

????????? ?????? ???? ???? ???? ???? ???? ???? ????
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE



FACULTE DES MATHÉMATIQUES
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Thèse présentée par
BENKELFAT SIDI MOHAMED KARIM

Pour l'obtention du titre de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

OPTION
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

**APPLICATION DE L'OPTIMISATION AU SENS DE PARETO
AU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL DISCRET**

Soutenue le 07-10-04

DEVANT LE JURY

PRESIDENT:	Mr M. MOULAI,	MAITRE DE CONFERENCES USTHB
DIRECTEUR DE THESE:	Mr M. AIDER,	MAITRE DE CONFERENCES USTHB
EXAMINATEURS:	Melle I. BOUCHEMAKH	MAITRE DE CONFERENCES USTHB
	Mr S. BOUROUBI	DOCTEUR D'ETAT USTHB
	Mr R. OUAFI CHARGE DE COURS	USTHB

Introduction

Le problème de contrôle optimal discret s'occupe de l'optimisation de systèmes dynamiques en dimension finie où l'évolution d'un système (physique, chimique, écologique, demande d'un produit...) d'une période à une autre est régie par une variable dite de contrôle (ou variable décision) et de variables d'état qui décrivent l'état du système à chaque période.

En général le problème de contrôle optimal discret nécessite moins de bagages mathématiques sophistiqués que le problème de contrôle optimal continu, cependant beaucoup de problèmes de coûts, d'identification de systèmes (estimation de paramètres) sont plus facilement étudiés dans le cadre de systèmes optimaux discrets que continus.

La discrétisation de problèmes continus, est devenue une technique importante notamment pour le contrôle de systèmes dynamiques due à la dépendance croissante aux ordinateurs pour le calcul des solutions dans un grand nombre d'applications.

Bien que le principe du maximum pour les systèmes continus fût établi par Pontryagin et Al.[60] depuis 40 ans, le détail de la démonstration du principe du maximum discret fût éclairé récemment.

La première mention du principe du maximum des systèmes discrets peut être attribuée à Rozonoer [62] . Il affirma que l'extension du principe du maximum continu aux systèmes discrets n'est possible que dans le cas linéaire.

Commençant en 1964 et plus tard en 1966, Halkin [21], [22] présentat une preuve soignée du principe du maximum discret, simultanément Propoi [61] en présentat une autre mais sous une hypothèse de convexité forte.

Une étude dans le cas où la commande est soumise à des contraintes en utilisant les méthodes de Halkin, fut faite par Bruckner et Wu [5]. .Holtzman et Halkin [24][25][26] ont beaucoup étendu les résultats de Halkin en introduisant le concept de convexité directionnelle.

Cannon, Cullum, Polak [7] et Da Cunha et Polak [14] ont présenté plus tard une méthode pour traiter de tels problèmes, en utilisant un théorème de base de l'optimisation et une approche systématique aux approximations coniques ce qui leur ont permis de simplifier largement la preuve du principe du maximum discret en incluant le cas des contraintes sur les coordonnées de phase.

L'optimisation au sens de Pareto est un domaine de la théorie de l'optimisation multiobjectif.

Le problème d'optimisation multiobjectif peut être formulé de la façon suivante:

(P) Minimiser $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ sachant $x \in X$.

Ce genre de problème est aussi appelé optimisation vectorielle. Contrairement à la programmation mathématique classique où il y'a qu'une seule fonction objectif, une solution optimale au sens qui minimise en même temps toutes les fonctions objectives n'existe pas nécessairement en optimisation multiobjective, c'est pourquoi la décision finale devrait être prise dans le sens qui tienne compte de toutes les fonctions objectifs. Ainsi un nouveau problème de jugement de valeur appelé compromis de valeur se fait sentir.

Une approche d'évaluation du modèle est de trouver une fonction scalaire $u(f_1, f_2, \dots, f_p)$ qui représente la préférence du décideur, appelé aussi fonction de préférence. Une fonction de préférence dans un problème de décision soumis à des facteurs aléatoires est appelé fonction d'utilité.

Une fois obtenu une fonction de préférence à notre problème, celui ci se réduit à un programme mathématique classique :

Maximiser $u(f_1(x), \dots, f_p(x))$, $x \in X$.

Kuhn Tucker [37] fut le premier mathématicien à donner en 1951 quelques résultats intéressants dans le domaine de l'optimisation multiobjectif. Depuis lors des recherches abondantes dans ce domaine furent effectuées aussi bien théoriques que pratiques .

Deux notions de bases de la théorie de l'optimisation multiobjectif: ordre de préférence et structure de domination sont étudiées dans cette thèse en apportant une contribution personnelle pour définir un ordre de préférence à l'aide d'une structure de domination.

Nous faisons également une synthèse sur les différentes approches de résolution d'un problème d'optimisation multiobjectif en mettant en relief l'importance des notions de solutions proprement efficaces connues jusqu'à ce jour, sans oublier la théorie de la dualité qui est abordée dans cette thèse avec ses différents aspects de problèmes duaux et qui visent en un certain sens à généraliser ce qui est connu en optimisation classique.

CHAPITRE I

INTRODUCTION AU PROBLEME DE CONTROLE OPTIMAL DISCRET

Le premier chapitre est consacré à une introduction au problème de contrôle optimal discret. Nous formulons ce problème à une seule fonction objectif puis nous donnons deux exemples d'applications: l'un au problème d'élevage et l'autre à la gestion de stocks. Puis nous donnons diverses formulations notamment les problèmes à extrémités gauches fixes, à extrémités gauches et droites fixes, contraintes sur les coordonnées de phases, contraintes à extrémités libres puis objets à retard de plusieurs itérations. Puis nous faisons le lien avec la programmation mathématique c'est à dire que nous montrons que nous pouvons formuler un problème de contrôle optimal discret à une seule fonction objectif, comme un programme non linéaire classique cependant vu la structure particulière des contraintes nous nous attendons à avoir des conditions d'optimalités qui s'énonceront de manière plus spécifiques que les théorèmes généraux d'optimisation.

Dans le paragraphe suivant nous donnons un bref aperçu sur le problème de contrôle optimal continu qui historiquement fut étudié avant le problème de contrôle optimal discret, nous énonçons le principe du maximum des objets continus et discrets.

Enfin le dernier paragraphe est consacré au lien avec la programmation dynamique qui est une source possible de résolution de problème de contrôle optimal discret.

I. 1) Formulation du problème de contrôle optimal discret à une fonction objectif

Nous formulons d'abord le problème que nous éclaircirons par la suite par quelques exemples.

Soient $x(1) = (x^1(1), x^2(1), \dots, x^n(1)) \in R^n$ n est un entier naturel non nul fixé

$$x(2) = (x^1(2), x^2(2), \dots, x^n(2)) \in R^n$$

.

.

.

$$x(N) = (x^1(N), x^2(N), \dots, x^n(N)) \in R^n \quad N \text{ vecteurs appelés trajectoire de phase.}$$

et soient $u(1) = (u^1(1), \dots, u^r(1)) \in R^r$ r fixé

$$u(2) = (u^1(2), \dots, u^r(2)) \in R^r$$

.

.

.

$$u(N) = (u^1(N), \dots, u^r(N)) \in R^r \quad N \text{ autres vecteurs appelés commande du processus ou}$$

contrôle du processus.

Soient d'autre part les fonctions suivantes :

$$f_t^i: R^n \times R^r \rightarrow R \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \subset N$$

$$(x, u) \rightarrow f_t^i(x, u) \quad t \in \{1, 2, \dots, N\} \subset N$$

Posons $f_t(x, u) = (f_t^1(x, u), \dots, f_t^n(x, u))$ et soit $x_0 \in R^n$ et $U_t \subset R^r$, $1 \leq t \leq N$.

Le problème consiste à déterminer un contrôle admissible c'est à dire $u(1), u(2), \dots, u(N)$

avec $u(t) \in U_t$ $1 \leq t \leq N$ et tel que la trajectoire de phase correspondante à ce contrôle satisfait à la condition initiale $x(0) = x_0$ et vérifie le système d'équations aux différences finis suivant :

$$x(t) = f_t(x(t-1), u(t)) \quad , \quad 1 \leq t \leq N$$

et maximise le critère : $J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$

Nous donnons à présent deux exemples pour éclaircir cette formulation:

1^{er} exemple: Problème de la ferme d'élevage:

Dans une ferme d'élevage, nous possédons du bétail. Chaque année une partie de ce bétail est envoyée aux abattoirs et le reste est gardé pour reproduction. La quantité de bétail gardée à la ferme pour reproduction augmente de "a" fois pendant l'année ($a > 1$).

Soit $j(x)$ le revenu de la vente du bétail aux organisations qui gèrent les abattoirs quand une quantité x de bétail a été livrée.

De quelle manière la ferme peut-elle obtenir en N années un revenu maximal si la quantité minimale de bétail à livrer chaque année est égale à b ?

Pour formuler ce problème appelons $x^1(0)$ la quantité de bétail initiale et $x^1(t)$ la quantité de bétail qui reste à la ferme à la fin de la $t^{\text{ième}}$ année $1 \leq t \leq N$ et $u(t)$ la quantité de bétail envoyée aux abattoirs durant la $t^{\text{ième}}$ année.

A la fin de $(t-1)^{\text{ième}}$ année, il reste à la ferme $x^1(t-1)$ quantité de bétail et grâce à la reproduction, il y'aura $a.x^1(t-1)$ quantité de bétail au cours de la $t^{\text{ième}}$ année et avant d'envoyer une certaine quantité aux abattoirs. Par conséquent comme nous envoyons $u(t)$ quantité aux abattoirs il restera à la fin de la $t^{\text{ième}}$ année $a.x^1(t-1) - u(t)$ quantité de bétail. D'où l'équation de récurrence : $x^1(t) = a.x^1(t-1) - u(t)$, $1 \leq t \leq N$.

La quantité de bétail qui reste à la fin de chaque période doit être positive ou nulle d'où la contrainte $x^1(t) \geq 0$, $1 \leq t \leq N$ et comme il faut livrer au moins b quantité aux abattoirs à chaque période, nous aurons $u(t) \geq b$, $1 \leq t \leq N$. D'où la formulation:

Trouver $u(1), u(2), \dots, u(N)$ tels que :

$$\begin{cases} x^1(t) = a.x^1(t-1) - u(t) & 1 \leq t \leq N \\ x^1(0) = c & (c \text{ donné}, c > 0) \\ u(t) \geq b & 1 \leq t \leq N \\ x^1(t) \geq 0 & 1 \leq t \leq N \\ \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f(u(t)) \end{cases}$$

2^{ième} exemple: Problème de gestion de stocks

Le tableau suivant donne pour les 5 périodes qui font l'objet de l'étude, les quantités d'un certain bien qu'un marchand aura à revendre ainsi que les prix d'achats:

période i	1	2	3	4	5
demande i	2	3	4	3	2
prix p_i	13	15	20	11	12

Sachant que ce marchand dispose d'une capacité de stockage (le coût de stockage est nul) de 5 unités, le problème consiste à déterminer la politique d'achat optimale, c'est à dire que nous cherchons à déterminer les quantités à acheter à chaque période de manière à minimiser le coût total d'achat sur les 5 périodes. Nous savons de plus que:

- (i) Les achats se font en début de période .
- (ii) Nous devons stocker les ventes de la période en cours.
- (iii) Nous commençons et nous finissons avec un stock nul.
- (iv) Les quantités achetées sont nécessairement entières.

Soit x_j la quantité restant en stock à la fin de la $j^{\text{ième}}$ période $1 \leq j \leq 5$ et u_j la quantité achetée à la $j^{\text{ième}}$ période $1 \leq j \leq 5$. De (i) et (ii) nous déduisons : $0 \leq x_j \leq 5 - d_j$, $1 \leq j \leq 5$. De (iii) nous déduisons $x_0 = x_5 = 0$.

A la fin de la $(j-1)^{\text{ième}}$ période, il reste en stock x_{j-1} quantité de marchandise et au début de

la j^{ieme} période nous achetons u_j quantité . Donc à la j^{ieme} période nous aurons une quantité égale à $x_{j-1} + u_j$ et de cette quantité nous prélevons la demande d_j et il restera une quantité égale à $x_{j-1} + u_j - d_j$ à la fin de la j^{ieme} période , d'où la formulation:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1, u_2, \dots, u_5 \text{ tel que} \\ x_j = x_{j-1} + u_j - d_j, 1 \leq j \leq 5 \\ x_0 = x_5 = 0 \\ 0 \leq x_j \leq 5 - d_j, u_j \in N, 1 \leq j \leq 5 \\ \text{Maximiser } (-13u_1 - 15u_2 - 20u_3 - 11u_4 - 12u_5) \end{cases}$$

qui est un problème de contrôle optimal discret .

La formulation du problème de contrôle optimal discret que nous venons de donner n'est pas la seule possible. En effet nous pourrions ajouter 2 types de contraintes à savoir un type de contraintes sur l'état final c'est à dire poser $x(N) = x_N$ où x_N est donné, ou bien lier l'état final et initial par une contrainte du type $f(x(0), x(N)) = 0$ où $f : R^n \times R^n \rightarrow R$, et un deuxième type de contraintes sur la coordonnées de phase uniquement c'est à dire une contrainte du genre $q_t(x_t) \leq 0 \quad 1 \leq t \leq N$ où $q_t : R^n \rightarrow R$. Dans le problème de la ferme d'élevage nous avons $n = r = 1$, $f_t^0(x(t-1), u(t)) = f(u(t))$, $U_t = [b, +\infty[$, $q_t(x_t) = -x^1(t)$, $f_t(x(t-1), u(t)) = a \cdot x^1(t-1) - u(t)$, tandis que dans le problème de gestion de stocks nous avons $n = r = 1$, $f_t^0(x(t-1), u(t)) = p_t u_t$, $U_t = N$ et $q_t(x_t)$ sera un vecteur de composantes $q_t^1(x_t)$ et $q_t^2(x_t)$ avec $q_t^1(x_t) = x_t + d_t - 5$ et $q_t^2(x_t) = -x_t$ de plus nous avons $f_t(x(t-1), u(t)) = x_{t-1} + u_t - d_t$.

Le problème de contrôle optimal discret formulé précédemment est dit du type

« à extrémités gauche fixe » c'est à dire que nous avons fixé l'état initial du système à savoir $x(0) = x_0$. Si nous avons ajouté une contrainte du type $x(N) = x_N$ ou bien $f(x(0), x(N)) = 0$, nous aurons alors un problème de contrôle optimal discret du type « à extrémités fixés ».

Une formulation plus générale du problème consiste à donner des sous ensembles de R^n soient M_0 et $\{M_t\}_{1 \leq t \leq N}$ et à résoudre le problème de contrôle optimal discret suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } x(0), u(1), u(2), \dots, u(N) \text{ tel que} \\ x(t) = f_t(x(t-1), u(t)) \\ u(t) \in U_t \quad 1 \leq t \leq N \\ x(t) \in M_t \quad 0 \leq t \leq N \\ \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t)) \end{cases}$$

Dans ce cas nous avons à faire à un problème de contrôle optimal discret à extrémités libres et à contraintes imposées aux coordonnées de phase.

Jusqu'ici nous avons supposé que l'état de phase à l'instant t dépendait plus ou moins directement de l'état de phase à l'instant $(t-1)$. En fait nous pouvons montrer que même si les coordonnées de phase à l'instant t dépendent des coordonnées de phase à l'instant $(t-1)$ et $(t-2)$ par exemple alors nous pouvons se ramener au cas précédent. En effet soit le problème

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t), x(t-2)) \\ x(t) = f_t(x(t-1), x(t-2), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t(x(t-1), x(t-2)) \quad 1 \leq t \leq N \\ x(-1), x(0) \text{ donnés} \end{array} \right.$$

Ceci est un problème « d'objet à retard d'une itération » et nous pouvons le formuler comme étant un problème classique de contrôle optimal discret car si nous posons $y(t) = x(t-1) \quad 0 \leq t \leq N$ alors le problème (II) sera équivalent à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t), y(t-1)) \\ x(t) = f_t(x(t-1), y(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t(x(t-1), y(t-1)) \quad 1 \leq t \leq N \\ y(t) = x(t-1) \quad 0 \leq t \leq N \\ x(-1), x(0) \text{ donnés} \end{array} \right.$$

Donc en doublant le nombre de coordonnées de phase nous réduisons le problème d'objet à retard d'une itération au problème classique de contrôle optimal discret.

Nous pouvons généraliser ainsi pour un problème « d'objet à retard de q itérations ». De même si nous imposons « du retard » non seulement sur les coordonnées de phase mais aussi au contrôle, alors nous pouvons toujours se ramener au problème de contrôle optimal classique.

Exemple:

Soit le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), x(t-2), u(t-1), u(t)) \\ x(t) = f_t(x(t-1), x(t-2), u(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t(x(t-1), x(t-2), u(t-1)) \quad 1 \leq t \leq N \\ x(-1), x(0), u(0) \text{ donnés} \end{array} \right.$$

En posant $z(t) = u(t)$ et $y(t) = x(t-1)$, $0 \leq t \leq N$ nous aurons à résoudre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), y(t-1), z(t-1), u(t)) \\ x(t) = f_t(x(t-1), y(t-1), z(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ z(t) = u(t) \quad 0 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t(x(t-1), y(t-1), z(t-1)) \quad 1 \leq t \leq N \\ y(t) = x(t-1) \quad 0 \leq t \leq N \\ x(-1), x(0), u(0) \text{ donnés} \end{array} \right.$$

qui est un problème d'objet sans retard .

I. 2) Lien avec la programmation mathématique

Nous pouvons formuler le problème de contrôle optimal discret comme problème d'optimisation classique. En effet soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t)) \\ x(t) = f_t(x(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t \quad 1 \leq t \leq N \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soient $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))$.

Posons $z = (x_t^i, u_s^j) \quad 0 \leq t \leq N, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r, 1 \leq s \leq N$ on a $z \in R^p$ avec

$p = (N+1)n + Nr$. Soient $x_t(z) = (x_t^1(z), x_t^2(z), \dots, x_t^n(z)) \quad 0 \leq t \leq N$

et $h_t(z) = (h_t^1(z), h_t^2(z), \dots, h_t^r(z)) \quad 1 \leq t \leq N$ où $x_t^i(z) = x_t^i = x^i(t)$,

$u_s^j = u^j(s) = h_s^j(z)$.

Nous vérifions aisément que le problème formulé ci-dessus est équivalent au problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x_{t-1}(z), h_t(z)) \\ x_t(z) = f_t(x_{t-1}(z), h_t(z)) \quad 1 \leq t \leq N \\ h_t(z) \in U_t \quad 1 \leq t \leq N \\ x_0(z) = x_0 \end{cases}$$

qui est bien un problème d'optimisation classique car étant de la forme $\begin{cases} \text{Max} F(z) \\ z \in H \text{ avec } H \subset R^p \end{cases}$

avec

$$H = \{z = (x_t(z), h_s(z)) \in R^p, 0 \leq t \leq N, 1 \leq s \leq N, x_t(z) = f_t(x_{t-1}(z), h_t(z)), x_0(z) = x_0, h_t(z) \in U_t, 1 \leq t \leq N\}$$

Exemple:

Soit le problème de contrôle suivant: Trouver $u(1), u(2), \dots, u(N) \in R_+^*$ tel que:

$$x^1(t) = x^1(t-1) + u(t)$$

$$x^2(t) = x^2(t-1)u(t) \quad N \text{ fixé}$$

$$x^1(0) = 0, x^2(0) = 1$$

$$0 < u(t) \leq a - x^1(t-1), \quad x^1(t) \in R, \quad 0 \leq t \leq N \quad x^2(t) \in R, \quad 0 \leq t \leq N, \quad u(t) \in R_+^*$$

$1 \leq t \leq N$ et de manière à maximiser $\text{Log}u(1) + \text{Log}u(2) + \dots + \text{Log}u(N)$.

Ici $n = 2, r = 1$. Pour le formuler en tant que problème d'optimisation nous posons

$z = (x_0^1, x_0^2, x_1^1, x_1^2, \dots, x_N^1, x_N^2, u_1, u_2, \dots, u_N)$ c'est à dire pour $N = 2$

$$z = \left(x_0^1, x_0^2, x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, u_1, u_2 \right) \text{ avec } x_s^j = x^j(s) \quad 1 \leq j \leq 2, s = 0, 1, 2 \quad u_k = u(k) \quad k = 1, 2$$

. Nous aurons alors le problème équivalent d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser} (Log u_1 + Log u_2) \\ x_0^1 = 0, x_0^2 = 1 \\ x_1^1 = x_0^1 + u_1 \\ x_2^1 = x_1^1 + u_2 \\ x_1^2 = x_0^2 \cdot u_1 \\ x_2^2 = x_1^2 \cdot u_2 \\ 0 < u_1 \leq a - x_0^1 \\ 0 < u_2 \leq a - x_1^1 \end{cases}$$

La question que nous pourrions se poser est: Quelle est l'intérêt de construire une théorie sur le problème de contrôle optimal discret si nous savons que nous pouvons le formuler en tant que problème de programmation mathématique et par suite appliquer les méthodes classiques d'optimisation pour le résoudre ? Pour cela considérons le problème le plus général à savoir:

Trouver $x(0), u(1), \dots, u(N)$ tel que:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t)) \\ x(t) = f_t(x(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t \quad 1 \leq t \leq N \\ x(t) \in M_t \quad 0 \leq t \leq N \end{cases}$$

Dans ce problème nous avons $3N+1$ relations vectorielles qui définissent les contraintes et pour chaque t le vecteur $x(t)$ apparaît à au plus trois de ces relations vectorielles. En effet $x(t)$ apparaît dans $x(t) = f_t(x(t-1), u(t))$ et au plus dans $x(t+1) = f_{t+1}(x(t), u(t+1))$ et dans $x(t) \in M_t$, tandis que $u(t)$ apparaît dans au plus deux relations vectorielles et pour chaque i et chaque s , $x_s^i = x^i(s)$ apparaît dans au plus $n + 2$ relations car il apparaît une fois dans $x_s^i = f_s^i(x(s-1), u(s))$ et au plus n fois dans $x_{s+1}^i = f_{s+1}^i(x(s), u(s+1))$ et une fois dans $x(t) \in M_t$.

Toutes ces considérations font que le problème de contrôle optimal discret possède une structure bien spéciale et par conséquent nous attendons à ce que les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité s'énoncent de manière plus spécifique que les théorèmes généraux d'optimisation. La programmation mathématique est donc l'une des sources permettant de donner des critères d'optimalité du problème de contrôle optimal discret. Cependant il existe deux autres sources à savoir le problème de contrôle optimal continu qui historiquement fut étudié avant le problème de contrôle optimal discret, et la programmation dynamique.

I. 3) Introduction au problème de contrôle optimal continu

Soit l'équation différentielle: $\frac{dy}{dt} = g(y, v)$ (1) où $y = (y^1, \dots, y^n) \in R^n$ est appelé vecteur d'état de phase et $v = (v^1, v^2, \dots, v^r) \in R^r$ est appelé vecteur contrôle. Soit $V \subset R^r$ un ensemble appelé domaine de commande. Soit T un nombre réel fixé. Appelons contrôle admissible toute fonction $v(t)$ (continue par morceaux) définie sur $[0, T]$ telle que $v(t) \in V \forall t \in [0, T]$. Soit $y_0 \in R^n$ et $M_1 \subset R^n$ et nous donnons une fonction $g^0(y, v)$.

Le problème consiste à trouver un contrôle admissible $v(t)$ telle que la solution $y(t)$ correspondante à l'équation différentielle (1) soumise à la condition initiale $y(0) = y_0$ satisfait à

$y(T) \in M_1$ et telle que $\int_0^T g^0(y(t), v(t)) dt$ soit maximum.

Il existe une condition nécessaire d'optimalité appelée principe du maximum qui est dû à L. Pontryagin. Pour l'énoncer nous construisons une fonction H appelé hamiltonien qui est défini par

$H(y, v, t) = \sum_{i=0}^n j_i g^i(y, v)$ où $g(y, v) = (g^1(y, v), \dots, g^n(y, v))$ et les j_i sont des fonctions

numériques de t . Nous supposons de plus que $M_1 = R^n$ (problème à extrémités droite libre).

Principe du maximum:

Si les fonctions g^i sont de classe C^1 et si $(\tilde{y}, \tilde{v})$ est une solution optimale alors il existe n fonctions numériques dérivables $j_1, j_2, \dots, j_n$ telles que:

$$\frac{dj_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y^i} = - \sum_{j=0}^n j_j \frac{\partial g^j(y, v)}{\partial y^i} \quad \text{où} \quad i = \overline{1, n} \quad \text{avec} \quad j_0 = 1 \quad \text{et} \\ H(\tilde{y}, \tilde{v}, t) = \max_{v \in V} H(y, v, t) \quad \forall t \quad \text{et} \quad j(T) = 0.$$

Dès que ce principe fut trouvé, il y'a eu plusieurs tentatives de recherche d'une variante discrète. C'est ROZONIER qui fut le premier à donner une forme initiale du principe du maximum discret et a affirmé que l'extension du principe du maximum aux systèmes discrets est possible seulement dans le cas linéaire. Commenant en 1964 et plus tard en 1966, HALKIN [22] [21] présente une démonstration du principe discret du maximum. PROPOI [61] arrive à la même conclusion sous l'hypothèse d'une certaine condition de forte convexité.

I. 4) Enoncé du principe discret du maximum

Considérons le problème de contrôle optimal discret suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t)) \\ x(t) = f(x(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U \quad 1 \leq t \leq N \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

N est fixé, f_t^0 données ($1 \leq t \leq N$), $x(t) \in R^n$, $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$
 $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t)) \in R^r$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$. Nous définissons de manière analogue
l'hamiltonien H par $H(y, x, u) = \sum_{i=0}^n y_i f^i(x, u)$ où y_i sont des fonctions numériques de la variable
t.

Principe discret du maximum:

Nous supposons que f, f^0 sont convexes ainsi que U. Si $(\tilde{x}, \tilde{u})$ est un processus optimal alors il existe n fonctions numériques $y_1, y_2, \dots, y_n$ telles que:

$$y_j(t-1) = \frac{\partial H}{\partial x^j}(y(t), \tilde{x}(t-1), \tilde{u}(t)) \quad 1 \leq j \leq n$$

$y_0 = 1, 1 \leq t \leq N$ et $y_i(N) = 0 \forall 1 \leq i \leq n$ et de plus pour tout t tel que $1 \leq t \leq N$
 $H(y(t), \tilde{x}(t-1), \tilde{u}(t)) = \max_{u(t) \in U} H(y(t), x(t-1), u(t)).$

Remarques:

1) La différence qui existe entre le principe discret du maximum et le principe du maximum(continu) est que dans le principe discret nous imposons une condition de convexité, sans cette condition nous devons remplacer la maximisation du hamiltonien par $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

2) Si au lieu de maximiser, nous minimisons J alors il faudrait prendre $y_0 = -1$ dans l'énoncé du principe discret du maximum. Ainsi à partir du problème de contrôle optimal continu nous pourrions énoncer par analogie des théorèmes d'optimalité ressemblant à ceux des objets discrets ce qui nous permettra de prédire le caractère des résultats.

3) En pratique pour résoudre un problème de contrôle optimal continu sur ordinateur nous sommes obligés de le rendre discret (par exemple remplacer la maximisation de l'intégrale par la maximisation d'une somme finie, remplacer un système différentiel par un système d'équations aux différences finies) d'où la nécessité de savoir résoudre un problème de contrôle optimal discret.

I. 5) Lien avec la programmation dynamique

Une autre approche pour résoudre un problème de contrôle optimal des objets discrets est la programmation dynamique due au mathématicien américain R.BELLMAN.

L'idée maîtresse de la programmation dynamique est la suivante: pour l'optimalité du processus tout entier il faut qu'à chaque stade intermédiaire la partie suivante du processus possède également la propriété d'optimalité. Plus précisément, supposons que nous voulons résoudre le problème discret

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t)) \\ x(t) = f(x(t-1), u(t)) \quad 1 \leq t \leq N \\ u(t) \in U_t(x(t-1)) \quad 1 \leq t \leq N \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{nous avons déjà choisi d'une certaine manière la contrôle}$$

$u(1), u(2), \dots, u(k)$ et la trajectoire $x(0), x(1), \dots, x(k)$ du début du processus jusqu'au moment $t = k$ et nous voulons terminer le processus c'est à dire choisir $u(k+1), \dots, u(N)$ et $x(k+1), \dots, x(N)$. Mais si la partie terminale du processus (du moment $t = k$ au moment $t = N$) n'est pas optimale dans le sens du maximum de la fonction

$J_k = \sum_{t=k+1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$, le processus tout entier ne sera pas optimal . En effet si nous avons pu améliorer la « queue » du processus (c'est à dire changer $x(k+1), \dots, x(N)$ et $u(k+1), \dots, u(N)$ de manière que la somme des termes correspondants de la fonction $J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$ augmente)

, nous aurions obtenu une amélioration globale du processus . Cette idée transparente est réalisée d'après BELLMAN de la façon suivante:

Supposons qu'au moment $t = k$ nous nous trouvions déjà au point $x = x(k)$. Effectuons de toutes les manières possibles, la partie terminale du processus: $u(k+1), \dots, u(N)$; $x(k+1), \dots, x(N)$ de manière à satisfaire les contraintes du problème. Pour chacune de ces parties terminales du processus,

calculons la somme $J_k = \sum_{t=k+1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$ et désignons par $w_k(x) = w_k(x(k))$ la plus grande de ces sommes. Ainsi en partant du point $x = x(k)$, nous pouvons choisir la partie terminale du

processus $u(k+1), \dots, u(N)$; $x(k+1), \dots, x(N)$ de sorte que la somme $J_k = \sum_{t=k+1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$ prenne

la valeur $w_k(x)$, étant entendu qu'une valeur plus grande de cette somme ne peut être obtenue à partir du point x . En posant dans ce raisonnement $k = 0, 1, \dots, N$, nous obtenons $N + 1$ fonctions $w_0(x), w_1(x), \dots, w_N(x)$.

Il est clair d'une part que $w_N(x) = 0$, puisque la somme $J_k = \sum_{t=k+1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$ pour $k = N$ ne

contient aucun terme. Et d'autre part que $w_0(x_0)$ est la valeur maximale de la somme

$J = \sum_{t=1}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$ que nous pouvons obtenir en nous déplaçant à partir du point $x = x_0$ et en

nous servant de tous les processus admissibles $u(1), \dots, u(N)$; $x(0), \dots, x(N)$. Autrement dit $w_0(x_0)$ est justement la valeur de la fonction J pour le processus optimal à état initial $x(0) = x_0$, de sorte que le problème de contrôle optimal discret se réduit précisément à la recherche de la valeur $w_0(x_0)$ et des moyens d'y parvenir .

Ainsi si nous savions calculer successivement les fonctions $w_N(x), w_{N-1}(x), \dots, w_0(x)$ en commençant par $w_N(x) = 0$ jusqu'à la fonction cherchée $w_0(x)$, cela signifierait que nous possédons une méthode de résolution du problème discret de contrôle optimal . Une telle méthode est facile à obtenir.

Supposons que nous nous trouvons à l'instant $t = k-1$ au point $x = x(k-1)$. En partant de ce point choisissons la meilleure terminaison du processus c'est à dire choisissons $u(t)$, $x(t)$ pour

$t = k, k+1, \dots, N$ de manière que la somme $J_{k-1} = \sum_{t=k}^N f_t^0(x(t-1), u(t))$ prenne sa valeur maximale $w_{k-1}(x)$. Cette somme peut s'écrire sous la forme

$$J_{k-1} = f_k^0(x(k-1), u(k)) + \sum_{t=k+1}^N f_t^0(x(t-1), u(t)), \text{ le deuxième terme du second membre étant égal à } J_k.$$

Il est clair que ce terme est égal à $w_k(x(k))$ c'est à dire à la valeur maximale de la somme J_k lorsque nous nous déplaçons du point $x(k)$. (En effet, l'amélioration de la «queue»; c'est à dire l'augmentation de la somme J_k , nous amènerait, d'après ce qui a été dit plus haut à une augmentation de la somme J_{k-1} , ce qui est impossible puisque $J_{k-1} = w_{k-1}(x)$).

$$\text{Ainsi } w_{k-1}(x) = f_k^0(x(k-1), u(k)) + w_k(x(k)) \quad (1.1).$$

Remarquons maintenant que cette relation est vérifiée si $x(k), u(k)$ participent à une terminaison optimale du processus partant du point $x = x(k-1)$. Mais si nous choisissons $x(k), u(k)$ d'une manière quelconque en satisfaisant à: $x(t) = f_t(x(t-1), u(t))$, et $u(t) \in U_t(x(t-1))$, $t = 1, \dots, N$ alors la relation (1.1) sera remplacée par l'inégalité $w_{k-1}(x) \geq f_k^0(x(k-1), u(k)) + w_k(x(k))$ (1.2)

car le second membre de (1.2) contient une certaine somme J_{k-1} non nécessairement maximale. Par conséquent, $w_{k-1}(x)$ est la plus grande de toutes les valeurs de la somme

$$f_k^0(x(k-1), u(k)) + w_k(x(k)) \text{ que nous pouvons obtenir en choisissant d'une manière admissible } u(k), x(k) \text{ c'est à dire } w_{k-1}(x) = \text{Max} \left[f_k^0(x(k-1), u(k)) + w_k(x(k)) \right].$$

Remplaçant ici dans le second membre $x(k)$ par $f_k(x(k-1), u(k))$ et se rappelant que $x(k-1) = x$, nous écrirons cette relation sous la forme définitive:

$$w_{k-1}(x) = \text{Max}_{u \in U_k(x)} \left[f_k^0(x, u) + w_k(f_k(x, u)) \right], k = 1, 2, \dots, N \quad (1.3).$$

Ici le maximum est calculé sur tous les $u = u(k)$ (puisque $x(k)$ ne fait pas partie du second membre), c'est à dire sur tous les points $u \in U_k(x)$.

La relation (1.3) s'appelle *équation de BELLMAN* et permet de calculer successivement les fonctions $w_N, w_{N-1}, \dots, w_0$ en commençant par $w_N = 0$ jusqu'à la fonction cherchée $w_0(x)$. La méthode de recherche de la fonction inconnue w_0 à l'aide des relations (1.3) s'appelle *programmation dynamique*.

L'application pratique de cette méthode nécessite généralement l'emploi d'ordinateurs à grand volume de mémoire. En calculant successivement les fonctions w_k à l'aide des relations (1.3), nous ne savons pas jusqu'au dernier moment (c'est à dire le moment où nous obtenons le nombre w_0), quels seront les états $x(t)$ qui forment la trajectoire optimale issue du point $x(0) = x_0$. Il faut donc chercher et garder en mémoire les valeurs des fonctions w_k théoriquement pour toutes les valeurs de x . Ceci équivaut à trouver *en même temps toutes* les trajectoires optimales.

Pour la raison indiquée, la méthode de programmation dynamique est pratiquement peu efficace, malgré la remarquable généralité de son domaine d'application théorique.

CHAPITRE II

PRINCIPE DU MAXIMUM DES SYSTEMES DISCRETS

Dans ce chapitre (principe du maximum des systèmes discrets) nous étudions le problème de contrôle optimal discret. Plusieurs formulations de ce problème sont à envisager.

Nous commençons par le problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur l'état initial et final en énonçant une condition nécessaire d'optimalité connue sous le nom de principe du maximum discret. Puis nous passons au problème avec contrainte sur les coordonnées de phase en énonçant son principe du maximum associé, puis nous étendons le principe du maximum discret qui est dû à HOLTZMAN en considérant la fonction objectif non plus comme fonction de l'état final, mais comme fonction de l'état final du système et de la commande, nous introduisons alors le concept de convexité directionnelle.

Il faut dire que l'une des sources qui a permis d'établir ces divers principes du maximum est le principe du maximum généralisé qui énonce des conditions d'optimalité d'un programme non linéaire bien spécial qui fait intervenir une certaine variable de commande. Nous remarquons une certaine analogie avec les systèmes dynamiques où sont énoncés des résultats sur l'existence des solutions de systèmes d'équations différentielles vérifiant des conditions initiales et où interviennent une variable de commande.

Autre source permettant d'établir le principe du maximum discret est la notion de programme mathématique mixte qui se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes évolutifs en temps discret.

Dans un premier temps nous énonçons la condition nécessaire d'optimalité qui donne le maximum de Lagrangien par rapport à la variable de commande, puis sous des hypothèses de convexité nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un programme mathématique soit mixte.

Comme application nous considérons le problème de contrôle optimal discret à extrémité gauche fixe et des contraintes sur l'extrémité droite, nous utilisons les résultats sur les programmes mathématiques mixtes pour en déduire un principe du maximum pour ce type de problème.

II. 1) Problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur l'état initial et final

Nous considérons le problème suivant:

$$(C) \begin{cases} \text{Max } g_0(x_k) \\ x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i) \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\} \\ h_i(x_0) = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, l\} \\ u_i \in \Omega \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\} \\ g_i(x_k) = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \end{cases}$$

où $g_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Pour énoncer le principe du maximum qui donne une condition nécessaire d'optimalité, nous faisons les hypothèses suivantes:

- 1) $\forall u \in \Omega, \forall i \in \{0, \dots, k\} : f_i(x, u)$ est deux fois continûment différentiable par rapport à x .
- 2) Les f_i et ses dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à x sont uniformément bornés sur $A \times \Omega$ et cela pour tout ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^n$.
- 3) $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}$ la matrice $I + \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x}$ est non singulière sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$.
- 4) L'ensemble $\{f_i(x, u) : u \in \Omega\}$ est convexe pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$.
- 5) $\forall i \in \{1, \dots, l\} \forall j \in \{0, \dots, m\}$ h_i et g_j sont deux fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n \left\{ \frac{\partial h_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial h_2(x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_l(x)}{\partial x} \right\}$ et $\left\{ \frac{\partial g_0(x)}{\partial x}, \frac{\partial g_1(x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m(x)}{\partial x} \right\}$ sont deux familles libres.

