

N° d'ordre : 02/2004-E/G.M

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**HOUARI BOUMEDIENE**  
**USTHB / ALGER**  
**FACULTE DE GENIE MECANIQUE ET DE GENIE DES PROCEDES**

**THESE**  
**présentée pour l'obtention du diplôme de**

**DOCTEUR D'ETAT**

**En : Génie Mécanique**

**Spécialité : Thermo-Energétique**

**Par**

**YACINE OULD-AMER**

**Thème**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ECOULEMENTS**  
**POLYPHASIQUES NON MISCIBLES DANS LES MILIEUX POREUX**  
**APPLICATION AU CONING D'EAU**

**Soutenue publiquement le 13 octobre 2004, devant le jury composé de :**

<b>Mme K. BOUHADEF</b>	<b>Professeur, USTHB/FGMGP</b>	<b>Présidente</b>
<b>M. S. CHIKH</b>	<b>Professeur, USTHB/FGMGP</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>M. B. LANDJERIT</b>	<b>Professeur, USTL, FRANCE</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. S. BENMANSOUR</b>	<b>Professeur, USTHB/FGMGP</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mme F. BENTAHAR</b>	<b>Professeur, USTHB/FGMGP</b>	<b>Examinatrice</b>
<b>M. M. KESSAL</b>	<b>Maître de conférence, U. BOUMERDES</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. S. BENAYAD</b>	<b>Maître de conférence, IAP</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Y. BENKAHLA</b>	<b>Maître de conférence, USTHB/FGMGP</b>	<b>Examineur</b>

**N'A PAS REMERCIE DIEU  
QUI N'A PAS REMERCIE LES GENS**



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier :

*ma mère pour s'être toujours occupé de moi et préoccupée sur moi,*

*mon père, pour son soutien financier et sa gentillesse,*

***ma grand –Mère pour ses prières, je te souhaite longue vie Yama Djidji,***

*ma femme pour son soutien moral, son aide et ses encouragements,*

*mes deux filles Marya et Khadidja pour la joie qu'elles ont apporté dans ma vie,*

*mes frères et sœurs, mes proches pour leurs encouragements,*

*La famille Hamadouche, plus particulièrement M. Mohand Akli et Mme Taklit.*

*Mes sincères remerciements sont adressés au Professeur S. Chikh pour avoir bien voulu diriger ce présent travail, pour ses remarques constamment fructueuses, et pour le temps qu'il m'a consacré pour réaliser cette thèse dans les meilleures conditions. Je ne saurais oublier les heures tardives que nous avons passé au Hall de Technologie(ancien institut de génie mécanique) ou encore à la faculté de génie mécanique et de génie des procédés.*

*Madame le professeur K. Bouhadeh a l'amabilité de présider le jury de thèse. Je lui sais gré d'avoir accepté d'animer le débat, comme je la remercie pour ses encouragements et les moyens qu'elle a mis à notre disposition au laboratoire LTPMP.*

*Madame F. Bentahar et Messieurs S. Benmansour, B. Landjerit, M. Kessal, S. Benayad, Y. Benkahla m'ont fait le grand honneur de s'intéresser à ce travail et d'accepter d'examiner cette thèse. Je les en remercie sincèrement.*

*Je remercie également Monsieur Hamadouche Améziane Maître de conférence en France pour la main forte qu'il m'a porté pour réussir mon stage et mon séjour à l'USTL, pour les documents qu'il m'a remis et pour ses conseils.*

*C'était un honneur pour moi d'être un invité du professeur Bernard Landjerit dans son équipe, comme il m'a fait l'honneur en m'installant dans son propre bureau. Je vous remercie pour tous les moyens que vous avez mis à ma disposition et pour les discussions fructueuses que vous m'avez accordé.*

*M N. Benssediq, Maître de conférence à l'USTL acceptez mes remerciements et ma reconnaissance, vous m'avez été d'une aide précieuse durant mon stage au laboratoire LML de Lille.*

*Je ne saurais terminer sans remercier tous mes amis et collègues des soutiens et encouragements qu'ils m'ont apporté.*

## Résumé

*Le présent travail est une contribution à l'étude du phénomène du cône d'eau ayant lieu dans les réservoirs pétroliers. Deux cas sont proposés : le premier est relatif au cas de puits horizontal, alors que le second s'intéresse à une situation de puits vertical.*

*Dans le cas d'une situation de puits horizontal, le comportement transitoire de l'interface eau - huile durant un mouvement ascendant dans une cellule poreuse saturée, est étudié numériquement. L'analyse numérique est réalisée pour suivre l'évolution de l'interface, son mouvement et déduire les conditions optimales menant à la meilleure production. Les effets de plusieurs paramètres liés à la roche réservoir et aux propriétés des fluides sont analysés et commentés par introduction de paramètres adimensionnels tels que le nombre de Darcy, le nombre de gravité - viscosité et le débit adimensionnel de production. Dans le cas d'un puits vertical, nous nous sommes intéressés à la technologie de la double complétion adoptée pour atténuer le cône d'eau. Une étude numérique est proposée. Avec une étude paramétrique de la technologie de double complétion, la forme du profil du cône et les performances de cette technique ont été examinées. Le cas de complétion conventionnelle a été aussi considéré comme référence pour la comparaison.*

*Les résultats obtenus, dans le cas d'un puits horizontal, montrent un développement significatif de l'interface eau - huile quand le nombre de gravité - viscosité et la porosité de la roche réservoir diminuent. L'augmentation du rythme de production entraîne aussi une avancée rapide du front d'eau. Le temps de percée d'eau est très court pour les faibles valeurs de  $N$  (huiles lourdes et très visqueuses) avec un faible effet stabilisant de la gravité de même pour les faibles valeurs du nombre de Darcy (faibles perméabilités). Pour un débit de production fixé, un moyen d'augmentation de la perméabilité de la roche réservoir devrait être très bénéfique particulièrement pour les huiles légères et moins visqueuses. Dans le présent travail une corrélation a été proposée pour prédire le pourcentage d'huile récupérée au temps de percée d'eau. Cette corrélation a été développée en se basant sur les équations gouvernantes et l'analyse par la régression utilisant les données de la simulation numérique.*

*Les résultats numériques auxquels nous avons abouti, pour une situation de puits vertical, montrent que l'utilisation de la double complétion déforme dans la plupart des cas le profil du cône. Le sommet de l'interface eau - huile se déplace loin du puits. La mise en production du puits à des valeurs élevées du débit de production d'huile entraîne une élévation de la hauteur du cône d'eau interceptant ainsi l'écoulement de l'huile. Pour des débits de production d'eau supérieurs à une certaine valeur critique, l'huile s'introduit dans les perforations de la zone de complétion eau. Le temps de percée d'eau  $BT^*$  est proportionnel à la différence adimensionnelle de densité  $ND\rho$  et au nombre de Darcy horizontal mais inversement proportionnel au débit de production d'huile, aux rapports de mobilité et d'anisotropie. Le profil de l'interface eau - huile, induite par la technologie DWS, pour des roches réservoirs avec des rapports d'anisotropie élevés, prend la forme classique du cône d'eau en simple complétion après une courte période de production. Aux faibles valeurs de  $ND\rho$ , les valeurs de  $BT^*$  ne sont pas très différentes, l'utilisation alors de valeurs élevées pour le débit de production d'eau dans la zone de complétion eau n'est pas recommandée. L'amélioration ne commence qu'à partir d'une certaine valeur de la différence adimensionnelle de densité. Avec la technique de double complétion, la percée d'eau est atténuée. En général,  $BT^*$  est doublement amélioré comparé à une situation de complétion conventionnelle. Le débit critique de production d'huile est amélioré comparé au cas de simple complétion.*

## **Abstract**

*The present work is a contribution to study the water-coning phenomenon occurring in petroleum reservoirs. Two cases are proposed: the first is related to horizontal well and the second to vertical well.*

*In the horizontal well situation, transient behavior of a water-oil interface during an upward flow in a saturated porous cell is numerically investigated. A numerical analysis is carried out to follow the interface evolution, motion, and deduce the optimal conditions allowing better production. Effect of several parameters relevant to reservoir rock, fluids properties, are analyzed and documented introducing dimensionless parameters such as Darcy number, gravity - viscosity parameter and the dimensionless flow rate. In the vertical well case, we have interested for the dual completion that is adopted to attenuate water coning in vertical well case. Results of numerical simulations related to water-oil interface behavior and  $BT^*$  have been analyzed and documented in single and dual completions. With a parametric study of dual completion technology, the cone profile shape and the performance of this technique have been discussed.*

*For the horizontal well case, a significant development of water-oil interface is noticed as the gravity - viscosity parameter and porosity of reservoir rock decreases. The breakthrough time is shorter for low values of  $N$  (very dense viscous oils) with lower gravity stabilizing effect and in the case of low Darcy number (low permeability). Increasing permeability can be beneficial in practical situations if the flow rate is maintained constant since it permits to delay considerably water breakthrough principally at high value of  $N$ . This paper presents a new coning correlation to predict oil recovery at breakthrough in horizontal well situation. The correlation was developed based on the flow equations and regression analysis using the data from numerical simulations.*

*The numerical results show that the use of dual completion with vertical well deforms in most cases the cone profile shape. The top of water-oil interface moves away from the well. The use of high values of oil production rate yields an elevation of water coning height that would intercept oil flow. For water production rate greater than a certain critical value, the oil breaks into water perforations. The water breakthrough time  $BT^*$  is proportional to dimensionless density difference  $ND\rho$  and horizontal Darcy number and inversely proportional to oil production rate, mobility and anisotropy ratios. For rock reservoir with high anisotropy ratio, the cone shape, induced by DWS technology, takes the classical behavior occurring in single completion after a short period of production. At low  $ND\rho$  numbers, the values of  $BT^*$  are not too different, thus the use of high production rate at water sink is not recommended. The improvement begins from a certain value of gravity number. With dual completion technique, water breakthrough is delayed. In general, the  $BT^*$  is delayed twice compared to single completion situation. The critical oil rate is improved compared to single completion.*

*Keywords: water coning, dual completion, downhole water sink, breakthrough time, horizontal well, vertical well, water - oil interface.*

<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>I</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>I</b>
<b>NOMENCLATURE</b>	<b>IV</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE UN</b>	<b>4</b>
RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS SUR LES ECOULEMENTS POLYPHASIQUES DANS LES MILIEUX POREUX	
<b>1.1 INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>1.2 MILIEUX POREUX</b>	<b>4</b>
<input type="checkbox"/> La porosité	4
<input type="checkbox"/> La perméabilité	5
<b>1.3 ÉCOULEMENTS MONOPHASIQUES DANS LES MILIEUX POREUX</b>	<b>5</b>
<input type="checkbox"/> Loi de Darcy	5
<input type="checkbox"/> Notion de volume élémentaire représentatif	6
<input type="checkbox"/> Validité de la loi de Darcy	6
<b>1.4 ECOULEMENTS À PHASES MULTIPLES DANS LES MILIEUX POREUX</b>	<b>7</b>
<input type="checkbox"/> Saturations en fluides	7
<input type="checkbox"/> Mouillabilité	8
<input type="checkbox"/> Capillarité	9
<input type="checkbox"/> Drainage et imbibition	10
<input type="checkbox"/> Courbes de pression capillaire	10
<input type="checkbox"/> Perméabilités effective et relative	12
<input type="checkbox"/> Mesure en laboratoire des perméabilités relatives	13
❖ Mesures en régime d'écoulement permanent	13
❖ Mesures en régime d'écoulement transitoire	14
<input type="checkbox"/> Rapport de mobilité	15
<b>1.5 GISEMENTS D'HYDROCARBURES</b>	<b>16</b>
<input type="checkbox"/> Définition d'un réservoir d'hydrocarbures	16
<input type="checkbox"/> Définition d'un gisement d'hydrocarbures	16
<input type="checkbox"/> Fluides contenus dans le réservoir	17
<input type="checkbox"/> Différents types de gisements	17
<input type="checkbox"/> Récupération des hydrocarbures	17
<b>1.6 LE PHÉNOMÈNE DU CONING DANS LES RÉSERVOIRS PÉTROLIERS</b>	<b>19</b>
<input type="checkbox"/> Théorie du coning d'eau	21
<b>1.7 CONCLUSION</b>	<b>22</b>
<b>CHAPITRE DEUX</b>	<b>23</b>
RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE PHENOMENE DU CONING	
<b>2.1 INTRODUCTION</b>	<b>23</b>
<b>2.2 CONING D'EAU DANS LES PUIITS VERTICAUX</b>	<b>23</b>
<b>2.3 CORRELATIONS POUR LE DEBIT CRITIQUE ET LE TEMPS DE PERCEE     D'EAU DANS LE CAS DES PUIITS VERTICAUX</b>	<b>25</b>
<input type="checkbox"/> Débit critique	25
<input type="checkbox"/> Temps de percée d'eau	26
<input type="checkbox"/> Synthèse	26
<b>2.4 SOLUTIONS INDUSTRIELLES AU PHENOMENE DU CONING D'EAU DANS LES     PUIITS VERTICAUX</b>	<b>27</b>
<input type="checkbox"/> Barrières et procédés chimiques	27
<input type="checkbox"/> Puits horizontaux	27

□	Contrôle du coning d'eau par la technologie dite "dual completion"	28
<b>2.5</b>	<b>PHENOMENE DU CONING D'EAU DANS LES Puits HORIZONTALS</b>	<b>29</b>
<b>2.6</b>	<b>CONTROLE DU CONING D'EAU DANS LES Puits HORIZONTALS</b>	<b>31</b>
<b>2.7</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>31</b>
<b>CHAPITRE TROIS</b>		<b>34</b>
	ANALYSE DU PHENOMENE DU CONING D'EAU DANS LE CAS DES Puits HORIZONTALS	
<b>3.1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>FORMULATION</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>MODELISATION NUMERIQUE</b>	<b>38</b>
<b>3.4</b>	<b>DISCUSSION DES RESULTATS</b>	<b>40</b>
3.3.1	EVOLUTION DE L'INTERFACE EAU - HUILE	41
3.3.2	LE TEMPS DE PERCEE D'EAU	48
3.3.3	POURCENTAGE D'HUILE RECUPEREE AU TEMPS DE PERCEE D'EAU	51
3.3.4	EVOLUTION DU DEBIT DE PRODUCTION D'HUILE	51
<b>3.5</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>56</b>
<b>CHAPITRE QUATRE</b>		<b>58</b>
	ETUDE DE LA DOUBLE COMPLETION DANS LE CAS DES Puits VERTICAUX	
<b>4.1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>58</b>
<b>4.2</b>	<b>FORMULATION</b>	<b>59</b>
<b>4.3</b>	<b>PROCEDURE NUMERIQUE</b>	<b>63</b>
<b>4.4</b>	<b>RESULTATS ET INTERPRETATIONS</b>	<b>70</b>
4.3.1	COMPORTEMENT DE L'INTERFACE EAU - HUILE	71
4.3.2	PERCEE DE L'HUILE DANS LA ZONE DE COMPLETION EAU	80
4.3.3	TEMPS DE PERCEE D'EAU	81
<b>4.5</b>	<b>CONCLUSIONS ET REMARQUES</b>	<b>86</b>
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		<b>88</b>
<b>REFERENCES</b>		<b>91</b>
<b>ANNEXE A</b>		<b>98</b>
<b>ANNEXE B</b>		<b>100</b>
<b>ANNEXE C</b>		<b>104</b>
<b>ANNEXE D</b>		<b>105</b>
<b>ANNEXE E</b>		<b>108</b>
<b>ANNEXE F</b>		<b>109</b>
<b>ANNEXE G</b>		<b>114</b>

## LISTE DES TABLEAUX

**Tableau 3.1** Sensibilité du maillage  $q = 0.006 \text{ cm}^3 / \text{min}$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $K = 10^{-13} \text{ m}^2$ ,  
 $R_{\mu} = 271$  and  $D\rho = 116 \text{ Kg/m}^3$

**Tableau 4.1** Sensibilité du maillage pour  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  
 $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 25 \times 10^{-10}$ ,  $Q_{wc}^* = 0$

**Tableau 3.2** Valeurs des coefficients dans la corrélation (équation 3.17)

## LISTE DES FIGURES

**Figure 1.1** Volume élémentaire représentatif (V.E.R)

**Figure 1.2** Expérience de base sur la mouillabilité

**Figure 1.3** Forces agissant à l'interface eau/huile au contact du solide (tube)

**Figure 1.4** Courbe de pression capillaire type

**Figure 1.5** Courbes typiques de perméabilités relatives du type eau/huile

**Figure 1.6** Coupe schématique d'un réservoir d'hydrocarbures

**Figure 1.7** Différents types de gisements

**Figure 1.8** Différents types de puits

**Figure 1.9** Cône latéral

**Figure 1.10** Cône vertical

**Figure 1.11** Différentes situations de cône

**Figure 1.12** Situation de coning d'eau (crête) dans le cas d'un puits horizontal

**Figure 3.1** Schéma du modèle physique et du système de coordonnées

**Figure 3.2** Comparaison des résultats de la simulation numérique et de la théorie de Buckley - Leverett  $K=10^{-13} \text{ m}^2$ ,  $\phi=0.2$ ,  $R_{\mu} = 271$  and  $D\rho=123 \text{ Kg/m}^3$

**Figure 3.3** Vue 3D de l'interface eau -huile à  $t^*=1$ ,  $Da=10^{-11}$ ,  $\phi=0.2$ ,  $q^*=10^{-3}$

**Figure 3.4** Effet du paramètre gravité - viscosité  $Da=10^{-11}$ ,  $\phi=0.2$ ,  $q^*=10^{-3}$

**Figure 3.5** Effet de la porosité  $Da=10^{-11}$ ,  $N=10^{-3}$ ,  $q^*=10^{-3}$

**Figure 3.6** Effet du nombre de Darcy sur le mouvement de l'interface eau - huile  $\phi=0.2$ ,  $N=10^{-3}$ ,  $q^*=10^{-3}$

**Figure 3.7** Effet du débit de production sur le mouvement de l'interface eau - huile  $Da=10^{-11}$ ,  $\phi=0.2$ ,  $N=10^{-3}$

**Figure 3.8** Temps de percée d'eau  $\phi=0.2$

**Figure 3.9** Pourcentage d'huile récupérée jusqu'au moment de la percée d'eau

**Figure 3.10** Evolution du débit adimensionnel de production d'huile  $\phi=0.2$ ,  $q^*=10^{-3}$

**Figure 3.11** Evolution du débit adimensionnel de production d'huile  $Da=10^{-11}$ ,  $N=10^{-3}$ ,  $q^*=10^{-3}$

**Figure 4.1** Modèle physique et système de coordonnées

**Figure 4.2** Schéma de la technique de double complétion

**Figure 4.3a** Maillage utilisé pour la simulation du problème du coning d'eau

**Figure 4.3b** Comparaison des résultats de simulation numérique avec le travail publié de Yang

**Figure 4.4** Représentation en 3D de l'interface eau - huile,  $t^* = 0.6 \times 10^{18}$ ,  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

**Figure 4.4(bis)** Représentation en 3D de l'interface eau - huile,  $t^* = 0.95 \times 10^{18}$ ,  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

**Figure 4.5** a/ Vue 3D de l'interface eau - huile en double complétion à  $t^* = 1.261 \times 10^{18}$   
b/ Evolution de l'interface eau - huile en double complétion  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $Q_{wc}^* = 15 \times 10^{-10}$

**Figure 4.6** a/ Vue 3D de l'interface eau - huile en simple complétion pour  $Q_{oc}^* = 20 \times 10^{-10}$   
b/ Effet du débit de production d'huile sur l'interface eau - huile  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.95 \times 10^{18}$

**Figure 4.7** Effet du rapport de mobilité sur l'interface eau - huile  
 $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.70 \times 10^{18}$

**Figure 4.8** Effet de la différence adimensionnelle de densité sur l'interface eau - huile  
 $M = 2$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.92 \times 10^{18}$

**Figure 4.9** Effet du rapport d'anisotropie sur l'interface eau - huile  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.69 \times 10^{18}$

**Figure 4.10** Effet de la perméabilité horizontale sur l'interface eau - huile

$$M = 2, ND\rho = 0.1, \phi = 0.2, Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}, Da_V = 8 \times 10^{-17}, t^* = 0.40 \times 10^{18}$$

**Figure 4.11** Temps de percée d'huile en fonction du débit de production d'eau

$$M = 2, ND\rho = 0.1, Da_H = 4 \times 10^{-16}, Ra = 0.2, \phi = 0.2, Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$$

**Figure 4.12** Influence du débit adimensionnel de production d'huile  
sur le temps de percée d'eau

$$M = 2, ND\rho = 0.1, Da_H = 4 \times 10^{-16}, Ra = 0.2, \phi = 0.2$$

**Figure 4.13** Influence du rapport de mobilité sur le temps de percée d'eau

$$ND\rho = 0.1, Da_H = 4 \times 10^{-16}, Ra = 0.2, \phi = 0.2, Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$$

**Figure 4.14** Influence de la différence adimensionnelle de densité sur le temps de percée

$$\text{d'eau } M = 2, Da_H = 4 \times 10^{-16}, Ra = 0.2, \phi = 0.2, Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$$

**Figure 4.15** Influence des caractéristiques de la roche réservoir sur le temps de percée d'eau

## NOMENCLATURE

BT	temps de percée d'eau, s
BT*	temps de percée d'eau adimensionnel , $BT^* = (BT \mu_w) / (\rho_w h_o^2)$
Da	nombre de Darcy, $Da = K/h_o^2$
Da <sub>H</sub>	nombre de Darcy horizontal, $Da_H = k_H/h_o^2$
Da <sub>V</sub>	nombre de Darcy vertical, $Da_V = k_V/h_o^2$
Dρ	différence de densité volumique, $D\rho = \rho_w - \rho_o$ , kg/m <sup>3</sup>
$\vec{g}$	vecteur accélération de la pesanteur, m/s <sup>2</sup>
h	hauteur totale du domaine physique, $h=h_o+h_w$ , m
h <sub>o</sub>	hauteur de la zone huile, $h_o=h-h_w$ , m
h <sub>w</sub>	hauteur de la zone eau, m
h*	hauteur totale adimensionnelle du domaine physique
h <sub>o</sub> *	hauteur adimensionnelle de la zone huile
h <sub>p</sub>	hauteur des perforations dans la zone huile, m
h <sub>p</sub> *	hauteur adimensionnelle des perforations dans la zone huile
h <sub>w</sub> *	hauteur adimensionnelle de la zone eau
h <sub>wp</sub>	hauteur des perforations dans la zone eau, m
h <sub>wp</sub> *	hauteur adimensionnelle des perforations dans la zone eau
K	perméabilité absolue, m <sup>2</sup>
$\bar{K}$	tenseur de perméabilités, m <sup>2</sup>
k <sub>H</sub>	perméabilité horizontale, m <sup>2</sup>
K <sub>l</sub>	perméabilité effective à la phase l, m <sup>2</sup>
$\bar{K}_l$	tenseur de perméabilité effective à la phase l, m <sup>2</sup>

- $K_{rl}$  perméabilité relative à la phase  $l$
- $K_{rf}$  perméabilité relative au fluide  $f$
- $K_{rl}$  perméabilité relative à la phase  $l$
- $kr_{oiw}$  perméabilité relative à l'huile à la saturation irréductible d'eau
- $kr_{wor}$  perméabilité relative à l'eau à la saturation résiduelle d'huile
- $k_v$  perméabilité verticale,  $m^2$
- $L$  dimensions de la cavité dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $m$
- $M$  rapport de mobilité,  $M = RK_{rl} \mu_o / \mu_w$
- $M_f$  mobilité du fluide  $f$ ,  $M_f = \frac{K K_{rf}}{\mu_f}$ ,  $m^2/(Pa.s)$
- $N$  nombre de gravité viscosité,  $N = (\rho_w - \rho_o) / (\rho_w R_\mu)$
- $\vec{n}$  vecteur normal à la frontière
- $ND\rho$  différence adimensionnelle de densité,  $ND\rho = (\rho_w - \rho_o) / \rho_w$
- $N\rho_w$  expression adimensionnelle,  $N\rho_w = \rho_w g h_o / P_{woc}$
- $P$  pression,  $Pa$
- $P_{aq}$  pression au fond de l'aquifère,  $Pa$
- $P_c$  pression capillaire,  $Pa$
- $P_c^*$  pression capillaire adimensionnelle,  $P_c^* = (P_c - D\rho g z) / (D\rho g h_o)$
- $P_l$  pression dans la phase  $l$ ,  $Pa$
- $P_l^*$  pression adimensionnelle de la phase  $l$ ,  $P_l^* = (P_l + \rho_w g z - P_{woc}) / (D\rho g h_o)$
- $P_{nw}$  pression dans le fluide non mouillant,  $Pa$
- $P_w$  pression dans le fluide mouillant,  $Pa$
- $P_{woc}$  Pression initiale à l'interface de contact eau - huile,  $Pa$

$q$	débit de production, $m^3/s$
$q^*$	débit de production adimensionnel, $q^* = q \rho_w / (\mu_w h_o)$
$Q_a$	débit de production total, $m^3/s$
$Q_a^*$	débit adimensionnel de production total, Equations (4.21) et (4.22)
$\bar{Q}_a$	débit de production total par unité de volume du réservoir, $s^{-1}$
$\bar{Q}_{la}$	débit de production de la phase $l$ par unité de volume du réservoir, $s^{-1}$
$\bar{Q}_{la}^*$	débit adimensionnel de production de la phase $l$
$r$	coordonnée radiale, m
$r^*$	coordonnée radiale adimensionnelle, $r^* = r/h_o$
$Ra$	rappor d'anisotropie, $Ra = Da_v / Da_H$
$r_e$	rayon total du domaine physique, m
$r_e^*$	rayon total adimensionnel
$Rec_{BT}$	récupération au temps de percée d'eau
$Rkr$	rappor de perméabilités relatives, $Rkr = kr_{wor} / kr_{oiw}$
$r_w$	rayon du puits, m
$r_w^*$	rayon adimensionnel du puits
$R_\mu$	rappor de viscosité, $\mu_o / \mu_w$
$S_g$	saturation en gaz
$S_l$	saturation de la phase $l$ , $l = o, w$
$S_o$	saturation en huile
$S_{or}$	saturation résiduelle d'huile
$S_w$	saturation en eau

$S_{wr}$	saturation irréductible en eau
$S_{wi}$	saturation irréductible en eau
$t$	temps, s
$t^*$	temps adimensionnel, $t^* = (t \mu_w) / (\rho_w h_0^2)$ (chp. 3)
$t^*$	temps adimensionnel, $t^* = P_{woc} t / \mu_w$ (chp. 4)
$\bar{U}$	vecteur vitesse de filtration, m/s
$\bar{U}_l$	vecteur vitesse de la phase $l$ , m/s
$u_l$	vitesse Darcienne relative à la phase $l$ , m/s
$\bar{V}_l$	vecteur de filtration de la phase $l$ , m/s
$x$	direction transversale, m
$X^*$	direction transversale adimensionnelle, $x/h$
$z$	coordonnée verticale, m
$z^*$	coordonnée verticale adimensionnelle, $z^* = z/h_0$
$Z^*$	coordonnée verticale adimensionnelle, $z/h$
$Z_{max}$	hauteur du cône d'eau au centre de la cavité, m

### Symboles grecques

$\phi$	porosité
$\mu$	viscosité dynamique, Pa.s
$\mu_l$	viscosité dynamique de la phase fluide $l$ , Pa.s
$\rho$	densité volumique, $kg/m^3$
$\rho_l$	densité volumique de la phase $l$ , $kg/m^3$
$\sigma_{os}$	Tension interfaciale entre l'huile et le verre, N/m

$\sigma_{ws}$	Tension interfaciale entre l'eau et le verre, N/m.
$\sigma_{ow}$	Tension interfaciale entre l'huile et l'eau, N/m.
$\theta$	Angle de raccordement (contact) entre l'interface huile/eau et le solide, rd
$\Delta t$	pas temporel, s
$\nabla$	opérateur gradient

**Indices et exposants**

$a$	zone de complétion, $a=oc,wc$
$l$	phase, $l=o,w$
$g$	gaz
$o$	huile
$w$	eau
$wp$	eau produite
*	adimensionnel

## INTRODUCTION GENERALE

Les écoulements à phases multiples dans les milieux poreux sont rencontrés dans diverses disciplines telles que : le génie pétrolier, l'hydrologie et les sciences et techniques de l'environnement. Ces écoulements peuvent être de deux types miscible ou non selon les fluides en présence [Dullien, 1992, Bear, 1988, Scheidegger, 1972]. Généralement, l'écoulement de fluides non miscibles est présent dans toutes les roches réservoirs. Notre attention est portée dans ce présent travail à ce dernier type d'écoulement.

Le plus souvent, les fluides pouvant être présents dans les réservoirs d'hydrocarbures sont : l'eau, le pétrole (le plus souvent appelé huile dans l'industrie pétrolière) et le gaz. Cependant, dans plusieurs situations l'eau et l'huile sont les seules fluides contenus. L'huile de la roche réservoir est acheminée à la surface terrestre par drainage naturel via un puits ; en général, deux types de puits sont employés : horizontal ou vertical. Lorsque la roche réservoir est soutenue par un aquifère, ce dernier garantit un maintien de pression et permet le drainage de l'huile vers le puits de production. Dans ce cas, deux zones sont distinguées : la première correspond à l'aquifère et la seconde à la roche réservoir. Avant la mise en production d'un puits, l'interface de contact séparant l'eau (de l'aquifère) et l'huile (de la roche réservoir) était horizontale. Avec la mise en production d'un puits, l'interface tend à se déformer sous forme d'un cône d'où l'appellation dans l'industrie pétrolière par phénomène du cône (coning). Cette interface se rapprochera davantage du puits, pendant la période d'exploitation, entraînant l'entrée en production d'eau par un mouvement ascendant. Les réservoirs pétroliers connectés à un aquifère ont l'avantage de permettre une récupération d'huile par la seule énergie naturelle de l'aquifère (récupération primaire) grâce à son soutien dans le maintien de pression. Cependant l'empiétement d'eau (percée d'eau) dans le puits de production d'huile, causé par le gradient de pression autour du puits, entraînera une baisse significative de la production d'huile et une augmentation de la production d'eau. Les coûts des opérations de séparation de l'huile et de l'eau associés à la production augmenteront ainsi davantage. A titre d'exemple, en 2001, la production de pétrole brut enregistrée dans l'état du Colorado est estimée à 22.5 million de barils contre 360 million de barils d'eau [[www.oil-gas.state.co.us/statistics](http://www.oil-gas.state.co.us/statistics),1998-2001]. Le coût de l'entrée d'eau en production dans l'industrie du pétrole et du gaz est évalué à 45\$ Milliards par an [[www.halliburton.com](http://www.halliburton.com), 2001].

Le phénomène du coning d'eau a été un sujet de recherche pour plusieurs auteurs et continue à susciter l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Les travaux les plus remarquables

sont ceux de Muskat et Wickoff (1935), Sobocinski et Cornelius (1965), Bournazel et Jeanson (1971), Yang et Wattenbarger (1991). Les préoccupations sont multiples : le calcul du temps de percée d'eau (temps mis par l'eau pour atteindre les perforations du puits), la détermination du débit critique permettant d'éviter la percée d'eau et le développement de corrélations pour le calcul du temps de percée d'eau et du débit critique [Chanay et al. (1956), Meyer and Garder (1954), Chierici et al. (1964), Schols (1972), Kuo and Debbisay (1983), Hoyland et al. (1986), Giger (1989), Chaperon (1986), Papatzacos et al. (1989), Yang and Wattenbarger (1991), Suprunowicz and Butler (1992)]. Bien que des études analytiques ou encore expérimentales aient été entreprises, la modélisation numérique reste le plus souvent l'outil indispensable pour la prédiction. Cette tendance est due d'une part aux propriétés variables des réservoirs dans l'espace et dans le temps et aussi à leurs grandes étendues.

Plusieurs solutions techniques ont été développées dans le but de minimiser les conséquences du cône d'eau dans les réservoirs pétroliers. Ces méthodes englobent la production à des débits inférieurs à la valeur critique, l'éloignement des perforations du puits de l'interface de contact eau - huile ou la création de zones de blocage d'eau autour du puits par injection de polymères ou de gels. Malheureusement, toutes ces méthodes conventionnelles ne résolvent pas le problème de la percée d'eau. Une autre technique utilisée pour les réservoirs assujettis au cône d'eau est l'emploi de puits horizontaux. Cependant, les puits horizontaux eux-mêmes n'échappent pas à ce problème. Comme pour les puits verticaux, le débit critique dans le cas des puits horizontaux est trop bas pour toute fin économique. Une enquête poussée sur les coûts et les profits des puits horizontaux révèle parfois des raisons moins convaincantes quant à leur utilisation [Chugbo et al., 1989 ; Irrgang, 1994]. Parmi les difficultés rencontrées dans l'utilisation des puits horizontaux, on peut citer : vulnérabilité à une mauvaise cimentation et les contraintes imposées par la technologie de forage.

La technologie de la double complétion avec des perforations dans la zone eau, appelée "Downhole water sink" (DWS), a été exploitée pour stabiliser l'interface eau - huile et ainsi donc contrôler le cône d'eau. Cette technologie a été implantée dans certains champs pétroliers aux Etats Unies [Wojtanowicz et al., 1991 ; Swisher and Wojtanowicz, 1995] et a prouvé qu'une production d'huile sans eau est possible avec des débits beaucoup plus élevés que ceux atteints avec les puits à simple complétion. Les résultats des champs d'application indiquent que la technologie de la double complétion non seulement permet d'éviter le cône

d'eau, mais, elle est capable de renverser le cône après la percée d'eau. Dans cette technique, les perforations eau et huile sont séparées par un double tube. Comme résultats, l'huile produite est sans eau. La technologie DWS a été étudiée théoriquement [wojtanowicz et al., 1991 ; Swisher and Wojtanowicz, 1995] et expérimentalement [Shirman and wojtanowicz, 1997 ; 1997]. Le travail le plus remarquable sur la double complétion est celui de Shirman et wojtanowicz (1997). Ils ont entrepris une étude expérimentale par utilisation du modèle de Hele – Shaw. Leurs résultats indiquent que la production d'huile avec cette technique a un mérite économique considérable et est faisable techniquement.

Notre travail dans la présente thèse, est une contribution à l'étude du phénomène du coning d'eau impliquant deux phases fluides eau et huile. Deux cas sont proposés :

Le premier concerne une situation de cône d'eau avec puits horizontal. Par une modélisation numérique, les effets de paramètres caractérisant la roche réservoir, les fluides en présence et le rythme de production, sur le mouvement de l'interface eau - huile, le temps de percée d'eau et le pourcentage d'huile récupérée sont discutés et analysés. La nouveauté dans ce travail est l'élaboration d'un code de calcul permettant de prédire le comportement de l'interface à tout instant de la production.

Dans le second cas, la technologie de la double complétion "Downhole Water sink", dans le cas de puits verticaux, est simulée par une approche numérique. Le comportement de l'interface eau - huile, le calcul du temps de percée d'eau sont présentés et commentés. Le cas de la simple complétion est aussi étudié, il servira de référence pour voir l'apport de la double complétion et ses perspectives. Notre apport supplémentaire est la prise en compte de la plupart des paramètres influençant la production des réservoirs soutenus par un aquifère et la prédiction du temps de percée d'eau.

Quatre chapitres constituent la présente thèse. Dans le premier chapitre sont rappelées quelques notions de base sur les écoulements à phases multiples dans les milieux poreux, définitions des gisements d'hydrocarbures, différents procédés de récupération et présentation du phénomène du coning d'eau. Une recherche bibliographique poussée sur le phénomène du cône d'eau avec synthèse des travaux antérieurs est exposée au second chapitre. Notre contribution dans l'étude de ce phénomène, dans le cas de puits horizontaux, est présenté au troisième chapitre et celle relative au cas de puits vertical avec utilisation de la technologie de double complétion est exposée au quatrième chapitre.

## CHAPITRE UN

### RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS SUR LES ECOULEMENTS POLYPHASIQUES DANS LES MILIEUX POREUX

#### 1.1 INTRODUCTION

Les écoulements polyphasiques dans les milieux poreux sont rencontrés dans des domaines d'applications variés. Ils sont mentionnés le plus souvent en hydrologie et en génie pétrolier. Les fluides qui s'écoulent peuvent être miscibles ou non, on s'intéressera uniquement au deuxième type d'écoulement. Dans le présent chapitre, on rappellera quelques définitions caractérisant les milieux poreux et les écoulements qui s'y produisent. Puisque dans la présente thèse ceux sont les gisements d'hydrocarbures qui nous intéressent, ceux-ci seront présentés. L'étude du phénomène du cône (coning) est l'objectif visé dans le présent travail, celui sera décrit.

#### 1.2 MILIEUX POREUX

Un milieu poreux est un solide contenant des pores. Ces pores sont des espaces vides pouvant être connectés à plusieurs autres pores (pores interconnectés), ou séparés (pores isolés). Les paramètres du milieu poreux sont les propriétés complètement déterminées par lui, et ne dépendent d'aucune autre propriété [Dullien,1992]. A l'échelle macroscopique, les paramètres de l'espace poreux les plus importants sont : la porosité et la perméabilité.

##### □ La porosité

La fraction du volume des pores interconnectés et séparés est appelée porosité totale. Par contre la fraction des seuls pores connectés est appelée porosité effective. Le fluide s'écoule seulement à travers les pores connectés. La porosité peut varier de presque zéro jusqu'à une valeur proche de l'unité [Dana, 1999]. La porosité effective ( $\phi$ ) des gisements d'hydrocarbures varie entre moins de 1% et au delà de 40% [Cossé, 1993]. La porosité effective est considérée [Cossé, 1993] :

- Faible si  $\phi < 5\%$
- Médiocre si  $5\% < \phi < 10\%$
- Moyenne si  $10\% < \phi < 20\%$
- Bonne si  $20\% < \phi < 30\%$

- Excellente si  $\phi > 30\%$

### □ La perméabilité

La capacité d'un milieu poreux à laisser un fluide, avec lequel il est saturé, à s'écouler à travers les pores est appelée perméabilité. Le milieu poreux peut être anisotrope (la perméabilité dépend de la direction considérée) ou isotrope (la perméabilité est la même dans toutes les directions). La perméabilité des gisements d'hydrocarbures varie de 0.1mD (millidarcy) et à plus de 10D (Darcy). Elle (K) est considérée [Cossé, 1993] :

- très faible si  $K < 1\text{mD}$
- faible si  $1\text{mD} < K < 10\text{mD}$
- médiocre si  $10\text{mD} < K < 50\text{mD}$
- moyenne si  $50\text{mD} < K < 200\text{mD}$
- bonne si  $200\text{mD} < K < 500\text{mD}$
- excellente si  $K > 500\text{mD}$

## 1.3 ECOULEMENTS MONOPHASIQUES DANS LES MILIEUX POREUX

### □ Loi de Darcy

Les travaux d'Henri Darcy en hydrologie dans les fontaines de Dijon, sur l'écoulement unidirectionnel dans un milieu uniforme, ont révélé une proportionnalité entre le débit d'écoulement et la différence de pression appliquée. Les nombreux travaux réservés à la loi de Darcy ont permis sa généralisation pour un écoulement tridimensionnel dans un milieu poreux isotrope et homogène. Ces travaux ont conduit à l'expression suivante :

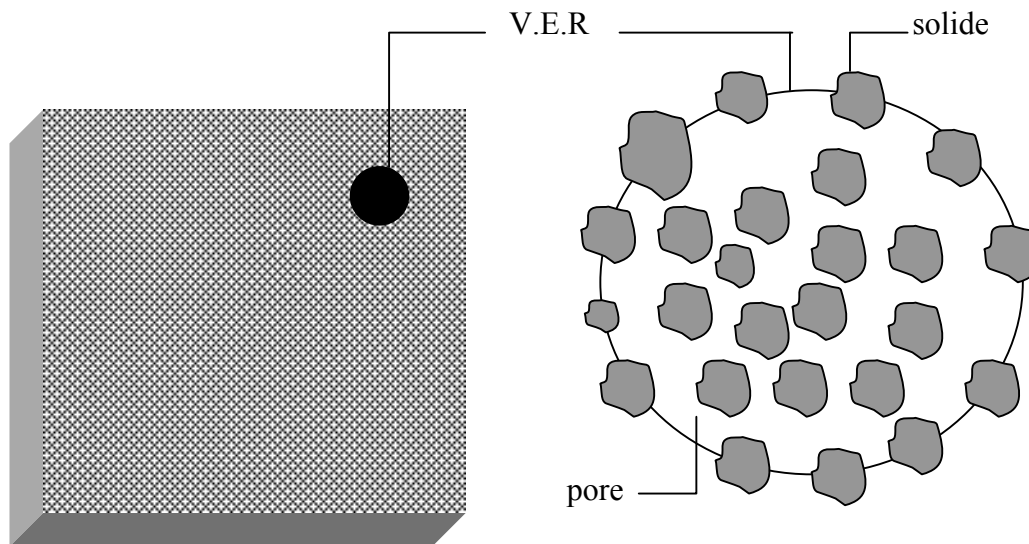
$$\vec{U} = -\frac{K}{\mu}(\nabla P + \rho \vec{g}) \quad (1.1)$$

Où  $\vec{U}$  est le vecteur vitesse de filtration (ou de Darcy),  $\vec{g}$  est le vecteur d'accélération gravitationnelle,  $\mu$  désigne la viscosité dynamique du fluide et  $\rho$  sa masse volumique, P la pression hydrostatique et K la perméabilité du milieu poreux. Les milieux poreux étant généralement anisotropes, un tenseur de perméabilité d'ordre 2 a été introduit [Dana, 1999] :

$$\vec{U} = -\frac{\bar{K}}{\mu}(\nabla P + \rho \vec{g}) \quad (1.2)$$

### □ Notion de volume élémentaire représentatif

Par analogie avec la notion de particule fluide, on définit pour les milieux poreux un volume élémentaire représentatif (V.E.R) contenant un grand nombre de pores. Les dimensions caractéristiques du volume seront grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores mais petites par rapport à l'encombrement du milieu. La figure 1.1 illustre un volume élémentaire représentatif à travers un domaine poreux.



