

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE**

**FACULTE DE GENIE CIVIL**



## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En Génie Civil

Spécialité: Construction

Par

**M<sup>me</sup> Boukhalfa Dalila**

**Thème**

*Etude de la stabilité latérale des éléments composés  
en acier  
-Cas des poutres en treillis-*

***Soutenu publiquement le 18 Mars 2012, devant le jury composé de***

M <sup>r</sup> D.BENOUAR	Professeur,	à l'USTHB	Président
M <sup>me</sup> F. AMMARI	Maître assistant A,	à l'USTHB	Directrice de mémoire
M <sup>me</sup> H. HADJAB	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examinatrice
M <sup>r</sup> A. BOUKHALED	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examineur
M <sup>r</sup> A.N.T IHADDOUDENE	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examineur

## Remerciements

Je saisis l'occasion d'adresser ma reconnaissance à Mme Fatiha AMMARI, Docteur Ingénieur, Chargée de recherche et chef de département à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, qui a assumé la direction du présent mémoire, pour sa bienveillance et son encouragement durant toute la période du présent travail.

Aussi mes prompts remerciements vont également aux membres de jury :

Professeur BENOUAR qui nous a honorés en président la soutenance, Mme HADJAB Maître de Conférences à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, Mr BOUKHALED Maître de Conférences à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB et Mr IHADDOUDEN Maître de Conférences à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB.

Un remerciement spécial est dédié à Toufik qui a collaboré énormément dans l'élaboration de ces travaux.

Enfin, je voudrais remercier du fond du cœur mes parents, mes sœurs et ma belle famille et spécialement mon mari sans qui je ne serais pas là aujourd'hui. Ils m'ont tous énormément apporté grâce à leurs expériences nombreuses et variées. Leur amour, leur écoute et leur soutien ont toujours été sans faille.

*A ma fille Mayssa*

# TABLE DES MATIERES

Résumé .....	1
Notations .....	3
Introduction générale .....	7

## CHAPITRE 1- ELEMENTS DE RESISTANCE DES MATERIAUX

1.1. Introduction .....	10
1.2. Historique .....	10
1.3. Hypothèses sur le matériau .....	11
1.3.1. Homogénéité .....	12
1.3.2. Isotropie .....	12
1.3.3. Élasticité linéaire .....	13
1.4. Hypothèses fondamentales de la Résistance des matériaux .....	14
1.4.1. Principe de Saint-Venant et conséquences .....	14
1.4.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli .....	14
1.4.3. Sollicitation élémentaire « TORSION » .....	16
1.4.3.1. Effets de la torsion .....	16
1.4.3.2. Torsion de Saint Venant .....	17
1.5. Conclusion .....	19

## CHAPITRE 2 – CRITERES D'INSTABILITE

2.1. Introduction .....	20
2.1.1. Critère de bifurcation .....	20
2.1.2. Critère cinématique .....	20
2.1.3. Critère de l'énergie .....	21
2.2. Critère de stabilité choisi .....	21
2.3. Raisons de la non linéarité dans une structure .....	21
2.4. Etats d'équilibre stable et instable .....	22
2.5. Critères généraux de la stabilité élastique .....	23
2.6. Principe du travail virtuel .....	25
2.7. Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire .....	27
2.8. Stabilité de l'équilibre .....	28
2.9. Equilibre neutre - chargement critique .....	29
2.10. Etude d'un élément poutre à parois minces .....	30
2.10.1. Introduction .....	30
2.10.2. Equation différentielle d'équilibre .....	31
2.10.2.1. Principe de continuité .....	31
2.10.2.2. Principe de l'équivalence .....	31
2.10.2.3. Principe de régularisation .....	32
2.11. Conclusion .....	32

## CHAPITRE 3 – DEVERSEMENT ELASTIQUE DES POUTRES

3.1. Introduction .....	34
3.2. Déversement des poutres .....	35
3.3. Facteurs influençant la résistance au déversement .....	38
3.3.1. Influence des conditions d'appuis .....	38
3.3.1.1. Appuis de rive .....	38
3.3.1.2. Appuis latéraux intermédiaires .....	39

3.3.1.3. Poutres en porte-à-faux .....	40
3.3.2. Influence du point d'application de la charge .....	40
3.3.3. Influence du type de chargement .....	41
3.4. Conclusion.....	41

## CHAPITRE 4 - FLEXION DES POUTRES EN TREILLIS

4.1. Introduction .....	42
4.2. Généralités sur les poutres en treillis .....	42
4.2.1. Utilisation des poutres à treillis .....	43
4.2.2. Fabrication des poutres à treillis .....	44
4.2.3. Fonctionnement des poutres à treillis.....	45
4.2.4. Désignation des poutres à treillis .....	45
4.2.5. Hypothèses de calcul des poutres à treillis.....	46
a) Excentrement des assemblages.....	47
b) Charges appliquées entre les nœuds .....	47
c) Moments créés par les assemblages rigides et les déformations des treillis .....	47
4.2.6. Avantages des poutres en treillis.....	48
4.3. Prise en compte de l'effort tranchant dans le calcul des déformations des poutres en treillis .....	48
4.3.1. Calcul des déformations des poutres en treillis en utilisant le procédé de « l'âme équivalente » .....	49
4.3.2. Ame équivalente des poutres en treillis .....	50
4.3.3. Ame équivalente pour des cas particuliers de treillis .....	52
4.3.3.1. Cas particulier de treillis en V symétrique .....	52
4.3.3.2. Cas particulier de treillis en N .....	53
4.3.4. Exemple de calcul des déformations d'une poutre en treillis .....	53
4.3.4.1. Calcul par la méthode énergétique .....	54
4.3.4.2. Calcul à partir du procédé de l'âme équivalente .....	55
4.4. Flambement individuel des tronçons membrures comprimées .....	56
4.5. Moment d'inertie de torsion des poutres en treillis .....	57
4.5.2. Poutres en treillis .....	58
• Treillis en V dissymétrique.....	59
• Treillis en V symétrique .....	59
• Treillis en N.....	59
4.6. Conclusion	

## CHAPITRE 5 - MOMENT CRITIQUE DE DEVERSEMENT DANS LE CAS DES POUTRES EN TREILLIS

5.1. Introduction .....	60
5.2. Etude d'un élément à parois minces .....	60
5.2.1. Cinématique.....	60
5.2.2. Déplacements .....	61
5.2.3. Déformations .....	62
5.2.4. Energie .....	62
5.2.5. Formulation de l'équation d'équilibre .....	65
5.2.5.1. Equation d'Euler.....	66
5.2.5.2. Equation différentielle d'équilibre.....	66
5.3. Méthodes de résolution.....	68
5.3.1. Introduction .....	68
5.3.2. Application des méthodes énergétiques générales aux systèmes élastiques .....	69
5.3.3. Coefficient de Rayleigh .....	70
5.3.4. Méthode de Rayleigh-Ritz .....	71

5.3.5. Méthode de Galerkin .....	72
5.3.6. Méthodes Numériques .....	74
5.4. Moment critique de déversement .....	74
5.4.1. Introduction.....	74
5.4.2. Résolution par la méthode de Galerkin.....	75
5.4.3. Calcul des coefficients $C_i^v$ .....	78
5.5. Conclusion.....	80

## CHAPITRE 6 – RESULTATS ET INTERPRETATIONS

6.1. Introduction .....	80
6.2. Expression du moment critique élastique du déversement dans le cas d'une poutre en treillis symétrique .....	82
6.3. Vérification de la stabilité au déversement d'une poutre en treillis symétrique .....	82
6.4. Exemples d'application .....	83
6.5. Conclusion.....	92
Conclusion générale et perspectives .....	94

### VÉRIFICATION DE LA STABILITÉ AU DÉVERSEMENT EN FLEXION SIMPLE DES POUTRES EN TREILLIS SELON LES RÈGLES CM66

A.1. Introduction .....	96
A.2. Notations .....	96
A.3. Flambement individuel des tronçons de la membrure comprimée .....	97
A.4. Vérification de la stabilité au déversement .....	97
A.4.1. cas des pièces symétriquement appuyées et symétriquement chargées .....	98
A.4.2. cas des pièces soumises à deux moments différents au droit des appuis .....	99
A.4.3. Valeurs des coefficients $B$ , $C$ et $D$ .....	99
a) Coefficient $B$ .....	99
b) Coefficient $C$ .....	100
d) Coefficient $D$ .....	100

### PRISE EN COMPTE DES IMPERFECTIONS DANS LA FORMULATION DU MOMENT RESISTANT AU DEVERSEMENT $M_{bRd}$

B.1. Introduction .....	101
B.2. Formulation analytique des courbes de flambement .....	102
B.2.1 Prise en compte d'un défaut initial.....	102
B.2.2 Critère de ruine par flambement.....	103
B.3. Calcul du moment résistant au déversement $M_{bRd}$ .....	104
Bibliographie.....	107

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Poutre droite à plan moyen.....	11
Figure 1.2: Courbes effort/déplacement pour différents ressorts.....	13
Figure 1.3: Visualisation de l'hypothèse de Navier Bernoulli.....	14
Figure 1.4: Déformation d'une poutre en I due à la torsion .....	17
Figure 1.5 : Photos de la grille avant (à gauche) et après (à droite) déformation .....	17
Figure 1.6: Vue "3D" idéalisée de la grille avant et après déformation.....	18
Figure 1.7: Vue idéalisée de la grille avant et après déformation.....	18
Figure 2.1 : Etats d'équilibres.....	22
Figure 2.2 : Déformation d'une poutre sur appuis.....	23
Figure 2.3 : Déformation d'une poutre cantilever.....	24
Figure 2.4 : Organigramme de détermination de la charge critique.....	30
Figure 3.1:Phénomène de déversement.....	35
Figure3.2: Déformation d'un profilé en double T.....	36
Figure 3.3:Variation de $M_{cr}/M_{pl}$ en fonction de la longueur.....	37
Figure 3.4: Présence des appuis intermédiaires.....	39
Figure 3.5: Différents points d'application des charges.....	40
Figure 3.6: Influence du point d'application des charges sur $M_{cr}$ .....	41
Figure 4.1 : Principe et terminologie des différents éléments d'une poutre à treillis.....	42
Figure 4.2 : Hangar avec des poutres en treillis (fermes métalliques) .....	43
Figure 4.3 : Pont à poutres en treillis.....	44
Figure 4.4 : Différents types de poutres à treillis.....	46
Figure 4.5 : Déplacement dans un treillis.....	50
Figure 4.6 : Treillis en V symétrique.....	52
Figure 4.7. Variation de l'aire de l'âme équivalente en fonction de l'aire des diagonales pour différentes valeurs de $t\alpha$ .....	52
Figure 4.12 : Profil à parois pleines.....	58
Figure 5.1: Schématisation d'un élément à parois minces dans un repère cartésien.....	61
Figure 5.2 : Modèle de VLASOV.....	64

Figure 5.3 : Illustration de la méthode des différences finis d'EULER.....	74
Figure 6.1 : Modélisation du chargement uniformément réparti.....	82
Figure 6.2 : Données concernant les exemples d'application.....	84
Figure A.1 : Poutres en treillis.....	96
Figure B.1 : Courbes d'imperfections.....	101
Figure B.2 : Flambement d'une barre bi articulée avec un défaut initial et chargée axialement.....	102

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 : Détails de calcul pour chaque barre.....	54
Tableau 6.1 : Caractéristiques de la poutre en treillis de l'exemple n°1.....	85
Tableau 6.2 : Résistance au flambement de la membrure de l'exemple n°1.....	85
Tableau 6.3 : Résistance au flambement des diagonales de l'exemple n°1.....	85
Tableau 6.4 : Coefficient de réduction correspondant au flambement individuel des tronçons de membrure comprimée de l'exemple n°1.....	86
Tableau 6.5 : Valeur de $M_{cr}$ pour le cas 1 de l'exemple n°1.....	86
Tableau 6.6 : Moment de résistance au déversement pour le cas 1 de l'exemple n°1.....	86
Tableau 6.7 : Efforts de compression dans les éléments de la membrure supérieure pour le cas 1 de l'exemple n°1.....	86
Tableau 6.8 : Efforts de compression dans les diagonales pour le cas 1 de l'exemple n°1.....	87
Tableau 6.9 : Valeur de $M_{cr}$ pour le cas 2 de l'exemple n°1.....	87
Tableau 6.10 : Moment de résistance au déversement pour le cas 2 de l'exemple n°1.....	87
Tableau 6.11 : Efforts de compression dans les éléments de la membrure supérieure pour le cas 2 de l'exemple n°1.....	88
Tableau 6.12 : Efforts de compression dans les diagonales pour le cas 2 de l'exemple n°1.....	88
Tableau 6.13 : Valeur de $M_{cr}$ pour le cas 3 de l'exemple n°1.....	88
Tableau 6.14 : Moment de résistance au déversement pour le cas 3 de l'exemple n°1.....	89
Tableau 6.15 : Efforts de compression dans les éléments de la membrure supérieure pour le cas 3 de l'exemple n°1.....	89
Tableau 6.16 : Efforts de compression dans les diagonales pour le cas 3 de l'exemple n°1.....	89
Tableau 6.17 : Caractéristiques de la poutre en treillis de l'exemple n°2.....	90
Tableau 6.18 : Valeur de $M_{cr}$ pour le cas 1 de l'exemple n°2.....	90
Tableau 6.19 : Moment de résistance au déversement pour le cas 1 de l'exemple n°2.....	90
Tableau 6.20 : Valeur de $M_{cr}$ pour le cas 2 de l'exemple n°2.....	91
Tableau 6.21 : Moment de résistance au déversement pour le cas 2 de l'exemple n°2.....	91
Tableau 6.22 : Valeur de $M_{cr}$ pour le cas 3 de l'exemple n°2.....	91
Tableau 6.23 : Moment de résistance au déversement pour le cas 3 de l'exemple n°2.....	91
Tableau 6.24 : Valeurs de $M_{cr}$ [daN cm].....	92

## Résumé

L'emploi de l'acier conduit naturellement à des types de structures comportant des pièces élancées soumises à la compression, des tôles minces et des pièces composées à rigidité très différentes dans les deux plans principaux. L'expérience a prouvé que des constructions de ce genre peuvent, dans certains cas, subir des dommages allant jusqu'à la rupture, non pas comme on pourrait le croire, en raison de tensions excessives dépassant la résistance du métal, mais à cause de l'insuffisance de la stabilité élastique des pièces très élancées. Ces phénomènes d'instabilité, qui affectent les éléments en acier, conduisent donc à des charges de ruine inférieures, dans certains cas, à la résistance plastique de ces éléments. Les imperfections d'origine, inévitables; inhérentes à tous produits industriels et à leurs mises en œuvres constituent la cause de ces phénomènes d'instabilité. Parmi ces phénomènes d'instabilité, on s'intéresse, dans le cadre de ce travail, au déversement des poutres composées en treillis.

De nombreuses recherches ont été effectuées pour l'étude de la stabilité des pièces à âmes pleine. Par contre, les pièces composées, qui permettent de fournir des structures relativement légères et d'une grande rigidité, ont fait l'objet de très peu d'études dans ce domaine. Pour ces pièces, il est d'usage d'adopter systématiquement des dispositions constructives couteuses pour les prémunir contre les phénomènes d'instabilités, étant donné que bien peu d'informations sont disponibles dans ce cas.

Dans cette étude, un modèle théorique a été développé dans le but de calculer la valeur du moment critique élastique de déversement des poutres en treillis isostatiques à sections transversales constantes, soumises à un chargement uniformément réparti. Grâce aux résultats donnés par le modèle développé, une méthode de vérification de la stabilité au déversement pour les poutres en treillis, respectant les conditions pris dans ce cas, a été proposée.

## Abstract

The use of steel leads naturally to the types of buildings with slender elements subjected to compression, thin sheets and compound elements with rigidity very different in two principal planes. Experience has shown that constructions of this kind can, in some cases, suffer damage up to failure, not as one might think, due to excessive stress in excess of the strength of the metal, but because of insufficient elastic stability of very slender elements. These instabilities, which affect the steel elements, therefore lead to lower failure load, in some cases, than the plastic resistance of these elements. The original imperfections, unavoidable inherent in all industrial products and their implementations are the cause of these instabilities. Among these instabilities, we are interested in the context of this work, at the lateral buckling of steel trusses.

Much research has been conducted to study instability phenomena of full web element. By cons, compound elements, which can provide relatively light structures and high rigidity, have been very few studies in this case. For these elements, it is customary to adopt systematic expensive structural arrangements for guard against instability phenomena, since very little information is available in this case.

In this study, a theoretical model was developed to calculate the value of the elastic critical moment of lateral buckling for isostatic steel truss with constant cross section, subjected to a uniformly distributed load. With the results given by the developed model, a method for checking stability of lateral buckling steel trusses, according to the conditions given in this case was proposed.

## ملخص

يؤدي استخدام الفولاذ بطبيعة الحال إلى أنواع هياكل تحوي قطع واثبة تتعرض للضغط وقطع رقيقة مركبة ذات صلابة مختلفة جدا في محوريها الأساسيان . أثبتت التجارب أن المنشآت من هذا النوع يمكن، في بعض الحالات إن تعاني تلف ما يصل إلى حد الكسر، وليس كما قد يتصور المرء، وذلك بسبب الضغط المفرط التي تزيد عن قوة المعدن، ولكن لنقص في استقرار المرونة من أجزاء رقيقة جدا. في بعض الحالات، حالات عدم الاستقرار هذه، التي تؤثر على العناصر الفولاذية ، تؤدي إلى حمولة خراب، اصغر من المقاومة البلاستيك لهذه العناصر.

عيوب، لا مفر منها المتأصلة في جميع المنتجات الصناعية والتطبيقات الخاصة بهم هي السبب في حالات عدم الاستقرار هذه. من بين هذه الحالات عدم الاستقرار، نهتم في سياق هذا العمل، بالانحدار المرن لعارضة ذات إنشاء تشابكي.

وقد أجريت الكثير من البحوث لدراسة الاستقرار في أجزاء الممتلئة. ، لكن دراسة أجزاء المركبة، والتي يمكن أن توفر هياكل خفيفة نسبيا وصلابة عالية، كانت محور دراسات قليلة جدا في هذا المجال. ، فمن المعتاد أن تعتمد الترتيبات البناء و المكلفة لحمايتها ضد ظواهر عدم الاستقرار، ما دامت المعلومات المتوفرة في هذه القضية قليلة.

في هذه الدراسة، تم تطوير نموذج نظري لحساب قيمة العزم الحاسم للانحدار المرن لعارضة ذات إنشاء تشابكي ذات مقطع عرضي ثابت، حيث تتعرض لحمولة موزعة بشكل متجانس. بفضل النتائج التي قدمها النموذج المطور و قد تم اقتراح طريقة للتحقق من استقرار الانحدار المرن لعارضة ذات إنشاء تشابكي. مطابقة للمتطلبات الواردة في هذه الحالة.

## NOTATIONS

$A$	Aire de la section
$A_a$	Aire de l'âme équivalente
$A_d$	Aire de la diagonale dans un treillis
$A_t$	Aire du montant dans un treillis
$a_{ij}$	Coefficients des charges appliquées
$B_\omega$	Bi-moment
$C$	Centre de cisaillement
$C_1$	Coefficient prenant en compte la distribution du moment
$C_2$	Coefficient prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe z-z par rapport au centre de cisaillement
$C_3$	Coefficient prenant en compte la dissymétrie de la section par rapport à l'axe y-y
$C_1^v$	Coefficient prenant en compte la distribution du moment en considérant les déformations dues à l'effort tranchant
$C_2^v$	Coefficient prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe z-z par rapport au centre de cisaillement en considérant les déformations dues à l'effort tranchant
$C_3^v$	Coefficient prenant en compte la dissymétrie de la section par rapport à l'axe y-y en considérant les déformations dues à l'effort tranchant
$E$	Module d'élasticité
$e_z$	Distance du point d'application de la charge au centre de torsion C
$E I_\omega$	Rigidité du gauchissement
$E I_z$	Rigidité de flexion par rapport à l'axe de faible inertie
$f_y$	Résistance limite élastique de l'acier
$G'$	Centre de gravité.
$GJ$	Rigidité à la torsion de la barre
$G$	Module d'élasticité au cisaillement
$h_0$	Distance entre fibres neutres des membrures

$I_y; I_z$	Moments d'inertie par rapport aux axes y-y et z-z
$I_0$	Moment d'inertie polaire
$I_\omega$	Moment d'inertie sectorielle (inerte de gauchissement)
$i$	Rayon de giration
J	Moment d'inertie de torsion.
$k_w$	Coefficient de gauchissement
$k_z$	Coefficient d'encastrement par rapport à l'axe z-z
L	Longueur de poutre
$l_d$	Longueur de la diagonale
$l_m$	Longueur des tronçons de membrures
M	Moment de flexion
$M_t$	Moment de torsion
$M_{b,Rd}$	Moment résistant au déversement
$M_{Sd}$	Valeur de calcul du moment sollicitant
N	Effort normal
$q_i$	coordonnées généralisées
$q_z$	Charge appliquée suivant l'axe z-z
Q	Charge concentrée
$S_1$	Système de chargement de référence
$T_{Sd}$	Sollicitation de torsion totale
$T_{v,Sd}$	Moment de torsion de St Venant ;
$T_{w,Sd}$	Moment de torsion non uniforme.
T	Energie cinétique du système
$t_f$	Epaisseur de la semelle
$t_w$	Epaisseur de l'âme
U	Energie de déformation
$u_M; v_M; w_M$	Déplacements du point M

$V_z$	Effort tranchant
$v$	Déplacement dans le plan y-y
$W$	Energie fournie au système (travail)
$W_{ext}$	Travail créé dû aux forces extérieures au système
$W_{int}$	Travail des forces intérieures
$w$	Déplacement dans le plan z-z
$y_c, z_c$	Coordonnées du centre de torsion
$Z_g$	Distance du point d'application de la charge au centre de torsion C
$\alpha_{cr}$	Facteur multiplicateur de charge
$\alpha$	Facteur d'imperfection
$\beta_y; \beta_z; \beta_\omega$	Constantes de WARNER
$\gamma_{M1}$	Coefficient partiel de sécurité dans le cas d'instabilités
$\Pi$	Energie potentielle
$\Delta T$	Augmentation de l'énergie cinétique,
$\Delta U$	Augmentation de l'énergie interne,
$\delta^2$	Deuxième variation
$\delta U$	Variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel,
$\delta W_{ext}$	Travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels
$\delta \Pi$	Variation de l'énergie potentielle
$\chi$	Coefficient de réduction
$\varepsilon_{xx}$	Déformation
$\varepsilon_l$	Déformation linéaire
$\varepsilon_{nl}$	Déformation non linéaire
$\lambda$	Elancement
$\bar{\lambda}$	Elancement réduit

$\theta$	Rotation autour de l'axe $\vec{x}$
$\Theta$	Angle formé entre la membrure et la diagonale
$\sigma$	Contrainte normale
$\tau$	Contrainte tangentielle
$\Omega$	Energie potentielle
$\omega$	Coordonnée sectorielle normée
$\eta$	Facteur d'imperfections généralisé

## Introduction générale

Les poutres constituent les éléments les plus communs des ossatures, dont la fonction est généralement de véhiculer des charges gravitaires sur une certaine portée. Il s'agit donc d'éléments fléchis dont le dimensionnement est essentiellement établi par référence au moment fléchissant maximum qu'ils ont à supporter. On s'efforce en principe, par l'orientation de la section, d'obtenir une flexion monoaxiale, c'est-à-dire de faire en sorte que les charges appliquées soient normales à l'axe longitudinal de la poutre et contenues dans le plan principal de symétrie de la section transversale. Dans ces conditions, l'optimisation de la quantité d'acier conduit à concentrer la matière le plus loin possible de l'axe principal autour duquel s'exerce la flexion. Pour une quantité donnée d'acier représentée par une section d'aire  $A$ , la disposition idéale mais irréalisable est la section en I réduite à deux semelles, d'épaisseur négligeable par rapport à la hauteur  $h$  : le module de résistance en flexion est alors égal à  $(0,5 A h)$ , en élasticité comme en plasticité. Les poutres à âme pleine de sections en I ou H, laminées ou reconstituées soudées, répondent à l'orientation définie et offrent donc les meilleurs rendements pour les sollicitations de flexion simple. Cependant, la résistance en flexion de ces poutres peut se trouver conditionnée non pas par celle de ses sections mais par sa stabilité au déversement. Le déversement est l'instabilité générée par le flambement latéral de la partie comprimée du profil ; il ne se produit que pour les profils fléchis autour de l'axe d'inertie principale maximale et est d'autant plus sensible que cette inertie est grande par rapport à l'inertie principale minimale et à l'inertie de torsion.

Le principe des poutres en treillis ( qui sont des pièces composées) consiste à remplacer l'âme pleine des sections de type I ou H par des barres inclinées qui constituent, avec les semelles devenues des membrures, des panneaux triangulés aptes à transférer l'effort tranchant d'un de leur bord à l'autre. L'équilibre d'un tel système soumis à des charges transversales peut être obtenu en développant exclusivement des efforts axiaux dans les barres qui les constituent. Une barre de treillis sur deux est tendue, l'autre comprimée, par contre, une membrure est comprimée, l'autre tendue. L'instabilité latérale de la membrure comprimée est équivalente, pour la poutre en treillis considérée dans son ensemble, au déversement d'une poutre à âme pleine.

De nombreuses recherches ont été effectuées pour l'étude de la stabilité au déversement des pièces à âmes pleines. Par contre, les pièces composées, qui permettent de fournir des structures relativement légères et d'une grande rigidité, ont fait l'objet de très peu d'études dans ce domaine. Pour ces pièces, il est d'usage d'adopter systématiquement des dispositions constructives couteuses

pour les prémunir contre les phénomènes d'instabilités, étant donné que bien peu d'informations sont disponibles dans ce cas.

Dans le cadre de cette étude, un modèle théorique est développé dans le but de déterminer le moment critique élastique de déversement des poutres en treillis isostatiques à sections transversales constantes, soumises à un chargement uniformément réparti. Pour cela, on va assimiler le comportement de la poutre en treillis à celui d'un élément à parois minces où les treillis sont remplacés par une âme pleine équivalente. Dans ce cas, les déformations dues à l'effort tranchant doivent être prises en compte dans la formulation des équations différentielles d'équilibre.

Du point de vue organisation, ce mémoire comprend six chapitres, une conclusion générale et des annexes.

Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions fondamentales de la résistance des matériaux auxquelles sera fait référence lors de l'élaboration du modèle de calcul du moment critique élastique de déversement.

L'exposé des différents principes d'équilibre et de stabilité fait au chapitre 2, nous a permis de choisir le critère d'instabilité approprié.

Au chapitre 3, nous rappelons les paramètres essentiels qui gouvernent la stabilité au déversement.

Des généralités concernant les poutres en treillis ont été présentées dans le chapitre 4, où il a été également rappelé les principaux aspects propres à la flexion des poutres en treillis, notamment la prise en compte des déformations dues à l'effort tranchant ainsi que la considération du flambement individuel des tronçons de la membrure comprimée.

Dans le chapitre 5, en assimilant le comportement de la poutre en treillis à celui d'un élément à parois minces où les treillis sont remplacés par une âme pleine équivalente à ces treillis, le modèle théorique développé nous permettra de déterminer la valeur du moment critique élastique de déversement des poutres en treillis isostatiques à sections transversales constantes dans le cas d'un chargement uniformément réparti.

La méthode proposée dans le chapitre 6 pour la vérification de la stabilité au déversement pour les poutres en treillis de sections symétriques constantes et soumises à une charge uniformément répartie, a permis le traitement d'exemples de calcul qui prennent en considération, l'influence de certains paramètres gouvernant la stabilité au déversement.

L'annexe A est consacrée au rappel de la méthode de vérification de la stabilité au déversement en flexion simple des poutres en treillis selon les règles CM66.

Enfin à l'annexe B, nous présentons la méthode de calcul du moment résistant au déversement  $M_{b,Rd}$  et dont la valeur est déterminée en prenant en considération les imperfections inévitables qui affectent les éléments de structures.

# CHAPITRE 1- ELEMENTS DE RESISTANCE DES MATERIAUX

## 1.1.Introduction

La Résistance des Matériaux (que nous désignerons maintenant par RdM) est la science du dimensionnement. Elle est issue d'une théorie plus générale, la Mécanique des Milieux Continus, qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire, c'est à dire d'abord imaginer les formes et le squelette géométrique qui remplissent les fonctions demandées ; et ensuite déterminer les quantités de matière nécessaires et suffisantes pour réaliser ces formes en assurant une résistance sans dommage de l'objet à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant son service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique. La théorie des poutres est la base de la résistance des matériaux.

La théorie des poutres, ou théorie d'Euler-Bernoulli, est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transversales (section fine), une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

## 1.2.Historique

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte [1].

