut reformuler la définition d'une fonction Bohr a.p. de la façon suivante

Définition 2.1.2. *Soit $f(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}, X)$, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $E(f, \epsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

Un élément de $E(f,\epsilon)$ est appelé $\epsilon-$presque période de f.

Par conséquent, une fonction Bohr a.p. est une fonction continue qui admet des $\epsilon-$presque périodes pour tout $\epsilon > 0$.

On désignera par $AP^0(\mathbb{R},X)$ l'ensemble des fonctions Bohr a.p définies de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$AP^k(\mathbb{R},X) = \left\{ f \in AP^0(\mathbb{R},X) \cap C^k(\mathbb{R},X) \,/\, \forall\, 0 \leq j \leq k, \frac{d^j f}{dt^j} \in AP^0(\mathbb{R},X) \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{AP^k} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_X + \sum_{j=1}^{k} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{d^j f(t)}{dt^j} \right\|_X .$$

est un espace de Banach.

Exemple 2.1.1. *La fonction* $f(t) = \sin t + \sin(\pi t)$ *appartient à* $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *comme le montre la figure* 1 *en dimension* 2 *et la figure* 2 *en dimension* 3.

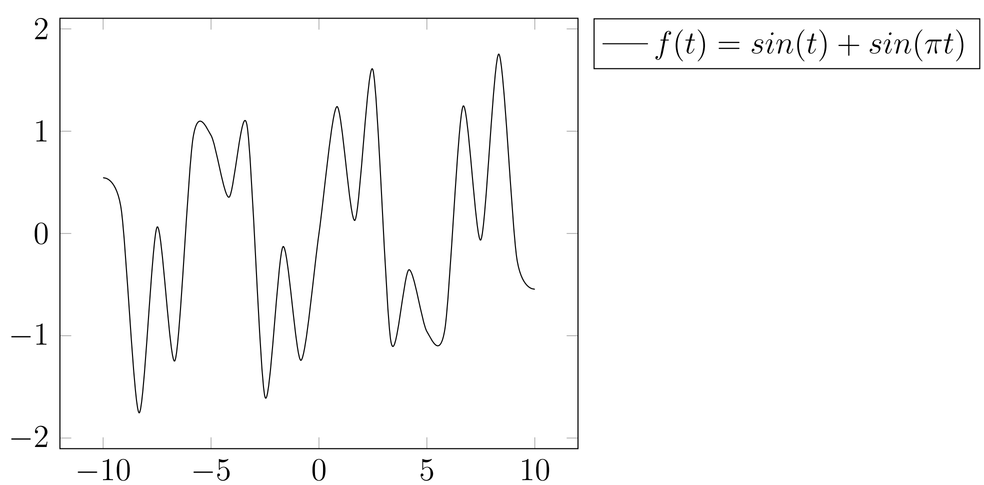

Figure 1

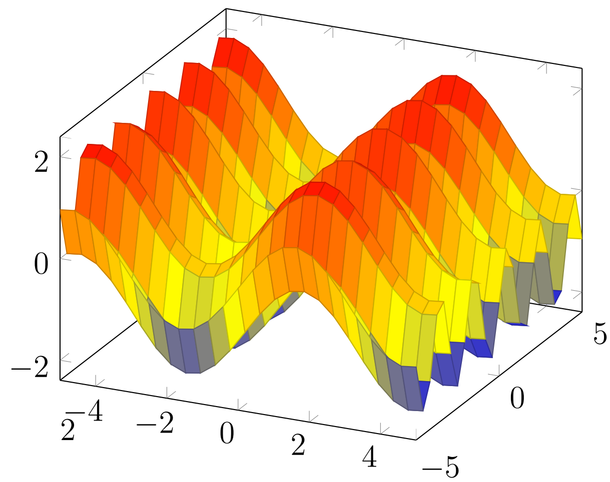

Figure 2

Remarque 2.1.1. *On a que* $AP^{k-1}(\mathbb{R}, X) \not\subset AP^k(\mathbb{R}, X)$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *(voir [27]).*

Exemple 2.1.2. *On considère la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \dfrac{2\pi}{k}\right)^2 \sin \dfrac{\pi}{\pi x - 2k} & \textit{si } x \in \left[\dfrac{2k-2}{\pi}, \dfrac{2k-2}{\pi}\right] - \left\{\dfrac{2k}{\pi}\right\}, \\ 0 & \textit{si } x = \dfrac{2k}{\pi}, \end{cases}$$

où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. *On a que* $f \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *mais* $f \notin AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 2.1.3. *Un polynôme trigonométrique* $P : \mathbb{R} \to X$ *est une fonction qui est une combinaison linéaire des fonctions* $e^{\cdot}$ *donnée par*

$$P(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{it\lambda_j}, \quad a_j \in X, \ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $X = \mathbb{R}$, *on a que* $P(t) \in X$, *et*

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_k = -\lambda_j, \ \textit{et } a_k = a_j \textit{ (complexe conjugué).}$$

On note $TP(\mathbb{R}, X)$ l'ensemble des polynômes trigonométriques $P : \mathbb{R} \to X$, donc $TP(\mathbb{R}, X)$ est un sous-espace vectoriel de $BC^k(\mathbb{R}, X)$.

2.1.1 Propriétés des fonctions presque périodiques

On résume à présent les principales propriétés des fonctions Bohr a.p., résultant principalement de leurs définitions et des propriétés algébriques des fonctions numériques (voir [8, 32, 42]).

Proposition 2.1.1. *1. Si $f, g \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, alors $f+g$, $f \cdot g \in AP^0(\mathbb{R}, X)$.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, s'il existe $1 \leq i \leq n$, telle que $f_i \in AP^0(\mathbb{R}, X_i)$, où X_i est un espace de Banach, alors $(f_i)_{1\leq i\leq n} \in AP^0\left(\mathbb{R}, \prod_{i=1}^{n} X_i\right)$.

3. $AP^0(\mathbb{K})$ est une algèbre de Banach.

4. Pour tout $T > 0$, on a $C_T^0(\mathbb{R}, X) \subset AP^0(\mathbb{R}, X)$ et $TP(\mathbb{R}, X) \subset AP^0(\mathbb{R}, X)$. Ce qui signifie que toute fonction continue et tout polynôme trigonométrique sont des fonctions Bohr a.p.

5. $AP^0(\mathbb{R}, X) \subset BC^0(\mathbb{R}, X)$, i.e. une fonction Bohr a.p. est bornée sur $\mathbb{R}$.

6. $AP^0(\mathbb{R}, X) = \overline{span}(_{T>0}\, C_T^0(\mathbb{R}, X))$, où $\overline{span}(A)$ désigne le sous-espace vectoriel fermé engendré par A.

7. La limite uniforme d'une suite de fonctions Bohr a.p. est une fonction Bohr a.p. On a que $(AP^0(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace de Banach de $(BC^0(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$.

8. Soit $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$ et $g : \mathbb{R} \to E$. On suppose qu'il existe une suite numérique $(s_n)_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f(\cdot + s_n) - f(\cdot)\|_\infty = 0$. Alors, il existe une suite numérique $(\sigma_n)_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f(\cdot + \sigma_n) - g(\cdot)\|_\infty = 0$.

Dans la suite, on omettra de donner la preuve de certains résultats, pour éviter toute redondance.

Lemme 2.1.1. *Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $E(f, \epsilon)$ donné dans la définition 2.1.1 est fermé.*

Démonstration. Soit r^* un point limite de $E(f, \epsilon)$; et soit la suite $(r_n) \subset E(f, \epsilon)$ donnée par

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r^*,$$

alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|f(t+r_n) - f(t)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Par continuité de f,

$$\|f(t+r^*) - f(t)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Donc, $r^* \in E(f, \epsilon)$. □

Lemme 2.1.2. *Toute fonction Bohr a.p. est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Il suffit de prouver que,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \text{ telle que } (r \in [-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon] \Rightarrow r \in E(f, \epsilon)),$$

c'est à dire,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \text{ telle que } (r \in [-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon] \Rightarrow \|f(t+r) - f(t)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe deux suites (δ_n) et (t_n) telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0, \; \|\delta_n\|_\infty \leq 1 \text{ et } \|f(t_n + \delta_n) - f(t_n)\|_\infty > \epsilon.$$

Comme f est a.p., il existe $l > 0$, et il existe un intervalle $[t_n, t_n + l_{\epsilon/4}]$ et une suite (r_n) $\epsilon/4-$a.p. telle que

$$\begin{aligned} \|f(t_n + \delta_n + r_n) - f(t_n + r_n)\|_\infty &\geq \|(f(t_n + \delta_n) - f(t_n))\|_\infty - \|(f(t_n + \delta_n + r_n) - f(t_n + \delta_n))\|_\infty \\ &- \|(f(t_n + r_n) - f(t_n))\|_\infty, \\ &> \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui est absurde. En effet,

$$0 \leq t_n + r_n \leq l_{\epsilon/4}, \; -1 \leq t_n + \delta_n + r_n \leq l_{\epsilon/4} + 1, \; \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0,$$

et la fonction f est uniformément continue sur $[-1, l_{\epsilon/4} + 1]$. □

Exemple 2.1.3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \sin(\alpha t^2)$, n'est pas Bohr a.p, puisqu'elle n'est pas uniformément continue.*

Lemme 2.1.3. *Si $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, alors $\mathcal{R}_{f(t)}$ est relativement compact.*
où $\mathcal{R}_{f(t)}$ désigne l'image de f.

Démonstration. $\mathcal{R}_{f(t)}$ est est relativement compact si et seulement si

$\forall \epsilon > 0,$ il existe un nombre fini de points, $f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_n)$ telle que, $\mathcal{R}_{f(t)} \subset \cup_{j=1}^{n} B(f(t_j), \epsilon)$,

où $B(x, \epsilon)$ est la boule ouverte centrée en x et de rayon ϵ.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de toute suite de fonctions $(f(t_n))$, on peut en extraire une sous-suite convergente.
$\forall \epsilon > 0, \ \exists l_\epsilon > 0,$ telle que $f(t)$ soit uniformément continue sur $[0, l_\epsilon]$, il existe alors n points $f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_n), \ 0 \leq t_k \leq l_\epsilon; \ k = 1, \cdots, n;$ telle que

$$f(t) \in \cup_{j=1}^{n} B(f(t_j), \epsilon).$$

Soit $t' \in \mathbb{R}$, il existe alors dans $[-t', t' + l_\epsilon]$ une $\epsilon-$presque période telle que

$$\|f(t' + r) - f(t')\|_\infty \leq \epsilon, \ \ 0 \leq t' + r \leq l_\epsilon.$$

Comme le point $f(t' + r)$ appartient à l'une des boules $B(f(t_j), \epsilon)$, on a donc,

$$\begin{aligned} \|f(t') - f(t_j)\|_\infty &\leq \|f(t') - f(t' + r)\|_\infty + \|f(t' + r) - f(t_j)\|_\infty, \\ &< 2\epsilon, \end{aligned}$$

et $f(t') \in \cup_{j=1}^{n} B(f(t_j), 2\epsilon)$. □

Remarque 2.1.2. *Notons que pour $X = \mathbb{R}$, cette propriété est l'analogue de la propriété* 5. *ci-dessus.*

2.1.2 Critère de continuité

Théorème 2.1.1. *Une fonction $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$ est continue et bornée.*

Démonstration. Soient $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, et $P_n(t)$ un polynôme trigonométrique, telle que

$$\|f(t) - P_n(t)\|_\infty < \frac{1}{n}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Le polynôme $P_n(t)$ est une suite de fonctions convergeant uniformément vers $f(t)$ pour tout t. Or P_n est continue, ce qui entraine que f est continue en tout point t en vertu du théorème de conservation de la continuité par convergence uniforme.
Supposons qu'il existe $M > 0$, telle que $\|P_1(t)\|_\infty \leq M$. On a alors

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_\infty &\leq \|f(t) - P_1(t)\|_\infty + \|P_1(t)\|_\infty, \\ &\leq 1 + M \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 2.1.3. *Il est à mentionner que, lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa fonction dérivée est aussi périodique. Par ailleurs, ceci n'est pas le cas pour les fonctions Bohr a.p. étant donné que l'on n'a pas la continuité uniforme de la dérivée. Cette condition est nécessaire pour que la fonction dérivée soit presque périodique, et nous avons le résultat suivant (condition suffisante) :*

2.1.3 Critère de dérivabilité

Théorème 2.1.2. *Si $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, X)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f'(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$.*

Démonstration. Soit $\varphi_n(t) = n\left(f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)\right),\ n \in \mathbb{N}$.
On a que f' est uniformément continue, i.e.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ telle que, } \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ \|t_1 - t_2\|_\infty \Rightarrow \|f'(t_1) - f'(t_2)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Comme $0 < \frac{1}{n} \leq \epsilon$, il vient que

$$\begin{aligned} \left\|n\left(f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)\right) - f'(t)\right\|_\infty &= \left\|n\int_0^n \left(f'(t+s) - f'(t)\right) ds\right\|_\infty, \\ &\leq n\int_0^n \|f'(t+s) - f'(t)\|_\infty ds, \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la suite de fonctions presque périodiques $n\left(f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)\right)$ converge uniformément vers $f'(t)$. Donc $f'(t)$ est presque périodique (voir propriété 7. ci-dessus).

$\square$

2.1.4 Critère d'intégrabilité

Théorème 2.1.3. *Soit $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$ et $F : t \mapsto F(t) := \int\limits_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds$. F est Bohr a.p., si et seulement si elle est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Posons $F(t) = \int\limits_0^t \|f(s)\|_\infty \, ds$, F est bornée (voir théorème 2.1.1). Ainsi

$$\exists M > 0,\ \|f(t)\|_\infty \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La caractérisation de la borne inférieure (resp. supérieure) donne

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists t_1 \in \mathbb{R},\ \ F(t_1) < m + \frac{\epsilon}{6},$$

respectivement,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists t_2 \in \mathbb{R},\ \ F(t_2) > M - \frac{\epsilon}{6}.$$

Soit $d = \|t_1 - t_2\|_\infty$, et soit $l_1 > 0$, telle que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur l_1, contient les $(\frac{\epsilon}{6d})-$périodes de la fonction f.

Posons, $l = l_1 + d$, il vient que toute $(\frac{\epsilon}{2l})-$période de la fonction f, est une $\epsilon-$période de la fonction F.

Montrons tout d'abord que si $\xi = \min\{t_1, t_2\}$ et $\tau = \frac{\epsilon}{6d}$ avec $\xi + \tau \in (\alpha, \alpha + l_1)$, alors $t_1 + \tau$, $t_2 + \tau \in (\alpha, \alpha + l)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|F(t_2+\tau) - F(t_1+\tau)\|_\infty &= \|F(t_2) - F(t_1) + \int\limits_{t_1+\tau}^{t_2+\tau} f(s)\, ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} f(s)\, ds\|_\infty, \\
&= \|F(t_2) - F(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} (f(s+\tau) - f(s))\, ds\|_\infty, \\
&\geq \|F(t_2) - F(t_1)\|_\infty - d\frac{\epsilon}{6d}, \\
&> M - m - \frac{2\epsilon}{6} - \frac{\epsilon}{6},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|F(t_2+\tau)-F(t_1+\tau)\|_\infty = M-m-\frac{\epsilon}{2}.$$

Donc

$$F(t_1+\tau) < m+\frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad F(t_2+\tau) > M-\frac{\epsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Posons $\eta = \frac{\epsilon}{2l}-$période de f, et montrons que

$$\|F(t+\eta)-F(t)\|_\infty < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit alors, $t_1+\tau \in (t, t+l)$ satisfaisant (2.1), on a

$$\begin{aligned}
\|F(t+\eta)-F(t)\|_\infty &= \|F(t_1+\tau+\eta)-F(t_1+\tau)+\int_t^{t+\eta} f(s)\,ds - \int_{t_1}^{t_1+\eta} f(s)\,ds\|_\infty,\\
&= \|F(t_1+\tau+\eta)-F(t_1+\tau)+\int_t^{t_1} f(s)\,ds - \int_{t+\eta}^{t_1+\eta} f(s)\,ds\|_\infty,\\
&\geq m-\left(m+\frac{\epsilon}{2}\right)-\|\int_t^{t_1}(f(s+\eta)-f(s))\,ds\|_\infty,\\
&> -\frac{\epsilon}{2}-l\frac{\epsilon}{2l},
\end{aligned}$$

donc

$$\|F(t+\eta)-F(t)\|_\infty = -\epsilon.$$

De façon analogue, on obtient

$$\|F(t+\eta)-F(t)\|_\infty < \epsilon.$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Nous donnons quelques critères permettant d'affirmer qu'une fonction est Bohr a.p. (voir [27, 32, 50])

Critère de Bochner

Soit $f(\cdot) \in BC^0(\mathbb{R}, X)$. $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$ si et seulement si

$$\tau(f) = \{\tau_r(f) = f(\cdot + r),\, r \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans $(BC^0(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$.

Critère de Haraux

Soit $f(\cdot) \in BC^0(\mathbb{R}, X)$, s'il existe une partie $S \subset \mathbb{R}$ relativement dense, telle que $\{f(\cdot + s),\, s \in S\}$ soit précompact dans $(BC^0(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$, alors $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$.

Critère de Maak

Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to X$ est presque périodique, si et seulement si pour un $\epsilon > 0$ donné, et une partition de $\mathbb{R} = \sum_{i=1}^{m} E_i$, telle que pour tout $\xi,\, \eta \in E_i,\ 1 \leq i \leq m$, l'on ait

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\xi) - f(t+\eta)\| < \epsilon.$$

Théorème 2.1.4. *Soient X un espace de Banach, et $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction presque périodique en $t \in \mathbb{R}$, uniformément en fonction de $x \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est une partie de X bornée) Supposons que f est lipschitzienne en $x \in \mathcal{B}$, uniformément en fonction de $t \in \mathbb{R}$, i.e. $\exists L > 0$ telle que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty, \ \ \textit{pour tout}\, x, y \in X,\, t \in \mathbb{R}.$$

Si la fonction $g : \mathbb{R} \to X$ est presque périodique, alors la fonction composée $F(t) = f(t, g(t)) : \mathbb{R} \to X$ est aussi presque périodique.

Démonstration. Soit $g(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, X)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l_\epsilon > 0$, telle que pour tout intervalle de longueur $l_\epsilon > 0$, contenant un nombre τ vérifiant

$$\|g(t+\tau) - g(t)\|_\infty < \frac{\epsilon}{2L}, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Il en découle que

$$\begin{aligned}\|F(t+\tau)-F(t)\|_\infty &= \|f(t+\tau,g(t+\tau))-f(t,g(t))\|_\infty,\\ &= \|f(t+\tau,g(t+\tau))-f(t+\tau,g(t))\|_\infty\\ &+ \|f(t+\tau,g(t))-f(t,g(t))\|_\infty,\\ &\leq L\|g(t+\tau)-g(t)\|_\infty\\ &+ \|f(t+\tau,g(t))-f(t,g(t))\|_\infty.\end{aligned}$$

En raison, de la presque périodicité de f, on peut écrire

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t+\tau,g(t))-f(t,g(t))\|<\frac{\epsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Puis, en combinant les équations (2.2) et (2.3), on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(t+\tau)-F(t)\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t+\tau,g(t+\tau))-f(t,g(t))\|<\epsilon.$$

On en déduit immédiatement que la fonction $F:t\mapsto f(t,g(t))$ est presque périodique. □

Remarque 2.1.4. *Dans les hypothèses du théorème précédent en remplaçant la condition de Lipschitz par la continuité uniforme, on obtient un résultat identique.*

Notons que ces deux conditions peuvent être allégées comme le prouve le résultat suivant :

Plusieurs propriétés des fonctions a.p. sont des conséquences des résultats suivants (voir [66]).

Lemme 2.1.4. *Soient X_1, X_2 deux espaces de Banach. Si $A:X_1\to X_2$ est un opérateur linéaire borné, et $f(\cdot)\in AP^n(\mathbb{R},X_1)$, alors $Af\in AP^n(\mathbb{R},X_2)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Lemme 2.1.5. *Soient X_1, X_2 deux espaces de Banach et $f(\cdot)\in AP^n(\mathbb{R},X_1)$.*

Si $A:X_1\to X_2$ est un opérateur linéaire borné de rang relativement compact, alors la fonction F à valeurs dans X_2 définie par

$$F(t):=\int_0^t Af(s)\,ds$$

appartient à $AP^{n+1}(\mathbb{R},X_2)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Lemme 2.1.6. *Soient X_1, X_2 deux espaces de Banach, $\phi \in C^{(n)}(X_1, X_2)$ et $f(\cdot) \in AP^n(\mathbb{R}, X_1)$, alors $\phi \circ f \in AP^n(\mathbb{R}, X_2)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 2.1.5. *(Théorème de Bohr-Weierstrass) Pour tout $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, il existe une suite $P_n \in TP(\mathbb{R}, X)$, telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$ et $AP^0(\mathbb{R}, X)$ est la fermeture de $TP(\mathbb{R}, X)$ pour la norme de la convergence uniforme.*

Le résultat suivant donne une condition sur la compacité des parties de AP (voir [66]).

Théorème 2.1.6. *(Théorème de Lusternik) Soit $K \subset AP^0(\mathbb{R}, X)$. Alors K est compact dans $(AP^0(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si, les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{f(t),\ f \in K\}$ est compact dans X.*
2. *K est uniformément equicontinue.*
3. *K est equi-presque périodique, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \ell_\epsilon > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \delta \in [\alpha, \alpha + \ell_\epsilon[,\ \forall \in f \in K;\ \|f(\cdot + \delta) - f(\cdot)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Le résultat suivant est important dans l'étude des équations intégrales avec retard infini (voir [4])

Proposition 2.1.2. *Soit $a \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, telle que la fonction $(t \mapsto a(t, \cdot)) \in AP^0(L^1([0, +\infty[))$. Si $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors la fonction*

$$h(t) = \int_t^{+\infty} a(t, t-s) f(s)\, ds$$

est aussi presque périodique.

Tenant compte de la condition 3. dans le théorème de Lusternik, il est difficile d'avoir la compacité dans l'espace $AP^0(\mathbb{R}, X)$. Par ailleurs, la compactification de Bohr pour les réels est une notion qui est dû à Anzai et Kakutani [81, 90], et indépendante de Weil [95]. C'est un groupe compact qu'on note par $b\mathbb{R}$, tel qu'il existe un morphisme (de groupes topologiques) $i_b : \mathbb{R} \to b\mathbb{R}$, qui satisfait les propriétés suivantes

1. $i_b(\mathbb{R})$ est dense dans $b\mathbb{R}$.
2. Pour tout $f(\cdot) \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, il existe $f^b(\cdot) \in C^0(b\mathbb{R}, E)$, telle que : $f^b \circ i_b = f$. De plus, la correspondance $f \mapsto f^b$ est un isomorphisme d'espaces de Banach entre $AP^0(\mathbb{R}, X)$ et $C^0(b\mathbb{R}, E)$.

Enfin, il a été prouvé dans [20], que la structure du groupe $b(\mathbb{R})$ n'est pas compatible avec la structure de variété de Banach différentiable. Ainsi, la notion de variété différentiable sur $b\mathbb{R}$ n'est pas cannoniquement définie.

L'étude de l'espace topologique dual de l'espace de Banach $AP^0(\mathbb{R}, X)$, a été faite par Hewitt [54], dont l'idée principale est d'assimiler $AP^0(\mathbb{R}, X)$ à $C^0(b\mathbb{R}, E)$. Il convient de remarquer que, l'espace topologique dual de l'espace $C^0(b\mathbb{R}, E)$ est un espace des mesures de Radon sur $b\mathbb{R}$, qu'on note par $M(b\mathbb{R}, E)$, qu'on assimile à l'espace dual de $AP^0(\mathbb{R}, X)$. On peut aussi montrer que $AP^0(\mathbb{R}, X)$ n'est ni reflexif ni séparable.

2.2 Fonctions pseudo-presque périodiques

Le concept de pseudo-presque périodicité (p.a.p.) a été introduit par Zhang [103, 104, 105], il généralise le concept de presque périodicité au sens de Bochner, et c'est un cas particulier de la notion de presque périodicité au sens de Besicovitch des fonctions d'ordre 1, qu'on dénote par $B^1(\mathbb{R}, X)$.