**Figure 1.1** Volume élémentaire représentatif (V.E.R)

### □ Validité de la loi de Darcy

La loi de Darcy propose une relation linéaire entre la vitesse de filtration et le gradient de pression. Cette linéarité n'est respectée que pour une gamme de débit d'écoulement où les effets inertiels et de turbulence sont négligeables. Par analogie avec les écoulements dans les conduites, le nombre de Reynolds a été introduit et utilisé. Il est basé sur la taille moyenne des pores. Suivant le nombre de Reynolds, trois régimes d'écoulement peuvent être spécifiés [Bear, 1988] :

- Pour un nombre de Reynolds compris entre 1 à 10, l'écoulement est laminaire et prédominé par les forces de viscosité : c'est le régime Darcien. La loi de Darcy est valide uniquement dans cette zone.
- Une zone de transition est observée pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieurs à 10. Le passage graduel vers la zone de turbulence se constate à la limite supérieure de cette zone de transition atteinte à un nombre de Reynolds de l'ordre de 100. Ce régime est appelé régime d'écoulement de Forchheimer.

- Le régime turbulent prend naissance pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieurs à 100.

#### 1.4 ECOULEMENTS A PHASES MULTIPLES DANS LES MILIEUX POREUX

Les écoulements à phases multiples dans les milieux poreux sont généralement séparés en deux groupes [Dullien, 1992, Bear, 1988, Scheidegger, 1972] :

- Déplacement miscible. Les fluides sont complètement solubles les uns dans les autres, ce type d'écoulement est généralement appelé dispersion hydrodynamique.
- Déplacement non miscible. Les fluides généralement s'écoulent simultanément dans le milieu poreux.

C'est à ce deuxième type d'écoulement que l'on s'intéressera. Le nombre de phases pouvant être présentes est de deux ou trois. Dans les gisements d'hydrocarbures, on distingue l'eau, l'huile et le gaz.

##### □ Saturations en fluides

La saturation d'un fluide donné est la fraction du volume poreux occupé par un tel fluide. On définit :

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} \quad (1.3)$$

$$S_o = \frac{V_o}{V_p} \quad (1.4)$$

$$S_g = \frac{V_g}{V_p} \quad (1.5)$$

$V_w$ ,  $V_o$ ,  $V_g$  sont respectivement les volumes d'eau, d'huile et de gaz présents dans le volume poreux  $V_p$ .

Il s'ensuit que pour un milieu poreux complètement saturé :

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (1.6)$$

Les équations précédentes expriment une valeur moyenne pour la saturation de chaque fluide et ne donnent pas d'indication sur la distribution actuelle des fluides dans l'espace poreux. Il faut noter que la distribution de chaque fluide est d'une importance fondamentale dans la détermination des propriétés dynamiques, en particulier la facilité (relative à tout autre fluide

présent) avec laquelle il se déplace à travers l'espace poreux : c'est le concept de perméabilité relative.

### □ Mouillabilité

Pour expliquer la notion de mouillabilité, liée aux phénomènes de surface, une expérience de base est exposée dans ce paragraphe. Dans un bocal en verre contenant de l'huile, est immergée une pipette par le biais de laquelle une goutte d'eau est déposée au fond de ce bocal Fig. 1.2(a). Une courbure de la surface d'eau, en contact avec l'huile, est observée. Cette courbure s'appelle un ménisque. Un agrandissement de la forme de ce ménisque est représenté sur la figure. 1.2(b). On définit les quantités suivantes :

$\sigma_{os}$  Tension interfaciale entre l'huile et le verre (force par unité de longueur).

$\sigma_{ws}$  Tension interfaciale entre l'eau et le verre.

$\sigma_{ow}$  Tension interfaciale entre l'huile et l'eau.

$\theta$  Angle de raccordement (contact) entre l'interface huile/eau et le solide (le fond du bocal). Il est mesuré dans le fluide le plus dense [Bear, 1988] .

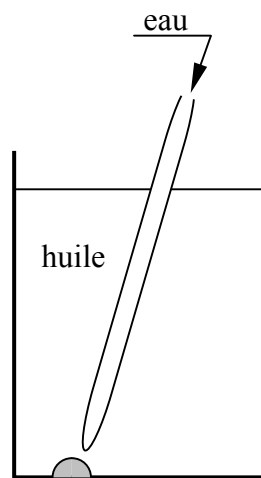


Fig. 1.2(a)

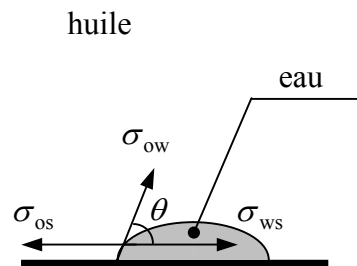


Fig. 1.2(b)

**Figure 1.2** Expérience de base sur la mouillabilité

L'équilibre mécanique impose (équation de Young) :

$$\sigma_{ow} \cos \theta = \sigma_{os} - \sigma_{ws} \quad (1.7)$$

- Pour  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  l'eau mouille préférentiellement la surface du solide (bocal en verre), l'eau représente le fluide mouillant et l'huile constitue le fluide non mouillant.

- Pour  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  l'huile mouille préférentiellement la surface du solide (bocal en verre), l'huile est le fluide mouillant et l'eau le fluide non mouillant.
- Pour  $\theta = 90^\circ$ , la surface du solide est considérée de mouillabilité neutre.

Dans les réservoirs d'hydrocarbures, l'eau est le plus souvent le fluide mouillant pour un système huile/eau. Dans une situation eau/gaz, l'eau est toujours le fluide mouillant. Dans le cas huile/gaz, l'huile est le fluide mouillant.

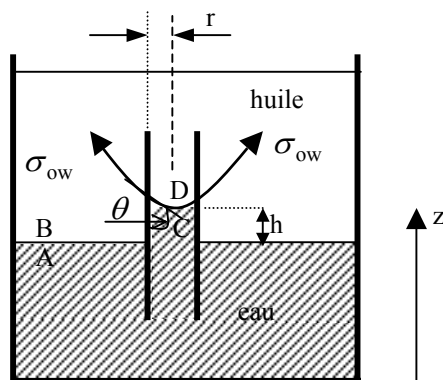
### □ Capillarité

Lorsque deux fluides non miscibles sont en présence dans les interstices d'un milieu poreux, il existe une discontinuité de pression à travers l'interface qui les sépare. Cette discontinuité est appelée pression capillaire ( $P_c$ ), elle est donnée par la relation suivante :

$$P_c = P_{nw} - P_w \quad (1.8)$$

$P_w$  est la pression dans le fluide mouillant et  $P_{nw}$  désigne la pression dans le fluide non mouillant.

En statique des fluides, la pression capillaire peut être calculée en considérant le bilan des forces dans un bocal rempli d'eau (w) et d'huile (o). Un court tube capillaire de section constante est complètement plongé dans les liquides (figure 1.3).



**Figure 1.3** Forces agissant à l'interface eau/huile au contact du solide (tube)

L'équilibre hydrostatique impose dans ce cas :

$$P_D - P_C = (P_B - P_A) + g(\rho_w - \rho_o)h \quad (1.9)$$

La pression capillaire, résultant du contact de l'interface eau/huile et de la paroi solide du tube, est équilibrée par la composante verticale des forces de tension interfaciale :

$$2\pi r \sigma_{ow} \cos \theta = P_c \pi r^2 \quad (1.10)$$

Or par définition, la pression capillaire est donnée par la relation (1.8) qui pour le présent cas s'écrit :

$$P_c = P_D - P_C \quad (1.11)$$

En combinant les équations (1.9), (1.10) et (1.11), on trouve :

$$P_c = (P_B - P_A) + g(\rho_w - \rho_o)h = \frac{2\sigma_{ow} \cos \theta}{r} \quad (1.12)$$

Si le bocal est assez large  $P_B = P_A$ , la relation (1.12) s'écrit alors :

$$P_c = g(\rho_w - \rho_o)h = \frac{2\sigma_{ow} \cos \theta}{r} \quad (1.13)$$

Dans les milieux poreux naturels, la pression capillaire dépend de la porosité, de la perméabilité, de la tension interfaciale, de l'angle de contact ainsi que du volume relatif aux phases présentes dans ce domaine, c.à.d, la saturation des fluides. Elle dépend également du processus de déplacement : drainage ou imbibition.

#### □ **Drainage et imbibition**

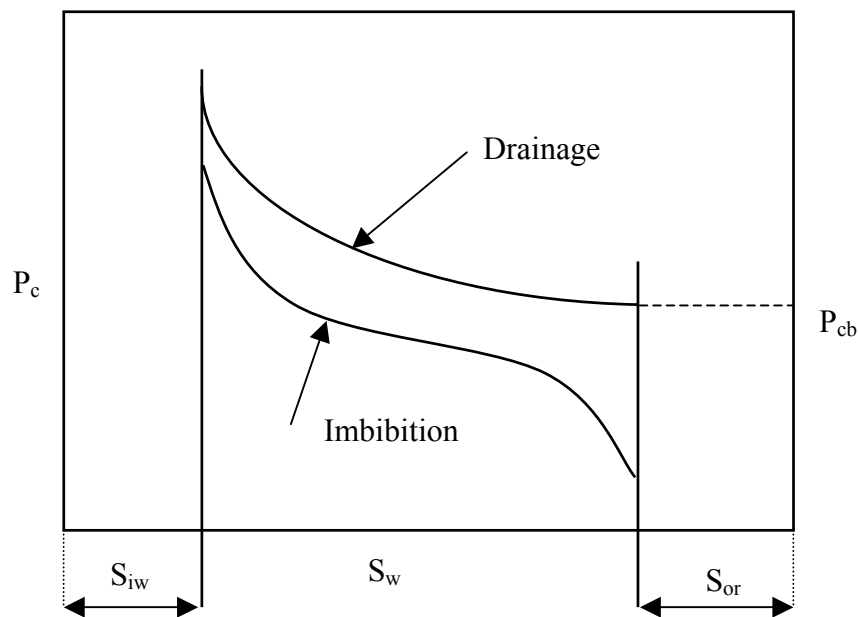
Le processus de déplacement par lequel une phase mouillante sature un domaine poreux initialement occupé par la phase non mouillante est appelé imbibition. Le processus inverse est appelé drainage.

#### □ **Courbes de pression capillaire**

La pression capillaire est une fonction croissante de la saturation en phase non mouillante, ou alternativement, une fonction décroissante de la saturation en phase mouillante. Dans un milieu poreux naturel, la détermination des courbes de pression capillaire n'est possible que par l'expérience [Auriault, 1987]. La détermination de ces courbes se fait sur des échantillons entièrement saturés en phase mouillante. Par la suite, la phase non mouillante est injectée par petits paliers de pression capillaire (drainage). La figure 1.4 montre un exemple de courbe de pression capillaire du type eau (fluide

mouillant)/huile (fluide non mouillant). Le déplacement de la phase mouillante n'est possible qu'à partir d'une certaine valeur de la pression capillaire appelée pression seuil de pénétration  $P_{cb}$ . Si la pression capillaire est augmentée continuellement, la pente de la courbe  $P_c=P_c(S_w)$  sera de plus en plus prononcée jusqu'à ce qu'elle redevienne verticale. Ce comportement a été interprété comme le piégeage de la phase mouillante qui ne peut plus être déplacée par l'augmentation de la pression capillaire. Le point correspondant à cette situation définit la saturation irréductible en phase mouillante.

Si l'on procède maintenant par diminution graduelle de la pression capillaire (imbibition), la phase mouillante va recommencer à s'introduire dans l'échantillon, dans ce cas la phase non mouillante est déplacée. A l'approche d'un certain point de saturation en phase non mouillante aucun déplacement de cette phase n'est possible : c'est la saturation résiduelle en phase non mouillante.



**Figure 1.4** Courbe de pression capillaire type

En l'absence de données expérimentales pour la pression capillaire, il est fait recours aux corrélations. Il n'existe pas de forme générale pour ces relations empiriques, plusieurs fonctions sont rencontrées dans la littérature [Johns, 2002].

□ **Perméabilités effective et relative**

L'expérience montre que l'écoulement simultané de plusieurs phases peut être décrit par la loi de Darcy étendue. Pour un écoulement à trois phases : gaz, eau et huile, elle s'écrit :

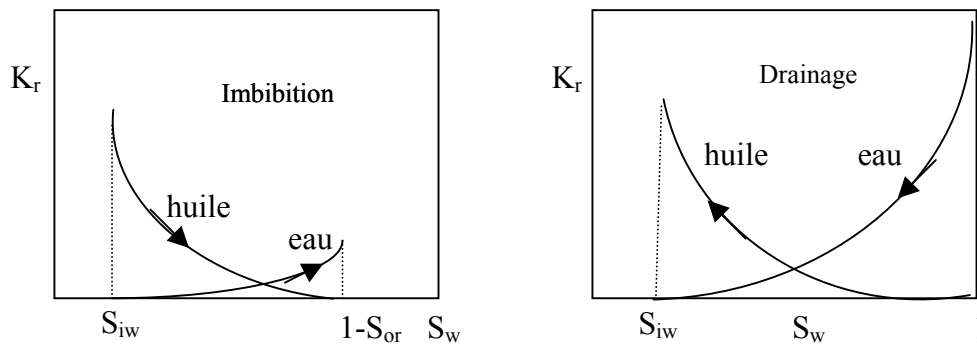
$$\vec{U}_l = -\frac{\bar{K}_l}{\mu_l}(\nabla P_l + \rho_l \vec{g}) \tag{1.14}$$

Avec  $\bar{K}_l$  un tenseur du second ordre qui ne dépend pas uniquement du milieu poreux, mais aussi des saturations en phases fluides.  $\bar{K}_l$  est appelé perméabilité effective à la phase  $l$ .

En plus de la perméabilité effective, la perméabilité relative à chaque phase fluide a été introduite, elle s'exprime comme suit :

$$K_{rl} = \frac{K_l}{K} \tag{1.15}$$

Notons que dans l'équation (1.15) la perméabilité et la perméabilité effective représentent des quantités scalaires plutôt que tensorielles, c.à.d, il est équivalent à dire que la perméabilité relative est indépendante de la direction de l'écoulement. La perméabilité relative dépend des saturations en phases fluides ainsi que du processus de déplacement (drainage ou imbibition). La figure 1.5 illustre des courbes typiques de perméabilité relative en fonction de la saturation pour un système eau/huile.



**Figure 1.5** Courbes typiques de perméabilités relatives du type eau/huile

Pour un processus d'imbibition, l'eau ne commence à s'écouler qu'à partir d'une certaine valeur de saturation en eau supérieure à une valeur critique notée  $S_{iw}$  appelée saturation irréductible

en eau. La perméabilité à l'eau augmente alors à partir de ce point de saturation pour atteindre une valeur maximale correspondant à une saturation en eau égale à  $1-S_{or}$ .  $S_{or}$  correspond à la saturation résiduelle en huile, à partir de ce point aucun déplacement d'huile n'est possible.

Les perméabilités relatives sont déterminées par mesure en laboratoire ou encore avec les techniques modernes par mesure sur site dans les conditions de pression et de température du réservoir. Les techniques de mesure des perméabilités relatives qui ont été employées ou proposées sont fort nombreuses et sont habituellement séparées en deux méthodes :

- mesure en régime permanent d'injection
- mesure en régime transitoire

En l'absence de données expérimentales pour la perméabilité relative, des corrélations sont utilisées. Mais, il n'existe pas de forme générale pour ces corrélations, plusieurs sont rencontrées dans la littérature [Johns, 2002].

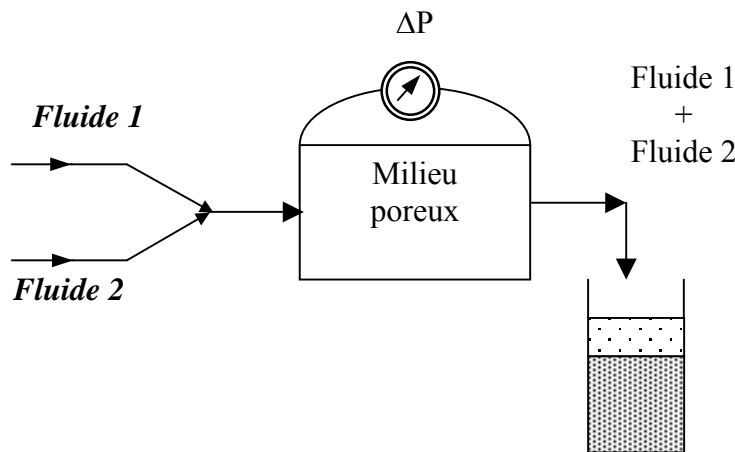
#### □ **Mesure en laboratoire des perméabilités relatives**

Les techniques de mesures des perméabilités relatives qui ont été employées ou proposées sont fort nombreuses et abondantes. Elles sont habituellement séparées en deux groupes [Houpeurt, 1974; Marle, 1981 ; Rose, 1987 ] : (1) mesure en régime permanent d'injection, et (2) mesure en régime transitoire.

#### ❖ **Mesures en régime d'écoulement permanent**

Dans une expérience typique de mesure en régime permanent, les deux fluides sont simultanément injectés à des débits constants et connus à travers un échantillon poreux. Le régime permanent est établi quand le débit en amont est égal à celui en aval de l'échantillon ou si une différence de pression constante est observée à travers l'échantillon testé. L'établissement du régime permanent peut demander de 2 à 40 heures suivant la perméabilité de l'échantillon et la méthode utilisée [Bear, 1988 ; Dullien, 1992].

L'échantillon, initialement saturé par l'un des fluides, est placé dans la cellule d'essais et les deux fluides sont simultanément injectés. Ils s'écouleront à travers l'échantillon jusqu'à ce que le rapport des débits des fluides produits soit égal au rapport des débits des fluides injectés. A partir de cet instant, le système est considéré en régime d'écoulement stationnaire et les saturations en fluides sont considérées stables.



Expérience idéalisée pour la détermination des perméabilités relatives en régime permanent [Dullien, 1992]

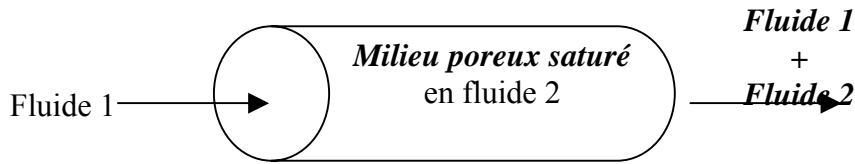
L'augmentation du rapport des débits entraînera la réduction de la saturation en phase mouillante. l'établissement de nouveau du régime stationnaire permet de déterminer les perméabilités relatives correspondant à la saturation obtenue. Ce processus est répété plusieurs fois de suite pour obtenir les courbes de perméabilités relatives  $K_{rl} = K_{rl}(S_l)$  en drainage. Les perméabilités relatives en fonction du degré de saturation sont déterminées par la loi de Darcy généralisée :

$$Q_l = -\frac{KK_{rl}}{\mu_l} A \frac{\Delta P_l}{L}$$

Si à partir de la saturation minimum approchée pour le fluide mouillant, on procède en sens inverse par diminution du rapport des débits, les courbes d'imbibition peuvent être obtenues.

#### ❖ Mesures en régime d'écoulement transitoire

La détermination des perméabilités relatives par la méthode précédente est une tâche délicate et peut nécessiter de longues durées. Les chercheurs ont préféré effectuer des expériences moins complexes telles que le déplacement d'un fluide par un autre et d'en déduire les perméabilités relatives [Marle, 1981]. Dans une expérience de ce type, un fluide est injecté dans un échantillon initialement saturé à la deuxième phase et les perméabilités relatives sont déterminées à partir des fractions recouvrées des deux fluides (notion de fraction volumique  $f_w$  définie en annexe D).



Mesure en régime transitoire des perméabilités relatives

### □ Rapport de mobilité

On définit la mobilité d'un fluide  $f$  par :

$$M_f = \frac{K K_{rf}}{\mu_f} \quad (1.16)$$

$K$  étant la perméabilité du milieu poreux,  $K_{rf}$  la perméabilité relative au fluide  $f$ .

Le rapport de mobilité, dans le cas d'un système eau - huile, est donnée par :

$$M = \frac{(K_{rw}/\mu_w)}{(K_{ro}/\mu_o)} \quad (1.17)$$

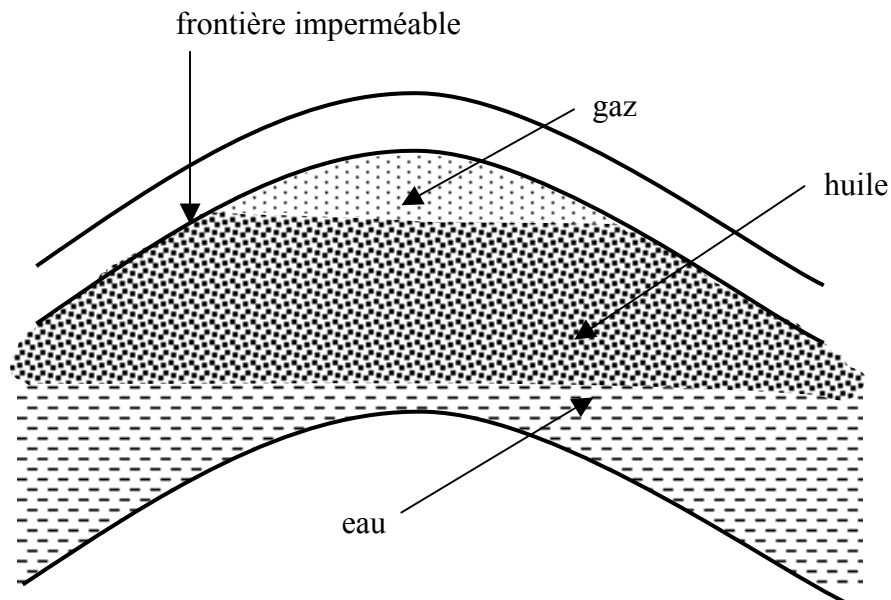
Puisque la perméabilité relative dépend de la saturation,  $K_{rw}$  et  $K_{ro}$  utilisées dans le rapport de mobilité sont définies pour deux saturations distinctes dans le réservoir :

- $K_{rw}$  est la perméabilité relative à l'eau à la saturation résiduelle d'huile  $S_{or}$ , dans ce cas  $S_w = 1 - S_{or}$ .
- $K_{ro}$  est la perméabilité relative à l'huile dans la zone saturée par ce fluide en présence d'une eau immobile, dans ce cas  $S_w = S_{wi}$  et  $S_o = 1 - S_{wi}$ .

## 1.5 GISEMENTS D'HYDROCARBURES

### □ Définition d'un réservoir d'hydrocarbures

Un réservoir est une formation du sous - sol, poreuse et perméable, renfermant une accumulation naturelle, individuelle et séparée d'hydrocarbures (huile (pétrole)/et ou gaz). Il est limité par une barrière de roches imperméables et souvent par une barrière aquifère. L'huile est contenue dans une roche poreuse appelée roche magasin ou roche réservoir. Entre la roche réservoir et la barrière de roches imperméables un dôme de gaz peut s'interposer. La figure 1.6 montre une coupe schématique d'un réservoir d'hydrocarbures.



**Figure 1.6** Coupe schématique d'un réservoir d'hydrocarbures

### □ Définition d'un gisement d'hydrocarbures

Un gisement d'hydrocarbures est formé d'un ou plusieurs réservoirs rocheux souterrains contenant des hydrocarbures liquides et/ou gazeux. Il faut noter que certains gisements sont constitués de plusieurs dizaines ou même de plusieurs centaines de réservoirs, superposés ou proches latéralement.

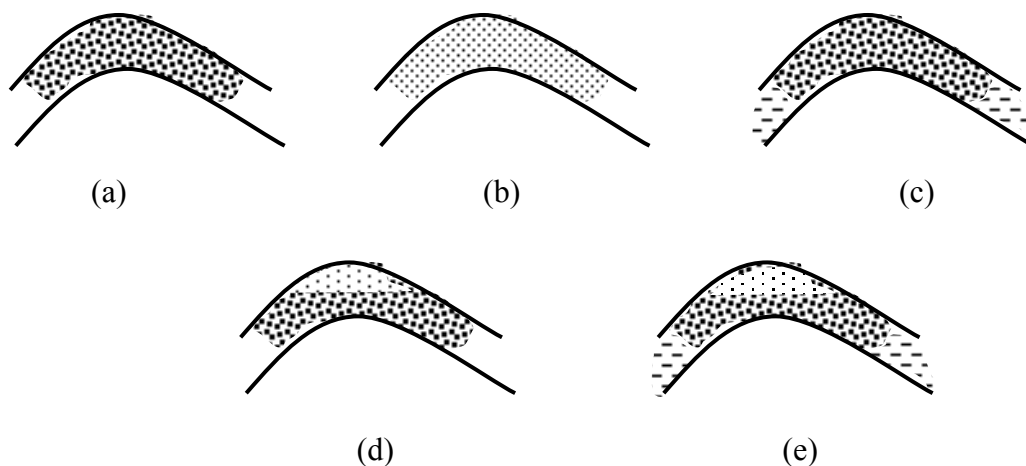
### □ Fluides contenus dans le réservoir

Les fluides pouvant être présents dans le réservoir sont l'huile, le gaz et l'eau. l'arrangement vertical de ces fluides, dans la structure, est gouverné par les forces gravitationnelles.

### □ Différents types de gisements

Les différents types de gisements d'huile qui peuvent être rencontrés sont :

- Gisement d'huile monophasique (figure 1.7a)
- Gisement d'huile avec expansion de gaz dissous (figure 1.7b)
- Gisement d'huile avec aquifère (figure 1.7c)
- Gisement d'huile avec un dôme de gaz (gaz - cap) (figure 1.7d)
- Gisement d'huile avec un gaz - cap et un aquifère (figure 1.7e)

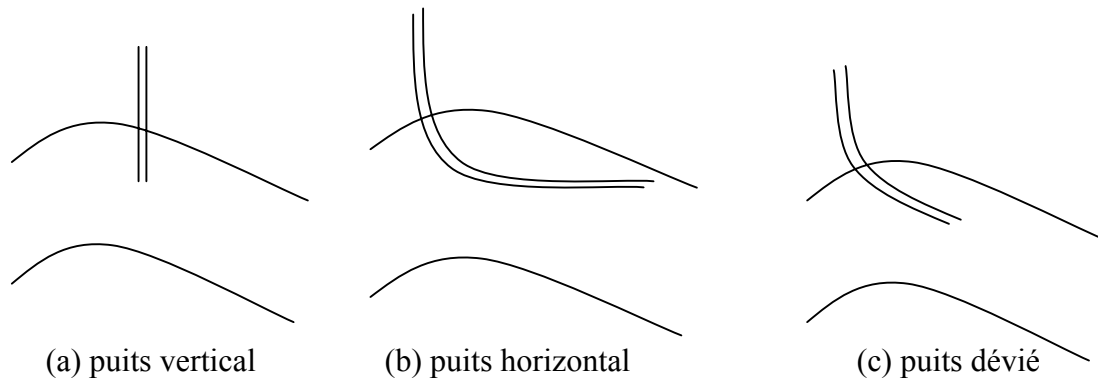


**Figure 1.7** Différents types de gisements

### □ Récupération des hydrocarbures

Des puits sont forés dans les gisements de pétrole afin de drainer cette huile à la surface terrestre. Différents types de puits sont utilisés : verticaux, horizontaux et déviés. L'utilisation de l'un ou de l'autre type de puits s'appuie sur les aspects économiques mais aussi sur les caractéristiques du réservoir. Dans la figure 1.8 sont représentés les trois cas de puits forés dans la roche réservoir. La récupération du pétrole s'effectue par l'un des procédés suivants :

- La récupération primaire
- La récupération secondaire
- La récupération tertiaire



**Figure 1.8** Différents types de puits

### 1. La récupération primaire

L'huile est acheminée à la surface terrestre par drainage naturel, c.à.d, les puits sont ouverts à la production permettant la décompression du réservoir. On distingue trois mécanismes de drainage :

- Expansion de gaz dissous : l'huile contient du gaz dissous qui sera libéré avec la réduction de pression lors de la production. La fraction de gaz augmentera dans ce cas. Les forces de poussée causent l'élévation de la phase gazeuse entraînant l'huile avec. L'efficacité de récupération d'huile par ce mécanisme est comprise entre 5 à 30% des réserves d'huile en place.
- Drainage par un gaz - cap : par ce mécanisme le gaz - cap applique une pression considérable sur la phase huile pour causer son drainage naturel vers le puits de production. Le volume du gaz - cap doit être comparable au volume d'huile afin que le déclin de la pression du réservoir ne soit pas très important. L'efficacité de récupération du pétrole se situe entre 20 à 40 % des réserves d'huile en place.
- Drainage par l'eau : quand le réservoir d'huile est en contact avec un aquifère, ce dernier garantit un maintien de pression et permet le drainage de l'huile vers le puits de production. L'efficacité de récupération d'huile est comprise entre 35 à 75 % des réserves en place.

## 2. La récupération secondaire

La récupération du pétrole par drainage naturel dépasse rarement les 30 à 40% [Cossé, 1993], c'est pourquoi d'autres techniques ont été mises en œuvre afin d'améliorer la récupération. Le mécanisme de récupération secondaire repose sur l'injection de fluides dans le réservoir pour un apport supplémentaire d'énergie. On distingue :

- a. L'injection d'eau : c'est la méthode la utilisée. Les puits d'injection sont placés sous une certaine configuration telle que l'eau draine l'huile vers les puits de production.
- b. L'injection de gaz : c'est un mécanisme similaire à l'injection d'eau excepté que dans ce cas le fluide de drainage est du gaz naturel.

## 3. La récupération tertiaire ou encore améliorée

L'injection d'eau ou de gaz non miscibles dans la roche réservoir conduit le plus souvent à une récupération moyenne (25 à 50%). D'autres méthodes sont alors utilisées en troisième phase lorsque la récupération secondaire devient inefficace, c'est ce que l'on appelle la récupération tertiaire ou améliorée. On distingue :

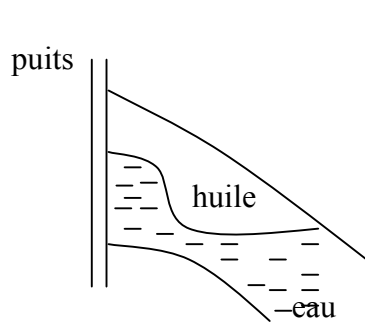
- a. Les méthodes non thermiques (injection de fluides miscibles et de polymères)
- b. Méthodes thermiques (injection de vapeur d'eau, combustion in - situ) appelées EOR (Enhanced Oil Recovery) et utilisées dans les réservoirs contenant des huiles lourdes.

## 1.6 LE PHENOMENE DU CONING DANS LES RESERVOIRS PETROLIERS

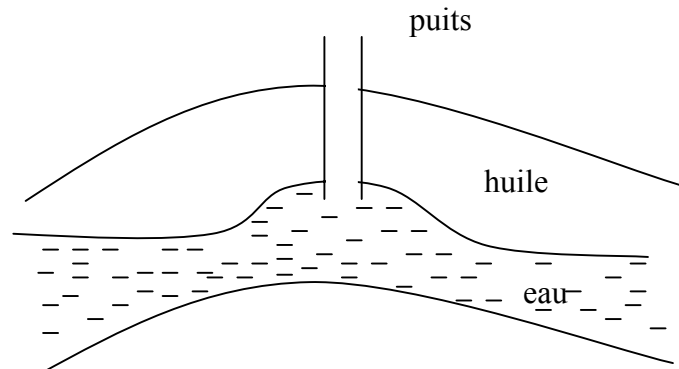
Le phénomène du coning, appelé aussi cône, consiste en la déformation locale de l'interface huile/eau à proximité du puits de production. L'interface tend à se déformer sous forme de cône d'où l'appellation dans l'industrie pétrolière par phénomène du cône (coning). Cette interface se rapprochera davantage du puits, pendant la période d'exploitation, entraînant l'entrée en production d'eau par un mouvement ascendant. Suivant les conditions d'alimentation de l'aquifère, il existe deux types de coning d'eau :

- Le cône latéral (figure 1.9) (Edge coning) résultant d'une alimentation non symétrique. L'entrée d'eau implique la perméabilité horizontale pour cette situation.

- Le cône vertical, représenté par la figure 1.10 (Bottom coning) résultant d'une alimentation symétrique. Le réservoir d'huile est en contact, dans ce cas, avec l'aquifère à travers toute son étendue. L'entrée d'eau a lieu verticalement, c'est la perméabilité verticale qui est impliquée.

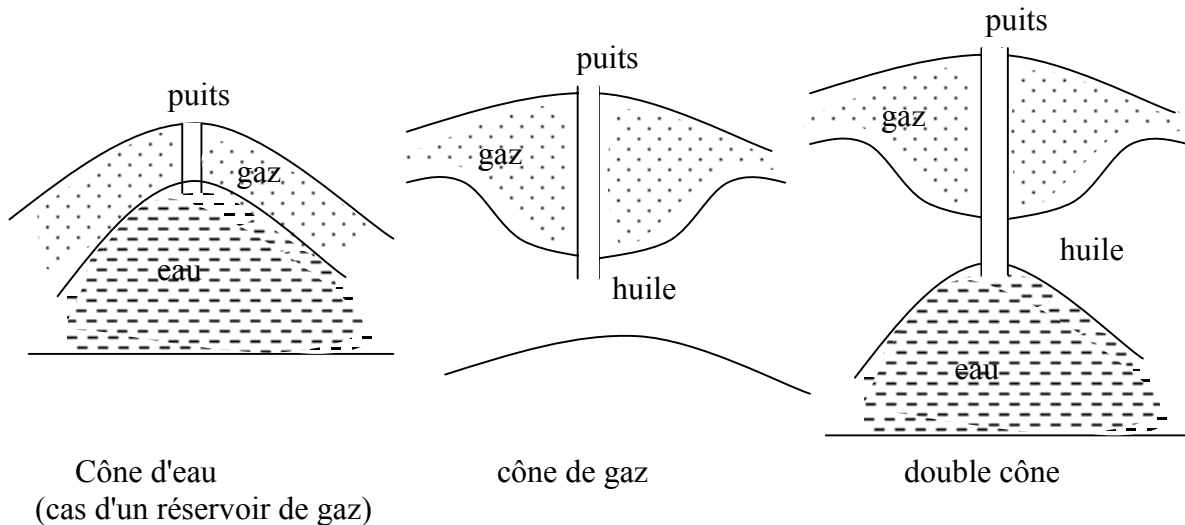


**Figure 1.9** Cône latéral



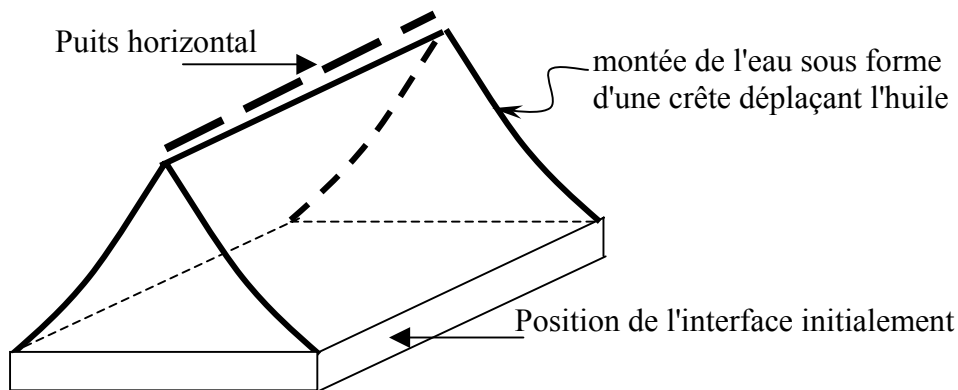
**Figure 1.10** Cône vertical

Les configurations précédentes de coning correspondent à un réservoir d'huile soutenu par un aquifère, on distingue aussi d'autres cas : un cône de gaz avec un réservoir d'huile, un cône d'eau avec un réservoir de gaz ou un double cône en présence d'un gaz - cap (figure 1.11).



**Figure 1.11** Différentes situations de cône

Toutes les situations de cône représentées correspondent à un cas de puits vertical. Dans le cas d'un puits horizontal, le développement de l'interface eau - huile, pour une situation de réservoir soutenu par un aquifère, est représenté par la figure 1.12. L'eau en s'élevant forme une ligne de faîte, dans ce cas l'appellation cône est souvent remplacé par crête (cresting).



**Figure 1.12** Situation de coning d'eau (crête) dans le cas d'un puits horizontal

Les facteurs pouvant influencer la forme du cône et son développement peuvent être classés en trois catégories :

- Le débit de production
- Les caractéristiques du réservoir (perméabilités et porosité)
- Les fluides en présence (rapport de mobilité et forces gravitationnelles)

Les réservoirs pétroliers connectés à un aquifère ont l'avantage de permettre une récupération d'huile par la seule énergie naturelle de l'aquifère (récupération primaire) grâce à son soutien dans le maintien de pression. Cependant l'empiétement d'eau (percée d'eau) dans le puits de production d'huile, causé par le gradient de pression autour du puits, entraînera une baisse significative de la production d'huile et une augmentation de la production d'eau. Les coûts des opérations de séparation de l'huile et de l'eau associés à la production augmenteront ainsi davantage. A titre d'exemple, en 2001, la production de pétrole brut enregistrée dans l'état du Colorado est estimée à 22.5 million de barils contre 360 million de barils d'eau [[www.oil-gas.state.co.us/statistics](http://www.oil-gas.state.co.us/statistics),1998-2001]. Le coût de l'entrée d'eau en production dans l'industrie du pétrole et du gaz est évalué à 45\$ Milliards par an [[www.halliburton.com](http://www.halliburton.com), 2001].

#### □ Théorie du coning d'eau

En l'absence des effets capillaires, deux forces s'exercent sur l'interface eau - huile durant la production :

- La force de viscosité résultant du mouvement des fluides dans le réservoir.
- La force gravitationnelle nette due à la différence de densité entre l'eau et l'huile.