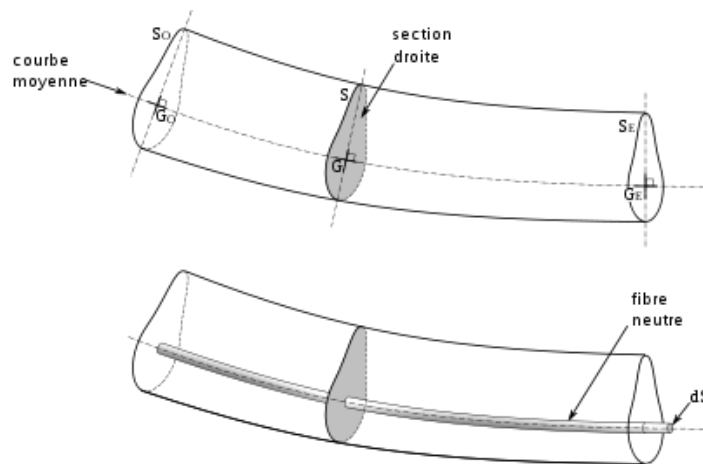
Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire [2]. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique.

Ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle [1].

### 1.3. Hypothèses sur le matériau

Pour étudier les poutres, on met en relation:

- les efforts de cohésion avec les efforts extérieurs ;
- les efforts de cohésion avec le tenseur des contraintes, grâce au principe d'équivalence ;
- le tenseur des contraintes avec le tenseur des déformations, grâce à la loi de Hooke généralisée ;
- et la forme finale de la poutre, c'est-à-dire le champ des déplacements, avec le champ de tenseur des déformations.



**Figure 1.1: Poutre à plan moyen**

On appelle « poutre » un solide engendré par des surfaces, appelées « sections droites », telles que :

- les centres de gravité des sections forment une courbe continue et dérivable, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur ;
- les sections sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles varient de manière continue et « lente » ;
- la dimension des sections est petite devant la longueur de la courbe moyenne ;
- le matériau est homogène, isotrope et linéaire élastique.

### **1.3.1. Homogénéité**

La notion la plus importante qu'il faut retenir concernant l'homogénéité est que, pour en parler, il faut nécessairement parler d'échelle. En effet, l'homogénéité se dit d'un milieu matériel qui présente des propriétés constantes dans toute son étendue. Ainsi, un milieu, quel qu'il soit, ne peut être considéré comme homogène qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre [1]. Prenons l'exemple d'un matériau très courant comme le béton : lorsqu'on regarde un pilier d'un point suffisamment loin, on voit le béton comme homogène. Pourtant le béton est un matériau composite de granulats, de ciment, d'eau et d'adjuvants.

On peut se poser la même question avec un acier : si à une certaine échelle celui-ci est homogène, on peut descendre à l'échelle des grains qui le composent pour rapidement se rendre compte que c'est, à l'échelle microscopique, un matériau hétérogène.

Il est aussi important de s'intéresser à la répartition spatiale des hétérogénéités dans le matériau. En effet si cette répartition est régulière (périodique par exemple), on pourra se ramener plus facilement à un matériau homogène équivalent.

Ainsi, pour l'étude des poutres, il faudra que la plus grande dimension transversale soit grande (supérieure à 10 fois) par rapport à la dimension de la plus grande hétérogénéité présente dans le matériau (taille des granulats du béton par exemple). On peut aussi ajouter qu'en pratique c'est souvent un choix de modélisation de considérer qu'un matériau est homogène [1].

### **1.3.2. Isotropie**

Un matériau est dit isotrope s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace. Par exemple, on peut le caractériser par le fait qu'un signal quelconque (son, courant électrique, etc.) peut se propager de la même manière dans toutes les directions.

De même que l'homogénéité, l'isotropie n'apparaît qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle [1;2] : par exemple, un polycristal formé d'un grand nombre de grains anisotropes disposés aléatoirement paraît isotrope, à grande échelle.

S'agissant des caractéristiques mécaniques des matériaux, il est parfois assez intuitif de dire si un matériau est isotrope ou non. Si l'on considère un matériau qui possède des fibres ayant une direction privilégiée (comme le bois), du fait de l'orientation particulière de ces fibres, le bois ne sera pas isotrope.

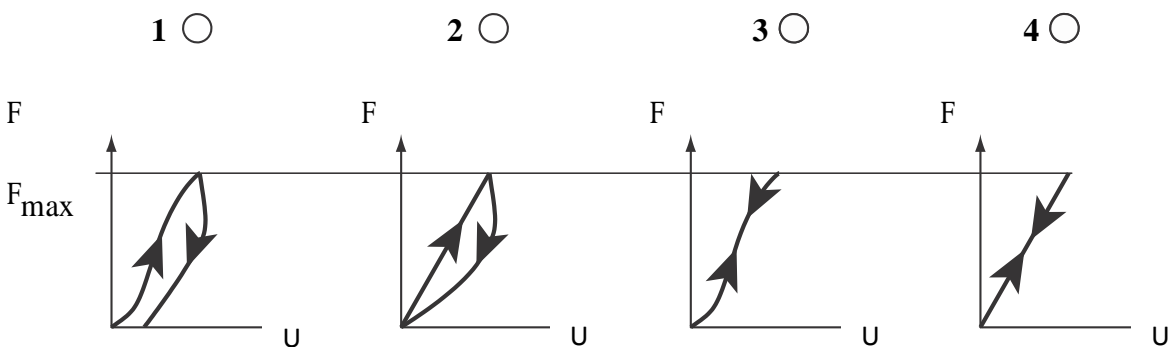
Une expérience simple menée avec une peau de banane permet facilement de se rendre compte qu'il est plus facile de déchirer la peau en tirant dans la direction perpendiculaire à la plus grande direction (direction orthogonale aux fibres de la peau) qu'en tirant dans la direction des fibres [1].

### 1.3.3. Élasticité linéaire

Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque. Cette notion est implicitement liée à la réversibilité totale et au fait qu'au cours du chargement et du déchargement le matériau ne dissipe aucune énergie. On peut aussi dire que lors du chargement, le chemin suivi sera le même que lors de la décharge. L'état actuel du matériau ne dépend donc que des charges appliquées à l'instant considéré et non du chemin suivi.

Pour mieux comprendre cette notion prenons l'exemple d'un ressort a priori inconnu. On réalise un essai simple sur le ressort en lui appliquant un effort croissant jusqu'à une valeur maximale puis décroissant jusqu'à 0. Au cours de l'essai, on mesure le déplacement de l'extrémité. On trace alors l'évolution de l'effort appliqué  $F$  en fonction du déplacement  $U$  mesuré [1].

Quelques graphiques obtenus pour différents ressorts sont tracés sur la figure 1.2. Pour la courbe 1, le ressort n'est pas élastique, puisqu'il ne revient pas dans sa configuration initiale après la décharge.



**Figure 1.2: Courbes effort/déplacement pour différents ressorts**

La courbe 2 ne décrit pas non plus un comportement élastique puisqu'à la charge et à la décharge, les chemins suivis ne sont pas les mêmes. Les courbes 3 et 4 sont toutes deux caractéristiques d'un ressort élastique. Par contre, seule la quatrième courbe caractérise un comportement élastique linéaire (La relation liant  $F$  à  $U$  étant linéaire).

## 1.4. Hypothèses fondamentales de la Résistance des matériaux:

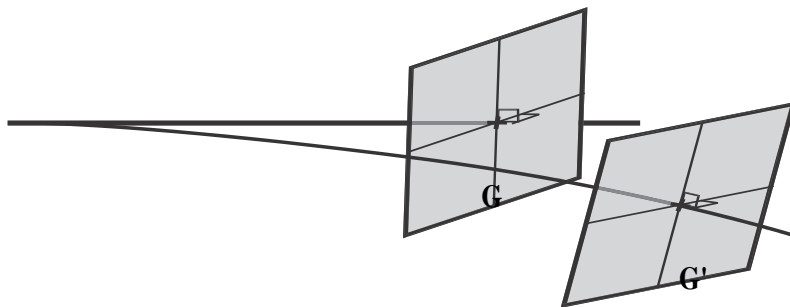
### 1.4.1. Principe de Saint-Venant et conséquences

Nous exploiterons le principe de Saint-Venant dont l'énoncé est : étant donné un solide déformable, si sur une partie ( $\Sigma$ ) de sa frontière on remplace une distribution de forces appliquées par une autre distribution, constituant un torseur équivalent et agissant également sur ( $\Sigma$ ), les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de ( $\Sigma$ ) [2].

La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RdM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons. En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale.

### 1.4.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli

L'hypothèse de Navier-Bernoulli stipule que les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre. Un énoncé souvent plus répandu est de dire que toute section droite (i.e. plane et perpendiculaire à la ligne moyenne) avant déformation reste droite après déformation (Fig. 1.3).



*Figure 1.3: Visualisation de l'hypothèse de Navier Bernoulli*

Cette hypothèse est bien vérifiée dans de nombreux cas de sollicitations simples.

Le fait que la section reste plane permet de caractériser le déplacement de toute section droite par un torseur appelé torseur des petits déplacements. Comme on se restreint ici à des poutres à plans moyens, ce torseur ne compte que quatre composantes non nulles associées :

- au déplacement dans la direction  $\vec{x}$  noté  $u$ ,
- au déplacement dans la direction  $\vec{y}$  noté  $v$ ,
- au déplacement dans la direction  $\vec{z}$  notée  $w$ .

– à la rotation autour de l'axe  $\vec{x}$  notée  $\theta$ ,

À partir de ce torseur, on peut aussi décrire le déplacement local d'un point quelconque M de la section (S) en déplaçant le torseur précédent au point M.

Avec ce qui précède, deux notions fondamentales sont introduites :

- les grandeurs globales, caractéristiques de la section droite,
- les grandeurs locales, caractéristiques d'un point de la section.

La grande force de la RdM consiste à résoudre les problèmes en ne travaillant que sur les grandeurs globales. La détermination des grandeurs locales, en particulier les contraintes que nous allons préciser par la suite (mais éventuellement aussi les déformations et les déplacements), est alors utile pour appliquer des critères de dimensionnement tels que par exemple :

- le critère en contrainte de type VON MISES,
- le critère en déformation (utilisé typiquement pour le béton),
- le critère en déplacement (par exemple la variation d'entraxe entre deux arbres d'une boîte de vitesse qui doit rester compatible avec les conditions de fonctionnement).

L'hypothèse de Navier-Bernoulli amène aussi la nécessité de restreindre le cadre d'étude à des sections particulières pour la torsion. En effet, on ne considèrera que la torsion des poutres à section circulaire : l'étude d'autres sections nécessiterait d'abandonner l'hypothèse de Navier-Bernoulli pour prendre en compte le gauchissement des sections [2] (pour une section droite, le gauchissement est le fait de se voiler en prenant une forme complexe).

### **1.4.3. Sollicitation élémentaire « TORSION »**

Lorsqu'un élément est soumis à une torsion, il se tord selon son axe longitudinal, qui passe par le centre de cisaillement de la section transversale [1]. Cependant, il ne se produit pas de torsion si la résultante du chargement externe appliqué passe par le centre de cisaillement de la section transversale. Dans des situations de calcul pratiques, il convient de préférence d'éviter la torsion en appliquant les charges de telle manière que leur résultante passe par le centre de cisaillement [2].

#### **1.4.3.1. Effets de la torsion**

Lorsqu'une force entraînant une sollicitation de torsion dans un élément est appliquée de telle sorte que la rotation de torsion de l'élément modifie la distance entre la ligne d'action de la force et le centre de cisaillement de la section transversale, il convient de prendre en compte cet effet pour la détermination de la sollicitation s'exerçant dans l'élément au niveau d'une section transversale. Il

convient en général de diviser la sollicitation de torsion totale  $T_{Sd}$  quelconque en deux parties telles que :

$$T_{Sd} = T_{v,Sd} + T_{w,Sd} \quad (1.1)$$

où :

$T_{v,Sd}$  est le moment de torsion de St Venant ;

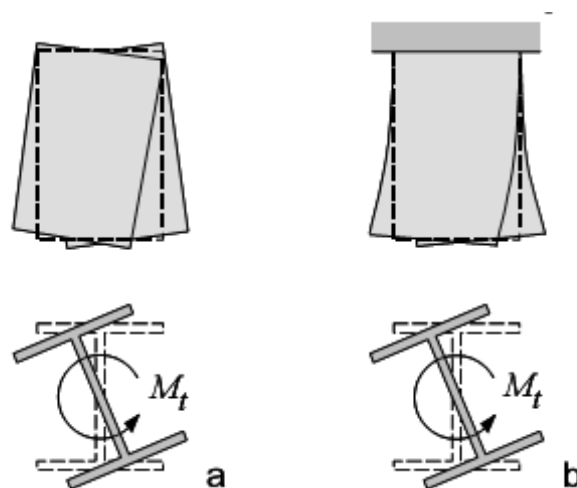
$T_{w,Sd}$  est le moment de torsion non uniforme.

Les efforts typiques de torsion selon Saint Venant se produisent seulement si la déformation peut avoir lieu librement [3]. Dans la pratique en matière de technologie c'est rarement le cas. La déformation peut être empêchée aux appuis, par exemple, une barre à section en I en acier soudée d'un plat épais

La déformation est également retenue à la position d'un chargement imposé de moment de torsion.

La raison est que le chargement donne un saut dans le moment interne de torsion, que donnerait à un saut dans la déformation s'il pourrait se produire librement. Clairement, les sections à gauche et à droite du chargement sont jointes, ainsi la déformation là est retenue. La déformation est également retenue où la section transversale change (les faisceaux non-prismatiques) [2].

Par conséquent, les déviations de la théorie de torsion se produisent. Si la déformation est complètement empêchée la rigidité locale de torsion est égale à  $GJ$ .

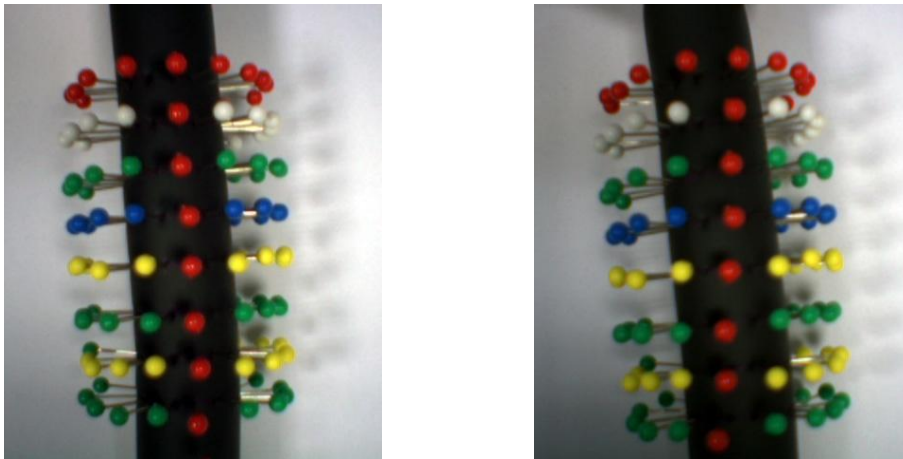


**Figure 1.4: Déformation d'une poutre en I due à la torsion [4]**

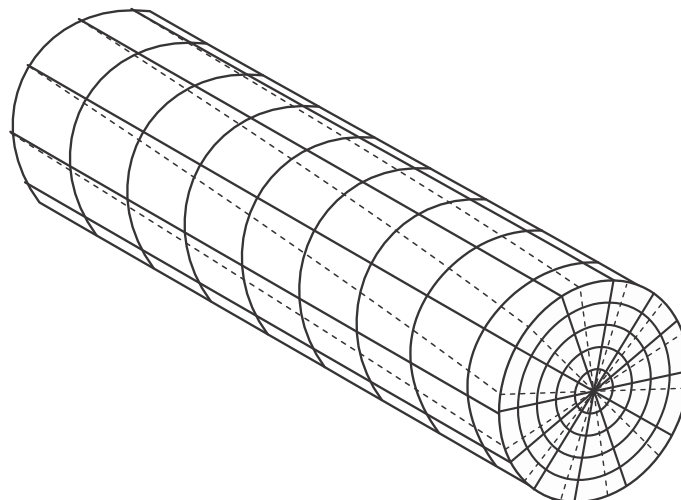
En 1940, Vlasov a développé une théorie de torsion dans laquelle il a retenu que la déformation est incluse [4]. Cette théorie s'appelle également « torsion de déformation » ou « la torsion non-uniforme ».

#### 1.4.3.2. Torsion de Saint Venant

On considère une barre cylindrique soumise à une de ces deux extrémités à un moment porté par l'axe de la barre, et bloquée en rotation à son autre extrémité.

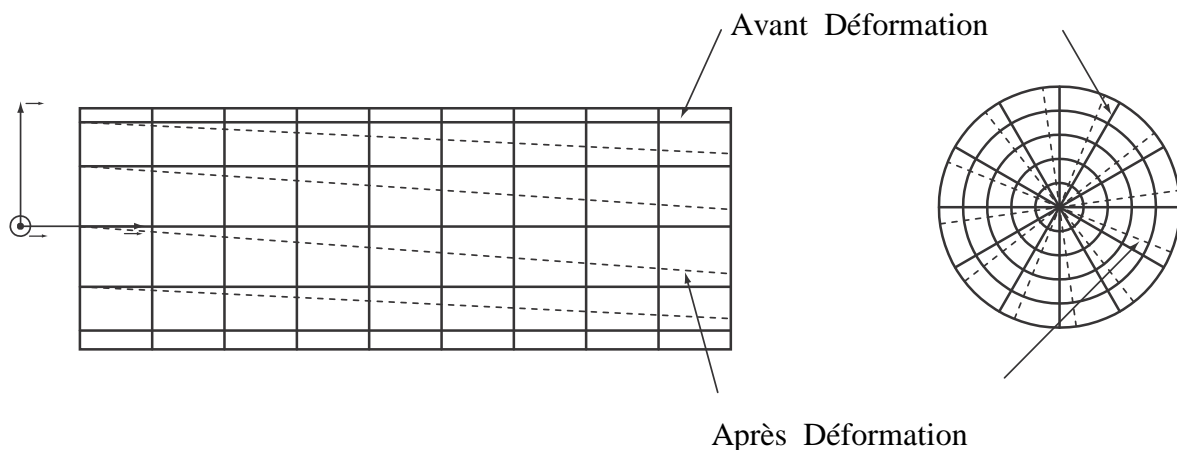


*Figure 1.5 : Photos de la "grille" avant (à gauche) et après (à droite) déformation [4]*



*Figure 1.6: Vue "3D" idéalisée de la grille avant et après déformation*

L'étude de cette barre montre immédiatement que l'on est bien dans le cadre de la torsion pure. Pour visualiser les déformations sur la barre, on a dessiné une grille sur la surface cylindrique, ainsi que sur l'extrémité de la barre. La grille est matérialisée par des épingles, et on en donne une représentation sur la figure 1.6. Sur la figure 1.7 on a aussi représenté une vue de face et une vue de côté de la même barre. Sur ces deux figures, on a représenté aussi la grille une fois déformée par le moment de torsion.



**Figure 1.7: Vue idéalisée de la grille avant et après déformation**

À l'issue de cette petite manipulation, on peut faire les constats suivants :

- Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe ce qui vérifie bien l'hypothèse de Navier-Bernoulli.
- La distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante.
- Le mouvement d'une section droite est uniquement une rotation autour de son axe et cette rotation est proportionnelle à sa distance à la section encastree.

Des remarques précédentes on peut donc déduire que dans une section droite, il n'y a pas de déformation longitudinale donc de contrainte normale, les sections ont seulement un mouvement de rotation sans aucune translation, les seules contraintes sont donc des contraintes tangentielles

Si une barre est déformée par des couples appliqués à ses extrémités et agissant dans des plans normaux à son axe, et si les extrémités sont libres de se mouvoir, on dit qu'il y a torsion pure [5].

Les seules contraintes produites sont de cisaillement. Leur distribution dépend de la forme de la section droite et est la même pour toutes les sections. Pour une barre mince, on peut supposer, avec une approximation suffisante, que la contrainte en chaque point est parallèle à la tangente correspondante à l'axe de la barre et est proportionnelle à sa distance à cet axe [1].

L'angle  $\theta$  de torsion par unité de longueur est : 
$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \quad (1.2)$$

Où  $M_t$  représente le couple et  $GJ$  la rigidité à la torsion de la barre ;  $G$  est le module d'élasticité au cisaillement et  $J$  est le moment d'inertie de torsion pure.

### **1.5. Conclusion**

Dans le présent chapitre, on a rappelé les notions fondamentales de la résistance des matériaux auxquelles sera fait référence lors de l'élaboration du modèle de calcul du moment critique élastique de déversement. Dans le chapitre suivant, on va passer en revue les différents principes d'équilibre et de stabilité afin de pouvoir choisir le critère d'instabilité approprié.

## CHAPITRE 2 – CRITERES D'INSTABILITE

### 2.1. Introduction

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques.

Tout d'abord, un critère de stabilité est une condition suffisante définissant un système instable. Plusieurs critères sont utilisés dans le domaine élastique, on peut citer [6]:

- le critère de bifurcation,
- le critère cinétique,
- le critère de l'énergie,

#### 2.1.1. Critère de bifurcation

Ce critère est aussi connu sous les noms de méthode géométrique, méthode classique, méthode de l'équilibre adjacent. Mathématiquement, c'est un problème de valeurs propres. Cette méthode est très ancienne et fréquemment utilisée de nos jours dans le domaine linéaire.

Dans cette méthode, on tente de répondre à la question suivante : soit une cause extérieure appliquée de manière quasi-statique sur un système ; pour quel niveau cette cause permet-elle au système de prendre plus d'une position d'équilibre différente mais très proche [6].

#### 2.1.2. Critère cinématique

Appelé aussi méthode dynamique, dans laquelle les équations d'équilibre sont établies pour un niveau fini de la cause extérieure ; bien entendu, ce niveau est inférieur à celui de la charge critique. On crée alors une perturbation dans le système dont on observe les influences sur le mouvement ; parallèlement, le niveau de charge est augmenté de plus en plus jusqu'à ce que le mouvement devienne illimité ; on a atteint le niveau critique. Par conséquent, l'équilibre est dit stable si pour une petite variation de la position d'équilibre du système, ce dernier revient à sa position initiale ou demeure dans une position très proche de celle-ci. La condition critique est atteinte quand l'écart entre la position initiale et finale cesse d'être limité. Notons encore que ce critère est purement dynamique et qu'il s'occupe du mouvement au voisinage de la position d'équilibre.

Nous dirons donc que l'équilibre d'un système est stable si, pour une perturbation suffisamment petite, le système évolue au voisinage de la configuration d'équilibre [6].

### **2.1.3. Critère de l'énergie**

Dans cette méthode, le système doit être conservatif. Ce dernier est en équilibre stable quand l'énergie potentielle totale est minimale.

Le critère de l'énergie est basé sur la théorie de Lagrange-Dirichlet. Il est considéré comme une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité. On l'utilise pour la découverte de la charge critique, simplement en cherchant le niveau de charge pour lequel le système ne répond plus de manière stable. Autrement dit, le système est stable si la variation de l'énergie potentielle totale est définie positive [6].

### **2.2. Critère de stabilité choisi**

Pour déterminer la charge critique élastique pour le cas étudié dans le cadre de ce travail, nous avons choisi comme critère de stabilité, le critère de l'énergie. Ce choix a été retenu après l'examen des travaux des chercheurs dans le domaine et qui nous a amené à déduire que l'emploi de ce critère nous conduit à approcher le comportement réel des éléments.

L'utilisation de la méthode choisie exige des connaissances qui seront détaillées dans ce chapitre.

### **2.3. Raisons de la non linéarité dans une structure**

Dans une structure, la relation entre les charges et les déformations ou entre les charges et les efforts internes peut devenir non linéaire pour deux raisons :

1.- Le matériau n'est pas élastique et n'obéit pas à la loi de Hooke. Cela définit la classe des problèmes de non linéarité physique.

2.- Si le matériau est linéaire mais que les déplacements de la barre changent de façon sensible l'action des forces, les conditions d'équilibre doivent être formulées dans la position déformée de la structure et ainsi, la relation entre les charges et les déformations ou entre les charges et les efforts internes n'est plus linéaire ; cela définit la classe de non linéarité géométrique.

Dans le cas général, il y a apparition simultanée des non linéarités physique et géométrique. La non linéarité complique considérablement les calculs, d'une part à cause des complications mathématiques inhérentes aux équations non linéaires, d'autre part à cause du choix, parmi plusieurs solutions mathématiques possibles, de celle qui est intéressante dans l'optique d'applications pratiques.

Ce problème ne se pose pas pour la théorie linéaire puisque la linéarité des relations implique l'unicité de la solution.

## 2.4. Etats d'équilibre stable et instable

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : «**L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles** » [6].

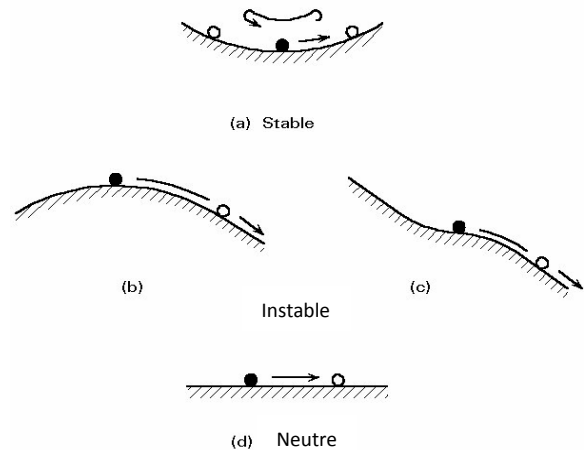
Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière.

Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est  $W$ , on a alors :

$W = T + \Pi = \text{constante}$  (principe de conservation de l'énergie.)

où,  $T$  représente l'énergie cinétique du système

et  $\Pi$  l'énergie potentielle.



**Figure 2.1 : Etats d'équilibres**

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe (figure 2.1).

Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre.

D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de  $\Pi$  minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et

vitesse et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface.

Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit « neutre » [6].

### 2.5. Critères généraux de la stabilité élastique

On considère les changements de la configuration d'un système à partir d'une configuration initiale ; tout changement dans cette configuration est considéré comme un déplacement.

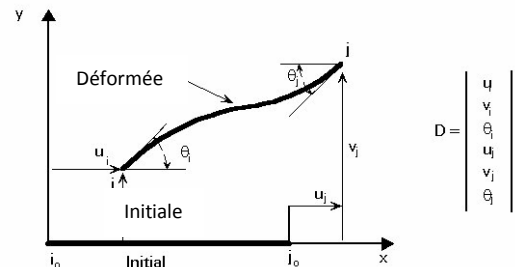


Figure 2.2 : Déformation d'une poutre sur appuis

Une configuration est déterminée au moyen d'un nombre fini de variables réelles indépendantes, appelées coordonnées généralisées, notées ici  $q_1, q_2 \dots q_n$  ou plus généralement  $q_i$ . Une poutre à travée unique peut, bien sûr, avoir un ensemble infini de coordonnées généralisées, comme par exemple les coefficients  $q_i$  de la série de Fourier représentant la flèche :

$$y = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (2.1)$$

Cette série peut cependant être approchée par un nombre fini de termes avec un nombre fini de coordonnées généralisées représentant les degrés de liberté du système.

Si l'on considère la poutre de la figure 2.3, les coordonnées généralisées peuvent être les degrés de liberté des nœuds  $i$  et  $j$  aux extrémités de la poutre : deux translations  $u$  et  $v$  et une rotation  $\theta$  par nœud (dans le plan).

On suppose ici que l'allure de la déformée élastique de la poutre peut être défini en

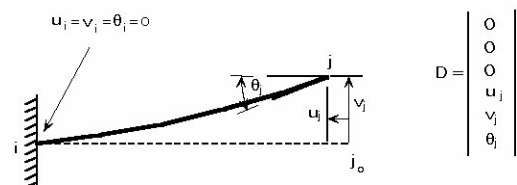


Figure 2.3 : Déformation d'une poutre

utilisant, par exemple, des fonctions d'interpolation.

Le vecteur déplacement de la poutre peut être noté :

$$D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j).$$

Aux appuis, les conditions aux limites imposent des restrictions aux variables généralisées.

Sur la figure 2.3, par exemple, les conditions aux limites sont telles que le vecteur déplacement est nul à l'extrémité encastree de la poutre console, d'où les restrictions imposées :

$$u_i = v_i = \theta_i = 0.$$

Une structure est généralement soumise à des forces intérieures et extérieures ; les forces intérieures sont généralement des forces de traction, c'est-à-dire des forces dues aux contraintes, sur les faces d'un cube infiniment petit de matériau. Les forces extérieures agissent sur le volume (par exemple la gravitation), et/ou sur la surface (forces ou couples de contacts) de l'élément de la structure [6].