Enoncé du principe du maximum des systèmes discrets: [20]

Si $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}$ et $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ est une solution optimale de (C), alors il existe une suite de vecteurs non nuls $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k$ tel que nous avons :

1°) Maximisation de Hamiltonien:

$$f_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i) \cdot \bar{p}_{i+1} \geq f_i(\bar{x}_i, u) \cdot \bar{p}_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \quad \text{et} \quad \forall u \in \Omega.$$

2°) Equations adjointes:

$$\bar{p}_i - \bar{p}_{i+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f_i(x, \bar{u}_i) \right)^T \cdot \bar{p}_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$$

3°) Conditions de transversalité: Il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ et $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ tels que :

$$\bar{p}_0 = \sum_{i=1}^l \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} h_i(x) \Big|_{x=\bar{x}_0}$$

$$\bar{p}_k = \sum_{i=0}^m \beta_i \frac{\partial}{\partial x} g_i(x) \Big|_{x=\bar{x}_k} \quad \text{et } \beta_0 \geq 0$$

HUBERT HALKIN [20] établit ce principe du maximum en considérant les deux ensembles:

$$W = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_k, u_0, u_1, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{R}^{(k+1)n+kr} / \forall i \in \{1, 2, \dots, l\} h_i(x_0) = 0 \right. \\ \left. \text{et } \forall i \in \{0, \dots, k-1\} x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i) \text{ et } u_i \in \Omega \right\}$$

$$S(\bar{x}_k) = \left\{ (x_0, \dots, x_k, u_0, \dots, u_{k-1}) / g_i(x_k) = 0, 1 \leq i \leq m, g_0(x_k) > g_0(\bar{x}_k) \right\}$$

Nous remarquons que W et $S(\bar{x}_k)$ sont disjoints car sinon $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}$ et $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ ne seraient pas une solution optimale. Dans le cas des contraintes linéaires, nous montrons que W et $S(\bar{x}_k)$ sont convexes et par suite comme ils sont disjoints alors ils sont séparables (i.e il existe un hyperplan de séparation entre W et $S(\bar{x}_k)$) et dans ce cas la preuve du principe du maximum est facile à établir. Cependant dans le cas général, W et $S(\bar{x}_k)$ ne sont pas convexes et c'est pourquoi HALKIN contourne la difficulté en linéarisant le problème autour de la solution optimale c'est à dire qu'il remplace :

1) les fonctions $h_i(x)$ par $h_i(\bar{x}_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h_i(x) \Big|_{x=\bar{x}_0} \right) (x - \bar{x}_0)$

2) les fonctions $g_i(x)$ par $g_i(\bar{x}_k) + \left(\frac{\partial}{\partial x} g_i(x) \Big|_{x=\bar{x}_k} \right) (x - \bar{x}_k)$

3) les fonctions $f_i(x, u)$ par $f_i(\bar{x}_i, u) + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_i(x, \bar{u}_i) \Big|_{x=\bar{x}_i} \right) (x - \bar{x}_i)$

puis il définit les deux ensembles $W^+(\bar{x}_k)$ et $S^+(\bar{x}_k)$ comme étant respectivement

W et $S(\bar{x}_k)$ mais pour le problème linéarisé et il montre ainsi que $W^+(\bar{x}_k)$ et $S^+(\bar{x}_k)$ sont convexes puis qu'ils sont séparables.

II. 2) Problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur les coordonnées de phase

A présent nous pouvons considérer le problème de contrôle optimal discret avec en plus des contraintes imposées aux coordonnées de phase et pour lequel il existe aussi un principe du

maximum. Considérons pour cela $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{T-1}$ des sous ensembles donnés de $\mathbb{R}^r$ ainsi que les fonctions suivantes:

$$f_t: \mathbb{R}^n \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n \quad t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$$

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$g_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$q_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_t}$$

Nous considérons alors le problème suivant:

Déterminer les vecteurs d'états $x_0, x_1, \dots, x_T \in \mathbb{R}^n$ et les vecteurs de contrôle $u_0, u_1, \dots, u_{T-1} \in \mathbb{R}^r$ résolvant le problème suivant:

$$(P) \begin{cases} \text{Max } g_0(x_T) \\ h(x_0) = 0 \\ x_{t+1} - x_t = f_t(x_t, u_t) \quad t \in \{0, \dots, T-1\} \\ u_t \in \Omega_t \quad t \in \{0, \dots, T-1\} \\ g(x_T) = 0 \\ q_t(x_t) \leq 0 \quad t \in \{0, \dots, T\} \end{cases}$$

Quelques hypothèses s'imposent pour ce problème à savoir:

H1) Pour chaque $u \in \Omega_t$, $f_t(x, u)$ est continûment différentiable par rapport à x au voisinage de $x = x_t$ ($t = 0, 1, \dots, T-1$).

H2) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{f_t(x, u) : u \in \Omega_t\}$ est convexe $\forall t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$.

H3) h et g sont continûment différentiables au voisinage respectivement de $x = x_0$ et $x = x_T$, g_0 et q_t ($t = 0, \dots, T$) sont différentiables respectivement en, $x = x_1, \dots, x = x_T$.

H4) Les vecteurs $\nabla h^j(x_0)$ ($j = 1, \dots, l$) sont linéairement indépendants ainsi que $\nabla g^j(x_T)$ ($j = 1, \dots, m$) où $h = (h^1, h^2, \dots, h^l)$ et $g = (g^1, g^2, \dots, g^m)$.

H5) Pour chaque $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ avec $m_t \neq 0$ il n'existe pas de λ_t nul, $\lambda_t \in \mathbb{R}^{m_t}$

avec $\lambda_t \leq 0$ satisfaisant à
$$\begin{cases} \lambda_t \nabla q_t(x_t) = 0 \\ \lambda_t q_t(x_t) = 0 \end{cases}.$$

Remarquons que H5) est vérifiée si pour chaque t fixé $\{\nabla q_t^i(x_t) : q_t^i(x_t) = 0\}$ est une famille libre.

Principe du maximum des systèmes discrets:[46]

Si $x_0, x_1, \dots, x_T \in \mathbb{R}^n$ et $u_0, u_1, \dots, u_{T-1} \in \mathbb{R}^r$ est une solution optimale de (P) vérifiant les hypothèses H1) à H5) alors il existe des vecteurs $p_0, p_1, \dots, p_T \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_t \in \mathbb{R}^{m_t}$, $\lambda_t \leq 0$ ($t = 0, \dots, T-1$) et $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $\beta \in \mathbb{R}^m$ et $\beta_0 \geq 0$ tel que nous avons $p_0, p_1, \dots, p_T, \alpha, \beta, \beta_0$ non tous nuls et:

1) Maximisation du Hamiltonien: $\forall u \in \Omega_t$

$$p_{t+1} f_t(x_t, u_t) \geq p_{t+1} f_t(x_t, u) \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

2) Equations adjointes:

$$p_t - p_{t+1} = p_{t+1} \nabla_x f_t(x_t, u_t) + \lambda_t \nabla q_t(x_t) \quad (t = 0, 1, \dots, T-1) .$$

3) Conditions de transversalité:

$$p_0 = \alpha \nabla h(x_0)$$

$$p_T = \beta \nabla g(x_T) + \beta_0 \nabla g_0(x_T) + \lambda_T q_T(x_T)$$

4) Conditions de complémentarité:

$$\lambda_t q_t(x_t) = 0 \quad (t = 0, 1, \dots, T) .$$

MAGNANTI [46] montre ce principe du maximum en le considérant comme un cas particulier d'un problème de programmation non linéaire pour lequel il existe un principe du maximum généralisé. Citons ce principe. Pour cela soit $U \subset \mathbb{R}^L$ et soit donné les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} & G: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^m & \overline{Q}: \mathbb{R}^M &\rightarrow \mathbb{R}^{s_2} \\ H: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times U &\rightarrow \mathbb{R}^r & Q: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^{s_1} \end{aligned}$$

Nous considérons le nouveau problème :

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } F(y) \\ G(y) = 0 \\ Q(y) \leq 0 \\ \overline{Q}(z) \leq 0 \\ H(y, z, u) = 0 \\ u \in U \end{array} \right.$$

Comme pour le problème (P), nous faisons les hypothèses suivantes:

H'1) Pour chaque $u \in U$, $H(y, z, u)$ est continûment différentiable par rapport à (y, z) au voisinage de $(y, z) = (\bar{y}, \bar{z})$.

H'2) Pour chaque $y \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}^M$, l'ensemble $\{H(y, z, u) / u \in U\}$ est un convexe de $\mathbb{R}^r$.

H'3) $G(y)$ est continûment différentiable au voisinage de $y = \bar{y}$, $F(y)$ et $Q(y)$ sont différentiables en $y = \bar{y}$ et $\bar{Q}(z)$ est différentiable en $z = \bar{z}$.

H'4) Les vecteurs $\nabla G^j(y)$ ($j = 1, \dots, m$) sont linéairement indépendants.

H'5) Soient $A = \{i \in \{1, \dots, s_1\} / Q^i(\bar{y}) = 0\}$, $\bar{A} = \{i \in \{1, \dots, s_2\} / \bar{Q}_i(\bar{z}) = 0\}$

Posons $\bar{s}_1 = |A|$ et $\bar{s}_2 = |\bar{A}|$.

Soient $Q^A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{s_1}$ tel que chaque composante de Q^A est la restriction de Q^i à A ($1 \leq i \leq s_1$).

$\bar{Q}^{\bar{A}}: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{s_2}$ tel que chaque composante de $\bar{Q}^{\bar{A}}$ est la restriction de $\bar{Q}^i$ à $\bar{A}$

($1 \leq i \leq s_2$) alors $A = \emptyset$ ou il n'existe pas $\mu^A \in \mathbb{R}^{\bar{s}_1}$ non nul tel que

$\mu^A \leq 0$ avec $\mu^A \cdot \nabla Q^A(\bar{y}) = 0$ et $\bar{A} = \emptyset$ ou il n'existe pas $\bar{\mu}^{\bar{A}} \in \mathbb{R}^{\bar{s}_2}$ non nul

tels que $\bar{\mu}^{\bar{A}} \leq 0$ avec $\bar{\mu}^{\bar{A}} \cdot \nabla \bar{Q}^{\bar{A}}(\bar{z}) = 0$.

Nous remarquons que le problème (P) est un cas particulier du problème (P') avec

$$z = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{T-1} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{T-1} \end{pmatrix}, y = x_T, U = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{T-1}$$

$$F(y) = g_0(x_T), G(y) = g(x_T).$$

$$H(y, z, u) = \begin{bmatrix} h(x_0) \\ x_0 + f_0(x_0, u_0) & -x_1 \\ & x_1 + f_1(x_1, u_1) & -x_2 \\ & & \ddots & -x_{T-2} \\ & & & x_{T-1} + f_{T-1}(x_{T-1}, u_{T-1}) & -x_T \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}(z) = \begin{pmatrix} q_0(x_0) \\ q_1(x_1) \\ \vdots \\ q_{T-1}(x_{T-1}) \end{pmatrix} \text{ et } Q(y) = q_T(x_T).$$

Remarquons que $[\nabla_z H(y, z, u), \nabla_y H(y, z, u)]$

$$= \begin{bmatrix} \nabla h(x_0) \\ I + \nabla_x f_0(x_0, u_0) & -I \\ & I + \nabla_x f_1(x_1, u_1) & -I \\ & & \ddots & -I \\ & & & I + \nabla_x f_{T-1}(x_{T-1}, u_{T-1}) & -I \end{bmatrix}$$

et donc les hypothèses H'1, H'2, H'3, H'4 et H'5 sont des conséquences directes des hypothèses H1 à H5.

Remarquons que les conditions imposées au problème (P') n'impliquent pas que y puisse s'exprimer en fonction de z et u de la relation $H(y, z, u) = 0$, bien que ceci soit possible pour le problème (P).

Théorème: (Principe du maximum généralisé)[46]

Soit $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$ et $u = \bar{u}$ une solution optimale de (P'). Supposons que H'1 à H'3 et H'5 sont vérifiées, alors il existe un réel $\beta_0 \geq 0$ et des vecteurs $\beta \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \in \mathbb{R}^r$, $\mu \in \mathbb{R}^{s_1}$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{s_2}$, $\delta \in \mathbb{R}^N$ avec $\mu \leq 0, \bar{\mu} \leq 0$ (β_0, β, σ) $\neq 0$ tel que :

$$(a) \quad -\delta = \beta_0 \nabla F(\bar{y}) + \beta \nabla G(\bar{y}) + \mu \nabla Q(\bar{y})$$

$$(b) \quad \begin{cases} \delta = \sigma \nabla_y H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \\ 0 = \sigma \nabla_z H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) + \bar{\mu} \nabla \bar{Q}(\bar{z}) \end{cases}$$

$$(c) \quad \mu Q(\bar{y}) = 0, \quad \bar{\mu} \bar{Q}(\bar{z}) = 0$$

$$(d) \quad \sigma [H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) - H(\bar{y}, \bar{z}, u)] \geq 0 \quad \forall u \in U$$

II. 3) Cas où la fonction objectif dépend de l'état final et du contrôle

HOLTZMAN [26] étend le principe du maximum discret en considérant la fonction objectif g_0 non comme fonction de l'état final x_T mais fonction du contrôle U et de x_T et introduit le concept de convexité directionnelle. Pour cela il établit comme MAGNANTI un autre principe du maximum généralisé que nous citons ci-dessous. Soit le problème:

$$(P'') \quad \begin{cases} \text{Max } F(y, u) \\ G(y, u) = 0 \\ Q(y, u) \leq 0 \\ \bar{Q}(z, u) \leq 0 \\ H(y, z, u) = 0 \\ u \in U \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes:

$$H''1 = H'1$$

H''2) $\forall y \in \mathbb{R}^N, \forall z \in \mathbb{R}^M, \forall u \in U, \forall u' \in U, \lambda \in [0,1]$ il existe $\tilde{u} \in U$ tel que:

$$F(y, \tilde{u}) \geq \lambda F(y, u) + (1 - \lambda) F(y, u')$$

$$Q(y, \tilde{u}) \leq \lambda Q(y, u) + (1 - \lambda) Q(y, u')$$

$$\bar{Q}(z, \tilde{u}) \leq \lambda \bar{Q}(z, u) + (1 - \lambda) \bar{Q}(z, u')$$

$$G(y, \tilde{u}) = \lambda G(y, u) + (1 - \lambda) G(y, u')$$

$$H(y, z, \tilde{u}) = \lambda H(y, z, u) + (1 - \lambda) H(y, z, u')$$

H''3) Pour chaque $u \in U$, $G(y, u)$ est continûment différentiable au voisinage de

$y = \bar{y}$, $F(y, u)$ et $Q(y, u)$ sont différentiables en $y = \bar{y}$ et $\bar{Q}(z, u)$ est différentiable en $z = \bar{z}$.

H''4) Les vecteurs $\nabla G^j(\bar{y}, \bar{u})$ ($j = 1, \dots, m$) sont linéairement indépendants.

H''5) c'est l'hypothèse H'5) avec $Q^i(\bar{y})$ et $\bar{Q}^i(\bar{z})$ remplacé par $Q^i(\bar{y}, \bar{u})$ et $\bar{Q}^i(\bar{z}, \bar{u})$ dans les définitions de A et $\bar{A}$.

Théorème (Principe du maximum généralisé) [46]

Si $y = \bar{y}, z = \bar{z}, u = \bar{u}$ est solution optimale de (P'') et supposons que H''1, à H''3 et H''5 sont vérifiées, alors il existe un réel $\beta_0 \geq 0$, des vecteurs $\beta \in \mathbb{R}^m, \sigma \in \mathbb{R}^r, \mu \in \mathbb{R}^{s_1}, \bar{\mu} \in \mathbb{R}^{s_2}$, avec $\mu \leq 0, \bar{\mu} \leq 0, \delta \in \mathbb{R}^N, (\beta_0, \beta, \sigma) \neq 0$ tels que :

$$(a') \quad -\delta = \beta_0 \nabla_y F(\bar{y}, \bar{u}) + \beta \nabla_y G(\bar{y}, \bar{u}) + \mu \nabla_y Q(\bar{y}, \bar{u})$$

$$(b') \quad \begin{cases} \delta = \sigma \nabla_y H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \\ 0 = \sigma \nabla_z H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) + \bar{\mu} \nabla_z \bar{Q}(\bar{z}, \bar{u}) \end{cases}$$

$$(c') \quad \mu Q(\bar{y}, \bar{u}) = 0, \quad \bar{\mu} \bar{Q}(\bar{z}, \bar{u}) = 0$$

$$(d') \quad \psi(\bar{u}) - \psi(u) \geq 0 \quad \forall u \in U \text{ avec}$$

$$\psi(u) = \beta_0 F(\bar{y}, u) + \beta G(\bar{y}, u) + \mu Q(\bar{y}, u) + \bar{\mu} \bar{Q}(\bar{z}, u) + \sigma H(\bar{y}, \bar{z}, u).$$

II. 4) Cas où le domaine de commande admissible dépend de l'état du système

Jusqu'à présent nous avons supposé que les commandes réalisables vérifiaient $u_i \in U_i$ où $U_i \subset \mathbb{R}^r$. Cependant nous pouvons considérer l'ensemble U_i dépendant de l'état x_i c'est à dire que nous considérons le problème suivant : [59]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \\ x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i) \quad 0 \leq i \leq k-1 \\ u_i \in U_i(x_i) \\ g_0(x_0) = 0 \\ g_k(x_k) = 0 \end{array} \right. \quad \text{où chaque } x_i \in \mathbb{R}^n \text{ et chaque } u_i \in \mathbb{R}^m.$$

Nous supposons que toutes les fonctions dans ce problème sont continûment différentiables et que les jacobiens de g_0 et g_k sont des matrices de plein rang.

Nous supposons aussi que: $\forall i \in \{0, \dots, k-1\} \quad X_i = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / u \in U_i(x)\}$ est convexe.

Définissons $F_i(x, u) = (f_i^0(x, u), f_i(x, u))$. Nous faisons comme hypothèse que

$\forall i \in \{0, \dots, k-1\} \quad F_i(x, U_i(x))$ est directionnellement convexe c'est à dire si $x \in \mathbb{R}^n$

u' et $u'' \in U_i(x)$ et $\lambda \in [0, 1] \quad \exists u(\lambda) \in U_i(x)$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(x, u(\lambda)) = \lambda f_i(x, u') + (1 - \lambda) f_i(x, u'') \\ f_i^0(x, u(\lambda)) \leq \lambda f_i^0(x, u') + (1 - \lambda) f_i^0(x, u'') \end{array} \right.$$

(Si $U_i(x) = \emptyset$ alors $F_i(x, U_i(x)) = \emptyset$ et sera par convention directionnellement convexe).

Soit l'hamiltonien $H_i(x_i, p_{i+1}, u_i) = p_i^0 f_i^0(x_i, u_i) + \langle p_{i+1}, f_i(x_i, u_i) \rangle$ et le cône

radial $RC((\bar{x}_i, \bar{u}_i), X_i) = \{\lambda(x_i - \bar{x}_i, u_i - \bar{u}_i) / \lambda \geq 0, (x_i, u_i) \in X_i\}$ avec

$X_i = \{(x, u) / u \in U_i(x)\}.$

Théorème:[59]

Si $(\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}), (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ est une solution optimale du problème précédent, alors il existe un réel $p_0 \leq 0$ et des vecteurs $p_1, p_2, \dots, p_k, \mu_0, \mu_k$ non tous nuls tel que:

$$\langle \frac{\partial H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, \bar{u}_i)}{\partial(x, u)}, (\delta x_i, \delta u_i) \rangle + \langle p_{i+1} - p_i, \delta x_i \rangle \leq 0 \quad \text{ceci pour tout } (\delta x_i, \delta u_i) \in$$

l'adhérence de $RC((\bar{x}_i, \bar{u}_i), X_i)$, $0 \leq i \leq k-1$.

De plus $\forall i \in \{0, \dots, k-1\} \quad \forall u_i \in U_i(\bar{x}_i) : H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, u_i) \leq H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, \bar{u}_i)$ et les conditions de transversalité suivantes sont satisfaites:

$$p_0 = -\frac{\partial g_0(x_0)^T}{\partial x} \mu_0, \quad p_k = \frac{\partial g_k(x_k)^T}{\partial x} \mu_k.$$

A l'aide de ce théorème et en utilisant le fameux lemme de FARKAS nous obtenons le principe du maximum discret du problème précédent avec $X_i = \{(x_i, u_i) / R_i(x_i, u_i) \leq 0\}$ et

$U_i(x_i) = \{u_i / R_i(x_i, u_i) \leq 0\}$, $0 \leq i \leq k-1$ où chaque R_i est continûment différentiable, $R_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times i}$.

Théorème: [59]

Nous supposons que toutes les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites avec en plus les gradients des contraintes actives sont linéairement indépendants c'est à dire:

$$\left\{ \nabla R_i^j(\bar{x}_i, \bar{u}_i) \right\}, j \in I(\bar{x}_i, \bar{u}_i) \text{ libre,}$$

$I(\bar{x}_i, \bar{u}_i) = \left\{ j : R_i^j(\bar{x}_i, \bar{u}_i) = 0, i \leq j \leq l_i \right\}$ (R_i^j est la $j^{\text{ième}}$ composante de R_i), alors il existe des vecteurs non tous nuls $p_0, p_1, \dots, p_k, \mu_0, \mu_k$, $p_0 \leq 0$ et des vecteurs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ tels que:

$$\forall i \in \{0, \dots, k\} \lambda_i \leq 0 \text{ et aussi: } p_i - p_{i+1} = \frac{\partial H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, \bar{u}_i)^T}{\partial x} + \frac{\partial R_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i)^T}{\partial x} \lambda_i$$

$$\text{et } \frac{\partial H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, \bar{u}_i)^T}{\partial u} + \frac{\partial R_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i)^T}{\partial u} \lambda_i = 0 \quad \langle R_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i), \lambda_i \rangle = 0 \quad 0 \leq i \leq k-1 \text{ et}$$

$$H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, u_i) \leq H_i(\bar{x}_i, p_{i+1}, \bar{u}_i) \quad \forall u_i \in U_i(\bar{x}_i) \quad 0 \leq i \leq k-1 \text{ et}$$

$$p_0 = -\frac{\partial g_0(x_0)^T}{\partial x} \mu_0, \quad p_k = \frac{\partial g_k(x_k)^T}{\partial x} \mu_k.$$

II. 5) Programmes mathématiques mixtes [50]

Une notion nouvelle, les programmes mathématiques mixtes, se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes évolutifs en temps discret:

La condition nécessaire d'optimalité est obtenue sous une forme qui donne le maximum du Lagrangien par rapport à la variable contrôle

Problème:

Nous considérons le programme mathématique (1.1) suivant:

$$\begin{cases} \text{Max } f^0(x, u) & , (x, u) \in X \times U : X \text{ convexe de } \mathbb{R}^n, U \text{ quelconque} \\ f^i(x, u) \geq 0 & 1 \leq i \leq m_0 \\ f^i(x, u) = 0 & m_0 + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Les fonctions numériques f^i ($0 \leq i \leq m$) sont définies dans $X \times U$ et vérifient:

Pour tout u fixé dans U , $f^i(x, u)$ est différentiable par rapport à x dans X .

Définition:

Le programme mathématique précédent est dit mixte au point (x_0, u_0) s'il vérifie la condition suivante:

Si (x_0, u_0) est une solution optimale, alors pour tout sous ensemble fini $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ de U , $(x_0, 0)$ est une solution optimale du problème relâché:

$$\begin{cases} \text{Max } g^0(x, y) & , (x, y) \in X \times Y \\ g^i(x, y) \geq 0 & 1 \leq i \leq m_0 \\ g^i(x, y) = 0 & m_0 + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$\text{où } Y = \left\{ y = (y^1, y^2, \dots, y^N) \in \mathbb{R}^N / y^1 \geq 0, y^2 \geq 0, \dots, y^N \geq 0, \sum_{j=1}^N y^j \leq 1 \right\}$$

$$\forall i \in \{0, \dots, m\} \quad g^i(x, y) = \sum_{j=1}^N y^j f^i(x, u_j) + \left(1 - \sum_{j=1}^N y^j\right) f^i(x, u_0).$$

Remarque :

Il est à noter que les fonctions g^i et l'ensemble Y varient avec le choix du sous ensemble fini de U .

A présent nous donnons quelques conditions suffisantes pour qu'un programme mathématique soit mixte. Pour cela nous définissons les ensembles suivants:

Pour x élément de X

$$A(x) = \left\{ z = (z^0, z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^{m+1} / \exists u \in U: \forall i \ 0 \leq i \leq m_0 \ z^i \leq f^i(x, u) \text{ et } \forall i, \ m_0 + 1 \leq i \leq m, \ z^i = f^i(x, u) \right\}$$

$$B(x) = \left\{ \begin{array}{l} z = (z^0, z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^{m+1} / \exists u \in U \text{ et } v = (v^1, v^2, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m \text{ et } z^0 \leq f^0(x, u) \\ \text{et } \forall i \in \{1, \dots, m_0\}: v^i z^i \leq f^i(x, u) \text{ et } \forall i \in \{m_0 + 1, \dots, m\} \ v^i z^i = f^i(x, u) \end{array} \right\}$$

Critère:

Si pour tout x de X , l'enveloppe convexe de $A(x)$ est contenu dans l'ensemble $B(x)$, alors le programme (1.1) est mixte en tout point.

Nous remarquons que $\forall x \in X, A(x) \subset B(x)$ car il suffit de prendre $v = (1, 1, \dots, 1)$.

Corollaire:

Si pour tout x de X , $A(x)$ est un ensemble convexe, alors le programme mathématique (1.1) est mixte en tout point de $X \times U$.

Preuve:

En effet comme $A(x)$ est convexe donc $A(x)$ coïncide avec son enveloppe convexe et puisque $A(x) \subset B(x)$, alors l'enveloppe convexe de $A(x)$ est contenu dans $B(x)$ et en utilisant le critère précédent, nous concluons que le programme mathématique (1.1) est mixte en tout point de $X \times U$.

Remarque:

Un cas particulier important où les hypothèses du corollaire précédent sont vérifiées, est celui où U est un ensemble convexe d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et pour

$0 \leq i \leq m_0 : f^i(x, u)$ est concave par rapport à u , et pour $m_0 + 1 \leq i \leq m : f^i(x, u)$

est linéaire affine par rapport à u . En effet si $z = (z^0, z^1, \dots, z^m) \in A(x)$ et

$w = (w^0, w^1, \dots, w^m) \in A(x)$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\exists u \in U: \forall i \ 0 \leq i \leq m_0,$

$z^i \leq f^i(x, u)$ et $\forall i, m_0 + 1 \leq i \leq m, z^i = f^i(x, u)$

$\exists v \in U: \forall i \ 0 \leq i \leq m_0, w^i \leq f^i(x, u)$ et $\forall i, m_0 + 1 \leq i \leq m, w^i = f^i(x, v)$

et comme pour $0 \leq i \leq m_0 : f^i(x, u)$ est concave par rapport à u donc nous avons:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, m_0\}: f^i(x, \lambda u + (1-\lambda)v) &\geq \lambda f^i(x, u) + (1-\lambda)f^i(x, v) \\ &\geq \lambda z^i + (1-\lambda)w^i \end{aligned}$$

et comme pour $m_0 + 1 \leq i \leq m : f^i(x, u)$ est linéaire par rapport à u donc nous avons:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{m_0 + 1, \dots, m\}: f^i(x, \lambda u + (1-\lambda)v) &= \lambda f^i(x, u) + (1-\lambda)f^i(x, v) \\ &= \lambda z^i + (1-\lambda)w^i \end{aligned}$$

et comme U est convexe alors $\lambda u + (1-\lambda)v \in U$, donc $\lambda z + (1-\lambda)w \in A(x)$.

Dans ce cas le problème (1.1) est un programme mathématique du type «différentiable par rapport à X et convexe par rapport à u ».

Exemple:

$$\text{Max}(x + f(u)) \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad -1 \leq u \leq +1$$

$$x + u \geq 0 \quad \text{avec} \quad f(u) = \begin{cases} +1 & \text{si } u \geq 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - (1 - u^2)^3 = 0$$

Montrons que ce programme est mixte en tout point.

$$A(x) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3: \exists u \in [-1, +1]: a \leq x + f(u), b \leq x + u, c = x^2 - (1 - u^2)^3 \right\}$$

$$B(x) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3: \exists (u, v, w) \in [-1, +1] \times \mathbb{R}^2: a \leq x + f(u), bv \leq x + u, wc = x^2 - (1 - u^2)^3 \right\} \text{ pour}$$

$$x > 1: A(x) \subset C(x) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3: a \leq x + 1, b \leq x + 1, c > 0 \right\}$$

et C(x) est un convexe donc $\text{Co}(A(x)) \subset \text{Co}(C(x)) = C(x)$ et $C(x) \subset B(x)$

$$\begin{aligned} \text{car si } (a, b, c) \in C(x) &\Rightarrow \begin{cases} a \leq x + 1 \\ b \leq x + 1 \\ c > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a \leq x + f(u) \\ vb \leq x + u \\ cw = x^2 - (1 - u^2)^3 \end{cases} \quad \text{avec } u = 1, v = 1, w = \frac{x^2}{C} \end{aligned}$$

donc $\text{Co}(A(x)) \subset B(x)$ et d'après le critère précédent, le programme mathématique est mixte pour $x > 1$.

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq 1, A(x) \subset D(x) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3: a \leq x + 1, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et D(x) est convexe donc $\text{Co}(A(x)) \subset D(x)$ et de plus $D(x) \subset B(x)$ car il suffit de prendre

$v = 0, w = 0, u = (1 - x^{2/3})^{1/2}$ d'où $\text{Co}(A(x)) \subset B(x)$ et par suite le programme mathématique est mixte aux points $x \in [0, 1]$.

II. 6) Conditions nécessaires d'optimalité d'un programme mathématique mixte

A présent donnons une condition nécessaire d'optimalité d'un programme mathématique mixte.

Théorème : Condition nécessaire d'optimalité [50]

Si $(\bar{x}, \bar{u})$ est une solution optimale du programme (1.1) et si ce programme est mixte en $(\bar{x}, \bar{u})$, alors il existe des nombres réels a_i , $0 \leq i \leq m$ qui vérifient:

$$1^\circ) \sum_{i=0}^m |a_i| = 1$$

$$2^\circ) \text{ pour } 0 \leq i \leq m_0, a_i \geq 0$$

$$3^\circ) \text{ pour } 0 \leq i \leq m_0, a_i f^i(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \text{ c'est à dire que les multiplicateurs des contraintes non saturées sont nuls.}$$

$$4^\circ) \text{ En posant } L(a, x, u) = \sum_{i=0}^m a_i f^i(x, u) \text{ nous avons en tout point } x = (x^1, \dots, x^n) \text{ de } X :$$

$$\sum_{k=1}^n (x^k - \bar{x}^k) \frac{\partial L}{\partial x^k}(a, \bar{x}, \bar{u}) \leq 0$$

$$5^\circ) \text{ Max } L(a, \bar{x}, u) = L(a, \bar{x}, \bar{u})$$

Remarques

1) Pour un problème indépendant de x , on obtient une généralisation des programmes convexes car dans ce cas U étant convexe, f_i concaves $0 \leq i \leq m_0$ et f_i linéaire affine $m_0 + 1 \leq i \leq m$ alors le programme est mixte.

2) Pour un problème indépendant de u et défini par des fonctions $f^i(x) + h^i(x)$, nous pouvons considérer le problème équivalent défini par $f^i(x) + h^i(u)$ en adjoignant la liaison $x - u = 0$, et nous obtenons une généralisation des programmes définis par des fonctions qui sont sommes de fonctions différentiables et de fonctions concaves.

3) Notre formulation des programmes mixtes a été choisie pour sa commodité dans les problèmes de contrôle optimal en temps discret: Elle donne directement les conditions de maximum par rapport à la commande. Elle permet de généraliser la plupart des conditions nécessaires qui concluent au maximum du hamiltonien par rapport à la commande.

4) L'hypothèse de programme mixte est en un certain sens minimale pour obtenir la condition 5 du théorème précédent; plus précisément, si le problème est indépendant de x et si nous avons: $a_0 > 0$, alors les conditions nécessaires du théorème précédent sont aussi des conditions suffisantes d'optimalité pour le problème (1.1) et pour tout problème relaxé (1.2). En effet, pour tout y qui vérifie: pour $1 \leq i \leq m_0$: $g^i(y) \geq 0$ et pour $m_0 + 1 \leq i \leq m$: $g^i(y) = 0$, nous avons les conclusions 2, 3 et 5 du théorème précédent:

$$\begin{aligned}
a_0 g^0(y) &\leq \sum_{i=0}^m a_i g^i(y) = \sum_{i=0}^m a_i \left[\sum_{j=1}^N y^j f^i(u_j) + \left(1 - \sum_{j=1}^N y^j \right) f^i(\bar{u}) \right] \text{ donc} \\
a_0 g^0(y) &\leq \sum_{j=1}^N y^j \left(\sum_{i=0}^m a_i f^i(u_j) - \sum_{i=0}^m a_i f^i(\bar{u}) \right) + \sum_{i=0}^m a_i f^i(\bar{u}) \\
a_0 g^0(y) &\leq \sum_{j=1}^N y^j \underbrace{\left(L(a, u_j) - L(a, \bar{u}) \right)}_{\leq 0} + \sum_{i=0}^m a_i f^i(\bar{u}) \leq \sum_{i=0}^m a_i f^i(\bar{u}) = a_0 f^0(\bar{u}) \\
&= a_0 g^0(0)
\end{aligned}$$

et comme $a_0 > 0 \Rightarrow g^0(y) \leq g^0(0) \quad \forall y \in Y$ donc $\bar{y} = 0$ est solution optimale du problème relaxé (1.2).

D'autre part, $y = 0$ étant une solution optimale de tout problème relaxé, $\bar{u}$ est une solution optimale du problème (1.1). En effet si $u \in U$ est tel que $f^i(u) \geq 0$ pour $1 \leq i \leq m_0$ et $f^i(u) = 0$ pour $m_0 + 1 \leq i \leq m$ alors en choisissant $N=1$, nous aurons un ensemble fini $\{u_1\} \subset U$ où $u_1 = u$ et $g^0(y_1) = y_1 f^0(u_1) + (1 - y_1) f^0(\bar{u})$ où $y_1 \geq 0 / y_1 \leq 1$. Comme pour tout $y_1 \in [0, 1]$ $g^0(y_1) \leq g^0(0) \Rightarrow g^0(1) \leq g^0(0) \Rightarrow f^0(u_1) \leq f^0(\bar{u})$ ce qui implique $\bar{u}$ est solution optimale de (1.1).

II. 7) Application au principe du maximum en temps discret

Problème:

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \varphi(x_t, u_t, t) + \varphi(x_T, T) \right] \\ \forall t \in [0, T-1] : x_{t+1} \in X_{t+1}, u_t \in U_t, x_0 = \xi_0 \\ \forall k \in [1, n] : x_{t+1}^k - x_t^k = f^k(x_t, u_t, t) \\ \forall i \in [1, m_t] : g^i(x_t, u_t, t) \geq 0 \\ \forall i \in [m_t + 1, n_t] : g^i(x_t, u_t, t) = 0 \\ \forall i \in [1, m_T] : g^i(x_T, T) \geq 0 \\ \forall i \in [m_T + 1, n_T] : g^i(x_T, T) = 0 \end{array} \right.$$

$\forall t \in [0, T-1]$, X_{t+1} est un convexe ouvert de R^n et U_t un ensemble quelconque.

Toutes les fonctions φ, f^k, g^i sont définies dans l'ensemble suivant:

$\bigcup_{t=0}^{T-1} (X_t \times U_t \times \{t\}) \cup (X_T \times \{T\})$ et elles sont supposées différentiables par rapport à la première variable. Nous notons $X_0 = \{\xi_0\}$ et pour $0 \leq t \leq T-1$, $x_t \in X_t$ et $x_{t+1} \in X_{t+1}$, nous désignons par $A_t(x_t, x_{t+1})$ [respectivement $B_t(x_t, x_{t+1})$] l'ensemble des points $(\lambda, y_t, z_t) \in R \times R^n \times R^{n_t}$ qui vérifient: Il existe $u_t \in U_t$ [respectivement $u_t \in U_t$ et

$(v_t, w_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_t}$] tels que : $\lambda \leq \varphi(x_t, u_t, t)$ pour
 $1 \leq k \leq n : y_t^k = f^k(x_t, u_t, t) + x_t^k - x_t^{k+1}$
 [respectivement $v_t^k y_t^k = f^k(x_t, u_t, t) + x_t^k - x_t^{k+1}$] pour $1 \leq i \leq m_t : z_t^i \leq g^i(x_t, u_t, t)$
 [respectivement $w_t^i z_t^i \leq g^i(x_t, u_t, t)$] pour $m_t + 1 \leq i \leq n_t : z_t^i = g^i(x_t, u_t, t)$ [respectivement
 $w_t^i z_t^i = g^i(x_t, u_t, t)$]

A l'aide du critère assurant la mixité d'un programme mathématique énoncé auparavant nous obtenons le critère suivant:

Critère:

Pour que le problème (2.1) soit un programme mixte en tout point, il suffit que pour $0 \leq t \leq T-1$, l'enveloppe convexe de $A_t(x_t, x_{t+1})$ soit contenue dans $B_t(x_t, x_{t+1})$ pour tout $(x_t, x_{t+1}) \in X_t \times X_{t+1}$; il suffit en particulier que $A_t(x_t, x_{t+1})$ soit convexe.