Quand la force de viscosité l'emporte sur la force gravitationnelle, le cône d'eau prend place. L'interface de contact eau - huile s'élève jusqu'à ce que l'eau atteigne les perforations du puits de production.

L'interface eau - huile est caractérisée par une stabilité ou non lorsque le cône d'eau prend place. L'instabilité se distingue par la formation du phénomène d'arborescence (fingering phenomenon).

La stabilité de l'interface dépend des conditions d'écoulement et des forces qui s'y appliquent. Une expression du débit critique a été définie pour caractériser la stabilité ou non de l'interface. Ce débit critique est fonction des forces qui s'exercent. C'est la force gravitationnelle qui tend à stabiliser l'interface. Pour des valeurs du débit de production inférieures à la valeur critique, l'interface est stable ; elle est instable autrement.

## **1.7 CONCLUSION**

Le phénomène du coning occupe une place importante dans l'industrie pétrolière et dans le domaine de la recherche scientifique. Il implique au moins deux phases fluides en écoulement. La compréhension du concept de perméabilité relative, des notions de saturation en phases fluides et de pression capillaire ainsi que de la mobilité sont plus qu'indispensables. En effet, les équations décrivant le mouvement de phases fluides dans les réservoirs d'hydrocarbures font appel à tous ces concepts. Nous pensons qu'à travers ce chapitre, toutes ces notions ont été bien abordées et expliquées ce qui facilitera sans aucun doute la lecture des pages suivantes.

## CHAPITRE DEUX

### RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE PHENOMENE DU CONING

#### 2.1 INTRODUCTION

Le phénomène du coning d'eau a été un sujet de recherche pour plusieurs auteurs et continue à susciter l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Les préoccupations sont multiples : le calcul du temps de percée d'eau (temps mis par l'eau pour atteindre les perforations du puits), la détermination du débit critique permettant d'éviter la percée d'eau et le développement de corrélations pour le calcul du temps de percée d'eau et du débit critique. Bien que des études analytiques ou encore expérimentales aient été entreprises, la modélisation numérique reste le plus souvent l'outil indispensable pour la prédiction. Cette tendance est due d'une part aux propriétés variables des réservoirs dans l'espace et dans le temps et aussi à leurs grandes étendues. Dans le présent chapitre, les travaux portant sur le phénomène du cône d'eau et les solutions techniques adoptées pour y remédier, dans le cas des puits verticaux et horizontaux, seront présentés.

#### 2.2 CONING D'EAU DANS LES PUIITS VERTICAUX

Des modèles mathématiques ont été développés pour prédire la performance des puits soumis au problème du cône d'eau. Les premiers travaux sont ceux de Muskat et Wickoff (1935). Ils étudièrent analytiquement le phénomène du coning et déterminèrent le débit critique d'huile. Leur modèle est basé sur l'hypothèse d'uniformité de la distribution de pression dans le réservoir avec et sans cône d'eau.

En se basant sur leur traitement Arthur (1944) a développé des tables pour résoudre le problème du coning dans les réservoirs d'huiles. Kidder (1956) a présenté une solution mathématique exacte applicable au cône d'eau dans le cas de réservoirs minces pour le calcul du débit maximum de production d'huile sans eau. Colonna et al. (1969) ont présenté en détail le traitement du problème du coning d'eau dans les réservoirs d'hydrocarbures. L'équation donnant le débit critique a été validée par le biais d'un modèle électrique analogue. Gottari et Vitali (1981) ont utilisé la théorie de Muskat et Wyckoff pour le calcul de l'efficacité de déplacement pour un certain nombre de configurations géométriques (espacement des puits et profondeur de pénétration). La théorie de Buckley – Leverett a été employée par Yang (1992) pour trouver la solution analytique d'un écoulement diphasique à trois dimensions. Cette solution est exacte quand la mobilité totale des deux phases est

constante. La solution donne la distribution détaillée de la pression et des saturations en tout point du réservoir. L'une des applications importantes de cette solution est l'évaluation du cône d'eau. Le temps de percée d'eau et de la fraction d'eau produite après la percée d'eau sont prédits.

Les modèles de simulation numérique du type IMPES (implicite en pression et explicite en saturation) sont inadéquats pour les problèmes du coning. En effet, pour ce type de schéma des instabilités numériques apparaissent. Welge et Weber (1964) reconnaissent cette limitation en 1964. Ils proposèrent l'utilisation de ce type de schéma mais avec contrôle de la stabilité par limitation du pas temporel et par combinaison des mailles, ayant des saturations similaires, près du puits. Le pas temporel est fixé par imposition d'un changement en saturation dans l'intervalle  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$ .

L'amélioration la plus importante dans la simulation numérique du coning d'eau est venue avec les travaux de Spivak et Coats (1970), qui ont traité les termes de production implicitement, et de MacDonald et Coats (1970) qui en plus des termes de production pris implicitement, adoptèrent un schéma implicite pour les termes de transmissibilité. Le modèle de MacDonald et Coats nécessite le même nombre d'étapes que le modèle IMPES, cependant, il permet l'utilisation d'un pas de temps seize fois plus grand.

Letkeman et Ridings (1970) ont aussi proposé une approche numérique pour le coning basée sur un traitement implicite des transmissibilités et sur une technique simple de linéarisation. Sonier et al. (1973) ont mis en œuvre un modèle numérique totalement implicite très stable pour le problème du coning. Ko et al. (1980) proposèrent une approche séquentielle alors que Trimble et MacDonald (1981) ont présenté un modèle employant des équations fortement couplées avec un traitement implicite des termes de transmissibilité et de production.

Settari et Azziz (1974) ont permis un progrès significatif dans la simulation du coning. Ils ont exposé une méthode très précise pour le couplage puits-réservoir par utilisation d'un maillage dit centré. Abernety (1980) a présenté la méthode des images appliquée au calcul du coning.

Les approches numériques précédentes sont limitées au cas du puits unique (single well). La simulation de plusieurs puits dans un réservoir nécessite l'utilisation d'un maillage

curviligne pour incorporer, près du puits, un maillage radial. Akbar et al. (1972) et Mrosovsky et Ridings (1975) ont proposé des méthodes d'approche pour coupler un maillage radial autour d'un puits avec un maillage cartésien. La méthode dite de Galerkin pour la simulation du coning d'eau a aussi été proposée par Lewis et al. (1975).

Chappeler et Hirisaki (1976) ont développé un modèle analytique faisant appel à une simulation à deux dimensions pour le traitement du coning. Leur modèle suppose un équilibre vertical et un écoulement stratifié.

Plusieurs études expérimentales ont été menées sur le coning d'eau. Les modèles utilisés sont : Hele – Shaw, analogue et potentiométrique. Meyer et Searcy (1956) ont été les premiers à avoir utilisé le modèle de Hele – Shaw pour prédire le temps de percée d'eau et le rapport de production eau – huile. D'autres chercheurs ont aussi employé ce modèle ; citons Shols (1962) et Smith et Pirson (1963).

Chierici et al. (1964) ont utilisé le modèle potentiométrique pour déterminer le débit d'huile critique et optimiser l'intervalle des perforations du puits. Des corrélations ont été proposées.

Henley et al. (1961), Sobocinski et Cornelius (1964), Caudle et Silberberg (1965), Khan (1969) et Mungan (1975) ont utilisé des modèles physiques appelés " Sandpack " pour l'étude du coning. Henley et al. ont présenté leurs résultats, portant sur le rapport huile – eau, sous forme d'abaques, Sobocinski et Cornelius ont proposé des corrélations empiriques pour prédire le temps de percée d'eau, Caudle et Silberberg ont essentiellement reporté la sensibilité de l'étude, Khan a donné sous forme de courbes le rapport huile - eau à différents instants et Mungan a fait une étude comparative entre les résultats d'expérimentation et ceux de la simulation numérique.

## **2.3 CORRELATIONS POUR LE DEBIT CRITIQUE ET LE TEMPS DE PERCEE D'EAU DANS LE CAS DES PUIITS VERTICAUX**

### **□ Débit critique**

Plusieurs corrélations sont disponibles dans la littérature pour le calcul du débit critique. Le point commun à ces corrélations est la dépendance du débit critique de la perméabilité, de la viscosité de l'huile, de la différence de densité entre l'eau et l'huile ainsi que la profondeur

de pénétration du puits. A titre d'exemple, on peut citer les corrélations de Craft et Hawkins (1991), Meyer et Garder (1954), Chaperon (1986), Schols (1972), Hoyland et al. (1986), Abass et Bass (1988) et Yang et Wattenbarger (1991).

Pour des raisons économiques, l'huile est le plus souvent produite à des débits supérieurs au débit critique. En conséquences, l'eau entre en production avec l'huile ; la quantité d'huile produite diminuera au profit d'une quantité d'eau qui finira par dominer la production.

#### □ Temps de percée d'eau

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la détermination du temps de percée d'eau. La littérature est riche de corrélations permettant son calcul. Dans ces corrélations apparaissent les paramètres caractérisant les fluides en présence, les caractéristiques du réservoir et du puits. Sobocinski et Cornelius (1965), Bournazel et Jeanson (1971) et Yang et Wattenbarger (1991) sont des exemples parmi d'autres chercheurs qui ont investi dans le développement de corrélations pour le calcul du temps de percée d'eau.

#### □ Synthèse

Des variations significatives existent dans les résultats des différentes études menées pour la prédiction du coning d'eau. Ces variations sont principalement dues aux hypothèses d'approximation utilisées. Joshi (1991) a évalué l'écart entre les résultats des différentes corrélations disponibles pour le calcul du temps de percée d'eau et du débit critique. Des différences de l'ordre de 90% sont enregistrées pour le débit critique et à plus de 140% pour le temps de percée d'eau [Joshi, 1991].

Cependant, les points communs, en accord dans toutes les études sur le cône d'eau dans les puits verticaux, peuvent être résumés comme suit :

- Le cône est plus prononcé aux débits de production élevés.
- Placer le puits loin de l'interface de contact initiale eau – huile permet de retarder la percée d'eau.
- La production à des débits inférieurs ou égaux au débit critique n'est pas économique.
- Après la percée d'eau dans le puits, la production d'eau augmente rapidement, des moyens et des ressources de séparation sont nécessaires.
- Le développement du cône diminue la durée d'exploitation.

## 2.4 SOLUTIONS INDUSTRIELLES AU PHENOMENE DU CONING D'EAU DANS LES PUIITS VERTICAUX

Plusieurs solutions pratiques ont été développées dans le but de minimiser le coning d'eau dans les puits verticaux. Le coning d'eau dans la pratique implique des débits élevés de production d'eau. Le contrôle de l'eau est alors l'objectif visé dans les différentes techniques utilisées pour retarder la percée de cette eau.

### □ **Barrières et procédés chimiques**

Strickland (1976) a discuté le concept de barrières pour le contrôle de l'eau, en se basant sur des études numériques ainsi que sur des données pratiques. Karp (1962) proposa la création de fractures horizontales à l'interface de contact eau – huile puis les cimenter. Il a donné des résultats de laboratoires et des méthodes d'estimation.

L'utilisation de procédés chimiques pour le contrôle du coning d'eau a été l'objet de travaux de plusieurs chercheurs. Maslov (1976) a proposé l'utilisation de " Silanes"(composé hydrogéné du silicium, analogue à un alcane), Rakhimkulov (1982) a suggéré des agents actifs. Sparlin et Krueger (1979) ont rapporté des résultats expérimentaux (laboratoire) et de champ ; ils ont utilisé des polymères dans le but de réduire la mobilité de l'eau. Cole (1981) a discuté six techniques différentes pour le contrôle du coning, en commençant de la fermeture du puits jusqu'au contrôle de la mobilité.

Malheureusement, toutes ces méthodes conventionnelles ne résolvent pas le problème de la percée d'eau [Shirman et al., 1997].

### □ **Puits horizontaux**

Plusieurs chercheurs ont recommandé l'utilisation de puits horizontaux comme solutions aux réservoirs présentant le problème du cône d'eau. Murphy (1988), Chen (1993), Lien et al. (1990 et 1991) et Peng et Yeh (1995) ont utilisé la technologie des puits horizontaux pour réduire les problèmes du coning d'eau et améliorer la récupération de l'huile dans les réservoirs soutenus par un aquifère. Cependant, la plupart de ces constatations ont été étudiées assez tôt lors de l'exploitation de ces réservoirs avec des puits horizontaux. Des exploitations récentes ont montré que la technologie des puits horizontaux n'est pas la solution totale au problème du coning d'eau. En effet les puits horizontaux, par leur nature et géométrie, ont des problèmes inhérents. L'un de ces problèmes est que l'augmentation de la

longueur de contact avec le réservoir, lequel est un avantage en termes de débit de production d'huile, devient actuellement un désavantage quand l'eau entre en production, provoquant une augmentation de la quantité d'eau produite.

Bien que le débit critique d'huile dans le cas des puits horizontaux soit élevé par rapport à celui des puits verticaux, il demeure trop bas pour toute exploitation économique.

#### □ **Contrôle du coning d'eau par la technologie dite "dual completion"**

Person et Mehta (1967) ont entrepris une simulation numérique pour l'étude de solutions au problème du coning d'eau dans les puits verticaux. L'une des solutions est la ré – injection de l'huile produite dans le réservoir au dessous des perforations du puits pour supprimer le développement du cône. Cette technique connue sous le nom de "Oil Doublet Model" n'est pas attrayante économiquement. Aussi parmi les solutions simulées par ces auteurs, la production d'huile et d'eau dans leurs zones respectives par utilisation de la double complétion. Ils concluent l'apport de cette technique dans l'atténuation du cône.

Widmyer (1955) a mis en œuvre une nouvelle technique qui est la double complétion, pour contrôler le coning d'eau. Il a proposé des perforations à dresser au sommet et à la base du réservoir et de produire à partir de chacune des perforations (hautes et basses).

Considérant le coût élevé de la double complétion, Driscoll (1972) a suggéré deux niveaux de perforations, l'une dans la zone huile et l'autre dans la zone eau au dessous de l'interface initiale de contact huile – eau. La production est alors un mélange de deux fluides eau et huile. Parmi les inconvénients d'une telle technique, on peut citer la réduction du débit de production d'huile et les problèmes de séparation qui rendent cette technique pas très différente des précédentes.

La technologie de la double complétion avec des perforations dans la zone eau, appelée "Downhole water sink" (DWS), a été exploitée pour stabiliser l'interface eau - huile et ainsi donc contrôler le cône d'eau. Cette technologie a été implantée dans certains champs pétroliers aux Etats Unies [Wojtanowicz et al., 1991 ; Swisher and Wojtanowicz, 1995] et a prouvé qu'une production d'huile sans eau est possible à des débits beaucoup plus élevés que ceux atteints avec les puits à simple complétion. Les résultats des champs d'application indiquent que la technologie de la double complétion non seulement permet d'éviter le cône d'eau, mais, elle est capable de renverser le cône après la percée d'eau. Dans cette technique, les perforations eau et huile sont séparées par un double tube. Comme résultats, l'huile

produite est sans eau. La technologie DWS a été étudiée théoriquement [wojtanowicz et al., 1991 ; Swisher and Wojtanowicz, 1995] et expérimentalement [Shirman and wojtanowicz, 1997 ; 1997]. Le travail le plus remarquable est celui de Shirman et wojtanowicz (1997). Ils ont entrepris une étude expérimentale par utilisation du modèle de Hele – Shaw. Leurs résultats indiquent que la production d’huile avec cette technique a un mérite économique considérable et est faisable techniquement. Le coning d’eau avec utilisation de la double complétion a été aussi un sujet de recherche pour Gunning et al. (1999). Un modèle simple similaire à celui de Wojtanowicz et al. (1994) a été proposé. Une solution analytique a été adoptée pour les faibles débits d’écoulement où la gravité a une contribution dominante. Pour palier à la limitation du modèle analytique précédent, Gunning et al. ont opté pour la solution numérique. Dans les deux cas de solutions (analytique et numérique), le rapport des distances entre l’interface eau – huile, à l’état initial, et les positions des complétions eau et huile a été introduit. Leurs résultats indiquent que dans le cas de symétrie (c.à.d, pour un rapport unitaire), la production d’huile sans eau est possible à des débits beaucoup plus élevés que ceux offerts par le système de la simple complétion. Cependant, une faible amélioration est obtenue dans les situations asymétriques.

## **2.5 PHENOMENE DU CONING D’EAU DANS LES Puits HORIZONTALS**

Alors que pour les puits verticaux, la chute de pression est concentrée autour de la partie basse des perforations, celle – ci se fait sur toute la longueur des perforations dans le cas des puits horizontaux. De plus la dépression est très inférieure à celle se produisant dans le cas des puits verticaux. Suite à la basse chute de pression, dans le cas des puits horizontaux, on s’attend à ce que la production d’huile sans eau soit élevée.

Les efforts de recherche ont conduit au développement d’équations mathématiques pour l’évaluation de la performance des puits horizontaux. Geiger (1984) a développé une corrélation pour l’évaluation de l’indice de productivité dans un réservoir isotrope. Il a aussi donné l’indice de productivité des puits verticaux afin de comparer la performance dans les deux cas. Cette comparaison est faite par le biais du rapport des deux indices de productivité des puits verticaux et horizontaux. Ce rapport a été largement accepté par les ingénieurs de réservoirs.

Chaperon (1986) a développé une corrélation pour la prédiction du débit critique de production dans une formation anisotrope. Cependant, il a négligé l’influence de la forme du cône dans le cheminement de l’écoulement. Karcher et al. (1986) et Geiger (1989) ont aussi

proposé des corrélations pour l'évaluation du débit critique. Papatzacos et al. (1989) ont développé une méthode analytique pour prédire l'évolution du cône et une corrélation pour le calcul du temps de percée d'eau. Deux ans après, papatzacos (1991) a développé des corrélations pour le calcul du débit critique.

Yang et Wattenbarger (1991) ont développé plusieurs corrélations, à partir de résultats de simulation numérique, pour la prédiction du temps de percée d'eau et du débit critique d'huile.

La manière avec laquelle a lieu l'entrée d'eau dans le puits horizontal reste un thème de recherche attractif. Le modèle de flux uniforme suppose une entrée d'eau par le bas uniformément répartie et d'une manière symétrique le long de la longueur du puits. Cependant, des évidences physiques montrent que ce n'est pas le cas. L'entrée d'eau se produit dans une phase primaire sur une partie puis s'étale sur toute la longueur du puits [Lien et al., 1991]. La perte de charge par frottement dans le puits est portée responsable du comportement précédent [Guo et Lee, 1993].

Hill (1952), Saffman et Taylor (1958), Chuoke et al. (1958), Peters et Flock (1979), Pavone (1989) ont étudié l'écoulement du type déplacement impliquant une phase envahie et une autre envahissante dans le cas de deux fluides non miscibles. Les modèles canaux (tubes ramifiés) et Hele – Shaw ont été utilisés dans leurs travaux. Les résultats obtenus avec ces modèles montrent la formation de saillies dans plusieurs cas et une interface instable prend place. Cette instabilité appelée phénomène d'arborescence (fingering phenomenon) a lieu quand le rapport de mobilité est supérieur à l'unité et quand le débit de production dépasse la valeur critique. Jiang et Butler (1998) ont analysé expérimentalement et numériquement le déplacement de l'huile par l'eau par un mouvement ascendant dans une cellule de Hele – Shaw pour un cas de puits horizontal. Les résultats obtenus montrent que la récupération de l'huile aux débits élevés est plus grande que celle à faibles débits pour plusieurs cas où les saillies prennent naissance. Dans leurs résultats expérimentaux, ils ont constaté qu'une importante quantité d'huile peut être récupérée par l'écoulement en arborescence avant la percée d'eau. Plusieurs comportements de l'interface eau - huile sont observés durant le processus de déplacement pour différentes valeurs du débit d'écoulement et du rapport de viscosité. Pour un rapport de viscosité unitaire, l'interface est stable. Cependant, pour des valeurs de ce rapport supérieur à l'unité et pour des valeurs du débit dépassant la valeur critique, l'interface est instable. Les auteurs ont trouvé, que la stabilité de l'interface, en tout point, dépend de la vitesse locale en ce point. Si celle – ci est supérieure à une valeur critique, un écoulement en arborescence prend place d'abord le long de l'écoulement central. Le

développement de l'instabilité prend place soit au début du déplacement ou après une certaine période de production. Le moment de son développement dépend du débit d'écoulement et de la distance entre l'interface et le puits de production. Farmen et al. (1991) ont aussi utilisé la cellule de Hele – Shaw pour une visualisation de la formation du cône d'eau. La méthode d'analyse par images a été utilisée dans ce sens.

## **2.6 CONTROLE DU CONING D'EAU DANS LES PUIITS HORIZONTAUX**

Comme on l'a souligné au §2.4, bien que la production d'huile ait été améliorée par l'utilisation de puits horizontaux, mais ceux – ci ne résolvent pas complètement le problème du coning d'eau. Le contrôle du phénomène du cône d'eau dans les puits horizontaux a reçu une attention particulière des chercheurs. Plusieurs méthodes ont été recommandées récemment pour rétablir la productivité des puits horizontaux. Une méthode appelée "Completion with Stinger" pour les puits horizontaux a été proposée pour réduire le problème du coning d'eau. Cette méthode consiste à redistribuer la chute de pression le long du puits par insertion d'un tube de petit diamètre dans la ligne de production. Permadi et al. (1995) ont étudié la performance de cette méthode numériquement et expérimentalement (modèle de Hele – Shaw). Les résultats auxquels ils aboutirent montrent que l'installation de ce tube de longueur 0.25 fois celle d'un puits horizontal aboutit à une meilleure redistribution de la chute de pression. Le débit de production est réduit avec l'insertion de ce tube, néanmoins cette baisse est compensée par un temps de la percée d'eau plus long.

Une autre technique utilisée et recommandée pour le contrôle du coning d'eau dans les puits horizontaux est la variation de la densité des perforations pour une redistribution uniforme de l'entrée des fluides. Asheim et Oudeman (1997) ont étudié la performance de cette méthode. Celle – ci entraîne une réduction de la productivité, mais l'efficacité de balayage est meilleure, le temps de percée d'eau est retardé et la récupération de l'huile est améliorée.

## **2.7 CONCLUSION**

L'importance du phénomène du coning d'eau dans l'industrie pétrolière a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. Bien que les méthodes expérimentales et analytiques aient été utilisées, la modélisation numérique reste le plus souvent l'outil indispensable pour la prédiction. Un modèle puits est utilisé dans le cas des puits verticaux. L'approche totalement

implicite est la plus adaptée pour la simulation du cône d'eau. La détermination du débit critique et le calcul du temps de percée d'eau sont les préoccupations majeures pour la plupart des auteurs. Les points essentiels en commun dans les études entreprises peuvent être résumés comme suit :

- Le phénomène du coning est plus sévère dans le cas des puits verticaux.
- Avec l'utilisation des puits horizontaux, le cône d'eau est atténué mais non complètement résolu.
- Bien que le débit critique ait reçu une attention particulière, la production à des débits inférieurs ou égaux à celui - ci demeure trop faible pour toute exploitation économique.
- Plusieurs procédés ont été mis en œuvre pour la lutte contre le phénomène du coning. Ceux ci permettent de l'atténuer mais ne l'éliminent pas totalement. Les procédés les plus attrayants dans ce sens sont :
  - La technologie "Downhole Water sink" dans le cas de puits verticaux.
  - La méthode "Completion with Stinger" dans le cas de puits horizontaux.

La technologie de puits horizontaux est de plus en plus utilisée ces dernières années quand les caractéristiques du réservoir et les considérations économiques le permettent. L'utilisation de ces puits comme moyen d'amélioration de la productivité n'échappe pas au phénomène du coning d'eau. Bien qu'ils offrent de meilleures alternatives que les puits verticaux dans l'atténuation du cône d'eau, ces derniers ne sont pas complètement abandonnés ; d'ailleurs la nouvelle technologie, dite "DWS", paraissant prometteuse pour cette fin, le confirme.

Notre travail dans la présente thèse, est une contribution à l'étude du phénomène du coning d'eau impliquant deux phases fluides eau et huile. Deux parties distinctes sont proposées :

La première concerne les puits horizontaux. Par une modélisation numérique, sont discutés et analysés les effets de paramètres caractérisant la roche réservoir, les fluides en présence et le rythme de production, sur le mouvement de l'interface eau - huile, le temps de percée d'eau et le pourcentage d'huile récupérée. La nouveauté dans ce travail est l'élaboration d'un code de calcul permettant de prédire le comportement de l'interface à tout instant de la production.

Dans la seconde partie, la technologie de la double complétion "Downhole Water sink", dans le cas de puits verticaux, est simulée par une approche numérique. Le comportement de l'interface eau - huile, le calcul du temps de percée d'eau sont présentés et commentés. Le cas de la simple complétion est aussi étudié, il servira de référence pour voir l'apport de la double complétion et ses perspectives. Notre apport supplémentaire par rapport aux travaux antérieurs, est la prise en compte de la plupart des paramètres influençant la production des réservoirs soutenus par un aquifère et la prédiction du temps de percée d'eau.

## CHAPITRE TROIS

### ANALYSE DU PHENOMENE DU CONING D'EAU DANS LE CAS DES PUITTS HORIZONTAUX

#### 3.1 INTRODUCTION

Dans le présent chapitre, une étude numérique est entreprise pour analyser un écoulement transitoire de deux fluides non miscibles (eau et huile) dans une cavité poreuse montée verticalement. L'injection de l'eau par la face du bas perturbe l'interface eau - huile initialement horizontale. Une telle situation peut correspondre à la récupération d'huile en présence d'un aquifère pour un cas de puits horizontal. L'introduction de paramètres adimensionnels permet d'examiner les effets de la roche réservoir, des fluides en présence et du rythme de production sur l'évolution de l'interface eau - huile, le temps de percée d'eau et la récupération d'huile.

#### 3.2 FORMULATION

Une cavité de section carrée montée verticalement remplie par un milieu poreux est considérée (figure 3.1). Initialement, l'eau et l'huile au repos occupent respectivement le quart et les trois quarts du volume total de la cavité poreuse. L'eau est injectée par la face du bas provoquant la déformation de l'interface eau - huile initialement horizontale. L'huile est alors récupérée par la face du haut, mais avec une possible percée d'eau. Le milieu poreux est isotrope et homogène, les fluides avec lesquels il est saturé sont incompressibles et non miscibles avec des propriétés constantes ( $\rho$  et  $\mu$ ). Un déplacement du type "Gravity - stabilised" est considéré, c.à.d, pas de formation du phénomène d'arborescence. Un écoulement unidimensionnel prédominant dans la direction verticale a lieu. Un régime d'écoulement Darcien est considéré avec un nombre de Reynolds, basé sur la taille moyenne des pores, inférieur à l'unité. Dans beaucoup de situations, la mouillabilité dans les roches réservoirs est neutre, donc la pression capillaire est nulle, c'est ce cas qui a été retenu dans la présente étude.

Avec les hypothèses précédentes, le mouvement des fluides est décrit, pour cet écoulement diphasique, par la loi de Darcy et l'équation de continuité. Elles s'écrivent comme suit :

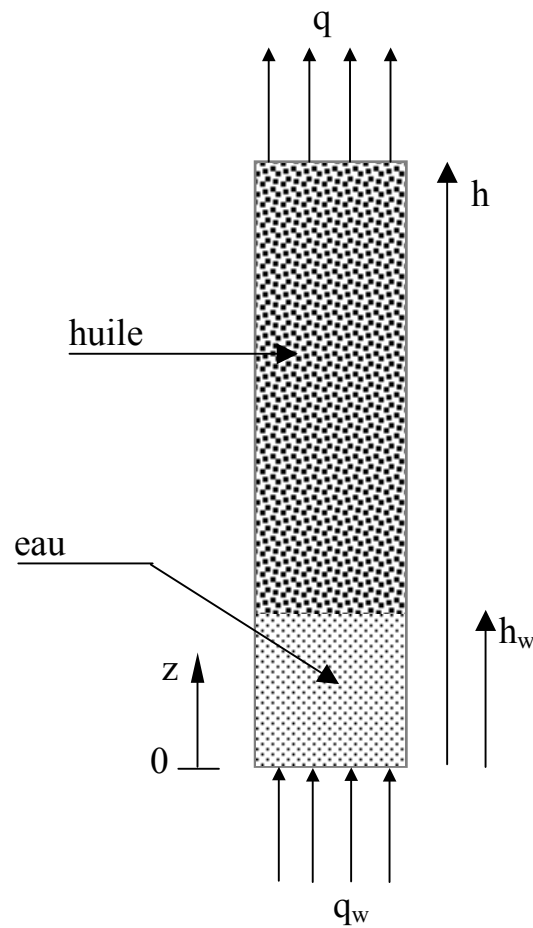
Conservation de la masse

$$-\frac{d}{dz}(u_l) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_l) \quad (3.1)$$

Loi de Darcy

$$u_l = -K \frac{K_{rl}}{\mu_l} \left[ \frac{dP}{dz} + \rho_l g \right] \quad (3.2)$$

L'indice  $l$  désigne la phase eau (w) ou huile (o). il faut noter que les fluides sont non miscibles ; de ce fait il n'y a pas d'identité entre phases et fluides.



**Figure 3.1** Schéma du modèle physique et du système de coordonnées

En substituant la vitesse de filtration donnée par l'équation (3.2) dans l'équation (3.1), on obtient une équation en termes de pression :

$$\frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{rl}}{\mu_l} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_l g \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_l) \quad (3.3)$$

l'équation (3.3) s'écrit pour chacune des phases comme suit :

$$\frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_o g \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o) \quad (3.5)$$

Les perméabilités relatives aux phases eau et huile sont données par les expressions suivantes [Corey, 1996] :

$$K_{ro} = 0.95 \left( \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{wr} - S_{or}} \right)^{2.5} \quad \text{et} \quad K_{rw} = 0.5 \left( \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{or}} \right)^2 \quad (3.6)$$

Les saturations irréductible en eau et résiduelle en huile sont définies par [Chierici, 1995] :

$$S_{wr} = 0.25 - 2 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{K}{\phi}} \quad \text{et} \quad S_{or} = 0.30 - 2 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{K}{\phi}} \quad (3.7)$$

La perméabilité absolue K est prise en mD.

La sommation des équations (3.4) et (3.5), et pour un milieu poreux complètement saturé par les deux fluides, permet d'aboutir à l'équation de pression suivante :

$$\frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) \right] + \frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_o g \right) \right] = 0 \quad (3.8)$$

Une équation supplémentaire traduisant la saturation complète du milieu poreux par les fluides, est donnée par :

$$S_w + S_o = 1 \quad (3.9)$$

L'ensemble des équations à résoudre consiste en l'équation de pression (3.8), l'équation de saturation en eau (3.4) et l'équation la saturation totale (3.9).

Initialement les deux fluides étaient au repos. Les saturations en eau et huile prennent différentes valeurs selon la position dans le milieu poreux. Ces conditions initiales sont :

$$S_o = 0 \quad S_w = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq h_w \quad (3.10)$$

$$S_o = 1 - S_{wr} \quad S_w = S_{wr} \quad \text{pour} \quad h_w \leq z \leq h \quad (3.11)$$

Des conditions aux limites de débits imposés aux faces inférieure et supérieure de la cavité sont considérées dès la mise en production.

$$z = 0 \quad -K \frac{K_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) = \frac{q_w}{L^2} \quad (3.12)$$

$$z = h \quad -K \frac{K_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_o g \right) - K \frac{K_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) = \frac{q}{L^2} \quad (3.13)$$

$q_w$  et  $q$  désignent respectivement les débits d'injection et de production. Ce dernier est donnée par :

$$q = q_o + q_{wp} \quad (3.14)$$

Avant l'entrée d'eau en production, de l'huile uniquement est produite, le débit total de production est égal à  $q_o$  et  $q_{wp}$  est nul. Cependant, après la percée d'eau  $q_o$  diminue et  $q_{wp}$  augmente.

### 3.3 MODELISATION NUMERIQUE

La méthode des volumes finis [Patankar, 1980, 1981] a été utilisée pour traduire l'ensemble des équations différentielles gouvernantes en équations algébriques. Une approche totalement implicite [Au et al., 1980] a été retenue pour la discrétisation des équations. Les perméabilités relatives aux interfaces des volumes de contrôle sont évaluées par un schéma décentré [Azziz and Settari, 1986]. Le système d'équations algébriques est résolu par la méthode itérative de Gauss - Seidel.

La convergence de la solution numérique est contrôlée localement. La norme maximale a été utilisée pour la pression et la saturation. Le critère de convergence à chaque pas de temps est donné par :

$$\max \left| \frac{P^{i+1} - P^i}{P^i} \right| < 10^{-6} \quad \text{et} \quad \left| \frac{S^{i+1} - S^i}{S^i} \right| < 10^{-5} \quad (3.15)$$

Un maillage de 90 nœuds a été utilisé avec un pas temporel de 100s. Ce choix est basé sur la sensibilité du code de calcul au maillage, donnée dans le tableau (3.1), par comparaison du pourcentage d'huile récupérée à la percée d'eau ( $Rec_{BT}$ ). Les résultats reportés dans le tableau (3.1) montrent que 90 nœuds et un pas temporel de 100s apportent une précision suffisante pour les résultats. En effet, un maillage plus fin n'apporte qu'une amélioration inférieure à 3% et un temps de calcul plus lent.

Nœuds	$\Delta t(s)$	Rec(%)	Différence (%)
70	100	10.4000	-----
90	100	10.7867	3.7
110	100	11.0400	2.3
90	100	10.7867	-----
90	10	10.8840	0.9

**Tableau 3.1** Sensibilité du code de calcul au maillage

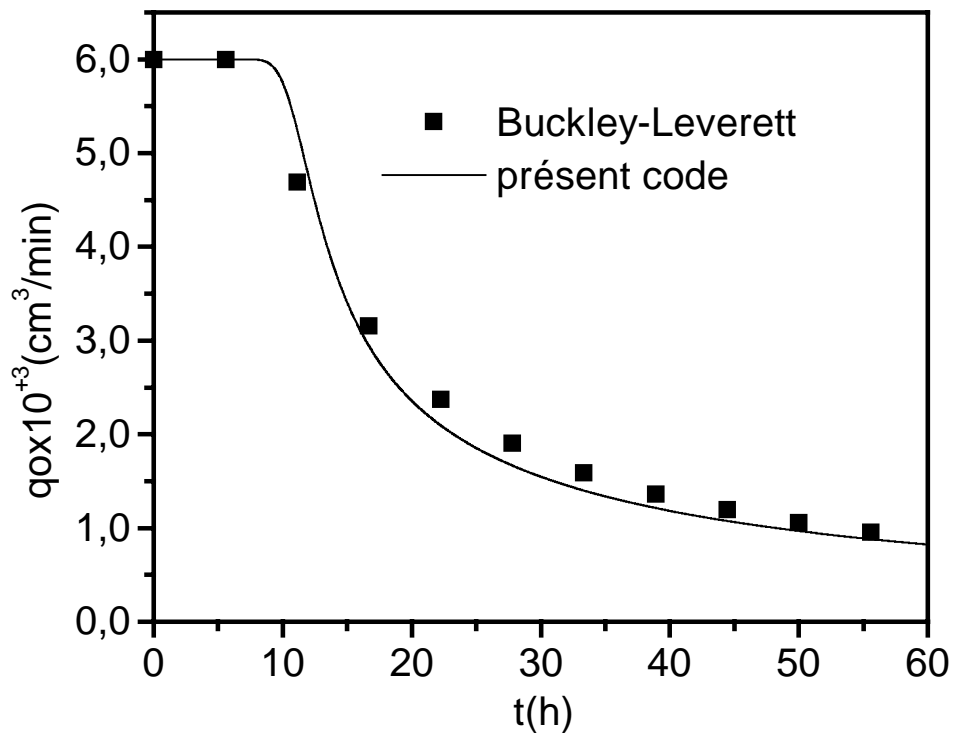
$$q = 0.006 \text{ cm}^3 / \text{min}, \quad \phi = 0.2, \quad K = 10^{-13} \text{ m}^2,$$

$$R_{\mu} = 271 \text{ and } D\rho = 116 \text{ Kg/m}^3$$

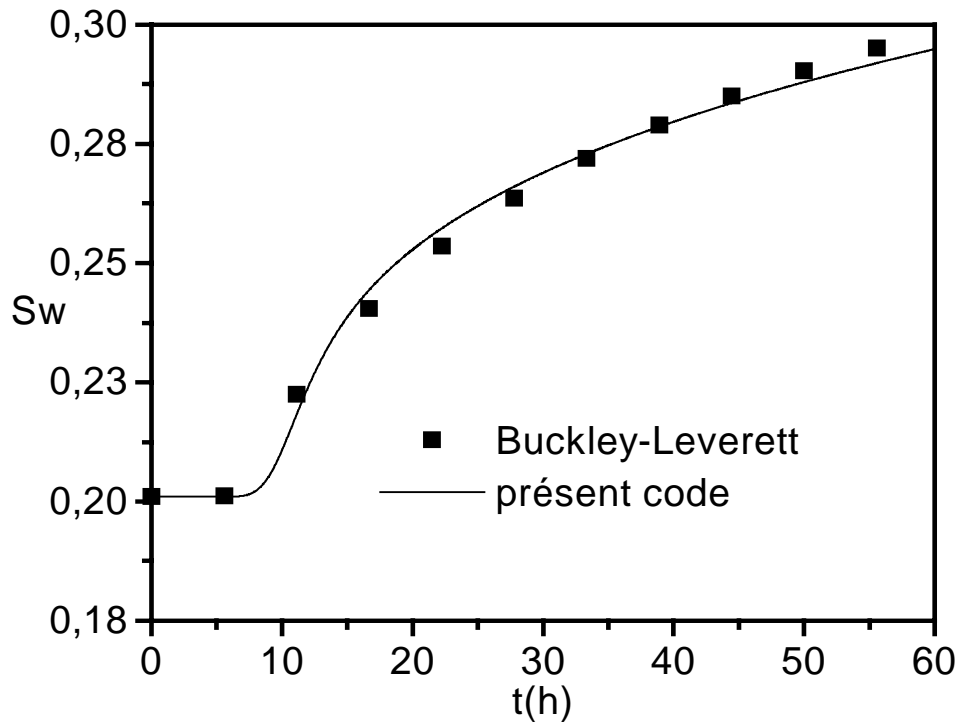
Une étape importante dans toute étude numérique après élaboration du code de calcul est sa validation en reprenant des études qui se rapportent à l'étude d'écoulement diphasique. Notre code de calcul est validé par comparaison des résultats obtenus par la présente simulation avec ceux de la théorie du mouvement frontal de Buckley - Leverett [Chierici, 1995]. Il est à souligner que la validation est faite avec les conditions suivantes en saturation d'eau :

$$\begin{aligned} \text{A } t = 0 \quad 0 < z \leq h \quad S_w = S_{wr} \\ \text{A } t \geq 0 \quad z = 0 \quad S_w = 1 - S_{or} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les résultats des variations temporelles du débit d'huile produit et de la saturation en eau (figures 3.2a et 3.2b) montrent un bon accord entre la solution numérique et la théorie de Buckley - Leverett .



**Figure 3.2a** Comparaison des résultats de la simulation numérique et de la théorie de Buckley – Leverett pour le débit de production d'huile  
 $K=10^{-13} \text{m}^2$ ,  $\phi=0.2$ ,  $R_{\mu} = 271$  and  $D\rho=123 \text{Kg/m}^3$



**Figure 3.2a** Comparaison des résultats de la simulation numérique et de la théorie de Buckley – Leverett pour le profil de saturation en eau  
 $K=10^{-13}m^2$ ,  $\phi=0.2$ ,  $R_{\mu} = 271$  and  $D\rho=123Kg/m^3$

### 3.4 DISCUSSION DES RESULTATS

Les paramètres pouvant influencer le comportement de l'interface eau - huile et la production peuvent être classés en trois catégories :

- Propriétés des fluides en présence (viscosité et densités)
- Caractéristiques du milieu poreux (perméabilités et porosité)
- Rythme de la production (débit de production)

Afin de mieux tirer profit de la présente étude, on a procédé à la définition de paramètres adimensionnels. Les variables indépendantes (spatiale et temporelle) sont aussi adimensionnées.