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et $BC(\mathbb{R}, X)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées à valeurs dans X, qu'on munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|$$

est un espace de Banach.

$C(\mathbb{R}, X)$ désigne la classe des fonctions continues définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans X.

Définition 2.2.1. *On définit une classe de fonctions $PAP_0(\mathbb{R}, X)$ par*

$$PAP_0(\mathbb{R}, X) = \left\{ f \in BC(\mathbb{R}, X) \,/\, \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f(t)\|\, dt = 0 \right\}.$$

Définition 2.2.2. *Une fonction $f(\cdot) \in BC(\mathbb{R}, X)$ est dite pseudo presque périodique, si elle s'écrit de la forme*

$$f = h + \varphi$$

où $h(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$.

On note l'ensemble de toutes ces fonctions par $PAP(\mathbb{R}, X)$.

La fonction h est dite presque périodique, et φ est dite perturbation ergodique de f.

Exemple 2.2.1. *La fonction $f(t) = \sin t + \sin(\pi t) + 1/(1+t^2) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

La figure suivante illustre la différence entre une fonction a.p. (exemple 2.1.1) et une fonction p.a.p. (exemple 2.2.1).

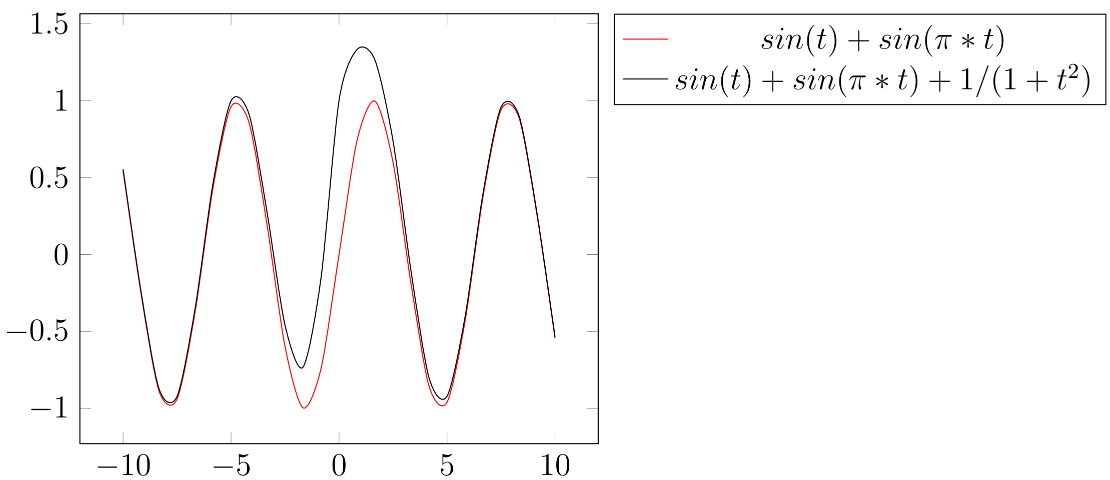

Figure 3

On peut reprendre la notion de pseudo presque périodicité pour une fonction $f : \mathbb{R} \times Y \to X$ dépendant d'un paramètre dans le lemme suivant (voir [27]).

Lemme 2.2.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, munis de la norme du "sup", et soit $f(\cdot, y) \in BC(\mathbb{R} \times Y, X)$, alors $f(\cdot, y) \in PAP(\mathbb{R} \times Y, X)$, si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

1. $\forall y \in Y,\ f(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, X)$.

2. f est uniformément continue sur tout compact K de Y par rapport à la seconde variable y.

2.2.1 Propriétés des fonctions pseudo presque périodiques

1. Soit $f = h + \varphi \in PAP(\mathbb{R}, X)$, où $h \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$, alors la décomposition est unique.
2. La valeur moyenne, les coefficients de Fourier-Bohr, les exposants de Fourier-Bohr pour une fonction pseudo presque périodique, sont les mêmes que pour la composante Bohr a.p.
3. $\varphi(\cdot) \in PAP([a, +\infty[, X)$, est un espace de Banach, avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Le rang d'une fonction pseudo presque périodique est borné, et non relativement compact.

Zhang [103] a établit le théorème de composition des fonctions pseudo presque périodiques dans l'espace de Banach en dimension finie. Ce résultat a été généralisé par Amir et Maniar [10] à l'espace d'extrapolation, sous les mêmes conditions considérées dans [103]. D'autre part, Hong-xu Li and al [56] ont obtenu le même résultat sous la condition que $f(\cdot, h(\cdot)) : \mathbb{R} \to X$ soit uniformément continue et bornée dans $\mathbb{R} \times \overline{h(\mathbb{R})}$.

L'ensemble des fonctions pseudo presque périodiques est invariant par convolution par des fonctions L^1, et on a le résultat suivant [103].

Proposition 2.2.1. *Soit $f(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, X)$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $f * g$ défini sur $\mathbb{R}$ appartient à $PAP(\mathbb{R}, X)$.*

Démonstration. Soit $f = h + \varphi$, avec $h \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$. On a la décomposition suivante

$$f * g = h * g + \varphi * g.$$

Il suffit de montrer que $\varphi * g \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$, puisque $h * g \in AP(\mathbb{R}, X)$ (voir proposition 3.4, [36]). Or, pour $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$, et $g \in L^1(\mathbb{R})$, nous avons que $\varphi * g \in BC(\mathbb{R}, X)$.

Par hypothèse

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|_\infty \, dt = 0.$$

Pososns

$$L(r) := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(t-s)\|_\infty \, |g(s)| \, ds \, dt,$$

il en découle que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi * g(t-s)\|_\infty \, |g(s)| \, ds \, dt &\leq L(r), \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(t-s)\|_\infty \, |g(s)| \, ds \, dt, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t-s)\|_\infty \, dt \right) ds, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T-s}^{T-s} \|\varphi(T)\|_\infty \, dT \right) ds, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| \, \varphi_T(s) \, ds,
\end{aligned}$$

□

où

$$\varphi_T(s) = \frac{1}{2T} \int_{-T-s}^{T-s} \|\varphi(\sigma)\|_\infty \, d\sigma.$$

Il est évident que $\varphi_T(s) \to 0$ lorsque $T \to \infty$. En utilisant le fait que φ_T soit bornée, $g \in L^1(\mathbb{R})$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on trouve

$$\lim_{T\to\infty} L(T) = 0,$$

et donc, $\varphi * g \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$.

Le lemme suivant donne l'unicité de la décomposition des fonctions pseudo presque périodiques [103].

Lemme 2.2.2. *La décomposition des fonctions pseudo presque périodiques comme somme d'une classe de fonctions presque périodiques et d'une classe de fonctions ergodiques, est unique, i.e.*

$$PAP(\mathbb{R}, X) = AP(\mathbb{R}, X) \oplus PAP_0(\mathbb{R}, X).$$

Démonstration. Soit $f(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, X) \cap PAP_0(\mathbb{R}, X)$. Mentionnons, tout d'abord, que la fonction g définie par $g(t) := \|f(t)\|_\infty \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; appartient à $AP(\mathbb{R}, X) \cap PAP_0(\mathbb{R}, X)$.

Si la valeur moyenne de g, $\mathcal{M}(g) = \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T g(s)\, ds = 0$, alors $g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraine que $f = 0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que la décomposition donnée n'est pas unique. Il vient que,

$$f = h_0 + \varphi_0, \quad \text{et} \quad f = h_1 + \varphi_1,$$

avec, h_0, $h_1 \in AP(\mathbb{R}, X)$ et φ_0, $\varphi_1 \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$.

Après identification, on obtient $h_0 - h_1 = \varphi_0 - \varphi_1$.

D'après-ce qui précède, $h_0 - h_1 = \varphi_0 - \varphi_1 = 0$, i.e. $h_0 = h_1$ et $\varphi_0 = \varphi_1$. □

Proposition 2.2.2. *Si $f = g + \varphi \in PAP(\mathbb{R}, X)$, où $g \in AP(\mathbb{R}, X)$, alors $g(\mathbb{R}) \in \overline{f(\mathbb{R})}$ et*

$$\|f\|_\infty \geq \|g\|_\infty \geq \inf_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\|_\infty \geq \inf_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_\infty.$$

(voir [103]).

Démonstration. Si l'on suppose que, $g(\mathbb{R}) \in \overline{f(\mathbb{R})}$, alors, il existe t_0 telle que

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} \|g(t_0) - f(s)\| > \epsilon.$$

Remarquons que pour g continue, il existe $\delta > 0$, telle que $|t| < \delta$, entraine que

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{t_0}(t) - \mathcal{R}_{t_0}(s)\| > \epsilon.$$

On utilise notamment le fait que l'ensemble des fonctions presque périodiques est invariant par translation, ce qui donne $\mathcal{R}_{t_0} g \in AP(\mathbb{R}, X)$ et donc, pour tout $\epsilon > 0$, $\exists l_{\epsilon/2} > 0$ telle que tout intervalle de longueur $l_{\epsilon/2}$ contienne un nombre τ satisfaisant

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\tau \mathcal{R}_{t_0} g(t) - \mathcal{R}_{t_0} g(t)\| \leq \epsilon/2.$$

Soit maintenant $t \in (-\delta, \delta)$, par suite $t + \tau \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$, et donc,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}_{t_0}\varphi(t+\tau)\|_\infty &= \|\mathcal{R}_{t_0} f(t+\tau) - \mathcal{R}_{t_0} g(t+\tau)\|_\infty, \\
&\geq \|\mathcal{R}_{t_0} f(t+\tau) - \mathcal{R}_{t_0} g(t)\|_\infty + \|\mathcal{R}_{t_0} g(t) - \mathcal{R}_{t_0} g(t+\tau)\|_\infty, \\
&\geq \inf_{s\in\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{t_0} f(s) - \mathcal{R}_{t_0} g(t)\|_\infty + \|\mathcal{R}_{t_0} g(t) - \mathcal{R}_\tau \mathcal{R}_{t_0} g(t)\|_\infty, \\
&> \epsilon/2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{M}(\|\mathcal{R}_{t_0}\varphi\|_\infty) \geq \delta\epsilon/l_\epsilon$, contradiction. □

Le résultat suivant est utile pour montrer que l'espace $(PAP(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ est complet [104].

Lemme 2.2.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PAP(\mathbb{R}, X)$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors $f \in PAP(\mathbb{R}, X)$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PAP(\mathbb{R}, X)$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on peut donc écrire

$$f_n = h_n + \varphi_n,$$

où $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$. Grâce à la proposition 2.2.2, on a $\|h_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty$, il en résulte que

$$\|h_n - h_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Or, pour $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on en conclut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ; et par suite, $\|h_n - h_m\|_\infty \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$. Donc, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in AP(\mathbb{R}, X)$ est une suite de Cauchy.

$(AP(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ étant un espace de Banach, il existe $h \in AP(\mathbb{R}, X)$ telle que

$$\|h_n - h\|_\infty \to 0 \quad \text{lorsque } n, m \to \infty.$$

Posant $\varphi = f - h$, il est à observer que

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0 \quad \text{lorsque } n, m \to \infty.$$

Il en découle que, $\varphi \in BC(\mathbb{R}, X)$.

Soit maintenant

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|_\infty \, dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t) - \varphi_n(t) + \varphi(t)\|_\infty \, dt, \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_\infty \, dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi_n(t)\|_\infty \, dt, \\
&\leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi_n(t)\|_\infty \, dt.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $T \to \infty$, on en déduit que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|_\infty \, dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty,$$

et de la limite lorsque $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on en conclut que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\|_\infty \, dt = 0.$$

□

On a le résultat important suivant :

Théorème 2.2.1. *L'espace des fonctions pseudo presque périodiques* $PAP(\mathbb{R}, X)$ *muni de la norme du "*$\sup$*" est un espace de Banach [103].*

Démonstration. d'après les résultats introduits précédemment, on a clairement, $PAP(\mathbb{R}, X) \subset BC(\mathbb{R}, X)$ et en vertu du lemme 2.2.3, l'ensemble $PAP(\mathbb{R}, X)$ est fermé. Par conséquent, $(PAP(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. □

Théorème 2.2.2. *Supposons l'espace de Banach X uniformément convexe.*

Soit $f = h + \varphi \in PAP(\mathbb{R}, X)$ avec $h \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$. Définissons les fonctions

$$H(t) := \int_0^t h(s)\, ds \quad et \quad \Phi(t) := \int_0^t \varphi(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

et supposons que

1. *H bornée.*

2. *Il existe $\xi(\cdot) \in X$ telle que $(\Phi - \xi)(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$.*

Alors, la fonction $t \mapsto F(t) = H(t) + \Phi(t) \in PAP(\mathbb{R}, X)$.

Démonstration. Pour la preuve, voir [32]. □

Théorème 2.2.3. *Soit $f(\cdot, x) \in PAP(\mathbb{R} \times X, X)$ satisfaisant la condition de Lipschitz, i.e.*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty,$$

pour tout $u, v \in X$ et $t \in \mathbb{R}$.

Si $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, X)$, alors la fonction $h(t) = f(t, \varphi(t)) \in PAP(\mathbb{R} \times X, X)$ [32].

Démonstration. Soit $f(\cdot, x) \in PAP(\mathbb{R} \times X, X)$, avec $f = G + H \in PAP(\mathbb{R} \times X, X)$, où $G \in AP(\mathbb{R} \times X, X)$ et $H \in PAP_0(\mathbb{R} \times X, X)$. On pose de plus que, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1 \in AP(\mathbb{R}, X)$ et $\varphi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$.

Il s'agit de montrer en premier que

$$\begin{aligned}
\|f(t, \varphi(t))\|_\infty &\leq L\|\varphi\|_\infty + \|f(t,0)\|_\infty, \\
&\leq L\|\varphi\|_\infty + \|G(t,0)\|_\infty + \|H(t,0)\|_\infty, \\
&\leq L\|\varphi\|_\infty + \|G(\cdot,0)\|_\infty + \|H(\cdot,0)\|_\infty,
\end{aligned}$$

au vu des hypothèses fournies, $f(\cdot, \varphi(\cdot)) \in BC(\mathbb{R} \times X, X)$, et

$$\begin{aligned}
f(\cdot, \varphi(\cdot)) &= G(\cdot, \varphi_1(\cdot)) + f(\cdot, \varphi(\cdot)) - G(\cdot, \varphi_1(\cdot)), \\
&= G(\cdot, \varphi_1(\cdot)) + f(\cdot, \varphi(\cdot)) - f(\cdot, \varphi_1(\cdot)) + H(\cdot, \varphi_1(\cdot)).
\end{aligned}$$

En vertu du théorème 2.1.4, il en découle que $G(\cdot, \varphi_1(\cdot)) \in AP(\mathbb{R} \times X, X)$.

En utilisant que f est Lipschitzienne et $\varphi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, X)$, on trouve

$$f(\cdot, \varphi(\cdot)) - f(\cdot, \varphi_1(\cdot)) \in PAP_0(\mathbb{R}, X),$$

et de montrer en second lieu que, $f(\cdot, \varphi(\cdot)) \in PAP(\mathbb{R} \times X, X)$. Pour cela, nous allons montrer que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|H(t, \varphi_1(t))\|_\infty \, dt = 0.$$

Pour ce faire, on remarque que $\varphi_1(\mathbb{R})$ est relativement compact dans X, et donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes O_k, centrées en $x_k \in \varphi_1(\mathbb{R})$, de rayon inférieur à $\epsilon/3L$, et

$$\varphi_1(\mathbb{R}) \subset \cup_{k=1}^{N} O_k.$$

Pour $k \, (k = 1, 2, \cdots, N)$, l'ensemble $B_k = \{t \in \mathbb{R} : \varphi_1(t) \in O_k\}$ est ouvert et

$$\mathbb{R} = \cup_{k=1}^{N} B_k.$$

Soit

$$E_k = B_k - \cup_{i=1}^{k-1} O_i, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_1 = B_1.$$

Alors, on vérifie que

$$E_i \cap E_j = \{\emptyset\}, \quad \text{pour tout } \ i \neq j.$$

Du fait que $H \in PAP(\mathbb{R}, X)$, on peut trouver T_0 telle que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|H(t, x_k)\|_\infty \, dt < \frac{\epsilon}{3N}, \quad T \geq T_0, \ k \in \{1, 2, \cdots, N\}. \tag{2.4}$$

De plus, pour $G \in AP(\mathbb{R}, X)$ uniformément continue sur $\mathbb{R} \times \overline{\varphi_1(\mathbb{R})}$, il s'ensuit que

$$\|G(t, x_k) - g(t, x)\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in O_k, \ k \in \{1, 2, \cdots, N\}. \tag{2.5}$$

Pour $H(\cdot,\varphi_1(\cdot)) = f(\cdot,\varphi_1(\cdot)) - G(\cdot,\varphi_1(\cdot))$ et $H(t,x_k) = f(t,x_k) - G(t,x_k)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|H(t,\varphi_1(t))\|_\infty \,dt &= \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|H(t,x_k)\|_\infty \,dt,\\
&\leq \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|H(t,x_k) - H(t,x_k)\|_\infty \,dt\\
&+ \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|f(t,\varphi_1(t)) - f(t,x_k)\|_\infty \,dt,\\
&\leq \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|H(t,x_k) - H(t,x_k)\|_\infty \,dt\\
&+ \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|H(t,x_k)\|_\infty \,dt\\
&+ \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|H(t,\varphi_1(t)) - H(t,x_k)\|_\infty \,dt,\\
&\leq \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} L\|\varphi_1(t) - x_k\|_\infty \,dt\\
&+ \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{N}\int_{E_k\cap[-T,T]} \|G(t,x_k) - G(t,x_k)\|_\infty \,dt\\
&+ \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|H(t,x_k)\|_\infty \,dt.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in E_k \cap [-T,T]$, $\varphi_1(t) \in O_k$. De (2.4) et (2.5), on trouve que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|H(t,\varphi_1(t))\|_\infty \,dt \leq \epsilon, \quad T \geq T_0, \tag{2.6}$$

et par suite,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|H(t,\varphi_1(t))\|_\infty \,dt = 0.$$

$\square$

Remarque 2.2.1. *Si l'on remplace dans les hypothèses du théorème précédent la condition de Lipschitz par la continuité uniforme, on obtient des résultats similaires.*

Chapitre 3

Problèmes semi-linéaires paraboliques

Ce chapitre décrit des résultats d'existence et d'unicité des solutions u des problèmes de Cauchy semi-linéaires paraboliques, et comment influe la taille du terme source sur les critères d'existence et de non existence, on s'intéressera aux points suivants :

1. Existence locale en temps et unicité des solutions : existe-t-il des solutions définies pour $t \in [0, T]$? et à quelle condition sont-elles uniques ?

2. Existence globale : Supposons qu'on a l'existence locale pour
   $T_{max} = \sup\{T,\, T \in (0, \infty) :\, u \text{ solution du problème de Cauchy donné}\}$.
   A-t-on $T_{max} = \infty$?, dans le cas échéant, on dit que la solution est globale ou bien existe tout le temps.

3. Non-existence globale (Explosion en temps fini) : Supposons que la réponse à la première question est positive, est-ce que $T_{max} < \infty$?. Si c'est le cas, on dit que la solution explose en temps fini. Pour le type des problèmes paraboliques considéré ici, la non existence globale et le temps fini des solutions (dans le sens $\|u(t, \cdot)\|_\infty \to +\infty$) vont ensemble.

3.1 Existence globale et explosion des solutions d'une classe d'équations différentielles ordinaires

Pour rendre plus concret le concept de blow-up, commençons par énoncer quelques résultats élémentaires sur l'explosion des solutions d'équations différentielles ordinaires, pour plus de détails, (voir [99]).

3.1.1 Explosion des solutions d'EDOs.

Considérons, l'équation différentielle dite de Bernoulli

$$y'(t) = \lambda y(t) + y^p(t), \qquad t > 0,\ \lambda \leq 0,\ y(0) = y_0 > 0. \tag{3.1}$$

Rappelons d'abord le cas où $\lambda = 0$. L'équation (3.1) s'écrit

$$y'(t) = y^p(t), \tag{3.2}$$

une simple intégration donne

$$\int \frac{dy}{y^p} = \int dt,$$

ce qui fournit

$$\frac{1}{(1-p)} y^{1-p}(t) = t + C,$$

on a alors,

$$y(t) = ((1-p)(t+C))^{\frac{1}{1-p}},$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0 > 0$, on obtient donc

$$y_0 = ((1-p)C)^{\frac{1}{1-p}},$$

ce qui donne

$$C = \frac{1}{1-p} y_0^{1-p}.$$

Par ailleurs, on a

$$y(t) = \frac{1}{((1-p)t + y_0^{1-p})^{-\frac{1}{1-p}}}, \tag{3.3}$$

que l'on peut aussi exprimer sous la forme

$$y(t) = ((1-p)t + y_0^{1-p})^{\frac{1}{1-p}}, \tag{3.4}$$

cette solution cesse d'exister pour les valeurs de t négatives ou nulles, en d'autres termes ;

$$(1-p)t + y_0^{1-p} \leq 0,$$

ce qui donne

$$t \geq -\frac{y_0^{1-p}}{1-p} = \frac{y_0^{1-p}}{p-1}, \tag{3.5}$$

quand $0 < p < 1$, le membre de droite de (3.5) est négatif, il implique directement qu'un tel temps $t > 0$ n'existe pas, et on dira que l'explosion ne persiste pas.

Quand $p > 1$, le temps t est positif et fini, on dit que la solution explose en temps fini, et la valeur du temps d'explosion est donnée par $T_* = \dfrac{y_0^{1-p}}{p-1}$.

Supposons à présent que $\lambda < 0$ et $p > 1$. L'équation (3.1) s'écrit en vertu du changement de variables $v = y^{1-p}$

$$v' - (1-p)\lambda v = 1-p \tag{3.6}$$

après une simple résolution, on trouve

$$v = -\frac{1}{\lambda} + Ce^{(1-p)\lambda t},$$

ce qui conduit à

$$y(t) = (-\frac{1}{\lambda} + Ce^{(1-p)\lambda t})^{\frac{1}{1-p}}, \tag{3.7}$$

qui correspond, pour la donnée initiale $y(0) = y_0$ à

$$y(t) = \left(\frac{\lambda}{-1 + (y_0^{1-p} + \frac{1}{\lambda})e^{(1-p)\lambda t}} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Notons que la solution n'existe pas lorsque le dénominateur s'annule et le temps d'explosion est donné par $T_* = \dfrac{1}{(1-p)\lambda} \log\left(\dfrac{1}{y_0^{1-p} + \frac{1}{\lambda}}\right)$.

On peut énoncer le théorème suivant relatif au blow-up en temps fini.

Théorème 3.1.1. *Etant donné y solution de l'équation (3.1) avec $\lambda < 0$, il y a explosion en temps fini pour $y_0 > (-\lambda)^{\frac{1}{p-1}}$.*
En outre, pour y_0 fixé, la solution explose en temps fini pour $\lambda > -y_0^{p-1} = \lambda_*$,
où λ_* représente la diffusion critique. On en déduit que $T_* = \dfrac{1}{(1-p)\lambda} \log\left(\dfrac{1}{y_0^{1-p} + \frac{1}{\lambda}}\right)$.

Démonstration. voir [99]. □

3.1.2 Existence globale des solutions d'EDOs

Si le dénominateur de T_* est différent de 0 pour tout $t > 0$, la solution existe pour tout $t \in [0, \infty)$ et elle est dite globale. D'où le résultat suivant

Théorème 3.1.2. *Soit $\lambda < 0$, l'équation (3.1) admet une solution globale donnée par*

$$y(t) = \left(\frac{\lambda}{-1 + (y_0^{1-p} + \frac{1}{\lambda})e^{(1-p)\lambda t}}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

pour tout $t > 0$ si $\lambda < \lambda_*$.

Remarque : Dans le cas $p = 1$, l'équation (3.1) est linéaire, et la solution correspondante $y(t) = y_0 e^{(\lambda+1)t}$ est globale.