Selon le théorème précédent, il en résulte le résultat suivant:

Théorème:[50]

Si $\bar{x}_t (0 \leq t \leq T)$ et $\bar{u}_t (0 \leq t \leq T-1)$ est une solution optimale du problème (2.1) et si le problème est mixte en ce point, alors il existe des nombres non tous nuls:

$a, b_t^i (0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq n_t)$ et $q_{t+1}^k (0 \leq t \leq T-1, 1 \leq k \leq n)$ tels que:

1°) $a \geq 0$

2°) pour $0 \leq t \leq T-1$ et $1 \leq i \leq m_t : b_t^i \geq 0$ et $b_t^i g^i(\bar{x}_t, \bar{u}_t, t) = 0$

3°) pour $1 \leq i \leq m_T : b_T^i \geq 0$ et $b_T^i g^i(\bar{x}_T, T) = 0$

4°) pour $1 \leq t \leq T-1$ et $1 \leq k \leq n : q_t^k - q_{t+1}^k = \frac{\partial H}{\partial x^k}(\bar{x}_t, \bar{u}_t, a, b_t, q_{t+1}, t)$

5°) pour $1 \leq k \leq n : q_T^k = a \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(\bar{x}_T, T) + \sum_{i=1}^{n_T} b_T^i \frac{\partial g^i}{\partial x^k}(\bar{x}_T, T)$

6°) pour $0 \leq t \leq T-1$, $H(\bar{x}_t, u, a, b_t, q_{t+1}, t)$ atteint son maximum sur U_t en $\bar{u}_t$;
 le hamiltonien H étant défini par:

$$H(x, u, a, b, q, t) = a\varphi(x, u, t) + \sum_{k=1}^n q^k f^k(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n_t} b^i g^i(x, u, t).$$

CHAPITRE III

OPTIMISATION MULTIOBJECTIF ET OPTIMISATION AU SENS DE PARETO

Nous abordons dans ce troisième chapitre quelques éléments de la théorie générale de l'optimisation multiobjectif et d'optimisation au sens de PARETO en particulier. Nous introduisons d'abord deux notions importantes qui sont l'ordre de préférence et de structure de domination.

Un ordre de préférence est en quelque sorte une relation binaire définie sur un ensemble Y par exemple un ensemble de biens, et qui spécifie quand est ce qu'un bien est "meilleur" qu'un autre pour un certain décideur. Tandis qu'une structure de domination est une application multivoque c'est à dire une application de Y dans l'ensemble des parties de Y et qui permet de définir pour un bien donné, qu'elles sont les biens qui sont moins meilleurs que ce bien en question.

Evidemment il existe une relation entre ces deux notions et "YU" dans un article cité plus loin définit une structure de domination à l'aide d'un ordre de préférence, tandis que nous nous proposons une condition suffisante permettant de définir un ordre de préférence à l'aide d'une structure de domination. Nous passons ensuite à la notion d'élément efficace qui est en quelque sorte un meilleur élément de l'ensemble Y , notion liée à l'ordre de préférence et à la structure de domination

Nous traitons plus particulièrement le cas le plus important où la structure de domination est une application multivoque constante notamment un cône convexe pointé, puis nous passons en revue quelques propriétés sur les ensembles efficaces après avoir donné quelques exemples d'ordre de préférence comme l'ordre de PARETO, l'ordre lexicographique, l'ordre d'un cône convexe polyédral.

Vient ensuite la notion de solution efficace qui représente une meilleure solution du problème général d'optimisation multiobjectif, cette notion est liée à une structure de domination ou un ordre de préférence.

L'objectif fondamental de la théorie de l'optimisation multiobjectif est de trouver l'ensemble des solutions efficaces et d'étudier ainsi leurs propriétés algébriques et topologiques.

Par exemple pour un problème donné est ce que l'ensemble des solutions efficaces existe toujours?

Il y'a plusieurs résultats qui permettent de l'affirmer non seulement pour les solutions efficaces mais pour d'autres notions plus finies que sont les solutions proprement efficaces au sens de BENSON, de BORWEIN, de GEOFFRION, de KUHN-TUCKER...

Nous abordons ensuite quelques éléments d'optimisation au sens de PARETO notion qui trouve ses applications en économie, en statistique etc.... Nous donnons des conditions nécessaires ou suffisantes d'optimum de PARETO, nous traitons d'abord le cas général puis nous passons au cas de critères différentiables.

A présent nous voulons étendre le problème de contrôle optimal discret au cas où nous aurions plusieurs critères à optimiser à la fois.

Nous donnerons d'abord quelques notions qui permettront de définir les différents sens que nous pouvons donner à l'optimalité d'un problème de programmation multiobjectif.

Définition:

Nous appelons problème de programmation multiobjectif, le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) \\ x \in X \end{cases} \text{ où } f: R^n \rightarrow R^P \text{ et } X \subset R^n$$

Dans cette définition nous allons préciser le sens de « Maximiser $f(x)$ ».

III. 1) Ordre de préférence et structure de domination

Définition d'un ordre de préférence:

Nous définissons sur un ensemble Y quelconque, une relation binaire notée « $\succ$ » que nous appelons ordre de préférence et qui doit être au moins une relation dite d'ordre partiel strict c'est à dire irréflexive et transitive.

L'irréflexivité veut dire que $\forall y \in Y$ on a pas $y \succ y$.

Nous pouvons généraliser la notion d'ordre de préférence à celle de structure de domination.

Définition d'une structure de domination:

Une structure de domination D est une application de R^P dans l'ensemble des parties de R^P qui vérifie les deux axiomes suivants:

1) L'asymétrie: Si $d \in D(y)$ et $d \neq 0$ alors $(-d) \notin D(y+d) \forall y \in Y$.

Nous vérifions aisément que D est asymétrique si et seulement si nous avons:

$$\forall y \in Y, \forall y' \in Y : y \in y' + D(y') \text{ et } y' \in y + D(y) \Rightarrow y = y'.$$

2) La transitivité: $\forall y \in Y$ si $d \in D(y)$ et $d' \in D(y+d) \Rightarrow d + d' \in D(y)$.

Nous vérifions aisément que D est transitive si et seulement si

$$\forall (y, y', y'') \in Y^3 \left\{ \begin{array}{l} y \in y' + D(y') \\ y' \in y'' + D(y'') \end{array} \right\} \Rightarrow y \in y'' + D(y'').$$

Quelle est la relation qui existe entre un ordre de préférence et une structure de domination ?

YU [84] définit une structure de domination à l'aide d'un ordre de préférence comme suit: Soit « $\succ$ » un ordre de préférence.

Pour chaque $y \in R^P$ $D(y) = \{d \in R^P : y \succ y+d\} \cup \{0\}$ (autrement dit « d » est une déviation à partir de « y » qui ne donne pas un élément « meilleur » que « y »).

Montrons que c'est une structure de domination.

1) L'asymétrie: Soit $d \in D(y)$ $d \neq 0 \Rightarrow y \succ y + d$ et comme « $\succ$ » est une relation transitive et irréflexive alors elle est asymétrique d'après le lemme suivant:

Lemme:

Toute relation « R » transitive et irréflexive est nécessairement asymétrique.

Preuve:

D'abord une définition: Nous disons qu'une relation « R » est asymétrique si pour tout y, z tel que « $y R z$ » alors nous n'avons pas « $z R y$ ».

Soient y, z tel que « $y R z$ » alors si nous avons « $z R y$ », nous déduisons par transitivité de « R » que « $y R y$ »: Ce qui contredit l'irréflexivité de « R ». CQFD.

« $\succ$ » étant asymétrique, nous n'avons pas $y + d \succ y$ c'est à dire nous n'avons pas $y + d \succ (y + d) - d$ donc $(-d) \notin D(y + d)$.

2) La transitivité: Soient $d \in D(y)$ et $d' \in D(y + d)$ alors $\begin{cases} y \succ y + d \\ y + d \succ y + d + d' \end{cases}$

donc $y \succ y + d + d'$ car « $\succ$ » est transitive, d'où $d + d' \in D(y)$ C.Q.F.D.

Remarques:

1) A l'aide de la structure de domination définie par YU, l'ordre de préférence est complètement défini dans Y c'est à dire que si nous donnons deux éléments $y \in Y$ et $y' \in Y$ nous pouvons savoir si $y \succ y'$ ou $y' \succ y$ ou bien non, en effet nous voyons par exemple si $y - y' \in D(y')$ si c'est le cas nous aurons par définition de $D(y') : y' \succ y' + (y - y')$ c'est à dire $y' \succ y$.

2) La question que nous pouvons maintenant se poser est la suivante:

Pouvons nous définir un ordre de préférence à l'aide d'une structure de domination ?

J'affirme que si nous prenons comme hypothèse que $\forall y \in Y (Y \subset R^p) 0 \notin D(y)$ alors la relation « $\succ$ » définie par $y \succ y' \Leftrightarrow y' \in y + D(y)$ est un ordre de préférence.

En effet si « $\succ$ » n'est pas irréflexive alors $\exists y \in Y : y \succ y$ donc $y \in y + D(y)$ c'est à dire $\exists d \in D(y) : y = y + d$ donc $d = 0$: contradiction avec l'hypothèse.

Si $y \succ y'$ et $y' \succ y''$ alors $y' \in y + D(y)$ et $y'' \in y' + D(y')$ d'où $y'' \in y + D(y)$ car D est transitive donc $y \succ y''$.

La structure de domination définie par YU ne vérifie pas l'hypothèse précédente et je montre que la relation « $\succ_1$ » définie par $x \succ_1 y \Leftrightarrow y \in x + D(x)$ n'est pas un ordre de préférence où D est la structure de domination définie par YU. En effet comme $0 \in D(x)$

alors $x = x + 0 \in x + D(x)$ c'est à dire $x \succ_1 x$ donc « $\succ_1$ » n'est pas irréflexive.

Mais nous nous demandons si nous pouvons définir un autre ordre de préférence à l'aide de la structure de domination définie par YU.

A présent introduisons une notion importante en optimisation multiobjectif qu'est la notion d'élément efficace:

III. 2) Définition d'élément efficace

1) Soit « $\succ$ » un ordre de préférence dans un ensemble Y . Nous disons que $\hat{y} \in Y$ est un élément efficace de Y si il n'existe pas $y \in Y$ tel que $y \succ \hat{y}$.

Nous notons par $E(y, \succ)$ l'ensemble des éléments efficaces de Y .

$$E(Y, \succ) = \{\hat{y} \in Y : \nexists y \in Y \text{ avec } y \succ \hat{y}\}.$$

Nous pouvons aussi définir la notion d'élément efficace à l'aide d'une structure de domination comme suit:

2) Soit $Y \subset R^p$ et D une structure de domination. $\hat{y} \in Y$ est un élément efficace s'il n'existe pas de $y \in Y$ avec $y \neq \hat{y}$ et $\hat{y} \in y + D(y)$ et nous notons l'ensemble des éléments efficaces par: $E(Y, \succ) = \{\hat{y} \in Y : \nexists y \in Y \text{ } y \neq \hat{y} \text{ et } \hat{y} \in y + D(y)\}.$

Remarques:

*Cette définition 2 coïncide avec celle donnée en 1 en prenant comme structure de domination celle définie par $Y \cup D(y) = \{d \in R^p : y \succ y + d\} \cup \{0\}$ comme il est facile de le vérifier.

Définition: Soit C un sous-ensemble de R^n . Nous disons que C est un cône si nous avons: pour tout $x \in C$ et pour tout $\lambda \geq 0$, $\lambda x \in C$.

*Le cas le plus important et le plus intéressant de structure de domination D est quand D est constant c'est à dire $\forall y \in Y \ D(y) = C$ avec $C \subset R^p$ et plus particulièrement lorsque C est un cône donné. Dans ce cas il faut et il suffit que D vérifie les axiomes 1 et 2 d'une structure de domination; pour cela nous avons:

D est asymétrique $\Leftrightarrow [d \in D, d \neq 0 \Rightarrow (-d) \notin D] \Leftrightarrow D$ est un cône pointu

(par définition).

D est transitif $\Leftrightarrow [d, d' \in D \Rightarrow d + d' \in D]$ n'est vraie que si D est cône convexe.

Ainsi les cônes convexes pointus sont souvent utilisés pour définir une structure de domination.

A présent donnons des exemples d'ordre de préférence :

III. 3) Exemples d'ordre de préférences

(i) Ordre de PARETO: « $\succ$ » = $\leq$ c'est à dire $D = R_+^p$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in R^p, \ y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p) \in R^p$$

$$y \leq y' \text{ veut dire } y \neq y' \text{ et } y_i \leq y'_i \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq p$$

(ii) Ordre de PARETO faible: « $\succ$ » = $<$ c'est à dire $D \setminus \{0\} = \{y \in R^p : y > 0\}.$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in R^p, \ y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p) \in R^p$$

$$y < y' \text{ veut dire pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq p, \ y_i < y'_i.$$

(iii) Ordre lexicographique: « $\succ$ » = $\succ_l$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in R^p, y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p) \in R^p$$

$$y \succ_l y' \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, p\} : y_i = y'_i \quad \forall i < k \text{ et } y_k < y'_k \text{ c'est à dire}$$

$D = \{d \in R^p : \exists k \in \{1, \dots, p\} : d_i = 0 \quad \forall i < k \text{ et } d_k > 0\} \cup \{0\}$. Ici D est un cône ni ouvert ni fermé.

(iv) Ordre définit par un cône convexe polyédral:

Soit A une $(l \times p)$ matrice et $D = \{d \in R^p : Ad \geq 0\} = \{d \in R^p / Ad_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, p}\}$.

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{pmatrix}. \text{ Nous supposons de plus que } \text{Ker } A = \{y : Ay = 0\} = \{0\} \text{ pour que D soit pointu.}$$

Cet ordre est essentiellement réduit à l'ordre de PARETO comme le montre le lemme suivant:

Lemme:

Soit $Y \subset R^p$, A une $(l \times p)$ matrice avec $\text{Ker } A = \{0\}$ et $D = \{d \in R^p / Ad \geq 0\}$

alors $E(Y, D) = \{y \in Y : Ay \in E(AY, R_+^l)\}$.

Preuve:

$\hat{y} \in Y$ tel que $\hat{y} \notin E(Y, D)$ si et seulement si il existe $y \in Y$ tel que $\hat{y} - y \in D \setminus \{0\}$.

Comme $\text{Ker } A = \{0\}$, $\hat{y} - y \in D \setminus \{0\}$ si et seulement si $A\hat{y} \geq Ay$ c'est à dire $A\hat{y} \notin E(AY, R_+^l)$. C.Q.F.D.

III. 4) Propriétés des ensembles efficaces

Proposition 1:[84]

Excepté le cas où $D = \{0\}$, $y \in E(Y, D)$ implique que $y \in \P Y$ (frontière de Y) avec D un cône de R^p .

Preuve:

En effet si $y \notin \P Y$ alors $y \in \dot{Y}$ (l'intérieur de Y) donc $\exists r > 0 : B(y, r) \subset Y$ où

$B(y, r)$ est la boule ouverte (pour n'importe quelle norme de R^p) centrée en y de rayon

$$r > 0. \text{ Soit } d \in D - \{0\} \text{ et } y' = y - \frac{d}{\|d\|} \frac{r}{2}. \text{ Comme } d \in D \text{ alors } \frac{d}{\|d\|} \frac{r}{2} \in D$$

car D est un cône. Donc $y = y' + \frac{d}{\|d\|} \frac{r}{2} \in y' + D$ de plus $y \neq y'$ car $d \neq 0$ et $r > 0$.

$$y' \in Y \text{ car } \|y - y'\| = \frac{\|d\|}{\|d\|} \frac{r}{2} = \frac{r}{2} < r \Rightarrow y' \in B(y, r) \subset Y.$$

Donc $y \in y' + D$ avec $y' \in Y$ et $y \neq y'$: ce qui contredit le fait que $y \in E(Y, D)$. C.Q.F.D.

Nous déduisons de cette proposition que si D n'est pas réduit à 0 et Y est un ouvert alors $E(Y, D) = \emptyset$.

Proposition 2:[76]

Soient D_1 et D_2 deux structures de domination tels que pour tout $y \in Y$,
 $D_1(y) \subset D_2(y)$ alors nous avons $E(Y, D_2) \subset E(Y, D_1)$.

Preuve:

Soit $y \in E(Y, D_2)$ si $y \notin E(Y, D_1)$ alors il existe $y^1 \in Y$ tel que $y \in y^1 + D_1(y^1)$
et $y \neq y^1$. Or par hypothèse nous déduisons que $y^1 + D_1(y^1) \subset y^1 + D_2(y^1)$ donc
 $y \in y^1 + D_2(y^1)$ et $y \neq y^1$ ce qui contredit le fait que $y \in E(Y, D_2)$. C.Q.F.D.

Proposition 3:[69]

Soit D un cône non vide contenant 0. Alors nous avons $E(Y, D) \supset E(Y + D, D)$ avec égalité
si D est en plus pointu convexe.

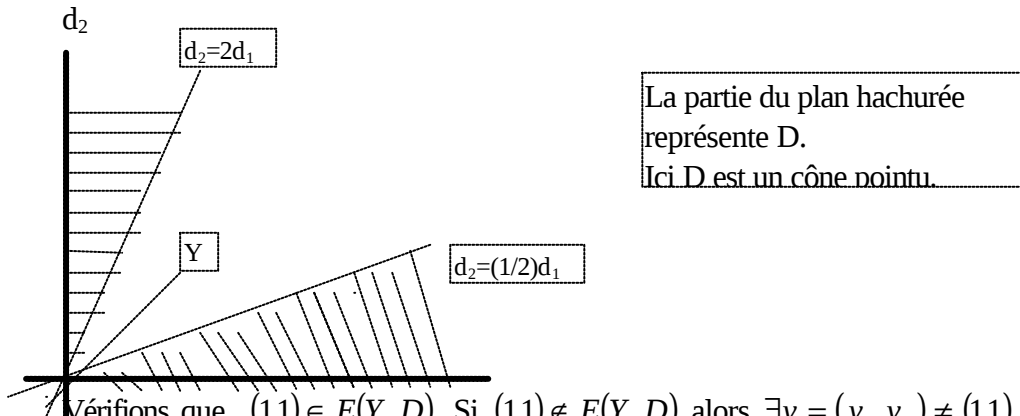
Preuve:

Soit $y \in E(Y + D, D)$ si $y \notin E(Y, D)$ alors il existe $y^1 \in Y$ tel que $y \in y^1 + D$ et
 $y \neq y^1$. Or $y^1 = y^1 + 0 \in Y + D$ donc $y \in y^1 + D$ et $y^1 \in Y + D$ ce qui contredit le fait
que $y \in E(Y + D, D)$, d'où $y \in E(Y, D)$.

Si D est en plus pointu convexe, Soit $y \in E(Y, D)$ si $y \notin E(Y + D, D)$ alors il existe
 $y' \in Y$ et $d' \in D$ et $d'' \in D - \{0\}$ tel que $y = y' + d' + d''$ et comme D est un cône convexe
alors $d' + d'' \in D$ et de plus $d' + d'' \neq 0$ car sinon nous aurions $d'' \neq 0, d'' \in D$ et
 $(-d'') = d' \in D$ ce qui contredit le fait que D est pointu. Donc $y \in y' + D$ et $y \neq y'$ et ceci
contredit l'hypothèse $y \in E(Y, D)$. C.Q.F.D.

Exemple:

Soit $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_1 = y_2 \leq 1\}$ et
 $D = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2 \geq 2d_1\} \cup \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 \geq 2d_2 \geq 0\}$



Vérifions que $(1,1) \in E(Y, D)$. Si $(1,1) \notin E(Y, D)$ alors $\exists y = (y_1, y_2) \neq (1,1), (y_1, y_2) \in Y$ tel

$$\text{que } (1,1) = (y_1, y_2) + (d_1, d_2) \text{ où } \begin{cases} d_2 \geq 2d_1 \geq 0 \\ \text{ou} \\ d_1 \geq 2d_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + d_1 = 1 \\ y_2 + d_2 = 1 \\ d_2 \geq 2d_1 \geq 0 \\ \text{ou} \\ d_1 \geq 2d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 1 - y_1 \\ d_2 = 1 - y_2 \\ 1 - y_2 \geq 2(1 - y_1) \\ \text{ou} \\ 1 - y_1 \geq 2(1 - y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 \leq 2y_1 - 1 \\ \text{ou} \\ y_1 \leq 2y_2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{et comme } (y_1, y_2) \in Y \Rightarrow 0 \leq y_1 = y_2 \leq 1 \text{ alors } \begin{cases} y_2 \leq 2y_1 - 1 \\ \text{ou} \\ y_1 \leq 2y_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y_2 \leq 2y_2 - 1$$

$\Rightarrow y_2 \geq 1 \Rightarrow y_2 = 1$ donc $y = (y_1, y_2) = (1, 1)$ ce qui contredit $y = (y_1, y_2) \neq (1, 1)$

donc $(1, 1) \in E(Y, D)$. De plus $(1, 1) = (0, 0) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ c'est à dire que

$(1, 1) \in Y + D + D$ et $(1, 1) \notin E(Y + D, D)$ donc nous n'avons pas $E(Y, D) \subset E(Y + D, D)$ bien que D soit un cône pointu. Ceci veut dire que l'hypothèse de convexité dans la proposition précédente est importante; en effet dans cet exemple D n'est pas convexe.

Proposition 4:[76]

Soient $Y_1, Y_2 \subset R^p$, D une structure de domination constante sur R^p .

Alors nous avons : $E(Y_1 + Y_2, D) \subset E(Y_1, D) + E(Y_2, D)$.

Preuve:

Soient $\hat{y} \in E(Y_1 + Y_2, D)$, alors $\hat{y} = y^1 + y^2$ où $y^1 \in Y_1$ et $y^2 \in Y_2$. Montrons que $y^1 \in E(Y_1, D)$. Supposons le contraire donc il existe $y \in Y_1$ et $d \in D - \{0\}$ tel que: $y^1 = y + d$. Alors $\hat{y} = y^1 + y^2 = y + y^2 + d$ et $y + y^2 \in Y_1 + Y_2$ ce qui contredit le fait que $\hat{y} \in E(Y_1 + Y_2, D)$. Nous montrons de manière similaire que $y^2 \in E(Y_2, D)$ donc nous avons: $\hat{y} \in E(Y_1, D) + E(Y_2, D)$ C.Q.F.D.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie comme le montre le contre exemple suivant:

Soient $Y_1 = Y_2 = \{(y_1, y_2) \in R^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$ $D = R_+^2$. $y^1 = (-1, 0) \in E(Y_1, D)$

car sinon $\exists (x_1, x_2) \neq (-1, 0)$ tel que : $(-1, 0) = (x_1, x_2) + (d_1, d_2)$ où $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ et $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + d_1 = -1 \\ x_2 + d_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - d_1 \\ x_2 = -d_2 \\ 1 + d_1^2 + 2d_1 + d_2^2 \leq 1 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 \leq 0 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2 = 0$$

donc $(x_1, x_2) = (-1, 0)$: Contradiction.

$y^2 = (0, -1) \in E(Y_2, D)$ car sinon $\exists (y_1, y_2) \neq (0, -1)$ et (d'_1, d'_2) tel que:

$(0, -1) = (y_1, y_2) + (d'_1, d'_2)$ où $y_1^2 + y_2^2 \leq 1$ et $d'_1 \geq 0, d'_2 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + d'_1 = 0 \\ y_2 + d'_2 = -1 \\ y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \\ d'_1 \geq 0, d'_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1'^2 + d_2'^2 + 2d'_2 \leq 0 \\ d'_1 \geq 0, d'_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow d'_1 = d'_2 = 0 \Rightarrow (y_1, y_2) = (0, -1)$$

ce qui contredit $(y_1, y_2) \neq (0, -1)$.

Donc $y^1 \in E(Y_1, D)$ et $y^2 \in E(Y_2, D)$ mais $y^1 + y^2 = (-1, -1) > (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in Y_1 + Y_2 \text{ c'est à dire } y^1 + y^2 - y \in D \setminus \{0\}$$

où $y = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ donc $y^1 + y^2 \notin E(Y_1 + Y_2, D)$.

Proposition 5:[76]

Soit $Y \subset R^p$ et D un cône dans R^p et $a > 0$. Alors nous avons: $E(aY, D) = aE(Y, D)$.

La preuve de cette proposition est immédiate.

Il existe une autre caractérisation d'éléments efficaces dans le cas où la structure de domination D est un cône convexe constant, celle ci est basée sur la notion de plus grand sous espace vectoriel contenu dans un cône convexe. Avant d'énoncer cette caractérisation donnons quelques résultats préliminaires:

Définition:

Soit C un cône convexe de R^n . $L = (C) \cap (-C)$ est appelé « Lineality space ».

Remarque:

Si C est seulement un cône, alors $\forall a \in R, \forall x \in L, a.x \in L$. En effet soit $x \in L$. Si $a \geq 0$ comme $x \in C \Rightarrow a.x \in C$ car C est un cône. De même $x \in (-C)$ donc $\exists y \in C / x = -y$ et $-x = y \in C \Rightarrow a(-x) \in C$ car C est un cône. Donc nous avons: $a.x \in C$ et $-a.x \in C \Rightarrow a.x \in C \cap (-C) = L$.

Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ donc $(-a)x \in L$ ceci d'après le cas précédent. Donc nous avons

$$\begin{cases} -a.x \in C \\ \text{et} \\ -a.x \in -C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.x \in -C \\ \text{et} \\ a.x \in C \end{cases} \Rightarrow a.x \in C \cap (-C) = L \text{ . C.Q.F.D.}$$

Si C est seulement un cône, L n'est pas toujours un sous espace vectoriel de R^n comme le montre l'exemple suivant:

Soit $C = \{(x, y) \in R^2 / x.y \geq 0\}$ C est bien un cône comme il est aisé de le montrer.

$C \cap (-C) = C \cap C = C$. $(1, 0) \in C$, $(0, -1) \in C$ mais $(1, 0) + (0, -1) = (1, -1) \notin C$

donc $L = (C) \cap (-C)$ n'est pas un sous espace vectoriel de R^2 . Cependant nous avons les trois lemmes suivants:

Lemme a:

Si C est cône convexe de R^n , $L = C \cap (-C)$ est un sous espace vectoriel de R^n

Preuve:

D'après la remarque précédente, il suffit seulement de vérifier que:

$$\forall x \in L, \forall y \in L, x + y \in L.$$

Soient $x, y \in L \Rightarrow \begin{cases} x \in C \\ y \in C \end{cases} \Rightarrow x + y \in C$ car C est un cône convexe. Nous avons aussi

$$\begin{cases} -x \in C \\ -y \in C \end{cases} \Rightarrow (-x) + (-y) \in C \Rightarrow -(x + y) \in C \text{ donc } x + y \in C \cap (-C) = L. \text{ C.Q.F.D.}$$

Lemme b:

Si C est un cône convexe de R^n , $L = C \cap (-C)$ est le plus grand sous espace vectoriel contenu dans C .

Preuve:

Il est évident que L est contenu dans C . D'autre part d'après le lemme précédent il suffit de montrer que si F est un sous espace vectoriel contenu dans C , alors $F \subset L$.

Soit $x \in F$ alors $\begin{cases} x \in F \\ -x \in F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C \\ -x \in C \end{cases}$ car $F \subset C$ d'où $x \in C \cap (-C) = L$ C.Q.F.D.

Lemme c:

L'intersection de deux cônes est un cône.

Preuve:

Soient C_1 et C_2 deux cônes. Si $x \in C_1 \cap C_2$, et $a > 0$ alors $x \in C_1$ d'où $a \cdot x \in C_1$ car C_1 est un cône, de même $x \in C_2$ d'où $a \cdot x \in C_2$ car C_2 est un cône d'où $a \cdot x \in C_1 \cap C_2$ C.Q.F.D.

Théorème:[84]

Soit C un cône convexe de R^n (qui contient l'origine), posons $\bar{C} = L^\perp \cap C$ avec $L^\perp$ l'orthogonal du «Lineality space» L . Alors nous avons : $C = L \oplus \bar{C}$ et $\bar{C}$ est un cône pointu.

Preuve:

Il faut montrer que $C = L + \bar{C}$ et $L \cap \bar{C} = \{0\}$.

Comme C est un cône convexe, L est un sous espace vectoriel de R^n (voir lemme a). Nous avons : $R^n = L \oplus L^\perp$. Soit $x \in C$ donc $x \in R^n$ et par suite x se décompose de manière unique sous la forme:

$$x = y + z \text{ où } y \in L \text{ et } z \in L^\perp.$$

$$y \in L = C \cap (-C) \Rightarrow y \in (-C) \text{ donc } \begin{cases} -y \in C \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow z = x - y \in C \text{ car } C \text{ cône convexe.}$$

Finalement $z \in L^\perp \cap C = \bar{C}$ et par suite $x = y + z \in L + \bar{C}$ donc $C \subset L + \bar{C}$.

D'autre part, $L = C \cap (-C) \subset C$ et $\bar{C} \subset C$ et comme C est un cône convexe alors $L + \bar{C} \subset C$ d'où $C = L + \bar{C}$.

$$L \cap \bar{C} = L \cap L^\perp \cap C = \{0\} \cap C = \{0\}. \text{ Donc } C = L \oplus \bar{C}.$$

Le fait que $\bar{C}$ soit un cône résulte du lemme c et du fait que $L^\perp$ est un sous espace vectoriel donc un cône.

$$\bar{C} \cap (-\bar{C}) = (L^\perp \cap C) \cap [(-L^\perp) \cap (-C)] \text{ et puisque } L^\perp \text{ est un sous espace, } -L^\perp = L^\perp$$

$$\bar{C} \cap (-\bar{C}) = L^\perp \cap C \cap (-C) = L^\perp \cap L = \{0\} \text{ donc } \bar{C} \text{ est pointu. C.Q.F.D.}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation d'un élément efficace lorsque la structure de domination est un cône convexe constant:

Proposition 6:[84]

Soit D un cône convexe constant de R^p et Y une partie de R^p .

Une condition nécessaire et suffisante pour que $y_0 \in E(Y, D)$ est que:

1) $Y \cap (y_0 + L) = \{y_0\}$ et

2) $y_0^\perp \in E(Y^\perp, D^\perp)$.

où $L = D \cap (-D)$, $y_0^\perp, Y^\perp, D^\perp$ sont respectivement les projections de y_0, Y, D sur $L^\perp$.

Preuve:

La condition est nécessaire en effet: si 1) n'a pas lieu, il est clair que $y_0 \notin E(Y, D)$.

Supposons que 2) est faux. Alors il existe $y^\perp \in Y^\perp$ et $h^\perp \neq 0$, $h^\perp \in D^\perp$ tel que:

$$y_0^\perp = y^\perp + h^\perp \quad (1).$$

Soit $y \in Y$, un point dont la projection sur $L^\perp$ est $y^\perp$ donc nous avons:

$$y = y^\perp + y^L, \text{ avec } y^L \in L. \text{ Posons } y_0 = y_0^\perp + y_0^L \text{ où } y_0^L \in L. \text{ De l'égalité (1)}$$

$$\text{précédente nous tirons que: } y_0 = y^\perp + h^\perp + y_0^L = (y - y^L) + h^\perp + y_0^L = y + (y_0^L - y^L) + h^\perp$$

Puisque $h^\perp \neq 0$, et $y_0^L - y^L \in L$, nous avons $y_0^L - y^L + h^\perp \neq 0$ ainsi $y_0 \neq y$

et aussi : $y_0^L - y^L + h^\perp \in L + h^\perp \subset L + D^\perp$. Nous voyons que

$y_0^L - y^L + h^\perp \in L + h^\perp \subset L + D^\perp$ et $y_0 \neq y$. Ainsi $y_0 \notin E(Y, D)$ ce qui constitue une contradiction.

La condition est suffisante en effet: supposons que $y_0 \notin E(Y, D)$ donc il existe $y \in Y$, $h \neq 0$ $h \in D$, tel que $y_0 = y + h$ (2).

Ecrivons $y_0 = y_0^\perp + y_0^L$, $y = y^\perp + y^L$, $h = h^\perp + h^L$ (pour la décomposition de h nous utilisons le théorème précédent) où $y_0^L, y^L, h^L \in L$ et $y_0^\perp, y^\perp, h^\perp \in L^\perp$. De l'égalité (2) nous tirons que : $y_0^\perp = y^\perp + h^\perp$ (3)

Remarquons que, $h \neq 0$, $h^\perp$ et h^L ne peuvent être simultanément nuls. Considérons deux cas possibles:

Cas 1: $h^\perp \neq 0$ l'égalité (3) contredit la condition 2 du théorème.

Cas 2: $h^\perp = 0$ alors $h^L = h \neq 0$, ainsi $y_0 = y + h^L$ ou bien $y = y_0 - h^L \in y_0 + L$ et ceci contredit la condition 1 du théorème . C.Q.F.D.

A présent abordons quelques éléments d'optimisation multiobjectif. Soit le problème de programmation multiobjectif suivant:

$$(P) \begin{cases} \text{Maximiser } f(x) \\ x \in X \end{cases} \text{ où } f: R^n \rightarrow R^p \text{ et } X \subset R^n .$$

Nous voudrions définir une solution optimale de ce problème (P).

Si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ et si $x_0 \in X$ est tel que:

$$\text{Max}_{x \in X} f_1(x) = f_1(x_0), \text{Max}_{x \in X} f_2(x) = f_2(x_0), \dots, \text{Max}_{x \in X} f_p(x) = f_p(x_0)$$

autrement dit si $x_0 \in X$ maximise en même temps tous les critères $f_1, f_2, \dots, f_p$ alors cet x_0 pourrait être considéré comme solution optimale du problème (P). Or il est rare qu'un tel cas puisse se présenter car en général $f_1, f_2, \dots, f_p$ atteignent leur maximum en différents points $x_1, x_2, \dots, x_p$ vu que ces critères peuvent être incompatibles à la fois.

III. 5) Approche par une suite hiérarchique de critères de performance

Une façon de définir la solution optimale est par la méthode «d'optimisation d'une suite hiérarchique de critère de performance » qui consiste à établir d'abord un ordre de préférence sur les critères $f_1, f_2, \dots, f_p$. Supposons que cet ordre soit le suivant $(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Nous résolvons ensuite le problème de programmation mathématique: $\text{Max}_{x \in X} f_1(x)$ et soit X_1 l'ensemble des solutions optimales. Nous résolvons ensuite $\text{Max}_{x \in X_1} f_2(x)$, soit X_2 l'ensemble de ses solutions optimales, et nous continuons ainsi jusqu'à résoudre le problème $\text{Max}_{x \in X_{p-1}} f_p(x)$ dont X_p est l'ensemble des solutions optimales.

Nous choisissons un $x_0 \in X_p$ qui sera considéré comme une solution optimale à notre problème (P). Nous remarquons que $X_p \subset X_{p-1} \subset \dots \subset X_1 \subset X$.

L'idée d'une telle approche de solution fut proposée par NELSON [56]

Une autre manière de définir la solution optimale est de chercher les solutions efficaces.

III. 6) Définition d'une solution efficace

Nous considérons le problème

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in X \end{cases} \text{ où } f: R^n \rightarrow R^p \text{ et } X \subset R^n .$$

Soit D une structure de domination de $Y = f(X)$.

$\hat{x} \in X$ est dite solution efficace du problème (P) relative à la structure de domination D si

$f(\hat{x}) \in E(Y, D)$ c'est à dire il n'existe pas $x \in X$ tel que $f(\hat{x}) \in f(x) + D(f(x))$ et $f(x) \neq f(\hat{x})$.

L'objectif fondamental de la théorie de la programmation multiobjectif est de trouver l'ensemble des solutions efficaces du problème (P) et d'étudier ainsi leurs propriétés algébriques et topologiques.

Il existe aussi plusieurs définitions de solutions efficaces et sous certaines hypothèses il existe des relations entre ces diverses notions d'efficacité.

Définissons quelques unes de ces notions:

Définition du cône tangent:

Soit $S \subset R^p$ et $y \in S$. Le cône tangent à S en y est noté $T(S, y)$ est défini par:

$T(S, y)$ est l'ensemble des vecteurs qui sont limites des suites convergentes de la forme

$\left(t_k(y^{(k)} - y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ où $t_k \in \mathbb{R}^+$ et $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est suite de S tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y$.

III. 7) Définition de l'efficacité propre au sens de BORWEIN

Un point $\hat{x} \in X$ est dit solution proprement efficace au sens de BORWEIN du problème (P) si $T(Y + D, f(\hat{x})) \cap (-D) = \{0\}$, D étant un cône convexe fermé de R^p .

Nous montrons que toute solution proprement efficace au sens de BORWEIN est efficace. En effet:

Proposition:[76]

Si $\hat{x} \in X$ est une solution proprement efficace au sens de BORWEIN alors $\hat{x}$ est une solution efficace.

Preuve:

Supposons que $\hat{x} \in X$ ne soit pas solution efficace donc $\exists d \in D - \{0\}$ et $\exists y \in Y$

tel que $f(\hat{x}) = y + d$. Soit $d_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)d$, $t_k = k$ et $y^{(k)} = y$ pour tout $k \geq 1$.

$\forall k \geq 1$, $d_k \in D$ car D est un cône d'où $\forall k \geq 1$, $y^{(k)} + d_k \in Y + D$ et de plus nous avons:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y^{(k)} + d_k) = y + d = f(\hat{x}) \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k (y^{(k)} + d_k - f(\hat{x})) = -d \text{ donc:}$$

$-d \in T(Y + D, f(\hat{x})) \cap (-D)$ et $-d \neq 0$ ce qui contredit le fait que $\hat{x}$ est une solution proprement efficace au sens de BORWEIN. C.Q.F.D.

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant:

Soit $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $x = (x_1, x_2)$, $f(x) = x$ et $D = \mathbb{R}_+^2$ (i.e ensemble de tous les couples de réels dont les deux composantes sont positifs ou nuls). Nous avons $f(X) = X$ et $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ sont deux solutions efficaces.

Voyons si $(-1, 0)$ est une solution proprement efficace au sens de BORWEIN. Soit

$$y_k = \left(-1 + \frac{1}{k^2}, \frac{-1}{k}\right) = (y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) \text{ et } d_k = (0, 0), t_k = k \text{ pour tout } k \geq 1. \text{ Nous avons:}$$

$$f(-1, 0) = (-1, 0) \text{ et } (y_k^{(1)})^2 + (y_k^{(2)})^2 = 1 - \frac{k^2 - 1}{k^4} \leq 1$$

$$\text{donc } y_k \in Y, t_k \geq 0, d_k \in D \text{ et on a } t_k (y_k + d_k - (-1, 0)) = \left(\frac{1}{k}, -1\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, -1)$$

et $(0, -1) \in (-D)$ d'où $(0, -1) \in T(Y + D, f(-1, 0)) \cap (-D)$ et $(0, -1) \neq (-1, 0)$ donc $(-1, 0)$ n'est pas une solution proprement efficace au sens de BORWEIN.

$$\text{Faisons la même étude pour } (0, -1): \text{ Nous avons } y_k = \left(\frac{-1}{k}, -1 + \frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, -1)$$

$$\left(\frac{-1}{k}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{k^2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4}\right) \leq 1 \text{ donc } y_k \in Y \text{ pour tout } k \text{ non nul.}$$

$$\text{Soit } d_k = (0, 0) \text{ et } t_k = k. \text{ Nous avons } t_k (y_k + d_k - (0, -1)) = \left(-1, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1, 0) \text{ donc}$$

$(-1, 0) \in T(Y + D, f(0, -1)) \cap (-D)$ et $(-1, 0) \neq (0, -1)$ donc $(0, -1)$ n'est pas une solution proprement efficace au sens de BORWEIN.