Le paramètre gravité - viscosité, défini par  $N = (\rho_w - \rho_o) / (\rho_w R_\mu)$ , caractérise le rapport de la différence de densité volumique au rapport de viscosités, il est compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-1}$ . Le nombre de Darcy  $Da = K/h_o^2$  représente la perméabilité de la roche réservoir, il varie entre  $10^{-13}$  et  $10^{-11}$ . Le débit de production adimensionnel  $q^* = q \rho_w / (\mu_w h_o)$  couvre la plage comprise entre  $5 \times 10^{-4}$  et  $20 \times 10^{-4}$ . La porosité  $\phi$  varie entre 0.1 et 0.4. Les variables indépendantes spatiale et temporelle sont définies par :  $Z^* = z/h$  et  $t^* = (t \mu_w) / (\rho_w h_o^2)$ . Le temps de simulation  $t^*$  varie de 0 à 12 correspondant approximativement à 200 heures. Les dimensions de la cavité poreuse sont :  $h^* = 1$   $h_w^* = 0.25$   $a^* = 0.25$ ,  $a^*$  représente le côté de la section de la cavité poreuse.

Dans ce qui suit, on présentera des résultats se rapportant à l'aspect qualitatif (évolution de l'interface eau - huile et de la côte atteinte par le cône d'eau) et d'autres à l'aspect quantitatif (temps de percée d'eau, pourcentage d'huile récupérée et évolution du rythme de la production d'huile).

### 3.3.1 EVOLUTION DE L'INTERFACE EAU - HUILE

Il sera discuté et commenté dans l'ordre, les effets de  $N$ ,  $Da$ ,  $\phi$  et  $q^*$  sur l'évolution de l'interface et la côte atteinte par le cône d'eau.

#### A./ Effet du nombre de gravité - viscosité $N$

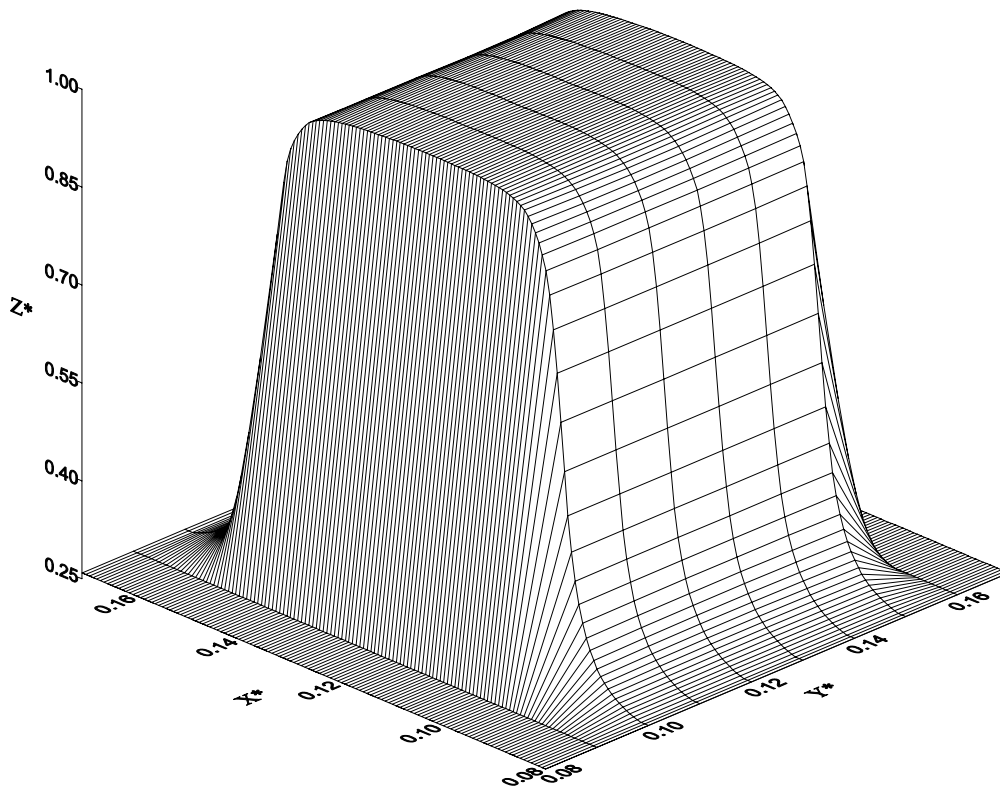
Dans la présente partie de la thèse, on a considéré des valeurs de  $N$  correspondant à des débits inférieurs à la valeur critique, c.à.d, générant des cas d'interfaces stables [Chierici, 1995].

Dans la figure 3.3, on a reporté le développement de l'interface eau - huile à  $t^* = 1$  pour deux valeurs de  $N$ . Cette vue en 3D, montre que l'interface eau - huile forme une ligne de faîte, désignée dans l'industrie pétrolière par crête (cresting). A cet instant de la production, pour  $N=10^{-4}$ , l'eau a atteint le puits de production ( $Z^*=1$ ). A la base comme au sommet, la surface occupée par l'eau est presque la même, formant ainsi une barrière pour l'avancée de la phase huile. Par contre pour  $N=10^{-2}$ , l'avancée de l'eau en hauteur est moindre ( $Z^* = 0.4$ ) et la surface occupée par l'eau varie linéairement en décroissance avec la côte  $Z^*$ ; c.à.d, à la base l'eau occupe une plus grande surface puis diminue progressivement vers l'avant.

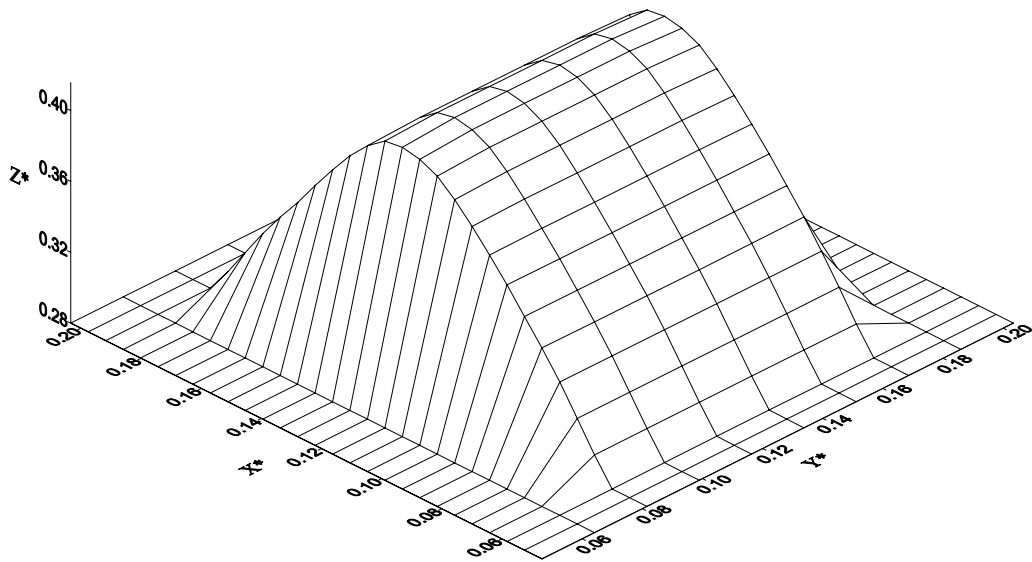
Pour mieux comparer l'évolution de l'interface eau - huile pour différentes valeurs de  $N$ , on a procédé à une représentation en 2D. La figure 3.4(a) montre la forme et la position prise par l'interface à différents temps de la production ( $t^* = 0.1, 0.3$  et  $1$ ). Deux valeurs du nombre de gravité - viscosité ont été considérées. Pour une valeur de  $N$  égale à  $10^{-4}$ , correspondant à des huiles lourdes avec des viscosités élevées, le front d'eau se déplace rapidement et son développement se produit plutôt en hauteur qu'en largeur. Cependant, pour des huiles légères ( $N=10^{-2}$ ), l'eau déplace l'huile d'une manière presque semblable au piston ; l'interface est beaucoup moins développée en hauteur mais occupe une plus grande partie en largeur comparée au cas des huiles lourdes.

Ces comportements peuvent être expliqués par analyse d'abord du nombre gravité - viscosité ensuite des forces qui s'y appliquent. Augmenter la valeur de  $N$  revient à augmenter la différence de densité volumique ( $\rho_w - \rho_o$ ) et à réduire le rapport de viscosités ( $\mu_o/\mu_w$ ) (en pratique, plus grande est la valeur de  $N$  mieux c'est). En l'absence des forces capillaires, il s'y appliquent les forces de viscosité et les forces gravitationnelles dues à la différence de densité volumique entre les deux fluides. Le débit d'injection constitue la force motrice causant le déplacement de l'huile par l'eau, fixe dans ce cas. Plus grande est la viscosité de l'huile plus grande est la résistance opposée au mouvement de cette huile, privilégiant ainsi l'avancée de l'eau. La différence de densité eau - huile contribue dans la stabilisation de l'interface pour les huiles légères. Plus petite est cette différence, plus rapide est l'avancée du front d'eau puisque les forces gravitationnelles dues à cette différence agissent vers le bas alors que la force motrice agit vers le haut.

Dans la figure 3.4(b), est reportée la position du front d'eau à différents temps de la production pour la plage de  $N$  considérée dans la présente étude. Cette représentation confirme l'avancée rapide du front d'eau dans le cas de faibles valeurs de  $N$  avec une différence en hauteur notable comparée aux valeurs élevées (notamment pour  $t^* = 0.3$  et  $1$ ). A un certain temps de la production ( $t^* = 7$  par exemple) cette différence en hauteur diminue.

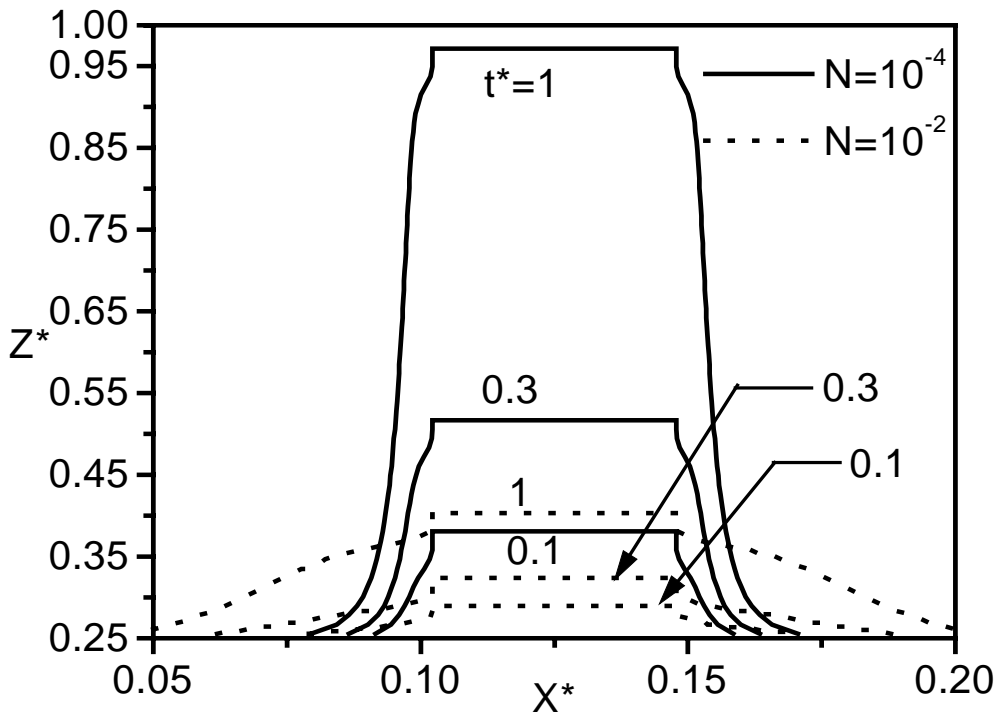


(a)  $N=10^{-4}$

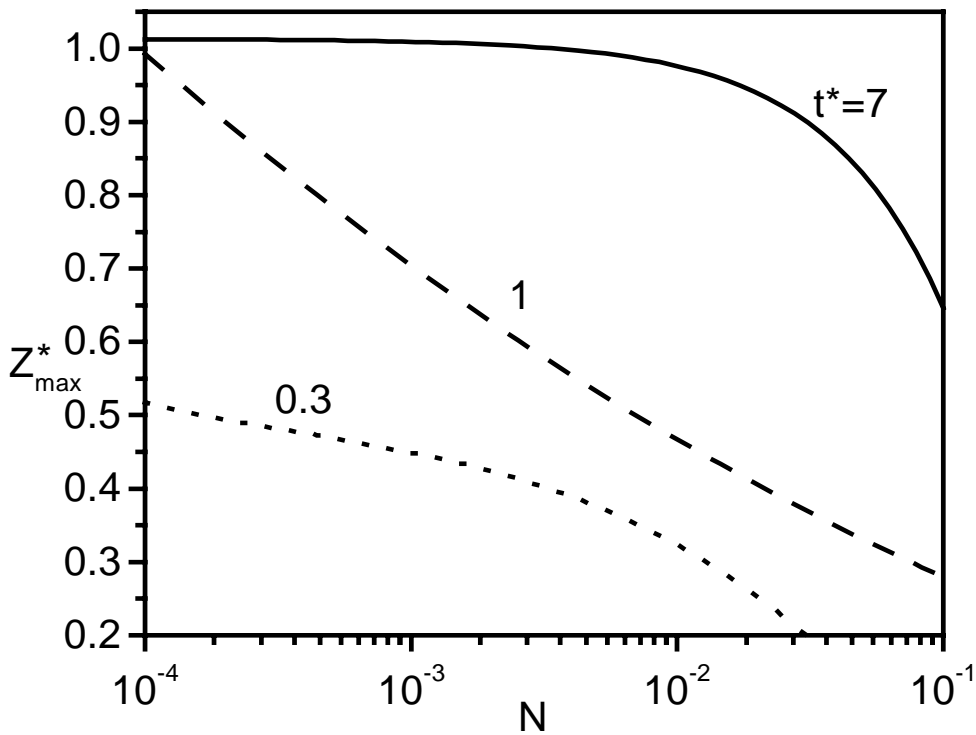


(b)  $N=10^{-2}$

**Figure 3.3** Vue 3D de l'interface eau -huile à  $t^*=1$ ,  $Da=10^{-11}$ ,  $\phi=0.2$ ,  $q^*=10^{-3}$



(a) mouvement de l'interface



(b) hauteur du cône d'eau

**Figure 3.4** Effet du paramètre gravité - viscosité  $Da=10^{-11}$ ,  $\phi=0.2$ ,  $q^*=10^{-3}$

## **B./ EFFET DE LA POROSITE**

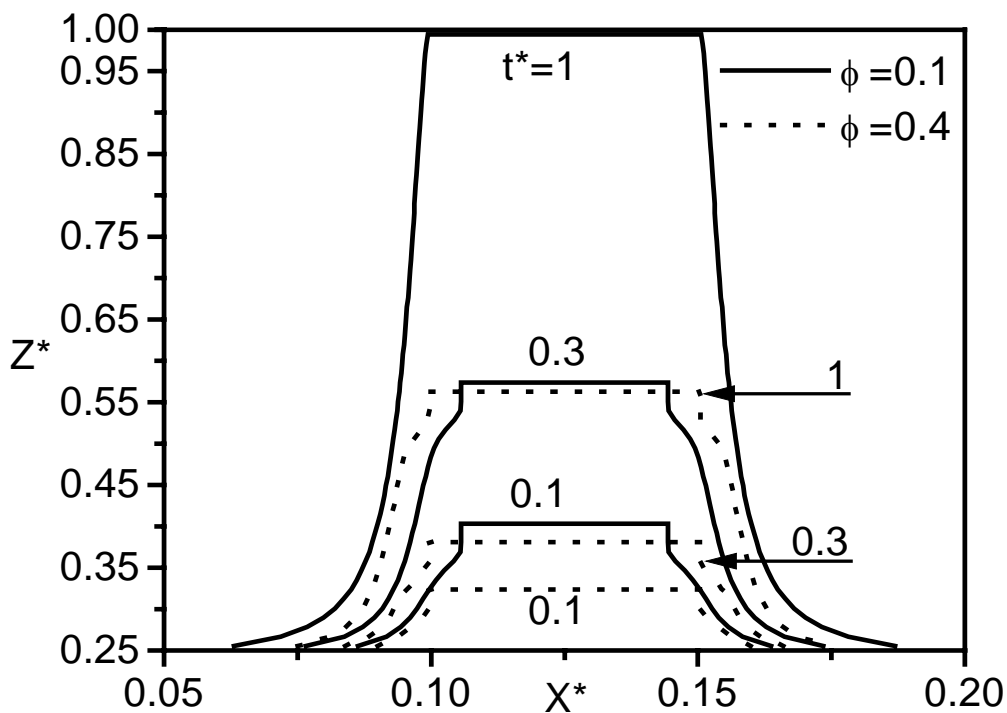
Par définition (Chp.1, §1.1), la porosité est le rapport du volume des pores au volume total de la roche réservoir. Plus petite est la porosité moindre est la quantité d'huile présente dans la formation poreuse. L'influence de la porosité de la roche réservoir sur l'avancée du front d'eau est montrée sur la figure 3.5 (a) et (b). Pour de faibles valeurs de la porosité, pour lesquelles un faible volume d'huile est présent, l'avancée du front d'eau est plus rapide et atteint des positions élevées très tôt. En effet pour des paramètres de production fixés ( $q^*$ ,  $N...$ ), la perméabilité relative à l'eau est plus grande dans le cas de faibles valeurs de la porosité, ce qui favorise un mouvement d'eau très tôt dans la phase d'huile et d'où de l'interface.

## **C./ EFFET DU NOMBRE DE DARCY**

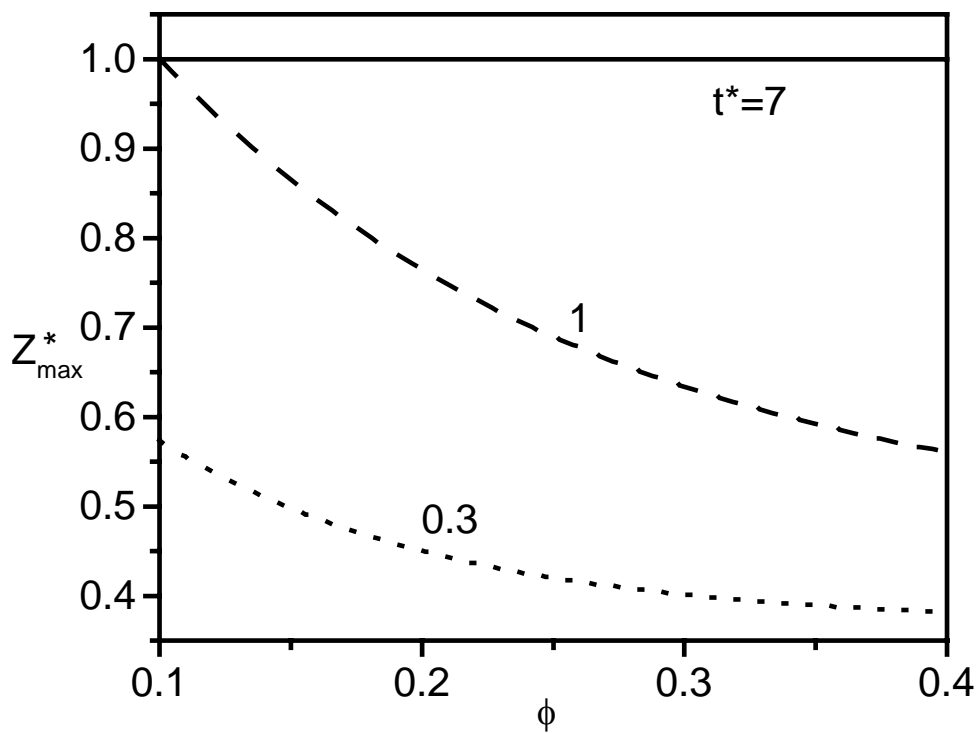
La perméabilité d'une roche réservoir, qui est la capacité offerte par cette dernière à un fluide avec lequel elle est saturée à s'écouler, joue un rôle très important dans l'industrie pétrolière. Pour des paramètres de production fixés ( $N, q^*, \phi$ ), la vitesse du front d'eau est dépendante de la perméabilité de la formation poreuse. Plus perméable est le milieu poreux, plus lent est le mouvement du front d'eau. Ce comportement, montré par la figure 3.3, peut être expliqué par le biais de la loi de Darcy. En effet, pour un débit de production fixé, plus grande est la perméabilité de la roche réservoir, plus petit est le gradient de pression associé avec et donc plus lente est la vitesse du front d'eau.

## **D./ EFFET DU RYTHME DE LA PRODUCTION**

En pratique, le débit de production est le paramètre le plus facile à contrôler en phase primaire par simple action sur des débitmètres. Des débits de production élevés entraînent une avancée rapide du front d'eau, suite à la proportionnalité entre débit et vitesse de déplacement de l'interface, confirmée d'ailleurs par la figure 3.7.

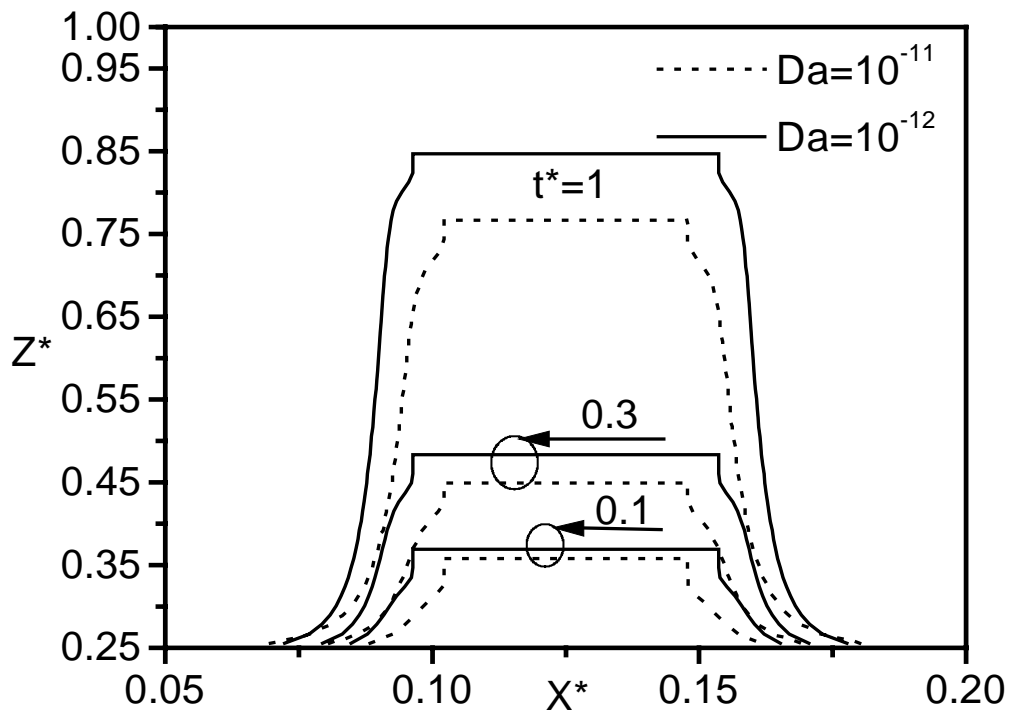


(a) mouvement de l'interface

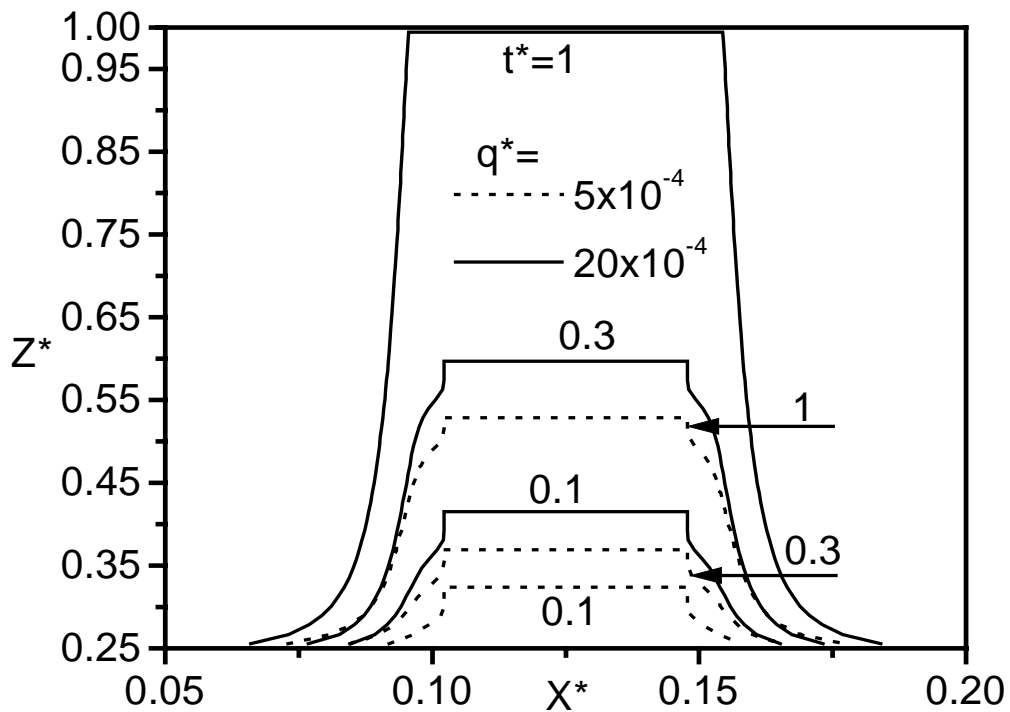


(b) hauteur du cône d'eau

**Figure 3.5** Effet de la porosité  $Da=10^{-11}$ ,  $N=10^{-3}$ ,  $q^*=10^{-3}$



**Figure 3.6** Effet du nombre de Darcy sur le mouvement de l'interface eau - huile  $\phi = 0.2$ ,  $N = 10^{-3}$ ,  $q^* = 10^{-3}$



**Figure 3.7** Effet du débit de production sur le mouvement de l'interface eau - huile  $Da = 10^{-11}$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $N = 10^{-3}$

### 3.3.2 LE TEMPS DE PERCEE D'EAU

Le temps de percée d'eau, représentant le temps nécessaire pour que l'eau entre en production avec l'huile, est le paramètre le plus important dans les situations pratiques. Dans un contexte d'ingénierie, pour un débit de production fixé, il est plus intéressant d'obtenir des temps de percée les plus élevés possibles et de retarder l'arrivée d'eau au puits de production.

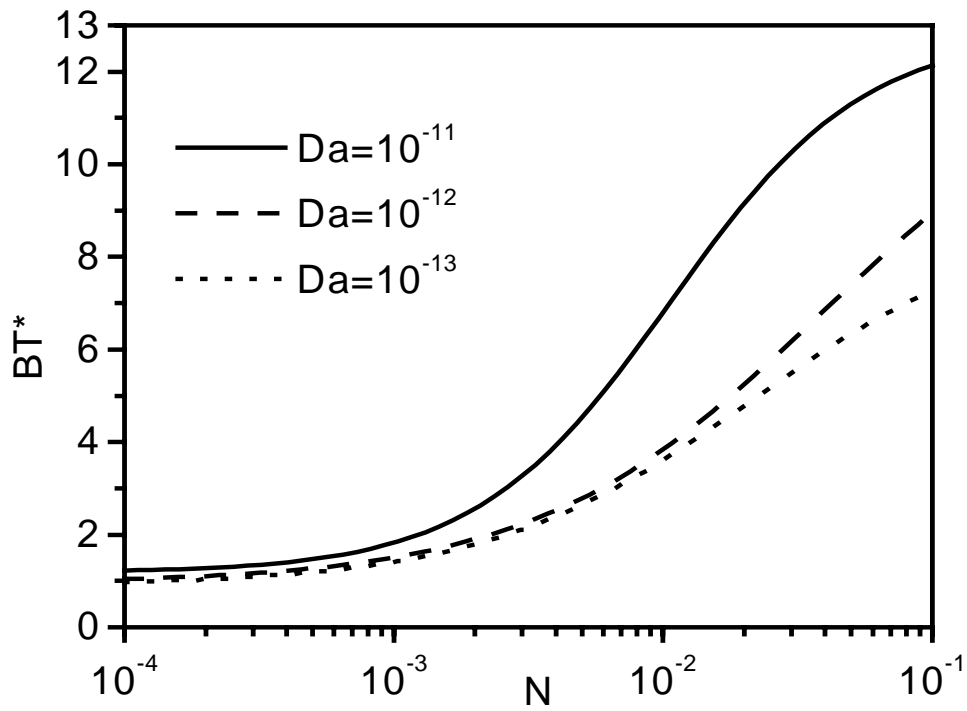
Les effets du nombre de Darcy (perméabilité de la roche réservoir) et du nombre de gravité - viscosité sur le temps adimensionnel de percée d'eau sont reportés dans la figure 3.8(a). Des valeurs élevées du nombre de Darcy ont un effet avantageux sur le temps de percée d'eau ( $BT^*$ ) principalement dans le cas des huiles légères ( $N$  grand). Par exemple pour  $N=10^{-2}$ , un réservoir avec  $Da=10^{-13}$  entraîne un temps adimensionnel de percée de 3.7 alors qu'avec  $Da=10^{-11}$  il est égal à 7. Pour  $N=10^{-1}$ ,  $BT^*$  vaut approximativement 7 pour  $Da=10^{-13}$  et 12 pour  $Da=10^{-11}$ . C'est ainsi donc que l'arrivée d'eau au puits de production est presque doublement retardée. Finalement, pour un débit de production fixé, un moyen d'augmentation de la perméabilité de la roche réservoir devrait être bénéfique particulièrement pour les huiles légères et moins visqueuses (valeurs élevées de  $N$ ). L'amélioration du temps de percée d'eau aux valeurs élevées de  $Da$  s'explique à travers la loi de Darcy. En effet, pour un débit de production fixé, le gradient de pression est inversement proportionnel à la perméabilité de la roche réservoir entraînant ainsi de faibles vitesses du front d'eau. D'autre part la perméabilité relative à l'huile pour une saturation donnée est plus grande dans le cas de roches les plus perméables, d'où des vitesses d'écoulement élevées pour la phase huile.

La production d'huile sans entrée d'eau aux débits élevés ( $q^*$  grands) et dans le cas des huiles lourdes et très visqueuses ( $N$  petits) ne dure qu'une très courte période, la figure 3.8(b) montre d'ailleurs ce comportement. Du point de vue pratique, il serait très bénéfique de réduire la viscosité de l'huile pour pouvoir produire à des débits assez élevés qui permettraient de retarder le plus longtemps possible la percée d'eau dans le puits de production. Par exemple pour  $q^* = 2 \times 10^{-3}$ ,  $BT^*$  est de l'ordre de 1 pour  $N=10^{-4}$  et  $10^{-3}$  alors qu'il dépasse la valeur de 5 pour  $N=10^{-1}$ , c.à.d., le temps de percée d'eau est au moins cinq fois plus grand. Physiquement cette situation découle du fait que maintenir le débit de production fixé, le gradient de pression augmente dans le cas des huiles très visqueuses ( $N$  petits) et vu aussi la

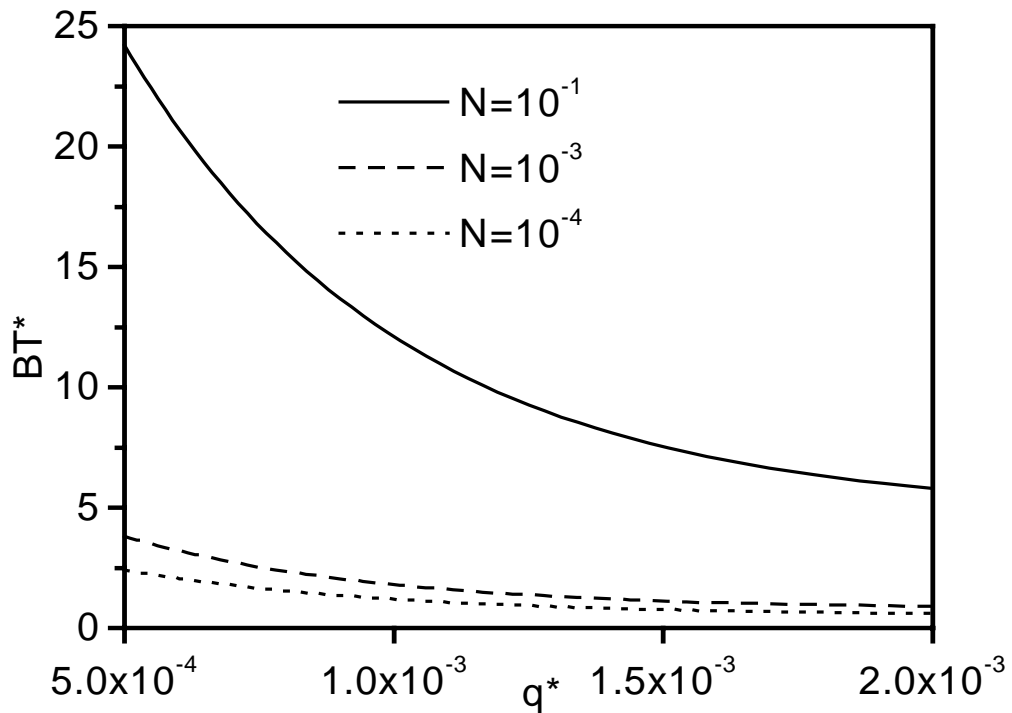
proportionnalité entre gradient de pression et vitesse du front d'eau, ce fluide ne tarde pas à signer son entrée dans le puits.

Aussi faut-il noter que produire à des débits pas trop élevés (si économiquement cela est justifiable) a un effet avantageux sur le temps de percée d'eau dans le cas des huiles légères.

En effet,  $BT^*$  passe de quatre à presque vingt cinq quand  $N$  est augmenté de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$  lorsque  $q^*$  vaut  $5 \times 10^{-4}$ .



(a)  $q^* = 10^{-3}$



(b)  $Da = 10^{-11}$

**Figure 3.8** Temps de percée d'eau  $\phi = 0.2$

### 3.3.3 POURCENTAGE D'HUILE RECUPEREE AU TEMPS DE PERCEE D'EAU

Si le temps de percée d'eau nous renseigne sur la durée de production d'huile sans entrée d'eau, le pourcentage d'huile récupérée jusqu'au moment de cette percée d'eau nous informe d'une part sur la fraction d'huile récupérable par rapport à la quantité initialement en place et sur l'aspect économique de l'exploitation d'autre part. C'est ainsi que sont reportées dans les figures 3.9(a) et (b), les pourcentages d'huile récupérée jusqu'à  $BT^*$  en fonction du nombre de gravité - viscosité, pour différentes valeurs de  $Da$ , et en fonction du nombre de Darcy pour différentes valeurs du débit adimensionnel de production. Pour un débit de production constant, plus perméable est la roche réservoir, plus grande est la quantité d'huile récupérée. Ce comportement s'explique par le fait que le temps de percée d'eau, discuté au paragraphe précédent, est plus grand aux valeurs élevées de  $Da$ . La figure 3.9(a) montre que la quantité d'huile récupérée est plus grande dans le cas des huiles légères et moins visqueuses (valeurs élevées de  $N$ ).  $Rec_{BT}$  chute de 65% à 7% quand  $N$  passe de  $10^{-1}$  à  $10^{-4}$  pour  $Da = 10^{-11}$ . Pour le même cas de figure, nous constatons que pour des valeurs de  $N$  inférieures à une valeur critique de l'ordre de  $10^{-3}$ , il n'y a pratiquement pas d'amélioration pour toute valeur de  $Da$ . D'ailleurs, la figure 3.9(b) confirme cette observation. Pour cette valeur critique de  $N$  ( $10^{-3}$ ),  $Rec_{BT}$  demeure dans la plage comprise entre 8.5% et 10.5%, soit au maximum 2% d'amélioration qui représente un chiffre trop bas pour toute exploitation économique.

Comme nous l'avons expliqué aux paragraphes précédents, d'une part, plus perméable est la formation poreuse, plus petit est le gradient de pression, entraînant ainsi de faibles vitesses du front d'eau. D'autre part, dans le cas des huiles lourdes et très visqueuses, une plus grande résistance s'oppose au mouvement de la phase huile, favorisant ainsi le développement de l'interface, une entrée rapide d'eau et une faible récupération d'huile.

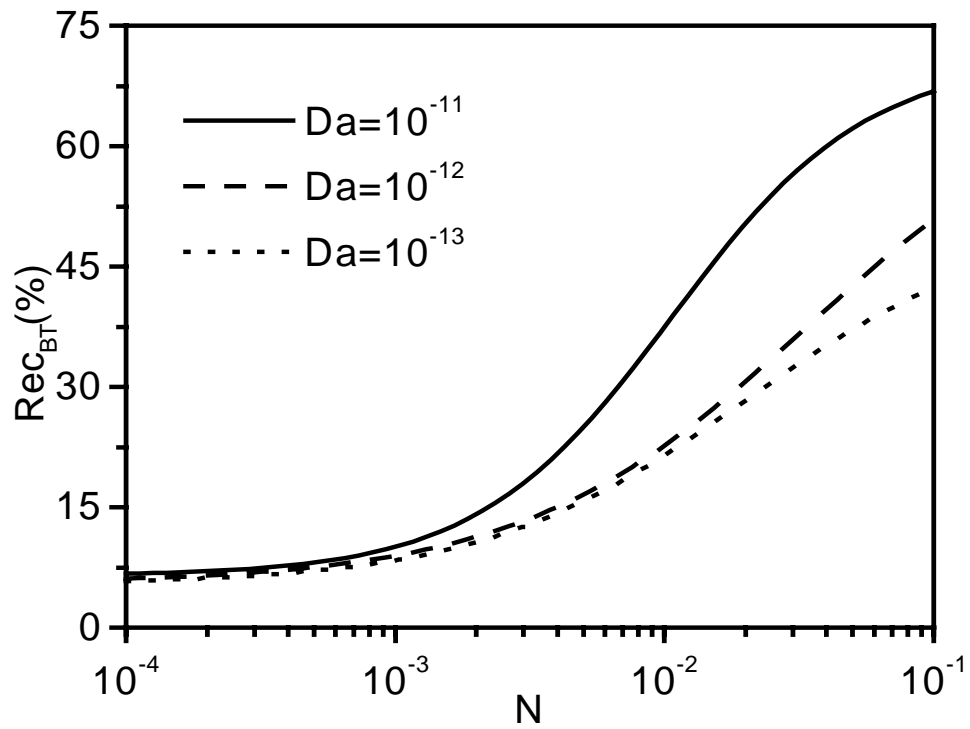
### 3.3.4 EVOLUTION DU DEBIT DE PRODUCTION D'HUILE

Les figures 3.10 et 3.11 donnent les variations du débit adimensionnel d'huile pour différentes valeurs du nombre de Darcy, du paramètre gravité - viscosité et de porosité.