3.2 Solutions du problème de Cauchy semi-linéaire parabolique

On trouvera ci-dessous une présentation succincte de l'existence (locale et globale), l'unicité et la régularité des solutions pour le problème de Cauchy semi-linéaire parabolique (pour plus de détails, voir [7, 13, 51, 96, 97, 98]),

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u^p && \text{dans } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) \geq 0 && \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $0 < p < 1$.

Il est important de faire remarquer, que lorsque la donnée initiale est à support compact, il n'existe pas de solutions de (3.8) tel que l'on ait $u(t,\cdot) \in L^q(\mathbb{R}^N)$ pour $t > 0$ et $1 \leq q < \infty$. Néanmoins, si $u_0 := \rho u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a alors pour tout $t > 0$, $\rho(x)S(t)u_0 \in L^\infty$; où $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$ et ρ est la fonction poids définie par

$$\rho(x) = (1 + |x|)^{-\alpha} \quad \text{si } 0 \leq \alpha,$$

ou

$$\rho(x) = \exp(-\alpha |x|^\beta) \quad \text{si } 0 \leq \alpha,\ 0 \leq \beta < 2,$$

et vérifie

$$\rho^{-1}(x+y) \leq \rho^{-1}(x)\rho^{-1}(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Définition 3.2.1. *On dit que u est solution mild du problème (3.8), si elle vérifie l'équation intégrale*

$$u(t,x) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-s)u^p(s,x)\,ds \tag{3.9}$$

3.2.1 Existence locale et globale des solutions

On cherche à montrer l'existence locale en premier, ensuite globale des solutions positives de (3.9), qui sont solutions mild de (3.8), ensuite on prouvera, qu'elles sont solutions classiques sous des conditions bien appropriées sur la donnée initiale u_0. Cependant, il convient de noter que le terme non linéaire u^p présent dans (3.8) n'est pas Lipschitzien dans tout intervalle de la forme $[0, \epsilon)$ pour $0 < p < 1$ et $\epsilon > 0$.
Ainsi, apparaissent des difficultés telles que : l'unicité et la régularité de la solution lorsque $u_0 \equiv 0$.
Afin de pallier à ces difficultés, on introduit l'ensemble

$$E_\rho(\mathbb{R}^N) = E_\rho = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid \rho u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \right\},$$

qui, muni de la norme $\|u\|_\rho = \|\rho u\|_\infty$ est un espace de Banach.
Soit aussi la fonction φ positive et continue définie sur $[0, \infty)$ par

$$\varphi(t) = \pi^{-N/2} \int e^{-|y|^2} \rho^{-1}(2\sqrt{t}y)\,dy,$$

avec $\varphi(0) = 1$.

Donc, le problème (3.8) sera considéré avec $u_0 \in E_\rho$, ce qui entrainerait $u(t,\cdot) \in E_\rho$ pour tout $t > 0$. Pour cela on introduit le problème suivant

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= g(u) \qquad\qquad \text{dans } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) &= u_0(x) \geq 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{3.10}$$

et on montre l'existence et l'unicité des solutions mild associées au problème (3.10), ce qui permettra d'en déduire par une méthode d'approximation les solutions de (3.8).

Lemme 3.2.1. *Soit g une fonction non croissante et $k-$Lipschitzienne vérifiant $g(0) = 0$. Pour tout $u_0 \in E_\rho$, il existe une unique solution mild au problème (3.10), telle que $u \in L^\infty((0,T), E_\rho)$.*

Si de plus, u et v sont deux solutions mild de (3.10) avec des données initiales respectivement u_0 et v_0, satisfaisant $u_0 \geq v_0$, alors

$$u(t,x) \geq v(t,x) \qquad \forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier, si $u_0 \geq 0$, on a $u \geq 0$.

Démonstration. On applique le théorème du point fixe de Banach.

Soit $u_0 \in E_\rho$ et $T > 0$. On définit l'opérateur F pour $u \in L^\infty((0,T), E_\rho)$ par

$$Fu(t,x) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)g(u(s))\,ds, \qquad \forall t \in (0,T), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Montrons d'abord, que F envoie $L^\infty((0,T), E_\rho)$ dans $L^\infty((0,T), E_\rho)$. En effet, si l'on pose

$$S(t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp^{-|x-y|^2/4t}$$

le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$, on a alors

$$\begin{aligned} |Fu(t,x)| &\leq (4\pi t)^{-N/2} \int \exp^{-|x-y|^2/4t} |u_0(y)|\,dy \\ &+ \int_0^t (4\pi s)^{-N/2} \int \exp^{-|x-y|^2/4t} |g(u(t-s,y))|\,dy\,ds, \\ &\leq \|u_0\|_\rho\, S(t)\rho^{-1}(x) + k \sup_{0\leq s\leq T} \|u(s,\cdot)\|_\rho \int_0^t S(t-s)\rho^{-1}(x)\,ds, \\ &\leq \varphi(t)\,\|u_0\|_\rho\,\rho^{-1}(x) + kt\varphi(t) \sup_{0\leq s\leq T} \|u(s,\cdot)\|_\rho \rho^{-1}(x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{0\le t\le T}\|Fu(t,\cdot)\|_\rho \le \varphi(T)\left\{\|u_0\|_\rho + kT\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot)\|_\rho\right\}, \tag{3.11}$$

ainsi, Fu est définie presque partout et appartient à $L^\infty((0,T);E_\rho)$.

Montrons que pour t assez petit, F est contractant.

Soient $u,v\in L^\infty((0,T);E_\rho)$, on alors pour tout $t\in(0,T)$ et $x\in\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}|Fu(t,x)-Fv(t,x)| &\le k\int_0^t S(t-s)|(u-v)(s)|\,ds,\\ &\le k\sup_{0\le s\le T}\|(u-v)(s)\|_\rho\int_0^t S(t-s)\rho^{-1}(x)\,ds,\\ &\le kt\varphi(t)\sup_{0\le s\le T}\|(u-v)(s)\|_\rho\,\rho^{-1}(x),\end{aligned}$$

ainsi

$$\sup_{0\le t\le T}|Fu(t,\cdot)-Fv(t,\cdot)| \le kT\varphi(T)\sup_{0\le t\le T}\|(u-v)(t,\cdot)\|_\rho. \tag{3.12}$$

Si on choisit T telle que $kT\varphi(T)<1$, F est une contraction et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une unique solution $u\in L^\infty((0,T);E_\rho)$ telle que

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)g(u(s))\,ds.$$

Pour montrer que u est globale, il suffit de montrer qu'elle est définie pour tout $t>0$. En effet, l'intervalle d'existence de la solution dépend de g et de ρ mais pas de u_0, donc la solution locale peut être prolongée en une solution globale tant qu'elle n'explose pas. Or, la solution n'explose pas gâce à (3.11), (3.12) et au lemme de Gronwall, on a

$$\|u(t,\cdot)\|_\rho \le \varphi(T)\|u_0\|_\rho \exp^{k\varphi(T)t}, \qquad \forall t\in(0,T),$$

ainsi, u est définie sur $(0,T)$ et $u\in L^\infty_{loc}((0,T);E_\rho)$.

D'autre part, si u, $v\in L^\infty_{loc}((0,T);E_\rho)$ sont deux solutions telle que

$$\begin{aligned}u(t) &= S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)g(u(s))\,ds,\\ v(t) &= S(t)v_0+\int_0^t S(t-s)g(v(s))\,ds,\end{aligned}$$

avec $u_0 \in E_\rho$, $v_0 \in E_\rho$ et $u_0 \geq v_0$. Il en découle

$$\begin{aligned}
(v-u)(t) &= S(t)(v_0-u_0) + \int_0^t S(t-s)[(g(v(s)) - g(u(s)))]\,ds,\\
&\leq \int_0^t S(t-s)[g(v(s)) - g(u(s))]_+\,ds,\\
&\leq k\int_0^t S(t-s)[v(s)-u(s)]_+\,ds,
\end{aligned}$$

comme g est non croissante et $k-$Lipschitzienne, il vient que

$$(v-u)_+ \leq k\int_0^t S(t-s)[v(s)-u(s)]_+\,ds,$$

et pour tout $t > 0$,

$$\|(v-u)_+(t)\|_\rho \leq k\int_0^t \varphi(t-s)\|(v-u)_+(s)\|_\rho\,ds \leq k\varphi(t)\int_0^t \|(v-u)_+(s)\|_\rho\,ds.$$

Par le lemme de Gronwall, $\|(v-u)_+(s)\|_\rho \equiv 0$ pour tout t, et donc $u \geq v$. □

Nous sommes en mesure d'examiner maintenant le problème (3.8). L'approche, consiste à procéder à une approximation par les suites de fonctions, nous avons

Théorème 3.2.1. *Pour toute fonction non négative $u_0 \in E_\rho$, il existe au moins une solution mild $u \in L^\infty_{loc}((0,T);E_\rho)$ non négative au problème (3.8).*

Démonstration. Soit (g_n) une suite de fonctions non décroissantes et Lipschitzienne vérifiant

$$g_n(r) = r^p, \quad \forall r \geq 1/2n \quad \text{et} \quad g(0) = 0,$$

et considérons le problème suivant

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= g_n(u) &\quad& \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N\\
u(0,x) &= u_0(x) + 1/n && \text{dans } \mathbb{R}^N.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

En vertu du lemme 3.2.1, il existe une unique solution mild non négative, $u_n \in L^{\infty}_{loc}((0,\infty); E_\rho)$ satisfaisant pour tout n,

$$u_n(t) = S(t)(u_0 + 1/n) + \int_0^t S(t-s) g_n(u_n(s))\, ds. \tag{3.14}$$

Si $u_n \geq 0$, alors $u_n(t) \geq S(t)(u_0 + 1/n) \geq 1/n$. D'autre part, si $n > m$ on a alors par construction

$$g_n(u) = g_m(u) \quad \text{si } u \geq 1/2m.$$

Ainsi, pour $u_m \geq 1/m$ on a deux solutions mild u_n et u_m associées à (3.13) avec les données initiales respectives $u_0 + 1/m$ et $u_0 + 1/n$.
Grâce au lemme 3.2.1, on en déduit que $u_m \geq u_n$, et pour tout $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$, $(u_n(t,x))$ est la borne inférieure d'une suite numérique décroissante. On définit ainsi,

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x) \quad \text{dans } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N.$$

En utilisant (3.14), et le fait que $u_n \geq 1/n$, on trouve □

$$u_n(t,x) = S(t)u_0 + \frac{1}{n} + \int_0^t (4\pi s)^{n/2} \int e^{-|x-y|^2/4t} u_n^p(t-s,y)\, dy\, ds,$$

pour tout $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$. Par passage à la limite dans (3.15) et grâce au théorème de convergence monotone, on retrouve (3.9), et pour $0 \leq u \leq u_1$, il vient que
$u_n \in L^{\infty}_{loc}((0,\infty); E_\rho)$.

3.2.2 Régularité et unicité des solutions

Théorème 3.2.2. *Soit $u \in L^{\infty}_{loc}((0,\infty); E_\rho)$ une solution mild de (3.8), alors*

1. $u \in C\left((0,\infty) \times \mathbb{R}^N\right)$,
2. $\forall t > 0$, $\partial u/\partial x_i(t,\cdot) \in C(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* i, $1 \leq i \leq n$,
3. $\forall \rho > 0$, $\nabla_x u \in L^{\infty}_{loc}((0,\infty); E_\rho)$,

4. $\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.

Si de plus, $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ *la convergence est alors uniforme sur les compacts de* $\mathbb{R}^N$*.*

Démonstration. Posons

$$u_1 = S(t)u_0,$$

et

$$u_2 = \int_0^t S(t-s)u^p(s)\,ds.$$

1. On commence tout d'abord, par prouver les résultats pour u_1.

   (a) D'après la théorie standard de l'équation de la chaleur linéaire, on a que $u_1 \in C^\infty\left((0,\infty),\mathbb{R}^N\right)$.

   (b) D'après 1. u_1 est différentiable, et on a pour $0 < \epsilon < t$ et $1 \le i \le n$:

$$\begin{aligned} |\partial u_1/\partial x_i(t,x)| &\le (4\pi t)^{-N/2}\int \exp^{-|x-y|^2/4t}(|x_i-y_i|/2t)u_0(y)\,dy, \\ &\le C\|u_0\|_\rho\, t^{-1/2}\int \exp^{-|y|^2}|y|\rho^{-1}\,(x+2\sqrt{t}y)\,dy, \\ &\le C\rho^{-1}\|u_0\|_\rho\,\epsilon^{-1/2}\int \exp^{-|y|^2}|y|\rho^{-1}(2\sqrt{t}y)\,dy. \end{aligned}$$

   (c) Résulte de (b).

   (d) On obtient la limite, en appliquant les propriétés du semi-groupe.

   (e) Il suffit, de considérer $u_0 \in E_\rho$, qu'on peut écrire sous la forme

$$u_0 = f + g,$$

   où f est une fonction bornée à support compact, et $g \in E_\rho$ s'annulant sur le support de f.

2. Montrons tout d'abord que u_2 converge uniformément vers 0 quand $t \to 0$ sur tout compact de $\mathbb{R}^N$, afin qu'on puisse appliquer le théorème d'interversion de dérivation et d'intégration.

En effet,

$$
\begin{aligned}
u_2(t,x) &= \int_0^t (4\pi s)^{-N/2} \int \exp^{-|x-y|^2/4s} u^p(t-s,y)\,dy\,ds,\\
&\leq \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p \int_0^t (4\pi s)^{-N/2} \int \exp^{-|x-y|^2/4s} \rho^{-p}(y)\,dy\,ds,\\
&\leq \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p \pi^{-N/2} \int_0^t \int \exp^{-|y|^2} \rho^{-1}(x+2\sqrt{t}y)\,dy\,ds,\\
&\leq \rho^{-1}(x) t\varphi(t) \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p.
\end{aligned}
$$

On fait remarquer, qu'on a utilisé ici le fait que $\rho^{-p} \leq \rho^{-1}$ dès que $\rho \leq 1$ et $0 < p < 1$, et on a le résultat, en faisant $t \to 0$.

(a) $u_2 : (0,\infty) \to C(\mathbb{R}^N)$ est continue, i.e.

$$
\forall \bar{t} > 0, \forall K \subset\in \mathbb{R}^N \, compact, \quad \lim_{t\to\bar{t}} \|u_2(t,\cdot) - u_2(\bar{t},\cdot)\|_{L^\infty(K)} = 0. \tag{3.15}
$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}^N$. Alors

$$
\begin{aligned}
|u_2(t,x) - u_2(\bar{t},x)| &\leq \int_0^{\bar{t}} (4\pi(t-s))^{-N/2} \int |\exp^{-|x-y|^2/4(t-s)} - \exp^{-|\overline{x}-y|^2/4(\bar{t}-s)}| u^p(s,y)\,dy\,ds\\
&+ \int_{\bar{t}}^t (4\pi(t-s))^{-N/2} \int \exp^{-|x-y|^2/4(t-s)} u^p(s,y)\,dy\,ds\\
&+ \int_0^{\bar{t}} |(4\pi(\bar{t}-s))^{-N/2} - (4\pi(t-s))^{-N/2}|\\
&\times \int \exp^{-|x-y|^2/4(t-s)} u^p(s,y)\,dy\,ds,\\
&\leq C\rho^{-1}(x) \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p\\
&\times \int\int_0^{\bar{t}} |\exp^{-|y|^2} - \exp^{-(t-s)|y|^2/(\bar{t}-s)}| \rho^{-1}(2\sqrt{(t-s)}y)\,dy\,ds\\
&+ \rho^{-1}(x) \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p |t-\bar{t}| \int \exp^{-|y|^2} \rho^{-1}(2\sqrt{t}y)\,dy\\
&+ \rho^{-1}(x) \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p \int_0^{\bar{t}} |1 - ((\bar{t}-s)/(t-s))^{N/2}|\\
&\times \int \exp^{-|y|^2} \rho^{-1}(2\sqrt{t}y)\,dy\,ds.
\end{aligned}
$$

On obtient (3.15) par le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur tout compact de $\mathbb{R}^N$.

(b) Supposons que $\partial u_2/\partial x_i$ existe (idem. $S(t-s)u^p(s)$), car d'après ce qui précède, on peut dériver sous le signe intégrale. Ainsi

$$\begin{aligned} |\partial/\partial x_i S(t-s)u^p(s)| &\leq s^{-1/2} \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p \int |y| \exp^{-|y|^2} \rho^{-p}(x+2\sqrt{s}y)\, dy \\ &\leq s^{-1/2}\rho^{-1}(x)\varphi_1(s) \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est intégrable sur $[0,t]$ pour tout x dans tout compact.

(c) On a

$$\begin{aligned} |\partial u_2/\partial x_i| &\leq \int_0^t |\partial/\partial x_i\, S(t-s)u^p(s)|\, ds, \\ &\leq \rho^{-1}(x) \sup_{0\leq s\leq t} [\|u(s)\|_\rho]^p \int_0^t s^{-1/2}\varphi_1(s)\, ds, \end{aligned}$$

avec $u_2 \in L^\infty((0,\infty), E_\rho)$, ce qui prouve le résultat.

(d) On montre que, $\partial u_2/\partial x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^N$. En effet, pour tous $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} |\partial u_2/\partial x_i(t,x) - \partial u_2/\partial x_i(t,\overline{x})|\, ds &\leq \int_0^t (2s)^{-1}(4\pi s)^{-N/2} \\ &\times \int |\exp^{-|x-y|^2/4s}(x_i-y_i) - \exp^{-|\overline{x}-y|^2/4s}(\overline{x}_i-y_i) \\ &\times |u^p(t-s,y)\, dy\, ds, \end{aligned}$$

et qui tend vers 0 presque partout lorsque x tend vers $\overline{x}$.

(e) On le démontre par le théorème de convergence dominée pour tout x et $\overline{x}$ dans les compacts de $\mathbb{R}^N$.

□

Remarque 3.2.1. *Comme il a été mentionné plus haut, u^p n'est pas Lipschitzienne sur les intervalles de la forme $[0,\epsilon)$ pour $0<p<1$ et $\epsilon>0$, ce qui influe sur*

1. *L'unicité des solutions de (3.8) : en effet, si $u_0 \equiv 0$, on a des solutions nulles, et des solutions de la forme*

$$u_\tau(t) = ((1-p)(t-\tau)_+)^q, \quad \tau \geq 0, \tag{3.16}$$

où q=1/(1-p).

2. *La régularité des solutions (3.8) : en effet, soit*

$$k = \begin{cases} [1/(1-p)] & si \quad k \notin \mathbb{Z}, \\ [1/(1-p)] - 1 & si \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

.

où $[\cdot]$ désigne partie entière.

Alors, toute solution u_r est définie et de classe C^k sur $[0, \infty)$, mais pas de classe C^l (Idem. avec C^∞ si $u_0 \equiv 0$), sur $(\tau - \epsilon, \infty)$ pour tout $l > k$ et $\epsilon > 0$. Donc les solutions ne sont que C^k.

Grâce à l'égalité (3.16), et aux deux résultats suivants qu'on pourra démontrer l'unicité des solutions.

Lemme 3.2.2. *Soit $u_0 \not\equiv 0$, ($u_0(x) \geq 0$) pour tout $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $T > 0$ et u une fonction non négative sur $(0, T) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tel que pour tout $t \in (0, T)$ et $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:*

$$u(t, x) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)u^p(s)\, ds, \tag{3.17}$$

on a

$$u(t, x) > ((1-p)t)^q \qquad \forall t \in (0, T), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \tag{3.18}$$

Démonstration. la preuve se fait en deux étapes

Etape 1.

On considère

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \exists c, a > 0, \ \ u_0(x) \geq c \exp^{-a|x|^2}.$$

et

$$S(t)\left(\exp^{a|.|^2}\right)(x) = (1 + 4at)^{-N/2} \exp -a|x|^2/(1 + 4at).$$

Pour $u \geq 0$, l'inégalité (3.17) s'écrit

$$u(t, x) \geq S(t)\left(\exp^{ca|.|^2}(x)\right) = c(1 + 4at)^{-N/2} \exp -a|x|^2/(1 + 4at). \tag{3.19}$$

En remplaçant (3.19) dans (3.17), on obtient pour $u_0 \geq 0$

$$\begin{aligned} u &\geq c^p \int_0^t (1+4as)^{-N(1-p)/2}(1+4as+4ap(t-s))^{-N/2} \left\{ -\frac{ap|x|^2}{1+4as+4ap(t-s)} \right\} ds, \\ &\geq c^p (1+4at)^{-N/2} \exp(-ap|x|^2/(1+4apt)), \end{aligned}$$

cette dernière, s'écrit avec $0 < p < 1$

$$\begin{aligned} u &\geq c^{p^2} \int_0^t s^p [(1+4aps)/(1+4as)^p]^{-N/2}(1+4aps+4ap^2(t-s))^{-N/2} \exp\left\{ -\frac{ap^2|x|^2}{1+4aps+4ap^2(t-s)} \right\} \\ &\geq c^{p^2}(1+p)^{-1} t^{1+p}(1+4apt)^{-N/2} \exp\left\{ -ap^2|x|^2/(1+4ap^2 t) \right\}. \end{aligned}$$

Car, $1+4ap^2 t \leq 1+4aps+4ap^2(t-s) \leq 1+4apt$ et $(1+4aps)/(1+4as)^p \geq 1$ pour $0 \leq s \leq t$ et $0 < p < 1$.

En itérant ce procédé pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$u \geq c^{p^{k+1}} c(k) t^{1+p+\ldots+p^k}(1+4ap^k t)^{-N/2} \exp\left\{ -ap^k|x|^2/(1+4ap^k t) \right\}, \tag{3.20}$$

où

$$c(k) = (1+p+\ldots+p^k)^{-1}.(1+p+\ldots+p^{k-1})^{-p}\ldots(1+p)^{-p^{k-1}}.$$

En prenant le logarithme népérien des deux membres, il vient

$$\begin{aligned} \log c(k) &= -\sum_{j=1}^{k} p^{k-j} \log\left(\sum_{h=0}^{j} p^j \right), \\ &\geq q \log(1-p). \end{aligned}$$

Ainsi

$$c(k) \geq (1-p)^q. \tag{3.21}$$

En combinant (3.20) avec (3.21) et faisant $k \to \infty$, on obtient le résultat demandé.

Etape 2.

Plus généralement, soit $0 < t_0 < T$ et introduisons $v(t) = u(t_0+t)$ pour $0 < t < T - t_0$, on a

$$v(t) \geq S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)v^p(s)\, ds,$$

où

$$v_0(s) = S(t_0)u_0 \geq \exp^{-a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

avec $c, a > 0$ dépendant de u_0 et de t_0.

Il en découle que si $0 \leq t + t_0 \leq T$, alors

$$u(t + t_0, x) \geq ((1-p)t)^q \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

par suite,

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall t > 0,\ u(t,x) = u(x, \epsilon + (t-\epsilon)) \geq [(1-p)(t-\epsilon)]^q \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

et donc,

$$u(t,x) \geq ((1-p)t)^q \quad \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Cette dernière inégalité est obtenue pour $t > 0$ à partir de (3.17) et du fait que si $u_0 \not\equiv 0$ alors $S(t)u_0(x) > 0$ pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$. □

Remarque 3.2.2. *La preuve des résultats qui seront énoncés, est obtenue par un raisonnement analogue à celui qui précède.*

Corollaire 3.2.1. *Toutes les solutions $u \in L^\infty_{loc}((0,T); E_\rho)$ mild non triviales et non négatives avec donnée initiale $u_0 \equiv 0$, associées à (3.8) sont données par (3.16).*

Démonstration. L'idée de la preuve, est de définir l'ensemble

$$\tau = \left\{ t > 0 \,|\, \exists x \in \mathbb{R}^N,\ u(t,x) > 0 \right\},$$

et le résultat est obtenu en appliquant le lemme 3.2.2. □

Théorème 3.2.3. *Soient $u, v \in L^\infty_{loc}((0,\infty); E_\rho)$ positives, et telle que pour tout $t > 0$*

$$u(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)u^p(s)\,ds$$

$$v(t) \leq S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)v^p(s)\,ds$$

où

$$u_0, v_0 \in E_\rho, \ \ u_0 \geq v_0 \geq 0, \ \ u_0 \not\equiv 0.$$

alors $u(t) \geq v(t)$ *pour tout* $t \geq 0$.

Démonstration. L'idée de la preuve, est de poser $g(t) = v(t) - u(t)$, et de prouver que $g_+(t) \equiv 0$. □

Par conséquent, le résultat d'unicité des solutions est une conséquence directe du théorème 3.2.3, on a donc

Corollaire 3.2.2. *Pour tout* $u_0 \in E_\rho$, $u_0 \not\equiv 0$, *la solution de (3.8) dont l'existence a été prouvée dans le théorème 3.2.1 est unique.*

Remarque 3.2.3. *Le théorème 3.2.3 est un résultat essentiel, à savoir il nous permet d'en déduire également la régularité, la dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales et le comportement asymptotique des solutions de (3.8).*

On termine cette partie par un théorème affirmant que les solutions obtenues pour le problème (3.8) sont des solutions classiques.

Théorème 3.2.4. *Soit* $u \in L^\infty_{loc}((0;\infty); E_\rho)$ *une solution mild de (3.8) avec donnée initiale* $u_0 \not\equiv 0$. *Alors,* $u \in C^\infty((0;\infty);\mathbb{R}^N)$ *est une solution classique de (3.8).*

Démonstration. La preuve est technique, voir [97, 98]. □

$u_0 \not\equiv 0$, *la solution de (3.8) dont l'existence a été prouvée dans le théorème 3.2.1 est unique*

3.2.3 Explosion et exposant critique au sens de Fujita.

On reprend dans cette partie le problème (3.8) ; mais avant d'introduire les résultats de Fujita, on donnera quelques définitions utiles.

Définition 3.2.2. *Une fonction non négative $u = u(t,x)$ est appelée solution régulière de (3.8) dans $[0,T]$, $(T > 0)$ si u, $\nabla_x u$, $\nabla_x \nabla_x u$ et u_t existent tous et sont continus dans $[0,T] \times \mathbb{R}^N$ et si (3.8) est satisfaite. De plus, u est régulière dans $[0,\infty]$ si sa restriction à $[0,T] \times \mathbb{R}^N$ est une fonction régulière de (3.8) pour tout $T > 0$.*

Soit $T > 0$, on définit l'ensemble $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}([0,T]) = \left\{ u = u(t,x) \in C([0,T]\,\mathbb{R}^N),\ /\ |u(t,x)| \leq M \exp(|x|^\beta),\ 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^N \right\},$$

où, $M > 0$ et $0 < \beta < 2$, sont des constantes qui peuvent dépendre de u.

Définition 3.2.3. *$p^*(N)$ est défini comme l'exposant critique de (3.8) et est donné par*

$$p^*(N) := 1 + \frac{2}{N}.$$

Les résultats établis dans le travail pionnier de Fujita [44] sont donnés dans les théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 ci-après :

Théorème 3.2.5. *Supposons que $u_0 \in \mathbb{R}^N$ est régulière, et $u_0 \not\equiv 0$. Si $0 < p < p^*$, alors le problème (3.8) n'admet pas de solution globale dans $u \in \mathcal{E}([0,\infty))$ (voir [44]).*

On notera dans cette partie le noyau de la chaleur par

$$S(t,x) = (4\pi t)^{-N/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N,$$

Théorème 3.2.6. *Soit $\gamma > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que pour toute donnée initiale régulière satisfaisant la propriété*

$$0 \leq u_0(x) \leq \delta S(\gamma, x), \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

si $p > p^*$, alors le problème (3.8) admet une solution globale $u \in \mathcal{E}([0,\infty))$, vérifiant

$$0 \leq u(t,x) \leq MS(t+\gamma, x), \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

où, $M > 0$, (voir [44]).

Remarque 3.2.4. *La solution $u \in \mathcal{E}([0,\infty))$, existe globalement pour une donnée initiale suffisamment petite, on dira que le blow-up ne persiste pas.*

Pour prouver le théorème 3.2.5, on aura besoin du résultat suivant :

Lemme 3.2.3. *Supposons que $u_0 \not\equiv 0$ est régulière, et soit $u = u(t,x)$ une solution régulière de (3.8) dans $\mathcal{E}([0,T])$, alors on a*

$$J_0^{1-p} - u(t,0)^{1-p} \geq (p-1)t, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.22}$$

où,

$$J_0 = J_0(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t,x)u_0(x)\,dx.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $t \in [0,T]$, on pose

$$J_\epsilon = J_\epsilon(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon, x)u(s,x)\,dx,$$

avec $x \in \mathbb{R}^N$ et $J_\epsilon > 0$ et continue pour tout $s \in [0,t]$. Si l'on prend $u \in \mathcal{E}([0,T])$, il existe des cosntantes positives M et $\beta < 2$ telles que

$$0 \leq u(s,x) \leq M\exp(|x|^\beta), \qquad 0 \leq s \leq T, \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Le changement de variable

$$x = (2\sqrt{t-s+\epsilon})\eta.$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_\epsilon \leq M \int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon, x)\exp(|x|^\beta)\,dx, \\ &= M\pi{-}N/2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp(-|\eta|^2)\exp(|2\sqrt{-s+\epsilon}|^\beta|\eta|^\beta)\,d\eta, \qquad (3.23) \\ &\leq M\pi{-}N/2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp(-|\eta|^2 + \gamma|\eta|^\beta)\,d\eta, \qquad (3.24) \end{aligned}$$

avec $\gamma = 2^\beta(t+\epsilon)^{\beta/2}$. De l'inégalité (3.23), on peut constater que

$$J_\epsilon = \int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon, x)u^p(s,x)\,dx.$$

est une fonction continue et convergente uniformément. Par ailleurs, elle est continûment différentiable et satisfait

$$\frac{d}{ds}J_\epsilon(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon,x)u^p(s,x)\,dx.$$

Notons que $S(t-s+\epsilon,x)$ est positive et vérifie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon,x)\,dx = 1.$$

Alors l'inégalité de Jensen, conduit à

$$\frac{d}{ds}J_\epsilon(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon,x)u^p(s,x)\,dx \geq \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} S(t-s+\epsilon,x)u(s,x)\,dx\right]^p = J_\epsilon^p.$$

$$\frac{d}{ds}J_\epsilon(s) \geq J_\epsilon^p, \tag{3.25}$$

où $0 \leq s \leq t$. Une simple intégration de (3.25), mène à

$$J_\epsilon^{1-p}(0) - J_\epsilon^{1-p}(t) \geq (p-1)t. \tag{3.26}$$

En faisant $\epsilon \to \infty$, on trouve grâce aux propriétés de la fonction de Green

$$J_\epsilon(t) \to (0,t), \quad \text{et} \quad J_\epsilon(0) \to -J_0. \tag{3.27}$$

Combiner (3.26) avec (3.27) on obtient l'inégalité (3.22). □

Preuve du théorème 3.2.5 : Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une solution globale au problème (3.8) dans $\mathcal{E}([0,\infty))$ avec $u(0,x) = u_0(x) \not\equiv 0$. Pour user du lemme 3.2.3, on exhibe la borne inférieure de J_0, il vient que

$$J_0^{1-p} \geq u(t,0)^{1-p} + (p-1)t \geq (p-1)t.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $u_0(x) > 0$ au voisinage de l'origine.

Choisissons γ et δ des constantes positives tel que $|x| \leq 2\delta$ ce qui implique que $u_0(x) \geq \gamma$

et se restreignant à $t \geq \delta^2$, l'on obtient alors les estimations suivantes

$$\begin{aligned} J_0 &\geq \int\limits_{|x|\leq 2\delta} S(t,x)u_0(x)\,dx, \\ &\geq \int\limits_{|x|\leq 2\delta} \gamma(4\pi t)^{-N/2}\exp\left(-\frac{(2\delta)^2}{4t}\right)\,dx, \\ &\geq \int\limits_{|x|\leq 2\delta} \gamma(4\pi t)^{-N/2}\exp\left(-\frac{(2\delta)^2}{4\delta^2}\right)\,dx, \end{aligned}$$

d'où

$$J_0 \geq \int\limits_{|x|\leq 2\delta} (4\pi t)^{-N/2}e^{-1}\,dx.$$

Ce qui entraîne que

$$J_0 \geq c_1 t^{-N/2}, \quad t \geq \delta^2. \tag{3.28}$$

où c_1 est une constante positive, et donc pour $t \geq \delta^2$

$$\begin{aligned} J_0^{1-p} &\geq \left(c_1 t^{-N/2}\right)^{1-p}, \\ \left(c_1 t^{-N/2}\right)^{1-p} &\geq (p-1)t, \\ c_1^{1-p}t^{-N(1-p)/2} &\geq (p-1)t, \\ t^{N(1-p)/2} &\geq (p-1)tc_1^{p-1}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Quand $\dfrac{N(p-1)}{2} < 1$, l'inégalité (3.29) n'est pas réalisée pour t suffisamment grand. Par conséquent, le problème (3.8) ne possède pas de solution globale pour $0 < p < p^*$. Notons que le cas $p = p^*$ appartient au cas de blow-up [98].

Preuve du théorème 3.2.5 : La démonstration est basée sur la construction des fonctions test (voir chapitres 5 et 6).

Chapitre 4

Existence locale, globale et explosion des solutions pour une équation de la chaleur non locale en temps

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème de Cauchy associé à une équation parabolique semi-linéaire d'ordre supérieur avec un terme source non local en temps. On a établi des conditions suffisantes d'existence (locale et globale) et d'explosion des solutions.

On considère le problème de Cauchy associé à l'équation parabolique semi-linéaire d'ordre $2m$, $m \in \mathbb{N}$

$$u_t + (-\Delta)^m u = J^{\alpha}_{0|t}(|u|^p) \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

où, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in (0,1)$, $p > 1$ et $J^{\alpha}_{0|t}$ l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (voir [86]).

On introduit, tout d'abord quelques résultats utiles pour la suite (voir [23], [33], [82], [83] et [92]).

Lemme 4.0.4. *L'espace de Sobolev $W^{k,s}(\mathbb{R}^N)$ est par définition*

$$W^{k,s}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f /\, D^{\beta} f \in L^s(\mathbb{R}^N)\ pour\, 0 \le |\beta| \le k \right\}$$

où, $s \in [1, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$.
C'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_{k,s} = \sum\limits_{|\beta| \le k} \|D^{\beta} f\|_s$.
Notons $W^{\infty,s}(\mathbb{R}^N) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} W^{k,s}(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \le s \le \infty$.

Soit $S(t) = e^{-t(-\Delta)^m}$ le semi-groupe fortement continue, défini sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ engendré par l'opérateur $(-\Delta)^m$.
On a le résultat suivant (voir [3, 82]).

Lemme 4.0.5. *Soit $1 \le s \le \infty$ et soit $\Phi \in L^s(\mathbb{R}^N)$, alors*

$$S(t)\Phi(x) \in C^{\infty}\left((0,\infty)\,; W^{\infty,s}(\mathbb{R}^N) \cap W^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^N)\right)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$,$\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$ et $\lambda \in [s, \infty]$ il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|\partial^k_t \partial^{\alpha}_x S(t)\Phi\|_{\lambda} \le C t^{-[\frac{N}{m}](\frac{1}{s} - \frac{1}{\lambda}) - \frac{|\alpha|}{(m)} - k} \|\Phi\|_s \tag{4.3}$$

pour $t > 0$.

Dans la suite $S(t)$ désigne le semi-groupe de la chaleur.

Lemme 4.0.6. (*Inégalité d'interpolation*)

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ *avec* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Alors, $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $p \leq r \leq q$, *on a donc*

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha} \quad \textit{vérifié pour } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad \textit{et} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{4.4}$$

Lemme 4.0.7. *Soit* $0 < a, b < 1$, *il existe une constante* C *tel que l'on ait*

$$\int_0^t (t-s)^{-a} s^{-b} ds \leq C t^{1-a-b}. \tag{4.5}$$

pour $t > 0$.

4.0.4 Existence locale des solutions

Définition 4.0.4. *Soient* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$, $p > 1$ *et* $T > 0$. *On appelle solution mild* u *associée au problème (4.1)-(4.2), la solution* u *vérifiant l'équation intégrale*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) J_{0|s}^\alpha(|u|^p u) ds, \quad t \in [0, T],$$

où $S(t) := e^{(-\Delta)^m t}$ *est le semi-groupe fortement continu défini sur* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *engendré par l'opérateur Laplacien* $(-\Delta)^m$.

Théorème 4.0.7. (*Existence locale*)

Soient $p > 1$, $\alpha \in (0,1)$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$. *Alors, pour tout* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *il existe une unique solution mild* $u \in C\left([0, T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N)\right)$ *au problème (4.1)-(4.2) définie sur* $(0, T_{max})$ *satisfaisant l'alternative :*

$T_{max} = +\infty$,

ou $T_{max} < +\infty$ *et* $\lim_{t \to T_{max}} ||u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \infty$,

où

$$T_{max} := \sup\left\{T > 0 : \ u \textit{ solution mild de (4.1)-(4.2) dans } L^\infty\left([0, T), C_0(\mathbb{R}^N)\right)\right\}.$$

En outre, si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *avec* $1 \leq r < \infty$, *alors* $u \in C\left([0, T_{max}), L^r(\mathbb{R}^N)\right)$.

Démonstration. La preuve se subdivise en deux étapes :

Etape 1 : On démontre l'existence et l'unicité des solutions de (4.1)-(4.2).

• soit $A_0 > 0$ choisi telle que $\|u_0\|_\infty < A_0$. Considérons l'ensemble

$$E_T = \left\{ u \in L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N)) \;\; \|u(t)\|_\infty \leq \epsilon_0 + A_0 \right\}, \tag{4.6}$$

pour $T > 0$ à préciser plus loin, et $\epsilon_0 > 0$.

On utilisera les notations suivantes

$$\|\cdot\|_{\infty,\infty} := \|\cdot\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))}, \quad \|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \|\cdot\|_{\infty,T} := \|\cdot\|_{L^\infty(0,T)}.$$

Considérons l'opérateur $\Psi : E_T \to E_T$ défini par

$$\begin{aligned} \Psi(u(t)) &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) J^\alpha_{0|s}(|u|^{p-1}u(s))\, ds, \\ &= S(t)u_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t S(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma)\, d\sigma\, ds, \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\gamma := 1 - \alpha$.

Soit $u \in E_T$, de (4.6) et (4.7) , on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{\infty,\infty} &\leq \|u_0\|_\infty + \| \int_0^t \int_0^s \frac{(s-\sigma)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \|u(\sigma)\|^p_\infty \, d\sigma\, ds \|_{\infty,T}, \\ &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma} \|u\|^p_{\infty,\infty}, \\ &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma} (A_0 + \epsilon_0)^p, \\ &\leq A_0 + \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma} (A_0 + \epsilon_0)^p. \end{aligned} \tag{4.8}$$

On choisit

$$\frac{1}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma} (A_0 + \epsilon_0)^p < \epsilon_0 \Leftrightarrow T < \left[\frac{\Gamma(3-\gamma)\epsilon_0}{(A_0+\epsilon_0)^p} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}},$$

afin d'avoir $\Psi(u) \in E_T$.

• En outre, il s'agit de montrer que Ψ est une contraction. En effet, soient $u_1, u_2 \in E_T$, de (4.6) et (4.7), on a

$$\|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)\|_{\infty,\infty} \leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \| \, |u_1|^{p-1} u_1(\sigma) - |u_2|^{p-1} u_2(\sigma) \|_\infty \, d\sigma \, ds \|_{\infty,T},$$

grâce, à l'inégalité

$$\left| \, |u_1|^{p-1} u_1 - |u_2|^{p-1} u_2 \right| \leq (p-1)|u_1 - u_2| \left(|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right), \tag{4.9}$$

on peut écrire

$$\|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)\|_{\infty,\infty} \leq \frac{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma} \|u_1 - u_2\|_{\infty,\infty}. \tag{4.10}$$

Si T satisfait la condition

$$\frac{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma} < 1 \Leftrightarrow T < \left[\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}},$$

on obtient

$$\|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)\|_{\infty,\infty} < \|u_1 - u_2\|_{\infty,\infty}.$$

Par le théorème du point fixe de Banach, on en déduit que (4.1)-(4.2) admet une solution mild $u \in E_T$ pour $T \leq Min \left\{ \left[\frac{\Gamma(3-\gamma)\epsilon_0}{(A_0+\epsilon_0)^p} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}}, \left[\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}} \right]^{\frac{1}{2-\gamma}} \right\}$.

• Pour obtenir l'unicité, on considère $u_1, u_2 \in E_T$, deux solutions mild de (4.1)-(4.2), et en appliquant (4.6) et (4.7) on trouve

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \frac{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u_1(\sigma) - u_2(\sigma)\|_\infty \, d\sigma \, ds.$$

Grâce au théorème de Fubini, on a que

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_\infty &\leq \frac{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u_1(\sigma) - u_2(\sigma)\|_\infty \, ds \, d\sigma, \\
&\leq \frac{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \|u_1(\sigma) - u_2(\sigma)\|_\infty \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \, ds \, d\sigma, \\
&\leq \frac{2(p-1)(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} \|u_1(\sigma) - u_2(\sigma)\|_\infty \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Par le lemme singulier de Gronwall (voir lemme 8.1.1 [25]), on en déduit l'unicité de la solution.

Etape 2 : Prouver la régularité de la solution, revient à montrer que si
$u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, alors $u \in C\left([0, T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)\right)$.
On pose,

$$F_T = \Big\{ u \in L^\infty\left((0,T), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)\right) / \quad ||u||_\infty, ||u||_r \leq A_0 + \epsilon_0 \Big\}; \qquad A_0, \epsilon_0 > 0, \quad (4.11)$$

pour tout $t \in (0,T)$ et $Max\left\{\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_r\right\} \leq A_0$.
L'opérateur $\Psi : F_T \to F_T$ a été defini dans (4.7).
On notera

$$\|\cdot\|_{r,\infty} := \|\cdot\|_{L^\infty((0,T), L^r(\mathbb{R}^N))}.$$

Supposons qu'il existe une constante $\omega \geq 1$, tel que l'on ait pour $pr > 1$

$$\frac{1}{pr} \leq \frac{1}{\omega} \leq min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r}, \frac{1}{p}\left(\frac{2m}{N} + \frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Estimation de $\|\Psi(u)\|_{\infty,\infty}$: En procédant comme à l'étape 1, on a simplement

$$\|\Psi(u)\|_{\infty,\infty} \leq A_0 + \frac{(A_0 + \epsilon_0)^p}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma}. \qquad (4.12)$$

Ainsi

$$\|\Psi(u_1) - \Psi(u_2)\|_{\infty,\infty} \leq \frac{2(A_0 + \epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} T^{2-\gamma}\, sup_{t\in(0,T)} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{\infty,\infty}. \qquad (4.13)$$

Estimation de $\|\Psi(u)\|_{r,\infty}$.
Notons qu'on tire alors de (4.3), (4.7) et (4.11) pour $r \leq w$, que

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_{r,\infty} &\leq \|u_0\|_r + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_0^s \|S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma)\|_{r,\infty}\, d\sigma\, ds, \\
&\leq A_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega} - \frac{1}{r}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u\|_\omega^p\, d\sigma\, ds.
\end{aligned}$$

En Appliquant l'inégalité d'interpolation (4.4) à $\|\cdot\|_\omega$ pour $r \leq \omega \leq \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\Psi(u)\|_{r,\infty} &\leq \|u_0\|_r + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u\|_r^{\frac{r}{\omega}p}\|u\|_\infty^{\left(1-\frac{r}{\omega}\right)p}\,d\sigma\,ds,\\ &\leq A_0 + \frac{(A_0+\epsilon_0)^p}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\,d\sigma\,ds. \end{aligned} \tag{4.14}$$

En particulier, si u vérifie (4.5), alors

$$\|\Psi(u)\|_{r,\infty} \leq A_0 + \frac{(A_0+\epsilon_0)^p}{\Gamma(3-\gamma)}T^{2-\gamma-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}, \tag{4.15}$$

et pour $r \leq \omega$, il vient que

$$\begin{aligned}\|\Psi(u_1)-\Psi(u_2)\|_{r,\infty} &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}\int_0^s \frac{(s-\sigma)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}\mathcal{A}_\omega^{p-1}\|u_1(\sigma)-u_2(\sigma)\|_\omega\,d\sigma\,ds\\ &\quad\left(\text{avec}\quad \mathcal{A}_\omega^{p-1} := \|u_1\|_\omega^{p-1}+\|u_2\|_\omega^{p-1}\right) \qquad (4.16)\\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}\int_0^s \frac{(s-\sigma)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}\,\mathcal{A}_{r,\infty}^{1,2}\|u_1(\sigma)-u_2(\sigma)\|_\omega\,d\sigma\,ds\\ &\quad\left(\text{avec}\quad \mathcal{A}_{r,\infty}^{1,2} := \|u_1\|_r^{(p-1)\frac{r}{\omega}}\|u_1\|_\infty^{(p-1)(1-\frac{r}{\omega})}+\|u_2\|_r^{(p-1)\frac{r}{\omega}}\|u_2\|_\infty^{(p-1)(1-\frac{r}{\omega})}\right)\\ &\leq \frac{2(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{r,\infty}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}(s-\sigma)^{-\gamma}\,d\sigma\,ds\\ &\leq \frac{2(A_0+\epsilon_0)^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)}T^{2-\gamma-\frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r}\right)}\|u_1-u_2\|_{r,\infty}. \qquad (4.17)\end{aligned}$$

De (4.12), (4.13), (4.15) et (4.16) permet de conclure qu'il existe dans F_T un point fixe $u \in C\left((0,T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)\right)$, pour T assez petit.

Preuve similaire à l'étape 1, donne que $u \in C\left((0,T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)\right)$ est unique.

□

4.0.5 Explosion des solutions

Théorème 4.0.8. *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \not\equiv 0$ et soit $\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx \geq 0$.*

La solution du problème (4.1)-(4.2) explose en temps fini, si

$$1 < p \leq 1 + \frac{2m(2-\gamma)}{(N-2m+2m\gamma)_+} := p^* \quad ou \quad p \leq \frac{1}{\gamma}$$

pour tout $m \geq 1$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que u est solution globale de (4.1)-(4.2).

Or, comme u est solution mild, elle est alors solution faible au sens que (voir lemme 4.2 [43])

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha}_{0|t}(|u|^p(x,t))\varphi(x,t)\,dx\,dt$$
$$= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)\varphi_t(x,t)|\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)(-\Delta)^m\varphi(x,t)|\,dx\,dt. \tag{4.18}$$

Soit la fonction test $\varphi \in C^1\left([0,T], H^{2m}(\mathbb{R}^N)\right)$ à support compact et

$\varphi(\cdot\,,T) = 0$.

Pour la suite, on posera

$$\varphi(x,t) = D^{\alpha}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t)) = \varphi_1(x)D^{\alpha}_{t|T}(\varphi_2(t)), \tag{4.19}$$

où

$$\varphi_1(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{1}{2m}}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\eta}, \quad T > 0,$$

où $\eta \geq max\left\{\frac{\alpha p+1}{p-1};\, \alpha+1\right\}$, et Φ la fonction de troncature définie par

$$\phi(r) := \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \quad \text{et } \phi \text{ décroissante pour } 1 \leq r \leq 2, \\ 0, & r \geq 2. \end{cases}$$

vérifiant :

$$0 \leq \Phi \leq 1, \quad r\,|\Phi'(r)| \leq C_1 \qquad \text{pour tout} \quad r > 0.$$

Il s'ensuit de (4.18) et (4.19) que

$$\begin{aligned}
CT^{-\alpha} & \int_{\Omega} u_0(x)\varphi_1(x)\,dx + \int_0^T \int_{\Omega} D^{\alpha}_{0|t} J^{\alpha}_{0|t}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \\
= & \int_0^T \int_{\Omega} |u(x,t) D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\,dx\,dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} |u(x,t)(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\,dx\,dt, \qquad (4.20) \\
= & J_1 + J_2, \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

où $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N, \ \ |x| \leq 2T^{\frac{1}{2m}}\right\}$.