A présent définissons l'efficacité propre au sens de BENSON. Pour cela nous définissons d'abord la notion de cône saillant:

Définition d'un cône saillant:

Soit $S \subset R^p$. Le cône saillant de S noté $P(S)$ est défini par:
 $P(S) = \{h : h = \sum a_i y_i, a_i \geq 0 \text{ et } y_i \in S\}$.

III. 8) Définition de l'efficacité propre au sens de BENSON

$\hat{x} \in X$ est dite solution proprement efficace au sens de BENSON du problème (P) (D est toujours un cône convexe fermé constant) si $cl(P(Y + D - f(\hat{x}))) \cap (-D) = \{0\}$
 (cl désigne la fermeture ou bien l'adhérence).

Nous pouvons facilement voir que $T(Y + D, f(\hat{x})) \subset cl(P(Y + D - f(\hat{x})))$ donc si $\hat{x}$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON alors c'est aussi une solution proprement efficace au sens de BORWEIN. La réciproque n'est pas vraie en général mais sous certaines conditions elle est vraie et avant d'énoncer ces conditions définissons quelques notions d'analyse convexe.

Définition de fonction D-convexe et d'ensemble K-convexe:

1) Soit X un ensemble convexe dans R^n et une application $f : X \rightarrow R^p$. Soit D un cône convexe dans R^p . f est dite D-convexe si $\forall (x^1, x^2) \in X^2$ et $\forall a \in [0,1]$ nous avons :

$$a f(x^1) + (1-a) f(x^2) - f(ax^1 + (1-a)x^2) \in D.$$

2) Soit K un cône convexe de R^n . Nous disons que X est K-convexe si $X+K$ est convexe.

La relation existant entre ensemble D-convexe et fonction D-convexe est donnée par la proposition suivante qui est immédiate:

Proposition:

Soit X un convexe de R^n , $f : R^n \rightarrow R^p$, D un cône convexe dans R^p .

Si f est D-convexe alors $f(X)$ est D-convexe.

L'équivalence entre l'efficacité propre au sens de BENSON et BORWEIN est donnée par le théorème suivant:

Théorème:

Si X est convexe et f est D-convexe alors l'efficacité propre au sens de BENSON est équivalente à l'efficacité propre au sens de BORWEIN.

Preuve:

Nous avons vu auparavant que sans aucune hypothèse toute solution proprement efficace au sens de BENSON est proprement efficace au sens de BORWEIN. Il reste à montrer que toute solution proprement efficace au sens de BORWEIN est proprement efficace au sens de BENSON.

Soit donc $\hat{x}$ une solution proprement efficace au sens de BORWEIN. Nous avons donc par hypothèse:

$T(Y + D, f(\hat{x})) \cap (-D) = \{0\}$, où $Y = f(X)$, de plus f est D-convexe donc $f(X)$ est D-convexe (d'après la proposition précédente) et cela veut dire que $Y + D$ est convexe.

Montrons que $T(Y + D, f(\hat{x})) = cl[P(Y + D - f(\hat{x}))]$: Il est évident que nous avons $T(Y + D, f(\hat{x})) \subset cl[P(Y + D - f(\hat{x}))]$. Soit $h \in P(Y + D - f(\hat{x}))$ donc il existe $a \geq 0$ tel que $h = a(y - f(\hat{x}))$ où $y \in Y + D$. Soit $h_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)f(\hat{x}) + \frac{1}{k}y$, comme $Y + D$ est convexe alors $h_k \in Y + D$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et de plus $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = f(\hat{x})$. Soit $t_k = ak$, $t_k(h_k - f(\hat{x})) = a(y - f(\hat{x})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a(y - f(\hat{x})) = h$ donc $h \in T(Y + D, f(\hat{x}))$ et par suite $P(Y + D - f(\hat{x})) \subset T(Y + D, f(\hat{x}))$ et puisque le cône tangent à un ensemble est toujours fermé, alors $T(Y + D, f(\hat{x}))$ est fermé et par suite nous déduisons que $cl[P(Y + D - f(\hat{x}))] \subset T(Y + D, f(\hat{x}))$ d'où l'égalité. Nous avons donc: $cl[P(Y + D - f(\hat{x}))] \cap (-D) = T(Y + D, f(\hat{x})) \cap (-D) = \{0\}$ donc $\hat{x}$ est proprement efficace au sens de BENSON. C.Q.F.D.

Dans un chapitre ultérieur nous définirons deux autres types de solution proprement efficace à savoir : solution proprement efficace au sens de GEOFFRION et au sens de KUHN-TUCHER.

Un cas particulier de programmation mutiobjectif est le problème d'optimisation au sens de PARETO qui consiste à prendre l'ordre de PARETO comme structure de domination c'est à dire $D = R_+^p$. [53]

III. 9) Définition de l'optimum de PARETO

1) $x^* \in X$ est un optimum de PARETO du problème $\begin{cases} \text{Max} [f_1(x), \dots, f_p(x)] \\ x \in X \end{cases}$ s'il n'existe pas $y \in X$ tel que $\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i(y) \geq f_i(x^*)$ et une au moins de ces inégalités est stricte.

2) $x^* \in X$ est un optimum de PARETO faible s'il n'existe pas $y \in X$ tel que: $\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i(y) > f_i(x^*)$

Si P est l'ensemble des optimums de PARETO et P_f l'ensemble des optimums de PARETO faible, il est facile de vérifier que $P \subset P_f$.

Exemples:

1) $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cup ([-1, 0] \times [0, 1])$, $x = (x_1, x_2)$
 $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$ alors nous pouvons vérifier que:
 $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ et
 $P_f = P \cup \{(l, 1) / -1 \leq l \leq 0\}$.

2) $X \subset \mathbb{R}^n$, $f_1(x) = -f_2(x)$ alors $P = \mathbb{R}^n$. En effet soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $x_0 \notin P$ alors il existe

$$\begin{aligned}
y_0 \in X / (1) & \begin{cases} f_1(y_0) \geq f_1(x_0) \\ f_2(y_0) \geq f_2(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(y_0) \geq f_1(x_0) \\ -f_1(y_0) \geq -f_1(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(y_0) \geq f_1(x_0) \\ f_1(y_0) \leq f_1(x_0) \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} f_1(y_0) = f_1(x_0) \\ f_2(y_0) = f_2(x_0) \end{cases} \text{ ce qui contredit le fait qu'une au moins des inégalités (1) est stricte, donc} \\
& x_0 \in P.
\end{aligned}$$

3) $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \cdot x_2 = 0, x_1 < 1, x_2 < 1\}$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.
Ici $P = \emptyset$ et $P_f = \{(x, 0) / x \in [0, 1[\} \cup \{(0, y) / y \in [0, 1[\}$.

Ces exemples montrent qu'en général $P \neq P_f$. Mais il existe une condition suffisante pour que $P = P_f$ celle-ci est donnée par le lemme suivant:

Lemme 1:

Si X est convexe et si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont strictement concaves alors $P = P_f$.

Preuve:

Nous avons vu auparavant que sans aucune condition nous avons toujours $P \subset P_f$ et il suffit de montrer maintenant que $P_f \subset P$. Soit $x_0 \in P_f$ si $x_0 \notin P$ alors il existe $y_0 \in X$ tel que:
 $\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i(y_0) \geq f_i(x_0)$ avec une au moins de ces inégalités strictes.

X est convexe donc $\frac{1}{2}(x_0 + y_0) \in X$ et comme les f_i sont strictement concaves alors

$$\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i\left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\right) > \frac{1}{2}f_i(x_0) + \frac{1}{2}f_i(y_0) \geq \frac{1}{2}f_i(x_0) + \frac{1}{2}f_i(x_0) = f_i(x_0)$$

donc $\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i\left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\right) > f_i(x_0)$ et ceci contredit que $x_0 \in P_f$. C.Q.F.D.

Le résultat suivant nous permet de trouver les optimums de PARETO en résolvant un problème d'optimisation unicritère:

Théorème 1:

S'il existe p nombres positifs ou nuls soient $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \dots, l_p \geq 0$ non tous nuls

$$\text{tels que: } \sum_{i=1}^p l_i f_i(x) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y) \quad (2)$$

alors x est un optimum de PARETO faible ($x \in P_f$).

S'il existe des nombres strictement positifs $l_1 > 0, l_2 > 0, \dots, l_p > 0$ vérifiant (2) alors x est un optimum de PARETO ($x \in P$).

Preuve:

soient $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \dots, l_p \geq 0$ non tous nuls tels que : $\sum_{i=1}^p l_i f_i(x) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y)$

(2). Si $x \notin P_f$ alors il existe $y^* \in X$ tel que:

$\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i(y^*) > f_i(x)$ dans ce cas $\sum_{i=1}^p l_i f_i(y^*) > \sum_{i=1}^p l_i f_i(x)$ et ceci contredit (2).

Donc $x \in P_f$.

Soient $l_1 > 0, l_2 > 0, \dots, l_p > 0$ vérifiant (2) et supposons que $x \notin P$ alors il existe $y \in X$ tel que $\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i(y) \geq f_i(x)$ avec une au moins de ces inégalités strictes.

Dans ce cas on a aussi $\sum_{i=1}^p l_i f_i(y) > \sum_{i=1}^p l_i f_i(x)$: ce qui contredit (2) C.Q.F.D.

Dans le théorème 1, nous voyons l'utilité de l'appellation « Optimum de PARETO faible » qui est due aux conditions $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \dots, l_p \geq 0$ faibles par rapport aux conditions plus fortes $l_1 > 0, l_2 > 0, \dots, l_p > 0$ caractérisant un Optimum de PARETO.

Conséquences:

1) Si $x^* \in X$ est tel que $f_1(x^*) = \max_{y \in X} f_1(y)$ alors $x^* \in P_f$.

En effet ceci correspond au cas où $l_1 = 1, l_2 = l_3 = \dots = l_p = 0$ et

$\sum_{i=1}^p l_i f_i(x^*) = f_1(x^*) = \max_{y \in X} f_1(y) = \max_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y)$ et d'après le théorème $x^* \in P_f$.

Ceci nous permet de trouver un optimum de PARETO faible en choisissant un critère que nous maximisons.

2) Si $x^* \in X$ est tel que $\sum_{i=1}^p f_i(x^*) = \max_{y \in X} \sum_{i=1}^p f_i(y)$ alors $x^* \in P$.

En effet il suffit de prendre $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_p = 1 > 0$ et d'appliquer le théorème 1.

Nous pouvons donc sélectionner les optimums de PARETO avec une combinaison convexe des critères.

Une autre manière de sélectionner les optimums de PARETO est le procédé suivant:

Soit $x_0 \in X$ tel que $\min_{1 \leq i \leq p} f_i(x_0) = \max_{x \in X} \left[\min_{1 \leq i \leq p} f_i(x) \right]$ alors x_0 est un optimum de PARETO

faible du problème $\left\{ \max_{x \in X} [f_1(x), \dots, f_p(x)] \right\}$. En effet si $x_0 \notin P_f$ alors $\exists y_0 \in X$ tel que:

$\forall i: 1 \leq i \leq p, f_i(y_0) > f_i(x_0)$. Soit $j_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\min_{1 \leq i \leq p} f_i(y_0) = f_{j_0}(y_0)$.

$\min_{1 \leq i \leq p} f_i(x_0) \leq f_{j_0}(x_0) < f_{j_0}(y_0) = \min_{1 \leq i \leq p} f_i(y_0) = F(y_0) \leq \max_{x \in X} F(x) = \max_{x \in X} \left[\min_{1 \leq i \leq p} f_i(x) \right]$ donc

$\min_{1 \leq i \leq p} f_i(x_0) < \max_{x \in X} \left[\min_{1 \leq i \leq p} f_i(x) \right]$ ce qui contredit le choix de x_0 donc $x_0 \in P_f$.

III. 10) Quelques propriétés topologiques des optimums de PARETO

1) Si les critères $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont continus sur X alors l'ensemble des optimums de PARETO faible est fermé.

2) Si en outre X est compact alors P_f est un compact non vide de X et P un sous-ensemble non vide de X .

Cependant en général P n'est pas fermé comme le montre l'exemple suivant:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cup ([0, 2] \times \{0\}), \quad f_i(x) = x_i, \quad i = 1 \text{ ou } 2 \text{ alors}$$

$$P = \{(2, 0)\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ et } x_1 \geq 0, x_2 > 0\}.$$

Ici X est compact f_1, f_2 continues sur X et pourtant P n'est pas fermé car $(1, 0) \in cl(P)$ mais $(1, 0) \notin P$.

III. 11) Cas des critères différentiables

Dans le cas où les critères sont différentiables nous avons le théorème suivant:

Théorème 2:

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, f_2, \dots, f_p$ p fonctions numériques différentiables sur X .

Si x est un optimum de PARETO du problème $\begin{cases} \text{Max} [f_1(x), \dots, f_p(x)] \\ x \in X \end{cases}$ alors il existe

$l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \dots, l_p \geq 0$ non tous nuls tel que: $\sum_{i=1}^p l_i \nabla f_i(x) = 0$ où ∇f_i représente le gradient de f_i .

Si x atteint le maximum sur X de $\sum_{i=1}^p l_i f_i$ alors nous avons $\sum_{i=1}^p l_i \nabla f_i(x) = 0$ et nous avons

en outre la condition du deuxième ordre $\sum_{i=1}^p l_i \nabla^2 f_i(x) \leq 0$ où $\nabla^2 f$ désigne la matrice

hessienne de f (c'est à dire que la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^p l_i \nabla^2 f_i(x)$ est semi définie négative).

Cependant la condition du deuxième ordre n'est pas nécessairement vérifiée par tous les optimums de PARETO: considérons par exemple le cas où $X = \mathbb{R}$ et

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad (p = 2). \text{ Nous vérifions que tout point } x \text{ est optimum de PARETO}$$

et que nous avons la condition du premier ordre $\sum_{i=1}^p l_i \nabla f_i(x) = 0$ en choisissant

$$l_1 = e^{-x} \text{ et } l_2 = e^x.$$

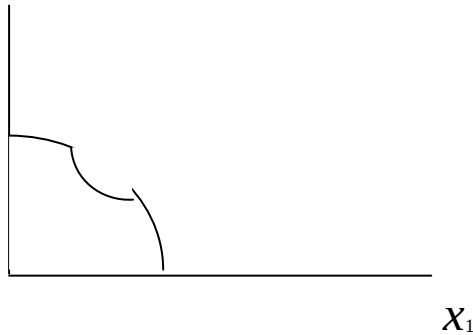
Cependant nous avons pour tout x : $l_1 f_1''(x) + l_2 f_2''(x) > 0$.

III. 12) Cas des critères concaves

D'après le théorème 1, tout état x qui maximise une combinaison convexe des critères est un optimum de PARETO faible. Réciproquement il n'est pas vrai en général qu'un optimum de PARETO faible atteigne le maximum d'au moins une combinaison convexe des critères, en effet considérons l'exemple suivant:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 3 \geq 0\} \text{ avec } f_1(x_1, x_2) = x_1, f_2(x_1, x_2) = x_2.$$

X_2



Le point $w = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)$ est un optimum de PARETO par lequel il ne passe aucun

hyperplan d'appui à X donc w n'atteint le maximum d'aucune combinaison $l_1 f_1 + l_2 f_2$.

Cependant nous avons le résultat suivant:

Théorème 3:[53]

Si X est convexe et $f_1, f_2, \dots, f_p$ concaves alors

$$x \in P_f \Leftrightarrow \exists l_1 \geq 0, \dots, l_p \geq 0 : \sum_{i=1}^p l_i f_i(x) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y).$$

Remarque:

Si $x \in P \Rightarrow x \in P_f \Rightarrow \exists l_1 \geq 0, \dots, l_p \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^p l_i f_i(x) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y)$ mais

nous ne pouvons pas affirmer que si

$$x \in P \Rightarrow \exists l_1 > 0, \dots, l_p > 0 : \sum_{i=1}^p l_i f_i(x) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y)$$

comme le montre l'exemple suivant:

Exemple:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, f_i(x) = x_i, i = 1 \text{ ou } 2.$$

$(1,0) \in P$ et les seuls multiplicateurs en ce point sont les couples $(l,0)$ où $l > 0$. En effet
 $(1,0) \in P \Rightarrow (1,0) \in P_f \Rightarrow \exists l_1 \geq 0, l_2 \geq 0 : l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 0 = \sup_{(x_1, x_2) \in X} (l_1 x_1 + l_2 x_2)$

car X est convexe et f_1, f_2 concaves. Supposons $l_1 > 0$ et $l_2 > 0$ et résolvons le problème

$\begin{cases} \text{Max}(l_1 x_1 + l_2 x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{cases}$. Nous formons la fonction de Lagrange L où :

$L = -l_1 x_1 - l_2 x_2 + m_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1)$. Les conditions de KUHN-TUCKER donnent:

$$\begin{cases} L_{x_1} = 0 \\ L_{x_2} = 0 \\ m_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -l_1 + 2m_1 x_1 = 0 \\ -l_2 + 2m_1 x_2 = 0 \\ m_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

si $m_1 = 0$ alors des premières équations nous en déduisons $l_1 = l_2 = 0$ ce qui est exclu

donc $m_1 \neq 0$. Nous aurons
$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2m_1} \\ x_2 = \frac{l_2}{2m_1} \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{l_1^2}{4m_1^2} + \frac{l_2^2}{4m_1^2} = 1 \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \\ x_2 = \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \end{cases} \Rightarrow \text{Max}(l_1 x_1 + l_2 x_2) = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} > l_1 \text{ contradiction avec}$$

$$l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 0 = \sup_{(x_1, x_2) \in X} (l_1 x_1 + l_2 x_2).$$

(N.B: Ici les conditions de KUHN-TUCKER sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité car le problème est convexe c'est à dire la fonction à maximiser est concave et la contrainte est convexe).

Supposons à présent que $l_1 = 0, l_2 > 0$ alors:

$$\sup_{(x_1, x_2) \in X} (l_1 x_1 + l_2 x_2) = \sup_{(x_1, x_2) \in X} (l_2 x_2) = l_2 \text{ et si}$$

$$l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 0 = \sup_{(x_1, x_2) \in X} (l_1 x_1 + l_2 x_2) \text{ alors } l_1 = l_2 \text{ ce qui contredit } l_1 = 0, l_2 > 0$$

donc nous avons nécessairement $l_1 > 0$ et $l_2 = 0$.

Cependant il existe un résultat qui s'énonce:

Théorème 4:[53]

Si X est un polytope (c'est à dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points) et si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont affines alors:

$$x \in P \Leftrightarrow \exists l_1 > 0, \dots, l_p > 0 : \sum_{i=1}^p l_i f_i(x) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i f_i(y) .$$

III. 13) Exemple d'application (Programmation linéaire multiobjectif)

Supposons que X soit un polyèdre borné et d'intérieur non vide dans R^m :

$X = \left\{ x \in R^m / \forall j : 1 \leq j \leq n, \langle b_j, x \rangle \leq b_j \right\}$ et considérons les critères affines

$f_1, f_2, \dots, f_p$ tel que $\forall i : 1 \leq i \leq p, f_i(x) = \langle c_i, x \rangle + g_i$

alors x est un optimum de PARETO si et seulement si (d'après le théorème 4) nous avons: il existe $l_1 > 0, l_2 > 0, \dots, l_p > 0$ tel que:

$$\sum_{i=1}^p l_i \left(\langle c_i, x \rangle + g_i \right) = \sup_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i \left(\langle c_i, y \rangle + g_i \right) \text{ ce qui implique que}$$

$$\sum_{i=1}^p l_i \langle c_i, x \rangle = \max_{y \in X} \sum_{i=1}^p l_i \langle c_i, y \rangle \text{ d'où: } \langle \sum_{i=1}^p l_i c_i, x \rangle = \max_{y \in X} \langle \sum_{i=1}^p l_i c_i, y \rangle$$

Remarquons que pour ce problème d'optimisation convexe l'hypothèse de qualification est vérifiée puisque X est d'intérieur non vide. Donc il existe des multiplicateurs de KUHN-TUCKER

$$p_1 > 0, p_2 > 0, \dots, p_n > 0 \text{ tel que:}$$

$$\begin{cases} \forall j : 1 \leq j \leq n & p_j (\langle b_j, x \rangle - b_j) = 0 \\ \sum_{i=1}^p l_i c_i + \sum_{j=1}^n p_j b_j = 0 \end{cases}$$

et ce système caractérise entièrement les optimums de PARETO.

III. 14) Deux approches de résolution par passage à un problème d'optimisation unicritère

Il existe une autre façon de passer à un problème classique d'optimisation c'est la suivante:

$$\text{Soit (P)} \begin{cases} \min [f_1(x), \dots, f_p(x)] \\ x \in X \subset R^n \end{cases} .$$

Pour ce problème, par définition $\tilde{x} \in X$ est un optimum de PARETO s'il n'existe pas $y \in X : f_i(y) \leq f_i(\tilde{x}), \forall i \ 1 \leq i \leq p$ et une au moins de ces inégalités est stricte.

Nous résolvons une suite de problèmes perturbés c'est à dire soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_p) \in R^p$ et

$$\text{soit } P_k(e) \begin{cases} \min f_k(x) \\ f_i(x) \leq e_i \ 1 \leq i \leq p \ i \neq k \\ x \in X \end{cases} , \text{ nous avons le résultat suivant qui est immédiat:}$$

Théorème:[76]

- 1) $\hat{X}$ est un optimum de PARETO de (P) si et seulement si $\hat{X}$ est solution optimale de $P_k(f(\hat{x}))$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.
- 2) Si $\hat{X}$ est l'unique solution de $P_k(f(\hat{x}))$ pour un certain $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ alors $\hat{X}$ est un optimum de PARETO de (P).

L'inconvénient de ce résultat est qu'il reste théorique donc ne permet pas de donner un moyen de trouver l'optimum de PARETO $\hat{X}$. Cependant nous verrons dans un chapitre ultérieur une méthode de calcul de $\hat{X}$ en se basant sur la résolution de problème classique d'optimisation.

Il existe une autre manière de se ramener à un problème classique d'optimisation c'est en faisant la combinaison des deux manières précédentes. En effet soient les deux problèmes: [12]

$$(1) \begin{cases} \text{Max} [f_1(x), \dots, f_p(x)] \\ x \in X \subset R^n \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} \text{Max} \langle z, (f_1(x), \dots, f_p(x)) \rangle \\ f_i(x) \geq y_i \quad 1 \leq i \leq p \\ z \in C^+ \end{cases}$$

avec $C^+ = \{z \in R^p / \forall y \geq 0, y \neq 0 \rangle z, y \rangle > 0\}$ ($\langle z, y \rangle$ désigne le produit scalaire usuelle de R^p). Nous avons le résultat suivant:

Théorème:[12]

- 1) Si X_0 est solution optimale de (2) pour un $y \in R^p$ fixé, alors X_0 est un optimum de PARETO du problème (1).
- 2) Si X_0 est un optimum de PARETO du problème (1), alors X_0 est solution optimale du problème (2) avec $y = (f_1(x_0), \dots, f_p(x_0))$.

Démonstration:

- 1) Soit X_0 une solution optimale de (2) pour un $y \in R^p$. Supposons que X_0 ne soit pas un optimum de PARETO de (1) alors il existe $x_1 \in X / \forall i \quad 1 \leq i \leq p$ nous avons : $f_i(x_1) \geq f_i(x_0)$ et $\exists i_1 \quad 1 \leq i_1 \leq p / f_{i_1}(x_1) > f_{i_1}(x_0)$. Comme X_0 est solution réalisable de (2) alors $\forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(x_0) \geq y_i$. Nous déduisons alors que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(x_1) \geq y_i$ et $\exists i_1 \in \{1, \dots, p\} / f_{i_1}(x_1) > y_{i_1}$ c'est à dire que

x_1 est une solution réalisable de (2).

Comme $\tilde{y} = (f_1(x_1) - f_1(x_0), \dots, f_p(x_1) - f_p(x_0)) \geq 0$ et $\tilde{y} \neq 0$ alors

$\langle z, \tilde{y} \rangle > 0$ ce qui donne $\sum_{i=1}^p z_i f_i(x_1) > \sum_{i=1}^p z_i f_i(x_0)$ où $z = (z_1, \dots, z_p)$ et ceci contredit le fait

que X_0 est une solution optimale de (2). D'où X_0 est un optimum de PARETO du problème (1).

2) Soit X_0 un optimum de PARETO de (1) et montrons que X_0 est solution optimale de (2) avec $y = (f_1(x_0), \dots, f_p(x_0))$. Soit X une solution réalisable de (2) donc $\forall i \ 1 \leq i \leq p \ f_i(x) \geq f_i(x_0)$. Si $\exists i_1 \ 1 \leq i_1 \leq p / f_{i_1}(x) > f_{i_1}(x_0)$ alors X_0 ne serait pas un optimum de PARETO de (1) : ce qui est impossible donc: $\forall i \ 1 \leq i \leq p \ f_i(x) = f_i(x_0)$ d'où $\sum_{i=1}^p z_i f_i(x) = \sum_{i=1}^p z_i f_i(x_0)$ c'est à dire que la fonction objectif de (2) est constante donc X_0 est solution optimale de (2). C.Q.F.D.

Remarque :

Le théorème que nous venons de démontrer nous permet de donner une procédure pour trouver tous les optimums de PARETO de (1).

En effet, nous résolvons le problème d'optimisation paramétrique (2) et soit $x_0(y)$ une solution optimale. Nous résolvons ensuite le système suivant d'inconnue $y = (y_1, \dots, y_p)$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_0(y)) = y_1 \\ f_p(x_0(y)) = y_p \end{array} \right.$$

et le théorème précédent permet d'affirmer que l'ensemble des optimums de PARETO de (1) est $\{x_0(y) / y \text{ est solution de } S\}$.

Cependant cette procédure est difficile à mettre en oeuvre en pratique étant donné la difficulté de trouver une solution optimale paramétrique et surtout la résolution du système (S) qui est fastidieuse vu son caractère non linéaire.

Donc pour appliquer la procédure, nous devons résoudre un problème d'optimisation paramétrique et deuxièmement résoudre (S) c'est à dire trouver les points fixes de la fonction vectorielle

$$f \circ x_0 = (f_1 \circ x_0, \dots, f_p \circ x_0).$$

CORLEY [11] ramène la recherche de l'optimum de PARETO à celui de trouver les points fixes d'une certaine fonction multivoque, améliorant ainsi la procédure précédente vu qu'il n'y a pas de problème d'optimisation à résoudre.

CHAPITRE IV

CARACTERISATION DES SOLUTIONS EFFICACES ET PROPREMENT EFFICACES

Dans ce quatrième chapitre nous traitons de la caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces.

Nous commençons par les notions de vecteur maximal et faiblement maximal qui généralise un peu la notion d'optimum de PARETO, en effet nous montrons que trouver les optimums de PARETO revient à trouver les vecteurs maximaux dans l'espace objectif.

Nous passons en revue une caractérisation géométrique de vecteur maximal et faiblement maximal à l'aide d'un théorème dit théorème de contact, cette caractérisation utilise l'orthant non négatif.

Autre propriété géométrique est qu'un vecteur maximal à un sous-ensemble Z de $\mathbb{R}^n$ se trouve sur la frontière de Z .

Nous pouvons aussi caractériser un vecteur maximal à l'aide de la notion de vecteur p -linéairement maximal où p est un vecteur défini positif et nous montrons qu'un vecteur est maximal si et seulement si pour tout p défini positif il est p -linéairement maximal.

Nous avons aussi un moyen analytique pour trouver un vecteur p -linéairement maximal c'est de résoudre un certain problème d'optimisation classique.

Cependant en pratique pour trouver un vecteur maximal il n'est pas commode de résoudre tous les problèmes d'optimisation classique pour trouver un vecteur p -linéairement maximal pour tout p défini positif.

C'est pour cela qu'on donne un moyen de trouver un vecteur maximal en ne résolvant qu'un seul problème d'optimisation classique. Nous obtenons ainsi une condition suffisante d'avoir un vecteur maximal ou faiblement maximal. Cependant cette condition n'est pas nécessaire et nous montrons qu'il en est ainsi sous une hypothèse de convexité directionnelle de l'ensemble sur lequel nous recherchons le vecteur maximal.

Nous nous intéressons aussi à la caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces, c'est à dire que nous voulons étendre le principe de "scalarisation" de recherche de vecteur maximal à celui de recherche de solutions efficaces et proprement efficaces, nous donnons des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour les solutions efficaces et proprement efficaces au sens de BENSON. Ces conditions portent surtout sur la structure de domination notamment lorsque celle-ci est un cône convexe aigu ou un cône convexe fermé pointé, parfois nous exigeons d'avoir une structure de domination qui soit un cône convexe fermé pointé et que l'ensemble sur lequel nous recherchons les solutions efficaces soit un polyèdre convexe pour avoir l'équivalence entre solution efficace et proprement efficace au sens de BENSON. Autre moyen de "scalarisation" pour trouver les optimums de PARETO est de rechercher la meilleure approximation au point idéal que nous appelons solution compromise et ceci en utilisant une famille de normes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant trois propriétés.

Nous aurons alors comme résultat que l'ensemble des optimums de PARETO est dense dans l'ensemble des solutions compromises. Nous donnons ensuite des conditions nécessaires ou suffisantes pour avoir des solutions proprement efficaces ou efficaces à l'aide de solution

compromise et ceci non pas seulement pour les normes précédentes mais aussi pour la norme de TCHEBYTCHEV.

Nous remarquerons que dans tous ces résultats nous exigeons principalement que l'espace objectif R_+^p doit être fermé et c'est pour cela que nous donnons une condition suffisante pour que l'espace objectif R_+^p soit fermé qui est un résultat original.

Nous abordons également une méthode de "scalarisation" généralisée basée sur la notion de représentant d'un cône convexe fermé, pour donner des conditions de solutions proprement efficaces au sens de BENSON.

Nous passons ensuite au cas où le problème d'optimisation multiobjectif est différentiable en énonçant des conditions d'optimalité analogues aux conditions de KUHN-TUCKER bien connues en optimisation classique, nous en profitons pour définir les solutions proprement efficaces au sens de KUHN-TUCKER et au sens de GEOFFRION ainsi que la relation entre ces deux notions.

Nous avons vu au chapitre 3 comment nous pouvons trouver les optimums de PARETO en résolvant un problème classique d'optimisation c'est à dire que nous avons «scalarisé» le problème.

Ce principe de «scalarisation» des optimums de PARETO peut être généralisé aux vecteurs maximaux et faiblement maximaux que nous définirons plus bas ce qui permettra d'obtenir d'autres résultats supplémentaires applicables aux optimums de PARETO.

IV. 1) Vecteurs maximaux

Soit $Z \subset \mathbb{R}^n$. Définition: [41]

1) Un vecteur $z^0 \in Z$ est appelé vecteur maximal de Z s'il n'existe pas $z \in Z / z \succ z^0$ (i.e $\forall i = 1, \dots, n \ z_i \geq z_i^0$ et $\exists j / z_j > z_j^0$) où $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$.

2) Un vecteur $z^0 \in Z$ est appelé vecteur faiblement maximal de Z s'il n'existe pas de $z \in Z / z > z^0$ (i.e $\forall i = 1, \dots, n \ z_i > z_i^0$).

De ces définitions nous déduisons aisément que si $x^* \in X$ est un optimum de PARETO du problème

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ x \in X \end{array} \right\}$ alors $(f_1(x^*), f_2(x^*), \dots, f_p(x^*))$ est un vecteur maximal de $Z = \{(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) , x \in X\}$ et réciproquement.

De même si $x^* \in X$ est un optimum de PARETO faible, alors $(f_1(x^*), f_2(x^*), \dots, f_p(x^*))$ est un vecteur faiblement maximal de l'ensemble Z précédent et réciproquement.

Ainsi résoudre un problème d'optimisation multiobjectif revient à trouver les vecteurs maximaux et faiblement maximaux dans l'ensemble $Z = \{(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) , x \in X\}$.

Propriétés géométriques des vecteurs maximaux et faiblement maximaux:

Nous pouvons caractériser géométriquement les vecteurs maximaux et faiblement maximaux à l'aide d'un théorème appelé théorème du contact. Pour cela définissons le cône positif P par:

$P = \{y \in \mathbb{R}^n / y \geq 0\}$ et le cône strictement positif P' par: $P' = \{y \in \mathbb{R}^n / y > 0\}$. Pour un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ nous définissons $S+y$ par $S+y = \{s+y / s \in S\}$.

Théorème du contact:[41]

Soit $z^0 \in Z$ et $z \in \mathbb{R}^n$.

(a) z^0 est un vecteur maximal de Z si et seulement si $Z \cap (P + z^0) = \{z^0\}$.

(b) z^0 est un vecteur faiblement maximal de Z si et seulement si $Z \cap (P' + z^0) = \emptyset$.

A l'aide du théorème du contact nous déduisons le corollaire suivant:

Corollaire:

Tout vecteur maximal de Z est nécessairement faiblement maximal.

En effet si z^0 est maximal de Z alors $P' + z^0 \subset P + z^0$ ce qui implique que

$Z \cap (P' + z^0) \subset Z \cap (P + z^0) = \{z^0\}$ et comme $z^0 \notin P' + z^0$ donc

$Z \cap (P' + z^0) = \emptyset$.

Une autre caractéristique géométrique d'un vecteur maximal est qu'il se trouve sur la frontière de Z

Corollaire:

Tout vecteur maximal de Z est sur la frontière de Z .

Une autre manière de caractériser un vecteur maximal $z^0 \in Z$ est de dire qu'il n'existe pas de points de $\bar{Z}$ se trouvant sur les demies droites issues de z^0 . Plus précisément nous avons:

Définition:

Soit $p \in \mathbb{R}^n$ défini positif (i.e $p \succ 0$). Nous disons que $z^0 \in Z$ est un vecteur p -linéairement maximal de $\bar{Z}$ s'il n'existe pas $\rho > 0 / z^0 + \rho p \in \bar{Z}$.

Théorème:[41]

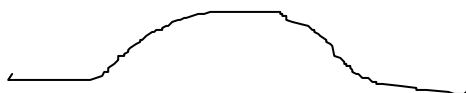
un vecteur $z^0 \in \bar{Z}$ est un vecteur maximal dans $\bar{Z}$ si et seulement si z^0 est p -linéairement maximal de Z , pour tout p défini positif.

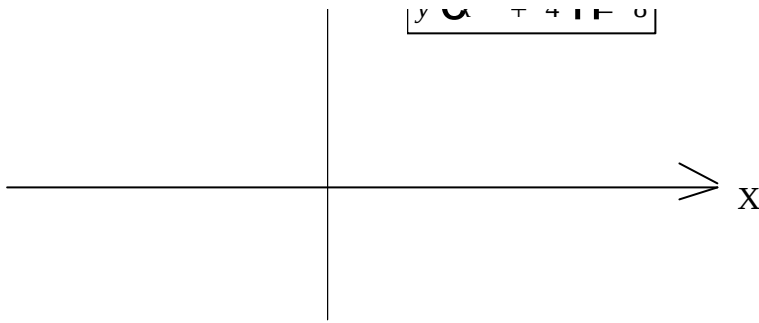
Ainsi l'existence de vecteurs maximaux de Z est assuré si nous avons:

$Z \cap \{L(p), p \succ 0\} \neq \emptyset$ où $L(p)$ est l'ensemble de tous les vecteurs p -linéairement maximaux de Z .

Exemple: $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y(x^2 + 4) \leq 8\}$

Y





D'après le théorème du contact l'ensemble des vecteurs maximaux est: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x^2 + 4) = 8 \text{ et } x \geq 0\}$ et c'est aussi l'ensemble des vecteurs faiblement maximaux. Nous remarquons que Z est non borné donc n'est pas compact et pourtant les vecteurs maximaux et faiblement maximaux existent.

Remarque:

Si z^0 est p -linéairement maximal de Z où p est défini positif alors :

$$p^T z^0 = \sup \{p^T z / z \in S\} \text{ où } S = \{z \in \bar{Z} / z = z^0 + cp, c \in \mathbb{R}\}.$$

En effet si $z = z^0 + cp \in \bar{Z} / c \leq 0$ nous avons :

$$p^T z = p^T (z^0 + cp) = p^T z^0 + c\|p\|^2 \leq p^T z^0$$

et si $c > 0 \Rightarrow z^0 + cp \notin \bar{Z}$ car z^0 est p -linéairement maximal. Donc si $z = z^0 + cp \in S \Rightarrow c \leq 0$ et $p^T z^0 \geq p^T z$ C.Q.F.D

Réciproquement si z^0 est tel que $p^T z^0 = \sup \{p^T z / z \in S\}$ et p unitaire défini positif et S défini précédemment, alors z^0 est p -linéairement maximal. En effet si z^0 n'était pas linéairement maximal, alors $\exists c > 0 / z^0 + cp \in \bar{Z}$ et dans ce cas $z^0 + cp \in S$ et de plus: $p^T (z^0 + cp) = p^T z^0 + c\|p\|^2 > p^T z^0$ car p défini positif (donc $\|p\|^2 > 0$) ce qui contredit $p^T z^0 = \sup \{p^T z / z \in S\}$. Le fait que $z^0 \in \bar{Z}$ découle du résultat suivant:

Théorème:[41]

Si z^0 est tel que $p^T z^0 = \sup \{p^T z / z \in S\}$ où p unitaire défini positif, alors $z^0 \in \bar{Z}$

En conclusion si p unitaire défini positif alors: z^0 est p -linéairement maximal de

$$Z \Leftrightarrow p^T z^0 = \sup \{p^T z / z \in S\} \text{ avec}$$

$$S = \{z \in \bar{Z} / z = z^0 + cp, c \in \mathbb{R}\}.$$

De cette façon nous avons un moyen analytique pour

trouver les vecteurs p -linéairement maximaux: c'est de résoudre le problème $\begin{cases} \text{Max } p^T z \\ z \in S \end{cases}$

et nous disons que nous avons « scalarisé » le problème de recherche de vecteurs p -linéairement maximaux.