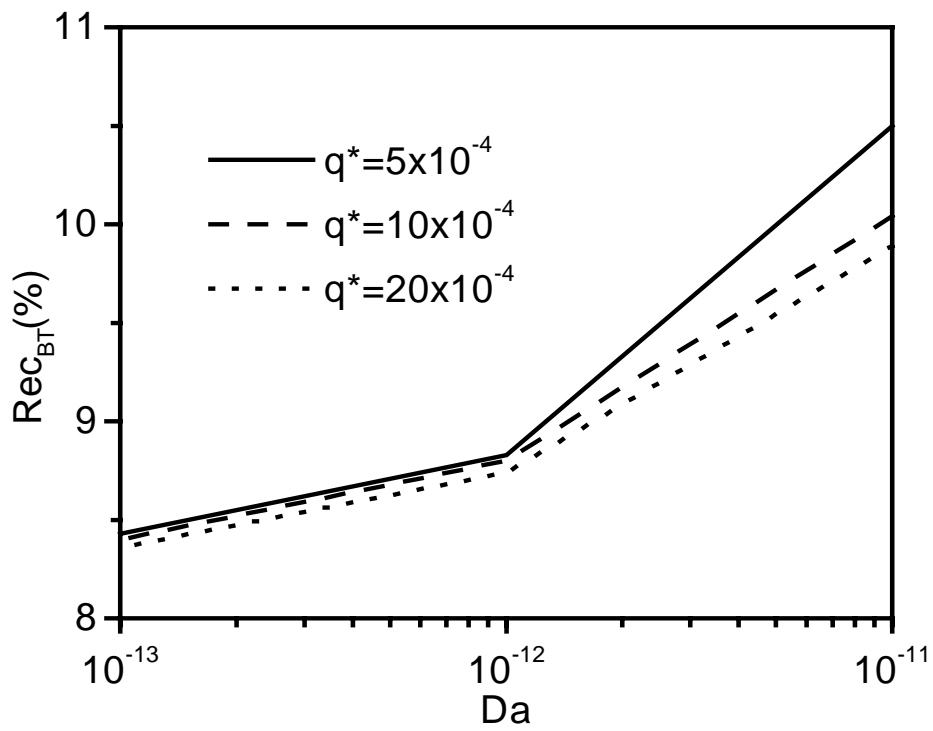
Aux premiers temps de production, de l'huile est récupérée sans eau. A partir du temps de percée d'eau, nous remarquons, figure 3.10(a), que l'effet de  $Da$  est très prononcé durant la période juste après cette percée. Par exemple à  $t^* = 1.5$ , une diminution de  $10^{-1}$  de la valeur

de  $Da$  engendre une réduction de 60% dans le débit d'huile. Plus tard à  $t^* \geq 3$ , le comportement est inversé et une perméabilité élevée entraîne une faible production d'huile. Cependant, il est à mentionner que le débit aura chuté de pas moins de 80% et la récupération n'a plus d'intérêt économique ; le puits devrait être abandonné. Cette situation inversée est due au fait que la saturation résiduelle d'huile augmente quand  $Da$  diminue. Comme conséquence, quand la roche réservoir est à une saturation proche de  $S_{or}$ , le débit de production d'huile diminue considérablement pour les valeurs élevées de  $Da$ .

L'influence du nombre de gravité - viscosité sur le débit de production d'huile est représenté sur la figure 3.10(b). Les courbes indiquent qu'avec l'effet stabilisant de la gravité (valeurs élevées de  $N$ ), le temps de percée d'eau est retardé et la durée de production d'huile sans eau est considérablement prolongé.

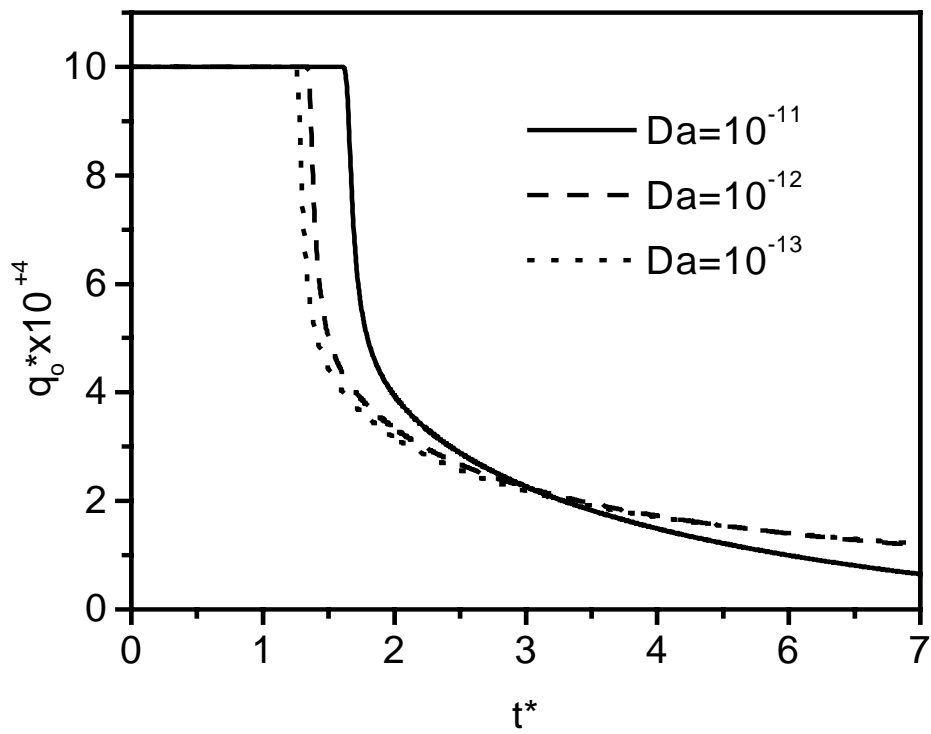


(a)  $\phi = 0.2, q^* = 10^{-3}$

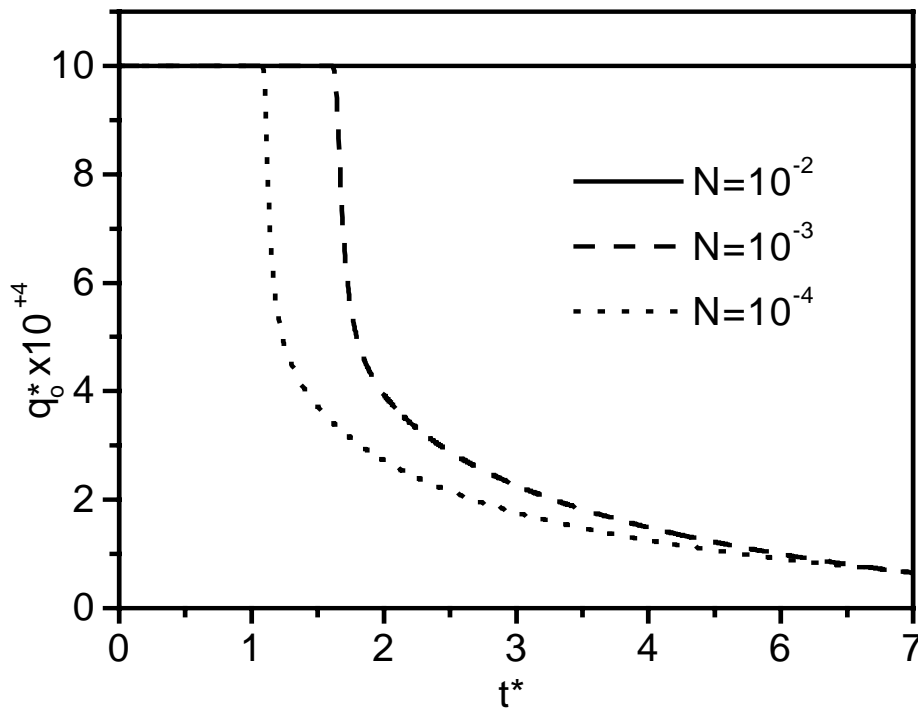


(b)  $\phi = 0.2, N = 10^{-3}$

**Figure 3.9** Pourcentage d'huile récupérée jusqu'au moment de la percée d'eau



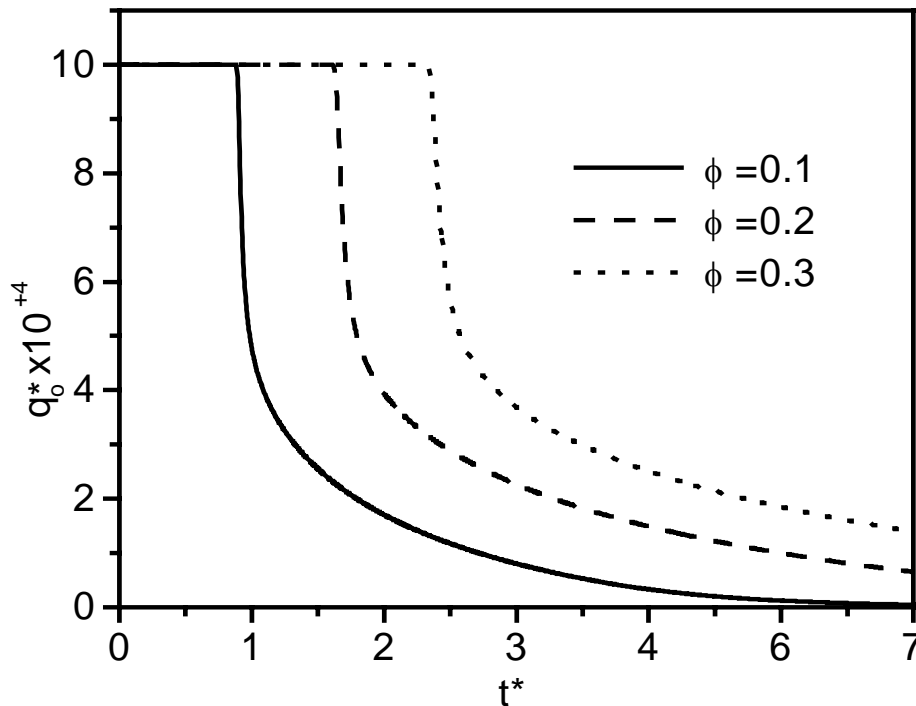
(a)  $N=10^{-3}$



(b)  $Da=10^{-11}$

**Figure 3.10** Evolution du débit adimensionnel de production d'huile  $\phi=0.2$ ,  $q^*=10^{-3}$

L'évolution du débit de production d'huile pour trois valeurs de la porosité est donnée par la figure 3.11. Des valeurs élevées de la porosité permettent de retarder significativement le temps de percée,  $BT^*$  passe de 1 à 2.5 quand la porosité augmente de 0.1 à 0.3. Pour des roches présentant de faibles porosités, la réduction dans le débit d'huile varie de 60% à 80%.



**Figure 3.11** Evolution du débit adimensionnel de production d'huile  
 $Da=10^{-11}$ ,  $N=10^{-3}$ ,  $q^*=10^{-3}$

En définitive, une corrélation pour le calcul du temps de percée d'eau ainsi que du pourcentage d'huile récupérée au temps de percée d'eau est développée en utilisant l'analyse de régression (annexe F). Une relation entre le pourcentage d'huile récupérée  $Rec_{BT}$  et le nombre de gravité - viscosité  $N$  est proposée comme suit :

$$Rec_{BT} = \frac{A_1 - A_2}{1 + \left(\frac{N}{X_0}\right)^m} + A_2 \quad (3.17)$$

Le temps de percée d'eau est évalué par l'expression suivante :

$$BT = \frac{Rec_{BT} \times 10^{-2}}{q} \quad (3.18)$$

Cette corrélation est valide dans la plage de  $N$ ,  $q^*$ ,  $Da$  et  $\phi$  considérée dans cette étude. Les valeurs de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $X_0$  et  $m$  sont mentionnées dans le tableau 3.2. Pour des valeurs intermédiaires du nombre de Darcy, ces coefficients sont évalués par une interpolation linéaire. Le nombre de Darcy doit être dans l'échelle logarithmique et décimale dans cette interpolation.

Exemple d'interpolation :

Pour déterminer la valeur de  $A_1$  correspondant à un nombre de Darcy de  $5 \times 10^{-12}$ , on utilise l'interpolation suivante :

$$A_1(Da = 5 \times 10^{-12}) = \frac{(A_1(Da = 10^{-11}) - A_1(Da = 10^{-12}))}{\log_{10}(10^{-11}) - \log_{10}(10^{-12})} (\log_{10}(5 \times 10^{-12}) - \log_{10}(10^{-12})) + A_1(Da = 10^{-12})$$

Da	$A_1$	$A_2$	$X_0$	m
$10^{-11}$	6.51	67.38	$9 \times 10^{-3}$	1.27
$10^{-12}$	5.56	70.47	$35 \times 10^{-3}$	0.83
$10^{-13}$	5.39	51.23	$19 \times 10^{-3}$	0.89

**Tableau 3.2** Valeurs des coefficients dans la corrélation (équation 3.17)

### 3.5 CONCLUSION

Le comportement transitoire de l'interface eau - huile durant un mouvement ascendant dans une cellule poreuse saturée, est étudié numériquement. L'analyse numérique est réalisée pour suivre l'évolution de l'interface, son mouvement et déduire les conditions optimales

menant à la meilleure production. Les effets de plusieurs paramètres liés à la roche réservoir et aux propriétés des fluides sont analysés et commentés par introduction de paramètres adimensionnels tels que le nombre de Darcy, le nombre de gravité - viscosité et le débit adimensionnel de production.

Les résultats obtenus montrent un développement important de l'interface eau - huile quand le nombre de gravité - viscosité et la porosité de la roche réservoir diminuent. L'augmentation du rythme de production entraîne aussi une avancée rapide du front d'eau. Le temps de percée d'eau est très court pour les faibles valeurs de  $N$  (huiles lourdes et très visqueuses) avec un faible effet stabilisant de la gravité de même pour les faibles valeurs du nombre de Darcy (faibles perméabilités). Pour un débit de production fixé, un moyen d'augmentation de la perméabilité de la roche réservoir devrait être très bénéfique particulièrement pour les huiles légères et faiblement visqueuses. Dans le présent travail une corrélation a été proposée pour prédire le pourcentage d'huile récupérée au temps de percée d'eau. Cette corrélation a été développée en se basant sur les équations gouvernantes et l'analyse par la régression utilisant les données de la simulation numérique.

## CHAPITRE QUATRE

### ETUDE DE LA DOUBLE COMPLETION DANS LE CAS DES PUIITS VERTICAUX

#### 4.1 INTRODUCTION

Plusieurs méthodes techniques ont été développées dans le but de minimiser les conséquences du cône d'eau dans les réservoirs pétroliers. Ces solutions englobent la production à des débits inférieurs à la valeur critique, l'éloignement des perforations du puits de l'interface de contact eau - huile ou la création de zones de blocage d'eau autour du puits par injection de polymères ou de gels. Malheureusement, toutes ces méthodes conventionnelles ne résolvent pas le problème de la percée d'eau. Une autre technique utilisée pour les réservoirs assujettis au cône d'eau est l'emploi de puits horizontaux. Cependant, les puits horizontaux eux-mêmes n'échappent pas à ce problème. Comme pour les puits verticaux, le débit critique dans le cas des puits horizontaux est trop faible pour toute fin économique. Une enquête poussée sur les coûts et les profits des puits horizontaux révèlent parfois des raisons non convaincantes quant à leur utilisation [Chugbo et al., 1989 ; Irrgang, 1994]. Parmi les difficultés rencontrées dans l'utilisation des puits horizontaux, on peut citer : la vulnérabilité à une mauvaise cimentation et les contraintes imposées par la technologie de forage.

La technologie "Downhole Water Sink" (DWS) est l'une des solutions développées pour réduire le cône d'eau dans le cas des puits verticaux. Dans les champs pétroliers, plusieurs paramètres affectent le cône d'eau dans le cas de puits verticaux tels que le débit de production d'huile, le rapport de mobilité, la différence de densité entre les fluides, l'anisotropie et la porosité. Le but du présent chapitre porte sur une étude numérique du comportement de l'interface eau - huile et le calcul du temps de percée d'eau par une formulation complète et ceci pour une large gamme de valeurs des paramètres cités. Cette analyse permettra d'obtenir en détail et avec précision les performances de la double complétion dans le cas des puits verticaux.

## 4.2 FORMULATION

Un modèle puits [Azziz and Settari, 1986] est utilisé pour évaluer les performances de la double complétion dans le contrôle du cône d'eau dans le cas des puits verticaux. Le modèle physique et le système de coordonnées sont schématiquement représentés dans la figure 4.1. Deux zones sont distinguées : huile et eau. Le puits est perforé sur deux niveaux, le premier dans la zone huile et le second dans la zone eau. Les deux complétions sont séparées par des conduits différents (figure 4.2). Les deux fluides sont considérés incompressibles et non miscibles avec des propriétés constantes. Le milieu poreux est homogène et anisotrope (la perméabilité verticale est différente de la perméabilité horizontale).

La loi de Darcy et l'équation de continuité décrivent le mouvement des fluides dans le milieu poreux. Elles s'écrivent comme suit :

Equation de continuité :

$$-\nabla \cdot (\vec{V}_l) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_l) + \bar{Q}_{la} \quad (4.1)$$

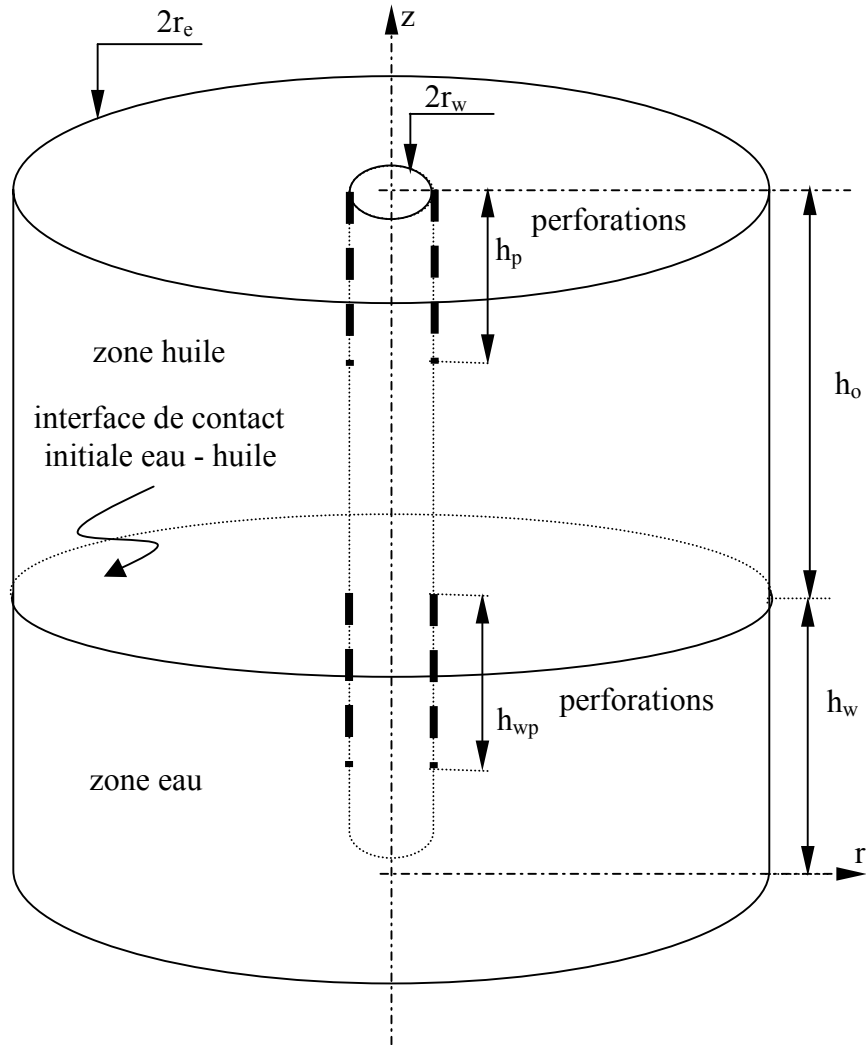
Loi de Darcy :

$$\vec{V}_l = -\bar{K} \frac{K_{r_l}}{\mu_l} (\nabla P_l + \rho_l \mathbf{g}) \quad (4.2)$$

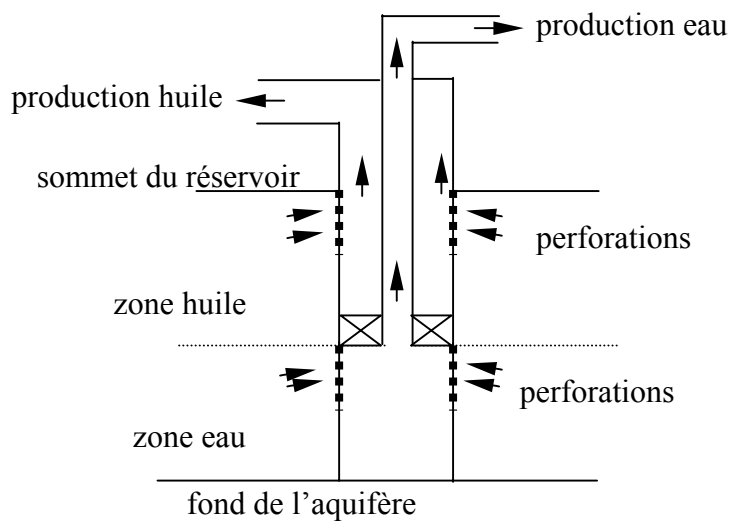
L'indice  $l$  désigne les phases eau ( $w$ ) ou huile ( $o$ ) et l'indice ( $a$ ) peut correspondre soit à la complétion dans la zone huile ( $oc$ ) ou à la complétion dans la zone eau ( $wc$ ).  $\bar{Q}_{la}$  représente le débit de production de la phase  $l$  par unité de volume du réservoir.

En substituant la vitesse Darcienne donnée par l'équation (4.2) dans l'équation (4.1), on obtient l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{K_{r_l}}{\mu_l} (\nabla P_l + \rho_l \mathbf{g}) \right] = \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_l) + \bar{Q}_{la} \quad (4.3)$$



**Figure 4.1** Modèle physique et système de coordonnées



**Figure 4.2** Schéma de la technique de double complétion

Pour chacune des phases fluides, l'équation (4.3) s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{kr_o}{\mu_o} (\nabla P_o + \rho_o \mathbf{g}) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o) + \bar{Q}_{oa} \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{kr_w}{\mu_w} (\nabla P_w + \rho_w \mathbf{g}) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) + \bar{Q}_{wa} \quad (4.5)$$

En sommant les équations (4.4) et (4.5), et pour un milieu poreux complètement saturé par les fluides, on obtient l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{kr_o}{\mu_o} (\nabla P_o + \rho_o \mathbf{g}) \right] + \nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{kr_w}{\mu_w} (\nabla P_w + \rho_w \mathbf{g}) \right] = \bar{Q}_a \quad (4.6)$$

avec :

$$\bar{Q}_a = \bar{Q}_{oa} + \bar{Q}_{wa} \quad (4.7)$$

qui représente le débit total de production par unité de volume du réservoir.

Des équations supplémentaires fermant le système sont données ci dessous :

$$S_w + S_o = 1 \quad (4.8)$$

$$P_c = P_o - P_w \quad (4.9)$$

En substituant l'équation (4.9) dans l'équation (4.6), on obtient une équation en terme de pression en eau :

$$\nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{kr_o}{\mu_o} (\nabla P_w + \nabla P_c + \rho_o \mathbf{g}) \right] + \nabla \cdot \left[ \bar{K} \frac{kr_w}{\mu_w} (\nabla P_w + \rho_w \mathbf{g}) \right] = \bar{Q}_a \quad (4.10)$$

Des conditions aux limites de non écoulement à travers les frontières fermées sont imposées. Une pression constante est considérée au fond de l'aquifère. Ces conditions s'écrivent mathématiquement comme suit :

$$\vec{V}_w \cdot \vec{n} = 0 \text{ aux frontières fermées ou } \nabla(P_w + \rho_w \mathbf{g}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.11)$$

$$P_w = P_{aq} \text{ à } z = 0 \text{ et } r_w < r < r_e \quad (4.12)$$

$\vec{n}$  est le vecteur unitaire normale à la frontière fermée.

Initialement la zone huile est saturée avec de l'huile en présence d'eau à la saturation irréductible  $S_{wi}$  et la zone eau est sans huile.

$$S_o = 1 - S_{wi} \quad \text{et} \quad S_w = S_{wi} \quad \text{à} \quad h_w < z < h, \quad r_w < r < r_e \quad (4.13)$$

$$S_o = 0 \quad \text{et} \quad S_w = 1 \quad \text{à} \quad 0 < z < h_w, \quad r_w < r < r_e \quad (4.14)$$

On définit les paramètres adimensionnels suivants :

$$Da_H = k_H / h_o^2, \quad Da_V = k_V / h_o^2, \quad Ra = Da_V / Da_H, \quad Rkr = Kr_{wor} / Kr_{oiw},$$

$$M = Rkr \mu_o / \mu_w, \quad ND\rho = (\rho_w - \rho_o) / \rho_w, \quad N\rho_w = \rho_w g h_o / P_{woc}$$

$P_{woc}$  est la pression initiale à l'interface de contact eau - huile.

L'introduction des paramètres adimensionnels précédents reliés aux caractéristiques de la roche, aux propriétés des fluides et au rythme de la production, dans la formulation permet de réécrire les équations (4.5) et (4.10) comme suit :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z^*} \left( Ra \, kr_w \frac{\partial P_w^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \, kr_w \frac{\partial P_w^*}{\partial r^*} \right) \right] (ND\rho)(N\rho_w) = \frac{1}{Da_H} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} (\phi S_w) + Q_{wa}^* \right) \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ra \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ \left( kr_o \frac{Rkr}{M} + kr_w \right) \frac{\partial P_w^*}{\partial z^*} + \left( kr_o \frac{Rkr}{M} \right) \frac{\partial P_c^*}{\partial z^*} \right] + \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ r^* \left( kr_o \frac{Rkr}{M} + Kr_w \right) \frac{\partial P_w^*}{\partial r^*} + r^* \left( kr_o \frac{Rkr}{M} \right) \frac{\partial P_c^*}{\partial r^*} \right] \end{array} \right\} (ND\rho)(N\rho_w) = \frac{\bar{Q}_a^*}{Da_H} \quad (4.16)$$

L'adimensionnement des autres variables est donné dans la nomenclature.

L'ensemble des équations à résoudre consiste en l'équation de pression adimensionnelle (4.16), l'équation de saturation en eau (4.15) et l'équation de saturation totale (4.8).

Dans la zone de complétion huile, jusqu'à la percée d'eau, de l'huile uniquement est produite et  $\bar{Q}_{woc}^*$  est nul. Cependant, après la percée,  $\bar{Q}_{oc}^*$  diminue alors que  $\bar{Q}_{woc}^*$  augmente. Dans la zone de complétion eau, la percée d'huile peut ou ne peut prendre place.

Quand la percée d'huile a lieu dans les perforations du puits de la zone eau,  $\bar{Q}_{owc}^*$  n'augmente pas continuellement.

Les conditions initiales et aux limites écrites sous forme adimensionnelles, sont :

$$\nabla(\mathbf{P}_w^*) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{aux frontières fermées} \quad (4.17)$$

$$P_w^* = P_{aq}^* \quad \text{à } z^* = 0 \quad \text{et } r_w^* < r^* < r_e^* \quad (4.18)$$

$$S_o = 1 - S_{wi} \quad \text{et } S_w = S_{wi} \quad \text{à } h_w^* < z < h^*, \quad r_w^* < r^* < r_e^* \quad (4.19)$$

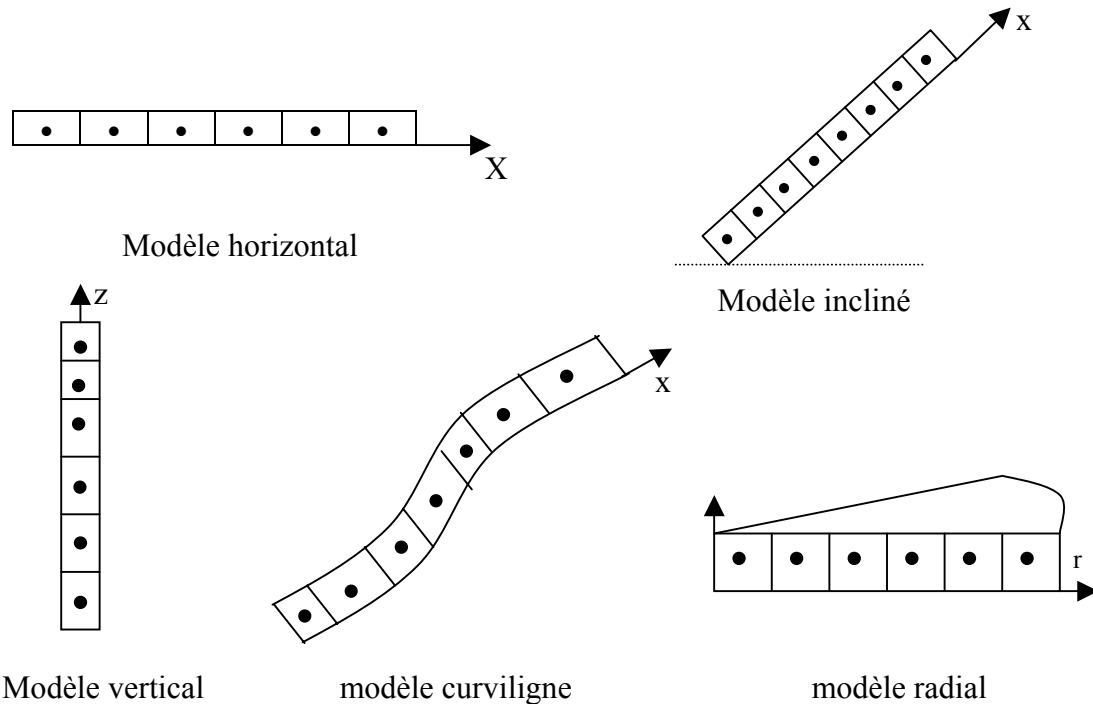
$$S_o = 0 \quad \text{et } S_w = 1 \quad \text{à } 0 < z^* < h_w^*, \quad r_w^* < r^* < r_e^* \quad (4.20)$$

### 4.3 PROCEDURE NUMERIQUE

Dans les modèles numériques, l'écoulement de chaque fluide dans le réservoir est décrit par la loi de Darcy généralisée, alors que l'équation de continuité tient compte de la conservation de masse. Les débits des fluides, produits à partir ou injectés dans les puits, doivent être inclus dans les équations ou dans les conditions aux limites. Les conditions aux frontières du réservoir à simuler peuvent être classées en deux types : (1) condition de Dirichlet spécifiant la pression (constante ou variable dans le temps), (2) condition de Neumann (conditions de non écoulement à travers les frontières fermées et débits d'écoulements spécifiés). L'incorporation de l'équation de Darcy généralisée dans l'équation de continuité, donne lieu à une équation en termes de pression qui décrit complètement le comportement du réservoir. C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre, avec des coefficients dépendants de la pression et de la saturation. Le réservoir est divisé en un certain nombre fini de mailles (volumes de contrôle) et le temps est discrétisé en une série de pas temporels.

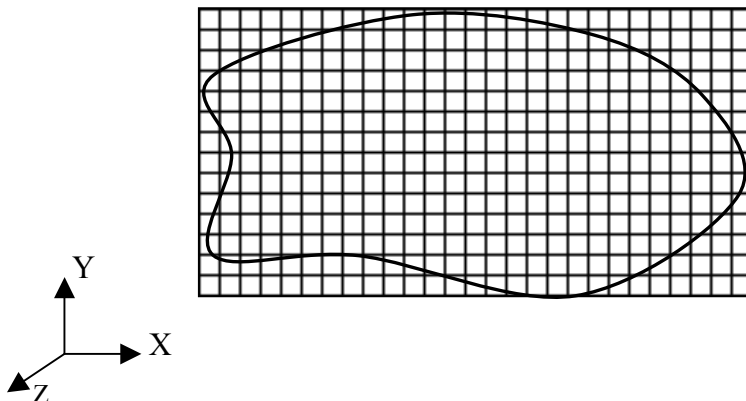
Les réservoirs d'hydrocarbures ont une nature tri-dimensionnelle ; toute formulation mathématique à deux dimensions (2D) représente une simplification (c'est aussi le cas pour une formulation unidimensionnelle 1D). Il est important de comprendre clairement les hypothèses qui ont mené à une formulation 1D ou 2D ainsi les limitations du modèle seront bien appréciées.

Pour une simulation unidimensionnelle, on dispose de cinq types de modèles de simulation [Chierici, 1995] : (1) horizontal, (2) incliné, (3) vertical, (4) curviligne et (5) radiale.

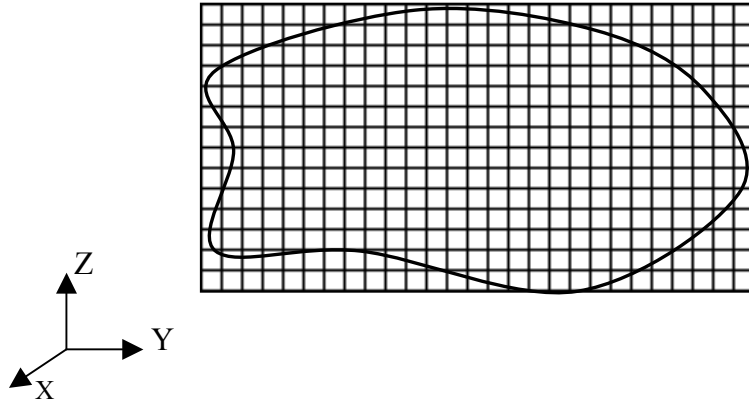


La simulation des réservoirs en 2D est souvent utilisée. Dans plusieurs situations, les modèles 2D donnent des informations adéquates. Trois types de modèle 2D sont distingués [Azziz and Settari, 1986] :

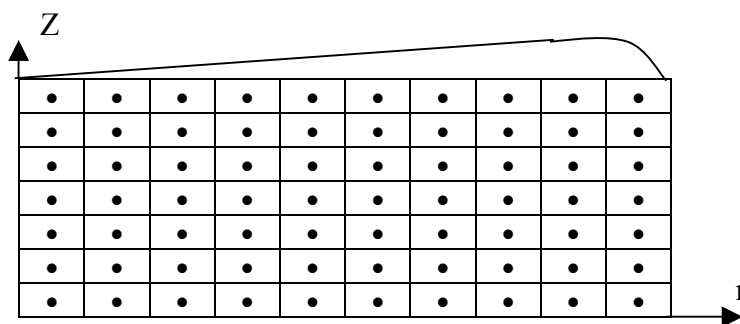
1. Modèles surfaciques (X–Y) : dans ce cas, l'épaisseur du réservoir est très petite comparée à l'étendue de sa superficie. Le réservoir est alors maillé dans les directions X et Y. Ces modèles ne peuvent pas simuler l'écoulement dans la direction verticale, des propriétés uniformes dans la direction Z sont alors considérées.



2. Les modèles verticaux : pour ce type de modèle l'écoulement dans la direction verticale est important et prépondérant dans une direction horizontale (par exemple Y). l'écoulement dans la direction X est alors négligé.



3. Modèle puits : il est particulièrement employé pour la simulation des problèmes de coning dans le cas des puits verticaux. L'approche utilisée est de supposer que l'écoulement est symétrique autour du puits et d'utiliser les coordonnées cylindriques, l'axe Z étant confondu avec l'axe du puits. Ce modèle suppose que la solution pour le domaine est en mode axisymétrique, les propriétés de la roche aussi bien que les conditions aux limites sont fonctions de  $r, Z$  et  $t$  uniquement. De plus, les conditions initiales et les forces de gravité doivent maintenir cette symétrie.



Dans le présent chapitre, les équations gouvernantes sont transformées en équations algébriques par utilisation de la méthode des volumes finis [Patankar, 1980 ; 1981]. Un schéma totalement implicite est utilisé et la perméabilité relative aux interfaces des volumes de contrôle est évaluée par une approximation du second ordre, présentée en annexe C, considérant deux points à l'amont [Azziz and Settari, 1986]. L'ensemble des équations

algébriques est résolu par la méthode itérative dite par blocs. La procédure itérative est arrêtée à chaque pas de temps quand entre deux itérations consécutives, le critère de convergence a lieu. Ce dernier est basé sur l'erreur relative de la variable pression, cette erreur est prise inférieure à 1%. Un maillage non uniforme de  $40 \times 24$  nœuds, très fin près du puits, avec un pas de temps adimensionnel de  $\Delta t^* = 72 \times 10^{11}$  sont utilisés pour opérer les calculs pour la présente étude. Le maillage choisi est basé sur l'analyse de la sensibilité du code au maillage, reporté dans le tableau 4.1.

$\Delta t^*$	Nombre de nœuds dans		BT*	Difference relative (%)
	La direction radiale	La direction verticale		
$72 \times 10^{11}$	30	18	$0.245 \times 10^{18}$	-----
$72 \times 10^{11}$	40	24	$0.274 \times 10^{18}$	5.38
$72 \times 10^{11}$	50	30	$0.272 \times 10^{18}$	0.73
$29 \times 10^{14}$	40	24	$0.270 \times 10^{18}$	-----
$72 \times 10^{11}$	40	24	$0.274 \times 10^{18}$	1.48
$144 \times 10^{10}$	40	24	$0.277 \times 10^{18}$	1.09

**Tableau 4.1** Sensibilité du code au maillage pour  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,

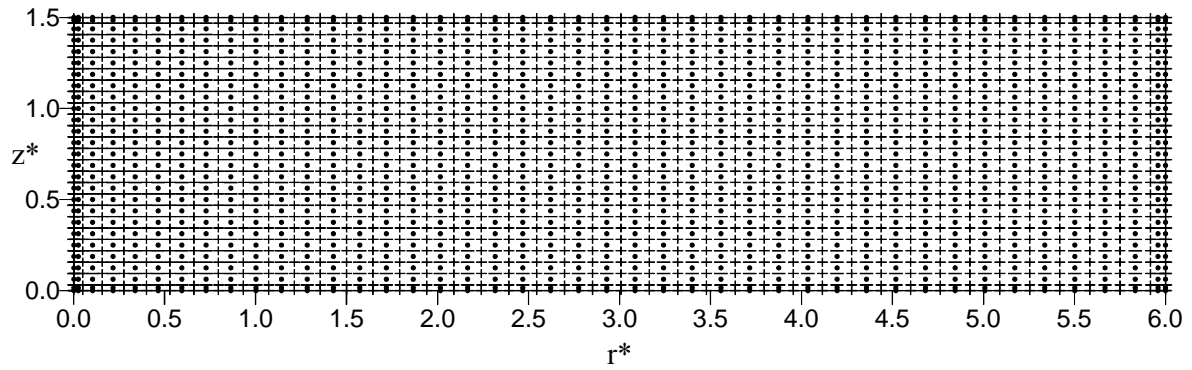
$$Ra = 0.2, \phi = 0.2, Q_{oc}^* = 25 \times 10^{-10}, Q_{wc}^* = 0$$

La position des nœuds est calculée par une formule en puissance donnée par l'expression suivante :

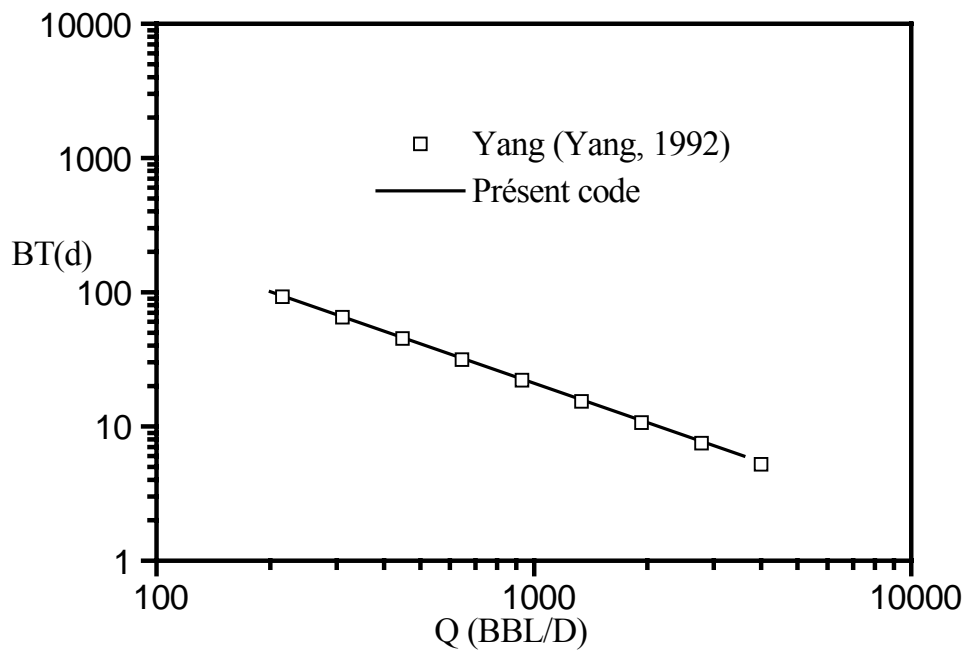
$$r_I^* = r_w^* + \left[ \left( \frac{I-2}{M-2} \right)^n + \left( \frac{I-1}{M-2} \right)^n \right] r_e^* \quad \text{pour } I \geq 2$$

Le maillage utilisé, pour simuler le problème du coning d'eau en double et en simple complétion est représenté par la figure 4.3a.

Le présent code est validé en reconsidérant le travail de Yang (1992). L'auteur a étudié analytiquement le cône d'eau dans les situations de puits vertical et horizontal. La figure 4.3b montre un excellent accord entre nos résultats et ceux de Yang pour la prédiction du temps de percée en fonction du débit de production dans le cas d'un puits vertical.



**Figure 4.3a** Maillage utilisé pour la simulation du problème du coning



**Figure 4.3b** Comparaison des résultats de simulation numérique avec le travail publié de Yang

❖ **La méthode itérative par blocs**

Dans la méthode itérative par blocs, les inconnues sont manipulées de telle sorte que la matrice des coefficients soit tridiagonale ce qui permettra alors d'appliquer l'algorithme de Thomas. Il est fait appel dans ce sens à la méthode itérative de Gauss–Seidel.

Pour illustrer cette procédure, on considère le système d'équations suivant :

$$a_{p_{ij}} \Phi_{ij} = a_{E_{ij}} \Phi_{i+1,j} + a_{W_{ij}} \Phi_{i-1,j} + a_{N_{ij}} \Phi_{i,j+1} + a_{S_{ij}} \Phi_{i,j-1} + B_{ij}$$

Pour  $i = 2, M - 1$  et  $j = 2, N - 1$

avec  $M$  et  $N$  qui correspondent respectivement aux indices du dernier nœud suivant les directions  $r$  et  $z$ .

En posant :

$$b_i = a_{N_{ij}} \Phi_{i,j+1}^k + a_{S_{ij}} \Phi_{i,j-1}^k + B_{ij}$$

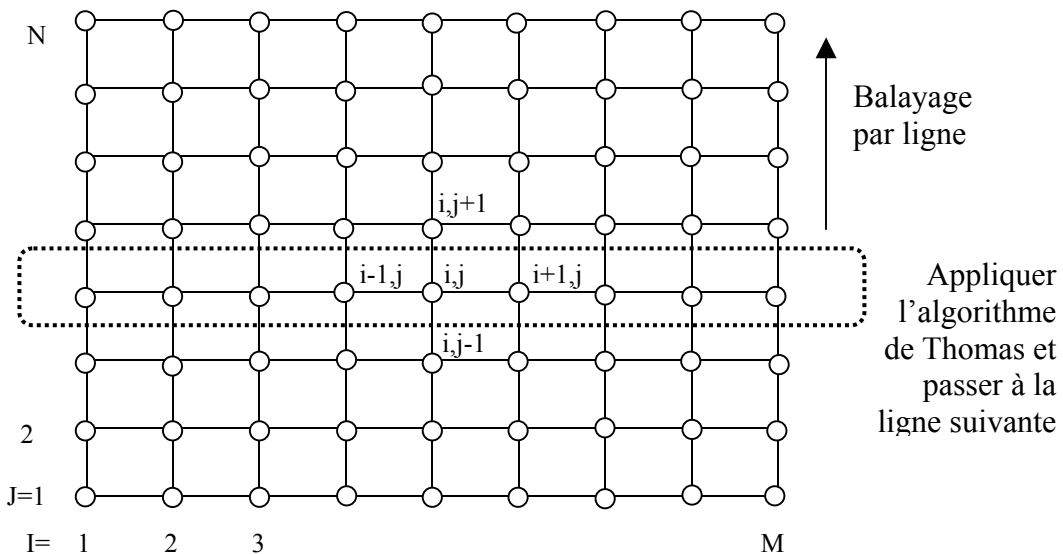
Avec  $k$  faisant référence aux dernières valeurs disponibles en ces nœuds.

On aura :

$$a_{p_{ij}} \Phi_{ij}^{k+1} = a_{E_{ij}} \Phi_{i+1,j}^{k+1} + a_{W_{ij}} \Phi_{i-1,j}^{k+1} + b_i$$

$k+1$  désigne l'itération courante.

$\Phi_{ij}^{k+1}$  sont alors déterminées par application de l'algorithme de Thomas pour la ligne  $j$ , l'indice  $i$  varie de 2 à  $M-1$ . On passe ensuite à la ligne suivante et on recommence la même procédure jusqu'au balayage total des lignes de 2 à  $N-1$ .



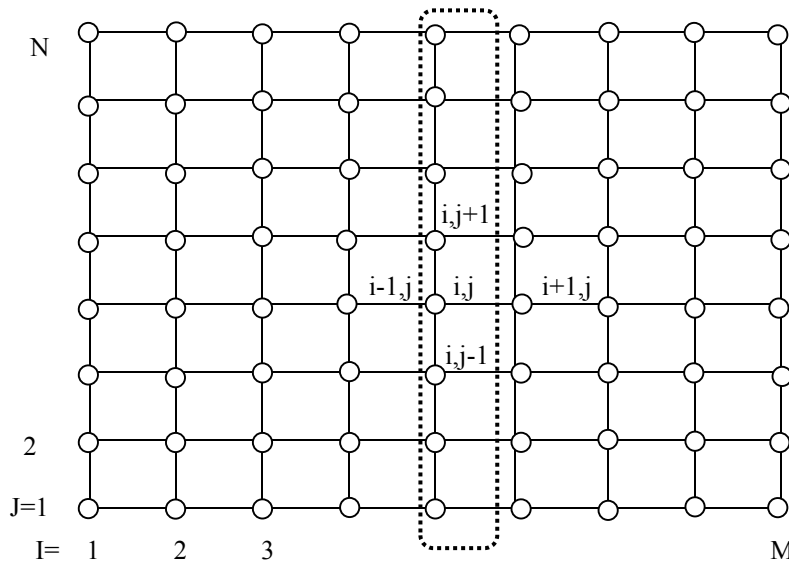
La même procédure est aussi appliquée pour un balayage suivant les colonnes. Le système d'équations, dans ce cas, s'écrit alors comme suit :

$$a_{p_{ij}} \Phi_{ij}^{k+1} = a_{N_{ij}} \Phi_{i,j+1}^{k+1} + a_{S_{ij}} \Phi_{i,j-1}^{k+1} + b_i$$

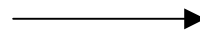
avec :

$$b_i = a_{E_{ij}} \Phi_{i+1,j}^k + a_{W_{ij}} \Phi_{i-1,j}^k + B_{ij}$$

On doit balayer toutes les colonnes de 2 à N-1.



Appliquer l'algorithme de Thomas et passer à la colonne suivante.



Balayage par colonne

Dans certaines situations par souci d'accélérer la convergence, la même procédure est envisagée pour un balayage suivant les lignes et les colonnes, mais, dans le sens inverse, c.a.d, de N-1 à 2 et de M-1 à 2.

Les quatre balayages effectués, une itération alors est accomplie.

#### 4.4 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Dans ce paragraphe, seront présentés les résultats relatifs au comportement de l'interface eau - huile et au temps de percée d'eau prédits par la présente simulation numérique. Trois groupes de paramètres adimensionnels sont distingués et considérés. Ce sont les débits de production adimensionnels dans la zone de complétion eau et huile, les propriétés des fluides (rapport de mobilité et différence adimensionnelle de densité) et les caractéristiques de la roche (rapport d'anisotropie, nombre de Darcy horizontal et porosité). Ces paramètres varient dans la plage suivante :  $10^{-10} \leq Q_{oc}^* \leq 25 \times 10^{-10}$ ,  $0 \leq Q_{wc}^* \leq 1.5Q_{oc}^*$ ,  $0.1 \leq M \leq 20$ ,  $0 \leq ND\rho \leq 0.4$ ,  $0 < Ra \leq 1.4$ ,  $0 < Da_H \leq 8 \times 10^{-16}$ ,  $0.1 \leq \phi \leq 0.4$ , ces valeurs correspondent à celles rencontrées dans les situations pratiques.

Les débits de production totale sont donnés par les expressions suivantes :

$$Q_{oc}^* = 2 \pi r_w^* \int_{h_w^* - h_p^*}^{h^*} \bar{Q}_{oc}^* dz^* \quad (4.21)$$

$$Q_{wc}^* = 2 \pi r_w^* \int_{h_w^* - h_{wp}^*}^{h_w^*} \bar{Q}_{wc}^* dz^* \quad (4.22)$$

Comme nous l'avons souligné au chapitre un, il n'existe pas de forme générale pour la perméabilité relative ou la pression capillaire. Plusieurs corrélations empiriques et données sont rencontrées dans la littérature. Les données de Abass et Bass (1988) qui fournissent l'évolution de la pression capillaire sont considérées dans la présente étude. Nous avons corrélé leurs données par les expressions suivantes :

$$Kr_o = 0.97 / [1 + \text{Exp}((S_w - 0.33)/0.11)] - 0.02 \quad (23)$$

$$Kr_w = -1.90 / [1 + \text{Exp}((S_w - 0.91)/0.26)] + 1.80 \quad (24)$$

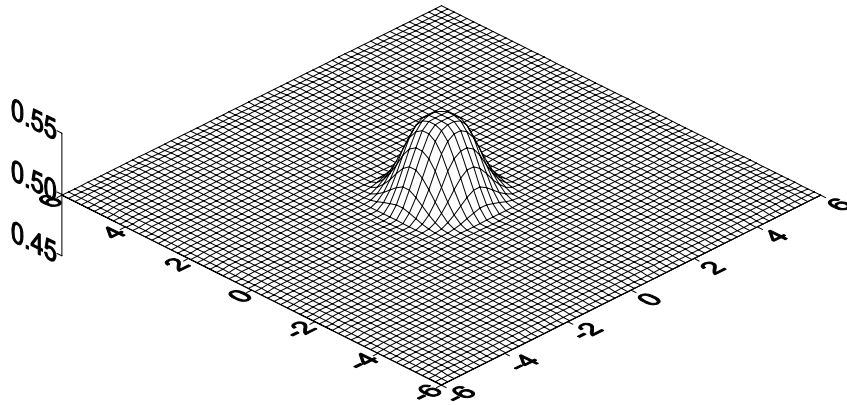
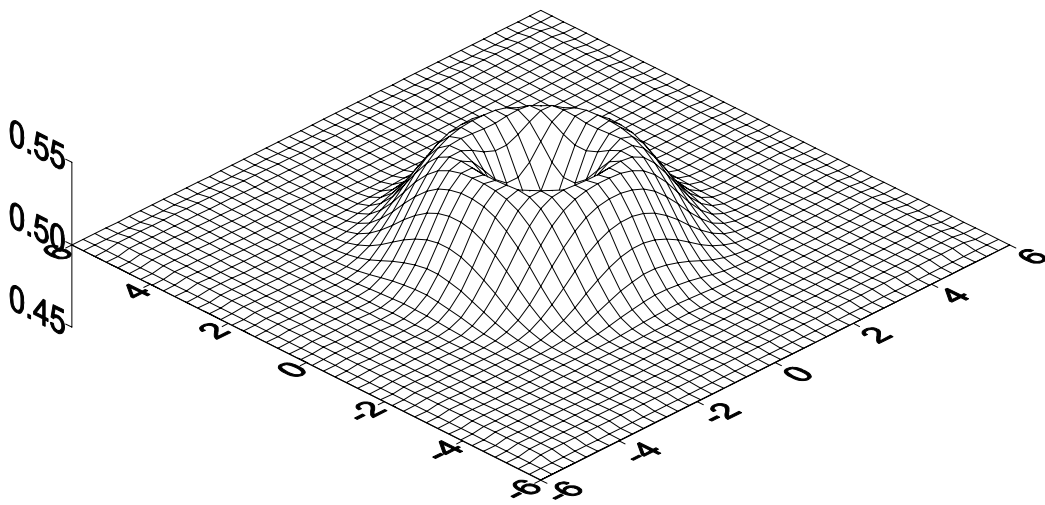
$$P_c = 2.09 \times 10^6 / [1 + \text{Exp}((S_w - 0.09)/0.02)] + 3190.60 \quad (25)$$

### 4.3.1 COMPORTEMENT DE L'INTERFACE EAU - HUILE

Pour bien comprendre le mécanisme de la double complétion et définir ses performances, la forme du cône d'eau induite par l'utilisation de cette technique est présentée. La forme de l'interface eau - huile dans le cas de la complétion conventionnelle est aussi considérée comme référence pour la comparaison. Dans les représentations graphiques, la situation de la double complétion est désignée par  $Q_{wc}^* = n \times Q_{oc}^*$  avec  $0 < n \leq 1.5$  et la complétion conventionnelle par  $Q_{wc}^* = 0$ . Dans la présente étude, des valeurs élevées du débit de production sont considérées et le débit de production dans la zone eau (cas du DWS) est inférieur ou égal à  $1.5 \times Q_{oc}^*$ . Ce choix est justifié par le fait que les valeurs élevées seront nuisibles pour la performance hydraulique du puits. Pour mieux montrer la position des perforations du puits dans les figures, en représentation 2D, deux rectangles en trait discontinu sont ajoutés, ils représentent les limites des complétions dans les zones eau et huile.

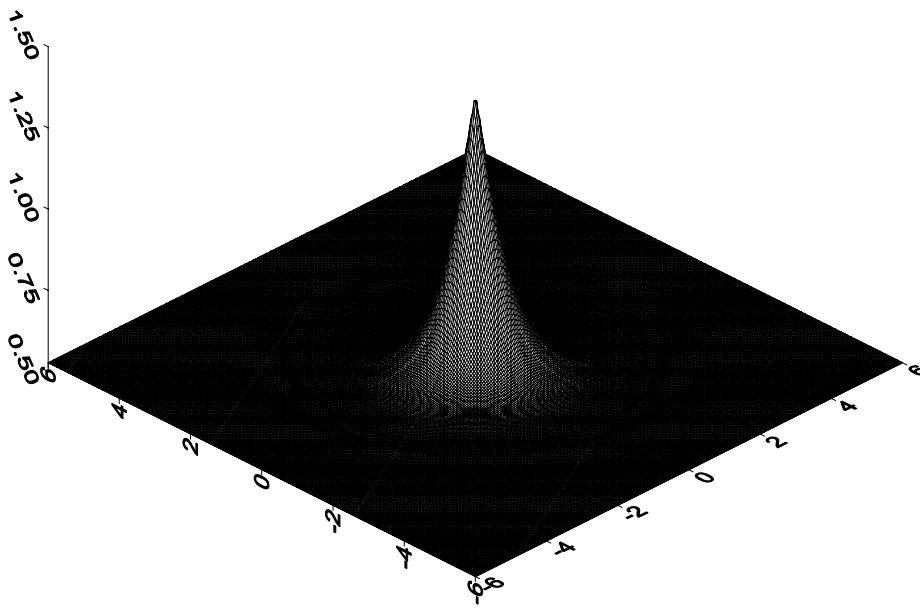
Bien qu'en représentation 3D, la forme prise par le cône d'eau soit plus parlante, mais pour la comparaison et la discussion une représentation 2D est mieux adaptée. Nous considérerons pour cela quelques figures montrant le cône d'eau en 3D, pour les deux situations de complétion : simple (conventionnelle) et double.

Les figure 4.4 et 4.4(bis) montrent la forme prise par le cône d'eau en simple et en double complétion. Pour une complétion conventionnelle, la mise en production du puits engendre un mouvement ascendant de l'interface eau - huile sous forme d'un cône peu développé au premier stade de l'exploitation à  $t^* = 0.6 \times 10^{18}$  (fig. 4.4a). L'utilisation de la technologie du DWS déforme le cône d'eau ; vu en 3D (figure 4.4b), il est tronqué et évidé sur une partie. Cet évidement correspond à un autre mouvement descendant de l'interface prenant naissance suite aux perforations dans la zone eau.

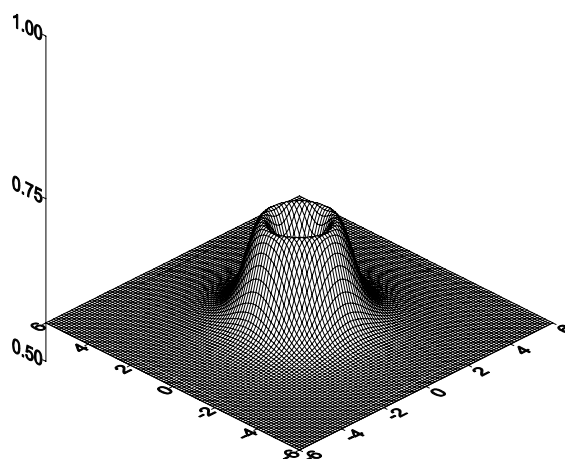
(a) simple complétion  $Q_{wc}^* = 0$ (b) double complétion  $Q_{wc}^* = 15 \times 10^{-10}$ 

**Figure 4.4** Représentation en 3D de l'interface eau - huile,  $t^* = 0.6 \times 10^{18}$ ,  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

A un stade avancé de la production  $t^* = 0.95 \times 10^{18}$  et en simple complétion (figure 4.4bis-c), le cône d'eau a occupé en hauteur une partie assez significative de la roche réservoir. A cette même période de l'exploitation et en double complétion (figure 4.4bis-d), une forme évidée du cône apparaît avec un développement moindre en hauteur. Comme on a l'a expliqué précédemment, cet évidement n'est autre que le résultat d'un mouvement descendant de l'interface vers les perforations de la zone eau dû à la production d'eau en double complétion.



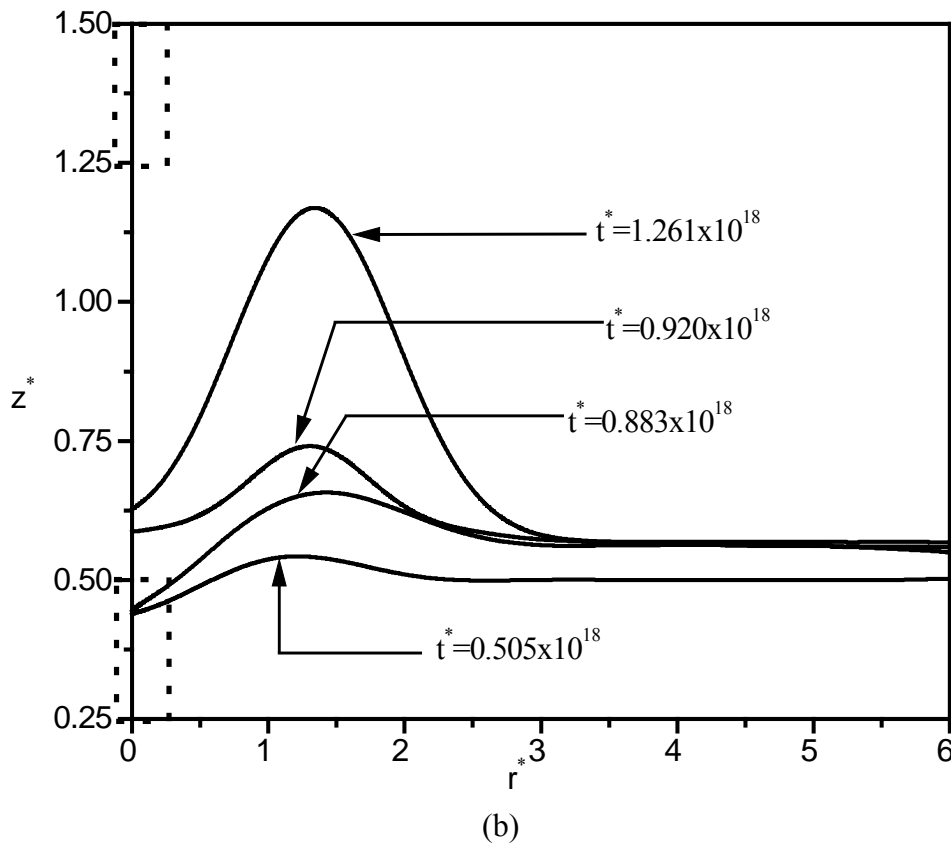
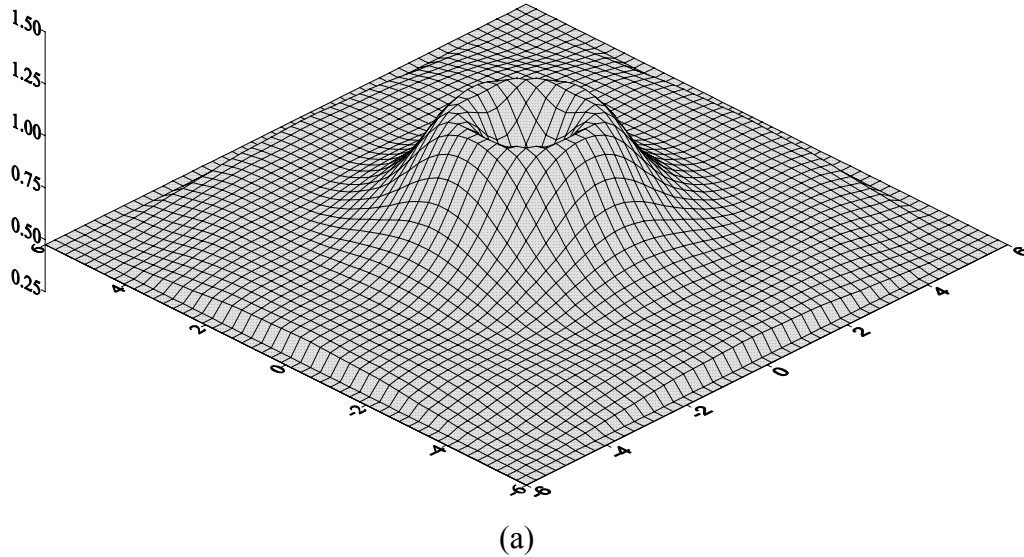
(c) simple complétion  $Q_{wc}^* = 0$



(d) double complétion  $Q_{wc}^* = 15 \times 10^{-10}$

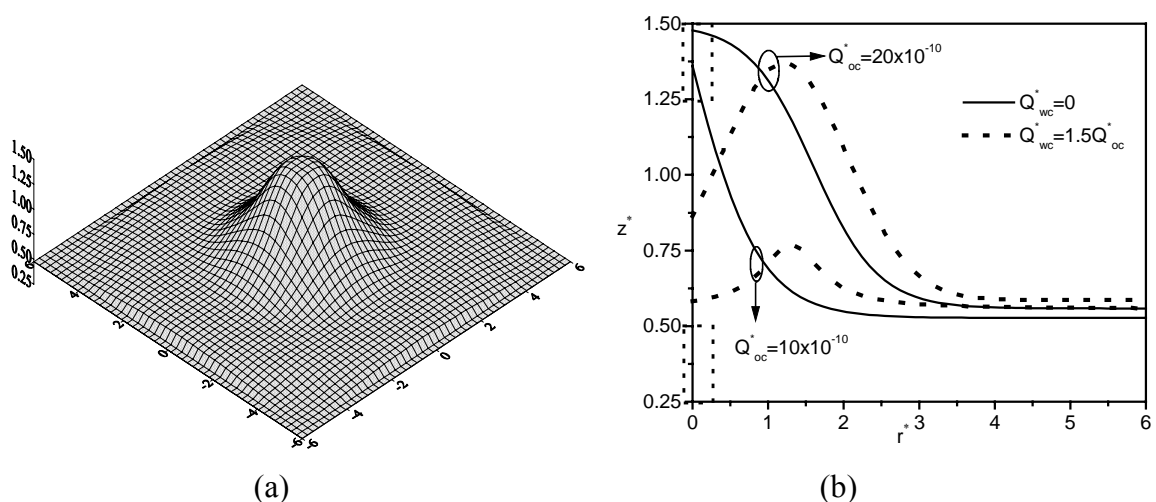
**Figure 4.4(bis)** Représentation en 3D de l'interface eau - huile,  $t^* = 0.95 \times 10^{18}$ ,  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

L'utilisation de la technologie de la double complétion déforme le profil du cône d'eau aux différents instants de la production comme montré dans la figure 4.5. Le sommet de l'interface eau - huile est déplacée vers la droite (loin du puits) entraînant dans certaines situations l'entrée d'huile dans la zone de production d'eau (quand  $Z^* < 0.5$ ).



**Figure 4.5** a/ Vue 3D de l'interface eau - huile en double complétion à  $t^* = 1.261 \times 10^{18}$   
 b/ Evolution de l'interface eau - huile en double complétion  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $Q_{wc}^* = 15 \times 10^{-10}$

La figure 4.6 montre le développement des profils du cône d'eau, à l'instant  $t^* = 0.95 \times 10^{18}$ , pour deux valeurs du débit de production d'huile avec et sans double complétion. Dans le cas de la complétion conventionnelle, l'interface eau - huile se développe comme un cône classique lequel est très sensible au débit de production. Pour  $Q_{oc}^* = 20 \times 10^{-10}$  qui correspond à une valeur très élevée du débit de production, l'eau envahie rapidement une large région de la zone huile affectant alors la performance de la production d'huile. L'eau intercepte ainsi l'écoulement de l'huile vers les perforations du puits. L'introduction de perforations, dans le puits de la zone eau, engendre un autre écoulement (descendant) et affecte considérablement la forme du cône. Non seulement l'eau est retenue mais le sommet du cône est déplacé vers la droite, il est localisé approximativement à  $r^* = 1.5$ . Pour  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ , la technique de la double complétion permet de retenir l'avancée rapide du cône d'eau. En effet, pour une même période de production, l'eau a atteint les perforations du puits de la zone huile dans le cas de la complétion conventionnelle, alors que dans le cas de la double complétion, le sommet de l'interface eau - huile est localisé à une distance de 0.5 en dessous du puits d'huile. Pour  $Q_{oc}^* = 20 \times 10^{-10}$ , correspondant à une valeur très élevée du débit de production, comme montrée dans la figure 4.6, même si l'eau n'est pas encore entrée en production à travers les perforations du puits de la zone huile, dans le cas de la double complétion, le développement du cône est important et il n'est pas très loin du puits d'huile. En effet, sa tendance à s'étaler et se mouvoir près du puits interceptera nécessairement l'écoulement de l'huile.



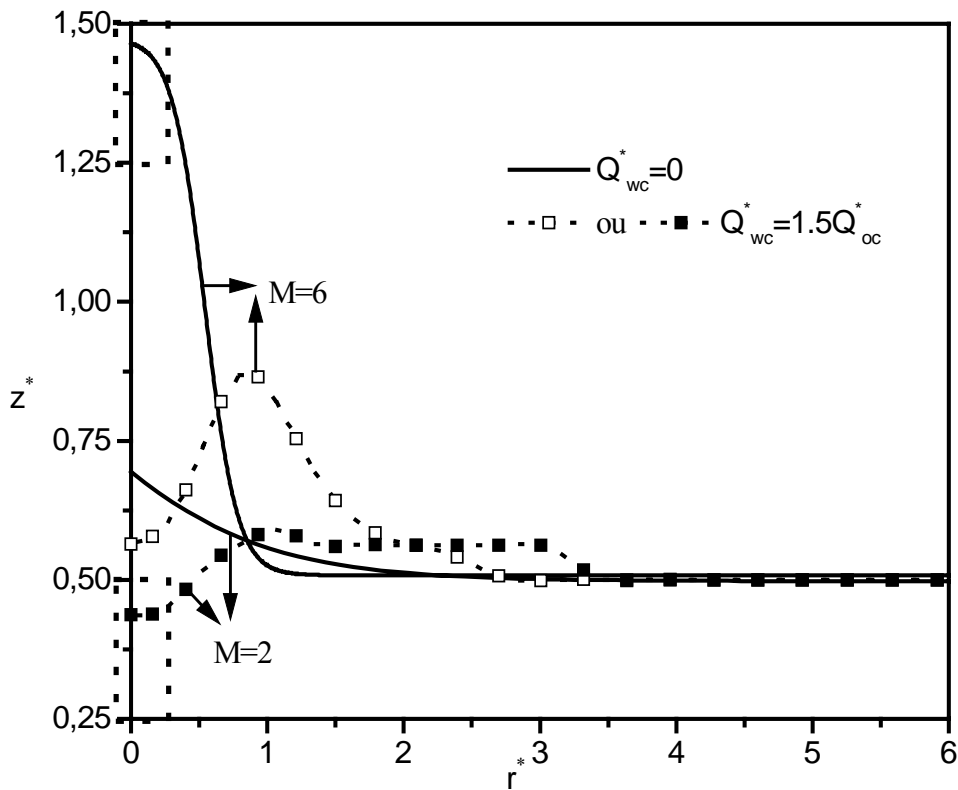
**Figure 4.6** a/ Vue 3D de l'interface eau - huile en simple complétion pour  $Q_{oc}^* = 20 \times 10^{-10}$

b/ Effet du débit de production d'huile sur l'interface eau - huile

$M = 2$  ,  $ND\rho = 0.1$  ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$  ,  $Ra = 0.2$  ,  $\phi = 0.2$  ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$  ,  $t^* = 0.95 \times 10^{18}$

Il est évident à partir de ces graphes que le fait de doubler le débit de production d'huile, dans le cas du DWS, entraîne un développement intense du cône et une position de son sommet deux fois plus importante. Physiquement, les perforations du puits de la zone eau retardent l'avancée rapide de l'interface eau - huile suite à un deuxième sens d'écoulement vers ces perforations. En chaque point, il y a un duel entre deux forces opposées. L'une dirigée vers le haut, causée par les perforations du puits de la zone huile et la pression au fond de l'aquifère, l'autre dirigée vers le bas engendrée par les perforations du puits de la zone eau. La première a tendance à provoquer un écoulement ascendant et la seconde un écoulement descendant. De ce fait, la force motrice de production d'huile est réduite par la force motrice de production d'eau. L'apport de la seconde force dans la retenue de l'interface eau - huile est meilleur pour  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ .

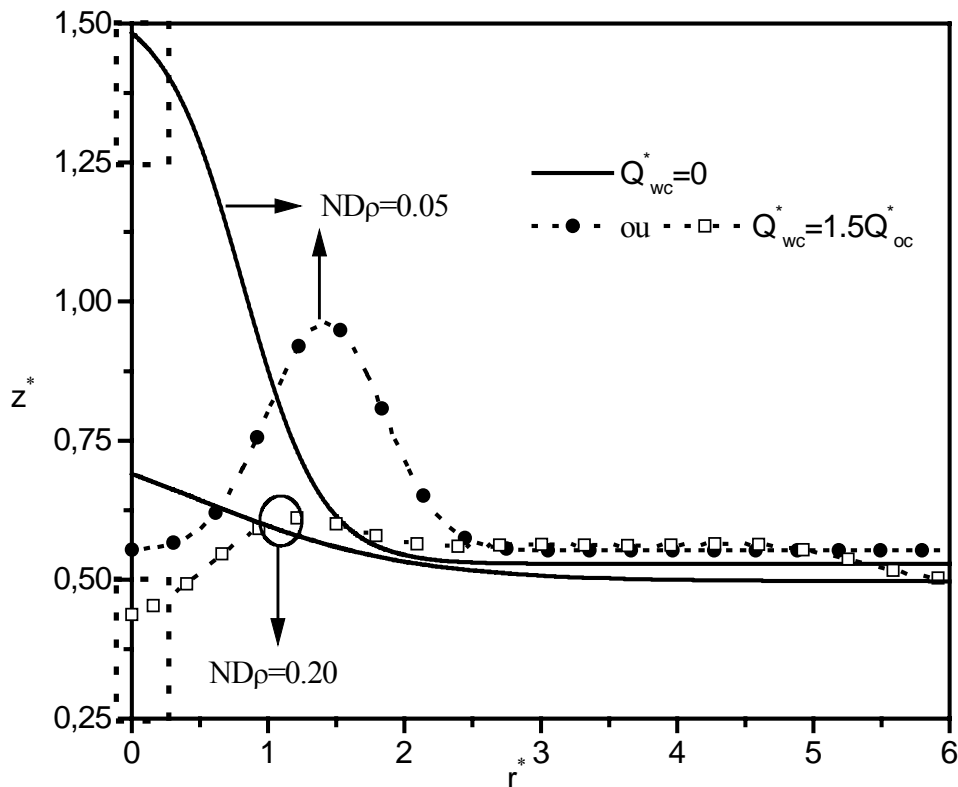
L'effet du rapport de mobilité sur le développement de l'interface eau - huile est illustré dans la figure 4.7. Avec la complétion conventionnelle, plus grand est le rapport des mobilités des deux fluides, plus importante est la tendance du cône d'eau dans la direction verticale. L'utilisation de la technique DWS déforme la forme classique du cône. Le sommet du cône est déplacé vers la droite. A cet instant de la production, la percée d'huile dans le puits de la zone eau continue toujours pour  $M = 2$ , alors que pour  $M = 6$ , le mouvement de l'huile vers les perforations de la zone eau s'est arrêté. Au premier stade de la production, la force engendrée par les perforations du puits de la zone eau vainc la force causant le mouvement ascendant, cependant, un comportement inverse a lieu après une période d'exploitation. Quand les forces de viscosité dues à la résistance de l'écoulement sont importantes, la mobilité de l'huile est réduite ; cette situation accélère le mouvement ascendant de l'eau vers les perforations de la zone huile.



**Figure 4.7** Effet du rapport de mobilité sur l'interface eau - huile  
 $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.70 \times 10^{18}$

Les forces gravitationnelles (différence adimensionnelle de densité) représentent un important paramètre qui peut affecter considérablement le profil du cône d'eau. Quand les forces visqueuses résultant du drainage naturel dû aux perforations du puits dans la zone huile, vainquent les forces gravitationnelles induites par la différence de densité entre les deux phases, le cône d'eau prend place. Dans la figure 4.8 sont reportés les profils du cône d'eau dans les deux cas de complétion. Dans une situation de complétion conventionnelle et aux faibles valeurs de la différence adimensionnelle de densité ( $ND\rho = 0.05$  par exemple), le cône est très développé dans les deux directions (horizontale et verticale) et atteint les perforations de la zone huile. A la différence adimensionnelle de densité ( $ND\rho = 0.20$ ) quatre fois plus grande que la valeur précédente, le profil du cône d'eau est moins développé et est localisé approximativement à une distance de 0.5 au dessous des perforations de la zone huile. Avec la technique de double complétion, le comportement de l'interface eau - huile est affecté. En effet, le sommet du cône est déplacé loin du puits. Aux valeurs élevées de  $ND\rho$  (par exemple  $ND\rho = 0.20$ ), une entrée d'huile a lieu dans les perforations de la zone eau avec une plus longue durée d'écoulement de cette huile. Aussi le développement

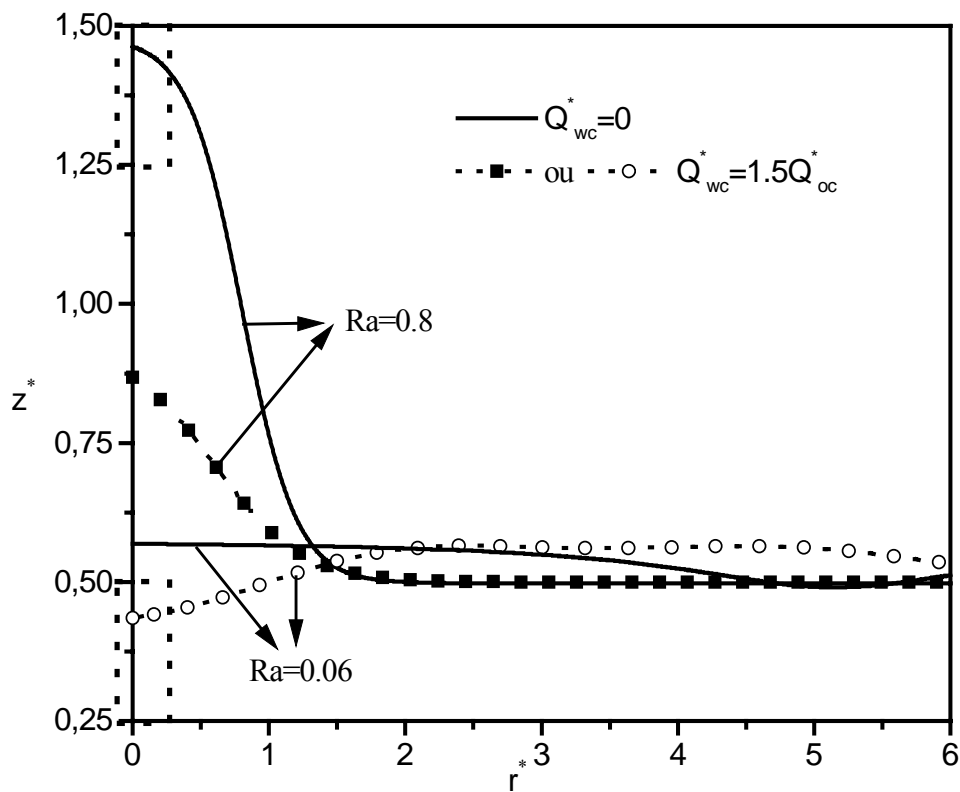
ascendant du cône est retenu plus longtemps vers le bas comparé aux faibles valeurs de  $ND\rho$ . Les forces gravitationnelles, dues à la différence de densité entre l'eau et l'huile, en s'associant aux forces visqueuses, engendrées par l'écoulement vers les perforations de la zone eau, permettent d'atténuer le développement rapide et ascendant de l'interface eau - huile vers les perforations de la zone huile.



**Figure 4.8** Effet de la différence adimensionnelle de densité sur l'interface eau - huile  
 $M = 2$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.92 \times 10^{18}$

Un autre paramètre affectant le comportement du cône d'eau est le rapport du nombre de Darcy vertical au nombre de Darcy horizontal appelé rapport d'anisotropie ( $Ra$ ). De faibles valeurs de ce paramètre, correspondant à des réservoirs avec de faibles perméabilités verticales, atténuent considérablement le mouvement ascendant de l'interface eau - huile dans le cas de la simple complétion comme illustré dans la figure 4.9. En double complétion, le cône est très affecté aux faibles valeurs de  $Ra$ . Le mouvement de l'interface eau - huile est inversé et la percée d'huile prend place. Le sommet du cône dans ce cas est déplacée vers la droite et est approximativement localisé à une distance radiale égale à 3. Aux valeurs élevées de  $Ra$ , la forme du cône n'est pas affectée, cependant son mouvement vers les perforations de la zone huile est plus lent comparé au cas de la complétion conventionnelle. Avec la

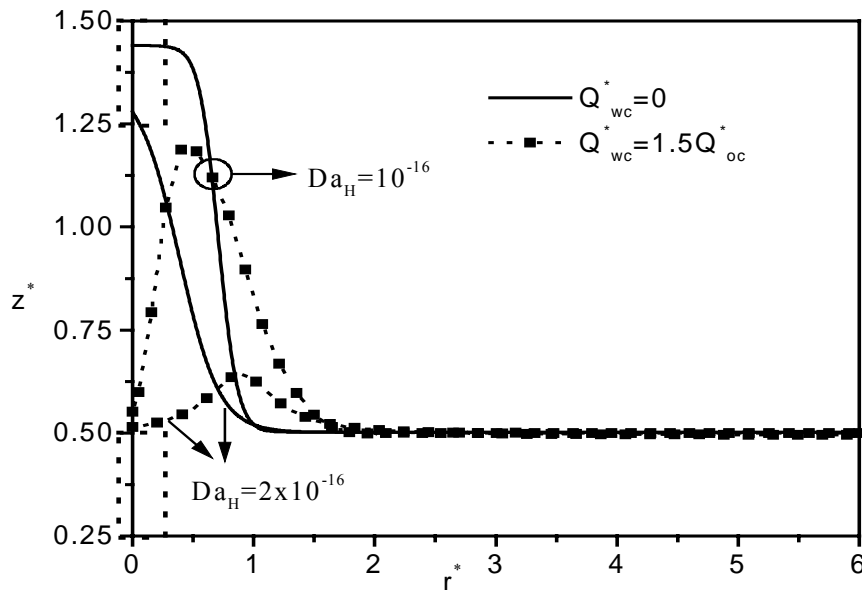
technique de la double complétion, et aux valeurs élevées du rapport d'anisotropie, le mouvement ascendant de l'eau vers les perforations de la zone huile est retardé par la force visqueuse due à l'écoulement vers le puits de la zone eau. Aux faibles valeurs de  $Ra$ , la composante verticale de la force visqueuse de sens négatif engendrée par l'écoulement vers les perforations de la zone eau vainc la composante verticale positive de la force visqueuse due à l'écoulement vers les perforations de la zone huile. Cette situation cause la percée d'huile dans les perforations de la zone eau. Cependant, ce cas peut être aisément évité par réduction du débit de production dans la complétion de la zone eau.