Pososns $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$ et $\int\limits_{\Omega_T} = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \ dx\,dt$.

On constate que

(i)

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \int_{\Omega_T} |u(x,t) D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|, \\
&= \int_{\Omega_T} |u(x,t)|\widetilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}\widetilde{\varphi}^{-\frac{1}{p}}|D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Young, on a

$$ab \leq \frac{1}{2p}a^p + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}b^{\widetilde{p}} \quad \text{pour} \quad p\widetilde{p} = p + \widetilde{p}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad p > 1 \quad \text{and} \quad \widetilde{p} > 1,$$

avec

$$a = |u(x,t)|\widetilde{\varphi}^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad b = \widetilde{\varphi}^{-\frac{1}{p}}|D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|,$$

ce qui donne

$$J_1 \leq \frac{1}{2p}\int_{\Omega_T} (|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t) + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}} \int_{\Omega_T} \widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}(x,t)|D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|^{\widetilde{p}}. \qquad (4.23)$$

De même que dans le cas de J_1, on peut estimer J_2. En effet,

$$\begin{aligned}
J_2 &:= \int_{\Omega_T} |u(x,t)(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|, \\
&= \int_{\Omega_T} |u(x,t)|\widetilde{\varphi}^{\frac{1}{p}}\widetilde{\varphi}^{-\frac{1}{p}}|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|, \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Young avec

$$a = |u(x,t)|\widetilde{\varphi}^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad b = \widetilde{\varphi}^{-\frac{1}{p}}|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|,$$

il vient

$$J_2 \leq \frac{1}{2p}\int\limits_{\Omega_T}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t) + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int\limits_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}(x,t)\left[|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\right]^{\widetilde{p}}. \tag{4.25}$$

De (4.20),(4.23) et (4.25), on obtient

$$\begin{aligned} CT^{-\alpha}\int\limits_{\Omega}u_0(x)\varphi_1(x) + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t) & \\ \leq \quad \frac{1}{2p}\int\limits_{\Omega_T}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t) + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int\limits_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}|D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|^{\widetilde{p}} & \\ + \quad \frac{1}{2p}\int\limits_{\Omega_T}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t) + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int\limits_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}\left[|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\right]^{\widetilde{p}}. & \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} CT^{-\alpha} & \int\limits_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi_1(x) + \left(1-\frac{1}{p}\right)\int\limits_{\Omega_T}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t) \\ \leq \quad & \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int\limits_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}|D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|^{\widetilde{p}} + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int\limits_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}\left[|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\right]^{\widetilde{p}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

D'après (4.19), on a que

$$\begin{aligned} CT^{-\alpha} \quad & \int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi_1(x)dx + \left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\Omega_T}(|u|^p)(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \\ \leq \quad & \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}(x,t)\varphi_1^{\widetilde{p}}(x)|D^{\alpha+1}_{t|T}\varphi_2(t)|^{\widetilde{p}} \\ + \quad & \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}\int_{\Omega_T}\widetilde{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}}(x,t)\varphi_1^{\widetilde{p}}(x)\left[|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)|\right]^{\widetilde{p}}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Effectuant le changement de variable $\tau = \frac{t}{T}$ et $\xi = \frac{x}{T^{\frac{1}{2m}}}$ dans (4.28), on obtient

$$\int\limits_{\Omega_T}(|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \leq CT^{-\delta}, \tag{4.29}$$

où

$$\delta = \widetilde{p}(\alpha+1) - \frac{N}{2m} - 1 \quad \text{et} \quad C := C\left(|\Omega_1|, |\Omega_2|\right),$$

avec

$$\Omega_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N / \quad |\xi| \leq 2\right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \{\tau \geq 0; \tau \leq 1\}.$$

On distingue trois cas

Cas 1 : $p < p^* \Leftrightarrow \delta > 0.$

Par passage à la limite $(T \to \infty)$ dans l'inégalité (4.29), on obtient

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \int_{|x|\leq 2T^{\frac{1}{2m}}} (|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt = 0.$$

A l'aide du théorème de convergence dominée Lebesgue, et le fait que $\lim_{T\to\infty} \widetilde{\varphi}(x,t) = 1,$ on a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p(x,t))\,dx\,dt \; = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

Ce qui contredit $u \not\equiv 0$ $(\Leftarrow \quad u_0 \not\equiv 0)$.

Cas 2 : $p = p^* \Leftrightarrow \delta = 0.$

Lorsque $T \to \infty,$ l'inégalité (4.28) donne que $u \in L^p\left((0,\infty), L^p(\mathbb{R}^N)\right).$

On considère dans ce cas le changement de variables

$$\tau = \frac{t}{T} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{xB^{\frac{1}{2m}}}{T^{\frac{1}{2m}}},$$

pour

$$\Sigma_T := [0,T] \times \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leq 2B^{-1/2m}T^{1/2m}\right\} \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma_T} = \int_{\Sigma_T} dx\,dt,$$

où T et B ne tendent pas simultanément vers l'infini et $1 \leq B < T$. (4.28) s'écrit alors

$$\begin{aligned} CT^{-\alpha} & \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi_1(x)\,dx + \int_{\Sigma_T} (|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \\ \leq \quad & CT^{-(1+\alpha)\widetilde{p}+1+N/2m}B^{-N/2m} + CT^{-(1+\alpha)\widetilde{p}+1+N/2m}B^{\widetilde{p}-N/2m}. \end{aligned}$$

Quand $T \to \infty$, on obtient

$$\int\limits_{\Sigma_T} (|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \leq CB^{-N/2m} + CB^{\widetilde{p}-N/2m}.$$

On conclut comme dans le cas précédent en faisant $B \to \infty$.

Cas 3 : $p < 1/\delta$.

On choisit la fonction test

$$\varphi_t(x,t) = D^{\alpha}_{t|T}\left(\overline{\varphi}(x,t)\right) = \varphi_3(x) D^{\alpha}_{t|T}\left(\varphi_4(t)\right), \tag{4.30}$$

où

$$\varphi_3(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_4(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\eta},$$

avec $R \in (0,T)$ assez large et ne tend pas vers l'infini en même temps que T.

On trouve (comme dans (4.28))

$$\begin{aligned}
CT^{-\alpha} & \int\limits_{\Delta} u_0(x)\varphi_3(x)\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_{\Delta} (|u|^p(x,t))\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \\
\leq & \int\limits_0^T \int\limits_{\Delta} |u|(x,t)\overline{\varphi}^{\frac{1}{p}}\overline{\varphi}^{-\frac{1}{p}}|D^{\alpha+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\,dx\,dt \\
+ & \int\limits_0^T \int\limits_{\Delta} |u|(x,t)\overline{\varphi}^{\frac{1}{p}}\overline{\varphi}^{-\frac{1}{p}}|(-\Delta)^m D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)|\,dx\,dt,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

où

$$\Delta_T = [0,T] \times \Delta \quad \text{et} \quad \Delta = \left\{x \in \mathbb{R}^N; \quad |x| \leq 2R\right\}.$$

En utilisant l'inégalité de Young au membre de droite de (4.31), on obtient

$$\begin{aligned}
CT^{-\alpha} & \int\limits_{\Delta} u_0(x)\varphi_3(x)\,dx + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int\limits_{\Delta_T} |u|^p(x,t)\overline{\varphi}(x,t) \\
\leq & \int\limits_{\Delta_T} \overline{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}} \varphi_3^{\widetilde{p}}(x) |D^{\alpha+1}_{t|T}\varphi_4(t)|^{\widetilde{p}} + \left(\int\limits_{\Delta_T} \overline{\varphi}^{-\frac{\widetilde{p}}{p}} |(-\Delta)^m \varphi_3(x) D^{\alpha}_{t|T}\varphi_4(t)|^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{p}}}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Par le changement de variables

$$x = \frac{y}{R^{\frac{1}{2m}}} \quad \text{et} \quad t = \frac{\tau}{T},$$

l'inégalité (4.32) s'écrit

$$\begin{aligned} CT^{-\alpha} \quad & \int_{\Delta} u_0(x)\varphi_3(x)\,dx + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{\Delta_T} |u|^p(x,t)\overline{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \\ \leq \quad & CT^{-(\alpha+1)\widetilde{p}+1} R^{\frac{N}{2m}} + CT^{1-\alpha\widetilde{p}} R^{-2m\widetilde{p}+\frac{N}{2m}}. \end{aligned}$$

Faisant $T \to \infty$, on obtient

$$\int_0^{\infty} \int_{\Delta} |u|^p(x,t)\overline{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \; = 0.$$

Ceci contredit le fait que $p < 1/\delta$.

Par conséquent, u n'est pas globale. □

4.0.6 Existence globale des solutions

Théorème 4.0.9. *Soient $p > 1$, $m \geq 1$, $0 < \gamma < 1$, et soit $u \in C\left([0, T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N)\right)$ solution du problème (4.1)-(4.2) telle que*

$$p \; > \; Max\left\{1 + \frac{2m(2-\gamma)}{(N - 2m + 2m\gamma)_+}, \;\; \frac{1}{\gamma}\right\}, \tag{4.33}$$

et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N) \cap L^\eta(\mathbb{R}^N)$ vérifiant pour $r > r' > 1$; $\eta > \eta' > 1$ (η est prèciser plus loin) l'inégalité suivante

$$\|u_0\|_{r'} + \|u_0\|_{\eta'} + \|u_0\|_r + \|u_0\|_\infty \leq \epsilon \quad \textit{avec} \quad \epsilon > 0 \quad \textit{suffisamment petit.}$$

Alors u est globale. De plus,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\eta \;\; & \leq \;\; Ct^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})} \\ \textit{et} \quad \|u(t)\|_\infty \;\; & \leq \;\; Ct^{-\widetilde{\alpha}} \qquad\qquad \textit{pour} \quad t > 0. \end{aligned}$$

Preuve : On considère la fonction φ pour $t \in [0, T_{max})$ définie par (voir [71])

$$\varphi(t) = \|u(t)\|_r + t^{\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(t)\|_\eta + t^{\widetilde{\alpha}}\|u(t)\|_\infty \text{ for } t \in [0, T_{max}), \tag{4.34}$$

où $\widetilde{\alpha} = \frac{\gamma+1}{p-1}$ et la constante $\eta > 0$ satisfaisant

$$\frac{1}{rp} < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{p}, \tag{4.35}$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{\eta} = \frac{2m}{N}\left(\widetilde{\alpha} + \mu\right), \tag{4.36}$$

avec $\mu = \frac{N}{2m\rho} - (\gamma + 1)$ pour $\rho > r$ vérifiant

$$\frac{N}{2m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) - \widetilde{\alpha} < \mu < Min\left\{\gamma - \widetilde{\alpha}, \frac{N}{2mr} - \widetilde{\alpha}\right\}.$$

On prouve qu'il existe une constante ϵ_1 tel que si $\varphi(0) \leq \epsilon_1$ pour

$T \in (0, T_{max})$, alors φ est bornée sur $[0, T]$. Donc u est globale.

Estimation de $||u||_r$**.**

On rappelle que $r = \frac{N(p-1)}{2m(2-\gamma)}$ est un exposant critique, posons alors, $r' = \frac{N(p-1)}{2m\beta(2-\gamma)}$

avec $1 < r' < r$ et β qui sera déterminé plus loin.

En vertu de (4.33), (4.35) et (4.36), on trouve que w telle que

$$Max\left\{\frac{1}{\eta}, \frac{1}{rp}\right\} < \frac{1}{w} < Min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{2m}{N}\right), \frac{1}{r}\right\}. \tag{4.37}$$

De (4.3), (4.7) et (4.11), avec $1 < r' < r$, on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_r &\leq t^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{r'} + \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|S(t-s)|u(\sigma)|^p\|_r \, d\sigma \, ds, \\
&\leq t^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{r'} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{r})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u(\sigma)\|_w^p \, d\sigma \, ds,
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité d'interpolation (4.4) pour $w \in (r, \eta)$ et $0 < \theta < 1 - \frac{1}{p}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_r \leq\; & t^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{r'} \\
&+ \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{r})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u\|_r^{\theta p}\left[\sigma^{\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u\|_\eta\right]^{(1-\theta)p} \sigma^{\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})} \, d\sigma \, ds.
\end{aligned}$$

On multiplie (4.38) membre à membre par t^{λ} avec $\lambda = \frac{(\gamma-2)(\beta-1)}{p-1}$ et β satisfaisant

$$\begin{aligned} \beta = \frac{N}{2m(2-\gamma)}\left(\frac{p}{w}-\frac{1}{\eta}\right) &= \frac{N}{2m(2-\gamma)}\left(\frac{p}{\delta}-\frac{1}{\eta'}\right) && (4.38)\\ \text{et} \quad 1+\gamma-\beta(2-\gamma) &= 0, && (4.39) \end{aligned}$$

en utilisant (4.34), on obtient

$$\begin{aligned} t^{\lambda}\|u(t)\|_r &\leq t^{\lambda-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{r'}\\ &+ \left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p t^{\lambda}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{r})}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\sigma^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})-\lambda p}\,d\sigma\,ds,\\ &\leq t^{\lambda-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{r'} + C\,t^{\lambda-\lambda p+2-\gamma-\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{r})-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p. \end{aligned}$$

En appliquant (4.5) et utilisant le fait que

$$0<\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{r})<1, \quad 0<\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})<1, \quad 0<\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{\eta})<1,$$
$$\lambda-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r})=0 \quad \text{et} \quad \lambda-\lambda p+2-\gamma-\frac{N}{2m}(\frac{p}{w}-\frac{1}{r})-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})=0,$$

on trouve

$$t^{\lambda}\|u(t)\|_r \leq \|u_0\|_{r'} + C\,\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p. \tag{4.40}$$

Comme dans les cas précédents, on estime $\|u(t)\|_{\eta}$.

Estimation de $\|u(t)\|_{\eta}$.

On reprend (4.37) avec δ au lieu de w, et η au lieu de r, et l'inégalité

$$Max\left\{\frac{1}{\eta},\frac{1}{p\eta}\right\} < \frac{1}{\delta} \leq Min\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{2m}{N}\right)\frac{1}{r}\right\}. \tag{4.41}$$

On a

$$\begin{aligned} t^{\lambda+\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(t)\|_{\eta} &\leq t^{\lambda-\frac{N}{2m}(\frac{1}{\eta'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{\eta'}\\ &+ \left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p t^{\lambda+\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta'})}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m}(\frac{p}{\delta}-\frac{1}{\eta'})}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\sigma^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\,d\sigma\,ds\\ &\quad \text{pour } \ 1<\eta'<\eta\\ &\leq t^{\lambda-\frac{N}{2m}(\frac{1}{\eta'}-\frac{1}{r})}\|u_0\|_{\eta'} + Ct^{\lambda-\lambda p+2-\gamma+\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})-\frac{N}{2m}(\frac{p}{\delta}-\frac{1}{\eta'})-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}C\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p. \end{aligned}$$

Appliquant (4.5) et le fait que

$$0 < \frac{N}{2m}\left(\frac{p}{\delta} - \frac{1}{\eta'}\right) < 1, \quad 0 < \frac{N}{2m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta}\right) < 1, \tag{4.42}$$

$$0 < \frac{N}{2m}\left(\frac{1}{\eta'} - \frac{1}{r}\right) < 1 \quad \lambda - \frac{N}{2m}\left(\frac{1}{\eta'} - \frac{1}{r}\right) = 0, \tag{4.43}$$

$$\text{et} \quad \lambda - \lambda p + 2 - \gamma + \frac{N}{2m}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta}) - \frac{N}{2m}(\frac{p}{\delta} - \frac{1}{\eta'}) - \frac{N}{2m}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta}) = 0, \tag{4.44}$$

on obtient

$$t^{\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}t^{\lambda}\|u(t)\|_{\eta} \leq \|u_0\|_{\eta'} + C\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p. \tag{4.45}$$

Estimation de $\|u(t)\|_{\infty}$.

Avec les mêmes arguments utilisés pour estimer $\|u(t)\|_r$ et $\|u(t)\|_{\eta}$, on peut estimer $\|u(t)\|_{\infty}$. On prend ρ au lieu de w dans (4.37), il existe alors $\rho > 0$ tel que

$$\frac{1}{\eta} < \frac{1}{\rho} < Min\left\{\frac{1}{p}, \frac{2m}{Np}, \frac{1}{r}\right\}. \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} t^{\frac{\gamma+1}{p-1}}t^{\lambda}\|u(t)\|_{\infty} &\leq t^{\lambda+\frac{\gamma+1}{p-1}-\frac{N}{2mr}}(|u_0\|_r + \|u_0\|_{\infty}) \\ &\quad + t^{\lambda+\frac{\gamma+1}{p-1}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2m\rho}}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u\|_r^{\theta p}\left[\sigma^{\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u\|_{\eta}\right]^{(1-\theta)p}\sigma^{-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\,d\sigma\,ds, \\ &\leq t^{\lambda+\frac{\gamma+1}{p-1}-\frac{N}{2mr}}(|u_0\|_r + \|u_0\|_{\infty}) + Ct^{\lambda-\lambda p+2-\gamma+\frac{\gamma+1}{p-1}-\frac{N}{2m\rho}-\frac{N}{2m}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p. \end{aligned}$$

D'après

$$0 < \frac{N}{2mr} < 1, \quad 0 < \frac{N}{2m\rho} < 1, \quad 0 < -\frac{N}{2m}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta}) < 1 \quad \lambda + \frac{\gamma+1}{p-1} - \frac{N}{2mr} = 0,$$
$$\text{et} \quad \lambda - \lambda p + 2 - \gamma + \frac{\gamma+1}{p-1} - \frac{N}{2m\rho} - \frac{N}{2m}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta}) = 0,$$

on obtient

$$t^{\frac{\gamma+1}{p-1}}t^{\lambda}\|u(t)\|_{\infty} \leq (|u_0\|_r + \|u_0\|_{\infty}) + C\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p.$$

Par la définition de $\widetilde{\alpha}$ dans φ (4.34), on peut avoir

$$t^{\widetilde{\alpha}}t^{\lambda}\|u(t)\|_{\infty} \leq (|u_0\|_r + \|u_0\|_{\infty}) + C\left[sup_{t\in(0,T)}t^{\lambda}\varphi(t)\right]^p. \tag{4.47}$$

Les précédentes estimations de $\|u\|_r, \|u\|_\eta$ et $\|u\|_\infty$ nous permettent d'estimer $\widetilde{\varphi}(t)$ comme suit

$$\widetilde{\varphi}(t) \leq (\|u_0\|_r + \|u_0\|_{r'} + \|u_0\|_{\eta'} + \|u_0\|_\infty) + C_1\widetilde{\varphi}(t)^p$$

où $\widetilde{\varphi}(t) = sup_{t\in(0,T)}t^\lambda\varphi(t)$ et C_1 une constante indépendente de t.

On a alors

$$\widetilde{\varphi}(t) \leq C + C_1\widetilde{\varphi}^p(t),$$

avec $C = (\|u_0\|_r + \|u_0\|_{r'} + \|u_0\|_{\eta'} + \|u_0\|_\infty)$.

Soit $h(x) = C + C_1x^p - x$ pour $x \geq 0$. Donc, $h(\widetilde{\varphi}(t)) \geq 0$.

Notons aussi que $h(0) = C > 0$ and $h'(x_c) = 0$ si et seulement si $x_c = (pC_1)^{-\frac{1}{p-1}}$.

En outre, $h(x_c) = C + C_1(pC_1)^{-1/(p-1)}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$ et $h(x_c) = 0$ pour
$C = \epsilon_1 = (pC_1)^{-1/(p-1)}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$.

La continuité de $\widetilde{\varphi}$, implique que si

$(\|u_0\|_r + \|u_0\|_{r'} + \|u_0\|_{\eta'} + \|u_0\|_\infty) \leq \epsilon_1$, alors $\widetilde{\varphi} \leq x_c$ et donc $\widetilde{\varphi}(t) \leq \epsilon_1$.

Chapitre 5

Existence et non existence de solutions mild pour un système d'évolution fractionnaire

On généralise dans ce chapitre l'étude faite dans le chapitre précédent au cas d'un système.

On s'intéresse ici à chercher des solutions mild au problème semi-linéaire parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{m_1} u = J^{\alpha_1}_{0|t}(|v|^{p-1}v(s)) & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ v_t + (-\Delta)^{m_2} v = J^{\alpha_2}_{0|t}(|u|^{q-1}u(s)) & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

muni des données initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

où $p, q > 1$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ avec $m_1 \neq m_2$ ou $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (voir [87]).
On dénote par $J^{\alpha_1}_{0|t}, J^{\alpha_2}_{0|t}$ les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α_i $(i = 1, 2)$ et par $(-\Delta)^{m_i}$ le gńérateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu $e^{(-\Delta)^{m_i} t}$ ne preservant pas l'ordre.
Le cas $m_1 = m_2 = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, dans (5.1) a été étudié par Escobedo et Herrero [40].

5.0.7 Existence locale des solutions

On donnera d'abord, la définition de solutions mild associées au problème (5.1)-(5.2).

Définition 5.0.5. *Soient* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$*. Soient* $p, q > 1$ *,* $\alpha_i \in (0,1)$ *et* $m_i \geq 1$ *pour* $i = 1, 2$.
Un couple $(u, v) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N))$ *est dit solution mild du problème (5.1)-(5.2) s'il vérifie pour tout* $T > 0$ *l'équation intégrale*

$$u(t) = S_1(t)u_0 + \int_0^t S_1(t-s) J^{\alpha_1}_{0|s}(|v|^{p-1}v)ds, \quad t \in [0,T]$$

$$v(t) = S_2(t)v_0 + \int_0^t S_2(t-s) J^{\alpha_2}_{0|s}(|u|^{q-1}u)ds, \quad t \in [0,T],$$

où $S_i(t) := e^{(-\Delta)^{m_i} t}$ *for* $i = 1, 2$ *est le semi-groupe fortement continu défini sur* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *engendré par l'opérateur Laplacien* $(-\Delta)^{m_i}$.

Théorème 5.0.10. *(Existence locale)*

On suppose $p, q > 1$, $\alpha_i := 1-\gamma_i \in (0,1)$ *et* $m_i \in \mathbb{N}^*$ $(i = 1,2)$. *Pour toute donnée initiale* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ *et* $T = T(u_0, v_0) > 0$ *telle que* $\|u_0\|_\infty$, $\|v_0\|_\infty \leq \frac{A_0}{2}$ *pour* $A_0 > 0$ *et* *max* $\{2C(p,q), 1\}\, T(u_0, v_0) \leq \frac{1}{2}$, *il existe une unique solution mild* $(u,v) \in \left\{C\left([0, T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N)\right)\right\}^2$ *définie sur* $(0, T_{max})$ *satisfaisant l'alternative :*

$T_{max} = +\infty$

ou $T_{max} < +\infty$ *et* $\lim_{t\to T_{max}} \left(\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) = \infty.$

où

$T_{max} := \sup\left\{T > 0 :\ u\ \ \textit{est solution mild de}\,(5.1) - (5.2)\ \textit{dans}\ L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N))\right\}$

Démonstration. • Sous l'hypothèse $\|u_0\|_\infty$, $\|v_0\|_\infty \leq \frac{A_0}{2}$ pour $A_0 > 0$,

on considère l'ensemble

$$E_T = \left\{(u,v) \in L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N));\ \ |||(u,v)||| \leq 2\,(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) \leq 2\,A_0\right\},$$

où $T > 0$, et $|||\cdot|||$ la norme de E_T définie par

$$|||(u,v)||| \;=\; \|u\|_1 + \|v\|_1 \;=\; \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}.$$

On cherche à prouver que, l'opérateur Ψ est bien défini et envoie E_T dans lui même, et est une contraction, pour T suffisamment petit. On introduit d'abord, les notations suivantes

$$\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \|\cdot\|_{\infty,T} := \|\cdot\|_{L^\infty(0,T)}.$$

Considérons $\Psi(u,v) = (\Psi_1(u,v),\ \Psi_2(u,v)) : E_T \to E_T$ défini par

$$\Psi_1((u,v)) \;=\; S_1(t)u_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \int_0^t S_1(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} |v|^{p-1} v(\sigma)\, d\sigma\, ds, \tag{5.3}$$

$$\Psi_2((u,v)) \;=\; S_2(t)v_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_2)} \int_0^t S_2(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2} |u|^{q-1} u(\sigma)\, d\sigma\, ds. \tag{5.4}$$

Soit $(u,v) \in E_T$. De (4.3) et (5.3)-(5.4), on a

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)||| &\leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + \|\int\limits_0^t\int\limits_0^s \frac{(s-\sigma)^{-\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)}\|v(\sigma)\|_\infty^p\, d\sigma\, ds\|_{\infty,T} \\
&\quad + \|\int\limits_0^t\int\limits_0^s \frac{(s-\sigma)^{-\gamma_2}}{\Gamma(1-\gamma_2)}\|u(\sigma)\|_\infty^q\, d\sigma\, ds\|_{\infty,T}, \\
&\leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + \|\int\limits_0^t\int\limits_\sigma^t \frac{(s-\sigma)^{-\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)}\|v(\sigma)\|_\infty^p\, ds\, d\sigma\|_{\infty,T} \\
&\quad + \|\int\limits_0^t\int\limits_\sigma^t \frac{(s-\sigma)^{-\gamma_2}}{\Gamma(1-\gamma_2)}\|u(\sigma)\|_\infty^q\, ds\, d\sigma\|_{\infty,T}, \\
&\leq |||(u_0,v_0)||| + \frac{T^{2-\gamma_1}}{\Gamma(3-\gamma_1)}\|v\|_1^p + \frac{T^{2-\gamma_2}}{\Gamma(3-\gamma_2)}\|u\|_1^q, \\
&\leq |||(u_0,v_0)||| + 2T(u_0,v_0)A_0, \\
&\leq A_0 + 2T(u_0,v_0)A_0,
\end{aligned}$$

où

$$T(u_0,v_0) \;=\; max\left\{\frac{T^{2-\gamma_1}2^{p-1}A_0^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma_1)},\;\; \frac{T^{2-\gamma_2}2^{q-1}A_0^{q-1}}{\Gamma(3-\gamma_2)}\right\}.$$

Si $2T(u_0,v_0) \leq 1$, alors $|||\Psi(u,v)||| \leq 2A_0$ et $\Psi(u,v) \in E_T$.

• Il reste à prouver que Ψ est une contraction. Soient $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in E_T$, à partir de (4.3), (5.3) et l'estimation pour tout u,v (voir [18]) :

$$\|u^p - v^p\|_\infty \leq C(p)\|u-v\|_\infty\left(\|u\|_\infty^{p-1} + \|v\|_\infty^{p-1}\right), \quad \text{pour tout } p \geq 1. \tag{5.5}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
|||\Psi(u_1,v_1)-\Psi(u_2,v_2)||| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)}\|\int\limits_0^t\int\limits_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}\|\,|v_1|^{p-1}v_1(\sigma)-|v_2|^{p-1}v_2(\sigma)\|_\infty\,d\sigma\,ds\|_{\infty,T}\\
&+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_2)}\|\int\limits_0^t\int\limits_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2}\|\,|u_1|^{q-1}u_1(\sigma)-|u_2|^{q-1}u_2(\sigma)\|_\infty\,d\sigma\,ds\|_{\infty,T},\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)}\|\int\limits_0^t\int\limits_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma_1}\|\,|v_1|^{p-1}v_1(\sigma)-|v_2|^{p-1}v_2(\sigma)\|_\infty\,ds\,d\sigma\|_{\infty,T}\\
&+\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_2)}\|\int\limits_0^t\int\limits_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma_2}\|\,|u_1|^{q-1}u_1(\sigma)-|u_2|^{q-1}u_2(\sigma)\|_\infty\,ds\,d\sigma\|_{\infty,T},\\
&\leq 2C(p,q)\,T(u_0,v_0)|||(u_1,v_1)-(u_2,v_2)|||,\\
&\leq \frac{1}{2}|||(u_1,v_1)-(u_2,v_2)|||.
\end{aligned}
$$

Ainsi Ψ est une contraction dans E_T pour T vérifiant la condition suivante :

$$max\,\{2C(p,q),1\}\,T(u_0,v_0)\leq\frac{1}{2},$$

où $C(p,q)=max\,\{C(p),C(q)\}$. On en conclut par le théorème du point fixe de Banach que $(u,v)\in E_T$ est solution mild du problème (5.1)-(5.2).
L'unicité des solutions de (5.1)-(5.2) est obtenue à partir du lemme singulier de Gronwall (voir lemme 8.1.1 ([25])). Par conséquent, $(u,v)\in E_T$ est une unique solution mild au problème (5.1)-(5.2). □

5.0.8 Explosion des solutions

On s'intéresse à déterminer les critères d'explosion pour le problème (5.1)-(5.2) via la méthode des fonctions test. On définit tout d'abord les solutions faibles associées au problème (5.1)-(5.2).

Définition 5.0.6. *(Solutions faibles)*
$u,v\in L^p\left((0,T],L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)$ *sont dites solutions faibles associées au problème (5.1)-(5.2), si :*

1. $u_0, v_0 \in L^\infty\left((0,T], L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^{2m}(\mathbb{R}^N)\right)$, *où* $m = \min\{m_1, m_2\}$ *et* $T > 0$.

2. *Pour toutes* $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1([0,T], H^{2m})$ *telles que* $\varphi_1(x,T) = \varphi_2(x,T) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, *l'on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi_1(x,0)\,dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha_1}_{0|t}(|v|^p(x,t))\varphi_1(x,t)\,dx\,dt$$
$$= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)(\varphi_1)_t(x,t)|\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)(-\Delta)^{m_1}\varphi_1(x,t)|\,dx\,dt \tag{5.6}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi_2(x,0)\,dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha_2}_{0|t}(|u|^q(x,t))\varphi_2(x,t)\,dx\,dt$$
$$= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |v(x,t)(\varphi_2)_t(x,t)|\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} |v(x,t)(-\Delta)^{m_2}\varphi_2(x,t)|\,dx\,dt. \tag{5.7}$$

On note qu'une solution mild au problème (5.1)-(5.2) est aussi solution faible pour tout $T > 0$ et $u, v \in L^\infty\left((0,T], L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^{2m}(\mathbb{R}^N)\right)$. (voir [43] pour la preuve).

Théorème 5.0.11. *Supposons que* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap H^{2m}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaisant les conditions* $u_0, v_0 \not\equiv 0$ *et* $\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,dx \geq 0$.
Si

$$\frac{N}{2m} \leq max\left\{\frac{pq\alpha_1 + p(1+\alpha_2)+1}{pq-1},\ \frac{pq\alpha_2 + q(1+\alpha_1)+1}{pq-1}\right\}, \tag{5.8}$$

ou

$$p < \frac{1}{\gamma_2} \quad et \quad q < \frac{1}{\gamma_1}. \tag{5.9}$$

Alors la solution (u,v) *au problème (5.1)-(5.2) explose pour* $T \leq \infty$.

Démonstration. Supposons que $(u,v) \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap H^{2m}(\mathbb{R}^N)$ solution globale de (5.1)-(5.2) pour tout $T >> 1$, telle que pour tout $u_0, v_0 \not\equiv 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,dx \geq 0$, on

a que
$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx\, dt > 0,\ \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx\, dt > 0.$
On considère les fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1\left([0,T], H^{2m}(\mathbb{R}^N)\right)$ telles que

$$\varphi_1(x,t) = D^{\alpha_1}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t)) = D^{\alpha_1}_{t|T}(\varphi_{11}(x)\varphi_{12}(t)), \tag{5.10}$$

$$\varphi_2(x,t) = D^{\alpha_2}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t)) = D^{\alpha_2}_{t|T}(\varphi_{11}(x)\varphi_{12}(t)), \tag{5.11}$$

vérifiant : $\varphi_1(x,T) = \varphi_2(x,T) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. De plus, φ_1, φ_2 vérifiant respectivement (5.6) et (5.7).

Aussi $\varphi_{11}(x) = \phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{1}{2m}}}\right)$, $\varphi_{12}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\eta}$, où $m = \min\{m_1, m_2\}$, $\eta >> 1$.

ϕ est une fonction définie par

$$\phi(r) := \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \quad \phi \text{ décroissante pour } 1 \le r \le 2, 0 \le \phi \le 1, \text{ et } |\phi'(r)| \le \dfrac{C_1}{r} \text{ pour } r > 0, \\ 0, & r \ge 2. \end{cases}$$

De (5.6) et (5.7), on a que

$$\begin{aligned} &CT^{-\alpha_1}\int\limits_{\Omega} u_0(x)\varphi_{11}(x)\, dx + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} J^{\alpha_1}_{0|t}(|v|^p(x,t)) D^{\alpha_1}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))\, dx\, dt \\ &= -\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |u|.DD^{\alpha_1}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))\, dx\, dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |u(-\Delta)^{m_1} D^{\alpha_1}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))|\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{5.12}$$

et

$$\begin{aligned} &CT^{-\alpha_2}\int\limits_{\Omega} v_0(x)\varphi_{11}(x)\, dx + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} J^{\alpha_2}_{0|t}(|u|^q(x,t)) D^{\alpha_2}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))\, dx\, dt \\ &= -\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |v|.DD^{\alpha_2}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))\, dx\, dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |v(-\Delta)^{m_2} D^{\alpha_2}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))|\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \le 2T^{1/2m}\right\}$.

En appliquant (5.10), (5.11), (5.12) et (5.13) il en découle que

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |v|^p \widetilde{\varphi}(x,t)\, dx\, dt + CT^{-\alpha_1}\int\limits_{\Omega} u_0(x)\varphi_{11}(x)\, dx \\ &= \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |u|.D^{\alpha_1+1}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t)\, dx\, dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |u(-\Delta)^{m_1} D^{\alpha_1}_{t|T}(\widetilde{\varphi}(x,t))|\, dx\, dt, \end{aligned}$$

et

$$\int_0^T\int_\Omega |u|^q\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt + CT^{-\alpha_2}\int_\Omega v_0(x)\varphi_{11}(x)\,dx$$
$$= \int_0^T\int_\Omega |v|.D_{t|T}^{\alpha_2+1}\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega |v(-\Delta)^{m_2}D_{t|T}^{\alpha_2}(\widetilde{\varphi}(x,t))|\,dx\,dt.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |v|^p\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt &\leq \int_0^T\int_\Omega |u|.\widetilde{\varphi}^{1/q}\widetilde{\varphi}^{-1/q}|D_{t|T}^{\alpha_1+1}\widetilde{\varphi}(x,t)|\,dx\,dt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega |u.\widetilde{\varphi}^{1/q}\widetilde{\varphi}^{-1/q}(-\Delta)^{m_1}D_{t|T}^{\alpha_1}(\widetilde{\varphi}(x,t))|\,dx\,dt,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |u|^q\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt &\leq \int_0^T\int_\Omega |v|.\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}|D_{t|T}^{\alpha_2+1}\widetilde{\varphi}(x,t)|\,dx\,dt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega |v.\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}(-\Delta)^{m_2}D_{t|T}^{\alpha_2}(\widetilde{\varphi}(x,t))|\,dx\,dt.\end{aligned}$$

En Posant $\widetilde{p}=\frac{p}{p-1}$ et $\widetilde{q}=\frac{q}{q-1}$, et grâce à l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega |v|^p\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\\ \leq\;& \left(\int_0^T\int_\Omega |u|^q.\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{q}/q}|D_{t|T}^{\alpha_1+1}\widetilde{\varphi}(x,t)|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}}\\ +\;& \left(\int_0^T\int_\Omega |u|^q.\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{q}/q}|(-\Delta)^{m_1}D_{t|T}^{\alpha_1}(\widetilde{\varphi}(x,t))|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega |u|^q\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\\ \leq\;& \left(\int_0^T\int_\Omega |v|^p.\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{p}/p}|D_{t|T}^{\alpha_2+1}\widetilde{\varphi}(x,t)|^{\widetilde{p}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{p}}\\ +\;& \left(\int_0^T\int_\Omega |v|^p.\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{p}/p}|(-\Delta)^{m_2}D_{t|T}^{\alpha_2}(\widetilde{\varphi}(x,t))|^{\widetilde{p}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{p}}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'on a

$$\int_0^T\int_\Omega |v|^p\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \leq \left(\int_0^T\int_\Omega |u|^q.\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/q}\times$$

$$\left[\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{q}/q}\varphi_{11}^{\widetilde{q}}(x)|D_{t|T}^{\alpha_1+1}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}}+\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{q}/q}|(-\Delta)^{m_1}\varphi_{11}(x)D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}}\right] \tag{5.14}$$

et

$$\int_0^T\int_\Omega |u|^q\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt \leq \left(\int_0^T\int_\Omega |v|^p.\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/p}\times$$

$$\left[\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{p}/p}\varphi_{11}^{\widetilde{p}}(x)|D_{t|T}^{\alpha_2+1}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{p}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{p}}+\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{p}/p}|(-\Delta)^{m_2}\varphi_{11}(x)D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{p}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{p}}\right] \tag{5.15}$$

En combinant (5.14)-(5.15), on obtient

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |v|^p\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{A}\mathcal{B}^{1/q}, \tag{5.16}$$

et

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |u|^q\widetilde{\varphi}(x,t)\,dx\,dt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{A}^{1/p}\mathcal{B}, \tag{5.17}$$

avec

$$\mathcal{A}:=\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{q}/q}\varphi_{11}^{\widetilde{q}}(x)|D_{t|T}^{\alpha_1+1}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}}+\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{q}/q}|(-\Delta)^{m_1}\varphi_{11}(x)D_{t|T}^{\alpha_1}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}}$$

et

$$\mathcal{B}:=\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{p}/p}\varphi_{11}^{\widetilde{p}}(x)|D_{t|T}^{\alpha_2+1}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{p}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{p}}+\left(\int_0^T\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{-\widetilde{p}/p}|(-\Delta)^{m_2}\varphi_{11}(x)D_{t|T}^{\alpha_2}\varphi_{12}(t)|^{\widetilde{p}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{p}}$$

En utilisant le changement de variables $\tau=T^{-1}t,\ y=T^{-\frac{1}{2m}}x$, alors (5.16)-(5.17) s'écrit

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |v|^p.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CT^{(1+\frac{N}{2m})(1-\frac{1}{pq})}\left[T^{-1-\alpha_1}+T^{-\frac{m_1}{m}-\alpha_1}\right]\left[T^{-1-\alpha_2}+T^{-\frac{m_2}{m}-\alpha_2}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{5.18}$$

et

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |u|^q.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CT^{(1+\frac{N}{2m})(1-\frac{1}{pq})}\left[T^{-1-\alpha_1}+T^{-\frac{m_1}{m}-\alpha_1}\right]^{\frac{1}{p}}\left[T^{-1-\alpha_2}+T^{-\frac{m_2}{m}-\alpha_2}\right], \quad (5.19)$$

avec $C>0$.

Soit $m=\min\{m_1,m_2\}$, alors

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |v|^p.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CT^{\kappa_1}, \tag{5.20}$$

et

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |u|^q.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CT^{\kappa_2}, \tag{5.21}$$

avec $\kappa_1=(1+\frac{N}{2m})(1-\frac{1}{pq})+(-1-\alpha_1)+(-1-\alpha_2)\frac{1}{q}$

et $\kappa_2=(1+\frac{N}{2m})(1-\frac{1}{pq})+(-1-\alpha_1)\frac{1}{p}+(-1-\alpha_2)$.

Lorsque $\kappa_1\leq 0$ et $\kappa_2\leq 0$, on retrouve (5.8).

Trois cas sont à envisager

• Cas $\kappa_1<0$ (resp. $\kappa_2<0$). Par passage à la limite dans (5.20) et (5.21), on trouve

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_\Omega |v|^p.\widetilde{\varphi}=0, \tag{5.22}$$

et

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_\Omega |u|^q.\widetilde{\varphi}=0. \tag{5.23}$$

En vertu du théorème de convergence dominé de Lebesgue, et la continuité de (u,v), on obtient $u\equiv 0$ et $v\equiv 0$, ceci contredit le fait que $\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,dx\,dt>0$ et $\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|v|^p\,dx\,dt>0$.

• Cas $\kappa_1=0$ (resp. $\kappa_2=0$).

Une integration s'impose sur le support $\Omega^*=\left\{x\in\mathbb{R}^N;\ |x|\leq 2B^{-1/2m}T^{1/2m}\right\}$ où $1\leq B<T$ est assez large de sorte que T et B ne tendent pas simultanément vers l'infini. Soit alors, $\varphi_{11}(x)=\phi\left(\frac{|x|}{B^{-\frac{1}{2m}}T^{\frac{1}{2m}}}\right)$ plutôt que ceux choisis précédemment, et par des calculs

similaires à ce qui précède, il vient

$$\left(\int_0^T\int_{\Omega^*}|v|^p.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CT^{\kappa_1}B^{-\frac{N}{2m}(\frac{pq-1}{pq})+\frac{m_2}{qm}+\frac{m_1}{m}}, \tag{5.24}$$

et

$$\left(\int_0^T\int_{\Omega^*}|u|^q.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CT^{\kappa_2}B^{-\frac{N}{2m}(\frac{pq-1}{pq})+\frac{m_1}{pm}+\frac{m_2}{m}}, \tag{5.25}$$

avec $C>0$.

Faisant $T\to\infty$ et $B\to\infty$, et tenant compte de $\kappa_i=0$ $(i=1,2)$ et $\frac{N}{2}>max\left\{\frac{p(m_2+qm_1)}{pq-1},\ \frac{q(m_1+pm_2)}{pq-1}\right\}$, on obtient

$$\int_0^\infty\int_{\Omega^*}|v|^p(x,t)\,dx\,dt=0\Rightarrow v\equiv 0,$$

$$\int_0^\infty\int_{\Omega^*}|u|^q(x,t)\,dx\,dt=0\Rightarrow u\equiv 0.$$

Ainsi, $(u,v)\equiv(0,0)$. Contradiction (pour les mêmes raisons qu'avant).

• Cas $p<\frac{1}{\gamma_2}$ et $q<\frac{1}{\gamma_1}$.

En procédant comme dans 1 et 2, on intégre sur le support

$\Omega^{**}=\left\{x\in\mathbb{R}^N;\ |x|\leq 2R\right\}$ avec $\varphi_{11}(x)=\phi\left(\frac{|x|}{R}\right)$. On a donc, pour $\alpha_i=1-\gamma_i\,(i=1,2)$

$$\left(\int_0^T\int_{\Omega^{**}}|v|^p.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CR^{N(\frac{pq-1}{pq})}\left[T^{\gamma_2-1-\frac{1}{p}}+T^{\gamma_2-\frac{1}{p}}R^{-m_2}\right]^{1/q}\left[T^{\gamma_1-1-\frac{1}{q}}+T^{\gamma_1-\frac{1}{q}}R^{-m_1}\right], \tag{5.26}$$

et

$$\left(\int_0^T\int_{\Omega^{**}}|u|^q.\widetilde{\varphi}\right)^{1-1/pq} \leq CR^{N(\frac{pq-1}{pq})}\left[T^{\gamma_1-1-\frac{1}{q}}+T^{\gamma_1-\frac{1}{q}}R^{-m_1}\right]^{1/p}\left[T^{\gamma_2-1-\frac{1}{p}}+T^{\gamma_2-\frac{1}{p}}R^{-m_2}\right], \tag{5.27}$$

avec $C>0$.

Faisant $T\to\infty$ et tenant compte $p<\frac{1}{\gamma_2}$ de $q<\frac{1}{\gamma_1}$, on en déduit que

$$\int_0^\infty\int_{\Omega^*}|v|^p(x,t)\,dx\,dt=0\Rightarrow v\equiv 0,$$

$$\int_0^\infty \int_{\Omega^*} |u|^q(x,t)\,dx\,dt = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

Ainsi, $(u,v) \equiv (0,0)$, contradiction. $\square$

Chapitre 6

Solutions pseudo presque périodiques du modèle de Lasota-Wazewska

Ce chapitre est consacré à une certaine classe de systèmes dynamiques modélisée par Lasota-Wazewska. Ce modèle a été principalement utilisé pour décrire la survie des globules rouges chez les animaux.

En outre le modèle considéré ici, est plus général que celui étudié dans les travaux antérieurs [55, 68, 94, 77] du fait qu'ils n'étudient que des solutions presque périodiques à un seul retard.

6.1 Formulation du problème

On établit dans ce chapitre des conditions d'existence, d'unicité, d'attractivité globale et de stabilité exponentielle des solutions du modèle de Lasota-Wazewska généralisé à coefficients pseudo presque périodiques et à retards mixtes de type

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\alpha(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\, e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)}, \quad (6.1)\\ x(s) &= \varphi(s), \varphi \in BC\left(]-\mu, 0], \mathbb{R}^+\right), \quad (6.2) \end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R}$ (voir [88]).

On introduit les notations suivantes :

Soit $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on désigne par $\overline{f}$ et $\underline{f}$ les fonctions définies par

$$\overline{f}(t) = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(t), \underline{f}(t) = \inf_{t\in\mathbb{R}} f(t).$$

On considère les hypothèses suivantes

(H_1) La fonction $\alpha(\cdot)$ est presque périodique et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t) \geq 0$.

(H_2) Pour tout $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq n$, les fonctions $a_j, b_i, \beta_i, \omega_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont pseudo presque périodiques.

(H_3) $r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j}}{\underline{\alpha}} < 1.$

(H_4) Pour tout $1 \leq j \leq m$, les noyaux retard $K_j : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont continus, intégrables et

$$\int_0^{\infty} K_j(u) = 1, \int_0^{\infty} K_j(u)\, e^{\lambda u} du < +\infty,$$

où λ est une constante non négative suffisamment petite. On note $\rho = \max_{1\leq j\leq m} \int_0^{\infty} K_j(u)\, e^{\lambda u} du.$

Notons qu'on se restreint ici aux fonctions à valeurs rpositives, puisque les solutions de (6.1)-(6.2) n'ont de sens en biologie, que lorsque celles-ci sont non négatives.

6.2 Existence et unicité des solutions pseudo presque périodiques

Afin d'établir des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions du problème (6.1)-(6.2), on se ramène à la recherche d'un point fixe d'un opérateur bien approprié et défini sur l'espace de Banach $PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On énonce quelques résultats utiles pour la suite.

Lemme 6.2.1. *Pour tout* $x(\cdot) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, *la fonction* $x(\cdot+\kappa) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ *pour tout* $\kappa \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Voir lemme 1 dans [104, 105, 106]. □

Lemme 6.2.2. *Si* $\varphi, \psi \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, *alors* $\varphi \times \psi \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Voir [104, 105, 106]. □

Lemme 6.2.3. *Pour tout* $x(\cdot) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, *la fonction* $\phi_j : t \longmapsto e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds}$ *appartient à* $PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ *pour tout* $1 \leq j \leq m$.

Démonstration. En vertu du lemme 5 dans [30] (voir aussi théorème 1 dans [11]), la fonction

$$t \longmapsto \int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)\,ds,$$

est pseudo presque périodique pour tout $1 \leq j \leq m$. Par le lemme 6.2.2, la fonction

$$t \longmapsto \omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)\,ds,$$

est aussi pseudo presque périodique pour tout $1 \leq j \leq m$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a que

$$\left|e^{-x} - e^{-y}\right| \leq |x-y|\,.$$

Or, la fonction $(x \longmapsto e^{-x})$ est lipschitzienne, et la fonction $\phi_j : t \longmapsto e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds}$ appartient à $PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ par le lemme 6.2.1 et le résultat sur la composition des fonctions pseudo presque périodiques (voir corollaire 2.4, [103]). Donc $x \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$. □

Même procédé donne

Lemme 6.2.4. *Pour tout* $x(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, *la fonction* $\psi_i : t \longmapsto e^{-\omega_j(t)x(t-\tau_i)}$ *appartient à* $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$.

Théorème 6.2.1. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées, et définissons l'opérateur non linéaire* Γ *pour tout* $x \in PAP(\mathbb{R} par \mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned}(\Gamma x)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(s)\, e^{-\beta_i(s)x(s-\tau_i)}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m} a_j(s)\, e^{-\omega_j(s)\int_{-\infty}^{s} K_j(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma}\right] ds.\end{aligned}$$

Alors Γ *envoie* $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ *dans lui même.*

Démonstration. Vérifions en premier, que Γ est bien définie. En effet, par le lemme 6.2.1, si $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ alors la fonction $T_h(x) = x(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ car, $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ est un sous-espace fermé de $BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ invariant par translations.

De plus, par le théorème de composition des fonctions pseudo presque périodiques (voir par exemple [9]) $\xi \longmapsto x(s+\xi)\, e^{-x(\xi+s)}$ est dans $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Aussi, la fonction

$$\begin{aligned}\chi \ : \ s \longmapsto \chi(s) = &\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(s)\, e^{-\beta_i(s)x(s-\tau_i)}\right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{m} a_j(s)\, e^{-\omega_j(s)\int_{-\infty}^{s} K_j(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma}\right] ds,\end{aligned}$$

appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. On peut écrire donc

$$\chi = \chi_1 + \chi_2,$$

où $\chi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et $\chi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. On a alors

$$\begin{aligned}(\Gamma\chi)(t) \ : &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \chi(s)\, ds, \\ &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \chi_1(s)\, ds + \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \chi_2(s)\, ds, \\ &= (\Gamma\chi_1)(t) + (\Gamma\chi_2)(t).\end{aligned}$$

On veut montrer que $t \longrightarrow (\Gamma\chi_1)(t) := \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s)\,ds$ est presque périodique. Pour cela, on considère en vertu de la presque périodicité des fonctions α et χ_1, un nombre l_ϵ tel qu'on puisse trouver un nombre h dans un intervalle de la forme $[\delta, \delta + l_\epsilon]$, où

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\alpha(\xi+h)-\alpha(\xi)| < \epsilon \text{ et } \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\chi_1(\xi+h)-\chi_1(\xi)| < \epsilon, .$$

d'où

$$\begin{aligned}
(\Gamma\chi_1)(t+h)-(\Gamma\chi_1)(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t+h} e^{-\int\limits_{s}^{t+h}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s)\,ds - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s)\,ds,\\
&= \int\limits_{-\infty}^{t+h} e^{-\int\limits_{s-h}^{t}\alpha(\xi+h)d\xi}\chi_1(s)\,ds - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s)\,ds,\\
&= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{u}^{t}\alpha(\xi+h)d\xi}\chi_1(u+h)\,du - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s)\,ds,\\
&= \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi+h)d\xi}\chi_1(s+h)\,ds - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s+h)\,ds\\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s+h)\,ds - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t}\alpha(\xi)d\xi}\chi_1(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Il existe ainsi, $\theta \in]0,1[$ tel que

$$
\begin{aligned}
\left|(\Gamma\chi_1)(t+h)-(\Gamma\chi_1)(t)\right| &\leq |\chi_1|_\infty \int_{-\infty}^{t} \left| e^{-\int_s^t \alpha(\xi+h)d\xi} - e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \right| ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \left|\chi_1(s+h)-\chi_1(s)\right| ds, \\
&\leq |\chi_1|_\infty \int_{-\infty}^{t} \left\{ e^{-\left[\int_s^t \alpha(\xi+h)d\xi + \theta\left(\int_s^t \alpha(\xi)d\xi - \int_s^t \alpha(\xi+h)d\xi\right)\right]} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left| \int_s^t \alpha(\xi+h)\, d\xi - \int_s^t \alpha(\xi)\, d\xi \right| ds \right\} + \epsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} ds, \\
&\leq |\chi_1|_\infty \int_{-\infty}^{t} \left\{ e^{-\int_s^t \alpha(\xi+h)d\xi} e^{-\theta\left(\int_s^t \alpha(\xi)d\xi - \int_s^t \alpha(\xi+h)d\xi\right)} \right. \\
&\quad \left. \times \left| \int_s^t \left|\alpha(\xi+h)-\alpha(\xi)\right| d\xi \right| ds \right\} + \epsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} ds, \\
&\leq |\chi_1|_\infty \int_{-\infty}^{t} \left[e^{-(t-s)\underline{\alpha}} e^{-\theta\epsilon(t-s)} \epsilon(t-s) \right] ds + \epsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} ds, \\
&\leq \epsilon |\chi_1|_\infty \int_{-\infty}^{t} \left[\epsilon e^{-(t-s)\underline{\alpha}} (t-s) \right] ds + \epsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} ds, \\
&\leq \frac{\epsilon |\chi_1|_\infty}{\underline{\alpha}^2} + \epsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} ds, \\
&\leq \frac{\epsilon |\chi_1|_\infty}{\underline{\alpha}^2} + \frac{\epsilon}{\underline{\alpha}} = \left(\frac{|\chi_1|_\infty}{\underline{\alpha}^2} + \frac{1}{\underline{\alpha}} \right) \epsilon.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la fonction $(\Gamma\chi_1)$ appartient à $AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.

On montre à présent que $(\Gamma\chi_2)$ appartient à $PAP_0(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \chi_2(s)\, ds \right| dt &\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \left|\chi_2(s)\right| ds\, dt, \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left|\chi_2(s)\right| ds \right) dt, \\
&\leq I_1 + I_2,
\end{aligned}
$$

avec

$$I_1 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-T}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left|\chi_2(s)\right| ds \right) dt,$$

et

$$I_2 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left|\chi_2(s)\right| ds \right) dt.$$

Montrons que, $I_1 = I_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-T}^{t} \left|e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \chi_2(s)\right| ds \right) dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-T}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left|\chi_2(s)\right| ds \right) dt, \\
&\leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-\underline{\alpha}\xi} \left|\chi_2(t-\xi)\right| d\xi \right) dt, \\
&\leq \int_{0}^{+\infty} e^{-\underline{\alpha}\xi} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|\chi_2(t-\xi)\right| dt \right) d\xi, \\
&\leq \int_{0}^{+\infty} e^{-\underline{\alpha}\xi} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T-\xi}^{T-\xi} \left|\chi_2(u)\right| du \right) d\xi, \\
&\leq \int_{0}^{+\infty} e^{-\underline{\alpha}\xi} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T-\xi}^{T+\xi} \left|\chi_2(u)\right| du \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $\chi_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, alors la fonction ϕ_T définie par

$$\phi_T(\xi) = \frac{T+\xi}{T} \frac{1}{2(T+\xi)} \int_{-T-\xi}^{T+\xi} \left|\chi_2(u)\right|,$$

est bornée et vérifie $\lim\limits_{T\to+\infty} \phi_T(\xi) = 0$. Ergo, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$I_1 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-T}^{t} \left|e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \chi_2(s)\right| ds \right) dt = 0.$$

Notons d'autre part, que $|\chi_2|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\chi_2(t)| < \infty$, ainsi

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{-T} \left| e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \chi_2(s) \right| ds \right) dt, \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left| \chi_2(s) \right| ds \right) dt, \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\chi_2(t)|}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{t+T}^{+\infty} e^{-\underline{\alpha}\xi} d\xi \right) dt, \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\chi_2(t)|}{2T} \frac{1}{\underline{\alpha}} e^{-\underline{\alpha}T} \int_{-T}^{T} e^{-\underline{\alpha}\, t} dt, \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\chi_2(t)|}{2T} \frac{1}{\underline{\alpha}^2} e^{-\underline{\alpha}T} \left[-e^{-\underline{\alpha}T} + e^{\underline{\alpha}T} \right], \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\chi_2(t)|}{2T} \frac{1}{\underline{\alpha}^2} \left[1 - e^{-2\underline{\alpha}T} \right],
\end{aligned}$$

d'où

$$I_2 = 0.$$

Par conséquent, $(\Gamma\chi_2)$ appartient à $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. □

Théorème 6.2.2. *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_4)$, le modèle de Lasota–Wazewska à retards mixtes est réalisé.*

$$x'(t) = -\alpha(t)\, x(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\, e^{-\omega_j(t) \int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)}, \tag{6.3}$$

possède une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathcal{B} = \left\{ \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), R_1 \leq |\psi| \leq R_2 \right\},$$

où

$$R_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{b_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{a_j}}{\underline{\alpha}},$$

et

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{b_i} e^{-\overline{\beta_i} R_2} + \sum_{j=1}^{m} \underline{a_j} e^{-\overline{\omega_j} R_2}}{\overline{\alpha}}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord, que l'opérateur Γ envoie $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. En effet,

$$\begin{aligned}
|(\Gamma x)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi) d\xi} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(s) e^{-\beta_i(s) x(s-\tau_i)} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{j=1}^{m} a_j(s) e^{-\omega_j(s) \int_{-\infty}^{s} K_j(t-\sigma) x(\sigma) d\sigma} \right] ds \right|, \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi) d\xi} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i(s) + \sum_{j=1}^{m} a_j(s) \right) ds, \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j}}{\underline{\alpha}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|(\Gamma x)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi) d\xi} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(s) e^{-\beta_i(s) x(s-\tau_i)} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{j=1}^{m} a_j(s) e^{-\omega_j(s) \int_{-\infty}^{s} K_j(t-\sigma) x(\sigma) d\sigma} \right] ds \right|, \\
&\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi) d\xi} \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{b_i} e^{-\overline{\beta_i} R_2} + \sum_{j=1}^{m} \underline{a_j} e^{-\overline{\omega_j} R_2} \right) ds, \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{b_i} e^{-\overline{\beta_i} R_2} + \sum_{j=1}^{m} \underline{a_j} e^{-\overline{\omega_j} R_2}}{\overline{\alpha}},
\end{aligned}$$

ceci implique que l'opérateur Γ envoie $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. Pour terminer, il suffit de prouver que Γ est une contraction. Notons que pour $u, v \in [0, +\infty[$

$$\left| e^{-u} - e^{-v} \right| < |u - v|.$$

Soit $x, y \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
|(\Gamma x)(t)-(\Gamma y)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(s)\, e^{-\beta_i(s)x(s-\tau_i)} \right.\right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{m} a_j(s)\, e^{-\omega_j(s)\int_{-\infty}^{s} K_j(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma} \right] ds \\
&\quad - \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(s)\, e^{-\beta_i(s)y(s-\tau_i)} \right. \\
&\quad \left.\left. - \sum_{j=1}^{m} a_j(s)\, e^{-\omega_j(s)\int_{-\infty}^{s} K_j(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma} \right] ds \right|, \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \alpha(\xi)d\xi} \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i(s)| \left| e^{-\beta_i(s)x(s-\tau_i)} - e^{-\beta_i(s)y(s-\tau_i)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{m} |a_j(s)| \left| e^{-\omega_j(s)\int_{-\infty}^{s} K_j(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma} - e^{-\omega_j(s)\int_{-\infty}^{s} K_j(s-\sigma)y(\sigma)d\sigma} \right| \right], \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i(s)|\, ||\beta_i(s)||\, |x-y|_\infty \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{m} |a_j(s)|\, |\omega_j(s)| \left| \int_{-\infty}^{s} K_j(s-\sigma)\left(x(\sigma)-y(\sigma)\right) d\sigma \right| \right] ds, \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)\underline{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i(s)|\, ||\beta_i(s)|| + \sum_{j=1}^{m} |a_j(s)|\, |\omega_j(s)| \right] ds\, |x-y|_\infty, \\
&\leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j}}{\underline{\alpha}} \right] |x-y|_\infty,
\end{aligned}$$

ceci implique que l'opérateur Γ est une contraction dans $\mathcal{B}$. Donc, Γ possède un unique point fixe $x^* \in \mathcal{B}$, i.e. $\Gamma(x^*) = x^*$. Ainsi, x^* est l'unique solution pseudo presque périodique de (6.1)-(6.2) dans $\mathcal{B}$. $\square$

6.3 Attractivité globale des solutions pseudo presque périodiques

Soit $x^*(\cdot)$ la solution pseudo presque périodique du theorème 6.2.2 et $x(\cdot)$ une solution arbitraire de (6.1)-(6.2). On a donc

$$x^{*\prime}(t) = -\alpha(t)\, x^*(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\, e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x^*(s)ds} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, e^{-\beta_i(t)x^*(t-\tau_i)}, \quad (6.4)$$

et

$$x'(t) = -\alpha(t)\, x(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\, e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)}.$$

Posons , $z(\cdot) = x(\cdot) - x^*(\cdot)$. On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z'(t) & = & -\alpha(t)\, z(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(t) \left[e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)} - e^{-\beta_i(t)x^*(t-\tau_i)} \right] \\ + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j(t) \left[e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} - e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x^*(s)ds} \right]. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Ainsi, la solution pseudo presque périodique $x^*(\cdot)$ associée au problème (6.1)-(6.2) est globalement attractive si et seulement si le point d'équilibre O du système (6.5) est globalement attractif. Etudions maintenant l'attractivité globale du point d'équilibre O du système (6.5).

Théorème 6.3.1. *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ le point d'équilibre O du système non linéaire (6.5) est globalement attractif.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que, la solution du système (6.5) est uniformément bornée. En d'autres termes, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ l'on ait

$$|z(t)| \leq M.$$

Sous l'hypothèse (H_3), $1 - r > 0$. Ainsi, pour toute fonction continue $\theta(\cdot)$, il existe un nombre assez large $M > 0$, tel que

$$|\theta| < M \;\text{ et }\; (1-r)\, M > 0.$$

Soit κ un nombre réel, $\kappa < 1$. On veut prouver que pour tout $t \geq 0$, $|z(t)| \leq \kappa M$. Supposons le contraire, alors il existe $t' > 0$, tel que

$$\begin{cases} |z(t')| &= \kappa M, \\ |z(t)| &< \kappa M, \quad 0 \leq t \leq t'. \end{cases}$$

Des hypothèses (H_3), (H_4) et de l'équation (6.1), on peut écrire

$$\begin{aligned}
|z(t')| &\leq \left\{ |\theta(0)| e^{-\int_0^{t'} \alpha(u)du} + \int_0^{t'} e^{-\int_s^{t'} \alpha(u)du} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i(s)| |\beta_i| |z|_\infty \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{j=1}^{m} |a_j(s)| |\omega_j| |z|_\infty \right) ds \right\}, \\
&\leq |\theta(0)| e^{-\underline{\alpha} t\prime} + |z(s)|_\infty \int_0^{t'} e^{-(t'-s)\underline{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j} \right) ds, \\
&\leq \kappa M \int_0^{t'} e^{-(t'-s)\underline{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j} \right) ds + \kappa M e^{-\underline{\alpha} t'}, \\
&\leq \kappa M \left\{ e^{-\underline{\alpha} t'} + \frac{1}{\underline{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j} \right] \left(1 - e^{-\underline{\alpha} t'}\right) \right\}, \\
&\leq \kappa M \left\{ e^{-\underline{\alpha} t'} + \frac{1}{\underline{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j} \right] \right\} \\
&< \kappa M,
\end{aligned}$$

ce qui donne une contradiction. Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, $|z(t)| \leq \kappa M$.

Soit donné $\kappa \longrightarrow 1$, alors pour tout$t \geq 0$, $|z(t)| \leq M$. Donc, il existe une constante $\beta \geq 0$, tel que

$$\limsup_{t \longrightarrow +\infty} |z(t)| = \beta.$$

Il s'ensuit que

$$\forall \epsilon > 0, \exists t_2 < 0, \forall t, (t \geq t_2 \Longrightarrow |z(t)| \leq (1+\epsilon)\beta).$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t)+\alpha(t)z(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\left[e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)}-e^{-\beta_i(t)x^*(t-\tau_i)}\right] \\
&\quad +\sum_{j=1}^{m} a_j(t)\left[e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t}K_j(t-s)x(s)ds}-e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t}K_j(t-s)x^*(s)ds}\right], \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|\beta_i(t)|\,\overline{b_i}\,|z(t-\tau_i)|+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}\,|z(t)|_\infty, \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i b_i}+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}\right)|z(t)|_\infty, \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i b_i}+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}\right)(1+\epsilon)\beta.
\end{aligned}$$

On a alors par intégration

$$\begin{aligned}
|z(t)| &\leq \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i b_i}+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}\right)(1+\epsilon)\beta\right\}\int_0^t e^{-\int_s^t \alpha(u)du}ds \\
&\quad +|\theta(0)|\,e^{-\int_0^t \alpha(u)du}, \\
&\leq \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i b_i}+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}\right)(1+\epsilon)\beta\right\}\int_0^t e^{-\underline{\alpha}(t-s)}ds \\
&\quad +|\theta|_\infty\,e^{-\underline{\alpha}t}, \\
&\leq |\theta|_\infty\,e^{-\underline{\alpha}t}+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i b_i}+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}}{\underline{\alpha_i}}\right)(1+\epsilon)\beta\left(1-e^{-\underline{\alpha}t}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|z(t)|\leq\max_{1\leq i\leq n}\left[|\theta|_\infty\,e^{-\underline{\alpha}t}+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i b_i}+\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j}}{\underline{\alpha_i}}\right)(1+\epsilon)\beta\left(1-e^{-\underline{\alpha}t}\right)\right].$$

En particulier, par passage à la limite sup, on obtient

$$\limsup_{t\longrightarrow+\infty}|z(t)|\leq[r(1+\epsilon)\beta],$$

c'est à dire,

$$\beta\leq r(1+\epsilon)\beta.$$

Faisant $\epsilon \longrightarrow 0$, on trouve

$$\beta (1 - r) \leq 0.$$

De (H_4), on en déduit que $\beta = 0$, ce qui implique que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |z(t)| = \lim_{t \longrightarrow +\infty} |x(t) - x^*(t)| = 0.$$

Ce qui termine la preuve. □

6.4 Stabilité exponentielle des solutions pseudo presque périodiques

On donne à présent quelques conditions suffisantes qui permettent d'avoir la convergence exponentielle de toutes les solutions vers la solution x^* de (6.1)-(6.2) qui soit pseudo presque périodique positive.

Définition 6.4.1. *[49] Soit $V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $\frac{D^+V(t)}{dt}$ est définie par*

$$\frac{D^+V(t)}{dt} = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}.$$

Remarque 6.4.1. *La dérivée à droite supérieure de Dini $\frac{D^+V|y(t)|}{dt}$ associée à $|V(t)|$ est donnée par*

$$\frac{D^+V\,|y(t)|}{dt} = sign\,(V(t))\,\frac{dV(t)}{dt},$$

où $sign(\cdot)$ est la fonction signe.

Théorème 6.4.1. *Soit*

$$\underline{\alpha} - e^{\lambda\mu} \sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} - \rho \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j} > 0. \tag{6.6}$$

Supposons vérifiées toutes les conditions du théorème 6.2.2. Il en résulte que (6.1)-(6.2) admet exactement une solution pseudo presque périodique $x^* \in \mathcal{B}$. En outre, $x^*(\cdot)$ est locallement exponentiellement stable, dont le domaine d'attraction de$x^*(\cdot)$ est donné par l'ensemble

$$\mathcal{D}(x^*) = \left\{ \varphi \in BC([-\mu, 0], \mathbb{R}),\ |\varphi - x^*|_1 := \sup_{-\mu \leq s \leq 0} \left|\varphi(s) - x^*_\mu(s)\right| < 1 \right\}.$$

A savoir, il existe une constante $\lambda > 0$ et $M > 1$ tel que pour toute solution $x(\cdot)$ de (6.1)-(6.2) dans $\mathcal{B}$ avec la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{D}(x^*)$ et pour tout $t > 0$ on a

$$|x(t) - x^*(t)| \leq M \sup_{-\mu \leq s \leq 0} \left|\varphi(s) - x^*_\mu(s)\right| e^{-\lambda t},$$

où $x^*_\mu(s) = x^*(s)$ pour tout $s \in [-\mu, 0]$.

Démonstration. Grâce au théorème 6.2.2, le problème (6.1)-(6.2) admet exactement une solution pseudo presque périodique $x^* \cdot \mathcal{B}$. Soit $x(\cdot)$ une solution quelconque de (6.1)-(6.2) munie de la donnée initiale φ . Soit $y(\cdot) = x(t) - x^*(t)$, il vient que

$$\begin{aligned}
&y'(t) = \tfrac{d(x(t)-x^*(t))}{dt} = -\alpha(t)(x(t) - x^*(t)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\left[e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)} - e^{-\beta_i(t)x^*(t-\tau_i)}\right] \\
&+ \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\left[e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} - e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x^*(s)ds}\right].
\end{aligned}$$

Définissons une fonction g continue par

$$g_\rho(\xi) = -(\underline{\alpha} - \xi) + e^{\lambda\mu}\sum_{i=1}^{n}\overline{b_i\beta_i} + \rho\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j},\ \xi \in [0,1].$$

En vertu de l'hypothèse (H_5), on peut écrire

$$g_\rho(0) < 0,$$

ceci entraine qu'on peut choisir une constante positive $\lambda \in \left]0,1\right]$ telle que

$$g_\rho(\lambda) = -(\underline{\alpha} - \lambda) + e^{\lambda\mu}\sum_{i=1}^{n}\overline{b_i\beta_i} + \rho\sum_{j=1}^{m}\overline{a_j\omega_j} < 0.$$

On considère la fonctionnelle de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V : \mathbb{R} &\longrightarrow BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \\
t &\longmapsto y(t)e^{\lambda t} = |x(t) - x^*(t)|\, e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée à droite supérieure de Dini D^+V associée à V lelong de l'équation

(1.5) munie de la donnée initiale $\widetilde{\varphi} = \varphi - x_{\mu}^{*}$. On a alors de (6.7) pour tout $t > t_0$

$$\begin{aligned}
&D^{+}V(t) \leq -\alpha(t)\left|y(t)\right|e^{\lambda t} + \lambda\left|y(t)\right|e^{\lambda t} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\left|e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)} - e^{-\beta_i(t)x^{*}(t-\tau_i)}\right|e^{\lambda t} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\left|e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t}K_j(t-s)x(s)ds} - e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t}K_j(t-s)x^{*}(s)ds}\right|e^{\lambda t}, \\
&\leq \left(-\alpha(t) + \lambda\right)\left|z(t)\right|e^{\lambda t} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\left|e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)} - e^{-\beta_i(t)x^{*}(t-\tau_i)}\right|e^{\lambda t} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\left|e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t}K_j(t-s)x(s)ds} - e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t}K_j(t-s)x^{*}(s)ds}\right|e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\left|\varphi - x^{*}\right|_1 = \sup_{-\mu \leq s \leq 0}\left|\varphi(s) - x_{\mu}^{*}(s)\right| > 0.$$

Comme $\left|\varphi - x^{*}\right|_1 < 1$, on peut choisir une constante positive $M > 1$ telle que

$$M\left|\varphi - x^{*}\right|_1 < 1,$$

donc,

$$\left(M\left|\varphi - x^{*}\right|_1\right)^2 < M\left|\varphi - x^{*}\right|_1.$$

Par la définition de la fonction de Lyapunov, on a pour tout $t \in [-\mu, 0]$

$$V(t) = \left|y(t)\right|e^{\lambda t} < M\left|\varphi - x^{*}\right|_1.$$

Montrons que pour tout $t > 0$

$$V(t) = \left|y(t)\right|e^{\lambda t} < M\left|\varphi - x^{*}\right|_1.$$

En effet, raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $t' > 0$ tel que

$$\begin{cases} V(t') & = & M\left|\varphi - x^{*}\right|_1, \\ V(t) & < & M\left|\varphi - x^{*}\right|_1, \quad -\infty < t < t'. \end{cases}$$

On peut écrire alors,

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq D^{+}\left(V(t') - M\left|\varphi - x^{*}\right|_{1}\right) = D^{+}\left(V(t')\right), \\
& \leq \left(-\alpha\left(t'\right)+\lambda\right)\left|y(t')\right| e^{\lambda t'} \\
& +\sum_{i=1}^{n} b_{i}\left(t'\right)\left|e^{-\beta_{i}(t') x(t'-\tau_{i})} - e^{-\beta_{i}(t') x^{*}(t'-\tau_{i})}\right| e^{\lambda t'} \\
& +\sum_{j=1}^{m} a_{j}\left(t'\right)\left|e^{-\omega_{j}(t') \int_{-\infty}^{t'} K_{j}(t'-s) x(s) ds} - e^{-\omega_{j}(t') \int_{-\infty}^{t'} K_{j}(t'-s) x^{*}(s) ds}\right| e^{\lambda t'}, \\
& \leq \left(-\alpha\left(t'\right)+\lambda\right)\left|y(t')\right| e^{\lambda t'} \\
& +e^{\lambda \tau_{i}} \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{i} \beta_{i}}\left|y\left(t'-\tau_{i}\right)\right| e^{\lambda(t'-\tau_{i})} \\
& +\sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j} \omega_{j}}\left|\int_{-\infty}^{0} K_{j}(s)\left|y\left(t'+s\right)\right| e^{\lambda(s+t')} e^{-\lambda s} ds\right|, \\
& \leq\left(-\underline{\alpha}+\lambda\right) V\left(t'\right) \\
& +e^{\lambda \mu} \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{i} \beta_{i}} V\left(t'-\tau_{i}\right) \\
& +\sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j} \omega_{j}}\left|\int_{-\infty}^{0} K_{j}(s)\left|V\left(t'+s\right)\right| e^{-\lambda s} ds\right|, \\
& \leq\left(-\underline{\alpha}+\lambda\right) V\left(t'\right) \\
& +M e^{\lambda \tau_{i}} \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{i} \beta_{i}} \\
& +M \rho \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j} \omega_{j}}, \\
& \leq\left(\left(-\underline{\alpha}+\lambda\right)+e^{\lambda \mu} \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{i} \beta_{i}}+\rho \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j} \omega_{j}}\right) M\left|\varphi-x^{*}\right|_{1}.
\end{aligned}
$$

On obtient donc

$$
\left(-\underline{\alpha}+\lambda\right)+e^{\lambda \mu} \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{i} \beta_{i}}+\rho \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{j} \omega_{j}}>0,
$$

ceci contredit l'hypothèse $\left(H_{5}\right)$. Ainsi, pour tout $t>0$

$$
V(t)=|y(t)| e^{\lambda t}<M\left|\varphi-x^{*}\right|_{1}.
$$

Donc, on a pour tout $t>0$

$$
\left|x(t)-x^{*}(t)\right| \leq M \sup_{-\mu \leq s \leq 0}\left|\varphi(s)-x^{*}(s)\right| e^{-\lambda t}.
$$

□

6.5 Applications et discussions

Parmi les méthodes universelles appliquées au modèle périodique de Lasota-Wazewska avec ou sans impulsion, on trouve le théorème de continuation de Mawhin [45].
D'ailleurs, jusqu'à présent, plusieurs articles de recherche ont étudié le modèle de Lasota-Wazewska avec des coefficients variants presque périodiquement avec constante de retard, en utilisant le théorème du point fixe de Banach. Il existe très peu d'articles de recherche traitant du modèle de Lasota-Wazewska à retards variant. Toutefois, les retards dépendant du temps présentent certaines difficultés. En particulier, lorsque dans le modèle de Lasota-Wazewska, l'opérateur construit dans la preuve n'est pas bien défini, il est difficile de trouver pour une fonction $f(\cdot)$ pseudo presque périodique, une fonction composée $g(\cdot, f(\cdot))$ pseudo presque périodique.
Comparons nos résultats avec ceux des travaux antérieurs.
Pour cela, considérons pour tout $1 \leq j \leq m$

$$a_j(\cdot) = 0 \text{ and } \tau_j = \tau_j(t),$$

le modèle de (6.1)-(6.2) a été étudié dans [55] et récemment par Wang et al [77]. Aussi, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a que $b_i(\cdot) = 0$ et le problème (6.1)-(6.2) peut être réduit au modèle considéré récemment dans le papier de [102]. De plus, Stamov [94] a travaillé sur l'existence et l'unicité des solutions presque périodiques pour le modèle de Lasota-Wazewska impulsif avec seulement une constante de retard. Ainsi, nos résultats peuvent être considérés comme une généralisation et affinement de [55], [77], [102], du fait que dans les papier cités, les auteurs ont considéré le cas périodique ou le cas presque périodique. A notre connaissance, il n'existe pas à postériori, des articles de recherche publiés qui traitent des solutions pseudo presque périodique pour le modèle de Lasota-Wazewska. Notons que la notion de pseudo presque périodicité est sans grande importance dans les preuves des théorèmes ci-dessus ; en particulier dans les théorèmes 6.3.1 et 6.4.1. En raison des différentes méthodes utilisées dans cet article et dans les références citées plus haut, les résultats sont notamment différents. Les retards τ_j, $1 \leq j \leq m$ sont des fonctions constantes.

Ainsi, on peut citer quelques uns des principaux avantages de cet article :

i il traite des fonctions pseudo presque périodiques qui sont plus générales que les fonctions presque périodiques,

ii il considère à la fois des retards infinis (voir [102]) et plusieurs retards variant dans le temps [55].

Il convient de mentionner que divers modèles de Lasota-Wazewska ont été étudiés par plusieurs auteurs, voir [91], [26].

Afin d'illustrer certaines caractéristiques de nos principaux résultats, on appliquera dans cette section nos résultats à certains systèmes particuliers et on démontra l'efficacité de nos critères.

Exemple 6.5.1. *Considérons le modèle de Lasota-Wazewska avec des coefficients pseudo presque périodiques et des retards mixtes*

$$x'(t) = -\alpha(t)\,x(t) + \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\, e^{-\omega_j(t)\int_{-\infty}^{t} K_j(t-s)x(s)ds} + \sum_{i=1}^{3} b_i(t)\, e^{-\beta_i(t)x(t-\tau_i)}, \tag{6.7}$$

où $\alpha(t) = 8 + \cos^2\sqrt{5}t + \cos^2 t$

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0.25\cos^2\sqrt{2}t + 0.25\cos^2\pi t + \frac{0.5}{1+t^2} \\ 0.5 + 0.25\cos^2\sqrt{3}t + 0.25\cos^2\pi t + \frac{1}{1+t^2} \\ 0.5 + 0.25\cos^2\sqrt{5}t + 0.25\cos^2\sqrt{2}t + e^{-t^2\cos^2 t} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.125\cos^2\pi t + \frac{0.25}{1+t^2} \\ 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.125\cos^2\pi t + \frac{0.25}{1+t^2} \\ 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.25e^{-t^2\cos^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0.25\cos^2\sqrt{5}t + 0.25\cos^2\pi t + 0.5e^{-t^2\cos^2 t} \\ 1 + 0.25\cos^2\sqrt{5}t + 0.25\cos^2\pi t + 0.5e^{-t^2\cos^2 t} \\ 1 + 0.25\cos^2\sqrt{5}t + 0.25\cos^2 t + 0.5e^{-t^2\cos^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.125\cos^2\pi t + \frac{0.25}{1+t^2} \\ 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.125\cos^2\pi t + \frac{0.25}{1+t^2} \\ 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.125\cos^2\sqrt{2}t + 0.25e^{-t^2\cos^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = 1, \tau_2 = 1, \ \tau_3 = 1$$

et

$$K_j(t) = e^{-t},$$

ainsi

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i\beta_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j\omega_j}}{\underline{\alpha}}, \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les conditions des résultats précédents sont satisfaites, et donc le modèle de Lasta-Wazewska (6.7) avec des retards mixtes admet une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathcal{B} = \left\{ x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), R_1 \leq |x| \leq R_2 \right\},$$

avec

$$R_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} + \sum_{j=1}^{m} \overline{a_j}}{\underline{\alpha}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

et

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{b_i} e^{-\overline{\beta_i}R_2} + \sum_{j=1}^{m} \underline{a_j} e^{-\overline{\omega_j}R_2}}{\overline{\alpha}}, \\ &= \frac{\underline{a_1}e^{-\overline{\omega_1}R_2} + \underline{a_2}e^{-\overline{\omega_2}R_2} + \underline{a_3}e^{-\overline{\omega_3}R_2} + \underline{b_1}e^{-\overline{\beta_1}R_2} + \underline{b_2}e^{-\overline{\beta_1}R_2} + \underline{b_3}e^{-\overline{\beta_3}R_2}}{\overline{\alpha}}, \\ &\leq \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + 0.5e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + 0.5e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}}{10}, \\ &\leq 5\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{3}{2}}}{10}, \\ &\leq \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion générale

Les principaux résultats de cette étude sont le point de départ de la recherche dans certaines directions, entres autres

1. Nos résultats sont basés sur l'existence de l'exposant critique de Fujita. Peut-on espérer améliorer les résultats obtenus en construisant d'autres exposants selon le problème considéré ou bien s'appuyer sur d'autres qui existent dans les travaux de recherche ?.
2. Reformuler les problèmes étudiés à des problèmes de type Cauchy-Dirichlet dans des domaines bornés.
3. A-t-on de bonnes connaissances sur le phénomène explosion (mathématique et/ou physique) ?. Que se passe-t-il réellement avant/ au moment/après l'explosion ?
4. Dans la résolution des problèmes d'équations différentielles associées à des opérateurs résolvants, les conditions suffisantes sur l'existence et la régularité des solutions p. a. p. d'équations d'v̀olution incluant des fonctions de type "Weighted Stepanov-like p.a.p" sont à considérer.

Bibliographie

[1] O. P. Agarwal, Generalized Variational Problems and Euler Lagrange equations , Comput. Math. Appl. 59(2010) 1852–1864.

[2] S. Agarwal, S.H. Saker, Oscillation and global attractivity of a periodic survival red blood cells model , J. Dyn. Contin. Disc. Impulsive Syst. Ser. B. 12 :3-4 (2005) 429–440.

[3] J. Aguirre, M. Escobedo, On the blow up of solutions of a convective reaction diffusion equation , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A, 123 (1993) 433–460.

[4] E. Ait Dads, P. Cieutat, L. Lhachimi, Positive pseudo almost periodic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations , Math. Comp. modl. 49 :3-4 (2009) 721–739.

[5] E. Ait Dads, K. Ezzinbi, Existence of positive pseudo-almost-periodic solution for some nonlinear infinite delay integral equations arising in epidemic problems , Nonlinear Analysis. 41 (2000) 1–13.

[6] N. Alaa, Solutions faibles d'équations paraboliques quasilinéaires avec données initiales mesurés , Annal. Math. Blaise. Pascal, vol 3, no 2 (1996) 1–15.

[7] H. Amann, Semigroups and Nonlinear Evolution Equations , linear. Algebra. Appl, 84 (1986) 3–32.

[8] L. Amerio, G. Prouse, Almost-Periodic Functions and Functional Equations , von Nostrand Reinhold Co., New York, 1971.

[9] B. Amir, L. Maniar, Composition of Pseudo Almost Periodic Functions and Cauchy Problems with Operators of non Dense Domain , Ann. Math. Blaise Pascal. 6 (1999) 1–11.

[10] B. Amir, L. Maniar, Composition of Pseudo Almost Periodic Functions and Cauchy Problems with Operators of non Dense Domain , Ann. Math. Blaise Pascal, 6 (1999) 1–11.

[11] B. Ammar, F. Chérif, M.A. Alimi, Existence and Uniqueness of Pseudo Almost-Periodic Solutions of Recurrent Neural Networks with Time-Varying Coefficients and Mixed Delays , IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 23 :1 (2012) 109–118.

[12] O. Arino, I. Gyori, A. Jawhari, Oscillation criteria in delay equations , J. Diff. Equat. 53 :1 (1984) 115–123.

[13] D. Aronson, H.F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics , Adv. Math. 30 (1978) 33-76.

[14] C. Bandle, H. A. Levine, Fujita type phenomena for reaction-diffusion equations with convection like terms , Differential Integral Equations, 5-6 (1994), 1169–1193.

[15] C. Bandle, H. A. Levine, On the existence and nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains , Trans. Amer. Math. Soc, 655 (1989), 595–624.

[16] P. Baras, R. Kersner, Local and global solvability of a class of semilinear parabolic equations , J. Differential Equations, 68 (1987), no 2, 238–252.

[17] J. Bebernes, S. Bricher, Final time blowup profiles for semilinear parabolic equations via center manifold theory , SIAM J. Appl. Math. Anal. 23 1992.

[18] M. Ben-Artzi, *Lectures on viscous Hamilton-Jacobi equations,* September (2007).

[19] A. S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge University Press, 1932.

[20] J. Blot, Oscillations presque périodiques forcée d'équations d'Euler Lagrange , Bulletin de la société Mathématique de France, 122 (1994), 285–304

[21] S. Bochner, Curvature and Betti Numbers in Real and Complex Vector-Bundles , Universita di Torino, Rendiconti del Seminario Matematico. 15 (1948) 1955–1956.

[22] S. Bochner, A new approach to almost periodicity , Proc. Nat. Ac. Sc . USA, 48 (1962) 195–205.

[23] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Masson, Paris. 1983

[24] T. Cazenave, F. Dickstein and F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling , Nonlinear Analysis :TMA, 68 (2008) 862–874.

[25] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires. Ellipses, Paris. 1990.

[26] M. P. Chen, J.S. YU, Oscillation and global attractivity in the discrete Lasota–Wazewska model , Soochow journal of mathematics. 25 :1 (1999) 1–9.

[27] F. Chérif, A various types of almost periodic functions on Banach spaces. Part I, International Mathematical Forum. 6 :19 (2011) 921–952.

[28] F. Chérif, A various types of almost periodic functions on Banach spaces. Part II, International Mathematical Forum. 6 :20 (2011) 953–985.

[29] F. Chérif, Existence and global exponential stability of pseudo almost periodic solutions for SCINNs with mixed delays. J. Appl. Math. Comput. 39 :1-2 (2012) 235–251

[30] F. Chérif, Pseudo almost periodic solutions of of Impulsive Differential Equations with delays ,Differ. Equ. Dyn. Syst. 22 :1. 2013.

[31] P. Cieutat, S. Fatajou, G. M. N'Guerekata, Composition of pseudo almost periodic and pseudo almost automorphic functions and applications to evolution equations , Applicable Analysis. 89 :1 (2010) 11–27.

[32] C. Corduneanu, Almost Periodic Functions, Wiley, New York, 1968.

[33] S. B. Cui, Local and global existence of solutions to semilinear parabolic initial value problems , Nonlinear Analysis : TMA, 43 (2001) 293–323.

[34] D. del-Castillo-Negrete, Fractional calculus : basic theory and applications (Parts I, II and III) , Lectures presented at the Institute of Mathematics UNAM, Mexico, City, August 2005.

[35] K. Deng, H.A. Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems : The sequel , J. Math. Anal. Appl. 243 (2000) 85-126.

[36] T. Diagana, E. M. Hernández, Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some abstract partial neutral functional-differential equations and applications , J. Math. Anal. App. 327 :2 (2007) 776–791.

[37] Yu. V. Egorov, V. A. Galaktionov, V. A. Kondratiev, S.I. Pohozaev, On the asymptotics of global solutions of higher-order semilinear parabolic equations in the supercritical range , C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 335 (2002) 805–810.

[38] Yu. V. Egorov, V. A. Galaktionov, V. A. Kondratiev, S.I. Pohozaev, On the necessary conditions of existence to a quasilinear inequality in the half-space , C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 330 (2000) 93–98.

[39] E. Esclangon, Les fonctions quasi-périodiques , Thèse de la faculté des Sciences de Paris, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[40] M. Escobedo, M. A. Herrero, Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system , J. Differential Equations. 89 (1991) 176–202.

[41] J. Favard, Leçons sur les fonctions presque périodiques ,GauthierVillars. Paris. 1933.

[42] A. M. Fink, Almost periodic differential equations , Lecture notes in Math, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[43] A. Z. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation. Quart. Appl. Math. 70 (2012) 133–157.

[44] H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 13 (1966) 109–124.

[45] R.E. Gaines, J.L. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations , Springer. Berlin. 1977.

[46] V. A. Galaktionov and H. A. Levine, On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux conditions on the boundary , Israel J. of Math 94 (1996) 125–146.

[47] V. A. Galaktionov, S.I. Pohozaev, Existence and blow-up for higher-order semilinear parabolic equations : Majorizing order-preserving operators , Indiana Univ. Math. J. 51 (2002) 1321–1338.

[48] K. Gopalsamy, S. Trofimchuk, Almost periodic solutions of Lasota-Wazewska type delay differential equation , J. Math. Anal. Appl. 327 (1999) 106–127.

[49] J. K. Hale, Theory of functions differential equations , Springer-Verlag, New York, Berlin. 1977.

[50] A. Haraux, A simple amost-periodicity criterion and applications J. Diff. Equat. 66 (1987) 51–61.

[51] A. Haraux, F. B. Weissler, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem , Indiana Univ. Math. J. 31 :2 (1982) 167–189.

[52] K. Hayakawa, On the nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations , Proc. Japan Acad. 49 (1974) 503-525.

[53] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations , Springer-Verlag, New York. 1981.

[54] E. Hewitt, Linear functionals on almost periodic functions , Transactions of the Amer. Math. So c. 74 (1953), 303–322.

[55] Z.D. Huang, S.H. Gong, L.J. Wang, Positive almost periodic solution for a class of Lasota–Wazewska model with multiple timing-varing delays , Comput. Math. Appl. 61 (2011) 755–760.

[56] F. L. Huang, H.X. Li, J. Y. Li, Composition of pseudo almost periodic functions and semilinear differential equations , J. Math. Anal. Appl. 255 :2 (2001) 436–446.

[57] C. S. Jiang and C. H. Xie, Blow up of solutions to quasilinear parabolic equations on a semi-in¯nite space , Acta Math. Appl. Sinica. (1998) 84–91.

[58] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 (North-Holland Mathematics Studies), Elsevier, 2006.

[59] K. Kobayashi, T. Sirao and H. Tanaka, On the blowing up problem for semilinear heat equations , J. Math. Soc. Japan. 29 (1977) 407–424.

[60] M.R.S. Kulenovic, G. Ladas, Linearized oscillation in population dynamics , Bull. Math. Biol. 49 (1987) 615–627.

[61] M.R.S. Kulenovic, G. Ladas, Y.G. Sficas, Global attractivity in population dynamics , Comp. Math. Appl. 18 :10-11 (1989) 925–928.

[62] G. Ladas, Y.G. Sficas, I.P. Stavroulakis, Necessary and sufficient conditions for oscillations , Amer. Math. Monthly. 90 (1983) 637–640.

[63] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'seva, linear and quasilinear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc, Providence, R. I. 1967.

[64] A. Lasota, M. Wazewska, Mathematical problems of the dynamics of the red blood cells systems , Ann. Polish. Math. Soc. Ser. III. Appl. Math. 17 (1976) 23–40.

[65] H.A. Levine, The role of critical exponents in blowup theorems , Siam. Rev. 32 (1990) 262-288.

[66] B. M. Levitan, Almost Periodic Functions, G.I.T-T.L. 1959 (in Russian)

[67] C. Li, Several results of fractional derivatives in $D'(\mathbb{R}_+)$, Fract. Calc. Appl. Anal. 18 :1 (2015) 192–207.

[68] X. Liu, Y. Takeuchi, Periodicity and global dynamics of an impulsive Lasta-Wazewska model , J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 326–341.

[69] J. Liang, T.J. Xiao, J. Zhang, Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces , Semigroup Forum 76 :3 (2008) 518–524.

[70] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaries, Gauthier-Villars, 1969.

[71] M. Loayza and I.G. Quinteiro, A nonlocal in time parabolic system whose Fujita exponent is not given by scaling , J. Math. Anal. Appl. 374 (2010) 615–632.

[72] P. Meier, On the critical exponent for reaction-diffusion equations , Arch. Rational Mech. Anal, 109 (1990) 63–71.

[73] E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities , Proc. Steklov. Inst. Math. 234 :1 (2001) 1–375.

[74] K. Mochizuki and R. Suzuki, Critical exponent and critical blow-up for quasilinear parabolic equations , Israel J. Math. 98 (1997), 141–156.

[75] G. M. N'Guerekata, Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces , Kluwer Acad. Publ. New York. 2001.

[76] G. M. N'Guérékata, Topics in Almost Automorphy, Springer- Verlag, New York, 2005.

[77] P. Niu, L. Wang, M. Yu, Periodic solution and almost periodic solution of impulsive Lasota-Wazewska model with multiple time-varying delays , 64 :8 (2012) 2383–2394.

[78] K. B. Oldham, J. Spanier, the fractional calculus , Academic Press,INC, 1974.

[79] W. E. Olmstead, C. A. Roberts, Blow-up in a subdiffusive medium of infinite extent , Fract. Calc. Appl. Anal. 12 (2009), no 2, 179–194.

[80] P. Y. H. Pang, F. Sun, M. Wang, Existence and nonexistence of global solutions for a higher-order semilinear parabolic system , Indiana. Univ. Math. J. 55 (2006), no 3, 1113–1134.

[81] A. A. Pankov, Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations , Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1990.

[82] A. Pazy, Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations , Springer-Verlag 1983.

[83] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering. 198 , Academic Press. San Diego 1990.

[84] G. Prouse, Almost Periodic Functions and Functional Analysis , von Nostrand Reinhold Co., New York, 1971.

[85] Y. W. Qi, The critical exponents of parabolic equations and blow up in $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 128 (1998) 123-136.

[86] S. Rihani, A. Kessab, Local, global existence and blow-up of solution for a nonlocal in time nonlinear heat equation. Proceedings of the 4th International Interdisciplinary Chaos Symposium on Chaos and Complex Systems, Antalya Turkey. April 29 - May 02. 2012.

[87] S. Rihani, A. Kessab, Existence and no existence of mild solutions for a fractional evolution system, IJEE. 4 :6 2013.

[88] S. Rihani, A. Kessab, F. Chérif, Pseudo almost periodic solutions for a Lasota-Wazewska model. EJDE. 62 (2016) 1–17.

[89] B. Ross, Fractional calculus : an historical apologia for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non integral orders , Mathematics Magazine. 50 :3 (1977) 155–122.

[90] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, J. Wiley and Sons, New York, 1962.

[91] S.H. Saker, Qualitative analysis of discrete nonlinear delay survival red blood cells model , Nonlin. Anal. RWA. 9 (2008) 471–489.

[92] S. G. Samko, A. A. Kilbas and D. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[93] P. Souplet, Recent results and open problems on parabolic equations with gradient nonlinearities , Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2001, no 20 (2001) 1–19.

[94] G. T. Stamov, On the existence of almost periodic solutions for the impulsive Lasta-Wazewska model , Appl. Math. Lett. 22 (2009) 516–520.

[95] A. Weil, L'intégration dans les groupe s topologiques, Hermann, Paris , 1965

[96] F.B. Weissler, Semilinear evolution equations in Banach spaces , J. Functional Analysis 32 (1979) 277–296.

[97] F.B. Weissler, Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p , Indiana Univ. Math. J. 29 (1980) 79–102.

[98] F.B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation , Israel J. Math. 38 (1981) 29-40.

[99] R. White, Blow-up in Reaction-Diffusion Equations , Applied Mathematics 4199 : Honours Project 2005.

[100] J. Yan, Existence and global attractivity of positive periodic solution for an impulsive Lasta-Wazewska model , J. Math. Anal. Appl. 279 (2003) 111–120.

[101] K. Yosida, Functional Analysis , sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1980.

[102] Q. Wang, H. Zhou, Z. Zhou, Positive almost periodic solution for a class of Lasota-Wazewska model with infinite delays , Appl. Math. Comp. 2188 (2011) 4501–4506.

[103] C. Zhang, Pseudo almost periodic functions and their applications , Ph.D. thesis, University of Western Ontario, 1992.

[104] C. Zhang, Pseudo almost periodic solutions of some differential equations , J. Math. Anal. Appl. 181 (1994) 62–76.

[105] C. Zhang, Pseudo almost periodic solutions of some differential equations II , J. Math. Anal. Appl. 7 :192 (1995) 543–561.

[106] C. Zhang, Vector-valued pseudo almost periodic functions , Czechoslovak. Math. J. 47 :3 (1997) 385–394.