Nous pouvons aussi « scalariser » le problème de recherche de vecteurs maximaux et faiblement maximaux en effet nous avons:

Théorème:[41]

1) si $\exists \eta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}^n / \begin{cases} \text{Max } \eta^T z = \eta^T z^0 \\ z \in Z \end{cases} \Rightarrow z^0$ est maximal dans Z .

2) si $\exists \eta \succ 0 / z^0$ soit un point de maximum strict du problème $\begin{cases} \text{Max } \eta^T z \\ z \in Z \end{cases}$

alors z^0 est un vecteur maximal de Z .

3) $\exists \eta \succ 0$, $\eta \in \mathbb{R}^n / \begin{cases} \text{Max } \eta^T z = \eta^T z^0 \\ z \in Z \end{cases} \Rightarrow z^0$ est faiblement maximal de Z .

En général la réciproque du théorème précédent n'est pas vraie sans restriction supplémentaire sur l'ensemble Z pour cela nous avons:

Définition:

Soit $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$. Nous disons que Z est p -directionnellement convexe si:

$$\forall z^1, z^2 \in Z, \forall \lambda \in [0, 1] \exists \beta \geq 0 : \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 + \beta p \in Z.$$

Remarque:

Un ensemble convexe est toujours p -directionnellement convexe $\forall p \neq 0$ car il suffit de prendre $\beta = 0$ dans la définition. Réciproquement un ensemble p -directionnellement convexe n'est pas toujours convexe comme le montre l'exemple suivant:

$$Z = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 / \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + 4z_2^2 = 4 \right\} \text{ est une ellipse non convexe et}$$

p -directionnellement convexe $\forall p \neq 0$ comme nous pouvons le vérifier aisément.

Théorème:[41]

Si Z est p -directionnellement convexe avec p défini positif et si z^0 est un vecteur maximal ou faiblement maximal de Z alors $\exists \eta$ défini positif tel que $\begin{cases} \text{Max } \eta^T z = \eta^T z^0 \\ z \in Z \end{cases}$

D'après les deux théorèmes précédents nous avons pour Z p -directionnellement convexe:

$$z^0 \text{ est faiblement maximal de } Z \Leftrightarrow \exists \eta \succ 0, \eta \in \mathbb{R}^n / \begin{cases} \text{Max } \eta^T z = \eta^T z^0 \\ z \in Z \end{cases}$$

mais nous ne pouvons pas affirmer que :

$$z^0 \text{ est maximal de } Z \Leftrightarrow \exists \eta > 0, \eta \in \mathbb{R}^n / \begin{cases} \text{Max } \eta^T z = \eta^T z^0 \\ z \in Z \end{cases}.$$

Cependant nous pouvons affirmer cette dernière proposition si Z est de nature bien particulière.

Si $Z_1 = \text{Co}\{a^1, \dots, a^n\}$ (i.e Z_1 est enveloppe convexe de $a^1, \dots, a^n$) alors nous avons:

Théorème:[41]

$$z^0 \text{ est maximal de } Z_1 \Leftrightarrow \exists \eta > 0, \eta \in \mathbb{R}^n / \begin{cases} \text{Max } \eta^T z = \eta^T z^0 \\ z \in Z_1 \end{cases}.$$

Ce dernier résultat est en particulier vrai si Z_1 est un polyèdre convexe ensemble largement utilisé en programmation linéaire mutiobjectif.

Si $Z_1 = \{x_1 a^1 + \dots + x_n a^n / x_i \geq 0 \text{ pour tout } i\}$ c'est à dire si Z_1 est le cône convexe engendré par $\{a^1, \dots, a^n\}$ alors le théorème précédent est aussi valable.

IV. 2)Caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces

Le principe de « scalarisation » du problème de recherche des vecteurs maximaux et faiblement maximaux peut être étendu plus généralement à la recherche des solutions efficaces et proprement efficaces. La caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces peut se faire comme suit:

- 1) En « scalarisant » le problème par combinaison linéaire.
- 2) Par recherche de la meilleure approximation au point idéal.
- 3) Par résolution d'un problème d' optimisation classique avec contraintes paramétriques supplémentaires.
- 4) Par une méthode de « scalarisation » généralisée.

1) Caractérisation par « scalarisation » [69]

Soit D une structure de domination qui sera supposé être un cône convexe .

$Y \subset \mathbb{R}^p$ et $E(Y, D)$ l'ensemble des solutions efficaces de Y c'est à dire:

$$y_0 \in E(Y, D) \Leftrightarrow (Y - y_0) \cap (-D) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \in D \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin D \end{cases}$$

Si D est un cône convexe fermé nous noterons $P(Y, D)$ l'ensemble des solutions proprement efficaces au sens de BENSON c'est à dire rappelons le:

$$y_0 \in P(Y, D) \Leftrightarrow \overline{P(Y + D - y_0) \cap (-D)} = \{0\}$$

Définition:

Soit $X \subset \mathbb{R}^p$. La polaire positive de X est définie par:

$$X^0 = \{x^* \in \mathbb{R}^p : \langle x, x^* \rangle \geq 0, \forall x \in X\}.$$

La polaire positive stricte de X est définie par :

$$X^{s0} = \{x^* \in \mathbb{R}^p : \langle x, x^* \rangle > 0, \forall x \in X - \{0\}\}.$$

Nous pouvons trouver une solution proprement efficace au sens de BENSON en « scalarisant » le problème de la manière suivante:

Théorème:[76]

Soit D un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^p$. Si $\exists \mu \in D^{so}$ tel que y_0 soit solution optimale de

$$\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases} \text{ alors } y_0 \text{ est solution proprement efficace au sens de BENSON.}$$

Réciproquement, une solution proprement efficace au sens de BENSON est solution du problème

$\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$ sous certaines conditions, plus précisément:

Définition:

Soit $K \subset \mathbb{R}^p$ un cône. Nous disons que K est pointé (ou pointu) si nous avons:

$$\forall x: x \in K, x \neq 0 \Rightarrow (-x) \notin K.$$

En particulier un cône pointé ne contiendra pas de sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Théorème:[76]

Si D est un cône convexe fermé pointé et Y D -convexe alors: $y_0 \in P(Y, D) \Rightarrow \exists \mu \in D^{so}$ tel

que y_0 est solution optimale de: $\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$

Comme pour les solutions proprement efficaces au sens de BENSON, nous pouvons aussi « scalariser » le problème pour trouver des solutions efficaces.

Théorème:[76]

Soit D un cône convexe. Si $\exists \mu \in D^{so}$ tel que y_0 soit solution optimale de: $\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$

alors y_0 est une solution efficace.

Nous remarquons que nous avons pas besoin que D soit fermé (comme pour les solutions proprement efficaces) pour trouver les solutions efficaces. La réciproque du théorème précédent n'est vraie que sous certaines conditions. En effet nous avons:

Définition:

Soit $K \subset \mathbb{R}^p$ un cône. Nous disons que K est aigu si sa fermeture est contenue dans un certain demi-espace ouvert. Plus précisément s'il existe $x^* \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ et si

$$H^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^p / \langle x, x^* \rangle > 0 \right\} \text{ alors } \overline{K} \subset H^+ \cup \{0\}.$$

Remarque:

En général il n'y a pas de relation entre un cône pointé et un cône aigu:

Exemples:

1) $K_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y \leq 2x \right\}$ est un cône convexe aigu et pointé.

2) $K_2 = K_1 \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x \leq y \leq x \leq 0 \right\}$ est un cône non convexe non aigu

et non pointé.

3) $K_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x \geq 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0, y \leq 0, y \neq x \right\}$ est un cône pointé non aigu.

Cependant tout cône aigu est pointé car si $\forall x \in \bar{K} \quad \langle x, x^* \rangle > 0$ ou $x = 0$ alors si K est non pointé $\exists x \neq 0 \quad x \in K \cap (-K) \Rightarrow \langle -x, x^* \rangle > 0$ d'où $\langle x, x^* \rangle < 0$ impossible. Nous avons aussi le résultat suivant:

Proposition:[76]

Soit K un cône convexe. K est aigu $\Leftrightarrow \bar{K}$ est pointé.

Donc pour un cône convexe fermé il y'a équivalence entre cône pointé et cône aigu.

Théorème:[76]

Soit D un cône convexe aigu et Y D -convexe. Si y_0 est solution efficace alors

$$\exists \mu \in D^\circ - \{0\} / y_0 \text{ est solution optimale de } \begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}.$$

Dans ce théorème la condition sur D d'être aigu ne peut pas être éliminée comme le montre l'exemple suivant:

Exemple:

$$Y = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / -y_1 \leq y_2 \leq y_1 \text{ ou } y_1 \leq y_2 \leq -y_1 \right\}$$

$$D = \left\{ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 / d_1 = 0 \right\}$$

$$D^\circ = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall (d_1, d_2) \in D \quad \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 \geq 0 \right\}$$

$$= \left\{ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall d_2 \in \mathbb{R} \quad \mu_2 d_2 \geq 0 \right\}$$

$$= \left\{ (\mu_1, 0), \mu_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{le problème } \begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}, \mu \in D^\circ - \{0\} \text{ n'a pas de solutions car } \forall \mu \in D^\circ - \{0\} \text{ nous}$$

avons:

$\langle \mu, y \rangle = \mu_1 y_1 \rightarrow -\infty$ où $\mu = (\mu_1, 0)$ et $y = (y_1, y_2)$ en effet si $\mu_1 > 0$ nous faisons tendre $y_1 \rightarrow -\infty$ et si $\mu_1 < 0$ nous faisons tendre $y_1 \rightarrow +\infty$.

D est un cône: En effet si $(d_1, d_2) \in D \Rightarrow d_2 = 0$ et par suite $\forall \lambda \geq 0 \quad \lambda(d_1, d_2) = (\lambda d_1, 0) \in D$.

D est convexe: en effet si $\lambda \in [0,1]$, $(d_1, d_2) \in D$, $(d'_1, d'_2) \in D \Rightarrow d_2 = d'_2 = 0$ d'où:
 $\lambda(d_1, d_2) + (1-\lambda)(d'_1, d'_2) = (\lambda d_1 + (1-\lambda)d'_1, 0) \in D$.

D est non pointé car $(0,1) \in D$ et $-(0,1) = (0,-1) \in D$

Comme D est un cône convexe fermé et qu'il est non pointé alors d'après la proposition précédente D n'est pas aigu.

Cependant il y'a une solution efficace en effet nous avons:

$\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in E(Y, D) \Leftrightarrow \exists y = (y_1, y_2) \in Y - \{0\} / \tilde{y} = y + d$ pour un certain $d \in D$.

$\tilde{y} = y + d \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{y}_1 = y_1 \\ \tilde{y}_2 = y_2 + d_2 \end{cases}$ Si $\tilde{y} \neq (0,0)$, nous choisissons $y_1 = \tilde{y}_1$ et y_2 tel que

$(y_1, y_2) \in Y - \{0\}$ et cela est toujours possible car si $\tilde{y}_1 > 0$ nous prenons $y_2 = \frac{1}{2}\tilde{y}_1$ d'où

$-\tilde{y}_1 < 0 < \frac{1}{2}\tilde{y}_1 < \tilde{y}_1$ c'est à dire $(y_1, y_2) = \left(\tilde{y}_1, \frac{1}{2}\tilde{y}_1\right) \in Y - \{0\}$.

Si $\tilde{y}_1 < 0$ nous prenons aussi $(y_1, y_2) = \left(\tilde{y}_1, \frac{1}{2}\tilde{y}_1\right)$ qui appartient à $Y - \{0\}$ car

$\tilde{y}_1 \leq \frac{1}{2}\tilde{y}_1 \leq -\tilde{y}_1$.

Si $\tilde{y}_1 = 0$ nous prenons $y = (0,1)$ qui est dans $Y - \{0\}$ et nous avons $\tilde{y} = y + d$ où $d = (0, \tilde{y}_2 - 1) \in D$.

Donc si $\tilde{y} \neq (0,0) \Rightarrow \tilde{y}$ n'est pas une solution efficace.

Si $\tilde{y} = (0,0)$, $\tilde{y} = y + d \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = (y_1, y_2) = (0, -d_2)$

et $y \in Y \Leftrightarrow -d_2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ donc il n'existe pas $y \neq 0$, $y \in Y / \tilde{y} = y + d$ où $d \in D$ ce qui veut dire que $\tilde{y} = (0,0)$ est la solution efficace d'où $E(Y, D) = \{(0,0)\}$.

D'autre part Y est D-convexe car j'affirme que $Y + D = \mathbb{R}^2$ (qui est convexe) en effet $Y + D \subset \mathbb{R}^2$ et si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nous choisissons $y = (x_1, y_2)$, $d = (0, d_2)$, nous avons deux cas:

1^{er} cas Si $x_2 = 0$ nous prenons $y_2 = d_2 = 0$ d'où $(x_1, x_2) = y + d \in Y + D$.

2^{ème} cas Si $x_2 \neq 0$ nous prenons $y_2 = \varepsilon|x_1|$ et $d_2 = x_2 - y_2$ avec $\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } x_2 > 0 \\ -1 & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}$ et dans

ce cas $y + d = (x_1, \varepsilon|x_1|) + (0, x_2 - \varepsilon|x_1|) = (x_1, x_2)$ d'où $(x_1, x_2) \in Y + D$.

Nous avons aussi la caractérisation suivante d'une solution efficace:

Théorème:[76]

Soit D un cône convexe aigu ouvert et Y D-convexe.

$\tilde{y}$ est solution efficace de Y $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \mu \in D^\circ - \{0\} \\ \tilde{y} \text{ solution optimale de } \begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases} \end{cases}$

Donc si nous ne supposons pas que D est ouvert alors toute solution optimale de

$$\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases} \quad \text{où } \mu \in D^\circ \text{ n'est pas nécessairement une solution efficace, cependant il y'a}$$

un cas où nous pouvons l'affirmer:

Théorème:[76]

Soit D un cône convexe aigu et $\mu \in D^\circ$. Si $\tilde{y}$ est la seule solution optimale de

$$\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$$

alors $\tilde{y}$ est une solution efficace.

Il existe un cas où il y'a équivalence entre solution efficace et solution proprement efficace et que cette solution soit optimale pour

$$\begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases} \quad \mu \in D^{so}, \text{ pour cela nous avons:}$$

Définition:

Nous disons que Y est un polyèdre convexe si Y est l'intersection finie de demi espaces fermés c'est à dire: $Y = \{x / \langle x, b^i \rangle, x \leq \beta_i \quad 1 \leq i \leq m\}$.

Théorème:

Si Y est un polyèdre convexe et D un cône convexe fermé pointé alors:
 $\tilde{y}$ est une solution efficace $\Leftrightarrow \tilde{y}$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON

$$\Leftrightarrow \exists \mu \in D^{so} / \tilde{y} \text{ soit solution optimale de } \begin{cases} \text{Min } \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$$

2) Recherche de la meilleure approximation au point idéal [69]

Revenons au problème d'optimisation multiobjectif: (P) $\begin{cases} \text{Min } f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$

avec la structure de domination $D = \mathbb{R}_+^p$ c'est à dire qu'une solution est efficace si et seulement si c'est un optimum de PARETO. Posons $Y = f(X)$.

Nous supposons que $\forall i \in \{1, \dots, p\} : \tilde{y}_i = \inf(f_i(x), x \in X) > -\infty$

Définition:

Nous appelons point idéal ou point utopique le vecteur $\bar{y} \in \mathbb{R}^p$ tel que:
 $\bar{y} \leq \tilde{y}$ où $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p)$.

Nous rappelons que la norme de Tchebychev est définie par $\forall y \in \mathbb{R}^p: \|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} \{|y_i|\}$ où $y = (y_1, \dots, y_p)$.

Considérons une famille de normes $\{\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in A\}$ où A est un ensemble d'indices minoré et non majoré. Nous supposons que cette famille de normes vérifie les trois propriétés suivantes:

Propriété P1:

$$\forall \alpha \in A, \exists M(\alpha) > 0 / \forall y \in \mathbb{R}^p: \|y\|_\infty \leq M(\alpha) \|y\|_\alpha.$$

Propriété P2:

$$M(\alpha) \|y\|_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \|y\|_\infty \quad \forall y \in \mathbb{R}^p.$$

Propriété P3:

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq y' \\ y \neq y' \end{array} \right\} \Rightarrow \|y\|_\alpha < \|y'\|_\alpha, \quad \forall \alpha \in A.$$

Exemples:

$$\text{a) } \|y\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^p |y_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in [1, +\infty[= A, \quad y = (y_1, \dots, y_p).$$

$$\text{b) } \|y\|_\alpha = \|y\|_\infty + \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^p |y_i| \right) \quad \alpha \in [1, +\infty[= A.$$

Soit $S_p = \left\{ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p: \sum_{i=1}^p \mu_i = 1, \forall i \ 1 \leq i \leq p \ \mu_i > 0 \right\}$, à l'aide de la famille

de normes précédente nous définissons la (μ, α) norme de y par:

$$\|y\|_\alpha^\mu = \|\mu \otimes y\|_\alpha \quad \text{où } \mu \in S_p \text{ avec } \mu \otimes y = (\mu_1 y_1, \dots, \mu_p y_p)$$

Définition d'une solution compromise:

Nous disons que $\bar{y} \in Y$ est une solution compromise au problème d'optimisation multiobjectif (P) s'il existe $\mu \in S_p$ tel que $\bar{y}$ soit solution optimale du problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \|y - \bar{y}\|_\alpha^\mu \\ y \in Y \end{array} \right. \quad \text{où } \bar{y} \text{ est un point idéal.}$$

Sous certaines conditions toute solution compromise est une solution proprement efficace au sens de BENSON. Plus précisément nous avons:

Théorème:[69]

Si $Y + \mathbb{R}_+^p$ est fermé et la famille de normes $\{\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in A\}$ vérifie les propriétés

P1, P2, P3 alors:

- 1) Toute solution compromise est une solution proprement efficace au sens de BENSON.
- 2) Toute solution efficace est limite d'une suite de solutions compromise.

Donc les optimums de PARETO sont obtenus à l'aide de la meilleure approximation au point idéal.

Cependant il ne faut pas croire que la limite d'une suite de solutions compromise est efficace, prenons par exemple:

$$Y = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + (y_2 - 1)^2 \leq 1\} \cup \{(y_1, y_2) : y_1 \geq 0, y_2 \geq -1\} \text{ et } \bar{y} = (-1, -1).$$

$\tilde{y} = (0, 0)$ n'est pas une solution efficace au sens de PARETO car $(0, -1) \leq (0, 0)$ et $(0, -1) \neq (0, 0)$ et $(0, -1) \in Y$.

L'ensemble des solutions efficaces (optimums de PARETO) est :

$$E(Y) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + (y_2 - 1)^2 = 1 \text{ et } -1 \leq y_1 < 0 \text{ et } 0 < y_2 \leq 1\} \cup \{(0, -1)\}.$$

Il est clair que $\tilde{y} = (0, 0) \in \overline{E(Y)}$.

J'affirme que :

$$Y + \mathbb{R}_+^2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \geq 0, y_2 \geq -1\} \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_2 \geq 1 - \sqrt{1 - y_1^2}, -1 \leq y_1 \leq 0\}$$

En effet: soient $A = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0, y_2 \geq -1\}$

$$B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 1 - \sqrt{1 - y_1^2}, -1 \leq y_1 \leq 0\}$$

Si $(y_1, y_2) \in A \Rightarrow (y_1, y_2) \in Y$ et comme $Y \subset Y + \mathbb{R}_+^2$ donc $(y_1, y_2) \in Y + \mathbb{R}_+^2$

d'où $A \subset Y + \mathbb{R}_+^2$

Si $(y_1, y_2) \in B$ et si $y_2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1 - y_1^2} \geq 1 - y_2$

$$\Rightarrow 1 - y_1^2 \geq (1 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 + (y_2 - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow (y_1, y_2) \in Y \subset Y + \mathbb{R}_+^2$$

$$\Rightarrow (y_1, y_2) \in Y + \mathbb{R}_+^2$$

Si $(y_1, y_2) \in B$ et si $y_2 > 1$ soient $y'_1 = y_1 + 1, y'_2 = y_2 - 1$

$$y_1 \geq -1 \Rightarrow y_1 + 1 \geq 0 \quad y_2 > 1 \Rightarrow y_2 - 1 > 0 \Rightarrow (y'_1, y'_2) \in \mathbb{R}_+^2$$

$$\text{et } (y_1, y_2) = (y'_1 - 1, y'_2 + 1) = (-1, 1) + (y'_1, y'_2) \in Y + \mathbb{R}_+^2$$

donc $B \subset Y + \mathbb{R}_+^2$ d'où $A \cup B \subset Y + \mathbb{R}_+^2$.

Réciproquement

$$\text{si } (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in Y + \mathbb{R}_+^2 \Rightarrow \exists (y'_1, y'_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \exists (y_1, y_2) \in Y / \begin{cases} \bar{y}_1 = y_1 + y'_1 \\ \bar{y}_2 = y_2 + y'_2 \end{cases} \quad \text{si } \bar{y}_1 \geq 0, \quad \bar{y}_2 + 1 = y_2 + 1 + y'_2$$

or $\forall (y_1, y_2) \in Y, y_2 \geq -1$

$$\begin{aligned} \text{car } (y_1, y_2) \in Y &\Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq 0 \text{ et } y_2 \geq -1 \\ \text{ou} \\ y_1^2 + (y_2 - 1)^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 \geq -1 \\ \text{ou} \\ (y_2 - 1)^2 \leq 1 - y_1^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y_2 \geq -1 \\ \text{ou} \\ |y_2 - 1| \leq \sqrt{1 - y_1^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 \geq -1 \\ \text{ou} \\ y_2 \leq \sqrt{1 - y_1^2} + 1 \text{ si } y_2 \geq 1 \Rightarrow y_2 \geq -1 \\ y_2 \geq 1 - \sqrt{1 - y_1^2} \text{ si } y_2 \leq -1 \text{ et comme } 1 - \sqrt{1 - y_1^2} \geq 0 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow y_2 \geq -1 \end{aligned}$$

d'où $\bar{y}_2 + 1 = (y_2 + 1) + y'_2 \geq 0 \Rightarrow \bar{y}_2 \geq -1 \Rightarrow (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in A$.

Si $\bar{y}_1 < 0$, $\bar{y}_1 + 1 = (y_1 + 1) + y'_1$ or $\forall (y_1, y_2) \in Y$, $y_1 \geq -1$ car :

$$(y_1, y_2) \in Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \geq 0, y_2 \geq -1 \\ \text{ou} \\ y_1^2 + (y_2 - 1)^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ \text{ou} \\ y_1^2 \leq 1 - (y_2 - 1)^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -1 \\ \text{ou} \\ y_1^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 \geq -1$$

d'où $\bar{y}_1 + 1 = (y_1 + 1) + y'_1 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq \bar{y}_1 \leq 0$. Nous avons nécessairement $y_1 \leq 0$ car si $y_1 > 0$ alors $\bar{y}_1 = y_1 + y'_1 > 0$ ce qui contredit $-1 \leq \bar{y}_1 \leq 0$.

Si $y_1 = 0 \Rightarrow \bar{y}_1 = y_1 + y'_1 = y'_1 \geq 0 \Rightarrow \bar{y}_1 \geq 0$ et d'après le cas précédent $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in A$.

Si $y_1 \neq 0$ comme $y_1 \leq 0$ alors $(y_1, y_2) \notin \{(y_1, y_2) / y_1 \geq 0, y_2 \geq -1\}$ et comme de plus

$(y_1, y_2) \in Y$ alors nécessairement nous avons : $y_1^2 + (y_2 - 1)^2 \leq 1$ ce qui donne:

$$\begin{aligned} (\bar{y}_1 - y'_1)^2 + (\bar{y}_2 - y'_2 - 1)^2 &\leq 1 \\ \bar{y}_1^2 + (\bar{y}_2 - 1)^2 + y_1'^2 - 2y'_1\bar{y}_1 + y_2'^2 - 2y'_2(\bar{y}_2 - 1) &\leq 1 \\ \bar{y}_1^2 + (\bar{y}_2 - 1)^2 + y_1'^2 + y_2'^2 &\leq 1 + 2y'_1\bar{y}_1 + 2y'_2(\bar{y}_2 - 1) \quad (1) \end{aligned}$$

Si $\bar{y}_2 \geq 1 \Rightarrow \bar{y}_2 \geq 1 - \sqrt{1 - \bar{y}_1^2}$ car $1 - \sqrt{1 - \bar{y}_1^2} \leq 1$ ce qui implique $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in B$.

Si $\bar{y}_2 \leq 1$ l'inégalité (1) donne que $\bar{y}_1^2 + (\bar{y}_2 - 1)^2 \leq 1$ d'où:

$$(\bar{y}_2 - 1)^2 \leq 1 - \bar{y}_1^2 \Rightarrow |\bar{y}_2 - 1| \leq \sqrt{1 - \bar{y}_1^2} \Rightarrow 1 - \bar{y}_2 \leq \sqrt{1 - \bar{y}_1^2} \Rightarrow \bar{y}_2 \geq 1 - \sqrt{1 - \bar{y}_1^2}$$

d'où $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in B$ donc $Y + R_+^2 \subset A \cup B$ et par conséquent $Y + R_+^2 = A \cup B$ qui est un ensemble fermé. Soit $C(Y)$ l'ensemble de toutes les solutions compromises. D'après le théorème précédent nous avons: $E(Y) \subset \overline{C(Y)}$, donc $\tilde{y} = (0, 0) \in \overline{E(Y)} \subset \overline{C(Y)}$ d'où: $\tilde{y} \in \overline{C(Y)}$ mais $\tilde{y} \notin E(Y)$.

Pour une solution compromise avec la norme de Tchebychev c'est à dire pour une solution optimale du problème $\begin{cases} \text{Min } \|y - \bar{y}\|_\infty^\mu \\ y \in Y \end{cases}$ pour un certain $\mu \in S_p$, nous avons des résultats différents du théorème précédent. Plus précisément nous avons:

Théorème:[69]

Si $Y + R_+^p$ est fermé

1) $\forall \mu \in S_p$ il existe une solution efficace qui soit compromise pour la norme de Tchebychev.

2) Si $\bar{y} < \tilde{y}$ alors toute solution efficace est solution compromise pour la norme de Tchebychev

Remarque:

Dans le théorème précédent si nous enlevons la condition $\bar{y} < \tilde{y}$ il n'est pas toujours vrai que toute solution efficace est une solution compromise pour la norme de Tchebychev.

Exemple:

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 + y_2 \geq 1, 0 \leq y_1 \leq 1\}, \quad \bar{y} = \tilde{y} = (0,0).$$

$(0,1)$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON, en effet cela veut dire que:

$$\overline{P(Y + R_+^2 - (0,1)) \cap (-R_+^2)} = \{(0,0)\}.$$

$$\text{Nous avons } Y + R_+^2 = Y \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \geq 1 \text{ et } y_2 \geq 0\}.$$

$$\overline{P(Y + R_+^2 - (0,1))} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 + y_2 \geq 0 \text{ et } y_1 \geq 0\}.$$

Cependant $(0,1)$ n'est pas une solution compromise pour la norme de Tchebychev sinon

$\exists \mu = (\mu_1, \mu_2) / \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_1 + \mu_2 = 1$ et $(0,1)$ serait solution optimale de:

$$(T) \begin{cases} \text{Min}[\text{Max}\{\mu_1 y_1, \mu_2 y_2\}] \\ y_1 + y_2 \geq 1 \text{ et } 0 \leq y_1 \leq 1 \end{cases}. \text{ Nous avons } \|\mu \otimes (0,1)\|_\infty = \text{Max}\{0.\mu_1, 1.\mu_2\} = \mu_2$$

Si $\underline{\mu_1 < \mu_2}$: $(1,0) \in Y$ et $\|\mu \otimes (1,0)\|_\infty = \text{Max}\{\mu_1, 0.\mu_2\} = \mu_1 < \mu_2 = \|\mu \otimes (0,1)\|_\infty$ ce qui contredit le fait que $(0,1)$ est solution optimale de (T).

Si $\underline{\mu_1 \geq \mu_2}$: en prenant $\alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $y_1 = \frac{1}{2}\alpha$ et $y_2 = 1 - \frac{1}{2}\alpha$ nous aurons $\mu_1 y_1 = \frac{1}{2}\mu_2 < \mu_2$

$$\text{et} \quad \mu_2 y_2 = \mu_2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right) < \mu_2 \quad \text{donc}$$

$$\|\mu \otimes (y_1, y_2)\|_\infty = \text{Max}\{\mu_1 y_1, \mu_2 y_2\} < \mu_2 = \|\mu \otimes (0,1)\|_\infty$$

donc $(0,1)$ n'est pas solution compromise pour la norme de Tchebychev.

Considérons les deux familles de normes:

$$1) \|y\|_\alpha = \|y\|_\infty + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^p |y_i| \quad \alpha \geq 1, \quad y = (y_1, \dots, y_p)$$

2) $\|y\|_\alpha = \|I_\alpha y\|_\infty$ où I_α est une matrice carrée d'ordre p définie par ses éléments:

$$(I_\alpha)_{jk} = \begin{cases} \alpha[(p-1)(\alpha-1)+1] / (\alpha-1)[(p-1)\alpha+1] & \text{si } j = k \\ \alpha / (\alpha-1)[(p-1)\alpha+1] & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

Avec ces deux familles de normes nous pouvons complètement caractériser les solutions proprement efficaces au sens de BENSON à l'aide de solutions compromises dans le cas où $\bar{y} < \tilde{y}$. Plus précisément nous avons:

Théorème:[69]

soit $Y \subset \mathbb{R}^p / Y + \mathbb{R}_+^p$ est fermé et $\bar{y} < \tilde{y}$ alors:

$$\left. \begin{array}{l} y_0 \text{ est solution proprement efficace} \\ \text{au sens de Benson} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ est solution compromise} \\ \text{avec les deux normes précédentes} \end{array} \right.$$

Remarque:

Nous voyons que dans tous ces résultats de caractérisation d'une solution proprement efficace ou efficace à l'aide de la recherche de la meilleure approximation au point idéal, nous exigeons que $Y + \mathbb{R}_+^p$ soit fermé. Cependant j'affirme que cette condition est vérifiée si $Y \subset \mathbb{R}_+^p$ et Y fermé. Nous avons:

Lemme:

Si $Y \subset \mathbb{R}_+^p$ et Y est fermé alors $Y + \mathbb{R}_+^p$ est fermé

Preuve:

soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite de $Y + \mathbb{R}_+^p$ tel que $z_n \rightarrow \bar{z}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in Y$ et $\exists d_n \geq 0 : z_n = y_n + d_n$. $(y_n)_{n \geq 0}$ est nécessairement une suite bornée car comme $0 \leq y_n \leq z_n$ (car $d_n \geq 0$) $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\|y_n\| \leq \|z_n\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et comme $(z_n)_{n \geq 0}$ converge, donc c'est une suite bornée $\Rightarrow \exists c > 0 : \forall n \geq 0 \|z_n\| \leq c$ d'où $\|y_n\| \leq \|z_n\| \leq c \Rightarrow (y_n)_{n \geq 0}$ bornée.

$(y_n)_n$ étant bornée admet une sous suite convergente : $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{y}$ soit $d = \bar{z} - \bar{y}$, comme $y_{n_k} \leq z_{n_k} \forall k$ alors en passant à la limite nous aurons $\bar{y} \leq \bar{z}$ d'où $d \geq 0$ $d_{n_k} = z_{n_k} - y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{z} - \bar{y} = d \geq 0$ et comme Y est fermé donc $\bar{y} \in Y$ d'où $\bar{z} = \bar{y} + d \in Y + \mathbb{R}_+^p$ C.Q.F.D.

3) Caractérisation par résolution d'un problème d'optimisation avec contrainte supplémentaire paramétrique [69]

$$\text{Soit le problème } (P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

à l'aide de ce problème nous définissons le problème à $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte, comme étant le problème d'optimisation scalaire suivant:

$$P_k(\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f_k(x) \\ f_i(x) \leq \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad i \neq k, \quad x \in X \end{array} \right. \quad \text{où } \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p) \in \mathbb{R}^p$$

Il existe un lien entre la recherche des optimums de PARETO pour le problème (P) et la résolution du problème à $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte.

Théorème: [69]

$\bar{x}$ est optimum de PARETO de (P) si et seulement si $\bar{x}$ est solution optimale de $P_k(\bar{e})$ ou $\bar{e} = f(\bar{x})$ et ceci $\forall k \in \{1, \dots, p\}$.

L'inconvénient de ce théorème est de résoudre p problèmes à $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte et deuxièmement il faut connaître le vecteur $\bar{e}$ donc $\bar{x}$ aussi (l'optimum de PARETO).

Nous pouvons dans certains cas ne pas résoudre les p problèmes à $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte grâce au résultat suivant:

Théorème:[69]

Si $\bar{x}$ est l'unique solution optimale de $P_k(\bar{\varepsilon})$ pour un certain $k \in \{1, \dots, p\}$ et $\bar{\varepsilon} = f(\bar{x})$ alors $\bar{x}$ est un optimum de PARETO du problème (P).

Toute solution proprement efficace au sens de BENSON avec $D = R_+^p$ est nécessairement un optimum de PARETO. En effet si $\bar{y}$ est proprement efficace au sens de BENSON alors:

$(Y - \bar{y}) \cap (-R_+^p) \subset (Y + R_+^p - \bar{y}) \cap (R_+^p) \subset \overline{P(Y + R_+^p - \bar{y})} \cap (-R_+^p) = \{0\}$ et comme $0 \in (Y - \bar{y}) \cap (-R_+^p)$ donc $(Y - \bar{y}) \cap (R_+^p) = \{0\}$ d'où $\bar{y}$ est solution efficace avec $D = R_+^p$ donc c'est un optimum de PARETO. La réciproque en général n'est pas vraie

Exemple:

$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 + y_2 \geq 0\} \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \geq 1\} \cup \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_2 \geq 1\}$

$\tilde{y} = (0,0)$ est un optimum de PARETO car $(Y - \tilde{y}) \cap (-R_+^2) = Y \cap (-R_+^2) = \{(0,0)\}$.

Cependant $\tilde{y}$ n'est pas une solution proprement efficace au sens de BENSON: En effet

$Y + R_+^2 = Y$ puisque si $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in Y + R_+^2 \Rightarrow \bar{y} = y + d$ où $y = (y_1, y_2) \in Y$ et $d = (d_1, d_2) \in R_+^2$. Nous avons $\bar{y} = (y_1 + d_1, y_2 + d_2)$.

Si $y_1 + y_2 \geq 0 \Rightarrow (y_1 + d_1) + (y_2 + d_2) \geq y_1 + y_2 \geq 0 \Rightarrow \bar{y} \in Y$.

Si $y_1 \geq 1 \Rightarrow y_1 + d_1 \geq y_1 \geq 1 \Rightarrow \bar{y} \in Y$.

Si $y_2 \geq 1 \Rightarrow y_2 + d_2 \geq y_2 \geq 1 \Rightarrow \bar{y} \in Y$ d'où $Y + R_+^2 \subset Y$ et comme $Y + R_+^2 \supset Y$ alors $Y + R_+^2 = Y$.

Le cône saillant de $Y + R_+^2 - \tilde{y}$ est $P(Y + R_+^2 - \tilde{y}) = P(Y) = \{\alpha y / y \in Y \text{ et } \alpha \geq 0\}$

et $\overline{P(Y)} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 \geq 0 \text{ ou } y_2 \geq 0\}$.

$(-1, 0) \in \overline{P(Y)} \cap (-R_+^2) \Rightarrow \overline{P(Y)} \cap (-R_+^2) \neq \{(0,0)\}$ donc $\tilde{y}$ n'est pas proprement efficace au sens de BENSON.

Montrons que $P(Y) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 > 0 \text{ ou } y_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$. Soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

Si $y_1 > 0$ et $y_2 \geq 0 \Rightarrow y_1 + y_2 > 0 \Rightarrow (y_1, y_2) \in Y \subset P(Y) \Rightarrow (y_1, y_2) \in P(Y)$.

Si $y_1 > 0$ et $y_2 < 0$ en prenant $\alpha = y_1$ nous aurons

$\left(1, \frac{y_2}{y_1}\right) \in Y$ et $\alpha \left(1, \frac{y_2}{y_1}\right) = (y_1, y_2) \Rightarrow (y_1, y_2) \in P(Y)$.

Si $y_2 > 0$ et $y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 + y_2 > 0 \Rightarrow (y_1, y_2) \in Y \subset P(Y) \Rightarrow (y_1, y_2) \in P(Y)$.