Lors d'un changement dans la configuration du système, la loi de conservation de l'énergie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{ext} + Q = \Delta T + \Delta U \quad (2.2)$$

où :

$W_{ext}$  représente le travail créé dû aux forces extérieures au système,

$Q$  représente la quantité de chaleur transmise au système,

$\Delta T$  représente l'augmentation de l'énergie cinétique,

$\Delta U$  représente l'augmentation de l'énergie interne,

$U$  est souvent appelée énergie de déformation.

D'autre part, la loi de l'énergie cinétique est donnée par :

$$W = W_{ext} + W_{int} = \Delta T \quad (2.3)$$

où :  $W_{int}$  représente le travail des forces intérieures,

$W$  représente le travail créé par toutes les forces appliquées au système.

Les équations (2.2) et (2.3) donnent :

$$W_{int} = Q - \Delta U \quad (2.4)$$

Comme on ne prend en compte ici que des processus adiabatiques :  $Q = 0$

L'équation (2.4) donne : 
$$W_{\text{int}} = -\Delta U \quad (2.5)$$

N.B. :  $\Delta U$  n'existe que pour des systèmes déformables ; pour un système rigide on a :

$$W_{\text{int}} = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta U = 0 \quad (2.6)$$

Comme on ne prend en compte ici que les aspects statiques, on suppose qu'il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique pendant le déplacement (vitesse très faible) [6]:

$$\Delta T = 0 \quad (2.7)$$

Des équations (2.2), (2.3) et (2.6) donnent :

$$W_{\text{ext}} = \Delta U \quad (2.8)$$

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0 \quad (2.9)$$

La théorie de la stabilité élastique fournit des méthodes pour déterminer :

- La stabilité d'une configuration d'équilibre.
- La valeur critique de la charge à l'instabilité.

La plupart de ces méthodes dérivent des critères énergétiques généraux qui proviennent eux-mêmes des principes énergétiques de la mécanique.

## 2.6. Principe du travail virtuel

L'étude des problèmes de stabilité fait généralement appel au principe du travail virtuel. Le problème est d'abord de trouver la configuration d'équilibre réel du système, si elle existe, puis ensuite de vérifier si cette configuration est stable.

Un système donné peut prendre un nombre quelconque de configurations déformées compte tenu des limites fixées par les conditions aux limites, mais seule l'une d'elles correspondant à l'équilibre entre les charges réellement appliquées et les réactions correspondantes.

Supposons qu'un système soit dans une configuration caractérisée par les coordonnées généralisées  $q_1, q_2, \dots, q_n$  et pour laquelle on recherche l'équilibre.

Supposons que ce système soit soumis à des déplacements petits, arbitraires à partir de cette configuration, on ne demandera à ces déplacements que de satisfaire les conditions aux limites, la structure étant soumise à son chargement réel. Les petits déplacements considérés ici ne sont pas nécessairement réels ; ils sont imaginaires et ne servent qu'à des fins de comparaison, c'est pour

cela qu'on les appelle déplacements virtuels ; ces déplacements virtuels sont indépendants du chargement et sont notés ici  $\delta q_i$  [6].

Par conséquent, tous les travaux ou calculs énergétiques mis en œuvre sur ce système donneront lieu à des travaux ou énergie virtuels.

Pour un système déformable, l'équation (2.8) donne :

$$\delta W_{ext} = \delta U \quad (2.10)$$

où :  $\delta W_{ext}$  représente le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels et  $\delta U$  représente la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel. Le principe du travail virtuel peut être exprimé ainsi :

**«Un système déformable est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures est égal à la variation d'énergie de déformation, dans tout déplacement virtuel satisfaisant les conditions aux limites»**[6].

C'est là la forme du principe que l'on rencontre le plus souvent en analyse des structures ; cette condition est équivalente à la condition suivante, en utilisant l'équation (2.9) :

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (2.11)$$

## 2.7. Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire

Les forces intérieures et extérieures sont toutes conservatives (système parfaitement conservatif). Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées  $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$  dont la valeur  $U$  représente l'énergie de déformation exprimée par l'équation (2.5). De la même manière, les forces extérieures dérivent d'une fonction  $\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n)$  dont la valeur  $\Omega$  représente l'énergie potentielle de ces forces. On peut donc dire que toutes les forces dérivent d'une seule fonction scalaire  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , appelée fonction potentiel total, dont la valeur est donnée par l'énergie potentielle totale du système. Cette énergie potentielle totale peut être exprimée par :

$$\Pi = U + \Omega \quad (2.12)$$

La valeur totale de l'énergie potentielle est généralement indéterminée. Seules des différences d'énergie

potentielle peuvent être déterminées.

Parce qu'on suppose le système parfaitement conservatif, on a :

$$\delta W = -\delta \Pi \quad (2.13)$$

où  $\delta \Pi$  représente la variation de l'énergie potentielle totale dans le déplacement virtuel

et (2.11) et (2.13) donnent : 
$$\delta \Pi = 0 \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est une traduction analytique du principe de l'énergie potentielle totale stationnaire qui dit que :

**« De toutes les configurations géométriques possibles d'un système, celle qui correspond à l'équilibre entre les charges appliquées et les réactions correspondantes est celle pour laquelle l'énergie potentielle totale est stationnaire » [6].**

En résumé, il faut noter que, pour des systèmes parfaitement conservatifs, le principe du travail virtuel devient le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. Le principe est exact et très puissant et peut être utilisé pour développer des méthodes approchées de résolution des problèmes de stabilité en conception générale de structures.

## **2.8. Stabilité de l'équilibre**

On dit qu'un système est en état d'équilibre stable s'il a tendance à revenir à sa configuration d'équilibre d'origine dès l'arrêt de la perturbation (faible) qu'il subissait. Si cette légère perturbation a pour effet de faire quitter au système sa position d'équilibre, il est dit instable. On peut concevoir une situation intermédiaire dans laquelle la configuration légèrement déformée se maintient à l'arrêt de la perturbation. Cette situation détermine un état d'équilibre neutre (l'exemple classique de la bille dans un bol). Il est bien évident que les faibles déplacements dont il est question doivent être compatibles avec les conditions aux limites, de telle sorte qu'ils correspondent à de petites variations des coordonnées généralisées du système ; la discussion relative à la stabilité de l'équilibre peut alors se baser sur les déplacements virtuels.

Le principe du travail virtuel montre que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ; on a aussi vu que l'équilibre est stable pour un minimum relatif ; la condition de stabilité peut donc être écrite sous la forme :

**« L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale, en configuration d'équilibre constitue à la fois une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette configuration » [6].**

Si on note  $\Delta\Pi$  l'augmentation de l'énergie potentielle totale due à un déplacement virtuel à partir de la configuration d'équilibre, on a :

$\Delta\Pi > 0$ : Équilibre stable

$\Delta\Pi = 0$ : Équilibre neutre

$\Delta\Pi < 0$ : Équilibre instable

On peut voir que, parce que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ( $\delta\Pi = 0$ ), discuter de la stabilité revient à discuter des termes d'ordre supérieur qui apparaissent dans l'augmentation de l'énergie potentielle totale  $\Delta\Pi$ .

### 2.9. Équilibre neutre - chargement critique

L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale pour une configuration stable et si on considère l'équilibre neutre comme une limite de la stabilité, la condition de l'équilibre neutre peut être exprimée de la manière suivante :

$$\delta^2\Pi = 0 = \text{minimum} \quad (2.15)$$

Il s'avère donc très important d'un point de vue pratique de pouvoir déterminer les valeurs critiques des charges conduisant à l'équilibre neutre d'un système subissant un changement d'état de stabilité de sa configuration d'équilibre.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun  $\alpha$ , pour toutes les composantes du chargement et si l'on définit un système de chargement de référence  $S_1$  (correspondant à  $\alpha = 1$ ), les charges, à chaque instant d'une histoire du chargement proportionnelle (linéaire) sont égales à :

$$S = \alpha S_1 \quad (2.16)$$

Seul le facteur multiplicateur de charge est inconnu et la condition d'équilibre neutre nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres :

$$Det[a(\alpha)] = 0 \quad (2.17)$$

Où les coefficients  $a_{ij}$  sont des fonctions des charges appliquées et des caractéristiques du système, de telle sorte que le fait pour la matrice  $[a]$  d'être définie positive impose une condition à vérifier pour les charges afin que la configuration soit stable

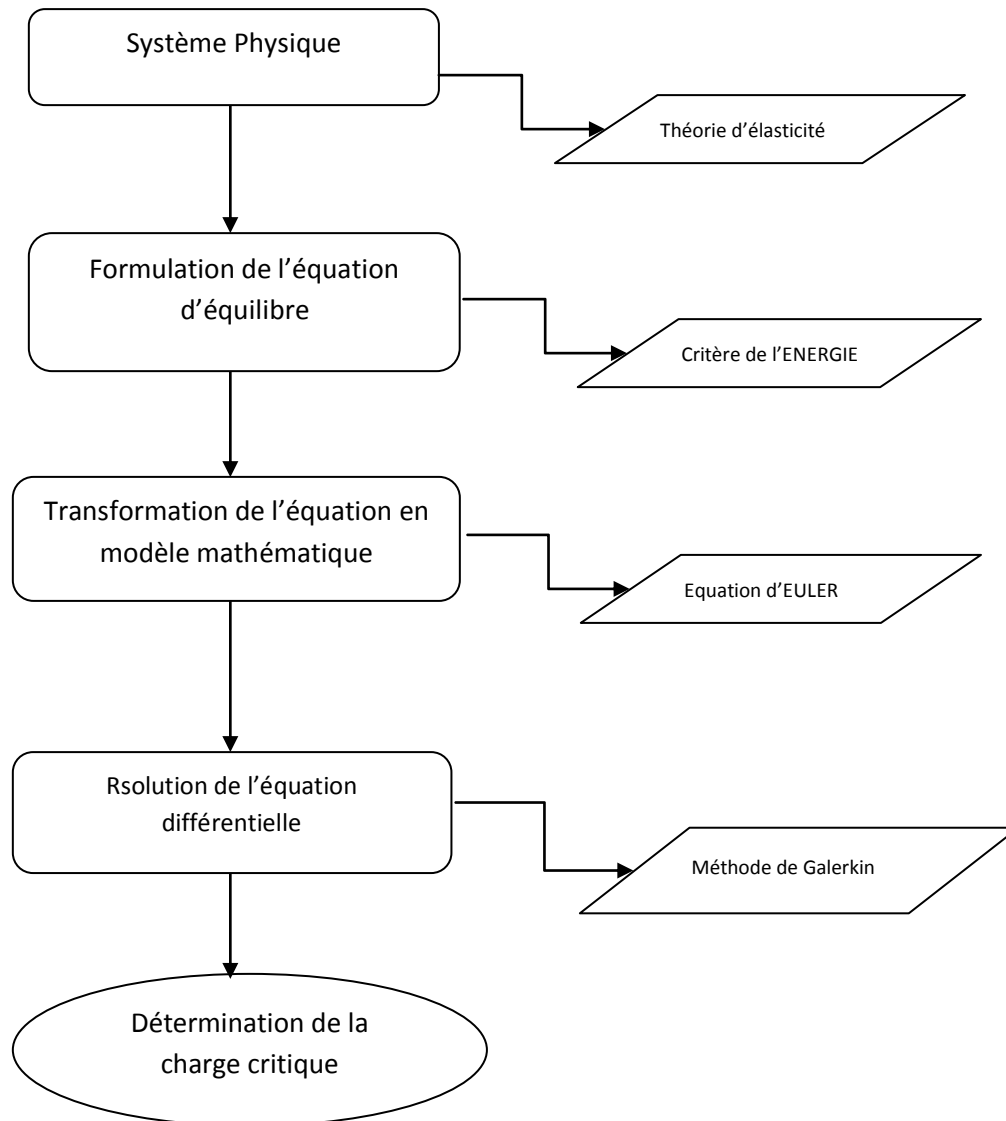
La résolution de l'équation (2.17) conduit à un ensemble de solutions  $\alpha$ , appelées  $\alpha_{cr}$ , dont le nombre est égal au nombre de coordonnées généralisées du système. Les vecteurs propres représentent la configuration déformée associée à chaque solution  $\alpha$ . La plupart de ces solutions mathématiques ne correspondent pas au comportement réel de la structure ; généralement, l'ingénieur ne s'intéresse qu'aux valeurs du chargement au-delà desquelles le système, stable en l'absence de charges, devient instable. Ces charges s'obtiennent normalement pour la plus petite valeur positive  $\alpha_{cr}^o$  de  $\alpha_{cr}$ , et, de ce fait, les charges critiques sont déterminées par :

$$S = \alpha_{cr}^o S_1 \quad (2.18)$$

## 2.10. Etude d'un élément poutre à parois minces

### 2.10.1. Introduction

Pour développer un modèle mathématique décrivant la réalité d'un système, il est nécessaire de formuler des équations qui respectent les lois physiques de ce dernier. On peut décrire la démarche en vue d'obtenir une solution par l'organigramme suivant :



*Figure 2.4 : Organigramme de détermination de la charge critique*

### **2.10.2. Equation différentielle d'équilibre**

Avant d'entrer dans le détail de la formulation de ces équations différentielles d'équilibre, il nous faut clarifier certains points d'où découleront les hypothèses faites dans notre travail.

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir des relations entre les contraintes et les déformations. Ces déformations devraient permettre, tout au moins théoriquement, de déterminer en tous points d'une barre les contraintes, les déformations et les déplacements, mais des complications considérables apparaissent dès que l'on veut expliciter les conditions aux limites et ces complications sont telles que l'on est pratiquement dans l'obligation d'introduire de nouvelles hypothèses simplificatrices, lesquelles trouvent leur justification dans le fait que l'une des dimensions des barres est prépondérante vis-à-vis des deux autres.

Ces hypothèses viennent essentiellement de l'application des trois principes suivants :

#### **2.10.2.1. Principe de continuité**

Ce principe est en quelque sorte une généralisation du principe de Navier-Bernoulli et il s'énonce comme suit :

« Deux sections droite infiniment voisines d'une barre deviennent après déformation deux sections droites infiniment voisines, gauches en général, mais superposables par simple déplacement » [7].

#### **2.10.2.2. Principe de l'équivalence**

Ce principe s'énonce comme suit:

« L'ensemble des contraintes qui agissent sur une section droite divisant une barre en deux parties A et B, et considérée comme appartenant par exemple à la partie A, est équivalent au système des forces extérieures appliquées sur la partie B de la barre » [7].

### 2.10.2.3. Principe de régularisation

Ce principe est aussi connu sous le nom de principe de Saint-Venant, et il s'énonce :

« Les contraintes dans une région éloignée des points d'application d'un système de forces sont pratiquement indépendantes de la manière dont ces forces sont réparties dans les zones chargées, et elles ne dépendent que des éléments de réduction de ce système de forces » [7].

Ces hypothèses résultant de ces trois principes sont acceptables uniquement pour des solides allongés satisfaisants à certaines conditions. Ces conditions définissent le domaine de validité des hypothèses de la théorie des barres et qui sont [2]:

- Le rapport a/b de la plus grande à la plus petite dimension de la section transversale doit rester inférieur à 10.
- Les dimensions transversales de la section droite doivent être petites vis-à-vis de la longueur L de la barre. Pour une barre droite, le rapport de la plus grande dimension transversale 'a' à la longueur L doit être tel que :

$$L/30 < a < L/5$$

- Le rayon de courbure r de la fibre moyenne de la barre ne doit pas subir de discontinuité ni en grandeur, ni en direction.
- Le profilé de la barre doit être constant ou, s'il est variable, sa variation doit être lente et progressive.

### 2.11. Conclusion

Les hypothèses admises dans notre travail, découlant partiellement de ce que nous venons d'exposer, peuvent se résumer ainsi :

- Les déformations sont petites.
- Les sections planes avant déformation restent planes après déformation ; pour le gauchissement de la section, on se base sur les hypothèses de Vlasov [4].
- Les charges appliquées sur la barre sont conservatrices, proportionnelles et indépendantes du temps.
- Les effets résultant du mode d'application des efforts sur la répartition des contraintes sont négligés.

- L'effet des efforts tranchants sur la déformation n'est pas négligé (cette hypothèse est justifiée au chapitre 4).
- Le matériau est homogène et isotrope.
- La courbe contrainte-déformation est identique en traction et en compression.

## CHAPITRE 3 – DEVERSEMENT DES POUTRES

### 3.1. Introduction:

A l'heure actuelle, les facteurs les plus importants dans l'étude d'un projet sont d'une part l'économie et d'autre part la sécurité. La satisfaction à l'exigence économique, dans le cas des structures en acier, nous incite à utiliser des éléments légers et par conséquent élancés. L'élancement élevé d'un élément l'expose à des phénomènes d'instabilités qui sont souvent prépondérants dans le dimensionnement de cet élément. Au cours de ces dernières années, les exigences de plus en plus pressantes de l'industrie ont donné l'essor à toute une série de recherches et d'études théoriques et pratiques sur les conditions qui gouvernent la stabilité d'éléments de construction tels que les barres et les tôles [12].

Les premiers problèmes d'instabilité élastique, se rapportant au flambement de pièces comprimées, ont été résolus il y a plus de deux cents ans par L. Euler [9]. A cette époque, les principaux matériaux de construction étaient le bois et la pierre. Leur résistance relativement faible nécessitait des pièces trapues pour lesquelles la question de la stabilité élastique ne jouait pas un rôle de premier plan. C'est pourquoi la théorie d'Euler relative à des pièces de forme élancée, demeura longtemps sans application pratique. Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier pour les chemins de fer que la question du flambement des pièces minces prit une importance pratique, l'emploi de l'acier conduisit naturellement à des types de constructions comportant des pièces élancées soumises à la compression.

Quels sont donc les principaux phénomènes d'instabilités à craindre lors d'une conception de structures composées principalement d'éléments barres ?

Habituellement, dépendant de la rigidité flexionnelle, de la rigidité de torsion et de la géométrie de la section, une barre peut être confrontée aux types d'instabilités suivants [6] :

- Flambement d'ensemble de la barre par compression ;
- Déversement d'ensemble de la barre par flexion ;
- Voilement local des parois de la barre par compression et par cisaillement.

Le déversement d'ensemble des barres fléchies sera étudié dans le présent chapitre.

### 3.2. Déversement des poutres:

Les poutres fléchies sont souvent constituées de profilés en double T, dont l'inertie transversale (axe faible z-z) est largement inférieure à celle relative à l'axe fort y-y. Cette situation est souvent la cause d'un phénomène d'instabilité appelé déversement si poutre n'est pas maintenue latéralement. La figure (3.1) illustre ce phénomène [10].

Il s'agit d'une poutre parfaitement encastrée, chargée verticalement à son axe libre.

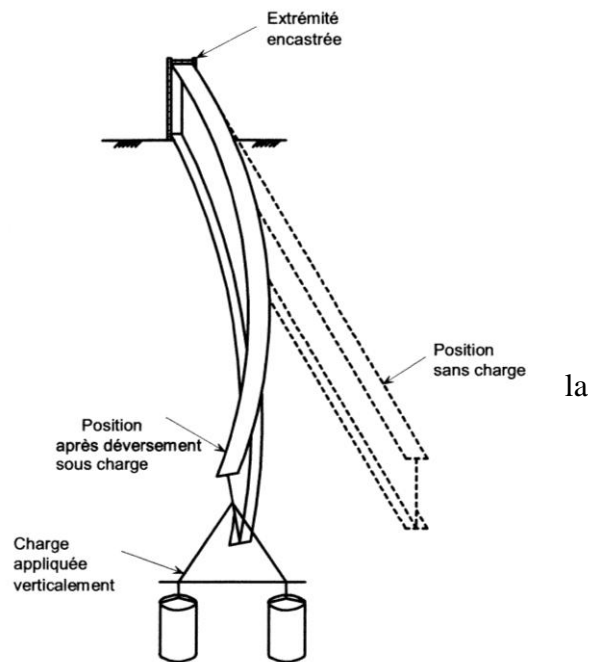


Figure 3.1: Phénomène de déversement

Pour une charge faible, la poutre se déforme verticalement tout en restant dans le plan principal de flexion autour de son axe fort y-y. au fur et à mesure que la charge augmente, la compression dans la semelle inférieure augmente et la partie comprimée du profilé finira par se dérober latéralement : la poutre déverse, ce qui fait subir à chaque section (en plus de la déformée verticale) une translation horizontale accompagnée d'une rotation autour de son centre de rotation.

Ce mode de ruine se produit pour une charge appelée charge ultime généralement inférieure à celle qui produirait la plastification de la section au droit de l'encastrement.

On pourrait considérer le déversement comme un flambement latéral de la semelle comprimée de la poutre dans un plan horizontal. Cette façon de voir les choses est trop simpliste et trop sécuritaire. En effet, à supposer que la moitié inférieure de la section ait tendance à flamber latéralement, elle n'est pas libre de le faire vu sa continuité avec la moitié supérieure tendue qui exige que la totalité de la section subisse une rotation. Ce raisonnement simple montre déjà que la résistance au déversement fera intervenir la rigidité de flexion transversale et la rigidité torsionnelle de la section.

Une approche de dimensionnement des poutres sensibles à la ruine par déversement doit nécessairement prendre en compte un grand nombre de facteurs (forme de section, degré de maintien latéral, type de chargement, imperfections initiales, contraintes résiduelles) et elle est donc relativement complexe. Il est instructif d'étudier tout d'abord un modèle fondamental simple selon la théorie élastique linéaire pour ensuite le développer de sorte à inclure des cas plus généraux [10].

Considérons le cas fondamental de la poutre droite à section en double T, sollicitée en flexion pure, reposant à ses extrémités sur des appuis simples empêchant toute rotation autour de l'axe longitudinal de la poutre et tout déplacement transversal mais autorisant la rotation autour de l'axe vertical z-z (appuis à fourche) [10].

Supposons que la poutre, de section constante et indéformable, et parfaitement rectiligne,

avec une âme parfaitement plane et verticale, sans imperfections structurales

(contraintes résiduelles,.....etc.), et faite d'un matériau infiniment élastique linéaire. De plus, la poutre n'est pas maintenue latéralement sur sa longueur entre ses appuis.

Dans telles conditions, et pour des valeurs du moment de flexion  $M$  faibles, la poutre fléchira dans le plan vertical sans déplacement hors du plan, jusqu'à ce que le moment  $M$  appliqué atteigne une valeur critique appelé moment critique de déversement pour laquelle la poutre se dérobera soudainement par fléchissement latéral et torsion, comme le montre le dessin ci-dessus pour une demi longueur de poutre.

Ce moment nécessaire pour provoquer le déversement dans le domaine élastique, le moment critique élastique  $M_{cr}$ , peut être déterminé selon la théorie élastique linéaire, en écrivant les conditions d'équilibre à l'état déformé de la poutre. Ces calculs, basés sur le modèle d'instabilité par bifurcation d'équilibre [10].

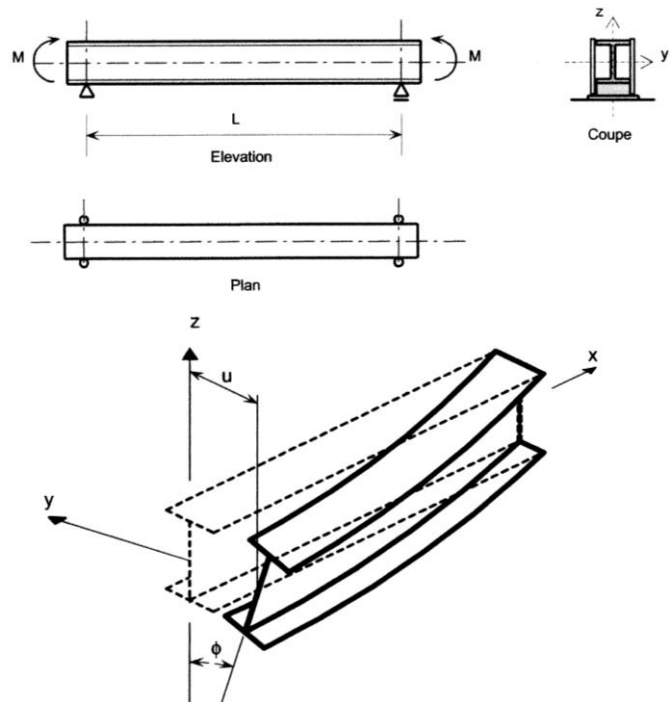


Figure 3.2: Déformation d'un profilé en double T

La présence de la rigidité latérale  $EI_z$  et des rigidités de torsion  $GJ$  et  $EI_w$  dans l'équation du moment critique est une conséquence directe des composantes latérales, et de torsion, des déformations du déversement.

L'importance relative de ces paramètres reflète le type de section transversale considéré. Ainsi le moment critique élastique d'un profil en caisson (qui possède des rigidités de flexion latérale et de torsion uniforme importantes) sera beaucoup plus élevé que celui des profils ouverts de diverses formes (dont les rigidités de flexion latérale et de torsion uniforme sont faibles). De même, parmi ces derniers, ce sont les profils à larges ailes qui présenteront les meilleures résistances au déversement, ou encore mieux, les sections composées pour lesquelles les éléments de renfort sont ajoutés loin de l'axe faible z-z [10].

La figure (3.3) montre les résultats des calculs du rapport du moment critique sur le moment plastique ( $M_{cr}/M_{pl}$ ) dans le cas de poutres de différentes longueurs, sur deux appuis à fourches, soumises à la flexion pure.

A titre d'exemple, quatre sections, de moment plastique  $M_{ply}$  sensiblement égal à 354 KN m, ont été utilisées : IPE 400, HEB 280, Tubes ou caissons de 200/400/10 et 300/300/12. Ils illustrent parfaitement ce qui est dit plus avant.

Le cas particulier précédent de la poutre à section, doublement symétrique, sur appuis à fourche et en flexion pure, se rencontre rarement en pratique dans une structure. En effet :

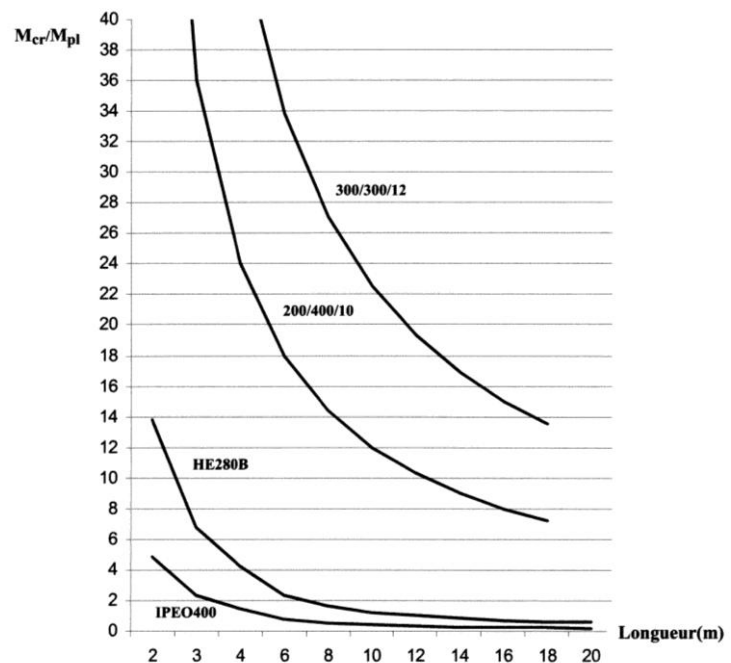


Figure 3.3: Variation de  $M_{cr}/M_{pl}$  en fonction de  $L$

- Les appuis peuvent être des encastremets (souvent des encastremets élastiques) à la flexion et à la torsion et peuvent empêcher totalement ou partiellement le gauchissement ;
- Les charges extérieures (appliquées au-dessus ou en-dessous du centre de torsion de la section) provoquent presque toujours une variation des moments le long de la poutre ;
- La section peut être dissymétrique.

Plusieurs chercheurs ont étudié le déversement afin de trouver une méthode de calcul générale, applicable à de nombreux cas pratiques. Ces études sont basées sur les mêmes hypothèses que la théorie élastique linéaire, mais tenant compte de manière plus détaillée, du type de chargement et de son niveau d'application, des conditions d'appui et de la forme de la section [10]. Les résultats des études théoriques, combinées aux résultats d'études expérimentales du déversement (pour prendre en compte les effets des imperfections sur la ruine par déversement), sont à l'origine des méthodes pratiques de vérification.

Les codes modernes des structures en acier, tel que AISC LRFD, BS 5950 et EC3, fournissent les méthodes et les procédures à suivre pour le dimensionnement des poutres à la stabilité au déversement [11]. Comme un premier pas, ces procédures exigent généralement la détermination du moment critique de déversement élastique.

### **3.3. Facteurs influençant la résistance au déversement :**

#### **3.1.1 Influence des conditions d'appuis :**

La valeur du moment critique de déversement est influencée par les conditions d'appui de la poutre en flexion latérale, c'est-à-dire autour de l'axe z-z (coefficient  $K_z$ ) et par la possibilité de gauchissement de la section à l'appui (coefficient  $K_w$ ) dont  $K_z$  et  $K_w$  sont les coefficients d'encastrement aux appuis [20].

Ces coefficients permettent, d'une façon pratique, d'intégrer l'effet des conditions d'appui en modifiant (en réduisant) la longueur de déversement de base à des appuis à fourche.

Pour une poutre simple, on a les deux cas extrêmes suivants :

- Rotation autour de l'axe z-z et gauchissement libre aux deux extrémités  $K_z=K_w=1.0$ .
- Rotation autour de l'axe z-z et gauchissement empêché aux deux extrémités  $K_z=K_w=0.5$ .

Théoriquement, pour chaque poutre réelle, il faudrait tenir compte de la déformabilité des éléments constituant les appuis, car on est presque toujours entre les cas extrêmes cités ci-dessus.

En pratique, il faut d'abord empêcher la rotation de la poutre autour de son axe longitudinal x-x et empêcher son déplacement transversal aux appuis [10].

##### **3.3.1.1. Appuis de rive :**

La théorie présentée dans le paragraphe précédent est basée sur l'hypothèse que les appuis aux extrémités de la poutre sont des appuis à fourche. On prêtera donc une attention particulière à ces

appuis de manière à garantir des conditions correspondant au moins à cette hypothèse. Pour cela, on s'assurera qu'ils empêchent toute translation horizontale et toute rotation. On se situera du côté de la sécurité si l'on néglige les effets positifs d'un éventuel encastrement latéral des ailes.

### 3.3.1.2. Appuis latéraux intermédiaires :

Il s'agit d'appuis verticaux intermédiaires pour la flexion dans le plan vertical comme dans les poutres continues, chaque travée pourra être considérée isolément sur deux appuis à fourche (car les travées voisines peuvent aussi déverser), en prenant en compte, sur la-dite travée, la forme du diagramme des moments résultant de la continuité.

S'il s'agit d'un ou plusieurs appuis latéraux intermédiaires, la présence de ces appuis ne modifie pas la flexion dans le plan principal de chargement, mais réduit la longueur de déversement, donc augmente le moment critique.

Théoriquement, ces appuis doivent être conçus de manière à empêcher tout déplacement latéral ou torsion de la section correspondante. En pratique, on se contentera souvent d'empêcher le déplacement latéral de la semelle comprimée [10].

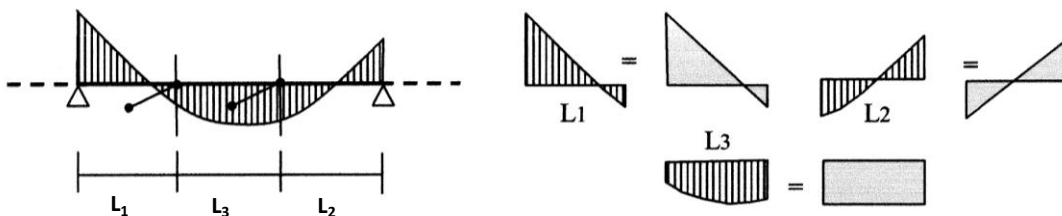


Figure 3.4: "Présence des appuis intermédiaires"

Lorsqu'une poutre comporte de tels maintiens latéraux, disposés à intervalles le long de sa portée, une méthode simplifiée consiste à traiter séparément les différents segments de poutre situés entre les maintiens. Ils feront l'objet, chacun, d'un calcul de moment critique et le dimensionnement de la poutre sera fondé sur le segment le plus dangereux [10].

Dans ce cas, il ya de fortes chances pour que les formes des digrammes des moments des différents tronçons ne figurent pas dans les tableaux des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  [20]. Il faudra donc les assimiler à d'autres cas, plus simples, qui placeront en sécurité.

Il conviendra également de toujours prendre un coefficient  $K_z$  égal à 1 et non 0.5 ou 0.7 car dans la déformée de déversement, la longueur non maintenue adjacente déverse également.

Les appuis intermédiaires doivent être dimensionnés pour reprendre un effort de stabilisation de l'ordre d'un à deux pourcents de l'effort dans la semelle comprimée de la poutre [10].

### 3.3.1.3. Poutres en porte-à-faux :

Si l'extrémité libre d'un porte-à-faux ne possède aucun appui latéral, sa longueur de déversement  $L_D$  est égale au double de sa portée [10].

### 3.3.2. Influence du point d'application de la charge :

Le moment critique de déversement élastique  $M_{cr}$  est fonction de la position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de cisaillement (ou de torsion) de la section de la poutre.

Pratiquement, on tient compte de ces deux situations à l'aide de la distance  $Z_g$  [20].

$Z_g$  est la distance du point d'application de la charge au centre de torsion C de la section ( $Z_g$  est positif si la charge agit vers le centre de torsion et négatif dans le cas contraire [20]).

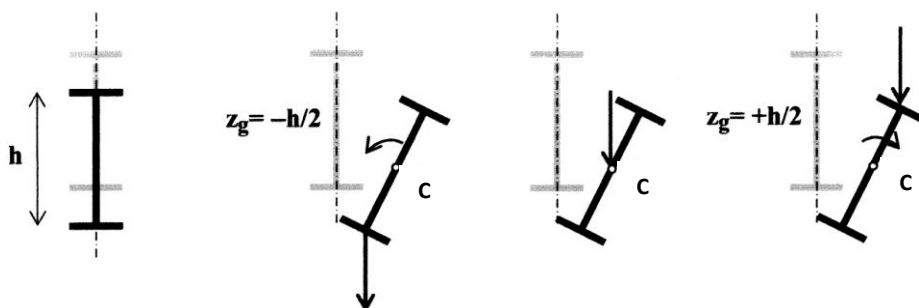


Figure 3.5: Différents points d'application des charges

Le point d'application des charges peut influencer le moment critique suivant que celles-ci, par leur position, créent un moment de torsion supplémentaire (stabilisant ou déstabilisant).

Pour des charges dirigées vers le bas, si elles sont appliquées au niveau de la semelle inférieure, elles exercent un moment secondaire stabilisant et l'hypothèse de calcul avec les charges au centre de torsion est conservatrice. Par contre, si elles sont appliquées au niveau de la semelle supérieure, elles exerceront un moment secondaire déstabilisant et il sera nécessaire d'en tenir compte [10].

La position des charges est prise en compte par la distance  $Z_g$  (distance entre le point d'application de la charge et le centre de torsion de la section) à introduire, avec son signe, dans la formule du moment critique de déversement élastique.

Bien évidemment,  $Z_g=0$  lorsque la charge est appliquée au centre de torsion.

La figure 3.6 montre l'effet du positionnement de la charge, au-dessus ou en-dessous du centre de torsion, sur la valeur du moment critique pour une poutre simple avec une charge uniformément répartie. L'influence de ce comportement devient d'autant plus significative que la hauteur du profil augmente et/ou que la portée de la poutre diminue, c'est-à-dire au fur et à mesure que la quantité  $L^2GJ/EI_w$  diminue.

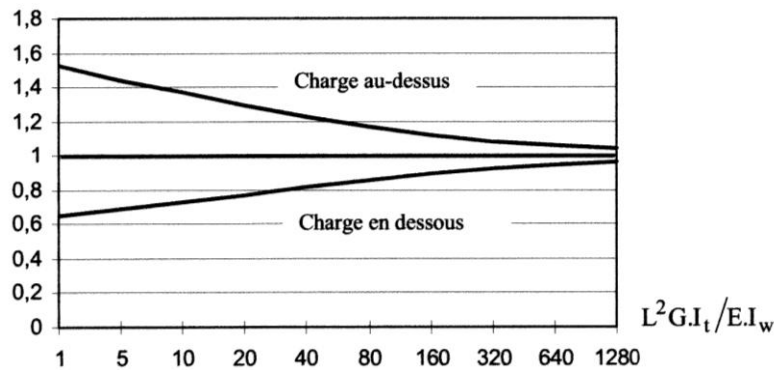


Figure 3.6: Influence du point d'application des charges sur  $M_{cr}$

### 3.3.3. Influence du type de chargement :

Le moment critique de déversement élastique  $M_{cr}$  est fonction du type de chargement de la poutre et de son système statique (conditions d'appuis) ; pratiquement, on en tient compte par les facteurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  [20]. Le cas le plus défavorable est celui de la poutre simple sollicitée par un moment de flexion constant. Dans le cas d'un moment linéairement variable ou de charges appliquées entre les appuis, la compression maximale n'est atteinte sur toute la longueur de la poutre que dans une seule section, ce qui se traduit par des facteurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  différents par rapport au cas du moment de flexion constant afin de tenir compte de cet effet [10].

### 3.4. Conclusion:

Le comportement élasto-plastique de l'acier, l'écroutissage, les imperfections géométriques (défauts de rectitude) et structurales (contraintes résiduelles) des poutres, et les excentricités inévitables des charges, font que, pour le déversement comme pour le flambement, le moment critique élastique n'est qu'une borne supérieure de la résistance ultime de la poutre à la flexion.

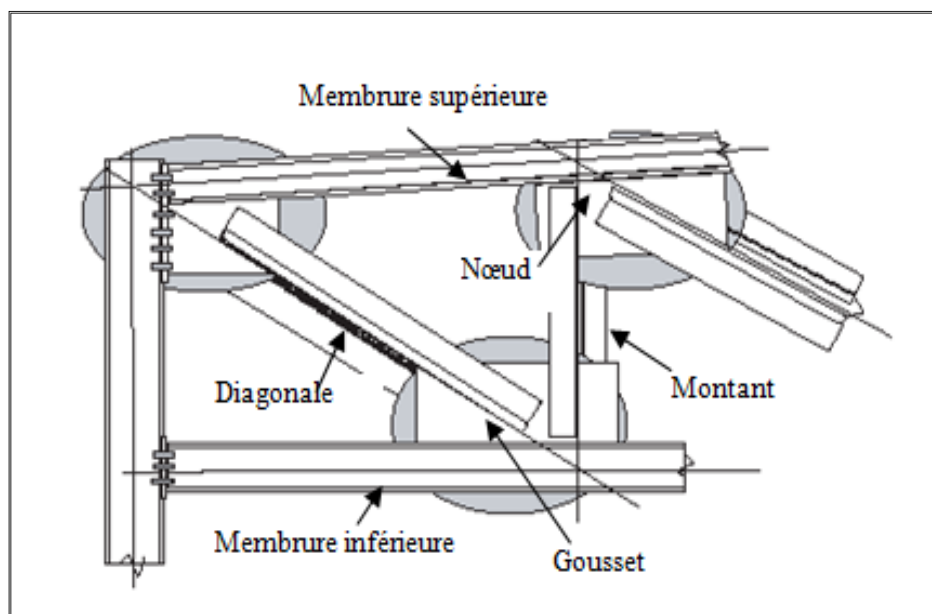
## CHAPITRE 4 - FLEXION DES POUTRES EN TREILLIS

### 4.1. Introduction

Dans ce chapitre, on présente dans un premier temps des généralités concernant les poutres en treillis notamment en ce qui concerne leur utilisation, fabrication, fonctionnement et désignation, les hypothèses utilisées habituellement dans leur calcul ainsi que leurs principaux avantages. Dans un deuxième temps, on présente les principaux aspects propres à la flexion des poutres en treillis c'est-à-dire la prise en compte des déformations dues à l'effort tranchant ainsi que la considération du flambement individuel des tronçons de la membrure comprimée. Enfin, on rappelle le calcul de quelques caractéristiques géométriques dans le cas des poutres en treillis.

### 4.2. Généralités sur les poutres en treillis

Une poutre à treillis est un assemblage de barres verticales, horizontales et diagonales formant des triangles, de sorte que la déformabilité est réduite lorsqu'il est soumis à un effort. Le principe d'un treillis est simple. La structure est composée d'une membrure supérieure et d'une membrure inférieure reliées par une triangulation de barres diagonales dans l'âme, de sorte que chacune des barres n'encaisse qu'un effort normal. Des effets additionnels peuvent exister, mais dans un treillis bien conçu, ils sont secondaires [12]. La figure 4.1 montre les différents éléments d'une poutre à treillis



*Figure 4.1 : Principe et terminologie des différents éléments d'une poutre à treillis*

#### 4.2.1. Utilisation des poutres à treillis

La poutre en treillis représente en générale la solution la plus légère pour la réalisation d'un élément fléchi d'une portée supérieure à environ 20m. Elle constitue la dernière étape après la poutre ajourée, dans la recherche d'une économie de matière. Elle exige cependant un important travail de fabrication pour préparer, assembler et peindre les éléments constituant le treillis, ce qui la rend parfois moins économique qu'une poutre en profilé laminé ou composée à âme pleine, plus lourde. Cette structure est devenue courante en construction à partir de la révolution industrielle, pour des ponts, hangars... Cette préférence d'utilisation découle de l'efficacité de l'assemblage, et de la possibilité de pré fabriquer les treillis, avant montage final sur le site de construction.



*Figure 4.2 : Hangar avec des poutres en treillis (fermes métalliques) [12]*

Le gain réalisé sur les poutres à âme pleine est manifeste quand on tient compte des âmes. Dans un treillis, l'âme est principalement évidée, d'où un poids plus faible et une prise au vent moins importante.

Les ponts à poutres en treillis sont particulièrement adaptés au franchissement de portées moyennes ou grandes. Ils se distinguent par une capacité portante élevée, une grande rigidité et un faible poids propre. D'autre part, on apprécie la transparence et la variété de formes de ces structures à barres minces.



*Figure 4.3 : Pont à poutres en treillis [12]*

Les ossatures en treillis ont en particulier fait leurs preuves pour la construction de ponts de petites portées sur des sites éloignés et difficilement accessibles. Le faible poids des différents composants simplifie le transport et le montage sur site.

#### **4.2.2. Fabrication des poutres à treillis**

Un treillis peut être assemblé à partir d'éléments de petites dimensions, facilement manipulables et transportables et tous les assemblages réalisés sur chantier peuvent être boulonnés. Les treillis peuvent présenter un avantage particulier pour les ponts, dans les régions où les accès sur le site sont difficiles ou lorsqu'on dispose de peu de main d'œuvre qualifiée [12].

Les types de barres sont choisis en fonction de leur position, de l'utilisation du treillis, de sa portée, du type d'assemblage et de l'aspect voulu. Les profils creux sont moins économiques que les profils ouverts mais leur entretien est moins coûteux et ils ont un meilleur aspect. Cependant, dans le cas de treillis exposés à des atmosphères corrosives, des fissures peuvent se produire à l'endroit des goussets. Les cornières sont les profils les plus couramment utilisés pour réaliser des treillis de faible portée.

La conception d'une poutre à treillis consiste à choisir le type de barres la composant, le nombre de nœuds, le moyen d'assemblage (soudures ou boulons) utilisé dans les nœuds ainsi que le procédé de fabrication en atelier et de montage sur chantier. Un grand nombre de paramètres intervient donc dans ce processus [12].

Les poutrelles laminées s'adaptent parfaitement à la confection des membrures et diagonales. Produits industriels de haute qualité, économiques et livrables en grandes quantités, elles sont disponibles dans une vaste gamme de dimensions. Leur résistance à la fatigue est élevée, et elles peuvent être galvanisées à chaud.

Les sections ouvertes des poutrelles facilitent l'exécution des assemblages. Tous les profilés peuvent être fournis dans des aciers à hautes performances caractérisés par une bonne ténacité, une limite d'élasticité élevée et une excellente soudabilité [13].

La conception traditionnelle des nœuds d'assemblage prévoit l'emploi de goussets. Une disposition différente des poutrelles et un choix judicieux des dimensions et des épaisseurs des profils permettent de souder directement les ailes des diagonales sur celles des membrures. Cet assemblage sans gousset est plus simple, et le coût de fabrication sensiblement réduit.

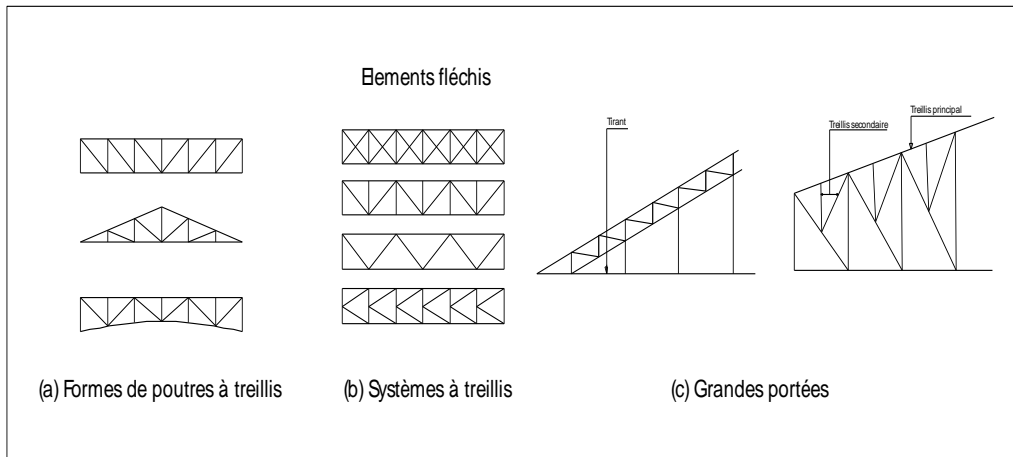
#### **4.2.3. Fonctionnement des poutres à treillis**

Les poutres en treillis ont le rôle analogue à celui des ailes d'un profilé laminé en double T (reprendre le moment de flexion), et d'un réseau de barres comprimées ou tendues (les diagonales et les montants) qui équilibrent l'effort tranchant tout en servant à l'introduction des forces concentrées. Leur principe consiste à remplacer l'âme pleine des sections de type I ou H par des barres inclinées qui constituent, avec les semelles devenues des membrures, des panneaux triangulés aptes à transférer l'effort tranchant d'un de leur bord à l'autre. L'équilibre d'un tel système soumis à des charges transversales peut être obtenu en développant exclusivement des efforts axiaux dans les barres qui les constituent.

#### **4.2.4. Désignation des poutres à treillis**

Les treillis ou les poutres en treillis sont classés selon leur forme générale et selon la disposition des barres. Les fermes triangulées sont utilisées pour supporter les couvertures. Les poutres treillis à membrures parallèles sont utilisées pour supporter les couvertures et les planchers et pour les ponts, bien qu'une hauteur additionnelle soit souvent nécessaire au niveau des piles dans le cas de ponts continus. Initialement on donnait des noms particuliers aux différents types de treillis, tels treillis Fink, poutre Warren, etc. Le treillis le plus couramment utilisé est à une travée, sur appuis simples et isostatique intérieurement, avec des nœuds supposés être des articulations.

On distingue plusieurs types de poutres à treillis. Suivant leur forme géométrique, on a par exemple des treillis à membrures parallèles, des poutres triangulaires, trapézoïdales (figure 4.4(a)). Suivant la disposition des barres, on peut réaliser différents systèmes de treillis (figure 4.4(b)) : treillis double (en croix de St-André), simple (avec une seule diagonale entre montants, ou sans montant en K).



**Figure 4.4 : Différents types de poutres à treillis**

Pour de grandes portées, on peut être amené à réaliser un treillis secondaire dans le but de diminuer la longueur de flambement des barres comprimées ou pour reprendre des charges excentrées appliquées entre les nœuds du treillis principal (figure 4.4(c)).

#### 4.2.5. Hypothèses de calcul des poutres à treillis

Les hypothèses qui sont en général faites pour le calcul des poutres à treillis sont les suivantes :

- Les nœuds sont considérés comme des articulations parfaites.
- Les axes des barres sont concourants aux nœuds.
- Les barres sont des éléments droits entre chaque nœud.
- Les charges sont appliquées au droit des nœuds.

Ces hypothèses servent à simplifier le calcul afin de n'avoir que des barres sollicitées par des efforts normaux. Même s'il est maintenant possible de tenir compte, avec les outils informatiques actuellement à disposition, de l'influence de non respect de ces hypothèses, on s'enfoncera dans la mesure possible de faire concorder la théorie à la réalité. Le non respect de ces hypothèses peut en effet introduire dans la poutre à treillis des moments de flexion (efforts dits secondaires) [13].

Dans beaucoup de cas, il n'est pas nécessaire de tenir compte des efforts secondaires lors du calcul du treillis. Ces efforts doivent cependant être calculés pour les treillis lourds utilisés dans les bâtiments industriels et les ponts. Les efforts secondaires sont créés par :

- L'excentrement au niveau des assemblages,
- les charges appliquées entre les nœuds du treillis,
- les moments produits par la rigidité des nœuds et les déformations du treillis.

Nous examinons ceci en détail ci-dessous :

a) **Excentrement des assemblages**

Les treillis devraient être conçus de sorte que les lignes moyennes des barres et les lignes de trusquinage soient concourantes aux nœuds. Sinon, les barres et les assemblages devront être calculés pour reprendre les moments créés par l'excentrement. Ces moments seront répartis entre toutes les barres aboutissant au même nœud, en fonction de leur rigidité. Les contraintes, créées par de faibles excentrements, sont souvent négligées.

b) **Charges appliquées entre les nœuds**

Les moments créés par ces charges doivent être calculés et les contraintes produites ajoutées à celles dues aux efforts normaux principaux ; de ce fait les barres concernées seront calculées comme des barres soumises à flexion composée. On rencontre souvent cette situation dans les treillis supportant les couvertures, lorsque les charges sont appliquées sur l'arbalétrier par l'intermédiaire de pannes qui ne reposent pas au niveau des nœuds.

La méthode de calcul manuel consiste à analyser d'abord le treillis sous les charges, appliquées aux nœuds, produisant des efforts normaux dans les barres. Ensuite on effectue une analyse supplémentaire pour calculer les moments fléchissant dans l'arbalétrier considéré comme une poutre continue. Le nœud, au faite, est un appui encastré à cause de la symétrie, mais le nœud, à l'autre extrémité de l'arbalétrier, doit être considéré comme un appui articulé ; d'une autre manière, le moment sera transmis dans la membrure inférieure si l'assemblage entre le treillis et le poteau est supposé être une articulation. L'arbalétrier est calculé sous effort normal et moment fléchissant.

c) **Moments créés par les assemblages rigides et les déformations des treillis**

Les contraintes créées par les moments secondaires sont importantes dans les treillis comportant des barres courtes et épaisses. Des règles approchées précisent quand on doit effectuer une telle analyse. Ces contraintes secondaires peuvent être négligées si l'élanement, dans le plan du treillis, des barres constituant les membrures est supérieur à 50 et si celui de la plupart des diagonales est supérieur à 100. Dans les treillis de bâtiment, les charges sont principalement statiques et il n'est pas nécessaire de calculer ces contraintes. Les contraintes créées par les moments secondaires ont une valeur maximum à l'extrémité des barres et ne sont pas la cause principale de la ruine. Cependant,

quand les effets de la fatigue sont importants, ces contraintes secondaires doivent être prises en compte [12].

#### 4.2.6. Avantages des poutres en treillis

Les expériences montrent, qu'en comparaison avec les poutres à âme pleine, les poutres à treillis :

- ✓ sont économiques à la construction, en exploitation et à la démolition ;
- ✓ offrent de multiples possibilités de conception architecturale;
- ✓ réduisent les délais de construction;
- ✓ s'adaptent à de faibles hauteurs de construction;
- ✓ s'adaptent facilement à la reconstruction d'un ouvrage grâce à leur poids léger;
- ✓ offrent l'avantage d'une fabrication industrielle dans des ateliers à l'abri des intempéries et sous contrôle de qualité;
- ✓ perturbent rarement la circulation car la livraison et le montage des éléments préfabriqués sont rapides et peuvent être programmés durant les heures creuses;
- ✓ n'exigent pas d'interruption de la circulation car ils ne nécessitent pas d'échafaudages ni d'étais;
- ✓ disponibilité en grandes longueurs permettant de réduire les travaux d'assemblage sur chantier ;
- ✓ possibilité de parachèvement au laminoir, permettant ainsi de livrer directement sur le site des éléments prêts au montage.

#### 4.3. Prise en compte de l'effort tranchant dans le calcul des déformations des poutres en treillis

Dans le cas des poutres à âme pleine, l'équation différentielle usuelle de la courbe élastique, suppose que la courbure est proportionnelle au moment fléchissant. Dans les poutres en treillis, les déformations dues à l'effort tranchants ne peuvent plus être négligées.

Considérons une poutre en treillis composée des deux membrures, des diagonales et des montants. Le déplacement dû à l'effort tranchant se manifeste par un allongement ou un raccourcissement des diagonales et des montants dans chaque panneau.

Pour le calcul des déformations des poutres en treillis, on peut utiliser soit les méthodes énergétiques [22] :

$$f_k = \sum_{i=1}^n \frac{N_{ki}^0 N_{Pi}}{E_i A_i} L_i \quad (4.1)$$

$f_k$  : déplacement vertical du nœud  $k$  ;

$N_{ki}^0$  : effort normal produit par une charge unitaire verticale appliquée au nœud  $k$  dans la barre  $i$  ;

$N_{Pi}$  : effort normal produit par les charges extérieures  $P$  de la barre  $i$  ;

$E_i$  : module d'élasticité longitudinale de la barre  $i$  ;

$A_i$  : aire de la section de la barre  $i$  ;

$L_i$  : longueur de la barre  $i$  ;

$N$  : nombre des barres du treillis.

Sinon, on peut calculer les déformations des poutres en treillis en utilisant le procédé de « l'âme équivalente », dont la détermination sera rappelée par la suite.

#### 4.3.1. Calcul des déformations des poutres en treillis en utilisant le procédé de « l'âme équivalente »

Considérons une poutre en treillis composée des deux membrures, des diagonales et des montants. En un point d'abscisse  $x$ , la déformée  $y(x)$  de cette poutre en treillis est la somme d'une déformée  $y_M(x)$  due au moment fléchissant  $M(x)$  et d'une déformée  $y_V(x)$  due à l'effort tranchant  $V(x)$  telle que :

$$EI \frac{d^2 y_M(x)}{dx^2} = -M(x) \quad (4.2)$$

et

$$\frac{d y_V(x)}{dx} = \frac{V}{GA_a} = \frac{1}{GA_a} \frac{dM(x)}{dx} \quad (4.3)$$

où :

$I$  est le moment d'inertie des membrures par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du treillis ;

$A_a$  est l'âme équivalente au treillis (diagonales et montants) ;

$G$  module de cisaillement (pour l'acier  $G = 8,1 \cdot 10^5$  daN/cm<sup>2</sup>).

Après l'intégration de l'équation (4-3) on obtient :

$$y_V(x) = \frac{1}{GA_a} (M(x) + C) \quad (4.4)$$

$C$  constante d'intégration (pour une poutre simplement appuyée,  $y_V(0)=0$  et  $M(0)=0$  et donc  $C=0$ ).

### 4.3.2. Ame équivalente des poutres en treillis

L'âme équivalente d'une poutre en treillis est l'aire  $A_a$  de la section de l'âme pleine dont les déformations seraient les mêmes sous l'influence de l'effort tranchant. Elle n'est qu'un artifice commode pour le calcul des déformations dues à l'effort tranchant. La poutre à âme pleine de référence serait généralement irréalisable ou instable [14].

La valeur de  $A_a$  est déterminée de façon que la déformation transversale d'un panneau de longueur  $l_m$  d'une pièce réticulée dont la distance entre les fibres neutres des membrures est  $h_0$ , et qui est soumise à un effort tranchant  $V_z$ , puisse s'écrire :

$$\Delta y_V = \frac{V_z l_m}{G A_a} \quad (4.5)$$

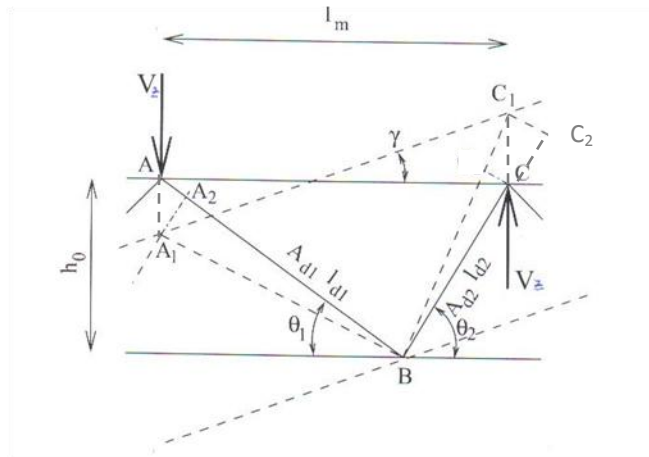


Figure 4.5 : Déplacement dans un treillis [14].

Supposons le point B fixe, la barre AB, de section  $A_{d1}$  et de longueur  $l_{d1}$  soumise à un effort

tranchant  $V_z \frac{l_{d1}}{h_0}$  se raccourcit de  $AA_2 = \frac{V_z}{h_0} \frac{l_{d1}^2}{EA_{d1}}$  et vient en  $A_1B$ , de sorte que :

$$AA_1 = AA_2 \frac{l_{d1}}{h_0} = \frac{V_z}{h_0} \frac{l_{d1}^2}{EA_{d1}} \frac{l_{d1}}{h_0} \quad (4.6)$$

Et donc :

$$AA_1 = \frac{V_z l_{d1}^3}{E h_0^2 A_{d1}} \quad (4.7)$$

De la même manière pour la barre BC qui vient en BC<sub>1</sub> de sorte que :

$$CC_1 = \frac{V_z l_{d2}^3}{Eh_0^2 A_{d2}} \quad (4.8)$$

En explicitant la déformation transversale du panneau AC, on a :

$$\Delta y_V = \frac{V_z l_m}{G A_a} = AA_1 + CC_1 \quad (4.9)$$

et donc :

$$\Delta y_V = \frac{V_z l_{d1}^3}{Eh_0^2 A_{d1}} + \frac{V_z l_{d2}^3}{Eh_0^2 A_{d2}} = \frac{V_z}{Eh_0^2} \left( \frac{l_{d1}^3}{A_{d1}} + \frac{l_{d2}^3}{A_{d2}} \right) \quad (4.10)$$

En considérant les équations (4.9) et (4.10), on obtient :

$$\frac{V_z l_m}{G A_a} = \frac{V_z}{Eh_0^2} \left( \frac{l_{d1}^3}{A_{d1}} + \frac{l_{d2}^3}{A_{d2}} \right) \quad (4.11)$$

En calculant  $\frac{G}{E} = \frac{1}{2,6} = 0,385$ , on obtient la formule suivante :

$$\frac{1}{A_a} = \frac{0,385}{l_m h_0^2} \left( \frac{l_{d1}^3}{A_{d1}} + \frac{l_{d2}^3}{A_{d2}} \right) \quad (4.12)$$

qui peut également se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{A_a} = \frac{0,385}{\cot g \Theta_1 + \cot g \Theta_2} \left( \frac{1}{A_{d1} \sin^3 \Theta_1} + \frac{1}{A_{d2} \sin^3 \Theta_2} \right) \quad (4.13)$$

### 4.3.3. Ame équivalente pour des cas particuliers de treillis

#### 4.3.3.1. Cas particulier de treillis en V symétrique :

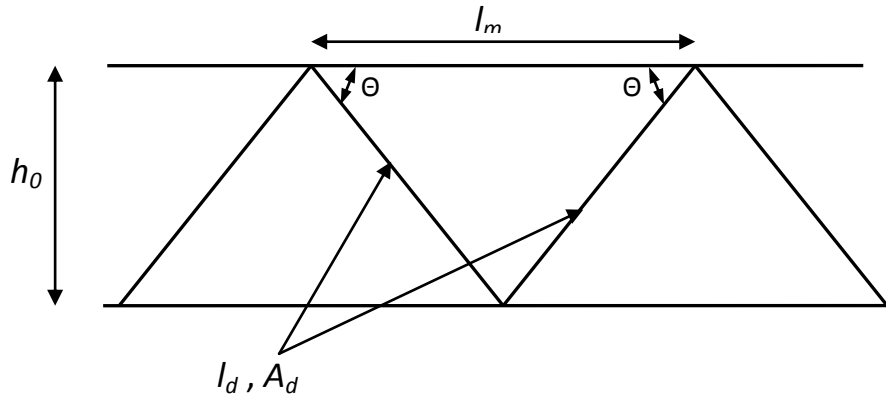
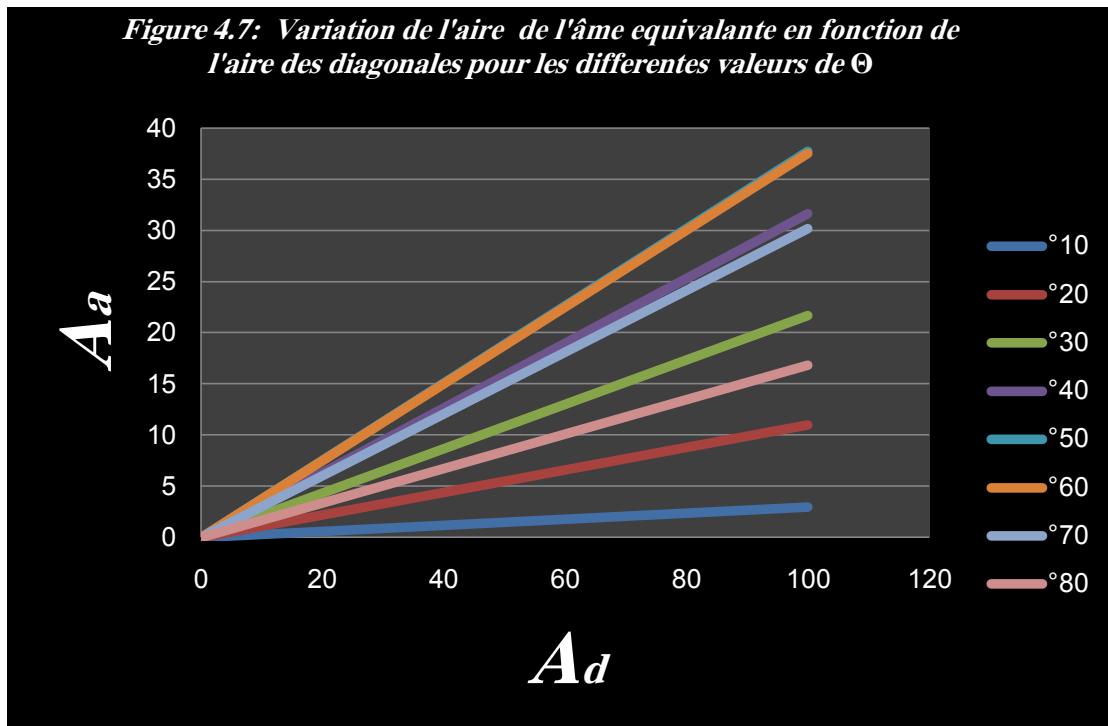


Figure 4.6 : Treillis en V symétrique

Avec les notations de la figure (4.6), l'expression de l'âme équivalente devient :

$$A_a = 1,3A_d \frac{l_m h_0^2}{l_d^3} = 2,6A_d \sin^2 \Theta \cos \Theta \quad (4.14)$$



La figure 4.7 montre la variation de l'aire de l'âme équivalente en fonction de l'aire des diagonales pour des différentes valeurs de  $\Theta$ . On remarque que, pour une section donnée  $A_d$  de la diagonale, la valeur de  $A_a$  passe par un maximum. Ce maximum est précisément égal à  $A_d$  pour  $l_m = 1,4 h_0$  ( c'est-à-dire pour  $\Theta = 55^\circ$ ).

#### 4.3.3.2. Cas particulier de treillis en N :

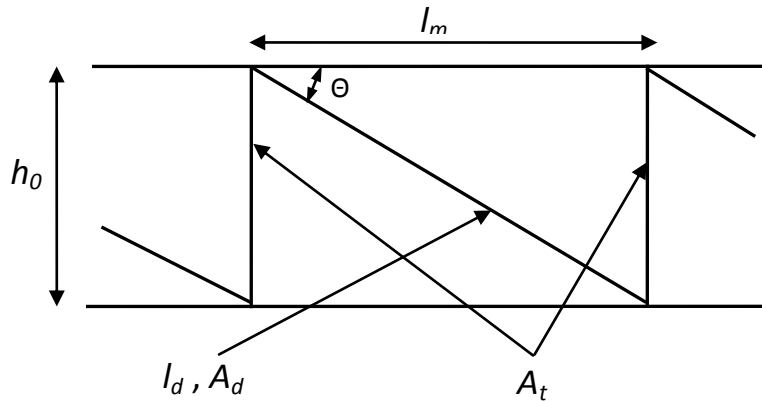


Figure 4.8 : Treillis en N

Avec les notations de la figure (4.8), l'expression de l'âme équivalente devient :

$$A_a = \frac{2,6 A_d \frac{l_m}{h_0}}{\frac{A_d}{A_t} + \frac{l_d^3}{h_0^3}} = \frac{2,6 A_d \cot g \Theta}{\frac{A_d}{A_t} + \frac{1}{\sin^2 \Theta}} \quad (4.15)$$

#### 4.3.4. Exemple de calcul des déformations d'une poutre en treillis

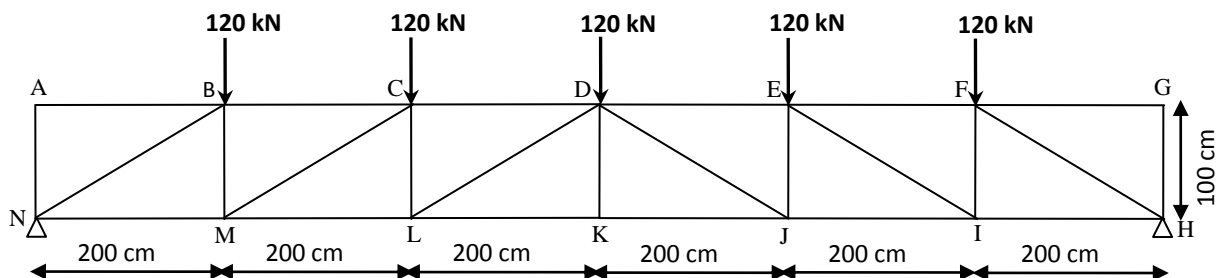


Figure 4.9 : Exemple de calcul :données

Pour la poutre en treillis schématisée à la figure (4.9), on se propose de calculer le déplacement vertical maximal en utilisant la méthode énergétique (équation (4.1)), puis en appliquant la notion d'âme équivalente ;

#### 4.3.4.1. Calcul par la méthode énergétique

<b>Tableau 4.1 :Détails de calcul pour chaque barre</b>						
<b>Barres</b>	<b>Profils</b>	$L_i$ [cm]	$A_i$ [cm <sup>2</sup> ]	$N_{Pi}$ [daN]	$N^0_{ki}$	$N_{Pi} \cdot N^0_{ki} \cdot L_i / A_i$ [daN.cm / cm <sup>2</sup> ]
AB	1/2HEB360	200	90,3	0	0	0
BC	1/2HEB360	200	90,3	-60000	-1	132890
CD	1/2HEB360	200	90,3	-96000	-2	425249
DE	1/2HEB360	200	90,3	-96000	-2	425249
EF	1/2HEB360	200	90,3	-60000	-1	132890
FG	1/2HEB360	200	90,3	0	0	0
HI	1/2HEB360	200	90,3	60000	1	132890
IJ	1/2HEB360	200	90,3	96000	2	425249
JK	1/2HEB360	200	90,3	108000	3	717608
KL	1/2HEB360	200	90,3	108000	3	717608
LM	1/2HEB360	200	90,3	96000	2	425249
MN	1/2HEB360	200	90,3	60000	1	132890
AN	2UPN80	100	22	0	0	0
BM	2UPN80	100	22	18000	0,5	40909
CL	2UPN80	100	22	6000	0,5	13636
DK	2UPN80	100	22	0	0	0
EJ	2UPN80	100	22	6000	0,5	13636
FI	2UPN80	100	22	18000	0,5	40909
GH	2UPN80	100	22	0	0	0
BN	2UPN140	223,6	40,8	-67082	-1,1	404399
CM	2UPN140	223,6	40,8	-40249,2	-1,1	242640
DL	2UPN140	223,6	40,8	-13416,4	-1,1	80880
DJ	2UPN140	223,6	40,8	-13416,4	-1,1	80880
EI	2UPN140	223,6	40,8	-40249,2	-1,1	242640
FH	2UPN140	223,6	40,8	-67082	-1,1	404399
$\sum_{i=1}^n \frac{N^0_{ki} N_{Pi}}{A_i} L_i$						5232700

Tous les détails de ce calcul sont donnés au tableau (4.1). Le déplacement vertical maximal au point D est égal donc à :

$$f_D = \sum_{i=1}^n \frac{N_{ki}^0 N_{Pi}}{E_i A_i} L_i = \frac{5232700}{2100000} = 2,491 \text{ cm} \approx 2,5 \text{ cm} \quad (4.16)$$

#### 4.3.4.2. Calcul à partir du procédé de l'âme équivalente

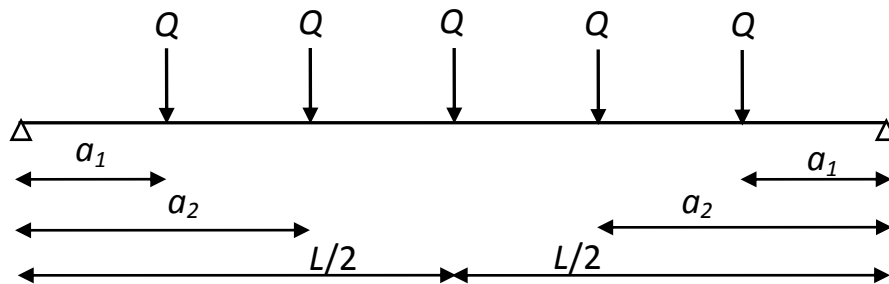


Figure 4.10 : Poutre à âme pleine équivalente à la poutre en treillis

#### Données :

$$\begin{aligned} Q &= 120 \text{ kN} & ; & & a_1 &= 2 \text{ m} & ; & & a_2 &= 4 \text{ m} & ; & & L &= 12 \text{ m} \\ h_0 &= 1 \text{ m} & ; & & A_d &= 40,8 \text{ cm}^2 & ; & & A_t &= 22 \text{ cm}^2 & ; & & A_m &= 90,3 \text{ cm}^2 \\ l_m &= 2 \text{ m} & ; & & l_d &= \sqrt{l_m^2 + h_0^2} = 2,236 \text{ m} & ; & & I &= 2 \times A_m \times \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = 451500 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

On prend la poutre à âme pleine équivalente à la poutre en treillis, schématisée à la figure (4.10). Le déplacement vertical maximal à mi-travée est :

$$y(L/2) = f = f_M + f_V \quad (4.17)$$

où :

$$f_M = \frac{QL^3}{48EI} + \frac{Qa_1}{24EI} (3L^2 - 4a_1^2) + \frac{Qa_2}{24EI} (3L^2 - 4a_2^2) = 1,671 \text{ cm} \quad (4.18)$$

et :

$$f_V = \frac{M(L/2)}{GA_a} \quad (4.19)$$

Dans ce cas, on a :

$$M(L/2) = \frac{QL}{4} + Qa_1 + Qa_2 = 1080 \text{ kN.m} \quad (4.20)$$

et :

$$A_a = \frac{2,6 A_d \frac{l_m}{h_0}}{\frac{A_d}{A_t} + \frac{l_d^3}{h_0^3}} = 16,28 \text{ cm}^2 \quad (4.21)$$

D'où :

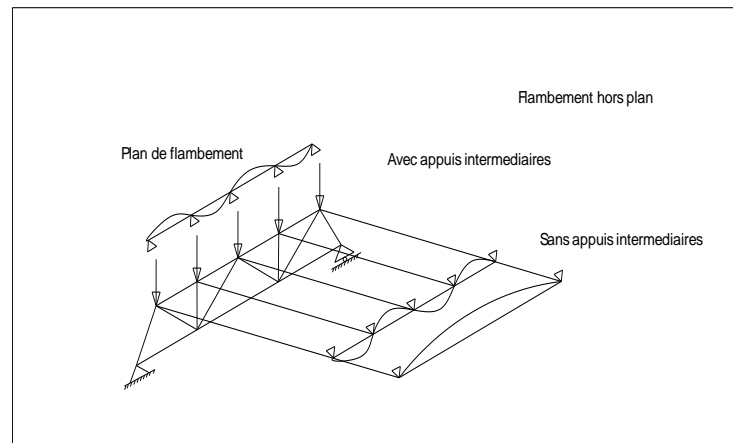
$$f_v = \frac{1080 \times 10^4}{8,1 \times 10^5 \times 16,28} = 0,819 \text{ cm} \quad \text{et} \quad f = f_M + f_v = 1,671 + 0,819 = 2,49 \text{ cm} \approx 2,5 \text{ cm}$$

Cette dernière valeur du déplacement vertical est identique à celle qui résulte de l'application de l'équation (4.16).

#### 4.4. Flambement individuel des tronçons membrures comprimées

Le principe des poutres en treillis consiste à remplacer l'âme pleine des sections de type I ou H par des barres inclinées qui constituent, avec les semelles devenues des membrures, des panneaux triangulés aptes à transférer l'effort tranchant d'un de leur bord à l'autre. L'équilibre d'un tel système soumis à des charges transversales peut être obtenu en développant exclusivement des efforts axiaux dans les barres qui les constituent. Dans les treillis en N, une barre de treillis sur deux est orientée parallèlement à l'effort tranchant ; dans les treillis en V, les barres de treillis présentent des inclinaisons alternées par rapport aux membrures. Dans les deux cas une barre de treillis sur deux est tendue, l'autre comprimée. Par contre, une membrure est comprimée, l'autre tendue.

Habituellement, pour justifier la stabilité des barres comprimées, les longueurs de flambement à prendre en compte dans le plan des poutres en treillis sont les longueurs d'épure entre nœuds de triangulation : ce choix est cohérent avec une hypothèse de liaisons purement articulées entre les barres. En revanche, lorsqu'il s'agit du flambement des barres comprimées dans la direction normale au plan de la poutre, pour les barres de treillis, la référence reste la longueur d'épure entre nœuds, par contre, pour la membrure comprimée, la longueur de flambement est prise égale à la distance entre points de maintiens hors du plan de la poutre en treillis (figure 4.11)



**Figure 4.11 : Flambement de la membrure comprimée d'une poutre à treillis**

L'instabilité latérale de la membrure comprimée est équivalente, pour la poutre en treillis considérée dans son ensemble, au déversement d'une poutre à âme pleine, et donc, les barres de treillis opposent à cette instabilité une certaine résistance. Ainsi, le fait qu'en terme de calcul, on se ramène à un problème pur de flambement, est une hypothèse conservatrice. Cependant, en traitant le problème de l'instabilité latérale de la membrure comprimée comme un problème de déversement en remplaçant la poutre en treillis comme une poutre à âme pleine par le procédé de « l'âme équivalente au treillis », on néglige donc le fait que cette âme pleine n'existe pas en réalité et que les tronçons de membrure risquent de flamber individuellement entre nœuds de triangulation.

Pour prendre en compte le phénomène réel, on propose donc d'intégrer au niveau de la vérification finale les réductions de résistance au déversement dues au flambement individuel des tronçons de membrures comprimées comme cela est proposé par la méthode de vérification donnée par les règles CM66 [14] (voir annexe A).

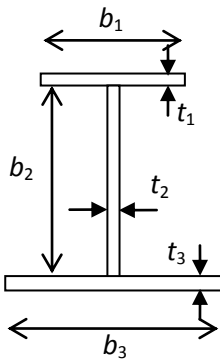
#### **4.5. Moment d'inertie de torsion des poutres en treillis**

Dans les poutres en I fléchies par rapport à l'axe de forte inertie et non prémunies contre le déversement, l'ensemble des zones comprimées tend à flamber latéralement, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire au plan de flexion. L'ensemble des zones tendues tend à s'opposer à ce déplacement latéral, aussi le déversement est-il accompagné d'une rotation des sections autour de l'axe longitudinal de la barre, rotation qui fait intervenir les caractéristiques de rigidité à la torsion de la poutre. Parmi ces caractéristiques, on rappelle ci après la méthode de calcul du moment d'inertie de torsion.

#### 4.5.1. Définition

On appelle moment d'inertie de torsion d'un profil une grandeur  $J$  déterminée en fonction des caractéristiques de la section transversale de façon que le moment de torsion  $M_x(x)$  et la rotation par unité de longueur  $d\theta/dx$  soient liés par la relation :

$$M_x(x) = GJ \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (4.22)$$



Pour un profil à parois pleines, on décompose la section transversale en rectangles de largeur  $b_i$  et d'épaisseur  $t_i$ , la valeur du moment d'inertie de torsion est la somme des quantités  $(b_i t_i^3/3)$  relatives à tous ces rectangles :

$$J = \sum \frac{b_i \times t_i^3}{3} \quad (4.23)$$

Figure 4.11 : Profil à parois pleines

#### 4.5.2. Poutres en treillis

Le moment d'inertie de torsion d'un élément à treillis est donné par :

$$J = J_m + J_{m'} + J_{tr} \quad (4.24)$$

où  $J_m$  et  $J_{m'}$  représentent les moments d'inertie de torsion individuels des membrures calculés comme indiqué en (4.23) ci-dessus ( $J_m = J_{m'}$  pour les poutres symétriques) ; et  $J_{tr}$  représente le moment d'inertie de torsion de l'ensemble du treillis, calculé comme il est indiqué ci-après en fonction du coefficient  $K_{tr}$  qui prend les valeurs suivantes selon les conditions d'encastrement des treillis sur les membrures :

$K_{tr} = 1$  pour l'encastrement parfait (treillis soudés sur les ailes ou semelles des membrures et éventuellement entre eux) ;

$K_{tr} = 0,8$  pour les treillis soudés ou boulonnés sur l'âme des membrures ;

$K_{tr} = 0,6$  pour les treillis encastres sur des goussets solidaires de l'âme des membrures ;

$K_{tr} = 0$  pour l'articulation.

- **Treillis en V dissymétrique**

En désignant par «  $I_{d1}$  et  $I_{d2}$  » les moments d'inertie des sections des diagonales par rapport à un axe passant par leur centre de gravité et parallèle au plan moyen de la poutre, on aura :

$$J_{tr} = 2,6 K_{tr} \frac{l_m h_0^2}{\frac{l_{d1}^3}{I_{d1}} + \frac{l_{d2}^3}{I_{d2}}} = 2,6 K_{tr} \frac{\cot g \Theta_1 + \cot g \Theta_2}{\frac{1}{I_{d1} \sin^3 \Theta_1} + \frac{1}{I_{d2} \sin^3 \Theta_2}} \quad (4.25)$$

- **Treillis en V symétrique**

Dans ce cas on a «  $I_{d1} = I_{d2} = I_d$  », d'où :

$$J_{tr} = 1,3 K_{tr} \frac{I_d l_m h_0^2}{l_d^3} = 2,6 K_{tr} I_d \sin^2 \Theta \cos \Theta \quad (4.26)$$

- **Treillis en N**

En désignant par «  $I_t$  et  $I_d$  » les moments d'inertie des sections des montants et diagonales par rapport à un axe passant par leur centre de gravité et parallèle au plan moyen de la poutre, on aura :

$$J_{tr} = \frac{2,6 K_{tr} I_d}{\frac{I_d}{I_t} + \frac{l_d^3}{h_0^3}} \cdot \frac{l_m}{h_0} = \frac{2,6 K_{tr} I_d \cot g \Theta}{\frac{I_d}{I_t} + \frac{1}{\sin^3 \Theta}} \quad (4.27)$$

#### 4.6. Conclusion

Les treillis et les poutres en treillis sont des éléments importants dans le domaine de la construction métallique où ils sont utilisés pour supporter des planchers, des couvertures ou pour assurer le contreventement. Des généralités concernant ce type d'éléments ont été présentées dans ce chapitre, où il a été également rappelé les principaux aspects propres à la flexion des poutres en treillis, notamment la prise en compte des déformations dues à l'effort tranchant ainsi que la considération du flambement individuel des tronçons de la membrure comprimée.

## CHAPITRE 5 - MOMENT CRITIQUE DE DEVERSEMENT DANS LE CAS DES POUTRES EN TREILLIS

### Introduction:

Les éléments à parois minces et profil ouvert sont d'un usage courant dans la construction métallique. Le déversement est un phénomène d'instabilité susceptible d'intervenir dans les poutres à parois minces fléchies par rapport à leur axe de forte inertie : sous l'effet de la flexion, une partie de la section est comprimée et l'autre partie est tendue. L'ensemble des zones comprimées tend à flamber latéralement, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire au plan de flexion. L'ensemble des zones tendues tend à s'opposer à ce déplacement latéral, aussi le déversement est-il accompagné d'une rotation des sections autour de l'axe longitudinal de la poutre. Ce comportement des poutres à sections ouvertes est très complexe, étant donné que d'une part, le phénomène mêle torsion et flexion et d'autre part, la torsion, qui dans ce cas n'est pas uniforme, est accompagnée de gauchissement. Le modèle de Vlasov [8], établi pour le cas de la torsion non uniforme, est habituellement adopté pour le calcul des structures à parois minces.

Dans la présente étude, un modèle théorique est développé dans le but de déterminer le moment critique élastique de déversement des poutres en treillis isostatiques à sections transversales constantes, soumises à un chargement uniformément réparti. Pour cela, on va assimiler le comportement de la poutre en treillis à celui d'un élément à parois minces où les treillis sont remplacés par une âme pleine équivalente à ces treillis. Dans ce cas, les déformations dues à l'effort tranchant doivent être prises en compte dans la formulation des équations différentielles d'équilibre.

### 5.2. Etude d'un élément à parois minces

#### 5.2.1. Cinématique

Pour décrire le mouvement d'un corps, on est amené à définir un certain nombre de configurations dans lesquelles il peut se trouver. La cinématique d'un solide déformable a été schématisée de manière générale dans les chapitres précédents.

On considère un élément à parois minces et à section ouverte dans un repère 3D. Les axes  $y$  et  $z$  sont les axes principaux d'inertie.

On repère le centre de torsion  $C$  par ses coordonnées  $(y_c, z_c)$ .

On définit aussi sur le contour un point  $M$  par ses coordonnées  $y, z$  et  $\omega$  où  $\omega$  est la coordonnée sectorielle qui définit le gauchissement de la section en ce point.

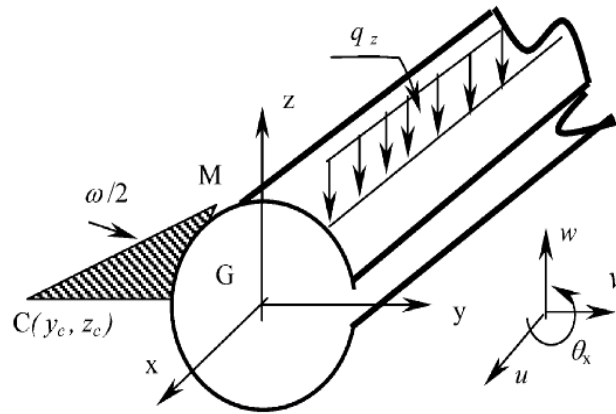


Figure 5.1: Schématisation d'un élément à parois minces dans un repère cartésien [8]

### 5.2.2. Déplacements

Soit  $u_M; v_M; w_M$ , les déplacements du point  $M$  dans le repère cité ci dessus. En utilisant le modèle de Vlassov [8] et en adoptant les hypothèses suivantes :

- Le déplacement suivant  $(O\bar{x})$  dû au gauchissement de la section sera égal à  $\omega \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$  ;  
où  $\omega$  est l'aire sectorielle principale de pôle  $C$  ;
- Les distorsions de sections dues à l'effort tranchant sont prises en compte dans le calcul du moment critique de déversement;
- On se place en petite rotation  $\theta_x^2 = 0$  ;

Les déplacements peuvent être exprimés en fonction de ceux du centre de torsion  $C$  (notés  $u; v; w$  et  $\theta_x$ ) par les relations suivantes :

$$u_M = u - yv' - zw'_x - \omega \theta'_x \quad (5.1)$$

$$v_M = v - (z - z_c) \theta_x \quad (5.2)$$

$$w_M = w - (y - y_c) \theta_x \quad (5.3)$$

### 5.2.3. Déformations

Les déformations s'écrivent sous la forme suivante :

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_l] + [\varepsilon_{nl}] \quad (5.4)$$

La déformation  $\varepsilon_{xx}$  s'écrit de la manière suivante [8] :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} = \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_l + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right]_{nl} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_M + \frac{1}{2} ((u'_M)^2 + (v'_M)^2 + (w'_M)^2) \approx u'_M + \frac{1}{2} ((v'_M)^2 + (w'_M)^2) \quad (5.6)$$

Les équations (5.4) à (5.6) nous donnent donc :

$$\varepsilon_l = u' - yv'' - zw'' - \omega \theta_x'' \quad (5.7.a)$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + R^2 \theta_x'^2) + (y - y_c)w' \theta_x' - (z - z_c)v' \theta \quad (5.7.b)$$

avec :

$$R^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (5.7.c)$$

Les déformations angulaires dans le plan xy et xz sont données par les expressions suivantes:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} (z - z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y}) \theta_x' \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} (y - y_c + \frac{\partial \omega}{\partial z}) \theta_x' \quad (5.9)$$

### 5.2.4. Energie

L'énergie de torsion en tenant compte des déformations dues à l'effort tranchant est donnée par l'expression suivante:

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_{xx}^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx \quad (5.10)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx \quad (5.11)$$

Le développement de la formule de l'énergie de torsion, en considérant la contribution de  $\varepsilon_{nl}$  négligeable [15], nous permettra d'écrire l'énergie totale comme étant la somme de deux parties l'une linéaire et l'autre non linéaire.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx + \int_L \int_A E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx = U_l + U_{nl} \\
 U_l &= \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx \\
 U_{nl} &= \int_L \int_A E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

En utilisant l'équation (5.7.a) on aura :

$$U_l = \frac{1}{2} \int_L (EA(u')^2 + EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta''_x)^2) dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta_x')^2 dx. \tag{5.13}$$

Avec :

$$A = \int_A dA \tag{5.14.a}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \tag{5.14.b}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \tag{5.14.c}$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \tag{5.14.d}$$

La partie non linéaire de l'énergie, et en utilisant les équations (5.7.a) et (5.7.b) peut être écrite sous la forme :

$$U_{nl} = U_{nl}(N) + U_{nl}(M_y) + U_{nl}(M_z) + U_{nl}(B_\omega) \tag{5.15}$$

où,  $N$  est l'effort axial,  $M_y$  et  $M_z$  sont les moments fléchissants et  $B_\omega$  est le bi moment introduit par le modèle de VLASOV (figure 5.2)

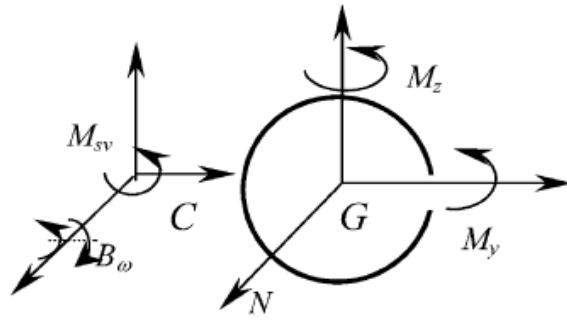


Figure 5.2 : Modèle de VLASOV

En tenant compte des relations entre les efforts et les déformations ainsi que des équations (5.14),

on a :

$$N = \int_A E \varepsilon_l dA = EAu' \quad (5.16.a)$$

$$M_z = - \int_A E \varepsilon_l y dA = EI_z v'' \quad (5.16.b)$$

$$B_\omega = - \int_A E \varepsilon_l \omega dA = EI_\omega \theta_x'' \quad (5.16.c)$$

$$M_y - \frac{EI_y}{GA_a} \frac{dV_z}{dx} = \int_A E \varepsilon_l z dA = -EI_y w'' \quad (5.16.d)$$

L'expression (5.16.d) tient compte des déformations dues à l'effort tranchant; où  $A_a$  est l'aire de l'âme équivalente [9]. Ainsi on aura :

$$U_{nl}(N) = \int_L N \left( \frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx \quad (5.17.a)$$

$$U_{nl}(M_y) = \int_L \left( M_y - \frac{EI_y}{GA_a} \frac{dV_z}{dx} \right) \times (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) dx \quad (5.17.b)$$

$$U_{nl}(M_z) = - \int_L M_z (\beta_y \theta_x'^2 + w'' \theta_x) dx \quad (5.17.c)$$

$$U_{nl}(B_\omega) = - \int_L \beta_\omega \theta_x'^2 dx \quad (5.17.d)$$

Les coefficients  $\beta_y; \beta_z; \beta_\omega$  sont les constantes de WARNER et  $I_0$  est le moment d'inertie polaire. Ils sont donnés par :

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_S y(y^2 + z^2) dS - y_c \quad (5.18.a)$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS - z_c \quad (5.18.b)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega} \int_S \omega(y^2 + z^2) dS \quad (5.18.c)$$

$$I_0 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_c^2 + z_c^2 \quad (5.18.d)$$

La combinaison de  $U_1$  et  $U_{nl}$  peut être utilisée pour toutes les sections minces ouvertes, pour le cas du déversement on a :

$$M_y \neq 0, \text{ et } N = M_z = B_\omega = 0$$

donc :

$$U = U_1 + U_{nl}(M_y) \quad (5.19)$$

### 5.2.5. Formulation de l'équation d'équilibre :

Soit une poutre en acier à section transversale ouverte sollicitée avec un chargement répartie  $q_z$  dans le sens négative de l'axe Z. Cette charge est appliquée au dessus de la section comme indiqué sur la figure (5.1).

Le travail dû aux charges extérieures W et l'énergie totale U sont formulés comme suit :

$$W_q = \int \delta W_q = \int_L q_z w dx - \int_L \frac{1}{2} (z_Q - z_c) q_z \theta_x^2 dx. \quad (5.20)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L [EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta_x'')^2 + 2(M_y + \alpha q_z) (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x)] dx \quad (5.21)$$

$$\text{Avec : } \alpha = \frac{EI_y}{GA_a} \quad \text{et} \quad q_z = -\frac{dV_z}{dx}$$

On définit le potentiel total  $\Pi$  comme étant :

$$\Pi = U - W$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2(M_y - \alpha q_z) (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) \right] dx - (5.22)$$

$$\int_L q_z w dx + \int_L \frac{1}{2} (z_Q - z_c) q_z \theta_x^2 dx$$

### 5.2.5.1. Equation d'Euler

Soit  $\Pi = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi, g(\xi), g'(\xi), g''(\xi), \dots, g^n(\xi)) dx$ . [16]

Lorsque  $\Pi$  est extremum les fonctions  $g^i(\xi)$  vérifient la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial g^i} \right] = 0 \tag{5.23}$$

### 5.2.5.2. Equation différentielle d'équilibre

En utilisant les relations (5.23) dans l'équation (5.22), on aura les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w} &= -q_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w'} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(EI_y w'')] = EI_y w^{(4)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI_y w^{(4)} - q_z = 0 \tag{5.24}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v'} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_z v'' + (M_y + \alpha q_z) \theta_x] = EI_z v^{(4)} + (M_y + \alpha q_z) \theta_x'' \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow EI_z v^{(4)} + ((M_y + \alpha q_z) \theta_x)'' = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} &= [(M_y + \alpha q_z) v''] + (z_Q - z_c) q_z \theta_x \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} [GJ(\theta_x') + 2(M_y + \alpha q_z)(\beta_z \theta_x')] = GJ(\theta_x'') + [2(M_y + \alpha q_z)(\beta_z \theta_x')] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_\omega(\theta_x'')] = EI_\omega(\theta_x^{(4)}) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow EI_\omega(\theta_x^{(4)}) - [GJ(\theta_x'') + 2(M_y + \alpha q_z)\beta_z \theta_x'] + [(M_y + \alpha q_z) v''] + (z_Q - z_c) q_z \theta_x = 0 \quad (5.26)$$

L'équation (5.25) devient :

$$EI_z v'' = -((M_y + \alpha q_z) \theta_x) \Rightarrow v'' = \frac{-((M_y + \alpha q_z) \theta_x)}{EI_z}$$

Donc (5.26) devient :

$$EI_\omega(\theta_x^{(4)}) - [GJ(\theta_x'') + 2(M_y + \alpha q_z)\beta_z \theta_x'] - \left[ \frac{(M_y + \alpha q_z)^2}{EI_z} \theta_x \right] + (z_Q - z_c) q_z \theta_x = 0 \quad (5.27)$$

et donc :

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GJ + 2(M_y + \alpha q_z)\beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z (M_y + \alpha q_z)' \theta_x' - \left( \frac{(M_y + \alpha q_z)^2}{EI_z} - (z_Q - z_c) q_z \right) \theta_x = 0 \quad (5.28)$$

En posant :  $z_Q - z_c = e_z$

On aura :

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GJ + 2(M_y + \alpha q_z)\beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z (M_y + \alpha q_z)' \theta_x' - \left( \frac{(M_y + \alpha q_z)^2}{EI_z} - e_z q_z \right) \theta_x = 0 \quad (5.29)$$

L'équation différentielle régissant le déplacement comporte tous les paramètres trouvés dans la littérature plus la prise en compte du paramètre noté  $\alpha$  qui tient compte des déformations dues à

l'effort tranchant. La résolution de cette équation nécessite l'utilisation de méthodes numériques. Quelques méthodes seront présentées dans les paragraphes qui suivent.

### **5.3 Méthodes de résolution**

#### **5.3.1. Introduction**

Les charges critiques de stabilité peuvent être déterminées en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- Résolution directe des équations différentielles de l'équilibre, avec comme résultats les valeurs exactes des charges critiques.
- L'utilisation de méthodes approchées qui sont, pour la plupart d'entre elles, basées sur des méthodes énergétiques et qui conduisent à des solutions approchées des problèmes de stabilité.

La résolution des équations différentielles de l'équilibre, afin de satisfaire les conditions aux limites présente beaucoup de difficultés et ne peut être réalisée que pour des problèmes simples de flambement, pour des structures dont le nombre de degrés de liberté est faible [9]. Ce n'est plus cette approche, cependant qui sera prise en compte dans des problèmes complexes, il faut se focaliser plutôt sur des méthodes énergétiques alternatives. Il faut noter que l'on peut aussi utiliser des méthodes itératives puissantes pour résoudre les problèmes de stabilité [17].

Quand on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement de configuration associé à l'équilibre neutre (mode de flambement), le système élastique peut être approché en utilisant des paramètres adéquats et modifiables ou des coordonnées généralisées, déterminées de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. Cette idée est à la base des méthodes approchées; on présentera les plus connues de ces méthodes, à savoir les coefficients de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin. On donnera aussi une présentation rapide d'une méthode numérique (la méthode des différences finies d'Euler).

#### **5.3.2. Application des méthodes énergétiques générales aux systèmes élastiques**

Les méthodes énergétiques de résolution des problèmes de stabilité élastique sont basées sur le principe de l'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale à l'équilibre neutre.

Il est établi que : si on considère le changement  $\Delta V$  de l'énergie totale  $V$  d'un système, d'une configuration d'équilibre de départ à une configuration voisine définie par un déplacement

virtuel infiniment petit et cinématiquement admissible, alors la condition d'équilibre neutre est gouvernée par la deuxième variation  $\delta^2V$  de l'incrément  $\Delta V$ , c'est-à-dire :

$$\delta^2V = 0 = \text{minimum} \quad (5.30)$$

Généralement, quand on considère des structures en acier, on étudie la stabilité d'une structure sous un ensemble de charges extérieures en prenant en compte une déformation de flambement,  $f$ , depuis une configuration de départ et en faisant les calculs conformément à l'équation (5.30), soit pour vérifier la stabilité de la configuration de départ, soit pour déterminer les valeurs critiques des charges extérieures conduisant à l'instabilité. La déformation  $f$  est exprimée comme une fonction de une ou plusieurs variables indépendantes (généralement les coordonnées cartésiennes) ; par exemple,  $f(x)$  en tant que déformée d'une poutre ou  $f(x,y)$  comme déformée d'une plaque. Le changement de déformation d'un système à l'équilibre neutre, la déformation de flambement ou le mode de flambement sera désormais noté  $f(X)$ , où  $X$  représente le champ de coordonnées du système de référence utilisé (une, deux ou trois dimensions). La fonction  $f$  peut être continue si le système est continu ou peut être définie par morceaux si le système est discret.

La résolution de l'équation (5.30) nécessite l'évaluation de la fonction potentielle  $\delta^2V$  par rapport à la fonction  $f$ , à l'intérieur d'un domaine d'intégration noté  $D$  (longueur, pour une poutre, surface, pour une plaque, par exemple). Généralement  $\delta^2V$  comprend des quantités quadratiques et homogènes de la déformation de flambement  $f(X)$  et ses dérivées et constitue une fonction linéaire des charges extérieures appliquées.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun  $\alpha$ , pour toutes les composantes du chargement et si on définit un chargement de référence  $S1$  (correspondant à  $\alpha = 1$ ), la charge à chaque instant d'une histoire linéaire du chargement est égale à :

$$S = \alpha S1 \quad (5.31)$$

Alors, d'une manière générale, la fonction  $\delta^2V$  peut être évaluée par :

$$\delta^2V(f) = \int_D F(\alpha, X, f, f', f'') dD = 0 \quad (5.32)$$

où la fonction  $F$  comporte aussi les caractéristiques géométriques et le matériau du domaine.

La résolution de l'équation (5.32) par rapport à  $f$  conduit à la détermination des valeurs des charges (par le coefficient multiplicateur  $\alpha$ ) à l'équilibre neutre, c'est-à-dire les valeurs critiques des charges au-delà desquelles la configuration de départ devient instable.

### 5.3.3. Coefficient de Rayleigh

La méthode de calcul des charges critiques par le coefficient de Rayleigh découle directement de l'équation (5.30) ; la seconde variation  $\delta^2V$  de l'énergie potentielle totale peut être exprimée de la manière suivante [6]:

$$\delta^2V(f) = \delta^2U(f) + \delta^2\Omega(f, S) \quad (5.33)$$

où :  $\delta^2U$  est la deuxième variation de l'énergie de déformation (fonction homogène et quadratique de  $f$ ) ; elle représente l'énergie de déformation correspondant au mode de flambement ;

$\delta^2\Omega$  est la deuxième variation de l'énergie potentielle due aux charges extérieures  $S$  (fonction linéaire de  $S$  et fonction quadratique et homogène de  $f$ ). Elle représente l'opposé du travail des forces extérieures correspondant au mode de flambement.

A l'équilibre neutre,  $\alpha$  prend la valeur particulière  $\alpha_{cr}$  qui est le facteur multiplicateur de charge critique au-delà duquel se développe l'instabilité. Les équations (5.30), (5.31) et (5.33) donnent :

$$\delta^2V(f) = \delta^2U(f) + \alpha_{cr}\delta^2\Omega(f, S_1) = 0 \quad \text{minimum} \quad (5.34)$$

Si l'on connaît la déformation de flambement  $f$ , le facteur multiplicateur de charge critique peut être obtenu à partir de l'équation (5.34), soit :

$$\alpha_{cr} = -\frac{\delta^2U(f)}{\delta^2\Omega(f, S_1)} \quad (5.35)$$

$$\text{C'est-à-dire : } \alpha_{cr} < \min\left[-\frac{\delta^2U(f_1)}{\delta^2\Omega(f, S_1)}\right] \text{ quel que soit } f \neq f_1 \quad (5.36)$$

Ceci définit le principe de Rayleigh qui établit que le facteur multiplicateur de charge critique  $\alpha_{cr}$  calculé en utilisant l'équation (5.35) avec un déplacement cinématiquement admissible quelconque différent de la vraie déformation de flambement, donnera une valeur de  $\alpha_{cr}$  supérieure à la valeur exacte [6].

### 5.3.4. Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz suppose que la solution exacte  $f(X)$  du problème variationnel décrit par l'équation (5.32) peut être approchée par une combinaison linéaire de «fonctions de coordonnées» correctement choisies :

$$\Phi_1(X) + \Phi_2(X) + \dots + \Phi_n(X)$$

soit :

$$f_n(X) = q_1 \Phi_1(X) + q_2 \Phi_2(X) + \dots + q_n \Phi_n(X) \quad (5.37)$$

où les  $q$  sont des constantes à déterminer et qui doivent être considérées comme les coordonnées généralisées (degrés de liberté) du système.

Quand  $f(X)$  est approchée ainsi par  $f_n(X)$ , la fonction  $\delta^2 V$ , à évaluer, devient une fonction quadratique et homogène des  $q$  ; l'équation (5.32) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\delta^2 V = \{q\}' [a] \{q\} = 0 \quad (5.38)$$

Où  $\{q\}$  représente le vecteur des  $q$  et  $[a]$  une matrice dont les coefficients  $a_{ij}$  sont :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (5.39)$$

Les coefficients  $a_{ij}$  sont des fonctions du facteur multiplicateur de charge  $\alpha$  et des propriétés du système [6].

Si l'on considère le cas de configurations non triviales,  $\{q\} \neq 0$ , l'équation (5.37) de l'équilibre neutre nécessite que  $[a]$  soit une matrice singulière, c'est-à-dire que son déterminant doit être nul. Cette condition fournit une équation en  $\alpha$ , de degré  $n$ , dont la valeur positive la plus petite peut être considérée comme le facteur multiplicateur de charge critique  $\alpha_{cr}$ .

Les fonctions  $\Phi_i$  sont choisies par avance, selon la connaissance et les hypothèses faites sur la nature de la déformation. Elles ne sont pas inconnues, et, à condition qu'elles satisfassent les conditions aux limites forcées (ou géométriques) pour chaque valeur de  $q$ , le choix des «formes» est arbitraire. On peut noter, cependant, que l'efficacité de la méthode dépend du caractère judicieux du choix fait pour les  $\Phi$  et que

c'est un avantage si elles satisfont toutes les conditions aux limites : dans les applications pratiques, on aura une idée de la nature générale de la solution réelle  $f(X)$ , de telle sorte que la question d'utiliser des formes « excessives » pour les  $\Phi$  se pose rarement. Si les fonctions sont judicieusement choisies, on peut obtenir une très bonne précision avec relativement peu de fonctions [6]. L'efficacité du procédé de Rayleigh- Ritz peut être considérablement améliorée si, en plus des conditions aux limites forcées (ou géométriques) (concernant les translations ou les rotations aux supports, c'est-à-dire  $f$  et  $f'$ ), on vérifie aussi les conditions aux limites naturelles (ou mécaniques) (concernant la courbure, c'est-à-dire  $f''$ ).

### 5.3.5. Méthode de Galerkin

En contraste avec la méthode de Rayleigh-Ritz qui donne une solution après avoir écrit le problème variationnel, la méthode de Galerkin fournit directement les solutions approchées des équations différentielles et elle s'applique que l'on puisse ou non écrire la transformation sous la forme d'un problème variationnel. Elle semble donc s'appliquer plus largement que la technique de Rayleigh-Ritz et est plus attractive en pratique dans la mesure où elle ne nécessite pas de déterminer une fonction potentielle.

On peut démontrer, cependant, que les deux méthodes sont étroitement reliées. La méthode de Galerkin procède de la manière suivante [6].

Généralement, l'équation différentielle gouvernant un problème de flambement peut s'écrire :

$$L [f(X)] = 0 \quad (5.40)$$

où :  $f(X)$  représente la déformation de flambement et  $L$  un opérateur différentiel linéaire et homogène.

Supposons que la solution exacte  $f(X)$  de l'équation (5.40) puisse s'exprimer sous la forme d'une série de fonctions complète :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Phi_j(X) \quad (5.41)$$

satisfaisant toutes les conditions aux limites ; l'« exactitude » de cette solution peut être établie en déclarant que la partie gauche de l'équation (5.40) est orthogonale à chaque terme dans la série de l'équation(5.41), soit :

$$\int_D L[f(X)]\Phi_j(X)dD = 0 \quad j = 1,2,\dots \quad (5.42)$$

Supposons que la série de l'équation (5.41) soit tronquée à un nombre fini de termes, n, ensuite, au moyen de l'idée ci-dessus, on peut imposer n conditions d'orthogonalité, de la manière suivante :

$$\int_D L \left[ \sum_{j=i}^{\infty} q_j \Phi_j(X) \right] \Phi_i(X) dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.43)$$

Ceci fournit une base moyenne d'évaluation des n inconnues q, telles que :

$$f_n(X) = \sum_{j=1}^n q_j \Phi_j(X) \quad (5.44)$$

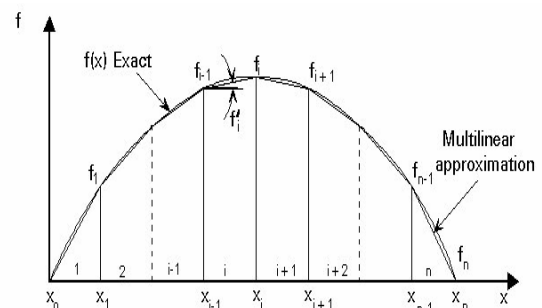
Ce qui constitue une solution approchée de l'équation différentielle. La partie gauche de l'équation (5.43) qui comprend les propriétés du système et les charges extérieures par l'intermédiaire du coefficient multiplicateur de charge  $\alpha$ , est quadratique et homogène en q ; cette équation peut s'écrire sous la forme de l'équation (5.37), puis traitée de la même manière que pour la méthode de Rayleigh-Ritz pour trouver les charges critiques.

### 5.3.6. Méthodes Numériques

Les méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation d'un ordinateur peuvent être utilisées pour déterminer des charges critiques, on peut citer les méthodes des éléments finis, des différences finies, des intégrales de frontières ...etc.

On décrira ici rapidement la méthode des différences finies d'Euler.

Dans la méthode de Rayleigh-Ritz, il est nécessaire que les fonctions admissibles soient continûment différentiables dans le domaine d'intégration. Le domaine admissible peut être étendu si l'on admet des fonctions qui ont des dérivées continues par morceaux. La base de la méthode des différences finies d'Euler consiste donc à diviser le domaine d'intégration en un certain nombre de sous domaines ou intervalles, en supposant les fonctions linéaires à l'intérieur du sous domaine. Si on note  $f_i$  la valeur de la fonction f à la frontière entre les intervalles i et i+1, les dérivées de f peuvent être exprimées comme des fonctions de f et la somme de la deuxième variation de l'énergie sur tous les intervalles est aussi une fonction de f. On peut considérer ici les f comme les q de la méthode de Rayleigh-Ritz [6].



**Figure 5.3 : Illustration de la méthode des différences finies d'EULER**

## 5.4. Moment critique de déversement

### 5.4.1. Introduction

Dans le cadre de ce travail, nous allons utiliser la méthode de Galerkin qui fournit directement des solutions approchées à des équations différentielles.

Les étapes de résolution de cette méthode ont été suivies et respectées pour le cas de charge uniformément répartie.

Pour le cas qui va être étudié, nous supposons que les poutres reposent sur des appuis en fourche, donc les barres ne peuvent pas pivoter autour de l'axe x au niveau des appuis, mais elles sont libres de se gauchir.

### 5.4.2. Résolution par la méthode de Galerkin

En développant l'équation différentielle (5.29) établie précédemment pour le cas d'une poutre soumise à un chargement uniformément réparti, on obtient :

$$EI_{\omega}\theta_x^{(4)} - (GJ)\theta_x'' - 2M_y\beta_z\theta_x'' - 2\alpha q_z\beta_z\theta_x'' - 2\beta_z M_y'\theta_x' - \left(\frac{M_y^2 + 2\alpha q_z M_y + \alpha^2 q_z^2}{EI_z} - e_z q_z\right)\theta_x = 0 \quad (5.45)$$

La solution  $\theta_x$  de l'équation (5.45) qui satisfait aux conditions aux limites est :

$$\theta_x = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.46)$$

Par analogie aux formules (5.40) à (5.43) et en remplaçant dans l'équation (5.45)  $\theta_x$  par la solution proposée en (5.46) on obtient l'équation (5.47) suivante :

$$\begin{aligned} & \theta_0 \int_L EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx + \theta_0 \int_L (GJ) \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx + \theta_0 \int_L 2M_y \beta_z \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx \\ & + \theta_0 \int_L 2\alpha q_z \beta_z \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx - \theta_0 \int_L 2\beta_z M_y' \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx \\ & - \theta_0 \int_L \left(\frac{M_y^2 + 2\alpha q_z M_y + \alpha^2 q_z^2}{EI_z} - e_z q_z\right) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Vue la complexité de cette équation, un changement de variable doit être effectué pour nous permettre de trouver les solutions [19]. Soit :

$$\xi = \frac{x}{L} \rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \rightarrow \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

$$M_{\max} = \max_{0 \leq x \leq L} M(x)$$

$$m = \frac{M(x)}{M_{\max}} \Rightarrow M(x) = m \cdot M_{\max}$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{M_{\max}} \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{M_{\max}} = \frac{dm}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dm}{d\xi} \equiv \frac{1}{L} m' \quad (5.48)$$

$$\frac{d^2m}{dx^2} = \frac{1}{M_{\max}} \frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{q(x)}{M_{\max}} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dm}{dx} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{d^2m}{d\xi^2} \equiv \frac{1}{L^2} m''$$

Des équations précédentes on peut écrire :

$$-\frac{q(x)}{M_{\max}} = \frac{1}{L^2} m'' \Rightarrow q(x) = -\frac{M_{\max}}{L^2} m''$$

Après le changement de variable (5.48), l'équation (5.47) devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi \right) d\xi + \int_0^1 \left( GJ \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi \right) d\xi + 2M_{\max} \beta_z \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^1 (m \sin^2 \pi \xi) d\xi - 2\alpha \beta_z \frac{\pi^2}{L^4} M_{\max} \int_0^1 (m'' \sin^2 \pi \xi) d\xi \\ & - 2\beta_z \frac{\pi}{L^2} M_{\max} \int_0^1 (m' \cos \pi \xi \cdot \sin \pi \xi) d\xi - \left( \frac{M_{\max}^2}{EI_z} \right) \int_0^1 (m^2 \cdot \sin^2 \pi \xi) d\xi + 2\alpha \frac{M_{\max}^2}{EI_z L^2} \int_0^1 (m'' \cdot m \cdot \sin^2 \pi \xi) d\xi \\ & - \alpha^2 \frac{M_{\max}^2}{EI_z L^4} \int_0^1 ((m'')^2 \sin^2 \pi \xi) d\xi - e_z \frac{M_{\max}}{L^2} \int_0^1 ((m'') \sin^2 \pi \xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

On pose :

$$Q_a = \int_0^1 (m^2 \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi \quad Q_b = \int_0^1 (m \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi$$

$$Q_c = \int_0^1 (m' \cdot \cos \pi \xi \cdot \sin \pi \xi) \cdot d\xi \quad Q_d = \int_0^1 (m'' \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi \quad (5.50)$$

$$Q_e = -\int_0^1 ((m'' m) \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi \quad Q_f = \int_0^1 ((m'')^2 \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi$$

Après introduction de (5.50) dans (5.49), on trouve :

$$\int_0^1 \left( EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi \right) d\xi + \int_0^1 \left( GJ \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi \right) d\xi + 2M_{\max} \beta_z \frac{\pi^2}{L^2} Q_b - 2\alpha \beta_z \frac{\pi^2}{L^4} M_{\max} Q_d - 2\beta_z \frac{\pi}{L^2} M_{\max} Q_c - \left( \frac{M_{\max}^2}{EI_z} \right) Q_a - 2\alpha \frac{M_{\max}^2}{EI_z L^2} Q_e + \alpha^2 \frac{M_{\max}^2}{EI_z L^4} Q_f - e_z \frac{M_{\max}}{L^2} Q_d = 0 \quad (5.51)$$

Sachant que :  $\int_0^1 (\sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2}$ , l'équation (5.51) peut s'écrire sous la forme d'une équation du

second ordre comme formulée dans l'équation ci-dessous :

$$-\frac{1}{EI_z} \left( Q_a + \frac{2\alpha}{L^2} Q_e + \frac{\alpha^2}{L^4} Q_f \right) M_{\max}^2 + \left( 2 \frac{\pi^2}{L^2} \left( \beta_z \left\langle Q_b - \frac{\alpha}{L^2} Q_d - \frac{1}{\pi} Q_c \right\rangle \right) - e_z \frac{1}{2\pi^2} Q_d \right) M_{\max} + \frac{\pi^2}{2L^2} \left( EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} + GJ \right) = 0 \quad (5.52)$$

La solution de l'équation (5.52) est :

$$M_{cr} = \frac{P_{cr}}{Q_a + \frac{2\alpha}{L^2} Q_e + \frac{\alpha^2}{L^4} Q_f} \left[ \beta_z \left\langle Q_b - \frac{\alpha}{L^2} Q_d - \frac{1}{\pi} Q_c \right\rangle - e_z \frac{1}{2\pi^2} Q_d \right] \pm \frac{P_{cr} \cdot \sqrt{\left( \beta_z \left\langle Q_b - \frac{\alpha}{L^2} Q_d - \frac{1}{\pi} Q_c \right\rangle \right) - e_z \frac{1}{2\pi^2} Q_d)^2 + \frac{1}{2} \left( Q_a + \frac{2\alpha}{L^2} Q_e + \frac{\alpha^2}{L^4} Q_f \right) \times \left( \frac{EI_{\omega}}{EI_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)}}{\left( Q_a + \frac{2\alpha}{L^2} Q_e + \frac{\alpha^2}{L^4} Q_f \right)} \quad (5.53)$$

Après une série de simplification, on obtient l'expression classique connue du moment critique de déversement [20], mais avec des coefficients  $C_i^v$  qui prennent en considération les déformations dues à l'effort tranchant :

$$M_{cr} = P_{cr} C_1^v \left\{ \sqrt{(\beta_z C_3^v + e_z C_2^v)^2 + \frac{1}{2C_1^v} \times \left( \frac{I_{\omega}}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} + [e_z C_2^v + \beta_z C_3^v] \right\} \quad (5.54)$$

avec :

$$P_{cr} = \frac{EI_z \pi^2}{L^2} \quad (5.55)$$

$$C_1^v = \frac{1}{Q_a + \frac{2\alpha}{L^2} Q_e + \frac{\alpha^2}{L^4} Q_f} \quad (5.56)$$

$$C_2^v = -\frac{1}{2\pi^2} Q_d \quad (5.57)$$

$$C_3^v = Q_b - \frac{\alpha}{L^2} Q_d - \frac{1}{\pi} Q_c \quad (5.58)$$

### 5.4.3. Calcul des coefficients $C_i^v$

La détermination des coefficients par différentes méthodes a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches. F. Mohri, A. Brouki, J.C.Roth [8] dans leur article ont utilisé la méthode de Ritz et Galerkin pour trouver les solutions et ont comparé les résultats trouvés avec les valeurs données à l'EC 3 [21]. Bambang Suryatmono, David Ho [17] ont comparé les valeurs du coefficient  $C_b$  trouvés par la méthode des différences finies et celles données par le AISC [11]. Les résultats trouvés ci-dessous ont été calculés en intégrant les équations (5.50) tout en remplaçant  $m$  (éq. 5.48) à chaque fois par sa valeur. Ainsi, sachant que :

$$M_{\max} = \frac{q \times L^2}{8} \quad \text{et que :} \quad M(x) = \frac{q \times x \times (L-x)}{2} \quad , \text{ alors :}$$

$$m = \frac{\frac{q \times x \times (L-x)}{2}}{\frac{q \times L^2}{8}} = 4 \times \xi \times (1-\xi) \quad \text{et} \quad m' = 4 \times (1-2\xi) \quad \text{et} \quad m'' = -8$$

Dans ce cas, les calculs des grandeurs  $Q_i$  donnent :

$$Q_a = \int_0^1 (m^2 \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \int_0^1 ((4 \cdot \xi \cdot (1-\xi))^2 \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \frac{4}{15} + \frac{12}{\pi^4} = 0,3898$$

$$Q_b = \int_0^1 (m \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \int_0^1 ((4 \cdot \xi \cdot (1-\xi)) \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} = 0,4346$$

$$Q_c = \int_0^1 (m' \cdot \cos \pi \xi \cdot \sin \pi \xi) \cdot d\xi = \int_0^1 ((4-8\xi) \cdot \cos \pi \xi \cdot \sin \pi \xi) \cdot d\xi = \frac{2}{\pi} = 0,6366$$

$$Q_d = \int_0^1 (m'' \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \int_0^1 (-8 \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = -4$$

$$Q_e = -\int_0^1 (m' \cdot m \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = -\int_0^1 (-8 \cdot (4 \cdot \xi \cdot (1 - \xi)) \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \frac{8}{3} + \frac{8}{\pi^2} = 3,4772$$

$$Q_f = \int_0^1 ((m'')^2 \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = \int_0^1 ((-8)^2 \cdot \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi = 32$$

En remplaçant dans les équations (5.56) à (5.58) les grandeurs  $Q_i$  par les quantités calculées ci avant ,

et sachant que  $\alpha = \frac{EI_y}{GA_a}$  , on aura les valeurs suivantes des coefficients  $C_i^v$  :

$$C_1^v = \frac{1}{0,3898 + 6,94 \frac{EI_y}{L^2 GA_a} + \frac{32}{L^4} \left( \frac{EI_y}{GA_a} \right)^2} \quad (5.59)$$

$$C_2^v = 0,2026 \quad (5.60)$$

$$C_3^v = 0,2320 + \frac{4EI_y}{L^2 GA_a} \quad (5.61)$$

### **Remarque**

En négligeant les déformations dues à l'effort tranchant, l'expression (5.53) du moment critique de déversement devient :

$$M_{cr} = \frac{P_{cr}}{Q_a} \left\{ \left[ \beta_z \left\langle Q_b - \frac{1}{\pi} Q_c \right\rangle - e_z \frac{1}{2\pi^2} Q_d \right] \pm \sqrt{\left( \beta_z \left\langle Q_b - \frac{1}{\pi} Q_c \right\rangle - e_z \frac{1}{2\pi^2} Q_d \right)^2 + \frac{Q_a}{2} \times \left( \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\}$$

ou bien :

$$M_{cr} = \frac{P_{cr}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{Q_a}} \left\{ \left[ \beta_z \left\langle \frac{Q_b - \frac{1}{\pi} Q_c}{\frac{\sqrt{Q_a}}{\sqrt{2}}} \right\rangle - e_z \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi^2} \frac{Q_d}{\sqrt{Q_a}} \right] \pm \sqrt{\left( \beta_z \left\langle \frac{Q_b - \frac{1}{\pi} Q_c}{\frac{\sqrt{Q_a}}{\sqrt{2}}} \right\rangle - e_z \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi^2} \frac{Q_d}{\sqrt{Q_a}} \right)^2 + \left( \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\}$$

En utilisant la forme habituelle de l'expression du moment critique en fonction des coefficients  $C_i$  on aura :

$$M_{cr} = C_1 \cdot P_{cr} \left\{ [\beta_z C_3 + e_z C_2] \pm \sqrt{(\beta_z C_3 + e_z C_2)^2 + \left( \frac{I_{\omega}}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\} \quad (5.62)$$

où :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{Q_a}} = 1,132$$

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi^2} \frac{Q_d}{\sqrt{Q_a}} = 0,459$$

$$C_3 = \frac{Q_b - \frac{1}{\pi} Q_c}{\frac{\sqrt{Q_a}}{\sqrt{2}}} = 0,525$$

Les valeurs des coefficients  $C_i$  ainsi calculées sont les mêmes de celles données à l'EC3 [21] pour le cas d'une charge uniformément répartie pour les conditions aux limites étudiées dans ce cas.

## 5.5. Conclusion

Dans ce chapitre, en assimilant le comportement de la poutre en treillis à celui d'un élément à parois minces où les treillis sont remplacés par une âme pleine équivalente à ces treillis, un modèle théorique a été développé et a permis la détermination du moment critique élastique de déversement des poutres en treillis isostatiques à sections transversales constantes dans le cas d'un chargement uniformément réparti. L'expression du moment critique établie a été écrite sous la forme habituelle en fonction des coefficients  $C_i^v$  qui prennent en considération les déformations dues à l'effort tranchant. En négligeant les déformations dues à l'effort tranchant, la comparaison de l'expression du moment critique établie a été faite avec celle donnée, pour le cas étudié, par l'EC3 [21].

Dans le prochain chapitre, l'expression du moment critique élastique de déversement développée ici va être utilisée pour traiter quelques exemples d'application.

## CHAPITRE 6 – RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### 6.1. Introduction

Dans ce chapitre, on propose une méthode de vérification de la stabilité au déversement pour les poutres en treillis de sections symétriques constantes et soumises à une charge uniformément répartie. La méthode proposée ici, est basée d'une part sur les formules de vérification du déversement des poutres en treillis données par les règles CM66 [14], et qui sont déduites de celles données pour les poutres à âmes pleines mais en remplaçant  $(\sigma_e)$  par  $(\sigma_e / k_m)$  et  $(\sigma_d)$  par  $(k_m \times \sigma_d)$  (voir annexe A), et d'autre part sur la prise en compte de l'effet des déformations dues à l'effort tranchant dans la détermination de l'expression du moment critique élastique du déversement (voir chapitre 5).

### 6.2. Expression du moment critique élastique du déversement dans le cas d'une poutre en treillis symétrique

Pour les poutres symétriques la valeur de  $\beta_z$  est égale à :

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \int z(y^2 + z^2) dS - z_c = 0 \quad (6.1)$$

Dans ce cas, l'expression du moment critique élastique du déversement développée au chapitre 5 est réduite à :

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} C_1^v \left\{ (e_z C_2^v) + \sqrt{(e_z C_2^v)^2 + \frac{1}{2C_1^v} \times \left( \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2 GJ}{\pi^2 EI_z} \right)} \right\} \quad (6.2)$$

où :

$$C_1^v = \frac{1}{0.3898 + 6.94 \frac{EI_y}{L^2 GA_a} + \frac{32}{L^4} \left( \frac{EI_y}{GA_a} \right)^2} \quad (6.3)$$

$$C_2^v = 0.2026 \quad (6.4)$$

Le développement effectué dans ce travail suppose que pour un chargement descendant agissant sur la membrure supérieure on a  $(e_z = -h_0 / 2)$  et pour un chargement ascendant agissant sur la membrure inférieure on a  $(e_z = h_0 / 2)$ .

Dans le cas d'une poutre en treillis symétrique, les membrures supérieure et inférieure sont identiques, les caractéristiques géométriques de la poutre en treillis, sont donc calculées comme suit :

$$I_y \approx 2 \times A_m \times \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 \quad (6.5)$$

$$I_z = 2 \times I_{zm} \quad (6.6)$$

$$J = 2 \times J_m \quad (6.7)$$

$$I_\omega = \frac{I_z \times h_0^2}{4} \quad (6.8)$$

$$W_{pl,y} = A_m \times h_0 \quad (6.9)$$

où :

$A_m$  aire de la section transversale d'une membrure ;

$h_0$  distance entre les centres de gravité des deux membrures ;

$I_{zm}$  moment d'inertie par rapport à l'axe z-z (de la poutre en treillis) d'une membrure ;

$J_m$  moment d'inertie de torsion d'une membrure ;

### 6.3. Vérification de la stabilité au déversement d'une poutre en treillis symétrique

Dans le cas d'une poutre en treillis soumise à un chargement uniformément réparti «  $q_{sd}$  » appliqué aux nœuds intermédiaires d'une membrure sous la forme de charges concentrées «  $Q = q_{sd} \times l_m$  », la stabilité vis-à-vis du déversement, est vérifiée si la condition suivante est vérifiée :

$$M_{y,Sd} \leq M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \beta_w \cdot W_{pl,y} \cdot \frac{\chi_m \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (6.10)$$

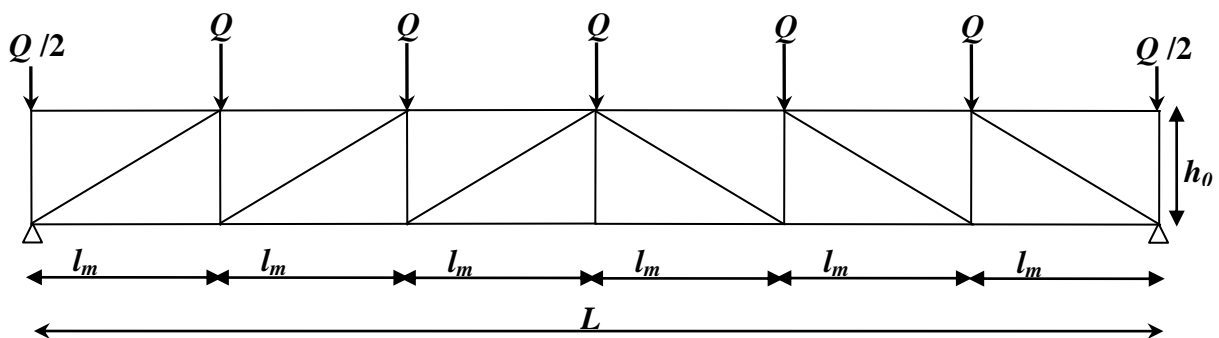


Figure 6.1 : Modélisation du chargement uniformément réparti

où :

$$M_{y.Sd} = \frac{q_{Sd} \times L^2}{8} \quad (6.11)$$

et :

$M_{b.Rd}$  est le moment résistant au déversement (voir annexe B).

$\chi_m$  (introduit dans l'expression de  $M_{b.Rd}$  pour tenir compte du flambement individuel des tronçons de membrure comprimée) est le coefficient de réduction pour le mode de flambement à considérer pour les tronçons de membrure comprimée. Il est déterminé, en prenant la courbe de flambement appropriée [20], en fonction de l'élanement réduit des tronçons de membrure comprimée :

$$\bar{\lambda}_m = \frac{\lambda_m}{93,9 \varepsilon} \sqrt{\beta_{Am}} \quad (6.12)$$

$\beta_{Am} = 1$  pour les membrures dont les sections transversales sont de classe 1, 2 ou 3 ;

$\beta_{Am} = \frac{A_{meff}}{A_m}$  pour les membrures dont les sections transversales sont de classe 4.

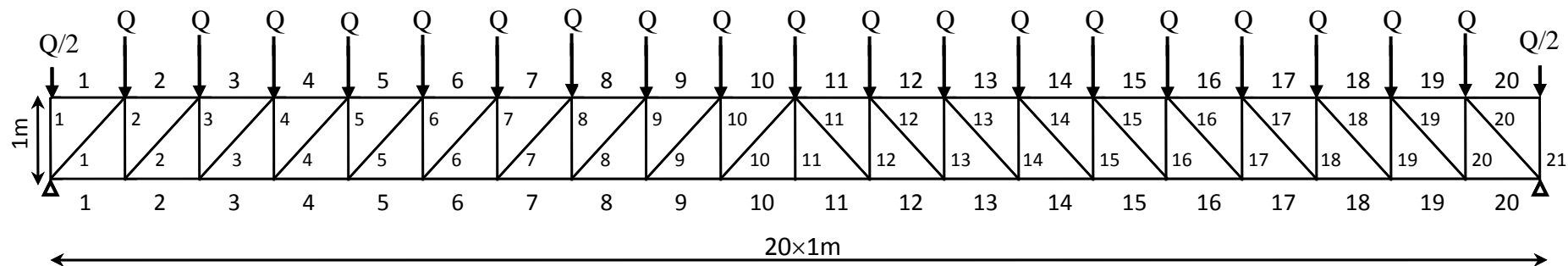
$\lambda_m$  élanement maximal des tronçons de membrure comprimée en prenant des longueurs de flambement égales aux longueurs d'épure entre nœuds de triangulation.

#### 6.4. Exemples d'application

Dans un premier temps, on considère un exemple d'application (figure 6.2 : exemple n°1) pour lequel on détermine la valeur du moment résistant de déversement «  $M_{b.Rd}$  ». On calcule par la suite la valeur de la charge uniformément répartie «  $q_{Sd}$  » qui correspond à l'atteinte de la résistance au déversement, c'est-à-dire :

$$q_{Sd} = \frac{M_{b.Rd} \times 8}{L^2} \quad (6.13)$$

On utilise la valeur de «  $q_{Sd}$  » ainsi déterminée pour calculer les efforts dans les éléments de la poutre en treillis. Les efforts de compression dans les éléments de la poutre en treillis seront comparés aux résistances au flambement [20] de ces éléments calculées en considérant :



$$L = 20 \text{ m} \quad ; \quad h_0 = 1 \text{ m} \quad ; \quad l_m = 1 \text{ m} \quad ; \quad l_d = 1,414 \text{ m}$$

**Exemple N° 1 :** Acier Fe 360 (S235)

- Membrures : HEA 320

$A = 124,40 \text{ cm}^2$  ;  $I_z = 6985 \text{ cm}^4$  ;  $J = 102 \text{ cm}^4$   
 $i_y = 13,60 \text{ cm}$  ;  $i_z = 7,49 \text{ cm}$

- Diagonales : 2 UPN 300

$A = 117,60 \text{ cm}^2$  ;  $i_y = 11,70 \text{ cm}$  ;  $i_z = 3,96 \text{ cm}$

- Montants : 2 UPN 300

$A = 117,60 \text{ cm}^2$  ;  $i_y = 11,70 \text{ cm}$  ;  $i_z = 3,96 \text{ cm}$

**Exemple N° 2 :** Acier Fe 360 (S235)

- Membrures : HEA 320

$A = 124,40 \text{ cm}^2$  ;  $I_z = 6985 \text{ cm}^4$  ;  $J = 102 \text{ cm}^4$   
 $i_y = 13,60 \text{ cm}$  ;  $i_z = 7,49 \text{ cm}$

- Diagonales :  $\llcorner \llcorner 80 \times 80 \times 8$

$A = 24,60 \text{ cm}^2$  ;  $i_y = 2,43 \text{ cm}$  ;  $i_z = 3,32 \text{ cm}$

- Montants :  $\llcorner \llcorner 80 \times 80 \times 8$

$A = 24,60 \text{ cm}^2$  ;  $i_y = 2,43 \text{ cm}$  ;  $i_z = 3,32 \text{ cm}$

**Figure 6.2 : Données concernant les exemples d'application**

- pour les montants et les diagonales : que les longueurs de flambement sont les longueurs d'épure entre nœuds de triangulation ;
- pour les membrures : que la longueur de flambement dans le plan de la poutre est la longueur d'épure entre nœuds de triangulation, et que la longueur de flambement dans la direction normale au plan de la poutre est la longueur de la poutre (en supposant qu'il n'y a pas de points de maintiens intermédiaires hors du plan de la poutre en treillis).

On traite l'exemple pour les cas suivants :

Cas 1 : les charges sont appliquées au niveau de la membrure supérieure.

Cas 2 : les charges sont appliquées au niveau de la membrure inférieure.

Cas 3 : les charges sont appliquées au niveau du centre de cisaillement.

Ce troisième cas, qui ne correspond pas aux hypothèses de calcul des poutres en treillis (les charges doivent être appliquées aux nœuds), est traité à titre de comparaison avec les deux premiers cas.

On constate enfin que les sections transversales des éléments de la poutre en treillis (figure 6.2) sont toutes de la classe 1 en compression.

Les différents résultats des calculs effectués sont récapitulés dans les tableaux ci-après.

<b>Tableau 6.1 : Caractéristiques de la poutre en treillis de l'exemple n°1</b>					
$I_y$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	$J$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_\omega$ [cm <sup>6</sup> ]	$W_{pl,y}$ [cm <sup>3</sup> ]	$A_a$ [cm <sup>2</sup> ]
622000	13970	204	34925000	12440	79,85

<b>Tableau 6.2 : Résistance au flambement de la membrure de l'exemple n°1</b>					
$\lambda$	$\beta_A$	$\bar{\lambda}$	Courbe de flambement	$\chi$	$N_{b,Rd}$ [kN]
267	1	2,8437	c	0,1050	279,05

<b>Tableau 6.3 : Résistance au flambement des diagonales de l'exemple n°1</b>					
$\lambda$	$\beta_A$	$\bar{\lambda}$	Courbe de flambement	$\chi$	$N_{b,Rd}$ [kN]
37,71	1	0,3803	c	0,9075	2280

**Tableau 6.4 : Coefficient de réduction correspondant au flambement individuel des tronçons de membrure comprimée de l'exemple n°1**

$\lambda_m$	$\beta_{Am}$	$\bar{\lambda}_m$	Courbe de flambement	$\chi_m$
13,35	1	0,14	c	1

Cas 1 :

**Tableau 6.5 : Valeur de  $M_{cr}$  pour le cas 1 de l'exemple n°1**

$C_1^v$	$C_2^v$	$M_{cr}$ [daN cm]
2,353	0,2026	3968512,525

**Tableau 6.6 : Moment de résistance au déversement pour le cas 1 de l'exemple n°1**

$\lambda_{LT}$	$\beta_w$	$\bar{\lambda}_{LT}$	Courbe de flambement	$\chi_{LT}$	$M_{b,Rd}$ [kN m]	$q_{sd}$ [kN/m]	Q [kN]
254,89	1	2,7145	c	0,1142	303,50	6,07	6,07

**Tableau 6.7 : Efforts de compression dans les éléments de la membrure supérieure pour le cas 1 de l'exemple n°1**

Barre	Effort [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]		Barre	Effort [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
1	0	279,05		11	300,47	279,05
2	5,77	279,05		12	291,31	279,05
3	109,26	279,05		13	276,19	279,05
4	153,27	279,05		14	254,94	279,05
5	194,24	279,05		15	227,63	279,05
6	227,63	279,05		16	194,24	279,05
7	254,94	279,05		17	153,27	279,05
8	276,19	279,05		18	109,26	279,05
9	291,31	279,05		19	5,77	279,05
10	300,47	279,05		20	0	279,05

**Tableau 6.8 : Efforts de compression dans les diagonales pour le cas 1 de l'exemple n°1**

Barre	Effort [kN]	$N_{b.Rd}$ [kN]		Barre	Effort [kN]	$N_{b.Rd}$ [kN]
1	81,55	2280		11	4,29	2280
2	72,97	2280		12	12,87	2280
3	64,38	2280		13	21,46	2280
4	55,79	2280		14	30,05	2280
5	47,21	2280		15	38,63	2280
6	38,63	2280		16	47,21	2280
7	30,05	2280		17	55,79	2280
8	21,46	2280		18	64,38	2280
9	12,87	2280		19	72,97	2280
10	4,29	2280		20	81,55	2280

**Remarque :** Les éléments de la membrure inférieure ainsi que les montants (mis à part les montants d'extrémité qui sont faiblement comprimés) sont tendus.

Cas 2 :

**Tableau 6.9 : Valeur de  $M_{cr}$  pour le cas 2 de l'exemple n°1**

$C_1^v$	$C_2^v$	$M_{cr}$ [daN cm]
2,353	0,2026	7419290,06

**Tableau 6.10 : Moment de résistance au déversement pour le cas 2 de l'exemple n°1**

$\lambda_{LT}$	$\beta_w$	$\bar{\lambda}_{LT}$	Courbe de flambement	$\chi_{LT}$	$M_{b.Rd}$ [kN m]	$q_{sd}$ [kN/m]	Q [kN]
186,42	1	1,9850	c	0,1989	528,60	10,57	10,57

**Tableau 6.11 : Efforts de compression dans les éléments de la membrure supérieure pour le cas 2 de l'exemple n°1**

Barre	Effort [kN]	$N_{b.Rd}$ [kN]		Barre	Effort [kN]	$N_{b.Rd}$ [kN]
1	0	279,05		11	523,21	279,05
2	10,04	279,05		12	507,36	279,05
3	190,26	279,05		13	480,93	279,05
4	269,53	279,05		14	443,94	279,05
5	338,24	279,05		15	396,37	279,05
6	396,37	279,05		16	338,24	279,05
7	443,94	279,05		17	269,53	279,05
8	480,93	279,05		18	190,26	279,05
9	507,36	279,05		19	10,04	279,05
10	523,21	279,05		20	0	279,05

**Tableau 6.12 : Efforts de compression dans les diagonales pour le cas 2 de l'exemple n°1**

Barre	Effort [kN]	$N_{b.Rd}$ [kN]		Barre	Effort [kN]	$N_{b.Rd}$ [kN]
1	142,01	2280		11	7,47	2280
2	127,06	2280		12	22,42	2280
3	112,12	2280		13	37,38	2280
4	97,16	2280		14	52,32	2280
5	82,21	2280		15	67,67	2280
6	67,67	2280		16	82,21	2280
7	52,32	2280		17	97,16	2280
8	37,38	2280		18	112,12	2280
9	22,42	2280		19	127,06	2280
10	7,47	2280		20	142,01	2280

Cas 3 :

**Tableau 6.13 : Valeur de  $M_{cr}$  pour le cas 3 de l'exemple n°1**

$C_1^v$	$C_2^v$	$M_{cr}$ [daN cm]
2,353	0,2026	5426191,45

**Tableau 6.14 : Moment de résistance au déversement pour le cas 3 de l'exemple n°1**

$\lambda_{LT}$	$\beta_w$	$\bar{\lambda}_{LT}$	Courbe de flambement	$\chi_{LT}$	$M_{b,Rd}$ [kN m]	$q_{Sd}$ [kN/m]	Q [kN]
217,98	1	2,3214	c	0,1513	402,10	8,04	8,04

**Tableau 6.15 : Efforts de compression dans les éléments de la membrure supérieure pour le cas 3 de l'exemple n°1**

Barre	Effort [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]		Barre	Effort [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
1	0	279,05		11	397,98	279,05
2	7,64	279,05		12	385,92	279,05
3	144,72	279,05		13	365,82	279,05
4	205,02	279,05		14	337,68	279,05
5	257,28	279,05		15	301,50	279,05
6	301,50	279,05		16	257,28	279,05
7	337,68	279,05		17	205,02	279,05
8	365,82	279,05		18	144,72	279,05
9	385,92	279,05		19	7,64	279,05
10	397,98	279,05		20	0	279,05

**Tableau 6.16 : Efforts de compression dans les diagonales pour le cas 3 de l'exemple n°1**

Barre	Effort [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]		Barre	Effort [kN]	$N_{b,Rd}$ [kN]
1	108,02	2280		11	5,68	2280
2	96,65	2280		12	17,05	2280
3	85,28	2280		13	28,43	2280
4	73,90	2280		14	39,80	2280
5	62,53	2280		15	51,17	2280
6	51,17	2280		16	62,53	2280
7	39,80	2280		17	73,90	2280
8	28,43	2280		18	85,28	2280
9	17,05	2280		19	96,65	2280
10	5,68	2280		20	108,02	2280

Les résultats ainsi obtenus montrent que les charges «  $q_{sd}$  » correspondant aux différents moments résistants au déversement pour les cas étudiés, engendrent dans certains éléments de la membrure comprimée, des efforts supérieurs à la résistance au flambement de la membrure calculée comme indiqué ci-avant. La charge «  $q_{sd} = 5,65 \text{ kN/m}$  », qui correspond à l'atteinte de la résistance au flambement dans les éléments de la membrure comprimée les plus sollicités (élément 10 et élément 11), est donc inférieure à celles calculées pour les trois cas étudiés.

Dans l'exemple n°1, les sections transversales choisies pour les montants et les diagonales conduisent à une aire d'âme équivalente importante. Dans l'exemple n°2, on prend pour ces mêmes éléments des sections transversales qui donnent une aire d'âme équivalente assez faible. Les résultats trouvés pour ce deuxième exemple sont récapitulés dans les tableaux qui suivent.

**Tableau 6.17 : Caractéristiques de la poutre en treillis de l'exemple n°2**

$I_y [\text{cm}^4]$	$I_z [\text{cm}^4]$	$J [\text{cm}^4]$	$I_\omega [\text{cm}^6]$	$W_{pl,y} [\text{cm}^3]$	$A_a [\text{cm}^2]$
622000	13970	204	34925000	12440	16,70

**Remarque :** Pour l'exemple n°2, on a gardé, pour les membrures la même section transversale que celle adoptée pour l'exemple n°1. Ceci fait que la résistance au flambement de la membrure de l'exemple n°2 est celle donnée au tableau (6.2) et que le coefficient de réduction correspondant au flambement individuel des tronçons de membrure comprimée de l'exemple n°2 est celui donné au tableau (6.4).

Cas 1 :

**Tableau 6.18 : Valeur de  $M_{cr}$  pour le cas 1 de l'exemple n°2**

$C_1^v$	$C_2^v$	$M_{cr} [\text{daN cm}]$
1,733	0,2026	3556268,458

**Tableau 6.19 : Moment de résistance au déversement pour le cas 1 de l'exemple n°2**

$\lambda_{LT}$	$\beta_w$	$\bar{\lambda}_{LT}$	Courbe de flambement	$\chi_{LT}$	$M_{b,Rd} [\text{kN m}]$	$q_{sd} [\text{kN/m}]$	Q [kN]
269,26	1	2,8675	c	0,1034	274,80	5,50	5,50

Cas 2 :

**Tableau 6.20 : Valeur de  $M_{cr}$  pour le cas 2 de l'exemple n°2**

$C_1^v$	$C_2^v$	$M_{cr}$ [daN cm]
1,733	0,2026	6097788,031

**Tableau 6.21 : Moment de résistance au déversement pour le cas 2 de l'exemple n°2**

$\lambda_{LT}$	$\beta_w$	$\bar{\lambda}_{LT}$	Courbe de flambement	$\chi_{LT}$	$M_{b,Rd}$ [kN m]	$q_{sd}$ [kN/m]	Q [kN]
205,63	1	2,1899	c	0,1676	445,42	8,91	8,91

Cas 3 :

**Tableau 6.22 : Valeur de  $M_{cr}$  pour le cas 3 de l'exemple n°2**

$C_1^v$	$C_2^v$	$M_{cr}$ [daN cm]
1,733	0,2026	4656755,441

**Tableau 6.23 : Moment de résistance au déversement pour le cas 3 de l'exemple n°2**

$\lambda_{LT}$	$\beta_w$	$\bar{\lambda}_{LT}$	Courbe de flambement	$\chi_{LT}$	$M_{b,Rd}$ [kN m]	$q_{sd}$ [kN/m]	Q [kN]
235,30	1	2,5059	c	0,1320	350,81	7,02	7,02

Les résultats obtenus pour ce deuxième exemple montrent que la charge «  $q_{sd}$  » correspondant au moment résistant au déversement pour le cas (1) est inférieure à celle correspondant à l'atteinte de la résistance au flambement des éléments de la membrure comprimée les plus sollicités.

Enfin, pour mieux mettre en évidence l'effet des déformations dues à l'effort tranchant sur la stabilité vis-à-vis du déversement, on calcule la valeur de  $M_{cr}$  en négligeant l'effet de ces déformations [20] et on la compare à celles calculées dans les exemples n°1 et n°2. Les résultats ainsi trouvés sont représentés dans le tableau (6.24).

<b>Tableau 6.24 : Valeurs de <math>M_{cr}</math> [daN cm]</b>			
	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Déformations dues à effort tranchant négligées	4086518,169	7847615,456	5662987,122
Exemple n°1	3968512,525	7419290,06	5426191,453
Exemple n°2	3556268,458	6097788,031	4656755,441

Les résultats donnés dans le tableau ci-dessus montrent que la stabilité vis-à-vis du déversement est affectée par les déformations dues à l'effort tranchant. La baisse de cette stabilité est d'autant plus importante que l'aire de l'âme équivalente est faible et donc que ces déformations sont importantes.

#### **6.4. Conclusion**

La méthode proposée dans ce chapitre pour la vérification de la stabilité au déversement pour les poutres en treillis de sections symétriques constantes et soumises à une charge uniformément répartie, a permis le traitement d'exemples de calcul qui prennent en considération, essentiellement, l'influence des paramètres suivants :

- La position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de cisaillement de la section transversale de la poutre ; en effet cette position peut influencer la valeur du moment critique de déversement, suivant que les charges créent un moment secondaire stabilisant ou déstabilisant.
- Les déformations dues à l'effort tranchant en prenant une importante valeur de l'aire de l'âme équivalente pour un exemple et une faible valeur de celle-ci pour l'autre exemple.

Les exemples de calcul traités dans ce chapitre ont permis de déterminer les charges «  $q_{sd}$  » pour les différents cas envisagés. Les charges ainsi calculées ont été comparées aux charges correspondant à l'atteinte de la résistance au flambement dans les éléments de la membrure comprimée les plus sollicités. Cette comparaison a permis de constater que :

- Pour l'exemple où l'aire de l'âme équivalente est importante, les charges correspondant à l'atteinte du moment résistant au déversement de la poutre, pour toutes les positions envisagées du point d'application des charges, sont plus

importantes que celle qui correspond à l'atteinte de la résistance au flambement dans les éléments de la membrure comprimée les plus sollicités.

- Pour l'exemple où l'aire de l'âme équivalente est faible, et dans le cas où la position du point d'application des charges engendre un moment secondaire déstabilisant, la charge correspondant au moment de résistance au déversement de la poutre est plus faible que celle qui correspond à la résistance au flambement des éléments de membrure comprimée les plus sollicités. Pour les deux autres cas envisagés, on a constaté le même rapport entre ces deux charges que dans l'exemple précédent.

En fait, la méthode de vérification habituellement adoptée et qui consiste à baser la résistance au déversement des poutres en treillis sur la résistance au flambement de la membrure comprimée, cette méthode néglige l'effet déstabilisant du moment secondaire provoqué par l'application des charges extérieures au niveau de la membrure comprimée. L'effet de ce moment secondaire peut être très important dans ce cas, d'une part, à cause de la grande hauteur des sections transversales des poutres en treillis, et d'autre part, à cause des déformations dues à l'effort tranchant qui sont importantes dans le cas où l'aire de l'âme équivalente est faible.

## Conclusion générale et perspectives

Au cours de ce travail, nous avons développé un modèle théorique dans le but de déterminer le moment critique élastique de déversement des poutres en treillis isostatiques à sections transversales constantes, soumises à un chargement uniformément réparti. Pour cela, nous avons assimilé le comportement de la poutre en treillis à celui d'un élément à parois minces où les treillis sont remplacés par une âme pleine équivalente à ces treillis. Dans la formulation des équations différentielles d'équilibre, nous avons introduit les déformations dues à l'effort tranchant en appliquant le procédé de l'âme équivalente. Les expressions du moment critique élastique de déversement ainsi déterminées nous ont permis de proposer une méthode de vérification de la stabilité au déversement pour les poutres en treillis de sections symétriques constantes et soumises à une charge uniformément répartie. La méthode proposée, est basée d'une part sur les formules de vérification du déversement des poutres en treillis données par les règles CM66, et d'autre part sur la prise en compte de l'effet des déformations dues à l'effort tranchant dans la détermination de l'expression du moment critique élastique du déversement.

En utilisant, dans un premier temps la méthode de vérification proposée grâce à ce travail, puis en considérant uniquement la résistance au flambement de membrure comprimée, nous avons traité des exemples d'application qui prennent en considération, l'influence de certains paramètres gouvernant la stabilité au déversement. Compte tenu de tous les résultats obtenus à l'issue de cette étude, nous avons pu constater que la méthode de vérification habituellement adoptée et qui consiste à baser la résistance au déversement des poutres en treillis sur la résistance au flambement de la membrure comprimée, cette méthode néglige l'effet déstabilisant du moment secondaire provoqué par l'application des charges extérieures au niveau de la membrure comprimée. L'effet de ce moment secondaire peut être très important dans ce cas, d'une part, à cause de la grande hauteur des sections transversales des poutres en treillis, et d'autre part, à cause des déformations dues à l'effort tranchant qui sont importantes dans le cas où l'aire de l'âme équivalente est faible.

Dans les recherches futures, il serait important de conduire des études en considérant d'autres cas de forme de poutres en treillis et d'autres cas de charges et de conditions aux limites, on peut citer notamment :

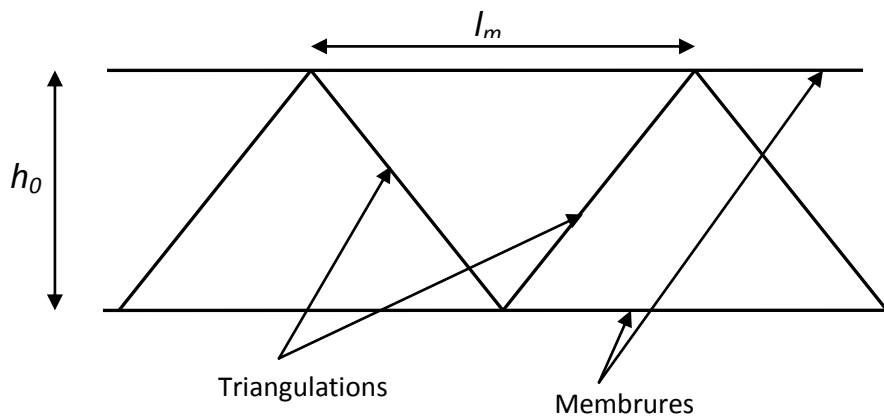
- Etude de la stabilité des poutres en treillis pour différentes distributions de chargement.
- Etude de la stabilité des poutres en treillis à section variable.
- Etude de la stabilité des poutres en treillis en présence d'appuis intermédiaires hors du plan du treillis ;

Etant donné la complexité des problèmes posés, des études numériques pourront être menées de manière progressive, du cas le plus simple au cas le plus complexe, en terme de modélisation géométrique, de distributions de chargement et de conditions aux limites.

# VÉRIFICATION DE LA STABILITÉ AU DÉVERSEMENT EN FLEXION SIMPLE DES POUTRES EN TREILLIS SELON LES RÈGLES CM66

## A.1. Introduction

La méthode proposée par les règles CM66 [14] s'applique aux pièces comportant une section constante en I doublement symétrique fléchies dans le plan du treillis et qui risquent de se déverser, c'est-à-dire pour lesquelles aucune liaison ne s'oppose à une déformation latérale. Ces pièces sont composées de membrures reliées par des triangulations (figure A-1).



*Figure A.1 : Poutres en treillis*

## A.2. Notations

Dans cette annexe, on a gardé les mêmes notations que celles qui sont utilisées par les règles CM66, en essayant à chaque fois de rappeler leurs significations à travers le texte ou à travers les figures. Ainsi on désigne par :

$v_0$  distance du centre de gravité de l'ensemble de la section composée au centre de gravité d'une membrure ;

$h_0$  distance entre les centres de gravité des deux membrures ( $h_0 = 2 v_0$ ) ;

$I_x$  moment d'inertie de la section composée par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du treillis ;

$I_y$  moment d'inertie de la section composée par rapport à l'axe parallèle au plan du treillis ;

- $J$  moment d'inertie de torsion de la section composée ;
- $l_f$  longueur de flambement latéral de la membrure comprimée supposée isolée du reste de la pièce ;
- $\sigma_e$  limite d'élasticité ;
- $E$  module d'élasticité longitudinale ;
- $G$  module d'élasticité transversale.

### A.3. Flambement individuel des tronçons de la membrure comprimée

Pour la membrure comprimée, on envisage les possibilités de flambement dans les différents plans, en prenant des longueurs de flambement égales aux distances entre nœuds ou points fixes dans le plan considéré. Pour chacun de ces modes de flambement, on détermine un coefficient de flambement  $k$  tel que :

$$k = \left( 0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_k} \right) + \sqrt{\left( 0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_k} \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_k}} \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E I}{l^2 A} \quad (\text{A.2})$$

où :

- $I$  moment d'inertie de la membrure correspondant au mode de flambement considéré ;
- $l$  longueur de flambement de la membrure correspondant au mode de flambement considéré et déterminée comme il est indiqué ci-dessus ;
- $A$  aire de la section brute de la membrure.

On désigne par  $k_m$  le plus grand de ces coefficients de flambement.

### A.4. Vérification de la stabilité au déversement

La théorie du flambement, adoptée par les règles CM66, basée sur la prise en compte de la valeur la plus probable des imperfections inévitables des pièces réelles a été généralisée au cas du déversement. La méthode est basée sur l'étude du flambement d'une pièce retenue latéralement par un milieu élastique en prenant en compte les imperfections probables des pièces, le calcul étant fait en équilibre élastique.

Pour les poutres en treillis, les règles sont données pour les deux cas suivants :

- cas des pièces symétriquement appuyées et symétriquement chargées ;
- cas des pièces soumises à deux moments différents au droit des appuis.

#### A.4.1. cas des pièces symétriquement appuyées et symétriquement chargées

On détermine une contrainte de non déversement :

$$\sigma_d = \frac{\pi^2 E}{5,2} \cdot \frac{I_y}{I_x} \cdot \frac{h_0^2}{l_f^2} \cdot (D-1) B C \quad (\text{A.3})$$

où :

$B, C, D$  : coefficients (voir ci-après) utilisés dans les calculs pour tenir compte :

- des dimensions de la pièce ( $D$ ),
- de la répartition longitudinale des charges ( $C$ ),
- du niveau d'application des charges ( $B$ ).

- Si on a :  $k_m \sigma_d \geq \sigma_e$ , la vérification de la stabilité au déversement n'est pas nécessaire.

- Si on a :  $k_m \sigma_d < \sigma_e$ , on détermine un élancement :

$$\lambda_0 = \frac{l_f}{h_0} \sqrt{\frac{4}{BC} \frac{I_x}{I_y} \left( \frac{1}{k_m} - \frac{\sigma_d}{\sigma_e} \right)} \quad (\text{A.4})$$

On en déduit un coefficient de flambement  $k_0$  (à partir de  $\sigma_k = \pi^2 E / (\lambda_0)^2$ ), puis on détermine un coefficient de déversement  $k_d$  donné par :

$$k_d = \frac{k_0}{1 + \frac{k_m \sigma_d}{\sigma_e} (k_0 - 1)} \quad (\text{A.5})$$

On calcule la valeur de la contrainte pondérée de flexion simple  $\sigma_f$  au milieu de la portée et on vérifie que :  $k_d k_m \sigma_f \leq \sigma_e$ .

#### A.4.2. cas des pièces soumises à deux moments différents au droit des appuis

On détermine  $\sigma_f$  en fonction du moment le plus élevé en valeur absolue  $M_w$ , le moment à l'autre extrémité étant désigné par  $M_e$ . On calcule, comme précédemment, le coefficient  $k_{d0}$  qui serait valable pour la même pièce soumise à un moment constant sur toute sa longueur. On détermine  $C$  (voir ci-après) correspondant à  $(M_e / M_w)$  et on adopte pour  $k_d$  la valeur :

$$k_d = \frac{k_{d0}}{C} + \frac{C-1}{5k_{d0}} \geq 1 \quad (\text{A.6})$$

On vérifie enfin que :  $k_d k_m \sigma_f \leq \sigma_e$ .

#### A.4.3. Valeurs des coefficients $B$ , $C$ et $D$

a) **Coefficient  $B$**  : Fonction du niveau d'application des charges.

Il a pour expression :

$$B = \sqrt{1 + \left( \frac{y_a}{h_0} \frac{8\beta C}{\pi^2 D} \right)^2} - \frac{y_a}{h_0} \frac{8\beta C}{\pi^2 D} \quad (\text{A.7})$$

avec  $y_a > 0$  si le point d'application de la charge est au-dessus du centre de gravité. Les valeurs de  $\beta$  sont données dans le tableau ci-après dans le cas de pièces symétriquement

appuyées et symétriquement chargées :

Tableau A-1 : Valeurs du coefficient $\beta$					
Encastrement par rapport à		Moment constant	Charge concentrée au milieu	Charge uniformément répartie	2 charges symétriques à $c$ des appuis $\alpha = c/l_f$
yy	xx				
sans $l_f = l$	sans	0	1	1	$6\alpha - 8\alpha^2$
	avec	-	2	3	$5 - 2\alpha - 8\alpha^2$
avec $l_f = 0,5l$	sans	0	1	0,75	$5\alpha^3(1,2 - \alpha)$
	avec	-	2	2,25	$\alpha^2(13 - 11\alpha)$

**b) Coefficient C :** Fonction de la répartition des charges.

Dans le cas de pièces symétriquement chargées sur 2 appuis du même genre, les valeurs de C sont données par le tableau ci-après :

Tableau A-2 : Valeurs du coefficient C pour les pièces symétriquement chargées sur 2 appuis du même genre					
Encastrement par rapport à		Moment constant	Charge concentrée au milieu	Charge uniformément répartie	2 charges symétriques à c des appuis $\alpha = c/l_f$
Yy	xx				
Sans $l_f = l$	sans	1	1,365	1,132	$1+2,92\alpha^3$
	avec	-	0,938	0,576	$0,1+1,2\alpha+1,9\alpha^3$
avec $l_f = 0,5l$	sans	1	1,070	0,972	$1+\alpha^3(\alpha-0,93)$
	avec	-	0,633	0,425	$0,181+0,307\alpha+(\alpha-0,474)^3$

Dans le cas de pièces soumises à deux moments différents sur appuis, on a :

$$C = \sqrt{\frac{3}{1 + \mu + \mu^2 - 0,152(1 - \mu)^2}} \quad (\text{A.8})$$

avec :  $\mu = M_e / M_w$ .

- si  $M_e = M_w$       $C = 1$
- si  $M_e = 0$       $C = 1,88$
- si  $M_e = -M_w$       $C = 2,77$

**d) Coefficient D :** Fonction des dimensions de la pièce.

Il est donné par l'expression :

$$D = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_y} \frac{l_f^2}{h_0^2}} \quad (\text{A.9})$$

# PRISE EN COMPTE DES IMPERFECTIONS DANS LA FORMULATION DU MOMENT RESISTANT AU DEVERSEMENT $M_{bRd}$

## B.1. Introduction

Les modèles d'instabilités par « bifurcation » de l'équilibre donnent des charges « critiques » qui constituent des bornes supérieures des charges de ruine des barres et des plaques . Les imperfections inévitables qui affectent les éléments de structures, et qui constituent la cause même des phénomènes d'instabilité, sont de plusieurs types. On peut notamment citer les imperfections géométriques telles que courbure ou torsion initiales, les imperfections structurelles telles que les contraintes résiduelles de fabrication et les hétérogénéités de la limite élastique ou du module d'élasticité dans la section transversale d'un profil et les défauts de positionnement ou de centrage des charges.

Ces imperfections entraînent des déformations transversales des éléments, même pour des charges nettement plus petites que les charges critiques, déformations qui s'amplifient indéfiniment lorsque la charge appliquée devient voisine de la charge de ruine et conduisent à une instabilité par « divergence » de l'équilibre.

Les courbes européennes de flambements, qui ont été établies pour donner des valeurs pratiques aux imperfections, sont issues d'un programme de recherches qui a été mené par le Convention Européennes de la Construction Métallique (CECM) à partir de 1960 [23]. Le programme a permis de réaliser plus de milles essais dans sept pays différents sur des éléments laminés et pour des élancements variés ( $55 < \lambda < 160$ ) [23].

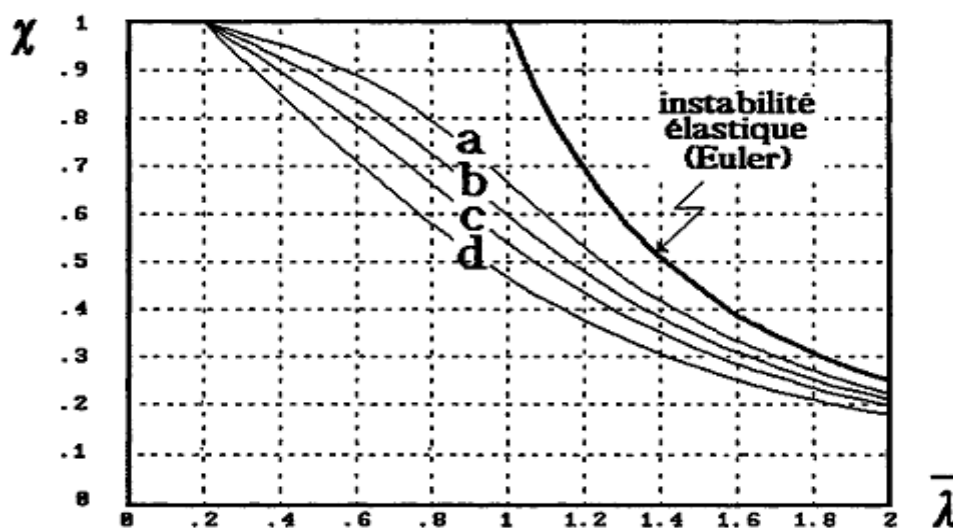


Figure B.1 : Courbes d'imperfections

Les courbes de flambement **a**, **b**, **c** et **d** correspondent aux profils possédant un degré d'imperfection petit, moyen, grand et très grand respectivement. Le choix de ces courbes se fait conformément au tableau 5.5.3 de l'EC3.

On notera que ces courbes sont fondées sur les conditions suivantes [23] :

Barres de section constante et articulées à leurs extrémités.

L'effort axial est constant et appliqué aux extrémités de l'élément.

Le voilement local est empêché.

Il est à souligner que les courbes d'imperfections utilisées pour le déversement sont [20]:

La courbe **a** pour les profils laminés.

La courbe **c** pour les sections soudées.

## B.2. Formulation analytique des courbes de flambement

La formulation des courbes de flambement est issue des travaux d'AYRTON-PERRY et ceux de MAQUOI et RONDAL.

### B.2.1 Prise en compte d'un défaut initial

On considère une barre comprimée avec un défaut de rectitude du type sinusoïdal s'écrivant sous la forme :

$$y_0(x) = e_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{B.1})$$

On a donc le schéma de déformée suivant :

L'équation différentielle traduisant l'équilibre du poteau devient :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{N(y_0(x) + y(x))}{EI} = 0 \quad (\text{B.2})$$

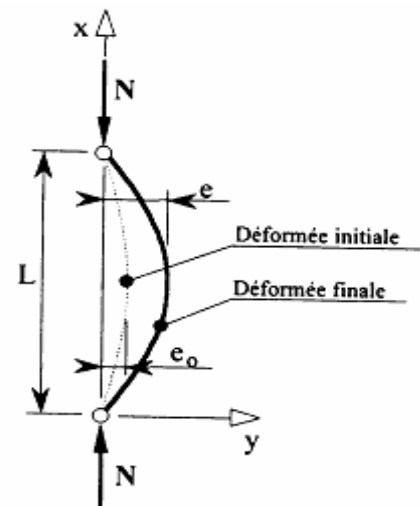


Figure B.2 : Flambement d'une barre bi-articulée avec un défaut initial et chargée axialement

vec pour solution :

$$y(x) = \frac{e_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{B.3})$$

La flèche maximale totale  $e$  au milieu du poteau s'écrit sous la forme :

$$e = e_0 + \frac{e_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} = \frac{e_0}{1 - \frac{N_{cr}}{N}} \quad (\text{B.4})$$

On définit par ailleurs le facteur d'amplification :  $\frac{1}{1 - \frac{N_{cr}}{N}}$

### B.2.2 Critère de ruine par flambement

L'atteinte de la première plastification dans la barre considérée sans contraintes résiduelles sous l'action du couple ( $N_{\max}$ ) et ( $e \cdot N_{\max}$ ) répond au critère :

$$\frac{N_{\max}}{A} + \frac{e \cdot N_{\max}}{W_{el}} = f_y \quad (\text{B.5})$$

$N_{\max}$  étant l'effort axial maximal limité par le flambement.

En utilisant l'équation (B.4), on obtient :

$$\frac{N_{\max}}{N_{pl}} + \frac{e_0 \cdot A \cdot N_{\max}}{W_{el} \left(1 - \frac{N_{\max}}{N_{pl}} \frac{N_{pl}}{N_{cr}}\right)} = 1 \quad (\text{B.6})$$

ou encore :

$$\chi + \frac{\chi}{1 - \chi \bar{\lambda}^2} \frac{e_0 \cdot A}{W_{el}} = 1 \quad (\text{Équation d'AYRTON-PERRY}) \quad (\text{B.7})$$

avec :  $N_{pl} = A f_y$  et  $\chi = \frac{N_{\max}}{N_{pl}}$  et  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$

On pose  $\eta = \frac{e_0 \cdot A}{W_{el}}$  facteur d'imperfections généralisé représentant l'effet des différentes imperfections.

L'objectif est de trouver une expression de  $\chi$  coefficient de réduction affectant la résistance plastique de la section.

Sachant que  $\chi = 1$  pour  $\bar{\lambda} \leq 0,2$ , il s'est avéré que l'on pouvait retrouver fidèlement les résultats expérimentaux en adoptant un défaut à mi-longueur mis sous la forme :

$$e_0 = \frac{W_{el}}{A} \cdot \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \quad (B.8)$$

C'est-à-dire que :

$$\eta = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \quad (B.9)$$

$\alpha$  est le facteur d'imperfection qui dépend de la courbe de flambement.

L'équation (B.7) devient :

$$(1 - \chi) \cdot (1 - \chi \bar{\lambda}^2) = \chi \eta = \chi \cdot \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \quad (B.10)$$

La recherche de la solution minimale donne :

$$\chi = \frac{\phi - \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}{\bar{\lambda}^2} \quad (B.11)$$

$$\text{avec :} \quad \phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] \quad (B.12)$$

Après transformation, on obtient l'expression proposée par l'EC3 :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (B.13)$$

### B.3. Calcul du moment résistant au déversement $M_{b,Rd}$

Comme pour tous types de flambement, on doit tenir compte des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles et des effets dus à la plasticité du matériau et à l'écroutissage. En ce qui concerne les imperfections géométriques initiales, la rotation initiale de la barre et le manque de planéité des composants de la section sont, comme on peut le comprendre, les plus significatifs. A la différence du flambement par flexion, pour lequel on a beaucoup d'informations, la résistance ultime associée au déversement ne peut pas être estimée avec une grande précision à cause du manque d'expériences suffisamment

documentées et des résultats correspondants des tests [6]. On accepte généralement que la procédure utilisée pour le flambement par flexion puisse être étendue au flambement latéral, sous réserve de faire l'hypothèse que les diminutions de résistance dues aux imperfections et à la plasticité sont semblables dans les deux cas, si on les exprime en coordonnées réduites. L'élançement réduit correspondant est logiquement défini de la manière suivante :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,LT}}} \quad (B.14)$$

où  $\sigma_{cr,LT}$  représente la contrainte critique de déversement élastique.

L'introduction des imperfections géométriques permet donc de déterminer le moment résistant au déversement  $M_{b,Rd}$  et cela en utilisant les courbes de flambement [20]. Ainsi la valeur de calcul du moment résistant au déversement est :

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \beta_w \cdot W_{pl,y} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \quad (B.15)$$

où

$$\beta_w = 1 \quad \text{pour les sections de classe 1 ou 2.}$$

$$\beta_w = W_{el,y} / W_{pl,y} \quad \text{pour les sections de classe 3.}$$

$$\beta_w = W_{eff,y} / W_{pl,y} \quad \text{pour les sections de classe 4.}$$

et :

$W_{pl,y}$  : module de résistance plastique de la section nominale en considérant l'axe yy;

$W_{el,y}$  : module de résistance élastique de la section nominale en considérant l'axe yy;

$W_{eff,y}$  : module de résistance élastique de la section efficace en considérant l'axe yy;

$f_y$  : valeur de la résistance limite d'élasticité minimale;

$\gamma_{M1}$  : coefficient partiel de sécurité relatif au matériau.

$\chi_{LT}$  est le coefficient de réduction pour le déversement, qui est fonction de l'élançement réduit  $\bar{\lambda}_{LT}$  de l'élément vis-à-vis du déversement et qui a pour valeur :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \left[ \phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]^{0,5}} \quad \text{mais} \quad \chi_{LT} \leq 1 \quad (B.16)$$

où

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (B.17)$$

et

$\alpha_{LT} = 0,21$  pour les profilés laminés.

$\alpha_{LT} = 0,49$  pour les sections soudées.

L'élancement réduit  $\bar{\lambda}_{LT}$  a pour valeur :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \left[ \beta_w \cdot W_{pl,y} \cdot \frac{f_y}{M_{cr}} \right]^{0.5} = \left[ \frac{\lambda_{LT}}{\lambda_{\cdot 1}} \right] \cdot \beta_w^{0.5} \quad (\text{B.18})$$

où

$$\lambda_{\cdot 1} = \pi \cdot \left[ \frac{E}{f_y} \right]^{0.5} = 93,9 \cdot \varepsilon \quad (\text{B.19})$$

$$\varepsilon = \left[ \frac{235}{f_y} \right]^{0.5} \quad \text{et} \quad (f_y \text{ en N/mm}^2) \quad (\text{B.20})$$

et :

$M_{cr}$  = moment critique élastique de déversement.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] P.Stepine – «Resistance des Matériaux » 1983–Traduit du russe en français par Valentin Polonski- Edition MIR, 1986.
- [2] Pierre-Alain Boucard « Cours de Dimensionnement des Structures Résistance des Matériaux » - IUT Cachan, 2009.
- [3] XP P22-311/A2 – EC3-DAN – «Calcul des structures en acier » et Document d'Application Nationale – Partie 1.1: «Règles générales et règles pour les bâtiments» ANNEXE G.
- [4]P.C.J. Hoogenboom« Vlasov torsion theory» October 2006.
- [5] Roger L. Brockenbrough & Frederick S. Merritt « Structural Steel Designer's Handbook»-Third Edition -Mc GRAW-HILL, INC, 2004.
- [6] Association pour la Promotion de l'enseignement de la construction acier – « Stabilité appliquée » - Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier.
- [7] MOHAMED EL NAGGAR-« Recherche de la charge ultime d'une charpente métallique »- Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne -Thèse № 420 (1982).
- [8] F.Mohri , A. Brouki , J.C.Roth-« Theoretical and numerical stability analyses of Unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams» - Journal of Constructional Steel Research 59(2003)63–90.
- [9] S. Timoshenko. – «Theory of elastic stability» – McGraw-Hill – 1961 /Traduit en français par Jean MOREL.
- [10] Site internet – «[www.cluny.ensma.fr](http://www.cluny.ensma.fr) »
- [11] Miguel A. Serna, Aitziber Lopez, Inigo Puente, Danny J.Yong «Equivalent uniform moment factors for lateral–torsional buckling of steel members» - Journal of Constructional Steel Research 62(2006)566–580.
- [12] Site internet – «[www.technique de l'ingénieur.fr](http://www.technique.de.l'ingenieur.fr) »
- [13] Manfred A Hirt, Rolf Bez, Alain Nussbaumer-« Construction métallique : notions fondamentales et méthodes de dimensionnement»-2006.
- [14] ITBTP et CTICM « Règles de calcul des structures métalliques CM 66 » Edition Eyrolles-1979.
- [15] Foudil Mohri - Nouredine Damil - Michel Potier-Ferry – «Un modèle éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes » –IUT Nancy-Brabois, UHP, Nancy 1, France.
- [16] B. Larue. – «Stabilité des poutres a voiles minces» site internet -[www.Lycos.fr](http://www.Lycos.fr).

[17] Bambang Suryoatmono, David Ho- «The moment–gradient factor in lateral–torsional Buckling on wide flange steel sections» - Journal of Constructional Steel Research 58(2002)1247–1264.

[18] B. Larue. – «Déversement élastique des profils laminés avec maintien latéral rigide et continu au niveau d’une semelle»– Revue Construction Métallique n°4-2002 – CTICM.

[19] Steven M. Wilkerson-« Improved Coefficients for Elastic Lateral –Torsional Buckling» – American Institute of Aeronautics and Astronautics - Rice University, Houston, Texas, 77005, U.S.A.

[20] DTR BC 2.44 – «Règles de conception et de calcul des structures en Acier » «CCM 97 »

[21] XP P22-311 – EC3-DAN – «Calcul des structures en acier» et Document d’Application Nationale – Partie 1.1: «Règles générales et règles pour les bâtiments».

[22] Youde Xiong « Formulaire de résistance de matériaux » Editions Eyrolles-2002.

[23] Philippe SZKLEREK « Construction métallique » - Université du HAVRE.2010.