**Figure 4.9** Effet du rapport d'anisotropie sur l'interface eau - huile  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $t^* = 0.69 \times 10^{18}$

La récupération de l'huile depuis le puits est principalement radiale, c.à.d, l'huile s'écoule dans la direction radiale, indiquant ainsi le rôle important que représente le nombre de Darcy horizontal  $Da_H$  (perméabilité horizontale). L'implémentation de perforations dans la zone eau pour drainer la phase eau, déforme le cône d'eau et cause le déplacement de son sommet loin du puits (Figure 4.10). La position radiale de ce sommet est proportionnelle au nombre de Darcy. Le mouvement de l'interface eau - huile est rapide pour les réservoirs les

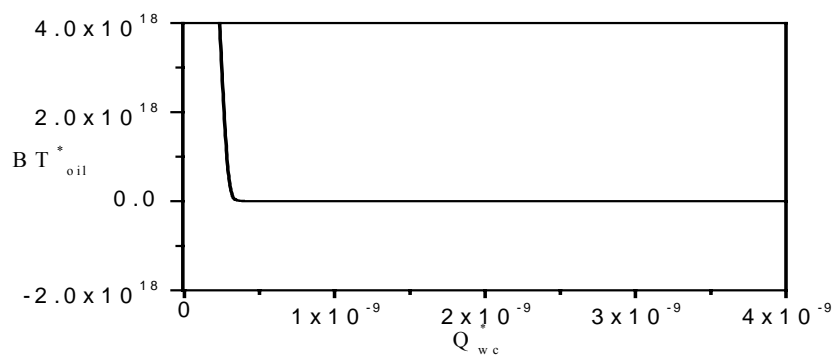
moins perméables (faible valeur de  $Da_H$ ). Physiquement, cette situation résulte d'un écoulement lent de l'huile dans la direction radiale pour les roches les moins perméables.



**Figure 4.10** Effet de la perméabilité horizontale sur l'interface eau - huile  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$ ,  $Da_V = 8 \times 10^{-17}$ ,  $t^* = 0.40 \times 10^{18}$

### 4.3.2 PERCEE DE L'HUILE DANS LA ZONE DE COMPLETION EAU

A partir de l'analyse précédente du comportement du cône d'eau, il est à noter que l'huile s'introduit dans certaines situations dans les perforations de la zone de complétion eau (dans le cas de la double complétion). Les résultats de la simulation numérique révèlent l'existence d'un débit critique dans la zone de complétion eau à ne pas dépasser pour éviter la percée d'huile. En fait, il y a une compétition entre deux forces, l'une causant le mouvement ascendant et l'autre celui descendant dû aux perforations de la zone de complétion eau. Dans ce cas les débits de production dans les deux complétions doivent être optimisés de manière à ce que l'interface soit toujours maintenue entre les perforations des zones de complétions eau et huile. Dans la figure 4.11, nous avons représenté le temps de percée d'huile  $BT_{oil}^*$  en fonction du débit de production d'eau. Quand le débit de production d'eau est inférieur ou égal approximativement à  $2 \times 10^{-10}$  la percée d'huile ne prend pas place.



**Figure 4.11** Temps de percée d'huile en fonction du débit de production d'eau  
 $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

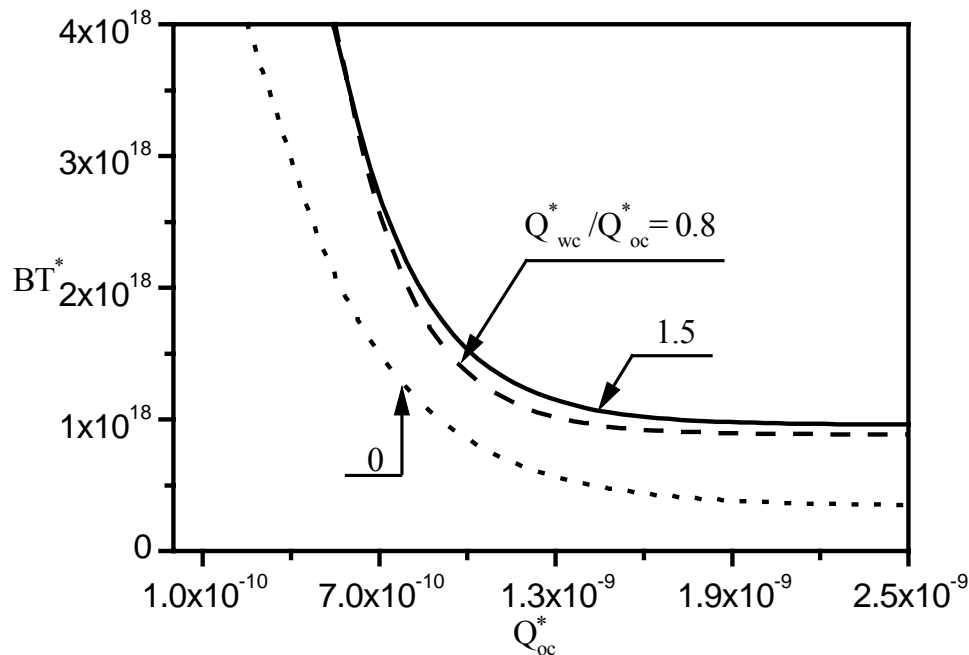
### 4.3.3 TEMPS DE PERCEE D'EAU

L'analyse précédente du comportement de l'interface eau - huile nous a permis de prédire la forme du cône quand la technique de la double complétion est utilisée. Cette analyse a montré que l'interface n'est pas stable pour toute la plage des paramètres considérée et qu'une percée d'eau dans la zone de complétion huile est possible. C'est pourquoi, nous nous sommes aussi intéressés au temps de percée d'eau.

Pour tous les paramètres, trois cas de débits de production d'eau ( $Q_{wc}^*$ ) dans la zone de complétion eau ont été considérés :  $Q_{wc}^* = 0$  correspondant à la complétion conventionnelle,  $Q_{wc}^* = 0.8 \times Q_{oc}^*$  et  $Q_{wc}^* = 1.5 \times Q_{oc}^*$  pour une situation de double complétion.

La figure 4.12 montre la décroissance du temps de percée d'eau  $BT^*$  dans les deux situations : conventionnelle et double complétion quand le débit de production d'huile augmente. L'utilisation de cette dernière technique permet de retarder le temps de percée d'eau pour une période de temps peu différente dans les deux cas du débit de production d'eau. Dans le cas de la double complétion,  $BT^*$  est amélioré par approximativement un facteur deux comparé à la situation de complétion conventionnelle. Aussi l'analyse de  $BT^*$  dans le cas de la simple complétion montre que pour des débits de production d'huile inférieurs à une valeur voisine de  $2.5 \times 10^{-10}$ , l'eau ne s'introduit pas dans les perforations de la zone de complétion huile, c.à.d, cette valeur correspond à un débit critique d'huile. L'utilisation de la double complétion entraîne une amélioration de la valeur de ce débit critique d'huile ; il passe

de  $2.5 \times 10^{-10}$  (simple complétion) à  $5 \times 10^{-10}$ . Comme nous l'avons expliqué précédemment dans l'analyse du cône, la composante verticale positive de la force visqueuse due aux perforations de la zone de complétion huile est réduite par la valeur de la composante verticale de sens opposé de la seconde force visqueuse engendrée par la zone de complétion eau.

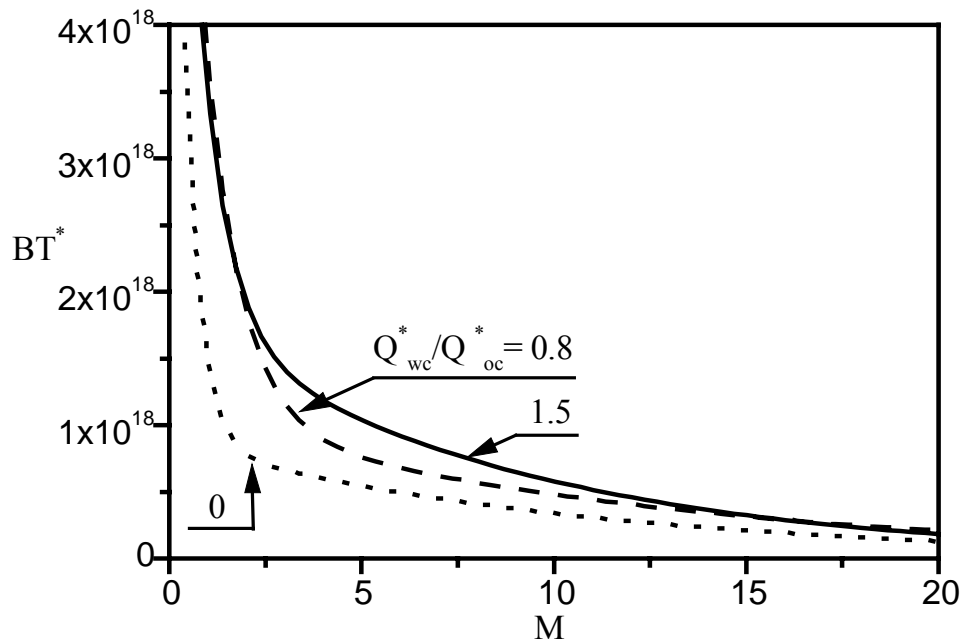


**Figure 4.12** Influence du débit adimensionnel de production d'huile sur le temps de percée d'eau

$$M = 2, ND\rho = 0.1, Da_H = 4 \times 10^{-16}, Ra = 0.2, \phi = 0.2$$

Le rapport de mobilité affecte aussi la performance de production d'huile. Plus grande est la valeur du rapport de mobilité ( $M$ ), plus rapide est la percée d'eau comme le montre la figure 4.13. Pour des valeurs de  $M$  supérieures à 10, le cône d'eau est atténué uniquement pour une courte période de temps par utilisation de la technologie du DWS. Comme nous l'avons expliqué dans l'analyse du profil du cône, quand les forces visqueuses, dues à la résistance de l'écoulement, sont importantes et prédominantes, la mobilité de l'huile est réduite entraînant un mouvement ascendant rapide de l'interface eau - huile. Pour  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 1.5$ ,  $BT^*$  est légèrement supérieur au  $BT^*$  du cas  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 0.8$ , uniquement pour une plage de  $M$  comprise entre 2.5 et 10. Un comportement asymptotique est observé en

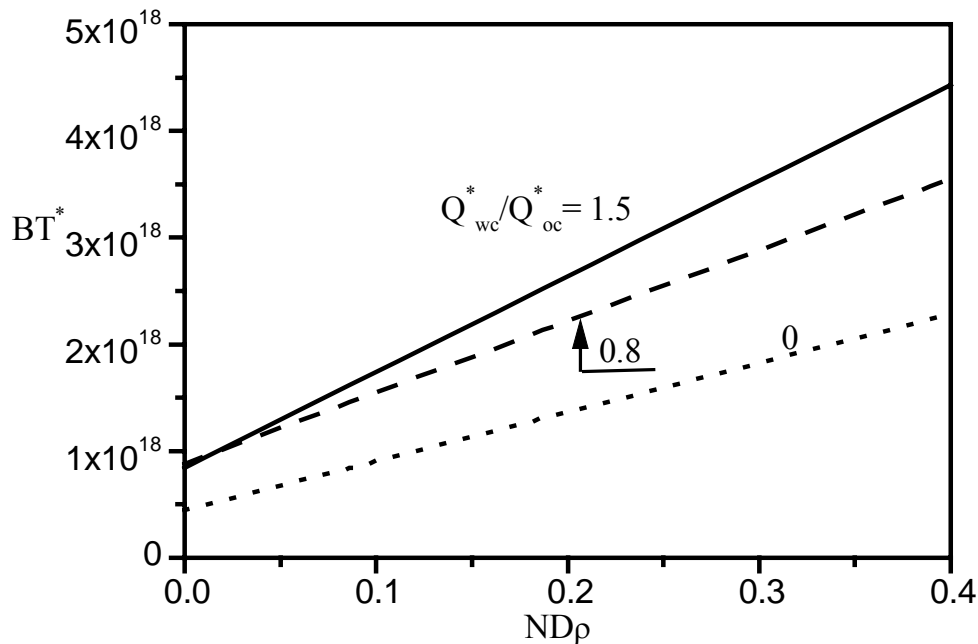
simple ou double complétion pour des valeurs de  $M$  inférieures à une certaine valeur critique. C'est une indication d'un débit critique d'huile. Ce comportement prend place pour des valeurs de  $M$  inférieures à 0.25 dans le cas de la simple complétion et inférieures à 1 en complétion double.



**Figure 4.13** Influence du rapport de mobilité sur le temps de percée d'eau  
 $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

La figure 4.14 montre l'effet de la différence adimensionnelle de densité  $ND\rho$  sur  $BT^*$ . L'utilisation de la double complétion permet d'atténuer considérablement le coning d'eau principalement aux valeurs élevées de  $ND\rho$ . L'amélioration due à la technologie du DWS entraîne un  $BT^*$  au moins deux fois plus grand quand  $ND\rho$  passe de 0.1 à 0.2 par exemple. L'augmentation du débit de production d'eau dans la zone complétion eau permet de retarder l'arrivée de la phase eau aux perforations de la zone de complétion huile comme illustré pour les deux valeurs  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 1.5$  et 0.8, principalement quand l'effet de stabilisation de la gravité est important aux valeurs élevées de  $ND\rho$ . Les forces gravitationnelles, induites par la différence de densité entre les deux fluides, en s'associant à la composante verticale de la force visqueuse due aux perforations de la zone de complétion eau, permettent une atténuation de la percée d'eau. pour  $ND\rho$  inférieur à 0.05, l'effet du DWS sur

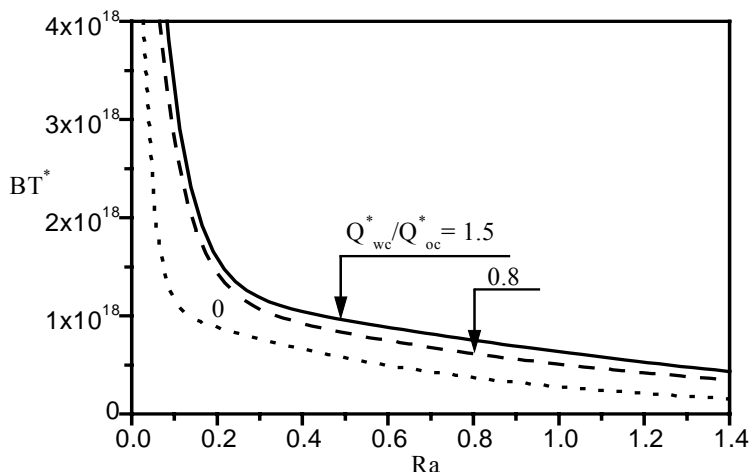
$BT^*$  est moins sensible. Néanmoins, l'effet du débit de production d'eau sur  $BT^*$  semble être négligeable.



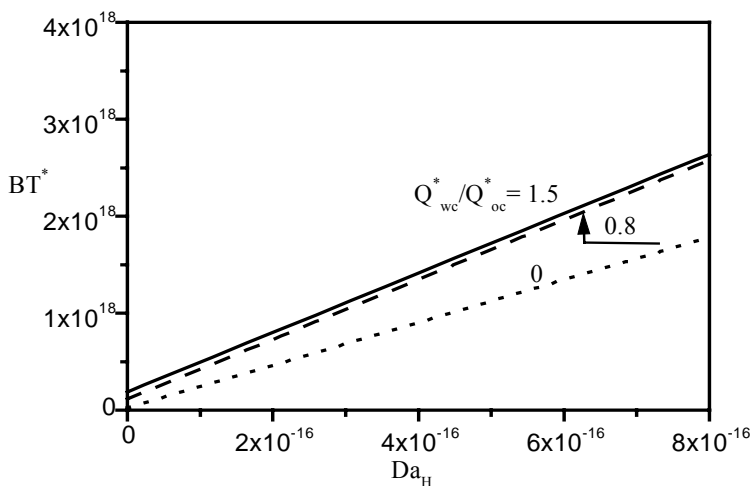
**Figure 4.14** Influence de la différence adimensionnelle de densité sur le temps de percée d'eau

$$M = 2, Da_H = 4 \times 10^{-16}, Ra = 0.2, \phi = 0.2, Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$$

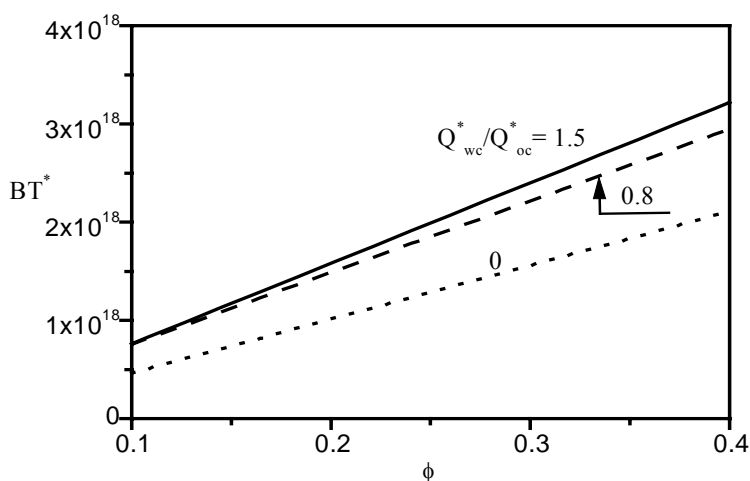
Les effets des caractéristiques de la roche réservoir sur  $BT^*$  sont indiqués dans les figures 4.15 a, b et c pour le rapport d'anisotropie ( $Ra$ ), la perméabilité horizontale ( $Da_H$ ) et la porosité ( $\phi$ ). Une amélioration du  $BT^*$  est enregistrée par utilisation de la technique de la double complétion. L'augmentation du débit de production d'eau de  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 0.8$  à  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 1.5$  n'améliore pas significativement l'atténuation de la percée d'eau vers les perforations de la zone de complétion huile. Il est à noter que pour de bonnes caractéristiques de la roche réservoir (faibles valeurs de  $Ra$ , valeurs élevées de  $Da_H$  et  $\phi$ ), une plus grande amélioration est obtenue. Un comportement asymptotique de  $BT^*$  en fonction de  $Ra$  a lieu (figure 4.15), il correspond à un débit critique de production d'huile.



(a) rapport d'anisotropie  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$



(b) nombre de Darcy horizontal  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Da_V = 8 \times 10^{-17}$ ,  $\phi = 0.2$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$



(c) porosité  $M = 2$ ,  $ND\rho = 0.1$ ,  $Ra = 0.2$ ,  $Da_H = 4 \times 10^{-16}$ ,  $Q_{oc}^* = 10 \times 10^{-10}$

**Figure 4.15** Influence des caractéristiques de la roche réservoir sur le temps de percée d'eau

## 4.5 CONCLUSIONS ET REMARQUES

Les résultats de la simulation numérique se rapportant au comportement de l'interface eau - huile et au temps de percée d'eau ont été analysés et discutés dans les deux situations de complétion : conventionnelle et double. Avec une étude paramétrique de la technologie de la double complétion, la forme du profil du cône et les performances de cette technique ont été examinées. A partir de la présente étude, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- L'utilisation de la double complétion déforme dans la plupart des cas le profil du cône. Le sommet de l'interface eau - huile se déplace loin du puits.
- La mise en production du puits à des valeurs élevées du débit de production d'huile entraîne une élévation de la hauteur du cône d'eau interceptant ainsi l'écoulement de l'huile.
- Pour des débits adimensionnels de production d'eau supérieurs à  $2 \times 10^{-10}$ , l'huile s'introduit dans les perforations de la zone de complétion eau. Le temps de percée d'eau est proportionnel à la différence adimensionnelle de densité et au nombre de Darcy horizontal mais inversement proportionnel au débit de production d'huile, aux rapports de mobilité et d'anisotropie.
- Le profil de l'interface eau - huile, induite par la technologie DWS, pour des roches réservoirs avec des rapports d'anisotropie élevés, reprend la forme classique du cône d'eau en simple complétion après une courte période de production.
- Aux faibles valeurs de  $ND\rho$ , les valeurs de  $BT^*$  pour  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 0.8$  et  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 1.5$  ne sont pas très différentes ; l'utilisation alors de valeurs élevées pour le débit de production d'eau dans la zone de complétion eau n'est pas recommandée. L'amélioration commence à partir d'une valeur de la différence adimensionnelle de densité supérieure à 0.05.

- Avec la technique de double complétion, la percée d'eau est atténuée. En général,  $BT^*$  est doublement amélioré comparé à une situation de complétion conventionnelle.
  
- Le débit critique de production d'huile est amélioré comparé au cas de simple complétion.

## CONCLUSION GENERALE

Bien que les premiers travaux sur le phénomène du coning d'eau datent de 1935, le sujet reste d'actualité du fait de son importance économique dans la récupération du pétrole (source mondiale d'énergie).

La détermination du débit critique d'huile et le calcul du temps de percée d'eau sont les préoccupations majeures pour la plupart des auteurs. Cependant, la production à des débits inférieurs ou égaux au débit critique demeure trop basse pour toute exploitation économique. Les points communs, en accord dans toutes les études menées sur le cône d'eau dans les puits verticaux révèlent (a) le cône est plus prononcé aux débits de production élevés, (b) le fait de placer le puits loin de l'interface de contact initiale eau – huile permet de retarder la percée d'eau, (c) la production à des débits inférieurs ou égaux au débit critique n'est pas économique, (d) après la percée d'eau dans le puits, la production d'eau augmente rapidement, des moyens et des ressources de séparation sont nécessaires, (e) le développement du cône diminue la durée d'exploitation.

Plusieurs procédés ont été mis en œuvre pour la lutte contre le phénomène du coning d'eau. La technique de barrières horizontales et les procédés chimiques ont été alors utilisés. Ceux-ci permettent de l'atténuer mais ne l'éliminent pas totalement.

La technologie des puits horizontaux est de plus en plus utilisée ces dernières années quand les caractéristiques du réservoir et les considérations économiques le permettent. Toutefois, l'utilisation de ces puits comme moyen d'amélioration de la productivité n'échappe pas au phénomène du coning d'eau. Bien qu'ils offrent de meilleures alternatives que les puits verticaux dans l'atténuation du cône d'eau, ces derniers ne sont pas complètement abandonnés ; d'ailleurs la nouvelle technologie, dite "DWS", paraissant prometteuse pour cette fin, le confirme.

En partant du fait que les puits horizontaux n'échappent pas complètement au phénomène du coning d'eau, nous avons simulé numériquement les effets des paramètres caractérisant la roche réservoir, les fluides en présence et le rythme de production, sur le mouvement de l'interface eau - huile, le temps de percée d'eau et le pourcentage d'huile récupérée. La nouveauté dans ce travail est l'élaboration d'un code de calcul permettant de prédire le comportement de l'interface à tout instant de la production. Une cellule poreuse saturée par deux fluides incompressibles eau et huile, a été alors considérée. Dans cette étude des paramètres adimensionnels ont été introduits ; la roche réservoir est caractérisée par le

nombre de Darcy et la porosité, les propriétés des fluides en présence sont regroupées dans le paramètre gravité - viscosité et le rythme de la production est identifié par le débit adimensionnel de production.

Les résultats obtenus montrent un développement considérable de l'interface eau - huile dans le cas des roches réservoirs présentant de faibles porosités et renfermant des huiles lourdes et très visqueuses. L'augmentation du rythme de production entraîne aussi une avancée rapide du front d'eau. Le temps de percée d'eau est très court pour les faibles valeurs de  $N$  (huiles lourdes et très visqueuses) avec un faible effet stabilisant de la gravité de même que pour les faibles valeurs du nombre de Darcy (faibles perméabilités). Pour un débit de production fixé, un moyen d'augmentation de la perméabilité de la roche réservoir (fractures artificielles) devrait être très bénéfique particulièrement pour les huiles légères et peu visqueuses. Dans le présent travail, une corrélation a été proposée pour prédire le pourcentage d'huile récupérée au temps de percée d'eau. Cette corrélation a été développée en se basant sur les équations gouvernantes et l'analyse par la régression utilisant les données de la simulation numérique.

Une deuxième étude du coning d'eau par un procédé numérique a aussi été proposée au chapitre quatre. Elle se rapporte au comportement du cône d'eau dans une situation de puits vertical par utilisation d'une technologie récente dite de double complétion. Le cas de la simple complétion a été aussi retenu pour la comparaison. Avec une étude paramétrique de la technologie de double complétion, la forme du profil du cône et les performances de cette technique ont été examinées. Les résultats numériques auxquels nous avons abouti, nous ont permis de dégager un certain nombre de conclusions. Rappelons, tout d'abord, quelques hypothèses de travail sur lesquelles nos calculs sont basés. Un modèle puits [Azziz and Settari, 1986] est utilisé pour évaluer les performances de la double complétion dans le contrôle du cône d'eau dans le cas des puits verticaux. Les deux fluides sont considérés incompressibles et non miscibles avec des propriétés physiques constantes. La roche réservoir et l'aquifère sont homogènes et anisotropes.

L'utilisation de la double complétion déforme dans la plupart des cas le profil du cône. Le sommet de l'interface eau - huile se déplace loin du puits. La mise en production du puits à des valeurs élevées du débit de production d'huile entraîne une élévation de la hauteur du cône d'eau interceptant ainsi l'écoulement de l'huile. Pour des débits de production d'eau

supérieurs à  $2 \times 10^{-10}$ , l'huile s'introduit dans les perforations de la zone de complétion eau. Le temps de percée d'eau est proportionnel au nombre de gravité et au nombre de Darcy horizontal mais inversement proportionnel au débit de production d'huile, aux rapports de mobilité et d'anisotropie.

Le profil de l'interface eau - huile, induite par la technologie DWS, pour des roches réservoirs avec des rapports d'anisotropie élevés, prend la forme classique du cône d'eau en simple complétion après une courte période de production.

Aux faibles valeurs de  $ND\rho$ , les valeurs de  $BT^*$  pour  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 0.8$  et  $Q_{wc}^*/Q_{oc}^* = 1.5$  ne sont pas très différentes ; l'utilisation alors de valeurs élevées pour le débit de production d'eau dans la zone de complétion eau n'est pas recommandée. L'amélioration de  $BT^*$  commence à partir d'un nombre de gravité supérieur à 0.05.

Avec la technique de double complétion, la percée d'eau est atténuée. En général,  $BT^*$  est doublement amélioré comparé à une situation de complétion conventionnelle. Le débit critique de production d'huile est augmenté comparé au cas de la simple complétion.

Pour conclure, bien que le temps de percée d'eau ait été amélioré pour une large gamme de paramètres considérés, la technologie de double complétion doit être utilisée avec précaution notamment dans le cas des roches peu perméables (faible perméabilité horizontale) renfermant des huiles de faible mobilité.

---

**REFERENCES**

- Abass, H.H., Bass, D.M., The critical production rate in water coning system, Paper SPE 17311, 1988.
- Abernetty, E.R, Water coning - the evaluation of breakthrough time. Paper 80-31-05, presented at the 31<sup>st</sup> Annual Tech. Meeting of the Pet. Soc. Of CIM, Calgary, May 25-28, 1980.
- Akbar, A.M., Arnold, M.D. and Harvey, A. H., Numerical simulation of individual wells in field simulation mode, Paper SPE 4073 presented at SPE-AIME, 47<sup>th</sup> Annual Fall Meeting, San Antonio, Texas, Oct. 8-11, 1972.
- Arthur, M. G., Fingering and coning of water and gas in homogeneous oil sand. Trans. AIME, vol. 155, pp 184-201, 1944.
- Asheim, H. and Oudeman, P., Determination of perforation Schemes to control production and injection profiles along horizontal wells, Paper SPE 29275, SPE Drilling and Completion, March, pp13-17, 1997.
- Au, A.D.K., Behie, A., Rubin, B. and Vinsome, P.K.W., Techniques for fully implicit reservoir simulation, paper presented at the 55<sup>th</sup> Annual Fall Technical Conference and Exhibition of SPE / AIME, Dallas, Texas, Sept. 21-24, 1980.
- Auriault J. L., Nonsaturated deformable porous media : Quasistatics, Transport in Porous Media, vol. 2, 45-64, 1987.
- Azziz, K., Settari, A., Petroleum reservoir simulations. Elsevier Publishers, 1986.
- Bear J., Dynamics of fluids in porous media, Dover publications, Inc. New York, 1988.
- Blake, J.R., Kueera, A., Coning in oils reservoirs. Math. Scientist 13, 36-47, 1988.
- Bournazel, C. and Jeanson, B., Fast water coning evaluation, Paper SPE 3628, 1971.
- Caudle, B. H. and Silbererg, I. H., Laboratory models of oil reservoir produced by natural water drive, Paper SPE, March, pp 25-36, 1965.
- Chanay, P.E., Noble, M.D., Henson, W.L. and Rice, T.D., How to perforate your well to prevent water and gas coning, Oil and Gas Journal, vol. 55, p. 108, 1956.
- Chaney, P.E., et al., How to perforate your well to prevent water and gas coning. Oil and Gas Journal 55, 108-114, 1956.
- Chaperon, I., Theoretical study of coning toward horizontal and vertical wells in anisotropic formations: subcritical and critical rates, Paper SPE 15377, 1986.

Chen, H., Performance of horizontal wells, Safah Field, Oman, Paper SPE 25568, SPE Middle East Oil Technical Conference and Exxhibition, Bahrein, April 3-6, 1993.

Chierici, G.L., Ciucci, G.M. and Pizzi, G., A systematic study of gas and water coning by potentiometric models, Journal of Petroleum Technology, pp. 923-929, 1964.

Chierici, G.L., Principles of petroleum reservoir engineering, vol. 2, Springer-Verlag, 1995.

Chugbo, A.I., Roux, G.D., Bosio, J.C., Thin oil columns, most people think horizontal wells, Obagi field case suggests contrary. In 64<sup>th</sup> annual SPE Technical Conference (San Antonio)-Formation evaluation and reservoir geology, 297-306, 1989.

Chuoque, R.L., Meurs, P.V. and Poel, C.V., The instability of slow immiscible viscous liquid-liquid displacements in permeable media, paper 8073, presented at 33<sup>rd</sup> Annual Fall Meeting of Society of Petroleum Engineers, Houston, Texas, Oct. 5 - 8, 1958.

Cole, R. C., Mody, B. and Pace, J., Water control for Enhanced oil recovery, Petriolieri International, Vol. 28, N° 11, pp 36-43, Nov.,1981.

Colonna, J., Iffly, R., and Millet, J. L., Water coning in underground gas reservoirs, Institut Français du pétrole et annales des combustibles liquides Revue, Vol. 24, N° 1, pp 121-144, Janv., 1969.

Colorado state, Production and sales by county - Monthly, [www.oil-gas.state.co.us/statistics.html](http://www.oil-gas.state.co.us/statistics.html), 1998-2001.

Corey, A.T., Mechanics of immiscible fluids in porous media, Water Resources Publications, Littleton, Colorado, 1996.

Cossé R., Basics of reservoir engineering, éditions Technip, Paris, 1993.

Craft, B. C., Hawkins, M. F. and Terry, R. E., Applied petroleum reservoir engineering, second edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

Dana E., Contribution à la caractérisation des écoulements biphasiques dans les matériaux poreux. Etude expérimentale sur trois grès, thèse de Doctorat, N°2620, UST Lille, 1999.

Driscoll, V. J., Multiple producing intervals to suppress coning, US Patent N° 3 638 731, Feb.1, 1972.

Dullien F. A. L., Porous media, fluid transport structure, 2<sup>nd</sup> edition, Academic press, San Diego, 1992.

Elkins, L.F., An unusual problem of bottom water coning and volumetric water invasion efficiency. Paper SPE 1121-G, 1958.

Farmen, J.E., Wagner, G., Oxaal, U., Meakin, P., Feder, J. and Jossang, T., Dynamics of water coning, Phys. Rev. E 60 (4), pp. 4244-4251, 1999.

Fortunati, F., Water coning at the bottom of the well. Paper SPE 544, 1962.

Giger, F. M., Reiss, L. H. and Jourdan, A. P., The reservoir engineering aspects of horizontal drilling, Paper SPE 13024, SPE 59<sup>th</sup> Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, TX, Sept. 16-19, 1984.

Giger, F.M., Analytic two dimensional models of water cresting before breakthrough for horizontal wells. Paper SPE 15378, 1989.

Gottardi, G. and Vitali, D., Effect of gravity analysed for bottom water drive, Oil and Gas Journal, pp 92-96, Jan. 5, 1981.

Gunning, J., Paterson L., Poliak, B., Coning in dual completed systems. J. Pet. Sci. Eng., 23, 27-39, 1999.

Guo, B. and Lee, R.L., A general solution of gas/water coning problem for horizontal wells, Paper SPE 25050, 1992.

Guo, B., Lee, R.L.H., A simple approach to optimisation of completion interval in oil/water coning systems, Paper SPE 23994, 1993.

Halliburton, Reservoir conformance technology - Maximizing your reservoir value through the management of unwanted water and gas, [www.halliburton.com](http://www.halliburton.com), 2001.

Henley, D. H., Owens, W. W. and Craig, Jr. F. F., A scale model study of bottom water drives, JPT, pp 90-98, Jan., 1961.

Hill, S., Channelling in packed columns, Chem. Eng. Sci., pp. 247-253, 1952.

Houpeurt, A., Mécanique des fluides dans les milieux poreux, critique et recherche, édition Technip, Paris, 1974.

Hoyland, L.A., Papatzacos, P. and Skjaeveland, S.M., Critical rate for water coning: correlation and analytical solution, Paper SPE 15855, 1986.

Irrgang, H.R., Evaluation and management of thin oil column reservoirs in Australia. APEA. J., 64, 1994.

Jiang, Q., Bulter, R.M., Experimental and numerical modelling of bottom water coning to a horizontal well, J. Can. Pet. Tech., pp. 82-91, sept., 1998.

Johns R. T., Lake L. W. and Delliste A. M., Prediction of capillary fluid interfaces during gas or water coning in vertical wells, Paper SPE 77772, 2002.

Joshi, S. D., Horizontal well technology, Pennwell Publishing Company, Tulsa, OK, pp 389-420, 1991.

Karcher, B. J., Giger, F. M. and Combe, J., Some practical formulas to predict horizontal well behavior, Paper SPE 15430, 61<sup>st</sup> Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of petroleum engineers, New Orleans, L. A., Oct. 5-8, 1986.

- Karp, J.C, Lowe, D.K., Marusov, N., Horizontal barriers for controlling water coning, Paper SPE 153, 1962.
- Khan, A. R., A scaled model study of water coning, JPT, pp 771-776, June, 1970.
- Kidder, R. E., Flow of immiscible fluids in porous media : exact solution of free boundary problem, Journal of Applied Physics, vol. 27, N° 8, pp 867-869, Aug., 1956.
- Ko, S. C. M., Azziz, A. and Sttari, A., Computer simulation of water coning by a sequential solution method, JCPT, Jan. – March, pp 61-73, 1980.
- Kuo, M.C.T., Debrisay, C.L., A simplified method for water coning predictions, Paper SPE 12067, 1983.
- Letskeman, J. P., and Ridings, R. L., A numerical coning model, Paper SPE, pp 418-424, Dec., 1970.
- Lewis, R. W., Norris, V. A. and France, P. W., Finite element analysis of the motion of gas liquid interface in a porous medium, International Journal for numerical methods in engineering, vol. 9, pp 433-448, 1975.
- Lien, S. C., Seines, K. and Havig, S. O., The first long - term horizontal well test in the troll thin oil zone, Paper SPE 20715, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, LA, Sept., 1990.
- Lien, S. C., Seines, K.. and Havig, S. O., The first long - term horizontal well test in the troll thin oil zone, JPT, pp 914-974, August, 1991.
- MacDonald, R. C. and Coats, K. H., Methods for numerical simulation of water and gas coning, Paper SPE 2796, Second Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, Dallas, TX, February, 5-6, 1970.
- Marle, C. M., Multiphase flow in porous media, Edition Technip, Paris, 1981.
- Maslov, I. I., et al., Selective isolation of an inflow of formation waters by silanes, Neftyanoe Khozyaistvo, N° 5, pp 38-41, May, 1976.
- Menouar, H.K., Hakim, A. A., Water coning and critical rates in vertical and horizontal wells, Paper SPE 29877, 1995.
- Meyer, H. R. and Searcy, D. F., Analog study of water coning, Trans. AIME, vol. 207, pp 302-305, 1956.
- Meyer, H. R. and Garder, A.O., Mechanics of two immiscible fluids in porous Media, Journal Appl. Phys., Vol. 25, N°11, p. 1400, 1954.
- Mrosovsky, I. and Ridings, R. L., Two dimensional radial treatment of wells within a three dimensional reservoir model, Paper SPE, pp 127-131, April, 1975.

Mungan, N., A theoretical and experimental coning study, Paper SPE, 4982, SPE AIME 49<sup>th</sup> Annual Fall Meeting, Houston, TX, Oct. 6-9, 1975.

Murphy, P. J., Performance of horizontal wells in the Helder field, Paper SPE 18340, SPE European Petroleum Conference, London, U.K., oct. 16-19, 1988.

Muskat, M., Physical principles of oil production. Mc-Graw-Hill, New York, 1949.

Muskat, M., Wyckoff, R. D., An approximate theory of water coning in oil production. Trans. AIME, vol. 114, pp 144-163, 1935.

Ould-amer, Y., Chikh, S., Dynamique d'un écoulement huile - eau dans les milieux poreux naturels. Sixième Séminaire international sur la physique énergétique, Béchar, Algeria, 21-23 Oct. 2002, 2002.

Ould-amer, Y., Chikh, S., Transient behavior of water-oil interface in an upward flow in porous media. J. Porous Media, 6(2), 1-12, 2003.

Outmans, H. D., Effect of coning on clean production rate of well in heterogeneous reservoir, Paper SPE 893, 1964.

Papatzacos, P., Herring, T. R., Martinsen, R. and Skjaeveland, S. M., Cone breakthrough time for horizontal wells, Paper SPE 19822, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, TX, Oct. 8-11, 1989.

Papatzacos, P., Herring, T.R., Martinsen, R. and Skjaeveland, S.M., Cone breakthrough time for horizontal wells, Reservoir Engineering Journal, August, 1991.

Patankar, S.V., A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. Numerical Heat Transfer, vol. 4, 409-425, 1981.

Patankar, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow. Mc-Graw-Hill, New York, 1980.

Pavone, D., Observations and correlations for immiscible viscous fingering experiments, Paper SPE 19670, 1989.

Peng, C. P. and Yeh, N., Reservoir engineering Aspects of horizontal wells - Application to oil reservoirs with gas or water coning problems, Paper SPE 29958, International Meeting on Petroleum Engineering, Beijing, Pr China, Nov. 14-17, 1995.

Permadi, P., Lee, R. L. and Kartoatmodjo, R. S. T., Behavior of water cresting under horizontal wells, Paper SPE 30743, Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, TX, Oct. 22-25, 1995.

Pirson, S. J. and Mehta, M. M., A study of remedial measures for water coning by means of a two dimensional simulator, Paper SPE 1808, 42th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, TX, Oct. 1-4, 1967.

Peters, E. J. and Flock, D. L., The onset of instability during two-phase immiscible displacements in porous media, Paper SPE 8371, 1979.

Rakhimkulov, R. Sh, et al., Limiting the inflow of formation waters with polyacrylamide solutions, *Neftyanoe Khozyaistvo*, N° 1, pp 51-54, Jan., 1982.

Romero-Juarez, A., Characteristic of oil production related to water coning. Paper SPE 1089, 1964.

Rose, W., Relative permeability, Chapter 28 in Handbook of petroleum reservoir engineering, Society of petroleum engineers, Dallas, 1987.

Russel, T. J., Larry, W. L., Arnaud, M. D., Prediction of capillary fluid interfaces during gas or water coning in vertical wells, Paper SPE 77772, 2002.

Safman, P. G. and Taylor G. I., The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, *Proc. Roy. Soc. A245*, pp. 312-329, 1958.

Scheidegger A. E., The physics of flow through porous media, 3<sup>rd</sup> edition, University of Toronto press, 1972.

Schols, R. S., An empirical formula for the critical oil production rate. *Erdoel Erdgas, Z.*, vol. 88, N°1, 1972.

Settari, A. and Azziz, K., A computer model for two phase coning simulation, Paper SPE, pp 221-236, June, 1974.

Shirman, E. I., , Wojtanowicz, A. K., Water coning hysteresis and reversal for well completion using the moving spherical sink method, Paper SPE 37467, 1997.

Shirman, E. I., Wojtanowicz, A. K., Water coning reversal using downhole water sink theory and experimental study, Paper SPE 38792, 1997.

Shols, R. S., An empirical formula for the critical oil production rate, *Erdoel Erdgas, Z*, Vol. 88, N° 1, pp 6-11, Jan., 1972.

Smith, C. R., Pirson, S. J., Water coning control in oil well by fluid injection, Paper SPE 613, 1963.

Sobocinski, D. P. and Cornelius, A. J., A correlation for predicting water coning time, *J. Pet. Tech.*, pp. 594 – 600, May 1965.

Sonier, F., Besset, P. and Ombret, O., A numerical model of multiphase flow around a well, Paper SPE, pp 311-320, Dec., 1973.

Sparlin, D. D., An evaluation of Polyacrylamides for reducing water production, *JPT*, pp 906-914, Aug., 1979.

Spivak, A. and Coats, K. H., Numerical simulation of coning using implicit production terms, Paper SPE, pp 257-267, Sep., 1970.

Strickland, E. F., Artificial barriers may control water coning -1 and 2, the O.G.J, pp 61-64, Oct. 7, 1976, pp 110-113, Oct. 15, 1974.

Suprunowicz, R. and Butler, R. M., Vertical confined water drive to horizontal well -Part. 1: Water and oil of equal densities, J. Can. Pet. Tech., Vol. 31, N°1, 1992.

Swisher, M. D., Wojtanowicz, A. K., In situ-segregated production of oil and water – A production method with environmental merit field application, Paper SPE 29693, 1995.

Swisher, M. D., Wojtanowicz, A. K., New dual completion method eliminates bottom water coning, Paper SPE 30697, 1995.

Trimble, R. H. and MacDonald, A. E., Strongly coupled fully implicit three dimensional three phase well coning model, Paper SPE, pp 454-458, Aug., 1981.

Welge, H. J. and Weber, A. G., Use of two dimensional methods for calculating well coning behavior, Paper SPE, pp 354-355, Dec., 1964.

Widmyer, R. H., Producing Petroleum from underground formations, US Patent N° 2855047, Oct. 3, 1955.

Wojtanowicz, A. K., Bassiouni, Z. A., Segregated production method for oil wells with active water coning. J. Pet. Sci. Eng., 11, 21-35, 1994.

Wojtanowicz, A. K., Xu, H., Bassiouni, Z. A., Oil well coning control using dual completion with tailpipe water sink, Paper SPE 21654, 1991.

Yang, W., An analytical solution to two-phase flow in porous media and its application to water coning, Paper SPE 25283, 1992.

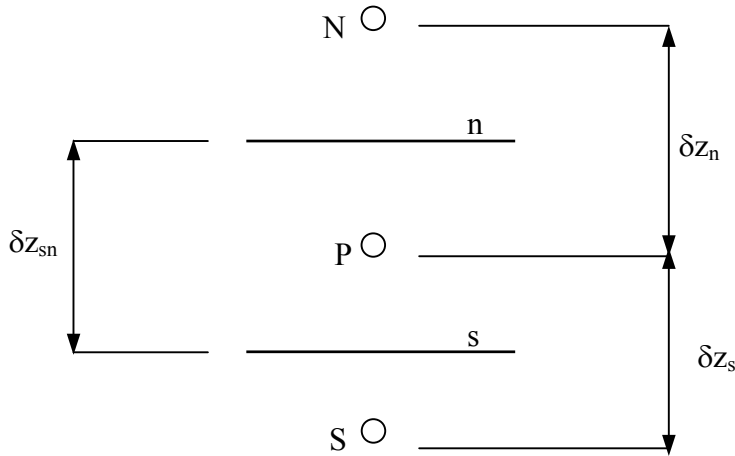
Yang, W., Wattenbarger, R. A., Water coning calculations for vertical and horizontal wells, Paper SPE 22931, 1991.

## ANNEXE A

## Discrétisation de l'équation de pression (3.8)

On considère le volume de contrôle de la figure A.1 et on discrétise l'équation de pression (3.8) à travers ce volume.

$$\int_s^n \left( \frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) \right] + \frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_o g \right) \right] \right) dz = 0 \quad (\text{A.1})$$



**Figure A.1** volume de contrôle pour les équations gouvernantes du chapitre 3

L'intégration de l'équation (A.1) donne lieu à :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{K}{\mu_w} K_{rw} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) \right|_n - \left. \frac{K}{\mu_w} K_{rw} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w g \right) \right|_s \\ & + \left. \frac{K}{\mu_o} K_{ro} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_o g \right) \right|_n - \left. \frac{K}{\mu_o} K_{ro} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_o g \right) \right|_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

L'évaluation des dérivées aux interfaces donne lieu à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{K}{\mu_w} K_{rw} \left|_n \left( \frac{P_N - P_P}{\delta z_n} + \rho_w g \right) \right. - \left. \frac{K}{\mu_w} K_{rw} \left|_s \left( \frac{P_P - P_S}{\delta z_n} + \rho_w g \right) \right. \right. \\ & \left. + \frac{K}{\mu_o} K_{ro} \left|_n \left( \frac{P_N - P_P}{\delta z_n} + \rho_o g \right) \right. - \left. \frac{K}{\mu_o} K_{ro} \left|_s \left( \frac{P_P - P_S}{\delta z_n} + \rho_o g \right) \right. \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Par arrangement et manipulation mathématique de l'équation (A.3), on aboutit à la forme suivante :

$$a_P P_P = a_N P_N + a_S P_S + b_P \quad (\text{A.4})$$

Les coefficients dans l'équation (A.4) sont données par les expressions suivantes:

$$a_N = \frac{K}{\mu_w \delta z_n} K_{rw}|_n + \frac{K}{\mu_o \delta z_n} K_{ro}|_n \quad (\text{A.5})$$

$$a_S = \frac{K}{\mu_w \delta z_s} K_{rw}|_s + \frac{K}{\mu_o \delta z_s} K_{ro}|_s \quad (\text{A.6})$$

$$a_P = a_N + a_S \quad (\text{A.7})$$

$$b_P = \left( \frac{K}{\mu_w} K_{rw}|_n - \frac{K}{\mu_w} K_{rw}|_s \right) \rho_w \mathbf{g} + \left( \frac{K}{\mu_o} K_{ro}|_n - \frac{K}{\mu_o} K_{ro}|_s \right) \rho_o \mathbf{g} \quad (\text{A.8})$$

### Discrétisation de l'équation de saturation en eau (3.4)

Le volume de contrôle de la figure A.1 est considéré. La discrétisation de l'équation (3.4) entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t+\Delta t$  s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{d}{dz} \left[ K \frac{K_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{dP}{dz} + \rho_w \mathbf{g} \right) \right] dz dt = \int_s^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) dt dz \quad (\text{A.9})$$

L'intégration de l'équation précédente, pour un schéma totalement implicite, donne lieu à :

$$\begin{aligned} \left( \frac{K}{\mu_w} K_{rw}|_n \left( \frac{P_N^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}}{\delta z_n} + \rho_w \mathbf{g} \right) - \frac{K}{\mu_w} K_{rw}|_s \left( \frac{P_P^{t+\Delta t} - P_S^{t+\Delta t}}{\delta z_s} + \rho_w \mathbf{g} \right) \right) \Delta t \\ = \phi (S_{wP}^{t+\Delta t} - S_{wP}^t) \delta z_{sn} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En arrangeant l'équation précédente, on obtient :

$$S_{wP}^{t+\Delta t} = S_{wP}^t + \frac{\Delta t}{\phi \delta z_{sn}} \left( \frac{K}{\mu_w} K_{rw}|_n \left( \frac{P_N^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}}{\delta z_n} + \rho_w \mathbf{g} \right) - \frac{K}{\mu_w} K_{rw}|_s \left( \frac{P_P^{t+\Delta t} - P_S^{t+\Delta t}}{\delta z_s} + \rho_w \mathbf{g} \right) \right) \quad (\text{A.11})$$

ANNEXE B

Discrétisation de l'équation de pression (4.16)

On considère le volume de contrôle de la figure B.1 et on discrétise l'équation de pression (4.16) à travers ce volume.

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_w^e \int_s^n Ra \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ \left( Kr_o \frac{Rkr}{M} + Kr_w \right) \frac{\partial P_w^*}{\partial z^*} + \left( Kr_o \frac{Rkr}{M} \right) \frac{\partial P_c^*}{\partial z^*} \right] dz^* dr^* + \\ & \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ r^* \left( Kr_o \frac{Rkr}{M} + Kr_w \right) \frac{\partial P_w^*}{\partial r^*} + r^* \left( Kr_o \frac{Rkr}{M} \right) \frac{\partial P_c^*}{\partial r^*} \right] dr^* dz^* \end{aligned} \right\} (ND\rho)(N\rho_w) = \int_w^e \int_s^n \frac{\bar{Q}_a^*}{Da_H} dz^* dr^* \quad (B.1)$$

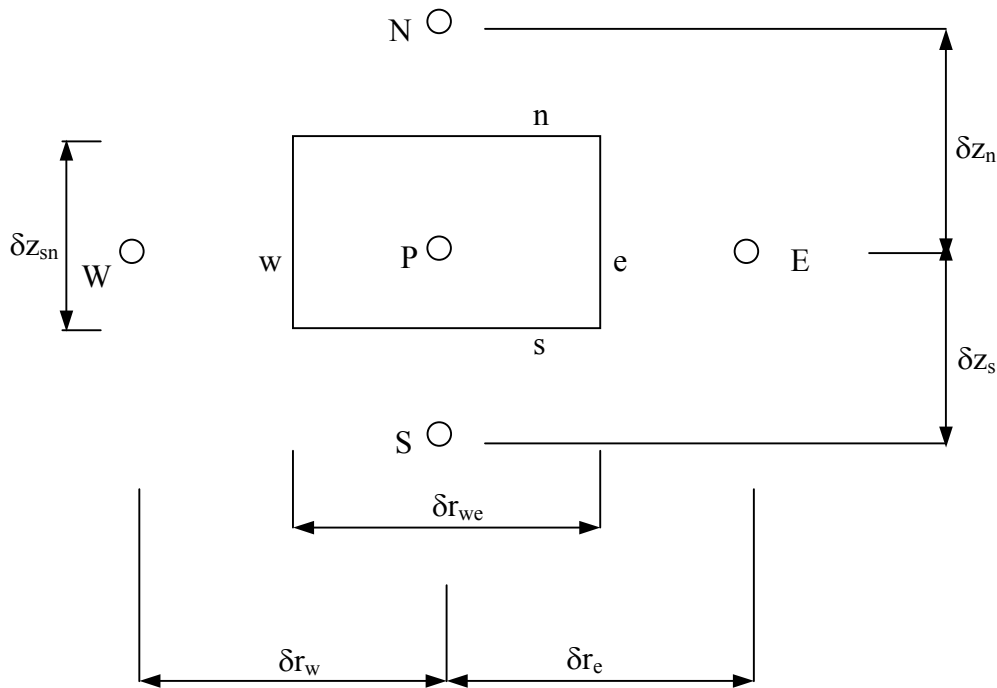


Figure B.1 volume de contrôle pour les équations gouvernantes du chapitre 4

L'intégration de l'équation (B.1) donne lieu à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ra} \left[ \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \frac{\partial \text{P}_w^*}{\partial z^*} + \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \frac{\partial \text{P}_c^*}{\partial z^*} \right]_s \delta r_{we}^* + \\ \frac{1}{\Gamma_p^*} \left[ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \frac{\partial \text{P}_w^*}{\partial r^*} + r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \frac{\partial \text{P}_c^*}{\partial r^*} \right]_w \delta z_{sn}^* \end{array} \right\} (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{\bar{Q}_a^*}{\text{Da}_H} \delta z_{sn}^* \delta r_{we}^*$$

L'évaluation des dérivées aux interfaces donne lieu à l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ra} \left[ \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \right]_n \frac{\text{P}_{wN}^* - \text{P}_{wP}^*}{\delta z_n^*} + \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \left[ \frac{\text{P}_{cN}^* - \text{P}_{cP}^*}{\delta z_n^*} \right] \delta r_{we}^* \\ - \text{Ra} \left[ \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \right]_s \frac{\text{P}_{wP}^* - \text{P}_{wS}^*}{\delta z_s^*} + \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \left[ \frac{\text{P}_{cP}^* - \text{P}_{cS}^*}{\delta z_s^*} \right] \delta r_{we}^* \\ + \frac{1}{\Gamma_p^*} \left[ \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \right\} \right]_e \frac{\text{P}_{wE}^* - \text{P}_{wP}^*}{\delta r_e^*} + \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \right\} \left[ \frac{\text{P}_{cE}^* - \text{P}_{cP}^*}{\delta r_e^*} \right] \delta z_{sn}^* \\ - \frac{1}{\Gamma_p^*} \left[ \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \right\} \right]_w \frac{\text{P}_{wP}^* - \text{P}_{wW}^*}{\delta r_w^*} + \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \right\} \left[ \frac{\text{P}_{cP}^* - \text{P}_{cW}^*}{\delta r_w^*} \right] \delta z_{sn}^* \end{array} \right\} (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w)$$

$$= \frac{\bar{Q}_a^*}{\text{Da}_H} \delta z_{sn}^* \delta r_{we}^* \quad (\text{B.3})$$

Par arrangement et manipulation mathématique de l'équation (B.3) on aboutit à la forme suivante :

$$a_P \text{P}_{wP} = a_N \text{P}_{wN} + a_S \text{P}_{wS} + a_E \text{P}_{wE} + a_W \text{P}_{wW} + b_P \quad (\text{B.4})$$

Les coefficients dans l'équation (B.4) sont données par les expressions suivantes:

$$a_N = \frac{\text{Ra} \delta r_{we}^*}{\delta z_n^*} \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \Big|_n (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \quad (\text{B.5})$$

$$a_S = \frac{\text{Ra} \delta r_{we}^*}{\delta z_s^*} \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \Big|_s (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \quad (\text{B.6})$$

$$a_E = \frac{\delta z_{sn}^*}{\Gamma_p^* \delta r_e^*} \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \right\} \Big|_e (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \quad (\text{B.7})$$

$$a_W = \frac{\delta z_{sn}^*}{\Gamma_p^* \delta r_w^*} \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} + \text{Kr}_w \right) \right\} \Big|_w (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_W \quad (\text{B.9})$$

$$b_p = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ra} \left[ \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \Big|_n \frac{\text{P}_{\text{cN}}^* - \text{P}_{\text{cP}}^*}{\delta z_n^*} \right] \delta r_{\text{we}}^* - \text{Ra} \left[ \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \Big|_s \frac{\text{P}_{\text{cP}}^* - \text{P}_{\text{cS}}^*}{\delta z_s^*} \right] \delta r_{\text{we}}^* \\ + \frac{1}{r_p^*} \left[ \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \right\} \Big|_e \frac{\text{P}_{\text{cE}}^* - \text{P}_{\text{cP}}^*}{\delta r_e^*} \right] \delta z_{\text{sn}}^* \\ - \frac{1}{r_p^*} \left[ \left\{ r^* \left( \text{Kr}_o \frac{\text{Rkr}}{\text{M}} \right) \right\} \Big|_w \frac{\text{P}_{\text{cP}}^* - \text{P}_{\text{cW}}^*}{\delta r_w^*} \right] \delta z_{\text{sn}}^* \end{array} \right\} (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) - \frac{\bar{Q}_a^*}{\text{Da}_H} \delta z_{\text{sn}}^* \delta r_{\text{we}}^* \quad (\text{B.10})$$

### Discrétisation de l'équation de saturation en eau (4.15)

Le volume de contrôle de la figure B.1 est considéré. La discrétisation de l'équation (4.15) entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t+\Delta t$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \left[ \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \text{Ra Kr}_w \frac{\partial \text{P}_w^*}{\partial z} \right) \right] dz^* dr^* dt^* \\ & + (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \text{Kr}_w \frac{\partial \text{P}_w^*}{\partial r} \right) \right] dz^* dr^* dt^* \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\text{Da}_H} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} (\phi S_w) + Q_{wa}^* \right) dz^* dr^* dt^* \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

L'intégration de l'équation précédente, pour un schéma totalement implicite, donne lieu à :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \text{Ra Kr}_w \Big|_n \frac{\text{P}_{\text{wN}}^{*t+\Delta t} - \text{P}_{\text{wP}}^{*t+\Delta t}}{\delta z_n^*} - \text{Ra Kr}_w \Big|_s \frac{\text{P}_{\text{wP}}^{*t+\Delta t} - \text{P}_{\text{wS}}^{*t+\Delta t}}{\delta z_s^*} \right) \delta r_{\text{we}}^* \right. \\ & \left. + \frac{\delta z_{\text{sn}}^*}{r_p^*} \left( r_e^* \text{Kr}_w \Big|_e \frac{\text{P}_{\text{wE}}^{*t+\Delta t} - \text{P}_{\text{wP}}^{*t+\Delta t}}{\delta r_e^*} - r_w^* \text{Kr}_w \Big|_w \frac{\text{P}_{\text{wP}}^{*t+\Delta t} - \text{P}_{\text{wW}}^{*t+\Delta t}}{\delta r_w^*} \right) \right] (\text{ND}\rho)(\text{N}\rho_w) \Delta t^* \\ & = \frac{\delta r_{\text{we}}^* \delta z_{\text{sn}}^*}{\text{Da}_H} \left[ \phi (S_{\text{wP}}^{*t+\Delta t} - S_{\text{wP}}^t) + Q_{wa}^* \Delta t^* \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

En arrangeant l'équation précédente, on obtient :

$$S_{wP}^{t+\Delta t} = S_{wP}^t + \frac{Q_{wa}^* \Delta t^*}{\phi} + \frac{Da_H}{\delta r_{we}^* \delta z_{sn}^* \phi} TP \quad (B.13)$$

$$TP = \left[ \begin{array}{l} \left( Ra Kr_w \Big|_n \frac{P_{wN}^{*t+\Delta t} - P_{wP}^{*t+\Delta t}}{\delta z_n^*} - Ra Kr_w \Big|_s \frac{P_{wP}^{*t+\Delta t} - P_{wS}^{*t+\Delta t}}{\delta z_s^*} \right) \delta r_{we}^* \\ + \frac{\delta z_{sn}^*}{r_p^*} \left( r_c^* Kr_w \Big|_e \frac{P_{wE}^{*t+\Delta t} - P_{wP}^{*t+\Delta t}}{\delta r_e^*} - r_w^* Kr_w \Big|_w \frac{P_{wP}^{*t+\Delta t} - P_{wW}^{*t+\Delta t}}{\delta r_w^*} \right) \end{array} \right] (ND\rho)(N\rho_w)\Delta t^* \quad (B.14)$$

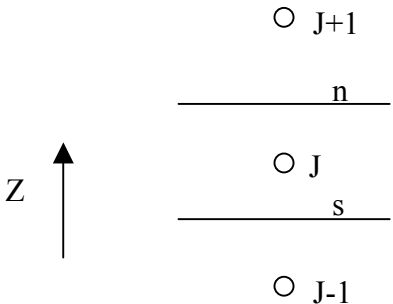
## ANNEXE C

## Evaluation des perméabilités aux interfaces des volumes de contrôle

## ❖ Pour un schéma décentré (utilisé au chapitre trois)

Aux interfaces s et n, du volume de contrôle de la figure ci - dessous, les perméabilités relatives au fluide  $l$  sont évaluées comme suit :

$$K_{r_l}|_n = \begin{cases} K_{r_l}(J) \text{ pour un écoulement de } J \text{ vers } J+1 \\ K_{r_l}(J+1) \text{ pour un écoulement de } J+1 \text{ vers } J \end{cases}$$

$$K_{r_l}|_s = \begin{cases} K_{r_l}(J-1) \text{ pour un écoulement de } J-1 \text{ vers } J \\ K_{r_l}(J) \text{ pour un écoulement de } J \text{ vers } J-1 \end{cases}$$


## ❖ Pour un schéma du second ordre utilisant deux points à l'amont (utilisé au chapitre quatre)

Aux interfaces w et e, les perméabilités relatives à la phase  $l$  sont évaluées comme suit :



$$K_{r_l}|_e = \begin{cases} \frac{1}{2}[3K_{r_l}(I) - K_{r_l}(I-1)] \text{ pour un écoulement de } I \text{ vers } I+1 \\ \frac{1}{2}[3K_{r_l}(I+1) - K_{r_l}(I+2)] \text{ pour un écoulement de } I+1 \text{ vers } I \end{cases}$$

$$K_{r_l}|_w = \begin{cases} \frac{1}{2}[3K_{r_l}(I-1) - K_{r_l}(I-2)] \text{ pour un écoulement de } I-1 \text{ vers } I \\ \frac{1}{2}[3K_{r_l}(I) - K_{r_l}(I+1)] \text{ pour un écoulement de } I \text{ vers } I-1 \end{cases}$$

Une étape de vérification est nécessaire avec ce schéma. En effet, si par exemple on considère  $K_{r_l}|_e$  évaluée pour un écoulement de  $I$  vers  $I+1$  et si  $K_{r_l}(I-1) = 0$ , on obtient alors  $K_{r_l}|_e = 3K_{r_l}(I)/2$  qui peut dépasser la valeur 1 physiquement admissible. C'est pourquoi, à chaque étape de calcul, il faut s'assurer que  $0 \leq K_{r_l}|_{\text{interface}} \leq 1$ .

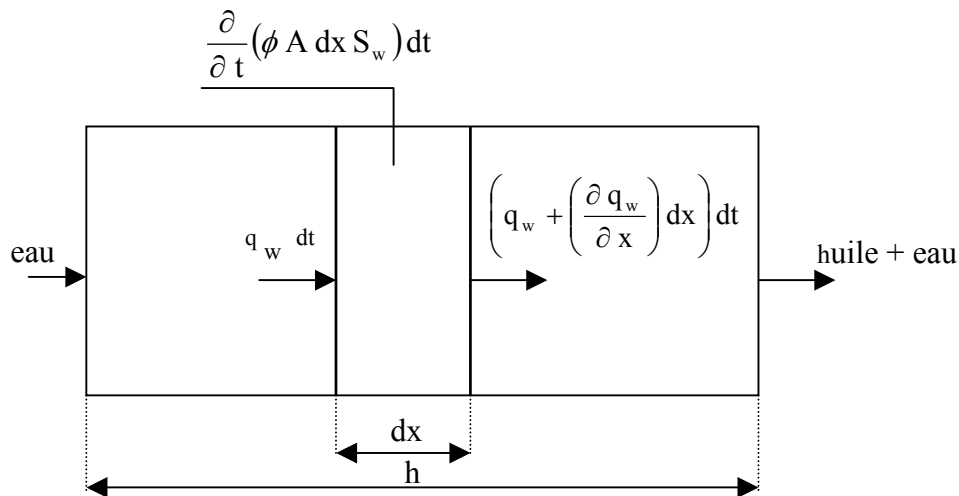
## ANNEXE D

## Théorie de Buckley-Leverett

Soit un déplacement 1D (unidimensionnel) d'huile par l'eau dans un milieu poreux, homogène et isotrope, de section droite  $A$  et de porosité  $\phi$ . Un élément de volume de longueur  $dx$  avec une saturation en eau  $S_w(x,t)$  est considéré (figure D.1).

Si  $q_w$  est le débit d'écoulement d'eau entrant dans l'élément de volume, alors

$\left( q_w + \left( \frac{\partial q_w}{\partial x} \right) dx \right)$  est le débit d'écoulement sortant par l'autre face.



**Figure D.1** Déplacement d'huile par l'eau dans un milieu poreux et bilan volumique

En supposant les fluides incompressibles, le bilan volumique appliqué à l'élément de volume du milieu poreux (figure D.1), pour un intervalle de temps  $dt$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\text{volume d'eau entrant à l'instant } dt) - (\text{volume d'eau sortant à l'instant } dt) \\ & = (\text{changement dans le volume d'eau à l'instant } dt) \end{aligned}$$

Le bilan précédent se traduit mathématiquement par :

$$q_w dt - \left( q_w + \frac{\partial q_w}{\partial x} dx \right) dt = \frac{\partial}{\partial t} (\phi A dx S_w) dt \quad (D.1)$$

Pour  $\phi$  et  $A$  constantes et sachant que :

$$f_w = \frac{q_w}{q_t} \quad \text{et} \quad q_t = q_w + q_o$$

Avec  $q_o$  débit d'écoulement à travers l'élément de volume et  $f_w$  fraction volumique d'eau, l'équation (D.1) s'écrit :

$$-\frac{q_t}{A \phi} \frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (D.2)$$

Puisque  $f_w = f_w(S_w)$  alors :

$$\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{df_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (D.3)$$

En substituant l'équation (D.3) dans l'équation (D.2), on obtient :

$$\frac{q_t}{A \phi} \frac{df_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} + \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0 \quad (D.4)$$

L'équation (D.4) est l'équation de Buckley-Leverett. La résolution de cette équation différentielle donne la distribution de la saturation en eau  $S_w$  dans l'espace et dans le temps.

Les conditions initiales et aux limites sont :

$$S_w = S_{wr} \quad \text{pour } 0 < x \leq h, t = 0 \quad (D.5)$$

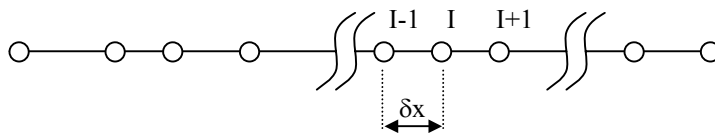
$$S_w = 1 - S_{or} \quad \text{pour } x = 0, t \geq 0 \quad (D.6)$$

En posant :  $C = \frac{q_t}{A \phi} \frac{df_w}{dS_w}$ , l'équation (D.4) s'écrit alors :

$$C \frac{\partial S_w}{\partial x} + \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0 \quad (D.7)$$

C'est une équation du type hyperbolique. Elle est résolue par la méthode des différences finies utilisant un schéma décentré par une procédure de marche en avant totalement implicite.

Considérons le maillage suivant :



L'équation (D.7) discrétisée pour le noeud I entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t + \Delta t$  s'écrit :

$$C_I \left( \frac{S_{wI}^{t+\Delta t} - S_{wI-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) + \left( \frac{S_{wI}^{t+\Delta t} - S_{wI}^t}{\Delta t} \right) = 0 \quad (D.8)$$

$S_{wI}^{t+\Delta t}$  est la saturation en eau à l'instant  $t + \Delta t$  au noeud I.

$S_{wI}^t$  est la saturation en eau à l'instant  $t$  au noeud I.

En arrangeant l'équation (D.8), on obtient :

$$a_I S_{wI}^{t+\Delta t} = d_I S_{wI-1}^{t+\Delta t} + b_I \quad (\text{D.9})$$

Avec :

$$d_I = \frac{C_I}{\delta X}, \quad b_I = a_{I0} S_{wI}^t, \quad a_{I0} = \frac{1}{\Delta t}, \quad a_I = d_I + a_{I0}, \quad C_I = \frac{q_t}{A \phi} \left. \frac{df_w}{dS_w} \right|_I \quad (\text{D.10})$$

Algorithme de résolution :

Pour un temps de simulation  $N\Delta t$

Calcul de  $S_{wI}^{\Delta t}$  pour  $I \geq 2$  (avec test de convergence).

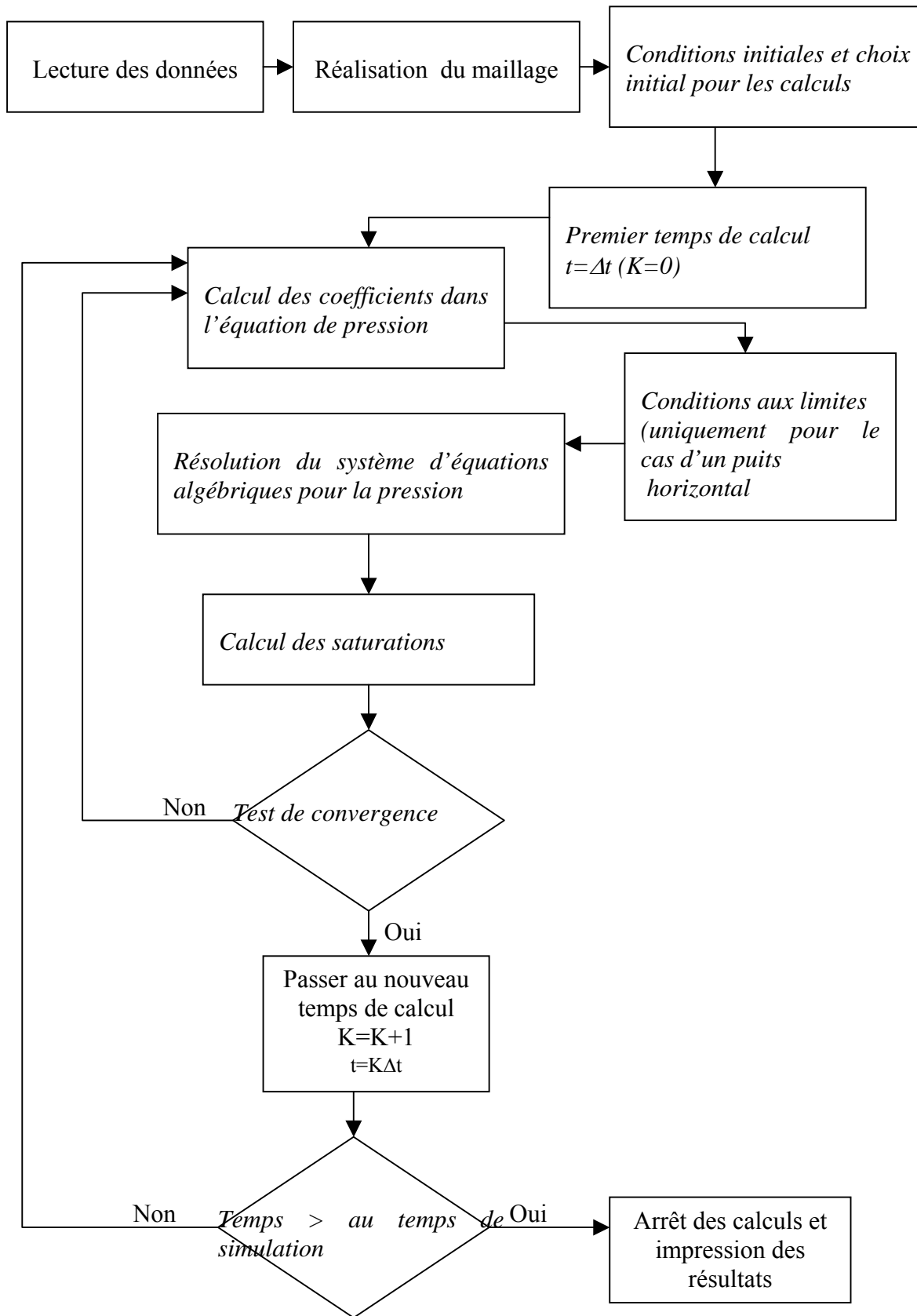
Calcul de  $S_{wI}^{2\Delta t}$  pour  $I \geq 2$  (avec test de convergence).

Faire le calcul pour les temps  $S_{wI}^{3\Delta t}, S_{wI}^{4\Delta t}, \dots$  (avec test de convergence).

Arrêt des calculs au temps  $N\Delta t$ .

## ANNEXE E

## Organigramme des codes de calcul



## ANNEXE F

## Analyse de la régression

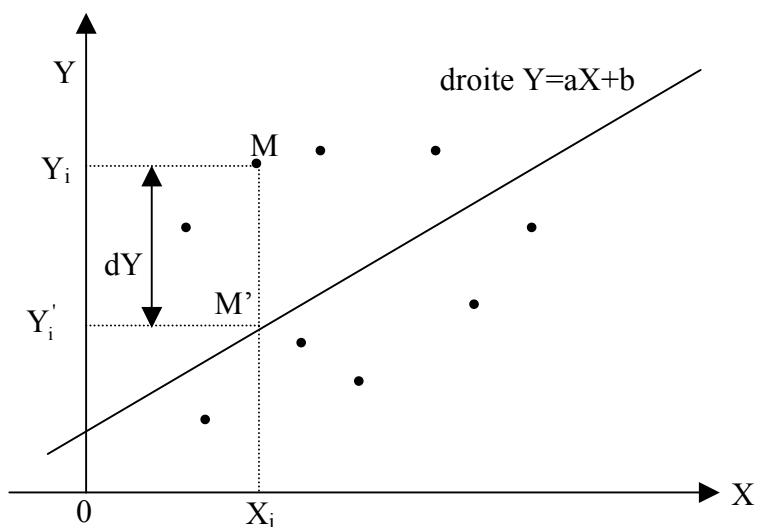
Les résultats numériques relatifs au pourcentage d'huile récupérée sont approchés par des fonctions analytiques. Les fonctions les plus simples sont les polynômes d'ordre un. Plusieurs fonctions ont été testées avant d'aboutir à la fonction de corrélation proposée dans le chapitre trois. L'approximation est d'autant plus meilleure quand l'erreur commise, par rapport aux valeurs à corrélérer, est plus faible. Les coefficients apparaissant dans les fonctions d'approximation sont déterminés par la méthode des moindres carrés.

Exposé de la méthode de régression

## a. Cas de régression simple

Soit une famille de  $n$  couples de points positifs  $(X_i, Y_i)$  tel que :  $Y_i = F(X_i)$ .

En représentant les points  $(X_i, Y_i)$  dans un repère cartésien, l'objectif est de déterminer l'équation d'une droite qui passe le plus près possible du nuage formé par les points  $(X_i, Y_i)$ .



Le point  $M(X_i, Y_i)$  est situé à une distance  $dY_i$  de la droite  $Y = aX + b$  approchant le nuage de points. Cette distance est appelée régression en Y par rapport à X.

Les coefficients  $a$  et  $b$  de l'équation de la droite d'approximation doivent être déterminés tout en minimisant la distance  $dY_i$  pour tout le nuage de points considérés.

Soit  $M'(X_i, Y_i')$  un point de la droite d'approximation. La distance  $dY_i$  est donnée alors par :

$$dY_i = Y_i - Y_i'$$

Comme le point  $M'(X_i, Y_i')$  appartient à la droite  $Y = aX + b$ , on a :

$$Y_i' = aX_i + b$$

d'où :

$$dY_i = Y_i - aX_i - b$$

Pour réduire les distances  $dY_i$ , il faut minimiser l'expression  $D$  donnée par :

$$D = \sum_{i=1}^n dY_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - aX_i - b)^2$$

(formule des moindres carrés)

Pour minimiser  $D$ , il faut calculer les dérivées de  $D$ , par rapport aux coefficients  $a$  et  $b$ , et les annuler.

Dérivée par rapport à  $b$

$$\frac{dD}{db} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - aX_i - b) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^n Y_i - a \sum_{i=1}^n X_i - nb = 0$$

En divisant tous les termes par  $n$ , on obtient :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

En remarquant que  $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$  et  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$  sont respectivement les moyennes arithmétiques des  $Y_i$  et  $X_i$ , on peut écrire alors :

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} \quad (1)$$

Dérivée par rapport à  $a$

$$\frac{dD}{da} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - aX_i - b) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i X_i - aX_i^2 - bX_i) = 0$$

d'après la relation (1), on a :

$$b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i X_i - a X_i^2 - \bar{Y} X_i - a \bar{X} X_i) = 0$$

En divisant tous les termes par n, on obtient :

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{Y} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - a \bar{X}^2 = 0$$

En résolvant pour a, on aboutit à l'expression suivante :

$$a = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \bar{Y} \bar{X}}{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \quad (2)$$

### b. Régression polynomiale

On considère une famille de n couples de points positifs  $(X_i, Y_i)$  tel que :  $Y_i = F(X_i)$ .

La régression polynomiale est caractérisée par la fonction :

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_k X^k$$

ou encore :

$$Y = \sum_{j=0}^k a_j X^j$$

Les coefficients  $a_j$  sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Il faut rendre minimale l'expression suivante :

$$D = \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \sum_{j=0}^k a_j X_i^j \right)^2$$

Cela revient à annuler toutes les dérivées partielles par rapport à  $a_j$ .

$$\frac{dD}{da_j} = -2 \sum_{i=1}^n X_i^j \left( Y_i - \sum_{j=0}^k a_j X_i^j \right) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^n X_i^j \left( Y_i - \sum_{j=0}^k a_j X_i^j \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^j Y_i - \sum_{i=1}^n X_i^j \sum_{j=0}^k a_j X_i^j = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^j \sum_{j=0}^k a_j X_i^j = \sum_{i=1}^n X_i^j Y_i$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^j (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_k X^k) = \sum_{i=1}^n X_i^j Y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n X_i^j + a_1 \sum_{i=1}^n X_i^{j+1} + a_2 \sum_{i=1}^n X_i^{j+2} + \dots + a_k \sum_{i=1}^n X_i^{j+k} = \sum_{i=1}^n X_i^j Y_i$$

on fait le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^j}{n} \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ \bar{X}_{j+k} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{j+k}}{n} \\ \bar{E}_j &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^j Y_i}{n} \end{aligned}$$

En divisant tous les termes de la dernière expression de  $\frac{dD}{da_j}$  par n et en introduisant le

changement de variable précédent, on obtient :

$$a_0 \bar{X}_j + a_1 \bar{X}_{j+1} + a_2 \bar{X}_{j+2} + \dots + a_k \bar{X}_{j+k} = \bar{E}_j$$

Ce qui donne un système à k+1 équations et k+1 inconnues :

$$\begin{aligned} j=0 & \quad a_0 \bar{X}_0 + a_1 \bar{X}_1 + a_2 \bar{X}_2 + \dots + a_k \bar{X}_k = \bar{E}_0 \\ j=1 & \quad a_0 \bar{X}_1 + a_1 \bar{X}_2 + a_2 \bar{X}_3 + \dots + a_k \bar{X}_{k+1} = \bar{E}_1 \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ j=k & \quad a_0 \bar{X}_k + a_1 \bar{X}_{k+1} + a_2 \bar{X}_{k+2} + \dots + a_k \bar{X}_{2k} = \bar{E}_k \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_0 & \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \dots & \bar{X}_k \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 & \dots & \bar{X}_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}_k & \bar{X}_{k+1} & \bar{X}_{k+2} & \dots & \bar{X}_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_0 \\ \bar{E}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \bar{E}_k \end{bmatrix}$$

Les coefficients sont déterminés par résolution du système matriciel précédent.

## **ANNEXE G**

### ***Travaux publiés***