Si $y_2 > 0$ et $y_1 < 0$ en prenant $\alpha = y_2$,

$\left(\frac{y_1}{y_2}, 1\right) \in Y$ et $\alpha \left(\frac{y_1}{y_2}, 1\right) = (y_1, y_2) \Rightarrow (y_1, y_2) \in P(Y)$

Donc nous avons montré que $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 > 0 \text{ ou } y_2 > 0\} \subset P(Y)$ (1)

Réciproquement si $(y_1, y_2) \in P(Y) \Rightarrow \exists \alpha \geq 0$ et $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in Y / \begin{cases} y_1 = \alpha \tilde{y}_1 \\ y_2 = \alpha \tilde{y}_2 \end{cases}$

Si $\alpha = 0$ $(y_1, y_2) = (0, 0) \in \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 > 0 \text{ ou } y_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

$\alpha > 0$ si $\tilde{y}_1 \geq 1 \Rightarrow \alpha \tilde{y}_1 \geq \alpha > 0 \Rightarrow y_1 > 0$
 Si si $\tilde{y}_2 \geq 1 \Rightarrow \alpha \tilde{y}_2 \geq \alpha > 0 \Rightarrow y_2 > 0$
 si $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \geq 0$ on a deux cas :

si $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (0, 0) \Rightarrow (y_1, y_2) = (0, 0) \in \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 > 0 \text{ ou } y_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$

si $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \neq (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{y}_1 > 0 \\ \text{ou} \\ \tilde{y}_2 > 0 \end{cases} \text{ car sinon } \begin{cases} \tilde{y}_1 \leq 0 \\ \text{et} \\ \tilde{y}_2 \leq 0 \end{cases} \text{ alors } \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 < 0 : \text{impossible.}$

Donc si $\tilde{y}_1 > 0 \Rightarrow y_1 = \alpha \tilde{y}_1 > 0$ et si $\tilde{y}_2 > 0 \Rightarrow y_2 = \alpha \tilde{y}_2 > 0$

Donc $P(Y) \subset \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 > 0 \text{ ou } y_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\} \dots \dots \dots (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow P(Y) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / y_1 > 0 \text{ ou } y_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

Cependant BENSON et MORIN ont montré que tout optimum de PARETO est solution proprement efficace à condition que les problèmes du $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte soit stable. Plus précisément:

Définition: (Fonction de perturbation)

La fonction de perturbation $w_k : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ associée au problème $P_k(\varepsilon)$ est définie par:

$$w_k(u) = \inf \{ f_k(x) : f_i(x) - \varepsilon_i \leq u_i, i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, p, x \in X \}$$

où $u = (u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$

Définition: (Stabilité)

$P_k(\varepsilon)$ est dit stable si $w_k(0)$ est fini et $\exists M > 0 : \forall u \neq 0 \quad \frac{w_k(0) - w_k(u)}{\|u\|} \leq M$.

Autrement dit la stabilité implique que si nous perturbons les seconds membres des contraintes du problème de $k^{\text{ième}}$ objectif avec contraintes, alors la valeur de la fonction à l'optimum ne présentera pas une grande perturbation. Ceci est d'autant plus utile en pratique car en réalité nous ne connaissons pas avec exactitude la valeur du second membre.

Théorème:[69]

Si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont convexes sur un convexe non vide X et que $\bar{x}$ est un optimum de

PARETO du problème $\begin{cases} \text{Min } f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ x \in X \end{cases}$

alors : $\bar{x}$ est solution proprement efficace au sens de BENSON si et seulement si
(i.e $P(f(X) + R_+^p - f(\bar{x})) \cap (-R_+^p) = \{0\}$), $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $P_k(\bar{\varepsilon})$ est stable où
 $\bar{\varepsilon} = f(\bar{x})$.

En pratique il n'est pas toujours facile de vérifier la stabilité des problème $P_k(\varepsilon)$. Cependant si nous exigeons que certaines conditions dites contraintes de qualification soient satisfaites, alors la stabilité sera prouvée. Pour plus de détails voir : GEOFFRION [17*]

Nous pouvons caractériser une solution proprement efficace en résolvant un problème d'optimisation scalaire bien spécial: En effet nous avons le résultat:

Lemme:

Si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont convexes sur un convexe X alors $\bar{x}$ est solution proprement efficace au sens de BENSON si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\exists \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_p)$

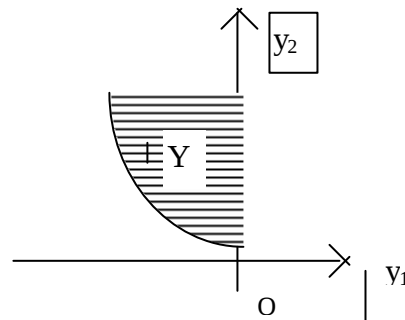
$$\mu \in R_+^{p-1} \text{ tel que } \bar{x} \text{ soit solution optimale de } \begin{cases} \text{Min } f_k(x) + \sum_{i \neq k} \mu_i f_i(x) \\ x \in X \end{cases}.$$

En fait ce lemme découle des deux premiers théorèmes du paragraphe 1.

Dans l'exemple précédent nous avons une solution efficace qui n'était pas proprement efficace au sens de BENSON. En fait nous ne pouvons pas dire que cela a eu lieu car le problème du $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte n'étant pas stable puisque Y n'étant pas un ensemble convexe et donc le théorème précédent n'est pas applicable.

A présent donnons un exemple où Y est convexe avec une solution efficace non proprement efficace au sens de BENSON:

Exemple:



$$\begin{cases} \text{Min}(f_1(y), f_2(y)) \\ y \in Y \end{cases} \text{ où } y = (y_1, y_2) \text{ et } f_1(y) = y_1, \quad f_2(y) = y_2$$

$$Y = \{(y_1, y_2) \in R^2 / y_2 \geq y_1^2, \quad y_1 \leq 0\}, \quad Y \text{ est convexe}$$

$$\text{Si } D = R_+^2, \quad \bar{y} = (0,0) \text{ est une solution efficace car } (Y - \bar{y}) \cap (-R_+^2) = \{(0,0)\}.$$

Nous vérifions aisément que $Y + R_+^2 = Y \cup R_+^2$ et que

$$\overline{P(Y + R_+^2 - \bar{y})} = \{(y_1, y_2) \in R^2 / y_2 \geq 0\}.$$

$$\overline{P(Y + R_+^2 - \bar{y})} \cap (-R_+^2) = \{(y_1, y_2) \in R^2 / y_1 \leq 0 \text{ et } y_2 = 0\} \neq \{(0,0)\} \text{ donc } \bar{y} = (0,0)$$

n'est pas une solution proprement efficace au sens de BENSON. Cela est dû au fait que l'un des problèmes à $k^{\text{ième}}$ objectif avec contrainte n'est pas stable. Vérifions-le:

$$u = (u_1, u_2), w_1(u) = \inf \{y_1 / y_2 \leq u_2, (y_1, y_2) \in Y\} \quad \bar{e} = f(0,0) = (0,0)$$

$$w_1((0,0)) = 0, w_1(u) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_2 < 0 \\ -\sqrt{u_2} & \text{si } u_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Si $u_2 > 0$ et $u_1 = 0$ alors :

$$\frac{w_1(0) - w_1(u)}{\|u\|} = \frac{\sqrt{u_2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{\sqrt{u_2}}{u_2} = \frac{1}{\sqrt{u_2}} \xrightarrow{u_2 \rightarrow 0} +\infty$$

donc il n'existe pas $M > 0 : \forall u \neq 0 \quad \frac{w_1(0) - w_1(u)}{\|u\|} \leq M$.

4) Méthode de « scalarisation » généralisée:[17]

Définition:

Soit K un cône convexe fermé de R^n . Nous appelons représentant de K toute fonction convexe positivement homogène $m: R^n \rightarrow R$ tel que $K = \{y \in R^n / m(y) \leq 0\}$.

Exemple:

Si $K = -R_+^n$ alors un représentant de K est:

$$m(y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{y_i\}, y = (y_1, \dots, y_n).$$

En général un cône convexe fermé possède plusieurs représentants et parmi ces représentants nous avons la fonction distance $d_K(y) = \inf \{\|y - x\|, x \in K\}$ qui joue un rôle important dans la caractérisation des solutions proprement efficaces à l'aide d'une scalarisation généralisée.

Définition:

Soit m un représentant de K . Nous appelons un (K, m) système de scalarisation toute famille d'application $\{\phi_t, t > 0\}$ à valeurs réelles définie sur $\underline{R^n}$ vérifiant les propriétés suivantes.

Propriété 1:

Pour chaque $t > 0$ ϕ_t est croissante par rapport à l'ordre partiel induit dans K . C'est à dire

$$\text{si } x \leq_K y \Rightarrow \phi_t(x) \leq \phi_t(y) \quad \left(\text{où } x \leq_K y \Leftrightarrow x - y \in K \right)$$

Propriété 2:

$$\forall y \in R^n \setminus K, \forall t > 0 : \phi_t(y) \geq m(y) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_t(0) = 0$$

Propriété 3:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \phi'_t(0, y) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} m(y) \text{ où } \phi'_t(0, y) = \lim_{\lambda \xrightarrow{>0} 0} \frac{\phi_t(0 + \lambda y) - \phi_t(0)}{\lambda}$$

Si K est un cône convexe fermé pointé, nous pouvons construire un (K,m) système de scalarisation de la manière suivante : $\exists e \in \mathbb{R}^n / \forall y \in K - \{0\} \langle e, y \rangle < 0$. En effet d'après la proposition du paragraphe 1 comme $\bar{K} = K$ est pointé donc K est aigu et cela veut dire $\exists x^* \neq 0 / \forall y \in \bar{K} - \{0\}, \langle x^*, y \rangle > 0$ et en prenant $e = -x^*$ nous aurons $\forall y \in K - \{0\} \langle e, y \rangle = \langle -x^*, y \rangle = -\langle x^*, y \rangle < 0$.

Soit f une fonction numérique positive croissante convexe sur R. Par exemple $f(x) = e^x$.

Nous posons $\phi_t(y) = m(y) + t f(\langle e, y \rangle)$. Vérifions que $\{\phi_t, t > 0\}$ est un (k,m) système de scalarisation.

1) $\forall t > 0$ ϕ_t est convexe comme combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes. En effet m est convexe et $h(y) = f(\langle e, y \rangle)$ aussi car:

$$\begin{aligned} h(y) &= f(\langle e, y \rangle), \quad h(\lambda y + (1-\lambda)z) = f(\langle e, \lambda y + (1-\lambda)z \rangle) \\ &= f(\lambda \langle e, y \rangle + (1-\lambda)\langle e, z \rangle) \\ &\leq \lambda f(\langle e, y \rangle) + (1-\lambda)f(\langle e, z \rangle) = \lambda h(y) + (1-\lambda)h(z). \end{aligned}$$

Si $y \leq_K z$ i.e $\exists p \in K : y = z + p : \phi_t(y) = m(z+p) + t f(\langle e, z+p \rangle)$

Si $p = 0$ et $y = z$ alors $\phi_t(y) = \phi_t(z)$

$\phi_t(y) = m(z+p) + t f(\langle e, z \rangle + \langle e, p \rangle)$ comme m est convexe positivement homogène alors

$$m(z+p) \leq m(z) + m(p), \text{ en effet : } m(z+p) = m\left(2 \frac{1}{2}(z+p)\right)$$

$$= 2 m\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}p\right) \leq 2 \left[\frac{1}{2}m(z) + \frac{1}{2}m(p) \right] = m(z) + m(p)$$

$\langle e, p \rangle < 0$ car $p \in K - \{0\} \Rightarrow \langle e, z \rangle + \langle e, p \rangle < \langle e, z \rangle$ et comme f est croissante

$$f(\langle e, z \rangle + \langle e, p \rangle) \leq f(\langle e, z \rangle) \text{ d'où}$$

$$\phi_t(y) \leq m(z) + m(p) + t f(\langle e, z \rangle) \leq m(z) + t f(\langle e, z \rangle) = \phi_t(z) \text{ donc } \phi_t \text{ est croissante sur}$$

$\mathbb{R}^n$ par rapport à l'ordre induit sur K donc ϕ_t vérifie la propriété 1

$$2) \text{ Si } y \in \mathbb{R}^n \setminus K : \phi_t(y) = m(y) + \underset{>0}{t} f(\underset{\geq 0}{\langle e, y \rangle}) \geq m(y)$$

$$\begin{aligned}\phi_t(0) &= m(0) + t f(\langle e, 0 \rangle) \\ &= m(0) + t f(0) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} m(0)\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} m(0) = m(0+0) \leq m(0) + m(0) = 2m(0) \Rightarrow m(0) \geq 0 \\ 0 \in K \text{ (car } K \text{ cone fermé) } \text{ dbù } m(0) \leq 0 \end{array} \right] \Rightarrow m(0) = 0 \quad \text{ou bien}$$

$$[m(0) = m(2.0) = 2m(0) \Rightarrow 2m(0) - m(0) = 0 \Rightarrow m(0) = 0] \text{ donc la propriété 2 est vérifiée}$$

$$\textbf{3) Soit } y \in \mathbb{R}^n, \quad \phi'_t(0, y) = \lim_{\lambda \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} 0} \frac{\phi_t(\lambda y) - \phi_t(0)}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\phi_t(\lambda y) - \phi_t(0) &= m(\lambda y) + t f(\langle e, \lambda y \rangle) - m(0) - t f(0) \\ &= \lambda m(y) + t f(\lambda \langle e, y \rangle) - t f(0)\end{aligned}$$

$$\frac{\phi_t(\lambda y) - \phi_t(0)}{\lambda} = m(y) + \frac{t}{\lambda} [f(\lambda \langle e, y \rangle) - f(0)]$$

Nous avons un résultat:

Proposition:[76]

si f est convexe propre et si $x \in \text{int}(\text{dom } f)$ alors $f'(x, d)$ existe et est fini $\forall d \in \mathbb{R}^n$.

($\text{dom } f$: domaine effectif de $f = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < +\infty\}$)

$$\left(f'(x, d) = \lim_{\lambda \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} 0} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} \right) (\text{int}(\text{dom } f): \text{intérieur de dom } f)$$

Dans notre cas nous avons une fonction numérique convexe d'une seule variable qui est

$g(\lambda) = f(\lambda \langle e, y \rangle)$ qui est propre et $\text{dom } f = \mathbb{R}$ donc $0 \in \mathring{\mathbb{R}}$ donc d'après la proposition

précédente $\exists l / \lim_{\lambda \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} 0} \frac{f(\lambda \langle e, y \rangle) - f(0)}{\lambda} = l \in \mathbb{R}$

donc $\lim_{\lambda \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} 0} \frac{\phi_t(\lambda y) - \phi_t(0)}{\lambda} = m(y) + t l$

par suite $\phi'_t(0, y) = m(y) + t l \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} m(y)$ et la propriété 3 est vérifiée.

Conclusion:

Si K est un cône convexe fermé pointé alors $\{\phi_t, t > 0\}$ est un (K, m) système de scalarisation où m est un représentant de K et $\phi_t(y) = m(y) + t f(\langle e, y \rangle)$ où $\forall y \in K - \{0\}, \langle e, y \rangle < 0$ et f : convexe croissante positive.

A présent donnons une caractérisation des solutions proprement efficaces à l'aide d'un (K, m) système de scalarisation:

Théorème:[17]

K étant un cône convexe fermé pointé soit $\{\phi_t, t > 0\}$ un (K, m) système de scalarisation .
 $y^* \in Y$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON si et seulement si y^* est solution optimale de $\min_{y \in Y} \phi'_t(0, u - y)$ pour un certain $u \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$.

Définition:

Nous disons que le (K, m) système de scalarisation est fort si $\forall y \in \mathbb{R}^n - K, m(y) \geq d_K(y)$.

Théorème:[17]

K étant un cône convexe fermé pointé soit $\{\phi_t, t > 0\}$ un (K, m) système de scalarisation.

a) Si $y^* \in Y$ est solution optimale de $\min_{y \in Y} \phi_t(u - y)$ pour un certain $u \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$.

alors y^* est une solution proprement efficace au sens de BORWEIN.

b) Supposons que le système de scalarisation est fort, alors la condition précédente est nécessaire et suffisante pour que y^* soit une solution proprement efficace au sens de BORWEIN.

IV. 3) Conditions d'optimalité d'un problème de programmation multiobjectif différentiable

Jusqu'à présent nous avons donné des conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation multiobjectif essentiellement à l'aide des techniques de scalarisation. En programmation

mathématique classique c'est à dire pour le problème
$$\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad 1 \leq i \leq m, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ h_j(x) = 0 \quad 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

nous savons que sous certaines hypothèses de qualifications de contraintes toute solution optimale vérifie les conditions de KUHN-TUCKER bien connues.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de donner les relations de KUHN-TUCKER pour un problème d'optimisation multiobjectif. Considérons le problème suivant: [71]

$$(VP) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in X \end{cases} \quad \text{où } X \subset \mathbb{R}^n \text{ est un ouvert,}$$

$f_i: X \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, g: X \rightarrow \mathbb{R}^p, h: X \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Nous supposons que toutes les fonctions ainsi définies sont différentiables sur l'ouvert X .

Définition:

Soit $Y \subset \mathbb{R}^1$. Le vecteur $q \in \mathbb{R}^1$ est appelé vecteur de convergence pour Y au point $y^\circ \in Y$ s'il existe une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans Y et une suite numérique $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs tel que : $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^\circ$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k - y^\circ}{\alpha_k} = q$.

Soient $X^\circ = \{x \in X / g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ et $C(X^\circ, x^\circ)$ l'ensemble de tous les vecteurs de convergence pour X° au point $x^\circ \in X^\circ$.

Soit: $D = \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla^T g_i(x^\circ) \cdot d \leq 0 \text{ et } \nabla^T h(x^\circ) \cdot d = 0, i \in I\}$ où

$I = \{i \in \{1, \dots, p\} / g_i(x^\circ) = 0\}$.

Définition de contrainte de qualification:

Nous disons que les fonctions g et h satisfont aux contraintes de qualification au point x° si $D \subset C(X^\circ, x^\circ)$.

Remarque:

$C(X^\circ, x^\circ)$ n'est rien d'autre que le cône tangent à X° au point x° .

Nous avons la condition nécessaire d'optimalité du problème (VP) qui s'énonce:

Théorème:[71]

Supposons que :

(i) f, g, h sont différentiables en $x^\circ \in X^\circ$

(ii) x° est un minimum de PARETO pour le problème (VP)

(iii) g et h satisfont aux contraintes de qualification au point x°

alors il existe $u^\circ \in \mathbb{R}_+^m$, $u^\circ \neq 0$, $v^\circ \in \mathbb{R}_+^p$, $w^\circ \in \mathbb{R}^q$ tel que:

$$\begin{cases} \nabla^T f(x^\circ) \cdot u^\circ + \nabla^T g(x^\circ) \cdot v^\circ + \nabla^T h(x^\circ) \cdot w^\circ = 0 & (1) \\ (g(x^\circ))^T v^\circ = 0 & (2) \\ g(x^\circ) \leq 0 & (3) \\ h(x^\circ) = 0 & (4) \end{cases}$$

Remarque:

Le théorème précédent est valable où la condition (iii) est remplacée par:

$$D_h = \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla^T h(x^\circ) \cdot d = 0\} \subset C(X^\circ, x^\circ).$$

A présent passons aux conditions suffisantes d'optimalité. Ces conditions sont analogues à celles du problème classique de programmation mathématique.

Théorème:[71]

Supposons que:

(i) f, g, h sont différentiables en $x^\circ \in X^\circ$

(ii) $f, h, \forall i \in I, g_i$ sont convexes au point x° où $I = \{i \in \{1, \dots, p\} / g_i(x^\circ) = 0\}$

(iii) $\exists u^\circ > 0$, $u^\circ \in \mathbb{R}^m$, $v^\circ \geq 0$, $v^\circ \in \mathbb{R}^{|I|}$, $w^\circ \geq 0$, $w^\circ \in \mathbb{R}^q$ tel que:

a) $\nabla^T f(x^\circ) \cdot u^\circ + \nabla^T g_I(x^\circ) \cdot v^\circ + \nabla^T h(x^\circ) \cdot w^\circ = 0$ où $g_I = (g_i)_{i \in I}$

b) $g(x^\circ) \leq 0$

c) $h(x^\circ) = 0$

alors x° est un minimum de PARETO de f sur X° .

Dans ce théorème nous pouvons remplacer la condition de convexité de f , g_I et h par une condition moins forte de pseudo-convexité.

Définition:

Soit $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

Nous disons que ϕ est pseudo-convexe au point x^* si nous avons:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n: \nabla^T \phi(x^*) \cdot (y - x^*) \geq 0 \Rightarrow \phi(y) \geq \phi(x^*).$$

Théorème:[71]

Supposons que:

(i) f , g_I , h sont différentiables au point x° , où $g_I = (g_i)_{i \in I}$

(ii) $\exists u^\circ > 0$, $u^\circ \in \mathbb{R}^m$, $v^\circ \geq 0$, $v^\circ \in \mathbb{R}^{|I|}$, $w^\circ \in \mathbb{R}^q$ tel que:

a) $(x - x^\circ)^T \cdot (\nabla^T f(x^\circ) \cdot u^\circ + \nabla^T g_I(x^\circ) \cdot v^\circ + \nabla^T h(x^\circ) \cdot w^\circ) \geq 0$

b) $g(x^\circ) \leq 0$

c) $h(x^\circ) = 0$

(iii) $(u^\circ)^T f + (v^\circ)^T g_I + (w^\circ)^T h$ est pseudo-convexe au point x°

alors x° est un minimum de PARETO de f sur X° .

Nous pouvons aussi remplacer la condition de pseudo-convexité d'une combinaison linéaire de f , g_I , h par une pseudo-convexité d'une combinaison de f , g_I et h séparément.

Théorème:[71]

Supposons que:

(i) f , g_I , h sont différentiables au point x° , où $g_I = (g_i)_{i \in I}$

(ii) $\exists u^\circ > 0$, $u^\circ \in \mathbb{R}^m$, $v^\circ \geq 0$, $v^\circ \in \mathbb{R}^p$, $w^\circ \in \mathbb{R}^q$ tel que:

a) $\sum_{i=1}^m u_i^0 f_i$ est pseudo-convexe en x°

b) $\sum_{i \in I} v_i^0 g_i$ est quasi-convexe en x^0

c) $\sum_{i=1}^q w_i^0 h_i$ est quasi-convexe en x^0

d) $\forall x \in X^0 \left[\nabla \left(\sum_i u_i^0 f_i(x^0) \right) + \nabla \left(\sum_{1 \leq i \leq p} v_i^0 g_i(x^0) \right) + \nabla \left(\sum_{1 \leq i \leq q} w_i^0 h_i(x^0) \right) \right]^T (x - x^0) \geq 0$

e) $v^0 g(x^0) = 0$

f) $g(x^0) \leq 0$

h) $h(x^0) = 0$

alors x^0 est un minimum de PARETO de f sur X^0 .

Il existe aussi des conditions de KUHN-TUCKER pour une catégorie de solutions proprement efficace: Solutions proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER.

Historiquement c'est cette solution proprement efficace qui fût définie avant toutes les autres.

Soit le problème:

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ g_m(x) \leq 0 \end{array} \right. \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, f_i et g_j sont supposés continûment différentiables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition: (solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER) [69]

x^0 est dit solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER si x^0 est un minimum de PARETO de (P') et il n'existe pas de $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall i, 1 \leq i \leq p \langle \nabla f_i(x^0), h \rangle \leq 0$ et $\langle \nabla f_k(x^0), h \rangle < 0$ pour un certain k et $\forall j \in J(x^0) = \{j / g_j(x^0) = 0\}$, $\langle \nabla g_j(x^0), h \rangle \leq 0$.

Exemple:
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = (-x, x^2 - 2x) \\ -x \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

x_0 est minimum de PARETO s'il n'existe pas $x \geq 0$ tel que $f(x) \prec f(x_0)$.

$$\begin{aligned} f(x) \prec f(x_0) &\Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq -x_0 \\ x^2 - 2x \leq x_0^2 - 2x_0 \end{cases} \text{ avec une au moins de ces 2 inégalités est stricte.} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_0 \\ x^2 - x_0^2 - 2x + 2x_0 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_0 \\ (x - x_0)(x + x_0) - 2(x - x_0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_0 \\ (x - x_0)(x + x_0 - 2) \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x_0 \\ x + x_0 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \leq x \\ x_0 \leq 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow x_0 \leq x \leq 2 - x_0 \end{aligned}$$

ce qui implique que $x_0 < 2 - x_0$ c'est à dire $\boxed{x_0 < 1}$.

Donc si $x_0 \geq 1$ alors x_0 est un minimum de PARETO.

Voyons si $x_0 = 1$ est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER:

$$\langle \nabla f_1(x_0), h \rangle = -h < 0, \forall h > 0 \text{ et } \forall h \in \mathbb{R} \langle \nabla f_2(x_0), h \rangle = (2x_0 - 2) \cdot h = 0$$

et $\langle \nabla g_1(x_0), h \rangle = -h < 0 \forall h > 0$, donc $x_0 = 1$ n'est pas proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER.

Si $x_0 > 1 \Rightarrow \begin{cases} \langle \nabla f_1(x_0), h \rangle = -h \leq 0 \quad \forall h \geq 0 \\ \langle \nabla f_2(x_0), h \rangle = (2x_0 - 2) \cdot h \leq 0 \quad \forall h \leq 0 \end{cases}$ donc dans ce cas x_0 est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER.

Définition: (Solution proprement efficace au sens de GEOFFRION)

Soit le problème : $\text{Min } f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \quad x \in X$ avec $D = \mathbb{R}_+^p$.

Nous disons que x^0 est une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION si c'est une solution efficace et il existe un réel $M > 0$ tel que pour chaque i et pour chaque $x \in X$ satisfaisant à:

$$f_i(x) < f_i(x^0), \text{ il existe au moins un } j \text{ tel que } f_j(x^0) < f_j(x) \text{ et } \frac{f_i(x^0) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^0)} \leq M.$$

Théorème: [69]

Une solution est proprement efficace au sens de GEOFFRION si et seulement si c'est une solution proprement efficace au sens de BENSON avec $D = \mathbb{R}_+^p$.

Sous certaines hypothèses de convexité toute solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER est proprement efficace au sens de GEOFFRION:

Théorème: [69]

Si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ f_i et g_j sont convexes, alors toute solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER est proprement efficace au sens de GEOFFRION.

Sans les hypothèses de convexité, le théorème précédent n'est pas toujours vrai:

Exemple:
$$\begin{cases} \text{Min}(-x^2, x^3) \\ -x \leq 0 \end{cases}$$

si $x \geq 0 \Rightarrow (-x^2, x^3) \not\prec (0,0) \Rightarrow x_0 = 0$ est un minimum de PARETO.

Nous remarquons que la fonction $f_1(x) = -x^2$ est non convexe. Ici $f_2(x) = x^3$ et par

Suite $\forall h \in \mathbb{R} \quad \langle \nabla f_1(x_0), h \rangle = -2x_0 \cdot h = 0$ et $\langle \nabla f_2(x_0), h \rangle = 3x_0^2 \cdot h = 0$, $J(x_0) = \{1\}$,
 $g_1(x) = -x$

$\langle \nabla g_1(x_0), h \rangle = -h \leq 0 \quad \forall h \geq 0$ donc il n'existe pas $h \in \mathbb{R} / \begin{cases} \langle \nabla f_1(x_0), h \rangle \leq 0 \\ \langle \nabla f_2(x_0), h \rangle \leq 0 \end{cases}$ avec une au

moins de ces inégalités stricte, donc $\boxed{x_0 = 0}$ est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER.

Si $x > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 = f_1(x_0)$ et $f_2(x) = x^3 > 0 = f_2(x_0)$

$\frac{f_1(x_0) - f_1(x)}{f_2(x) - f_2(x_0)} = \frac{-x^2}{x^3} = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $\boxed{x_0 = 0}$ n'est pas une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION.

D'autre part la réciproque du théorème précédent est vraie moyennant une qualification de contraintes.

Définition: Contrainte de qualification de KUHN-TUCKER

Nous disons que (P') satisfait aux contraintes de qualification au sens de KUHN-TUCKER au point x^0 (solution réalisable de P') si tout vecteur h satisfaisant à $\forall j \in J(x^0) = \{j / g_j(x^0) = 0\}$

$\langle \nabla g_j(x^0), h \rangle \leq 0$ est tangent à un arc différentiable contenu localement dans le domaine des solutions réalisables. En d'autres termes il existe $\bar{t} > 0$ et une fonction vectorielle $\theta : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que:

- 1) θ est différentiable en $t = 0$
- 2) $\theta(0) = x^0$
- 3) $\forall t \in [0, \bar{t}] \quad g(\theta(t)) \leq 0$ où $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$
- 4) $\exists \alpha > 0 / \frac{d\theta}{dt}(0) = \alpha h$.

Théorème:[69]

Si le problème (P') satisfait aux contraintes de qualification au sens de KUHN-TUCKER au point x^0 et si x^0 est une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION, alors x^0 est solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER.

Dans ce théorème nous remarquons qu'il n'y a pas d'hypothèses de convexité, mais si nous supprimons la condition sur les contraintes de qualification alors le théorème précédent ne sera pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant:

Exemple:

$$\begin{cases} \text{Min}(-3x_1 - 2x_2 + 3, -x_1 - 3x_2 + 1) \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{ici}$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad \text{où} \quad \begin{aligned} f_1(x) &= -3x_1 - 2x_2 + 3 \\ f_2(x) &= -x_1 - 3x_2 + 1 \end{aligned}$$

et $g_1(x) = -x_1$, $g_2(x) = -x_2$, $g_3(x) = (x_1 - 1)^3 + x_2$. $x^0 = (1, 0)$ est un minimum de PARETO car:

$$f(x) \leq f(x^0) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3 \leq 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \end{cases}.$$

Soit $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0\}$ alors nous pouvons vérifier graphiquement que $\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) \leq f(x^0)\} \cap X = \{(1, 0)\}$ donc il n'existe pas $x \in X / f(x) \prec f(x^0)$: ce qui veut dire que $x^0 = (1, 0)$ est un minimum de PARETO.

Montrons analytiquement que $\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) \leq f(x^0)\} \cap X = \{(1, 0)\}$:

Si $x = (x_1, x_2) \in X \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 \leq 3x_1 - 2(x_1 - 1)^3$ et de plus:

$$3x_1 - 2(x_1 - 1)^3 - 3 = 3(x_1 - 1) - 2(x_1 - 1)^3 = (x_1 - 1)[3 - 2(x_1 - 1)^2] \text{ nous avons aussi:}$$

$$(x_1 - 1)^3 \leq -x_2 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 \leq 0 \Rightarrow x_1 - 1 \leq 0 \text{ et d'autre part:}$$

$$3 - 2(x_1 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 - x_1 \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ car } x_1 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \geq 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ qui est vrai car } x_1 \geq 0 \text{ et } 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$$

donc $3x_1 - 2(x_1 - 1)^3 - 3 = (x_1 - 1)[3 - 2(x_1 - 1)^2] < 0$ si de plus $x_1 \neq 1$.

Ce qui veut dire que $3x_1 + 2x_2 < 3$ pour $x_1 \neq 1$ donc $x \notin \{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) \leq f(x^0)\}$.

$x^0 = (1, 0)$ est une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION en effet:

$f_1(x^0) = f_2(x^0) = 0$. Si $f_1(x) < f_1(x^0)$ et $f_2(x) > f_2(x^0)$ ce cas ne peut pas avoir lieu car si $x \in X$ nous avons vu précédemment que $3x_1 + 2x_2 \leq 3$ donc $f_1(x) \geq f_1(x^0)$: contradiction. Donc le seul cas que nous pouvons avoir est: $x \in X$, $f_2(x) < f_2(x^0)$ et $f_1(x) > f_1(x^0)$ et par suite:

$$\frac{f_2(x^0) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(x^0)} = \frac{x_1 + 3x_2 - 1}{3 - 3x_1 - 2x_2}.$$

Soit $S = \{x \in X / f_2(x) \leq f_2(x^0) \text{ et } f_1(x) \geq f_1(x^0)\} - \{x^0\}$

alors $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0, x_1 + 3x_2 \geq 1, x_1 < 1\}$.

La fonction $(x_1, x_2) \rightarrow \frac{x_1 + 3x_2 - 1}{3 - 3x_1 - 2x_2}$ est continue sur le compact S donc elle y est bornée

d'où $\exists M > 0 / \forall (x_1, x_2) \in S, \frac{x_1 + 3x_2 - 1}{3 - 3x_1 - 2x_2} \leq M$ ce qui prouve que $x^\circ = (1, 0)$ est une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION.

Voyons si x° est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER:

$$I(x^\circ) = \{2, 3\}, \begin{cases} \langle \nabla f_1(x^\circ), h \rangle \leq 0 \\ \langle \nabla f_2(x^\circ), h \rangle \leq 0 \\ \langle \nabla g_2(x^\circ), h \rangle \leq 0 \\ \langle \nabla g_3(x^\circ), h \rangle \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3h_1 + 2h_2 \geq 0 \\ h_1 + 3h_2 \geq 0 \\ h_2 \geq 0 \\ h_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 \geq 0 \\ h_2 = 0 \end{cases}$$

donc tout vecteur $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $h_1 > 0$ vérifie:

$\langle \nabla f_1(x^\circ), h \rangle < 0, \langle \nabla f_2(x^\circ), h \rangle < 0, \langle \nabla g_2(x^\circ), h \rangle \leq 0, \langle \nabla g_3(x^\circ), h \rangle \leq 0$ ce qui veut dire que $x^\circ = (1, 0)$ n'est pas une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER. Ceci est dû au fait que le problème en question ne satisfait pas aux contraintes de qualification au sens de KUHN-TUCKER au point $x^\circ = (1, 0)$, en effet si $h = (h_1, h_2)$ est tel que

$\langle \nabla g_2(x^\circ), h \rangle \leq 0$ et $\langle \nabla g_3(x^\circ), h \rangle \leq 0$ c'est à dire $\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ h n'est tangent à aucun arc

différentiable contenu localement dans X , comme nous pouvons le vérifier graphiquement (il suffit de prendre $h_1 > 0$).

Passons aux conditions d'optimalité: Si x° est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER alors c'est un optimum de PARETO et d'après le premier théorème de ce paragraphe 5, si en plus les contraintes de qualification sont vérifiées alors x° vérifie les conditions de KUHN-TUCKER. En réalité nous n'avons pas besoin de la satisfaction des contraintes de qualification car nous avons:

Théorème:[69]

Si x° est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER alors:

$\exists \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla f_i(x^\circ) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^\circ) = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^\circ) = 0 \\ \mu > 0, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

autrement dit toute solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER vérifie les conditions de KUHN-TUCKER.

Nous pouvons aussi remarquer que toute solution proprement efficace au sens de GEOFFRION x° vérifie les conditions de KUHN-TUCKER si les contraintes de qualification au sens de KUHN-TUCKER sont vérifiées au point x° et ceci en vertu d'un théorème de ce paragraphe.

Pour les conditions suffisantes nous avons le résultat suivant:

Théorème :

Si chaque $f_i, 1 \leq i \leq p$ et chaque $g_i, 1 \leq i \leq m$ est convexe et si $\exists \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla f_i(x^\circ) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^\circ) = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^\circ) = 0 \\ \mu > 0, \lambda \geq 0 \\ \text{et } x^\circ \in X \end{array} \right.$$

alors x° est une solution proprement efficace au sens de KUHN-TUCKER

Auparavant nous avons vu que tout optimum de PARETO qui vérifiait les contraintes de qualification, vérifie les conditions de KUHN-TUCKER. Nous avons le même résultat si l'optimum de PARETO vérifie les contraintes de qualification au sens de KUHN-TUCKER:

Théorème:[69]

Si le problème (P') satisfait aux contraintes de qualification au sens de KUHN-TUCKER au point $x^\circ \in X$ et si x° est un minimum de PARETO, alors:

$\exists \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla f_i(x^\circ) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^\circ) = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^\circ) = 0 \\ \mu \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

CHAPITRE V

DUALITE EN OPTIMISATION MULTIOBJECTIF

Dans ce chapitre nous abordons la dualité en optimisation multiobjectif. Nous débutons par la dualité dans les programmes convexes.

Nous définissons ce que nous appelons problème dual à partir d'un problème dit primal consistant en une minimisation au sens multiobjectif.

A travers tout ce chapitre nous définissons plusieurs types de problèmes duaux et pour chacun de ces types il faudra établir la dualité faible et la dualité forte. La dualité faible consiste à dire que la fonction objectif du primal qu'on désire minimiser est meilleure que la fonction objectif du dual et ceci pour tout couple de solutions réalisables du primal et du dual. La dualité forte exprime la possibilité d'avoir une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION du dual à partir d'une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION du primal et que les deux fonctions objectifs y sont égales.

Dans un premier temps nous considérons le problème primal qui consiste à minimiser une fonction vectorielle convexe sous contrainte d'inégalités convexes, nous définissons le dual de WOLFE consistant principalement à maximiser une fonction vectorielle ressemblant au Lagrangien classique sous contrainte principale que le gradient de ce Lagrangien soit nul.

Pour la dualité forte du dual de WOLFE une hypothèse de contrainte de qualification est exigée.

Nous passons ensuite à la dualité pour les programmes non convexes. Pour cela deux autres types de problèmes duaux sont envisagés en plus du dual de WOLFE.

Dans un premier type la fonction du dual coïncide avec celle du primal et dans un deuxième type nous considérons le problème primal avec contraintes d'égalités et d'inégalités pour lequel nous construisons le problème dual à l'aide d'une partition de l'ensemble des indices des contraintes d'inégalités et d'égalités.

Il faut remarquer que dans tous ces problèmes duaux, la dualité faible est établie en général sous une hypothèse de pseudo-convexité de la fonction objectif et de quasi-convexité des contraintes, tandis que la dualité forte est établie seulement pour obtenir des solutions efficaces du problème dual même à partir d'une solution proprement efficace du primal, donc ces résultats sont moins forts que ceux pour les programmes convexes.

Nous avons également des conditions suffisantes permettant d'affirmer que nous pouvons obtenir une solution proprement efficace du primal à l'aide d'une solution proprement efficace du dual: c'est la dualité réciproque.

Nous étudions ensuite la dualité dans le cas plus général c'est-à-dire à l'aide des structures de domination, de solutions efficaces, proprement efficaces puis nous définissons le Lagrangien vectoriel, point selle et nous donnons des résultats qui sont analogues aux résultats connus en optimisation classique par exemple dès que nous avons un point selle, nous avons aussi une solution optimale, résultat qui se généralise aux cas multiobjectif.

Nous abordons les notions de carte primale et carte duale qui permettent de définir le problème dual en toute généralité d'un problème d'optimisation multiobjectif.

V. 1) Dualité pour les programmes convexes [81]

Définissons d'abord ce que nous entendons par problèmes duaux en optimisation multiobjectif.

Définition:

Soit le problème d'optimisation:

$$(P^\circ) \begin{cases} \text{Minimiser } \psi(x) \\ x \in F \end{cases} \quad \text{où } \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, F \subset \mathbb{R}^n$$

à (P°) nous associons le problème suivant:

$$(D^\circ) \begin{cases} \text{Maximiser } \phi(x) \\ x \in G \end{cases} \quad \text{où } \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, G \subset \mathbb{R}^n$$

Nous disons que (D°) est un problème dual du problème (P°) si nous avons:

(i) dualité faible : pour tout $x \in F$ et pour tout $u \in G$

$\psi(x) \geq_P \phi(u)$ (i.e il n'existe pas $(x, u) \in F \times G : \psi_i(x) \leq \phi_i(u) \quad \forall i : 1 \leq i \leq k$ et avec au moins un j tel que $\psi_j(x) < \phi_j(u)$).

(ii) dualité forte : Si x° est une solution proprement efficace (au sens de GEOFFRION) de (P°) alors (D°) possède une solution proprement efficace (au sens de GEOFFRION) soit u° et tel que $\psi(x^\circ) = \phi(u^\circ)$.

Soit le problème d'optimisation multiobjectif:

$$(PV) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{où } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ et } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Nous considérons les optimums de PARETO comme solutions optimales de (PV).

En relation avec (PV) nous définissons aussi le problème

$$(PV\lambda) \begin{cases} \text{Minimiser } \lambda^T f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda \geq 0, \lambda^T e = 1 \quad e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k.$$

GEOFFRION [17**] a établi le résultat suivant:

Lemme:

(i) Supposons que $\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \lambda_i > 0$.

Si x° est une solution optimale de $(PV\lambda)$ alors x° est une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION du problème (PV).

(ii) Si f et g sont convexes alors x° est proprement efficace au sens de GEOFFRION de (PV) si et seulement si x° est solution optimale de $(PV\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

Remarques:

Notons que dans la partie (i) du lemme précédent, il n'y a aucune hypothèse de convexité.

Nous obtenons également des résultats similaires au lemme précédent avec les problèmes suivants:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Maximiser } \lambda^T f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda > 0, \lambda^T e = 1, e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$$

Remarquons aussi que le (i) du lemme précédent découle du premier théorème du paragraphe « Caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces » du chapitre 4: En effet comme $\lambda > 0 \Rightarrow \forall d \in \mathbb{R}_+^k - \{0\} \quad \langle \lambda, d \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i d_i > 0$ donc $d \in (\mathbb{R}_+^k)^{s_0}$ et que de plus il y'a équivalence entre solution proprement efficace au sens de BENSON et au sens de GEOFFRION.

En relation avec $(PV\lambda)$ considérons le problème d'optimisation scalaire:

$$(DV\lambda) \begin{cases} \text{Max } \lambda^T f(u) + y^T g(u) \\ \nabla \lambda^T f(u) + \nabla y^T g(u) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \lambda > 0, \lambda^T e = 1, e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k.$$

WOLFE [83] a montré que $(DV\lambda)$ est un problème dual de $(PV\lambda)$ ceci à travers le résultat suivant:

Théorème:[81]

Si x est une solution réalisable pour $(PV\lambda)$ et (u, y) solution réalisable pour $(DV\lambda)$ et si f et g sont convexes alors $\lambda^T f(x) \geq \lambda^T f(u) + y^T g(u)$.

Si x_0 est une solution optimale globale ou locale de $(PV\lambda)$ et si une contrainte de qualification est satisfaite au point x_0 [48] alors il existe $y \geq 0$ tel que $y^T g(x_0) = 0$ et (x_0, y) est une solution optimale globale, x_0 pour $(PV\lambda)$ et y pour $(DV\lambda)$.

Avec le problème (PV) considérons le problème d'optimisation multiobjectif suivant:

$$(DV) \begin{cases} \text{Maximiser } f(u) + y^T g(u).e \\ \nabla \lambda^T f(u) + \nabla y^T g(u) = 0 \\ y \geq 0, \lambda > 0, \lambda^T e = 1 \end{cases}$$

Nous montrons que (DV) est un problème dual de (PV) appelé dual de WOLFE ceci à travers les deux résultats suivants:

Théorème: (Dualité faible) [81]

Soit x une solution réalisable de (PV) et (u, λ, y) une solution réalisable de (DV).

Si f et g sont convexes alors $f(x) \geq_p f(u) + y^T g(u).e$.

Théorème: (Dualité forte) [81]

Soient f et g convexes et x_0 une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION du problème (PV) et qui vérifie une contrainte de qualification. Alors il existe (λ, y) tel que

(x_0, λ, y) est une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION de (DV) et les fonctions objectifs de (PV) et (DV) y sont égales.

A présent nous donnons quelques résultats assurant que les composantes de la fonction objectif du problème dual sont des fonctions non majorées. Ces résultats sont de simples extensions des résultats pour le problème de minimisation scalaire donnés par MANGASARIAN [48] et WOLFE [83]:

Théorème:[81]

Si (x, λ, y) est une solution réalisable du problème dual et tel que le système $g(x) + \nabla g(x).z \leq 0$ n'a pas de solutions en $z \in \mathbb{R}^n$, alors chaque composante de la fonction objectif du problème dual est une fonction non majorée dans l'ensemble des solutions duales réalisables.

Corollaire:

Si le problème (DV) possède au moins une solution réalisable (x, λ, y) et si le problème (PV) n'a pas de solutions réalisables alors si g est concave ou linéaire, le problème dual (DV) possède une fonction objectif dont chaque composante est une fonction non majorée dans l'ensemble des solutions duales réalisables.

Finalement pour les problèmes linéaires nous savons quand est ce que le problème primal (PV) n'a pas de solutions efficaces. En effet nous avons:

Théorème:[81]

Soient f et g des fonctions linéaires définies sur $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des solutions réalisables de (PV) est non vide. Si le problème dual (DV) n'a pas de solution réalisable, alors (PV) n'a pas de solutions efficaces.

V. 2) Dualité pour les programmes non convexes

Dans ce paragraphe quelques résultats de dualité des problèmes de minimisation scalaire donnés par BECTOR [3], MAHAJAN et VARTAK [47], MOND et WEIR [51] sont généralisés au problème d'optimisation multiobjectif.

Les résultats de ce paragraphe ne sont pas aussi forts que ceux du paragraphe précédent V.1 vu que la solution optimale du dual n'est pas nécessairement proprement efficace mais seulement efficace, même si nous avons au départ une solution proprement efficace pour le problème primal.

Considérons à nouveau les problèmes (PV) et (DV) définis dans le paragraphe précédent:

Théorème: (Dualité faible) [81]

Si $f + y^T g$ est pseudo-convexe alors pour toute solution réalisable de (PV) soit x , et pour toute solution réalisable de (DV) soit (u, λ, y) nous avons $f(x) \geq_p f(u) + y^T g(u)$ e

Théorème: (Dualité forte) [81]

Soit x_0 une solution proprement efficace de (PV) qui satisfait une contrainte de qualification de KUHN-TUCKER. Il existe (λ, y) tel que (x_0, λ, y) est solution réalisable de (DV) et les fonctions objectifs de (PV) et (DV) y sont égales.

Si nous avons de plus $f + y^T g$ pseudo-convexe alors (x_0, λ, y) est une solution efficace de (DV).

Considérons le problème suivant:

$$(DV1) \begin{cases} \text{Maximiser } f(u) \\ \nabla \lambda^t f(u) + \nabla y^t g(u) = 0 \\ y^t g(u) \geq 0 \\ y \geq 0, \lambda > 0, \lambda^t e = 1 \end{cases}$$

Sous certaines conditions (DV1) est un autre problème dual de (PV). En effet nous avons:

Théorème: (Dualité faible).[81]

soit x une solution réalisable de (PV) et (u, λ, y) une solution réalisable de (DV1).

Si f est pseudo-convexe et $y^T g$ est quasi-convexe alors: $f(x) \geq_p f(u)$.

Théorème: (Dualité forte) [81]

soit x_0 une solution proprement efficace de (PV) où est satisfaite une contrainte de qualification de KUHN-TUCKER. Il existe (x_0, λ, y) solution réalisable de (DV1) tel que les fonctions objectifs de (PV) et (DV1) y sont égales. Si de plus f est pseudo-convexe et $y^T g$ est quasi-convexe alors (x_0, λ, y) est une solution efficace de (DV1).

A présent nous considérons un problème dual plus général où intervient dans le problème primal aussi bien des contraintes d'égalités que d'inégalités:

$$\text{Soit le problème (PEV): } \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ g(x) \leq 0, h(x) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ sont toutes différentiables.

Soient $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $L = \{1, 2, \dots, l\}$, $I_\alpha \subset M$, $0 \leq \alpha \leq r$ tel que:

$$\forall \alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, r\} : \alpha \neq \beta, I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset \text{ et } M = \bigcup_{\alpha=0}^r I_\alpha \text{ et soit } \{J_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq r} \text{ une}$$

$$\text{partition de } L \left(\text{i.e } J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset \text{ pour } \alpha \neq \beta \text{ et } \bigcup_{\alpha=0}^r J_\alpha = L \right).$$

Remarquons que certains I_α ou J_α peuvent être vides. Si M est partitionné en r_1 sous ensembles disjoints et L est partitionné en r_2 sous ensembles disjoints, $r = \text{Max}\{r_1, r_2\}$ si bien que si $r_1 > r_2$ alors $J_\alpha = \emptyset$, $\forall \alpha > r_1$.

En relation avec (PEV) considérons le problème suivant:

$$(DEV) \begin{cases} \text{Maximiser } f(x) + \sum_{i \in I_0} y_i g_i(u) e + \sum_{j \in J_0} z_j h_j(u) e \\ \nabla \lambda^T f(u) + \nabla y^T g(u) + \nabla z^T h(u) = 0 \\ \sum_{i \in I_\alpha} y_i g_i(u) + \sum_{j \in J_\alpha} z_j h_j(u) \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r \\ y \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad \lambda^T e = 1 \end{cases}$$

alors (DEV) est un problème dual (sous certaines conditions) comme le montre les résultats suivants:

Théorème: (Dualité faible) [81]

Soit x une solution réalisable de (PEV) et (u, λ, y, z) une solution réalisable de (DEV). Si

$f + \sum_{i \in I_\alpha} y_i g_i e + \sum_{j \in J_\alpha} z_j h_j e$ est pseudo-convexe

et si $\sum_{i \in I_\alpha} y_i g_i + \sum_{j \in J_\alpha} z_j h_j \quad \alpha = 1, 2, \dots, r$ est quasi-convexe alors

$$f(x) \geq_P f(u) + \sum_{i \in I_0} y_i g_i(u) e + \sum_{j \in J_0} z_j h_j(u) e.$$

Théorème: (Dualité forte) [81]

soit x_0 une solution proprement efficace de (PEV) où est satisfaite une contrainte de qualification de KUHN-TUCKER. Il existe alors (λ, y, z) tel que (x_0, λ, y, z) soit solution réalisable de (DEV) et où les fonctions objectifs de (PEV) et (DEV) y sont égales.

Si de plus $f + \sum_{i \in I_\alpha} y_i g_i e + \sum_{j \in J_\alpha} z_j h_j e$ est pseudo-convexe et $\sum_{i \in I_\alpha} y_i g_i + \sum_{j \in J_\alpha} z_j h_j$ est

quasi-convexe $\forall \alpha = 1, 2, \dots, r$ alors (x_0, λ, y, z) est une solution efficace de (DEV).

Exemples:

$$1) \text{ soit } \begin{cases} \text{Min } (x, x^2)^t \\ x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction objectif et les contraintes sont convexes et chaque $x < 0$ est une solution proprement efficace. Le problème dual tel qu'il a été défini pour les programmes convexes s'écrit alors:

$$\begin{cases} \text{Max } (x, x^2)^t + (yx, yx)^t \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 x + y = 0 \\ \lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, y \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons $x = \frac{-(y + \lambda_1)}{2(1 - \lambda_1)}$ et comme $y \geq 0$ et $\lambda_1 \in]0, 1[$ alors $x < 0$. Les solutions

proprement efficaces vérifient $x < \frac{1}{2}y$, $\forall y \geq 0$. A chaque solution proprement efficace du primal $x_0 < 0$ correspond une solution proprement efficace du dual soit:

$\left(x_0, \lambda_1 = \frac{2x_0}{2x_0 - 1}, \lambda_2 = 1 - \lambda_1, y = 0 \right)$ et les fonctions objectifs du primal et du dual y sont égales.

$$2) \begin{cases} \text{Min} \left(-e^{-x^2}, x^2 \right)^t \\ 1 - x \leq 0 \end{cases}$$

L'unique solution proprement efficace est $x = 1$. Nous avons un problème non convexe et le dual tel qu'il a été défini pour les programmes non convexes s'écrit alors:

$$\begin{cases} \text{Max} \left(-e^{-x^2}, x^2 \right) \\ 2\lambda_1 x e^{-x^2} + 2\lambda_2 x = y \\ y(1 - x) \geq 0 \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, y \geq 0 \end{cases}$$

Le point $\left(x = 1, 0 < \lambda_1 < 1, 1 - \lambda_1, 2\lambda_1 e^{-1} + 2(1 - \lambda_1) \right)$ est une solution efficace pour le problème dual. Il y'a dualité faible puisque la fonction objectif est pseudo-convexe et les contraintes linéaires et la valeur des fonctions objectifs du primal et du dual y sont égales.

V. 3) Dualité réciproque [80]

Reprenons les deux problèmes:

$$(PV) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (DV) \begin{cases} \text{Max } f(u) + y^t g(u) e \\ \nabla \lambda^t f(u) + \nabla y^t g(u) = 0 \quad \text{où} \\ y \geq 0, \lambda > 0, \lambda^t e = 1 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $e = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que sous certaines conditions à toute solution proprement efficace du primal (PV) nous pouvons trouver une solution proprement efficace au sens de GEOFFRION du dual (DV).

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier la réciproque c'est à dire donner des conditions suffisantes qui permettent à toute solution proprement efficace du dual de trouver une solution proprement efficace du primal (PV). Pour cela nous avons le résultat suivant dû à WEIR [80]:

Théorème: [80]

Si f et g sont convexes et deux fois différentiables et si (x_0, y_0, λ_0) est une solution proprement efficace du problème dual (DV) et si de plus la matrice Hessienne $(n \times n)$

$\nabla^2 \lambda_0^T f(x_0) + \nabla^2 y_0^T g(x_0)$ est définie positive ou définie négative, alors x_0 est une solution proprement efficace du problème primal (PV).

V. 4) Dualité Lagrangienne [75]

A présent nous considérons le problème d'optimisation multiobjectif dans le cas général c'est à dire le problème qui consiste à trouver l'ensemble de toutes les solutions efficaces (ou non dominé) par rapport à un certain cône de domination. Nous définirons les notions de Carte primal, Carte duale et le Lagrangien vectoriel analogue au Lagrangien dans le cas d'optimisation scalaire. Nous énoncerons comme dans le cas scalaire le théorème des multiplicateurs de Lagrange, le théorème du point selle et le théorème de dualité.

1) Cône des points extrêmes et lemmes fondamentaux

Définition: (Cône du point extrême)

Soit Y un ensemble quelconque de $\mathbb{R}^p$ et D un cône de $\mathbb{R}^p$.

y^o est un D-point extrême de Y si $y^o \in Y$ et il n'existe pas $y^1 \in Y$, $y^1 \neq y^o$ tel que $y^o \in y^1 + D$.

Nous noterons $\text{Ext}[Y/D]$ l'ensemble de tous les D-points extrêmes de Y .

En réalité cette définition coïncide avec celle du point efficace vu au chapitre 3 relativement à une structure de domination sauf qu'ici la structure de domination est une application constante (D est un cône constant).

Donnons quelques résultats sur l'ensemble $\text{Ext}[Y/D]$:

Lemme1:

Si $A \neq \emptyset$ est un compact de $\mathbb{R}^p$ et D un cône convexe fermé tel que $\text{int}(D^*) \neq \emptyset$ alors

$A \subset \text{Ext}[A/D] + D$.

(D^* est le cône polaire positif $D^* = \{v \in \mathbb{R}^p / \langle v, d \rangle \geq 0 \ \forall d \in D\}$).

Lemme2:

$A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^p$, D un cône de $\mathbb{R}^p$ alors $\text{Ext}[(A+B)/D] \subset \text{Ext}[A/D] + \text{Ext}[B/D]$.

Ce lemme n'est rien d'autre que l'énoncé de la proposition 4 du chapitre 3.

Preuve:

Soit $y \in \text{Ext}[(A+B)/D]$, comme $\text{Ext}[Y/D] \subset Y$ alors $\exists a \in A$ et $\exists b \in B / y = a + b$

(car $\text{Ext}[(A+B)/D] \subset A+B$). Si $a \in \text{Ext}[A/D]$ et $b \in \text{Ext}[B/D] \Rightarrow y \in \text{Ext}[A/D] + \text{Ext}[B/D]$ sinon

$a \notin \text{Ext}[A/D]$ ou $b \notin \text{Ext}[B/D]$. Supposons sans perte de généralité que $a \notin \text{Ext}[A/D]$ alors

$\exists a' \in A$, $a' \neq a$ et $a \in a' + D$, dans ce cas $a + b \in a' + b + D$ et $a' + b \neq a + b$ ce qui implique

que

$a + b \notin \text{Ext}[(A+B)/D]$: contradiction.

Remarque:

Si nous définissons une relation « $\leq_D$ » dans R^p par:

$\forall x, y \in R^p \quad x \leq_D y \Leftrightarrow y - x \in D - \{0\}$ alors dans ce cas, dire que $y^\circ \in \text{Ext}[A/D]$ est

équivalent à dire qu'il n'existe pas $y^1 \in Y$ telque $y^1 \leq_D y^\circ$ donc nous pourrions penser que y° est un élément minimum de Y dans le sens suivant: $\forall y \in Y, y^\circ \leq_D y$. En fait il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant:

$Y = \{(y_1, y_2) \in R^2 / y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$, $D = R_+^2$ alors nous vérifions aisément que

$\text{Ext}[Y/D] = \{(y_1, y_2) \in R^2 / y_1^2 + y_2^2 = 1 \text{ et } -1 \leq y_1 \leq 0, -1 \leq y_2 \leq 0\}$.

$y_0 = (\alpha, \beta) \in \text{Ext}[Y/D]$ équivaut à dire qu'il n'existe pas $(y_1, y_2) \in Y / (y_1, y_2) \leq_D (\alpha, \beta)$ c'est à dire il n'existe pas $(y_1, y_2) \in Y / \alpha \geq y_1 \text{ et } \beta \geq y_2 \text{ avec } (\alpha, \beta) \neq (y_1, y_2)$.

Si nous prenons par exemple $y_0 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \in \text{Ext}[Y/D]$ et pourtant nous n'avons pas $\forall (y_1, y_2) \in Y, y_0 \leq_D (y_1, y_2)$ puisque $(-1, 0) \in Y$ mais nous n'avons pas $(-1, 0) \leq_D \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$.

Cependant j'affirme réciproquement que si D est un cône pointé et si $\forall y \in Y, y_0 \leq_D y$ alors $y_0 \in \text{Ext}[Y/D]$.

En effet si $y_0 \notin \text{Ext}[Y/D]$ alors $\exists y \in Y / y \leq_D y_0$ donc $\exists y \in Y / y_0 - y \in D - \{0\}$ et d'autre part nous avons:

$y - y_0 \in D - \{0\}$ car $\forall y \in Y, y_0 \leq_D y$ donc $y_0 - y \in D \cap (-D) = \{0\}$
(car D pointé) ce qui implique que $y_0 = y$: contradiction.

Soient $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ deux fonctions vectorielles définies sur $X \subset \mathbb{R}^n$ et soit $X' = \{x \in X / g(x) \leq 0\}$ et $Y = f[X'] = \{f(x), x \in X'\} \subset \mathbb{R}^p$, D un cône convexe.

Nous considérons le problème d'optimisation multiobjectif suivant appelé problème primal:

$$(P) \begin{cases} \text{Min}_D f(x) \\ x \in X' \end{cases} \text{ où } \text{Min}_D f(x) \text{ désigne } \text{Ext}[Y/D].$$

Remarque:

TANINO et SAWARAGI [76] considèrent un problème primal plus général à savoir

$$\begin{cases} \text{Min}_D f(x) \\ g(x) \leq_Q 0 \end{cases} \quad x \in X' \subset \mathbb{R}^n \text{ où } Q \text{ est un cône convexe fermé pointé d'intérieur non vide.}$$

Définition:

Nous disons que x° est une solution optimale de (P) (ou solution efficace) si $g(x^\circ) \leq 0$ et $x^\circ \in X$ et $f(x^\circ) \in \text{Ext}[Y/D]$.

Nous imposerons quelques conditions supplémentaires de convexité et de compacité au problème primal sans quoi il serait difficile de construire une théorie sur la dualité.

Rappelons quelques définitions sur la convexité:

Définitions:

(i) Y un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$, D un cône de $\mathbb{R}^p$.

Y est dit ensemble D -convexe si et seulement si $Y+D$ est un ensemble convexe.

(ii) $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$, D un cône de $\mathbb{R}^p$, X convexe.

f est dite fonction D -convexe si et seulement si $\forall (x^1, x^2) \in X^2, \forall \alpha \in [0, 1]:$

$$\alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2) \in f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) + D.$$

(iii) $F : X \rightarrow P(R^p)$ une fonction multivoque.
 $x \rightarrow F(x) \subset R^p$

F est D -convexe si et seulement si $\forall (x^1, x^2) \in X^2, \forall \alpha \in [0,1]$:

$$\alpha F(x^1) + (1-\alpha)F(x^2) \subset F(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) + D.$$

Nous avons le lemme suivant:

Lemme 3:

Soit X un convexe de R^n , D un cône convexe de R^p .

$f : X \rightarrow R^p$ une fonction D -convexe alors $Y = f[X]$ est D -convexe dans R^p .

Preuve:

Soient $z_1 \in Y + D$, $z_2 \in Y + D$, $\lambda \in [0,1]$ il s'agit de montrer que $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in Y + D$.

$$z_1 \in Y + D \Rightarrow \exists x_1 \in X \text{ et } \exists d_1 \in D : z_1 = f(x_1) + d_1$$

$$z_2 \in Y + D \Rightarrow \exists x_2 \in X \text{ et } \exists d_2 \in D : z_2 = f(x_2) + d_2 \text{ d'où:}$$

$$\begin{aligned} \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 &= \lambda(f(x_1) + d_1) + (1-\lambda)(f(x_2) + d_2) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) + \lambda d_1 + (1-\lambda)d_2 \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) + d \quad \text{où } d = \lambda d_1 + (1-\lambda)d_2 \end{aligned}$$

D est convexe donc $d \in D$, f est D -convexe donc:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \in f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + D \text{ ce qui implique que } \exists \tilde{d} \in D \text{ tel que:}$$

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \tilde{d} \text{ d'où:}$$

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \tilde{d} + d. \text{ } D \text{ étant un cône convexe donc } \tilde{d} + d \in D \text{ d'où}$$

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + D \in f(X) + D = Y + D. \text{ C.Q.F.D.}$$

Nous supposons par la suite que $X \neq \emptyset$ est un compact convexe de R^n , f D -convexe continue sur X , $g : R_+^m$ -convexe continue sur X (g est R_+^m -convexe si chaque g_i est convexe $1 \leq i \leq m$).

D un cône convexe fermé tel que $\text{int}(D^*) \neq \emptyset$ et $D \supset R_+^p$. Cette dernière condition est tout à fait naturelle car une solution optimale du problème primal devrait être choisie parmi les optimums de PARETO. Remarquons que les deux dernières conditions ne sont pas exigées par TANINO et SAWARAGI dans le problème cité dans la remarque précédente.

Lemme 4:

Y est un D -convexe de R^p , D un cône convexe de R^p tel que $\text{int}(D^*) \neq \emptyset$, si $y^o \in Y$ vérifie $\overline{[Y + D - y^o]} \cap (-\overline{D}) = \{0\}$ si et seulement si il existe $\bar{v} \in \text{int } D^*$ tel que $\forall y \in Y \langle \bar{v}, y^o \rangle \leq \langle \bar{v}, y \rangle$.

($[Y + D - y^o]$ désigne l'ensemble $\{\alpha(y + d - y^o) \text{ tel que } y \in Y, d \in D \text{ et } \alpha \geq 0\}$).

Remarquons que la condition $\overline{[Y + D - y^o]} \cap (-\overline{D}) = \{0\}$ veut dire que y^o est solution proprement efficace au sens de BENSON et ce dernier lemme ramène la recherche d'une

solution proprement efficace au sens de BENSON à la résolution d'un problème d'optimisation classique

$$\begin{cases} \text{Min} \langle \bar{v}, y \rangle \\ y \in Y \end{cases} \text{ où } \bar{v} \in \text{int } D^* .$$

TANINO et SAWARAGI [75] donnent une démonstration de ce lemme, alors que moi-même je propose de le démontrer de la façon suivante :

La condition est suffisante car comme nous l'avons vu dans le premier théorème du paragraphe

« Caractérisation par scalarisation » du chapitre 4, toute solution optimale de $\begin{cases} \text{Min} \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$

où $\mu \in D^{s0}$ est solution proprement efficace au sens de BENSON.

Réciproquement comme $\text{int}(D^*) \neq \emptyset$ alors D est aigu d'après la proposition suivante:

Proposition: [76]

Soit K un cône de $\mathbb{R}^n$. $\text{int}(K^*) \neq \emptyset \Leftrightarrow K$ est aigu. et par conséquent $\bar{D}$ est pointé d'après une proposition du paragraphe « Caractérisation par scalarisation » du chapitre 4. Comme Y est D -convexe alors Y est $\bar{D}$ -convexe car:

$$\left. \begin{aligned} Y + \bar{D} &= (Y + D) + \bar{D} \quad , \quad Y + D \text{ convexe} \\ D\text{-convexe} &\Rightarrow \bar{D}\text{-convexe} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (Y + D) + \bar{D} \text{ est convexe} .$$

D'après le deuxième théorème du paragraphe « Caractérisation par scalarisation » du chapitre 4 si y^0 est solution proprement efficace au sens de BENSON alors $\exists \mu \in D^{s0}$ tel que: y^0 soit

optimale du problème $\begin{cases} \text{Min} \langle \mu, y \rangle \\ y \in Y \end{cases}$ et il est clair que $\mu \in \text{int } D^*$. C.Q.F.D .

2) Carte primal et multiplicateurs de Lagrange :

Rappelons le problème primal

$$(P) \begin{cases} \text{Min}_D f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases} \quad \begin{aligned} g(x) &= (g_1(x), \dots, g_m(x)) \\ f(x) &= (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

Nous considérons (P) comme un cas particulier d'une famille de problèmes perturbés (P_u) :

soit $\mu \in \mathbb{R}^m$

$$(P_u) \begin{cases} \text{Min}_D f(x) \\ g(x) \leq u \\ x \in X \end{cases} \quad \text{il est évident que pour } u = 0 \text{ nous retrouvons le problème (P) .}$$

Notons $X(u) = \{x \in X / g(x) \leq u\}$

$$Y(u) = f[X(u)] = \{f(x) / x \in X(u)\}$$

$$\Gamma = \{u \in \mathbb{R}^m / X(u) \neq \emptyset\}$$

$$W(u) = \text{EXT}[Y(u) / D]$$

$$V(u) = f^{-1}[W(u)] = \{x \in X(u) / f(x) \in W(u)\}$$

Résoudre (P) revient à déterminer $W(0)$ et $V(0)$.

Définition:

La fonction multivoque $\underline{W}$ est appelée carte primale.

Le résultat suivant donne le lien qui existe entre $Y(u)$ et $W(u)$.

Proposition1:[75]

$$\underline{W}(u) + D = Y(u) + D.$$

Preuve:

$$W(U) = \text{EXT}[Y(u) / D] \subset Y(u) \Rightarrow W(u) + D \subset Y(u) + D$$

$Y(u) \neq \emptyset$ et est compact car image directe d'une fonction continue par un compact et d'après le lemme1 $Y(u) \subset \text{EXT}[Y(u) / D] + D$ d'où $Y(u) + D \subset W(u) + \underline{D} + D$

$$\parallel \\ D$$

car D cône convexe.

Grâce à cette proposition nous pouvons établir des propriétés de $W(u)$ à partir de celle de $Y(u)$ comme nous le voyons dans les propositions 2, 3 et 4 ci-après:

Proposition 2: [75]

Pour chaque $u \in \Gamma$, $W(u)$ est un ensemble D -convexe de R^P .

Preuve:

Comme f est D -convexe, X convexe alors d'après le lemme3 $Y(u)$ est D -convexe, donc $Y(u) + D$ est convexe et d'après la proposition précédente $W(u) + D$ est convexe donc $W(u)$ est D -convexe.

Proposition 3: [75]

$W(u)$ est D monotone c'est à dire $\forall u^1, u^2 \in \Gamma : u^1 \leq u^2$ alors $W(u^1) \subset W(u^2) + D$.

Preuve:

Si $u^1 \leq u^2 \Rightarrow \{x \in X : g(x) \leq u^1\} \subset \{x \in X : g(x) \leq u^2\}$ c'est à dire

$$X(u^1) \subset X(u^2) \Rightarrow f[X(u^1)] \subset f[X(u^2)] \text{ d'où } Y(u^1) \subset Y(u^2).$$

De plus $W(u^1) \subset Y(u^1) \subset Y(u^2) \subset W(u^2) + D$ C.Q.F.D.

Proposition 4: [75]

W est une fonction multivoque D -convexe.

Preuve:

En vertu de la proposition1, il suffit de montrer que:

$$\forall u^1, u^2 \in \Gamma, \forall \alpha \in [0, 1] \quad \alpha Y(u^1) + (1 - \alpha)Y(u^2) \subset Y[\alpha u^1 + (1 - \alpha)u^2] + D$$

car

$$\alpha W(u^1) + (1-\alpha) W(u^2) \subset \alpha [W(u^1) + D] + (1-\alpha) [W(u^2) + D] = \alpha [Y(u^1) + D] + (1-\alpha) [Y(u^2) + D]$$

$$\alpha W(u^1) + (1-\alpha) W(u^2) \subset \alpha [Y(u^1) + D] + (1-\alpha) [Y(u^2) + D] = \alpha Y(u^1) + (1-\alpha) Y(u^2) + D$$

$$\subset Y[\alpha u^1 + (1-\alpha)u^2] + D + D$$

$$\alpha W(u^1) + (1-\alpha) W(u^2) \subset Y[\alpha u^1 + (1-\alpha)u^2] + D = W[\alpha u^1 + (1-\alpha)u^2] + D .$$

Montrons donc que $\alpha Y(u^1) + (1-\alpha) Y(u^2) \subset Y[\alpha u^1 + (1-\alpha)u^2] + D$.

Soit $y \in \alpha Y(u^1) + (1-\alpha) Y(u^2) \Rightarrow \exists x^1 \in X, x^2 \in X : g(x^1) \leq u^1, g(x^2) \leq u^2$ et

$y = \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2), X$ est convexe $\Rightarrow \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2 \in X$.

g est R_+^m convexe $\Rightarrow g[\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2] \leq \alpha g(x^1) + (1-\alpha) g(x^2) \leq \alpha u^1 + (1-\alpha) u^2$.

Donc $\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2 \in X[\alpha u^1 + (1-\alpha) u^2] \Rightarrow f[\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2] \in Y[\alpha u^1 + (1-\alpha) u^2]$

f est convexe $\Rightarrow \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2) \in f[\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2] + D$

$$\Rightarrow y \in Y[\alpha u^1 + (1-\alpha) u^2] + D \quad \text{C.Q.F.D.}$$

A présent énonçons le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (P)

Théorème A: [75]

Si $\bar{x}$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON du problème

$$(P) \begin{cases} \text{Min}_D f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)] \\ \text{et} \\ f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$$

si $\exists x' \in X : g(x') < 0$ (condition de la contrainte de qualification de Slater) alors il existe

$\bar{\lambda} \in R_+^m$ tel que : $f(\bar{x}) \in \text{Ext}[\{f(x) + \langle \bar{\lambda}, g(x) \rangle / x \in X\} / D]$ et $\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0$

où $\langle \lambda, g(x) \rangle = (\langle \lambda, g(x) \rangle, \langle \lambda, g(x) \rangle, \dots, \langle \lambda, g(x) \rangle) \in R^p$.

Il existe une autre version plus générale du théorème des multiplicateurs de Lagrange [76] (TANINO, SAWARAGI, NAKAYAMA) pour le problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min}_D f(x) \\ g(x) \leq_Q 0 \\ x \in X \subset R^n \end{cases} \quad \text{où } X' \text{ est un convexe compact non vide de } R^n,$$

$D \subset R^p, Q \subset R^n$ sont deux cônes convexes fermés pointés d'intérieurs non vides f est continue et D -convexe, g est continue et Q convexe.

Théorème des multiplicateurs de Lagrange pour (P'): [76]

Si $\bar{x}$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON de (P_1) et si est satisfaite la contrainte de qualification de Slater (i.e $\exists x' \in X' : g(x') <_Q 0$) alors il existe une matrice $\bar{\Lambda}$ d'ordre $(p \times m)$ tel que $\bar{\Lambda}Q \subset D$ et $f(\bar{x}) \in \text{Min}_D \{f(x) + \bar{\Lambda} g(x) : x \in X'\}$ et $\bar{\Lambda} g(\bar{x}) = 0$.

3) Lagrangien vectoriel et point selle:**Définition du Lagrangien vectoriel pour le problème (P):**

C'est une fonction $L : X \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} (x, \lambda) \rightarrow L(x, \lambda) &= f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle \\ &= [f_1(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle, \dots, f_p(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle] \end{aligned}$$

Définition du Lagrangien vectoriel pour le problème (P₁):

Soit L l'ensemble de toutes les matrices Λ d'ordre $(p \times m)$ tel que $\Lambda Q \subset D$

$$L : X' \times L \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x, \Lambda) \rightarrow L(x, \Lambda) = f(x) + \Lambda g(x)$$

avec L est Lagrangien vectoriel du problème (P_1) .

Définition (point selle du Lagrangien vectoriel)

a) $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}_+^m$ est un point selle du Lagrangien vectoriel L du problème (P) si nous avons:

- (i) $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \text{EXT}[\{(x, \bar{\lambda}) / x \in X\} / D]$
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m : L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda)$.

b) $(\bar{x}, \bar{\Lambda}) \in X' \times L$ est un point selle du Lagrangien vectoriel L du problème (P_1) si nous avons:

$$(i) \quad L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \text{Min}_D \{L(x, \bar{\Lambda}), x \in X'\} \cap \text{Max}_D \{L(\bar{x}, \Lambda), \Lambda \in L\}.$$

Où rappelons le $\text{Min}_D \{L(x, \bar{\Lambda}), x \in X'\} = \text{EXT}[\{L(x, \bar{\Lambda}); x \in X'\} / D]$

et $\text{Max}_D \{L(\bar{x}, \Lambda), \Lambda \in L\} = \text{EXT}[\{L(\bar{x}, \Lambda), \Lambda \in L\} / (-D)]$.

Proposition 4.1: [75]

$(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}_+^m$ est un point selle du Lagrangien vectoriel L du problème (P) si et seulement si :

- (a) $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \text{EXT}[\{L(x, \bar{\lambda}), x \in X\} / D]$
- (b) $g(\bar{x}) \leq 0$
- (c) $\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0$

Preuve:

la condition est nécessaire, en effet si $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est un point selle alors (a) est vérifié car cela découle de la définition d'un point selle. Nous savons que $\forall \lambda \in R_+^m$ $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda)$

$$\text{donc } \forall \lambda \in R_+^m, f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \geq f(\bar{x}) + \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle \Rightarrow \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \geq \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle \quad (1)$$

$$\Rightarrow g(\bar{x}) \leq 0 \text{ car sinon } \exists i_0: g_{i_0}(\bar{x}) > 0 \text{ et en posant } \lambda_{i_0} = \frac{1}{g_{i_0}(\bar{x})} (\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle + 1) \text{ et}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, & \lambda_{i_0} & , 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \text{ nous avons } \lambda \geq 0 \text{ et } \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle = \lambda_{i_0} g_{i_0}(\bar{x})$$

$$= \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle + 1 > \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \geq \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \Rightarrow \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle > \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \text{ ce qui contredit (1),}$$

donc nous avons bien $g(\bar{x}) \leq 0$ et la condition b) est vérifiée.

$$\text{Nous savons que } \forall \lambda \in R_+^m, \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \geq \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle \text{ nous posons } \lambda = 0 \text{ d'où } \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \geq 0.$$

D'autre part

$$g(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \leq 0 \text{ car } \bar{\lambda} \geq 0 \text{ d'où } \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0: \text{ c'est la condition c) C.Q.F.D.}$$

Réciproquement la condition est suffisante, en effet :

$$b) \Rightarrow \forall \lambda \in R_+^m \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle \leq 0$$

$$c) \Rightarrow \forall \lambda \in R_+^m \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle \leq \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \Rightarrow f(\bar{x}) + \langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle \leq f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle$$

$$\Rightarrow L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \in R_+^m. \text{ Ceci avec la condition a) donne que } (\bar{x}, \bar{\lambda}) \text{ est un point selle de } L \text{ pour (P). C.Q.F.D.}$$

Nous avons un résultat analogue pour le problème (P₁) qui s'énonce:

Proposition 4'.1: [76]

$(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in X' \times L$ est un point selle du problème (P₁) si et seulement si:

$$\begin{cases} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \text{Min}_D \{ L(x, \bar{\lambda}), x \in X' \} \\ g(\bar{x}) \leq_Q 0 \\ \bar{\lambda} g(\bar{x}) = 0 \end{cases} .$$

Théorème 4.1: [75]

Si $\bar{x}$ est une solution proprement efficace de (P) au sens de BENSON et que la condition de qualification de Slater est vérifiée alors il existe $\bar{\lambda} \in R_+^m$ tel que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est un point selle pour le Lagrangien L du problème (P).

Preuve:

$$\text{D'après le théorème A } \exists \bar{\lambda} \in R_+^m \text{ tel que } f(\bar{x}) \in \text{Ext} \left[\{ L(x, \bar{\lambda}), x \in X \} / D \right] \text{ et } \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0$$

et comme $\bar{x}$ est une solution proprement efficace donc $\bar{x} \in X$ et $g(\bar{x}) \leq 0$ et d'après la proposition 4.1 on déduit que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est un point selle du Lagrangien L pour le problème (P).

Nous avons aussi un résultat analogue au théorème 4.1 mais pour le problème (P_1) énoncé précédemment sauf qu'il faut remplacer l'existence de $\bar{\lambda} \in R_+^m$ par l'existence d'une matrice $\bar{\Lambda}$ d'ordre $(p \times m)$ tel que $\bar{\Lambda}Q \subset D$ et $(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ sera un point selle du Lagrangien vectoriel $L(x, \Lambda) = f(x) + \Lambda g(x)$.

En optimisation classique (avec une seule fonction objectif) nous savons que si nous avons un point selle, alors nous avons automatiquement une solution optimale.

Nous avons un théorème analogue en optimisation multiobjectif:

Théorème 4.2: [75]

Si $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in X \times R_+^m$ est un point selle du Lagrangien vectoriel du problème (P) alors $\bar{x}$ est une solution efficace de (P).

Preuve:

$g(\bar{x}) \leq 0$ d'après la proposition 4.1, donc $\bar{x}$ est une solution réalisable de (P).

Supposons que $\bar{x}$ ne soit pas une solution efficace de (P), alors $\exists \tilde{x} \in X: g(\tilde{x}) \leq 0$,

$f(\tilde{x}) \neq f(\bar{x})$ et $f(\bar{x}) \in f(\tilde{x}) + D$, dans ces conditions comme $\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0$ (proposition 4.1)

alors: $f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \in f(\tilde{x}) + D + \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle + R_+^p$ car nous avons en plus:

$0 \in \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle + R_+^p$ puisque $g(\tilde{x}) \leq 0 \Rightarrow \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle \bar{\lambda}, -g(\tilde{x}) \rangle \in R_+^p$

$\Rightarrow \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle + \langle \bar{\lambda}, -g(\tilde{x}) \rangle \in \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle + R_+^p$ et comme $D \supset R_+^p \Rightarrow D + R_+^p = D$

d'où: $f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \in f(\tilde{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \Rightarrow L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in L(\tilde{x}, \bar{\lambda}) + D$

ce qui implique que $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \notin \text{Ext}\left[\left\{L(x, \bar{\lambda}), x \in X\right\} / D\right]$ ce qui contredit le fait que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est un point selle C.Q.F.D.

Nous avons aussi pour le problème (P_1) un théorème analogue à 4.2:

Théorème 4'.2: [76]

Si $(\bar{x}, \bar{\Lambda}) \in X \times L$ est un point selle du Lagrangien vectoriel L de (P_1) alors $\bar{x}$ est une solution efficace de (P).

V. 5) Théorie de la dualité et carte duale

Pour chaque $\lambda \in R_+^m$ nous définissons les ensembles suivants:

$$\Xi(\lambda) = \{L(x, \lambda) / x \in X\} = \{f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle / x \in X\}, \quad \Phi(\lambda) = \text{Ext}[\Xi(\lambda) / D].$$

Définition:

La fonction multivoque $\Phi : R_+^m \rightarrow P(R^p)$ (ensemble des parties de R^p) est appelée carte duale (dual map).

Cette carte duale est analogue à la fonction $\phi(\lambda) = \text{Min}(f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle, x \in X)$ connue en optimisation classique $\begin{cases} \text{Min } f(x) & g = (g_1, \dots, g_m) \\ g(x) \leq 0 & \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{cases}$.

A présent quelques propriétés de la carte duale:

Proposition: [75]

$\forall \lambda \in R_+^m$, $\Phi(\lambda)$ est un ensemble D-convexe de R^p .

Preuve:

Comme f et g sont respectivement D-convexe et R_+^m -convexe, alors l'application

$L(., \lambda)$ est D-convexe sur X pour chaque λ fixé, $\lambda \in R_+^m$: en effet, $\forall \alpha \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in X$ nous avons:

$$\begin{aligned} \alpha L(x_1, \lambda) + (1-\alpha)L(x_2, \lambda) &= \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) + \alpha \langle \lambda, g(x_1) \rangle + \\ &+ (1-\alpha) \langle \lambda, g(x_2) \rangle = \\ &= \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) + \langle \lambda, \alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2) \rangle \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + \langle \lambda, \alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2) \rangle \\ &\in L(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \lambda) + D. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3 $\{L(x, \lambda), x \in X\}$ est D-convexe c'est à dire $\Xi(\lambda)$ est D-convexe pour chaque $\lambda \in R_+^m$.

f et g sont continues donc $L(., \lambda)$ est continue sur X et comme X est compact alors $\{L(x, \lambda), x \in X\}$ est compact comme image directe d'un compact par une application continue, donc $\Xi(\lambda)$ est compact pour chaque $\lambda \in R_+^m$.

D'après le lemme 1 nous avons

$\Xi(\lambda) \subset \text{Ext}[\Xi(\lambda)/D] + D$ donc $\Xi(\lambda) + D \subset \text{Ext}[\Xi(\lambda)/D] + D = \Phi(\lambda) + D$. D'autre part, $\Phi(\lambda) \subset \Xi(\lambda)$ donc $\Phi(\lambda) + D \subset \Xi(\lambda) + D$ d'où : $\Phi(\lambda) + D = \Xi(\lambda) + D$ et comme $\Xi(\lambda) + D$ est convexe (car $\Xi(\lambda)$ est D-convexe) alors $\Phi(\lambda) + D$ est un ensemble convexe donc $\Phi(\lambda)$ est D-convexe C.Q.F.D.

Il est bien connu en optimisation classique $\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$ que ϕ est une fonction concave où

$\phi(\lambda) = \text{Min}(f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle, x \in X)$. Nous avons un résultat analogue en optimisation multiobjectif

Proposition 5.2: [75]

Φ est D-concave c'est à dire $\forall \lambda^1, \lambda^2 \in R_+^m, \forall \alpha \in [0,1]$:

$$\Phi(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2) \subset \alpha\Phi(\lambda^1) + (1-\alpha)\Phi(\lambda^2) + D.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2) &= \text{Ext}\left[\Xi(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2) / D\right] \\ &= \text{Ext}\left[\left\{L(x, \alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2), x \in X\right\} / D\right] \\ &= \text{Ext}\left[\left\{f(x) + \langle\langle \alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2, g(x) \rangle\rangle, x \in X\right\} / D\right] \\ &= \text{Ext}\left[\left\{\alpha(f(x) + \langle\langle \lambda^1, g(x) \rangle\rangle) + (1-\alpha)(f(x) + \langle\langle \lambda^2, g(x) \rangle\rangle), x \in X\right\} / D\right] \\ &= \text{Ext}\left[\left\{\alpha L(x, \lambda^1) + (1-\alpha)L(x, \lambda^2), x \in X\right\} / D\right]. \end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{aligned} A &= \left\{\alpha L(x, \lambda^1) + (1-\alpha)L(x, \lambda^2), x \in X\right\}, \\ B &= \alpha\left\{L(x, \lambda^1), x \in X\right\} + (1-\alpha)\left\{L(x, \lambda^2), x \in X\right\}. \end{aligned}$$

Nous avons $A \subset B$ et B est compact donc $B \subset \text{Ext}[B / D] + D$ (d'après le lemme 1).

$\text{Ext}[A / D] \subset A \subset B \subset \text{Ext}[B / D] + D$ d'où:

$\Phi(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2) = \text{Ext}[A / D] \subset \text{Ext}[B / D] + D$. D'après le lemme 2 nous avons :

$$\text{Ext}[B / D] \subset \text{Ext}\left[\alpha\left\{L(x, \lambda^1), x \in X\right\} / D\right] + \text{Ext}\left[(1-\alpha)\left\{L(x, \lambda^2), x \in X\right\} / D\right] \text{ et nous avons}$$

une propriété connue : Si D est un cône alors $\forall \alpha > 0$ $\text{Ext}[\alpha A / D] = \alpha \text{Ext}[A / D]$ donc:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2) &\subset \alpha \text{Ext}\left[\left\{L(x, \lambda^1), x \in X\right\} / D\right] + (1-\alpha) \text{Ext}\left[\left\{L(x, \lambda^2), x \in X\right\} / D\right] + D \\ \Phi(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2) &\subset \alpha\Phi(\lambda^1) + (1-\alpha)\Phi(\lambda^2) + D \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

A présent nous donnons la relation qui existe entre la carte primale W et la carte duale Φ .

Cette relation est une extension de la relation bien connue en optimisation classique:

$$\phi(\lambda) = \inf \left\{ w(u) + \langle \lambda, u \rangle / u \in \Gamma \right\} \text{ avec } \phi(\lambda) = \min_{x \in X} \{ f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle \} \text{ et}$$

$$w(u) = \inf_x \{ f(x) / g(x) \leq u \} \text{ et } \Gamma = \left\{ u / \exists x \in R^n / g(x) \leq u \right\}.$$

Proposition 5.3: [75]

$$\text{Nous avons : } \Phi(\lambda) = \text{Ext}\left[\bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \langle \lambda, u \rangle) / D\right].$$

Preuve:

Soit $x^1 \in X$ posons $y^1 = f(x^1) + \langle \lambda, g(x^1) \rangle$ et $u^1 = g(x^1)$.

Nous avons $y^1 = f(x^1) + \langle \lambda, u^1 \rangle$ et comme $f(x^1) \in Y(u^1)$ alors $f(x^1) \in W(u^1) + D$ car $f(x^1) \in Y(u^1) + D$ (puisque $f(x^1) = f(x^1) + 0$ et $0 \in D$) et d'après la proposition 1

$$Y(u^1) + D = W(u^1) + D. \text{ Ainsi}$$

$$y^1 \in W(u^1) + D + \ll \lambda, u^1 \gg \subset \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D$$

$$\Rightarrow \Xi(\lambda) \subset \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D$$

$$\Rightarrow \Xi(\lambda) + D \subset \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D + D \text{ et comme } D \text{ est un c\^one convexe donc}$$

$$D+D=D$$

$$\text{d'o\^u : } \Rightarrow \Xi(\lambda) + D \subset \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D \quad (1).$$

$$\text{R\^eciproquement soit } v_1 \in \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D$$

$$\text{alors } \exists y^1 \in \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) \text{ et } \exists d_1 \in D / v_1 = y^1 + d_1.$$

$$y^1 \in \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) \Rightarrow \exists u^1 \in \Gamma / y^1 \in W(u^1) + \ll \lambda, u^1 \gg$$

$$\Rightarrow y^1 - \ll \lambda, u^1 \gg \in \text{Ext}[Y(u^1) / D]$$

$$\Rightarrow \exists x^1 \in X / y^1 - \ll \lambda, u^1 \gg = f(x^1) \text{ et tel que } g(x^1) \leq u^1 \text{ alors:}$$

$$y^1 = f(x^1) + \ll \lambda, u^1 \gg \geq f(x^1) + \ll \lambda, g(x^1) \gg \text{ ce qui implique que:}$$

$$y^1 \in L(x^1, \lambda) + R_+^p \subset \Xi(\lambda) + D \quad (\text{car } D \supset R_+^p)$$

$$\Rightarrow v_1 = y^1 + d_1 \in (\Xi(\lambda) + D) + D = \Xi(\lambda) + D$$

$$\Rightarrow \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D \subset \Xi(\lambda) + D \quad (2).$$

$$\text{De (1) et (2) nous d\^eduisons que } \bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D = \Xi(\lambda) + D.$$

Comme D est un c\^one convexe ferm\^e point\^e (car $\text{Int}(D^*) \neq \emptyset$ donc D est aigu d'o\^u $\bar{D}$ est point\^e) alors d'apr\^es la proposition 3 du chapitre 3, nous avons

$$\text{Ext}[\Xi + D / D] = \text{Ext}[\Xi / D] \text{ d'o\^u :}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \text{Ext}[\Xi(\lambda) / D] = \text{Ext}[\Xi(\lambda) + D / D] = \text{Ext}\left[\bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) + D / D\right] \\ &= \text{Ext}\left[\bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) / D\right] \text{ C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Remarque:

Il est bien connu en optimisation classique $\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$ f et g convexes que

$$W(u) + \ll \lambda, u \gg \text{ est minimis\^e au point } u = 0 \text{ o\^u } W(u) = \min_x \{f(x) / g(x) \leq u\} \quad [25].$$

De m\^eme en optimisation multiobjectif nous avons un r\^esultat analogue \^a savoir que la D -convexit\^e de W assure qu'il n'existe pas de point de $W(u) + \ll \lambda, u \gg$ qui domine un point de $W(0)$.

En effet d'apr\^es le th\^eor\^eme A de ce chapitre si $\bar{x}$ est une solution proprement efficace de (P) au sens de BENSON et si une condition de Slater est v\^erifi\^ee alors nous avons $\exists \bar{\lambda} \in R_+^m$ tel que:

$f(\bar{x}) \in \text{Ext}\left[\left\{L(x, \bar{\lambda}), x \in X\right\} / D\right] = \Phi(\bar{\lambda})$ et d'après la proposition précédente nous déduisons que $f(\bar{x}) \in \text{Ext}\left[\bigcup_{u \in \Gamma} (W(u) + \ll \lambda, u \gg) / D\right]$.

A présent définissons le problème dual: Le problème primal est (P) $\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases}$ où

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \text{ et } g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)) .$$

L e problème dual est : $\begin{cases} \text{Max}_D \left(\bigcup_{\lambda} \Phi(\lambda) \right) \\ \lambda \in R_+^m \end{cases}$ où $\Phi(\lambda) = \text{Min}_D \{ f(x) + \ll \lambda, g(x) \gg \}$

et $\left\{ \text{Max}_D \left(\bigcup_{\lambda} \Phi(\lambda) \right) \right\}$ représente $\text{Ext}\left[\bigcup_{\lambda} \Phi(\lambda) / -D\right]$.

Le théorème suivant donne une propriété que doit vérifier une solution proprement efficace du primal en terme de carte dual et de ce fait peut être considéré comme un théorème général de dualité en optimisation multiobjectif.

Théorème 5.1: [75]

Si $\bar{x}$ est une solution proprement efficace au sens de BENSON de (P) et si la condition de Slater est vérifiée alors $f(\bar{x}) \in \text{Max}_D \bigcup_{\lambda \in R_+^m} \Phi(\lambda)$.

Nous pouvons dire en un certain sens que ce théorème représente la dualité forte entre problème (P) et son dual.

Preuve:

D'après le théorème 3.1 de ce chapitre $\exists \bar{\lambda} \in R_+^m$ tel que $f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\lambda})$. Supposons que

$f(\bar{x}) \notin \text{Max}_D \bigcup_{\lambda \in R_+^m} \Phi(\lambda)$ donc $\exists \tilde{\lambda} \in R_+^m$ et $\exists \bar{y} \in \Phi(\tilde{\lambda})$ tel que $f(\bar{x}) \leq_D \bar{y}$ donc

$$\exists d \neq 0 \text{ d} \in D$$

tel que $\bar{y} - f(\bar{x}) = d$ dans ce cas: $L(\bar{x}, \tilde{\lambda}) = f(\bar{x}) + \ll \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \gg = \bar{y} - d + \ll \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \gg$

d'où $\bar{y} = L(\bar{x}, \tilde{\lambda}) + d - \ll \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \gg$.

$$\tilde{\lambda} \geq 0 \quad g(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \langle \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \leq 0 \Rightarrow -\langle \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \in R_+^p \text{ d'où}$$

$$d - \langle \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \in D + R_+^p = D \quad (\text{car } D \supset R_+^p) \text{ de plus } d - \langle \tilde{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \neq 0 \text{ car } d \neq 0 \text{ et}$$

$$D \cap (-R_+^p) = \{0\} \quad (\text{puisque } D \cap (-R_+^p) \subset D \cap (-D) = \{0\} \text{ car } D \text{ pointé})$$

ce qui implique que :

$$\bar{y} \in L(\bar{x}, \tilde{\lambda}) + D \text{ et } \bar{y} \neq L(\bar{x}, \tilde{\lambda}) \text{ ce qui contredit } \bar{y} \in \Phi(\tilde{\lambda}) \text{ d'où } f(\bar{x}) \in \text{Max}_D \bigcup_{\lambda \in R_+^m} \Phi(\lambda) .$$

A présent nous allons établir qu'il y'a dualité faible entre problème primal et problème dual énoncé précédemment. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme:

Soit D un cône convexe pointé contenant l'origine.

a) Si $y_1 \leq_D y_2$ et $y_2 \leq_D y_3 \Rightarrow y_1 \leq_D y_3$.

b) Si $y_1 \not\leq_D y_3$ et $y_1 \leq_D y_2 \Rightarrow y_2 \not\leq_D y_3$.

Preuve:

Prouvons d'abord que $D + (D - \{0\}) = D - \{0\}$.

Nous avons $D + (D - \{0\}) \supset D - \{0\}$ car D contient l'origine. Soit $d \in D + (D - \{0\})$

ce qui implique: $\exists d_1 \in D$ et $\exists d_2 \in D - \{0\}$ tel que $d = d_1 + d_2$. D est un cône convexe $\Rightarrow D + D = D$, $\Rightarrow d \in D + (D - \{0\}) \subset D + D = D \Rightarrow d \in D$.

Si $d = 0 \Rightarrow d_1 = -d_2$ donc $d_2 \in D, d_2 \neq 0$ et $-d_2 \in D$: ce qui contredit le fait que D est pointé donc $d \neq 0$ par suite $d \in D - \{0\}$ donc $D + (D - \{0\}) \subset D - \{0\}$ d'où

$$D + (D - \{0\}) = D - \{0\}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} y_1 \leq_D y_2 \\ y_2 \leq_D y_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 - y_1 \in D \\ y_3 - y_2 \in D - \{0\} \end{cases} \Rightarrow (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) \in D + D - \{0\} = D - \{0\} \\ &\Rightarrow y_3 - y_1 \in D - \{0\} \\ &\Rightarrow y_1 \leq_D y_3 \end{aligned}$$

b) Supposons que $y_2 \leq_D y_3$, comme $y_1 \leq_D y_2$ alors d'après a) nous avons $y_1 \leq_D y_3$ ce qui contredit $y_1 \not\leq_D y_3$ donc $y_2 \not\leq_D y_3$ C.Q.F.D.

Théorème 5.2: (Dualité faible) [75]

Soit x une solution réalisable du problème primal (P) et $y \in \Phi(\lambda)$, $\lambda \in R_+^m$ alors $y \geq_D f(x)$.

Preuve:

$y \geq_D f(x) \Leftrightarrow f(x) \not\leq_D y$. Nous avons : x solution réalisable du problème primal donc $x \in X$

et $g(x) \leq 0$. $\lambda \in R_+^m$ donc $\langle \lambda, g(x) \rangle \leq 0$ d'où $\langle \lambda, g(x) \rangle \leq 0$

ce qui implique que :

$$f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle \leq f(x) \text{ d'où } f(x) - [f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle] \in R_+^p \subset D \text{ donc}$$

$f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle \leq_D f(x)$. D'autre part $y \in \Phi(\lambda) \Rightarrow f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle \not\leq_D y$ et en appliquant le lemme précédent le b) avec $y_1 = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle$, $y_3 = y$, $y_2 = f(x)$ nous aurons $y_2 \not\leq_D y_3$ c'est à dire $f(x) \not\leq_D y$. C.Q.F.D.

Il y'a un cas où une solution réalisable du primal est en même temps optimale au problème primal qu'au dual, c'est le cas où $f(\bar{x})$ minimise (au sens multiobjectif) la fonction de Lagrange pour un certain λ , ce ci est donné par le théorème suivant:

Théorème 5.3: [75]

Si $\bar{x}$ est une solution réalisable du problème primal(P) tel que $f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\lambda})$

pour un certain $\bar{\lambda} \in R_+^m$ alors $\bar{y} = f(\bar{x})$ est une solution efficace aussi bien pour le problème primal que pour le problème dual.

Preuve

Si $f(\bar{x})$ n'est pas une solution efficace du problème primal (P) alors:

$\exists \tilde{x} \in X / g(\tilde{x}) \leq 0$ et $f(\tilde{x}) \leq_D f(\bar{x})$. Nous avons aussi:

$\langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \leq 0 \Rightarrow -\langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \in R_+^p \subset D \Rightarrow f(\tilde{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \leq_D f(\tilde{x})$ donc nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} f(\tilde{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \leq_D f(\tilde{x}) \\ \text{et } f(\tilde{x}) \leq_D f(\bar{x}) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\tilde{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \leq_D f(\bar{x})$$
 ceci d'après le lemme précédent.

$f(\tilde{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\tilde{x}) \rangle \leq_D f(\bar{x})$ contredit le fait que $f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\lambda})$ donc $\bar{y} = f(\bar{x})$ est une solution efficace de (P). De même supposons que $f(\bar{x})$ ne soit pas une solution efficace du problème dual, donc $\exists \bar{y} \in \bigcup_{\lambda \in R_+^m} \Phi(\lambda)$ tel que $f(\bar{x}) \leq_D \bar{y}$.

$\exists \bar{y} \in \bigcup_{\lambda \in R_+^m} \Phi(\lambda) \Rightarrow \exists \bar{\lambda} \in R_+^m / \bar{y} \in \Phi(\bar{\lambda})$ et comme $\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \leq 0$

$\Rightarrow -\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \in R_+^p \subset D$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \leq_D f(\bar{x}) \\ \text{mais } f(\bar{x}) \leq_D \bar{y} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle \leq_D \bar{y}$$
 ce qui contredit $\bar{y} \in \Phi(\bar{\lambda})$

donc $f(\bar{x}) \in \text{Max}_D \bigcup_{\lambda \in R_+^m} \Phi(\lambda)$ C.Q.F.D.

Conclusion générale

A travers cette thèse nous avons traité le problème de contrôle optimal discret en énonçant les divers principes du maximum relatifs à différentes formulations.

Une nouvelle voie de recherche est de trouver un principe du maximum des systèmes discrets dans le cas multiobjectif c'est à dire dans le cas où on a à optimiser plusieurs fonctions objectifs.

Nous avons également fait une synthèse des principaux résultats qui existent en optimisation multiobjectif notamment concernant la caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces, ceci nous permet de pouvoir les appliquer au problème de contrôle optimal discret multiobjectif.

Cette thèse pourra contribuer également à développer des méthodes numériques dans le domaine de l'optimisation multiobjectif non linéaire, à cet effet nous avons fait une prépublication interne sur les vecteurs suprémaux et quasi-suprémaux dans la méthode des contraintes d'égalités propres.

Une autre voie de recherche est de pouvoir exploiter les possibilités de la dualité multiobjectif pour les méthodes numériques, en effet nous remarquons qu'il existe beaucoup d'analogies entre la dualité Lagrangienne multiobjectif et la dualité Lagrangienne classique d'un programme non linéaire à une seule fonction objectif .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Arrow, K.J., Hurwicz, L., and Uzawa, H., studies in Linear and Non-Linear Programming, Stanford Univ. Press, Stanford, California, (1958).
- [2] Aubin, J.P., «Mathematical Methods of Game and Economic Theory », North-Holland Publ., Amsterdam, 1979.
- [3] Bector, C.R. and Klassen, J.E. Duality for a nonlinear programming problem, *Utilitas Math.* 11 (1977), 87-99.
- [4] Bitran, G. R., «Duality for nonlinear multiple-criteria optimization problems, » *J.Optim.Theory Appl.* **35**, 367-401 (1981).
- [5] Bruckner, J. and Wu, S. A maximum principle for discrete systems with control variable inequality constraints, *Proc. Sixth Annual Allerton Conf. on Cir. and Sys. Theory*, 1968, pp. 475-484.
- [6] Brumelle, S., « Duality for multiple objective convex programs, » *Math Oper. Res.* **6**, 159-172 (1981).
- [7] Cannon, M. Cullum, C. and Polak, E. Constrained minimization problems in finite-dimensional spaces , *SIAM. J. Control and Optimization*, **4** (1966), pp. 528-547.
- [8] Chankong, V., and Haimes, Y., « Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, » North-Holland Publ., Amsterdam, 1983.
- [9] Cochrane, J. L., and Zeleny, M., (eds.) « Multiple Criteria Decision Making. » Univ. of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 1973.
- [10] Cohon , J.L., « Multiobjective Programming and Planning , » Academic Press , New York , 1978 .
- [11] Corley, H.W. , A Fixed Point Interpretation of Pareto Optimization
IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. Ac-26, No, 3, June 1981
- [12] Corley, H.W. A new scalar Equivalence for Pareto Optimization
IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. Ac-25, No, 4, August 1980
- [13] Corley, H.W., «Duality for maximizations with respect to cones, » *J. Math. Anal. Appl.* **84**, 560-568 (1981).
- [14] DA Cunha, N.O. and Polak, E. Constrained minimization under vector valued criteria in finite dimensional spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **19** (1967), pp. 103-124.
- [15] di Guglielmo , «Nonconvex duality in multiobjective optimization, » *Math. Oper. Res.* **2** 285-291 (1976).
- [16] Fandel, G., and Gal, T., (eds.), « Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications, Proceedings , Bonn, 1979 » Springer-Verlag , Berlin and New York , 1979 .

- [17] Gearhart, W.B. Characterization of properly efficient solutions by generalized scalarization methods , Journal of Optimization Theory and Applications Vol.41. No 3, november 1983.
- [17*] Geoffrion A.M Duality in non linear programming: a simplified applications oriented development , Siam Rev(1974).
- [17**] Geoffrion, A.M. Proper efficiency and the theory of vector maximization, J. Math Anal. Appl. 22,(1968), 618-630.
- [18] Goicoeche, A.G., Hansen, D.R., and Duckstein, L., «Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications, » Wiley, NewYork,1982.
- [19] Grauer, M.,and Wierzbicki, A.P.,(eds.), «Interactive Decision Analysis; Proceedings of an International Workshop on Interactive Decision Analysis and Interpretative Computer Intelligence , HASA, Laxenburg , Austria 1983 » Springer-Verlag , Berlin and NewYork, 1984.
- [20] Hubert Halkin , A Maximum Principle of the Pontryagin Type For Systems Described By Non Linear Difference Equations, J. SIAM Control, Vol. 4, No. 1, 1966
- [21] Halkin, H. A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by non linear difference equations, Siam J. Control and Optimization 4(1966), pp. 90-111.
- [22] Halkin, H. Optimal control for systems described by difference equations , Advances in control Systems , C.T. Leondes, ed., Academic Press, New York , 1964 Chap 4 .
- [23] Hansen, P., «Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making, » Springer-Verlag,Berlin and NewYork,1983.
- [24] Holtzman, J.M. Convexity and the maximum principle for discrete systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-11 (1966), pp. 30-36.
- [25] Holtzman, J.M. and Halkin, H. Directional convexity and the maximum principle for discrete systems, SIAM. J. Control and Optimization,4 (1966), pp. 263-275.
- [26] J.M.Holtzman, On the maximum principle for non linear discrete time systems , I.E.E.E Transaction on Automatic Control, 4, 1966, pp. 528-547
- [27] Holtzman, J.M. On the maximum principle for non linear discrete-time systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-11 (1966), pp. 273-274.
- [28] Hwang , C.L., and Masud , A.S., «Multiple Objective Decision Making Methods and Applications , »Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1979 .
- [29] Hwang, C.L., and Yoon, K., «Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications ?? -of the-Art Survey, » Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1981.
- [30] Isermann, H., «The relevance of Duality in Multiple-objective linear programming » in « Multiple Criteria Decision Making, »M.K. Starr and M.Zeleny,North-Holland Publ., Amsterdam, 1977.

- [31] Isermann, H., « On some relations between a dual pair of multiple-objective linear programs » Z.Oper.Res. 22,33-44 (1978).
- [32] Isermann, H., « Duality in multiple-Objective linear programming », in Multiple Criteria Problem Solving » S.Zionts,(ed.), Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1978.
- [33] Jahn, J., « Duality in vector optimization, » Math. Programming 25, 34?-353, (1983).
- [34] Kawasaki, H., « A duality theorem in multiobjective nonlinear programming, » Math. Oper. Res. 7. 95-110 (1982).
- [35] Kawasaki, H., « Conjugate relations and weak subdifferentials, » Math.Oper.Res. 6 , 593-607 (1981).
- [36] Keeney, R. L., and Raiffa, H., « Decision with Multiple Objective Preferences and Value Tradeoffs, » Wiley,New York, 1975.
- [37] Kuhn, H. W., and Tucker, A. W., Nonlinear programming, in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, California , pp, 481-492 (1951) .
- [38] Lee, S. M., « Goal Programming for Decision Analysis, » Ausah Publishers, Philadelphia, 1972.
- [39] Leitmann, G.,(ed.), « Multicriteria Decision Making and differential games, »Plenum, NewYork,1976.
- [40] Leitmann, G., and Marzollo, A., (eds.), « Multicriteria Decision Ming. » Springer-Verlag, Berlin and New York,1975.
- [41] Lin, J.G Maximal vectors and multi-Objective Optimization
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.18. No 1, January 1976
- [42] Lin, J.G Multi-Objective problems: Pareto-Optimal solutions by method of proper equality constraints, IEEE Transactions on automatic control, Vol. AC-21, No. 5, October 1976.
- [43] Lin, J.G Proper equality constraints and maximization of index vectors
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.20. No 2, October 1976.
- [44] Luenberger D.G , Optimization by vector space methods , Wiley, New York 1969 .
- [45] Luc, D.T., « Duality theory in multiobjective programming, » J. Optim. Theory Appl. 43, 557-582 (1984).
- [46] Magnanti, T.L. Non Linear Programming and the Maximum Principle For Discrete Time Optimal Control Problems , R.A.I.R.O octobre 1975, Vol 3, p. 75 à 91
- [47] Mahajan, D. M.Vartak, Generalization of some duality theorems in nonlinear programming Math. Programming 12 (1977) , 293-317.
- [48] Mangasarian, O.L. Nonlinear programming (McGraw-Hill,New york,1969).

[49] Mazzoleni , P., « Duality and reciprocity for vector programming, » European J.Oper.Res. **10**, 42-50 (1980) .

[50] Michel, Ph. Programmes mathématiques mixtes. Application au principe du maximum en temps discret dans le cas déterministe et dans le cas stochastique , R.A.I.R.O. Vol 14 , n°1, février 1980 , p. 1 à 19

[51] Mond, B. Weir, T. Generalized concavity and duality, Generalized concavity in optimization and economics edited by S.Schaible and W.Ziemba, pp. 263-279 (Academic Press, New York, 1981).

[52] Morse, J.N., (ed.), « Organizations: Multiple Agents with Multiple Criteria, Proceedings, University of Delaware , Newark , 1980. » Springer-Verlag ,Berlin and NewYork ,1981.

[53] Moulin, H. Fogelman, F. La convexité dans les mathématiques de la décision, Hermann Paris Collection Méthodes

[54] Naccache, P.H., « Stability in multicriteria optimization, » J. Math. Anal. Appl. **68**, 441-453 (1979).

[55] Nakayama, H., « Geometric consideration of duality in vector optimization » J.Optim. Theory Appl. **44**, 625-655 (1984).

[56] Nelson , « On the use of optimization theory for practical control system design », IEEE Transaction on Automatic Control 1964 .

[57] Neustadt,L.W., « Optimization »,Princeton Univ. Press,Princeton, New Jersey,1976.

[58] Nijkamp, P., and van Delft , A., « Multi-criteria Analysis and Regional Decision Making, » Martinus Hijhoff Social Sciences Division , Leiden , 1977.

[59] Ortega, J.A. Leake , R.J. Discrete maximum principle with state constrained control SIAM J. Control and Optimization Vol. 15 .No 6. November 1977

[60] Pontryagin L.S. et AL., The Mathematical theory of optimal processes , Interscience, New York , 1962.

[61] Propoi, A.I. The maximum principle for discrete systems, Automat. Remote Control, 26(1965), pp. 1169-1177.

[62] Rozonoer, L.I. The maximum principle of L.S Pontryagin in optimal-system theory, Part III Automat. Remote Control, 20 (1970), pp. 1515-1532 .

[63] Rietveld, P., « Multiple Objective Decision Method and Regional Planning , » North-Holland Publ., Amsterdam , 1980.

[64] Ritter., « Optimization theory in linear spaces I », Math. Ann. 182, 189-206(1969)

[65] Ritter., « Optimization theory in linear spaces II », Math. Ann. 183, 169-180(1969)

[66] Ritter., « Optimization theory in linear spaces III », Math. Ann. 184, 133-154(1970)

- [67] Rosinger , E.E., « Duality and alternative in multiobjective optimization. » Proc. Amer. Math. Soc. **64**, 307-312 (1977).
- [68] Salkuvadze , M.E., « Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory, » Academic Press , NewYork , 1979.
- [69] Sawaragi, Y. Nakayama, H. Tanino, T. Theory of multiobjective optimization .
- [70] Schönfeld , P., « Some duality theorem for the non-linear vector maximum problem, » Unternehmensforsch. **14**, 51-63 (1970).
- [71] Singh, C. Optimality conditions in multiobjective differentiable programming
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.53. No 1, April 1987
- [72] Smale,S., «Global analysis and economics I:Pareto optimum and generalization of Morse theory, in « Dynamical Systems, »M. Peixoto,(ed.),Academic Press, New York,1973.
- [73] Smale,S., « Global analysis and economics III:Pareto optima and price equilibria » J.Math Econom.**1**, 213-221(1974).
- [74] Star, M. K., and Zeleny, M., (eds.), « Multiple Criteria Decision Making, » North-Holland Publ., Amsterdam , 1977.
- [75] Tanino, T. Sawaragi, Y. Duality theory in multiobjective programming,
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.27. No 4, April 1979.
- [76] Tanino , T., and Sawaragi , Y., Nakayama, H. « theory of multiobjective optimization, » Mathematics in Science and engineering Volume 176 , Academic press Inc (1985).
- [77] Tanino, T., and Sawaragi, Y., «Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making, » J. Optim. Theory Appl. **30**, 229-253 (1980).
- [78] Tanino , T., and Sawaragi , Y., « Conjugate maps and duality in multiobjective optimization , » J.Optim. Theory Appl. **31**, 473-469 (1980).
- [79] Thiriez, H., and Zionts, S., (eds.) « Multiple Criteria Decision Making, » Jouy-en-Josas
France, Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1976.
- [80] Weir, T. A converse Duality theorem in multiple objective programming ,
Operations research letters Vol. 6 , No. 3, July 1987.
- [81] Weir, T. Proper efficiency and duality for vector valued optimization problems,
J.Austral. Math. Soc. (Series A) **43** (1987), 21-34.
- [82] Wilhelm, J., « Objectives and Multi-Objective Decision Making under Uncertainty » Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1975.
- [83] Wolfe, P. A duality theorem for non linear programming, Quart. Appl. Math.**19** (1961) 239-244.

[84] Yu ,P.L, Cone convexity , cone extreme points , and non dominated solutions in decision problems with multiple objectives , J . Optim. Theory Appl. **14**,319-377(1974)

[85] Zeleny, M., « Linear Multi-objective Programming, » Springer-Verlag Berlin and NewYork , 1974.

[86] Zeleny, M., (ed.), « Multiple Criteria Decision Making: Kyoto, » Springer-Verlag ,Berlinand NewYork , 1976.

[87] Zeleny, M., « Multiple Criteria Decision Making, » McGraw-Hill , NewYork ,1982.

[88] Zionts, S.,(ed.), « Multiple Criteria Problem Solving: Proceedings, Buffalo,Ny 1977, » Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1978.

Table des matières

INTRODUCTION

CHAPITRE I Introduction au problème de contrôle optimal discret

I.1. Formulation de contrôle optimal discret à une fonction objectif	2
I.2. Lien avec la programmation mathématique	6
I.3. Introduction au problème de contrôle optimal continu	8
I.4. Enoncé du principe discret du maximum	8
I.5. Lien avec la programmation dynamique	9

CHAPITRE II Principe du maximum des systèmes discrets

II.1. Problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur l'état initial et final	14
II.2. Problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur les coordonnées de phase	15
II.3. Cas où la fonction objectif dépend de l'état final et du contrôle	19
II.4. Cas où le domaine de commande admissible dépend de l'état du système	20
II.5. Programmes mathématiques mixtes	22
II.6. Conditions nécessaires d'optimalité d'un programme mathématiques mixtes	24
II.7. Application au principe du maximum en temps discret	26

CHAPITRE III Optimisation multiobjectif et optimisation au sens de PARETO

III.1. Ordre de préférence et structure de domination	29
III.2. Définition d'élément efficace	31
III.3. Exemples d'ordre de préférences	31
III.4. Propriétés des ensembles efficaces	32
III.5. Approche par une suite hiérarchique de critères de performances	38
III.6. Définition d'une solution efficace	39
III.7. Définition de l'efficacité propre au sens de BORWEIN	39
III.8. Définition de l'efficacité propre au sens de BENSON	41
III.9. Définition de l'optimum de PARETO	42
III.10. Quelques propriétés topologiques des optimums de PARETO	45
III.11. Cas des critères différentiables	45

III.12. Cas des critères concaves	46
III.13. Exemples d'application	48
III.14. Deux approches de résolution par passage à un problème d'optimisation unicritère	49

CHAPITRE IV Caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces

IV.1. Vecteurs maximaux	54
IV.2. Caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces	58
1. Caractérisation par scalarisation	58
2. Recherche de la meilleure approximation au point idéal	62
3. Caractérisation par résolution d'un problème d'optimisation avec contrainte supplémentaire paramétrique	67
4. Méthode de scalarisation généralisée	71
IV.3. Conditions d'optimalité d'un problème de programmation multiobjectif différentiable	74

CHAPITRE V Dualité en optimisation multiobjectif

V.1. Dualité pour les programmes convexes	84
V.2. Dualité pour les programmes non convexes	86
V.3. Dualité réciproque	89
V.4. Dualité Lagrangienne	89
1. Cône des points extrêmes et lemmes fondamentaux	90
2. Carte primal et multiplicateur de Lagrange	93
3. Lagrangien vectoriel et point selle	96
V.5 Théorie de la dualité et carte duale	98

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES