

N°D'ORDRE: 04/2011-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE LA L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES EXACTES ET DE LA TECHNOLOGIE
" HOUARI BOUMEDIENNE"
FACULTE DE MATHEMATIQUES



T H E S E
DE
DOCTORAT
EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles

Présentée par: Mohamed BENABIDALLAH

Thème :

La Méthode Décompositionnelle d'Adomian
Appliquée aux Equations aux Dérivées Partielles

Soutenue publiquement le : 16/06/2011 devant le Jury composé de:

R.BEBBOUCHI.....Professeur...à l'USTHB.....Président
A.KESSAB.....Maître de conférence/A...à l'USTHB...directeur de thèse
M. MEJDEN.....Professeur...à l'USTHB.....Examineur
M.DENECH.....Professeur... à l'université de Constantine...Examineur
B.SOME.....Professeur...à l'université de Ouagadougou..Examineur
A.KHEMMOUDJ...Maître de conférence/A...à l'USTHB.....Examineur

Table des matières

CHAPITE I/ Présentation de la méthode décompositionnelle d'Adomian

1-1. Introduction.....	7
1-2. Schéma décompositionnel d'Adomian.....	9
1-3. Quelques résultats de convergence.....	11
1-4. Application de la méthode décompositionnelle.....	13
A/ Aux équations différentielles	
B/ Au contrôle optimal	
1-5. Calcul pratique des polynômes d'Adomian.....	16
1-6. Polynômes d'Adomian en dimension p.....	18

CHAPITRE II/ Application de la méthode décompositionnelle pour la résolution d'une classe de problèmes aux limites.

2-1. Introduction.....	18
2-2. Application de la méthode décompositionnelle pour la résolution du problème (P1).....	19
2-2-1. Construction d'une forme canonique adéquate	
2-2-2. Convergence du processus itératif	
2-3. Tests numériques.....	27
2-3-1. Exemple (E1).....	27
a/ Résolution numérique	
b/ Graphes	
c/ Commentaires	
2-3-2. Exemple (E2).....	30
a/ Résolution numérique	
b/ Graphes	
c/ Commentaires	
2-3-3. Exemple (E3).....	34
a/ Résolution numérique	
b/ Graphes	
c/ Commentaires	

CHAPITRE III/ Application de la méthode décompositionnelle pour la résolution d'une classe de systèmes différentiels avec conditions aux limites.

3-1. Introduction	38
3-2. Application de la méthode décompositionnelle au problème (Q1)	38
3-2-1.Construction d'une forme canonique adéquate	
3-2-2.Convergence du processus	
3-3. Exemple (E4)	49
a/ Résolution numérique	
b/ Graphes	
c/ Commentaires	
3-4. Exemple (E5)	54
a/ Résolution numérique	
b/ Graphes	
c/ Commentaires	

CHAPITRE IV/ Résolution d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires avec les conditions aux limites de Dirichlet

4-1. Position du problème	61
4-2. Application de la méthode décompositionnelle au problème (R2)	62
4-2-1.Construction d'une forme canonique adéquate	
4-3. Application de la méthode décompositionnelle au problème (R1)	67
4-2-1.Construction d'une forme canonique adéquate	
4-3-2. Convergence du processus	
4-4.Tests numériques	77
4-4-1.Exemple (E6)	77
a/ Résolution numérique.....	
b/ Graphes	
c/ Commentaires	
4-4-2.Exemple (E7)	80
a/ Résolution numérique.....	
b/ Graphes.	
c/ Commentaires	
4-5. Programmes Maple	82

V-Perspectives

5-1. Introduction.....	90
5-2- Cas du Laplacien dans la couronne avec les conditions de Dirichlet.	
5-3- Cas du Laplacien dans le disque avec les conditions de Dirichlet.	
5-4- Problème de Fisher.	

Introduction.

Le problème auquel nous nous intéressons dans les chapitres suivants consiste à déterminer une forme canonique adéquate pour résoudre, à l'aide de la méthode décompositionnelle d'Adomian, certaines classes de problème aux limites, différentiels et aux dérivées partielles. Outre la difficulté de la recherche de cette forme canonique, nécessaire à l'application de la méthode d'Adomian, nous rencontrons une difficulté majeure, c'est la prise en charge des conditions aux limites, initiales ou les deux, selon la nature du problème étudié.

Dans les différents travaux entrepris, d'abord par G. Adomian, Y. Cherruault, puis plus tard par K. Abbaoui et autres, cet obstacle n'existait pas parcequ'ils ont toujours proposé des solutions locales. Par contre, pour la recherche de solutions globales, but de cette étude, il est absolument nécessaire de tenir compte des conditions aux limites dans l'écriture même de la forme canonique.

Notations :

On pose :

$E = C^2([a, b], \mathbb{R})$, $F = (C^2([a, b], \mathbb{R}))^n$ et $G = C\{([a, b] \times E), \mathbb{R}\}$, munis respectivement des normes :

$$\|u(t)\|_E = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|,$$

$$\|U(t)\|_F = \sum_{i=1}^{i=n} \|u_i(t)\|_E, \text{ où } U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^t, u_i \in C^2([a, b], \mathbb{R}),$$

$$\|f\|_G = \sup_{t \in [a, b]} |(f(u(t), t)|$$

Dans le chapitre I, nous commençons par la présentation de la méthode décompositionnelle d'Adomian ainsi que quelques résultats de convergence spécifiques à cette méthode car nécessaires pour la compréhension des points que nous aborderons dans ce travail

Dans le chapitre II, nous nous intéressons à la résolution numérique par application de la méthode décompositionnelle pour déterminer une solution globale du problème aux limites :

Trouver $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, solution de:

$$(P1) \quad \begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) = f(x, u(x)), & x \in]a, b[, (a, b) \in \mathbb{R}^2 & (E) \\ u(a) = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} & (1) \\ u(b) = \beta, & \beta \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

où $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans le chapitre III, nous nous intéressons à la généralisation de la technique développée dans le chapitre précédent au système différentiel aux limites suivant :

Trouver $u \in (C^2([a, b], \mathbb{R}))^n$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que :

$$(Q1) \quad \begin{cases} u''(x) + A(x)u'(x) = f(x; u(x)), & x \in]a, b[& (E) \\ u(a) = \alpha & (1) \\ u(b) = \beta & (2) \end{cases}$$

où

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}(x) & & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad \text{notée } (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

et $a_{i,j} \in E$.

Dans le chapitre IV, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème aux limites suivant :

$$(R1) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[\times]a, b[\\ u(a, y) = u(b, y) = 0 \\ u(x, a) = u(x, b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{où } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

et $f : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée.

Pour résoudre ces problèmes, nous adopterons dans un premier temps, la méthode décompositionnelle d'Adomian telle qu'appliquée par G.Adomian (cf [5], [6] [7]). La principale difficulté rencontrée et commune à ces problèmes, est la construction d'une forme canonique qui prend en compte toutes les conditions aux limites.

En effet, la forme canonique "naturelle" utilisée propose d'une part, une solution localement convergente et d'autre part, ne prend pas en compte toutes les conditions aux limites, dans chacun des problèmes qui nous intéresse. Lors de la construction de cette forme canonique apparaissent alors des inconnues telles que :

$u'(b)$, pour les problèmes (P1) et (Q1), $\frac{\partial u}{\partial x}(b, y)$, pour le problème (R1) où u' et $\frac{\partial u}{\partial x}$ désignent respectivement la dérivée de u dans les problèmes (P1) et (Q1), la dérivée partielle première de u dans le problème (R1). Pour pallier cette difficulté, nous aurons besoin de modifier la forme canonique de telle sorte à prendre en charge les conditions aux limites. On utilisera pour cela des écritures sous forme de séries décompositionnelles pour $u'(b)$ dans (P1) et (Q1) et pour $\frac{\partial u}{\partial x}(b, y)$ dans (R1) puis on établira systématiquement un résultat de convergence pour le processus itératif construit pour approcher la solution exacte de chacun des 3 problèmes.

Chapitre I

PRESENTATION DE LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN

1.1 Introduction

La méthode décompositionnelle d'Adomian fut initiée par le professeur G. Adomian au début des années 80, de manière empirique et sans fondements théoriques (cf Adomian [5], Adomian [6]). Le professeur Y. Cherruault a été le premier à établir des bases rigoureuses pour cette méthode, à justifier sa convergence et à la généraliser (cf Cherruault [10], [11]). Sous sa direction et à l'aide de ses collaborateurs du laboratoire MEDIMAT de l'université Pierre et Marie Curie de Paris VI, de nombreux travaux ont été réalisés (cf Abbaoui [1],[2],[3], [4], Guellal [24]) et d'autres). En 1995, l'un de ses nombreux disciples, K. Abbaoui a présenté sa thèse de doctorat où il a développé les fondements mathématiques de la dite méthode (cf Abbaoui [1]). La méthode décompositionnelle d'Adomian est une méthode de résolution de problèmes de différents types: algébriques, différentiels, aux dérivées partielles, intégrales,...

Elle est particulièrement efficace dans le cas des problèmes non linéaires (cf Cherruault [10], [11]) du fait de son principe même. Elle permet de trouver une approximation aussi précise que l'on veut de la solution des équations du type $u = G(u)$. Elle permet également d'approcher analytiquement les solutions de toutes sortes d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode est basée sur un principe de décomposition de la fonction inconnue sous la forme d'une série de fonctions d'une part, et de l'opérateur (algébrique, différentiel ou autre) sous la forme d'une série polynomiale par rapport à la fonction inconnue déjà écrite elle-même sous forme de série, d'autre part.

A l'aide d'une technique récursive, on arrive à déterminer la série solution (cf Abbaoui [1]). Ainsi, comme on le remarque, si l'opérateur considéré dans le problème est non linéaire, la méthode décompositionnelle ne change pas sa nature puisque aucune linéarisation n'est effectuée.

Cette technique fournit des solutions bien adaptées aux problèmes concrets provenant de la physique ou autre; on obtient à la fin, une solution sous forme de séries

de fonctions qui convergent généralement très vite, comme nous le verrons sur des tests numériques réalisés à la fin de ce travail.

Outre sa facilité de mise en oeuvre, cette méthode offre, comme nous allons le montrer au cours des chapitres suivants, l'intérêt d'ouvrir des perspectives pratiques originales et surtout puissantes. Les calculs lourds et fastidieux qui apparaissent lorsqu'on fait appel aux méthodes classiques de discrétisation sont évités; ce procédé fournit une solution analytique pour une large classe de problèmes.

La méthode décompositionnelle est utilisée de manière très efficace dans la résolution des équations intervenant dans le modèle de MARCHUC (immunologie), du modèle compartimental des systèmes microlasers (cf Khelifa [14]), en mécanique des fluides et bien d'autres problèmes.

Le principe de base de la méthode décompositionnelle d'Adomian est simple et en même temps naturel. Son originalité, contrairement à d'autres techniques de résolution basées généralement sur la linéarisation du terme non linéaire, réside dans la décomposition de l'opérateur non linéaire en une série polynômiale dont les éléments sont calculés récursivement.

Nous allons présenter dans ce qui suit les principales notions sur la dite méthode qui nous serviront à définir précisément la méthode décompositionnelle et à résoudre rigoureusement toutes sortes d'équations.

1.2 Schéma décompositionnel d'Adomian

Soit H un espace de Hilbert ou de Banach, f un élément de H et N un opérateur (linéaire ou non linéaire) de H dans lui même.

On considère l'équation fonctionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ dans } H \text{ telle que:} \\ u - N(u) = f \end{array} \right. \quad (1-2-1)$$

On suppose dans ce qui suit que l'équation (1-2-1) admet une solution unique dans H . La méthode décompositionnelle telle qu' introduite par G. Adomian consiste à écrire la fonction u et l'opérateur N de l'équation sous forme :

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad (1-2-2)$$

et

$$N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(u_0, u_1, \dots, u_k) \quad (1-2-3)$$

où les u_k sont des éléments de H et les A_k sont des polynômes en u_0, u_1, \dots, u_k , appelés polynômes d'Adomian associés à l'opérateur N et obtenus par l'égalité :

$$N \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k A_k(u_0, u_1, \dots, u_k) \quad (1-2-4)$$

Définition 1-2-1:

Les polynômes d'adomian A_n associés à l'opérateur H sont obtenus par la formule :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k \right) \right] /_{\lambda=0} \quad (1-2-5)$$

où λ est introduit par convenance.

Il découle de cette formule que (cf Abbaoui [6]) A_k est un polynôme en u_0, u_1, \dots, u_k .

En injectant alors les expressions de u et de N dans l'équation (1-2-1), on aura ainsi :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1} + \dots = f + A_0(u_0) + \dots + A_n(u_0, \dots, u_n) + \dots$$

On convient alors que :

$$\begin{cases} u_0 = f \\ u_1 = A_0(u_0) \\ \dots \\ u_{n+1} = A_n(u_0, \dots, u_n) \\ \dots \end{cases} \quad (1-2-6)$$

ainsi, la solution exacte du problème (1-2-1) :

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

est construite de manière récursive.

Remarque 1-2-1 :

En procédant ainsi, le caractère de l'opérateur N , linéaire ou non linéaire est préservé.

Notations :

On adoptera les notations suivantes :

Pour $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

nous posons :

$$\begin{aligned} |k| &= k_1 + k_2 + \dots + k_n \\ |nk| &= k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n \\ k! &= k_1! k_2! \dots k_n! \\ u^k &= u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} \end{aligned}$$

Les polynômes d'Adomian sont alors construits grâce aux deux propositions suivantes:

Proposition 1-2-1 :

Si H est un espace de Hilbert ou de Banach et N un opérateur de H dans lui même, les polynômes d'Adomian associés à N sont définis par :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\sum_{p_1+\dots+p_k=n} N(u_0).(u_{p_1}, \dots, u_{p_k}) \right), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1-2-7)$$

Démonstration :

(cf Abbaoui [1]).

Proposition 1-2-2:

Si H est un espace de Hilbert ou de Banach et N un opérateur de H dans lui même, les polynômes d'Adomian associés à N sont définis par:

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{|nk|=n} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}(u_0).(u_{1[k_1]}, \dots, u_{n[k_n]}), \quad \forall n \geq 1 \\ \text{où } u_{j[k_j]} = (u_j, \dots, u_j), \quad k_j \text{ fois.} \end{cases} \quad (1-2-8)$$

Démonstration:

(cf Abbaoui [1]).

1.3 Quelques résultats de convergence

Les relations (1-2-6) définissent, sans ambiguïté, les termes u_i de la série "solution" car une fois les A_i , calculés à l'aide de (1-2-5) et les $u_n = A_{n-1}$, sont parfaitement déterminés, puisque A_{n-1} ne dépend que des u_0, \dots, u_{n-1} qui sont calculés aux étapes précédentes. Le problème qui reste posé à propos de cette méthode, concerne la convergence de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ ou ce qui revient au même, celle de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} A_i$. Sans hypothèses complémentaires sur l'opérateur N de l'équation (1-2-1) il ne sera pas possible d'aborder ce problème de convergence.

Théorème1-3-1:

La méthode décompositionnelle équivaut à trouver une suite

$$S_n = u_1 + \dots + u_n, \quad S_0 = 0,$$

vérifiant la relation de récurrence

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad S_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Démonstration:

(Cherruault [10], [11])

Nous allons à présent donner un résultat de convergence, justifié dans (cf Cherruault [10])

Théorème 1-3-2:

Si l'opérateur N de H dans lui même est une contraction (c'est-à-dire) vérifie ($\|N\| \leq \delta < 1$) alors la suite des sommes partielles recurrente définie par :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), S_0 = 0, n \geq 0$$

converge vers la solution S de l'équation

$$N(u_0 + S) = S$$

Remarque 1-3-1:

Dans cette méthode, nous avons le choix du terme initial u_0 que l'on choisit ici égal à f . Ce choix est important car il va conditionner la convergence ou la divergence de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. On aura donc intérêt à être vigilant sur le choix de u_0 . Dans ce qui suit, nous donnons d'autres résultats de convergence qui font apparaître des conditions sur $N(u_0)$ et ses dérivées $N^{(k)}(u_0)$, au sens de Fréchet.

Théorème 1-3-3:

Soit H un espace de Banach et N un opérateur de H dans lui même. On suppose que :

$$\|N^{(k)}(u_0)\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$$

alors les polynômes d'Adomian associés à N vérifient :

$$\|A_n(u_0, \dots, u_n)\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \quad (1-3-1)$$

Démonstration:

(cf Khelifa [14]).

Théorème 1-3-4 :

Soit H un espace de Banach et N un opérateur de H dans lui même.

On suppose que :

$$\|N^{(k)}(u_0)\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N} \text{ et } M \leq \frac{1}{e} \quad (1-3-2)$$

Alors la série décompositionnelle $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} A_n$ est absolument convergente.

Démonstration :

(cf Abbaoui [1]).

Théorème 1-3-5 :

Sous les hypothèses du théorème 2, la solution du problème (1-2-1) vérifie :

$$\|u - S_k\| \leq \frac{(k+1)^k M^{k+1}}{(k+1)! 1 - Me} \quad (1-3-2)$$

où

$$S_k = \sum_{i=0}^{i=k} u_i \quad (1-3-3)$$

Démonstration :

(cf Khelifa [14]).

Théorème 1-3-6 :

Sous les hypothèses du théorème 2, la solution du problème (1-2-1) vérifie :

$$\|u - S_k\| \leq \frac{(Me)^{k+1}}{1 - Me} \quad (1-3-4)$$

Démonstration :

(cf Abbaoui [1]).

Parmi les applications de la méthode décompositionnelle, nous en citerons deux; son application aux équations différentielles et au contrôle optimal.

1.4 Applications

1.4.1 Aux équations différentielles.

Un problème important dans les applications technologiques réside dans la recherche d'une solution physiquement acceptable de systèmes non linéaires ou stochastiques modélisés par des équations différentielles ou aux dérivées partielles avec conditions initiales ou aux limites. Dans de nombreux problèmes différentiels, apparaissent des opérateurs fortement non linéaires pour lesquels l'utilisation des méthodes mathématiques classiques se révèlent très lourdes. Pour cela nous allons appliquer la méthode décompositionnelle aux équations différentielles.

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u) + g \\ u(t)/_{t=0} = \alpha \end{cases} \quad (1-4-1)$$

où f est une fonction non linéaire et g une fonction donnée.

La méthode décompositionnelle consiste à chercher la solution u sous la forme :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (1-4-2)$$

et à décomposer le terme non linéaire f sous la forme :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(u_0, \dots, u_n) \quad (1-4-3)$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian associés à f . En intégrant l'équation (1-4-1) par rapport à t puis en remplaçant (1-4-2) et (1-4-3) dans (1-4-1), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \alpha + \int_0^t g(s) ds + \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right) ds \quad (1-4-4)$$

Ainsi, la solution de (1-4-1) est parfaitement déterminée. En pratique, il est difficile d'obtenir tous les termes de la série (1-4-2), aussi utilise-t-on une approximation de la solution sous la forme d'une série tronquée

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k. \quad (1-4-5)$$

1.4.2 Au contrôle optimal

Cette méthode possède une propriété fondamentale que nous allons détailler maintenant pour la bonne compréhension de ce point. Les polynômes d'adomian A_i qui sont calculés à partir de la définition font intervenir les variables de temps et d'espace de façon explicite. De plus, si des paramètres ou des contrôles apparaissent dans l'équation

$$u - N(u) = f,$$

on retrouve également ces paramètres et contrôles de façon aussi explicite dans les polynômes d'Adomian A_i et par conséquent dans la série solution. Cette caractéristique fondamentale de la méthode va nous permettre de transformer des problèmes de contrôle optimal en problèmes d'optimisation classique. Rappelons que nous ne calculons, en aucun cas, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ mais que nous utiliserons une série tronquée :

$$\phi_p = \sum_{k=0}^{k=n} u_k.$$

Cette série tronquée constituera une approximation, aussi bien dans le cadre du théorème de convergence (1-2) que dans celui utilisant des conditions sur $N^{(k)}(u_0)$, ($k = 0, 1, \dots$), nous serons en mesure d'estimer l'erreur de troncature de façon précise. Par ailleurs, il est clair que la formule définissant les A_n , devient pénible à utiliser dès que n dépasse 6 ou 7. Pour nos besoins en calculs, on utilisera des logiciels de calcul formel tel que le Maple ou Matlab qui nous permettront de les obtenir de façon réccurente à n'importe quel ordre.

Considérons à présent un problème de contrôle optimal général :

Soit à trouver $\vec{u} = (u_1, \dots, u_p)$ minimisant le critère :

$$J = \int_0^T g(\vec{x}, \vec{u}) dt, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_p) \quad (1-4-6)$$

où la fonction g et le paramètre T sont connus, sachant que \vec{x} et \vec{u} doivent satisfaire le système :

$$\begin{cases} x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p), & n \geq p \\ x'(0) = a_i, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1-4-7)$$

dans lequel f_i et a_i , $i = 1, \dots, n$ sont connus. Il n'est pas possible d'adapter directement des méthodes d'optimisation (locales ou globales) sur un tel problème de contrôle optimal pour la simple raison que la fonctionnelle f dépend implicitement du vecteur de contrôle \vec{u} . En effet le vecteur \vec{x} est solution du système (1-4-7) dans lequel les u_i , $i = 1, \dots, p$ interviennent dans les fonctions f_i . Le vecteur \vec{x} dépend implicitement de u_i , $i = 1, \dots, p$ (cf Lions [17], Pinch [18]). Il existe un moyen de surmonter cette difficulté est de transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation classique. Nous allons appliquer la méthode décompositionnelle pour résoudre préalablement le système (1-5-2). On pose pour cela :

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^q c_k^i \theta_k(t), \quad i = 1, \dots, p \quad (1-4-8)$$

où les θ_k sont connues et constituent une base dans l'espace des fonctions contenant les u_i . La formule (1-4-8) correspond à une forme d'approximation des fonctions $u_i(t)$. Déterminer les u_i , qui minimisent la fonctionnelle J de (1-4-6) sous les contraintes (1-4-7) équivaut donc à trouver les paramètres c_k^i , $i = 1, \dots, p$ et $k = 1, \dots, q$. Ainsi, la propriété fondamentale de la méthode décompositionnelle, appliquée au système différentiel (1-4-7), va nous permettre de trouver la solution sous la forme de série tronquée :

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^N v_j^i(c_k^s(t), t), \quad i = 1, \dots, n$$

dans lesquels les v_j^i obtenus à partir des polynômes d'Adomian, vont dépendre explicite-

ment des paramètres (c_k^s) . En reportant ces expressions dans la fonctionnelle J on obtient une fonctionnelle autonome :

$$J = \int_0^T g(v_j^1(c_k^s, t), \dots, v_j^n(c_k^s, t), \sum c_k^1 \theta_k, \dots, \sum c_k^p \theta_k) dt.$$

Nous évitons ainsi, la mise en oeuvre des méthodes lourdes et sophistiquées comme celle de Richard Bellman (cf Bellman [25]) ou celle au principe du maximum de Pontryagin (cf Pontryagin [26]). Après ce point, nous donnons une liste des polynômes d'Adomian que nous utiliserons dans les chapitres suivants pour faire les tests numériques relatifs aux problèmes que nous allons résoudre à l'aide de la méthode décompositionnelle d'Adomian.

1.5 Calcul pratique des polynômes d'Adomian

Dans la définition (1-2-5), l'expression :

$$A_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} N \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n u_n \right) \right] /_{\lambda=0}$$

des polynômes d'Adomian n'est pas du tout pratique pour le calcul. En plus, il n'est pas très naturel d'introduire un paramètre artificiel. Pour retrouver les expressions des polynômes d'Adomian plus facilement on va poser :

$$v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n$$

et

$$F = N \circ v$$

On constate alors que les A_k sont tout simplement donnés par les formules de Mac Laurin :

$$A_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}$$

D'où :

Propriété 1-5-1:

La série entière d'Adomian $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \lambda^n$ est le développement en série de Taylor de la fonction

$$F = N \circ v$$

(cf Gabet [23])

Remarque 1-5-1:

Cette série de Taylor ne permet pas de conclure quant à la convergence de la méthode puisque F n'est définie que si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

converge.

Pour le calcul des A_k en fonction des u_i , $0 \leq i \leq k$, on peut appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= F(0) = N(v(0)) = N(u_0) \\ \mathbf{A}_1 &= \frac{F^{h(1)}(0)}{1!} = N^{(1)}(v(0))v'(0) = N^{(1)}(u_0)u_1 \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{F^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2} [N^{(2)}(v(0))v'(0)^2 + N^{(1)}(v(0))v''(0)] \\ &= u_2 N^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2} N^{(2)}(u_0)u_1^2 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

On donne ici une liste de ces polynômes que nous avons calculé à l'aide de cette formule:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= u_3 N^{(1)}(u_0) + (u_1 u_2) N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{6} N^{(3)}(u_0) \cdot u_1^3 \\ \mathbf{A}_4 &= u_4 N^{(1)}(u_0) + (u_1 u_3 + \frac{1}{2} u_2^2) N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 N^{(3)}(u_0) + \frac{1}{24} N^{(4)}(u_0) u_1^4 \\ \mathbf{A}_5 &= u_5 N^{(1)}(u_0) + (u_1 u_4 + u_2 u_3) N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2} (u_1^2 u_3 + u_1 u_2^2) N^{(3)}(u_0) + \\ &\quad \frac{1}{2} u_1^3 u_2 N^{(4)}(u_0) + \frac{1}{120} N^{(5)}(u_0) u_1^5 \\ \mathbf{A}_6 &= u_6 N^{(1)}(u_0) + (u_1 u_5 + u_2 u_4 + \frac{1}{2} u_3^2) N^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_4 + u_1 u_2 u_3 + \frac{1}{6} u_2^3 \right) N^{(3)}(u_0) + \\ &\quad \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_3 + \frac{1}{4} u_1^2 u_2^2 \right) N^{(4)}(u_0) + \frac{1}{24} u_1^4 u_2 N^{(5)}(u_0) + \frac{1}{120} u_1^6 N^{(6)}(u_0). \\ \mathbf{A}_7 &= u_7 N^{(1)}(u_0) + (u_1 u_6 + u_2 u_5 + u_3 u_4) N^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_5 + u_1 u_2 u_4 + \frac{1}{2} u_1 u_3^2 \right) N^{(3)}(u_0) + \\ &\quad \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_4 + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 u_3 + \frac{1}{6} u_1 u_2^3 \right) N^{(4)}(u_0) + \left(\frac{1}{24} u_1^4 u_3 + \frac{1}{24} u_1^3 u_2^2 \right) N^{(5)}(u_0) + \\ &\quad \left(\frac{1}{120} u_1^5 u_2 \right) N^{(6)}(u_0) + \frac{1}{504} u_1^7 N^{(7)}(u_0). \\ \mathbf{A}_8 &= u_8 N^{(1)}(u_0) + \left(u_1 u_7 + u_2 u_6 + u_3 u_5 + \frac{1}{2} u_4^2 \right) N^{(2)}(u_0) + \\ &\quad \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_6 + u_1 u_2 u_5 + u_1 u_3 u_4 + \frac{1}{2} u_2 u_3^2 + \frac{1}{2} u_2^2 u_4 \right) N^{(3)}(u_0) + \\ &\quad \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_5 + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 u_4 + \frac{1}{4} u_1^2 u_3^2 + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_3 + \frac{1}{24} u_2^4 \right) f^{(4)}(u_0) + \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{24}u_1^4 u_4 + \frac{1}{6}u_1^3 u_2 u_3 + \frac{1}{12}u_1^2 u_2^3\right) N^{(5)}(u_0) + \left(\frac{1}{120}u_1^5 u_3 + \frac{1}{48}u_1^4 u_2^2\right) N^{(6)}(u_0) \\ + \frac{1}{720}u_1^6 u_2 N^{(7)}(u_0) + \frac{1}{40320}u_1^8 N^{(8)}(u_0)$$

$$\mathbf{A}_9 = u_9 N^{(1)}(u_0) + (u_1 u_8 + u_2 u_7 + u_3 u_6 + u_4 u_5) N^{(2)}(u_0) + \\ \left(\frac{1}{2}u_1^2 u_7 + u_1 u_2 u_6 + u_1 u_3 u_5 + \frac{1}{2}u_1 u_4^2 + \frac{1}{2}u_2^2 u_5 + u_2 u_3 u_5 + \frac{1}{6}u_3^3\right) N^{(3)}(u_0) + \\ \left(\frac{1}{6}u_1^3 u_6 + \frac{1}{2}u_1^2 u_2 u_5 + \frac{1}{2}u_1^2 u_3 u_4 + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 u_4 + \frac{1}{2}u_1 u_2 u_3^2 + \frac{1}{6}u_2^3 u_3\right) N^{(4)}(u_0) + \\ \left(\frac{1}{24}u_1^4 u_5 + \frac{1}{6}u_1^3 u_2 u_4 + \frac{1}{12}u_1^3 u_3^2 + \frac{1}{4}u_1^2 u_2^2 u_3 + \frac{1}{24}u_1 u_2^4\right) N^{(5)}(u_0) + \\ \left(\frac{1}{120}u_1^5 u_4 + \frac{1}{24}u_1^4 u_2 u_3 + \frac{1}{36}u_1^3 u_2^3\right) N^{(6)}(u_0) + \left(\frac{1}{720}u_1^6 u_3 + \frac{1}{240}u_1^5 u_2^2\right) N^{(7)}(u_0) \\ + \frac{1}{5040}u_1^7 u_2 N^{(8)}(u_0) + \frac{1}{362880}u_1^9 N^{(9)}(u_0).$$

1.6 Polynômes d'Adomian en dimension p

On considère le système différentiel :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } U \text{ dans } H \text{ tel que } & : \\ U - N(U) & = F \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} U & = (u_1, \dots, u_p)^t \\ N & = (N_1, \dots, N_p)^t \\ F & = (f_1, \dots, f_p)^t \end{aligned}$$

On cherche la solution $U = (u_1, \dots, u_p)^t$ sous forme de séries

$$u_i = \sum_{n \geq 0} u_{i,n}, \quad i = 1, \dots, p.$$

On décompose l'opérateur

$$N_i(U_0, \dots, U_n) = \sum_{n \geq 0} A_{i,n}, \quad i = 1, \dots, p.$$

où

$$U_i = (u_{1,i}, \dots, u_{p,i}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Remarque 1-6-1 :

les polynômes d'Adomian $(A_{i,n})_{n \geq 0}$, associés à l'opérateur $N_i(U_0, \dots, U_n)$, dépendent de

$$u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,n}, u_{2,0}, u_{2,1}, \dots, u_{2,n}, u_{p,0}, u_{p,1}, \dots, u_{p,n}.$$

On détermine

$$u_{i,k}, \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, p$$

par l'identification

$$\begin{aligned} u_{i,0} & = f_i \\ u_{i,1} & = A_{i,0} \\ & \dots \\ u_{i,n+1} & = A_{i,n} \\ & \dots \end{aligned}$$

Définition 1-6-1:

Soit N un opérateur à p variables. Les polynômes d'Adomian, notés $(A_n^p)_{n \geq 0}$, associés à N sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} A_0^p(U_0) & = N(U_0) \\ A_n^p(U_0, \dots, U_n) & = \frac{1}{n} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_{1i}, \dots, \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{pi} \right) \right] /_{\lambda=0} \end{aligned}$$

où :

$$U_l = (u_{1,l}, \dots, u_{p,l}), \quad l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Théorème 1.6.1 :

Les polynômes d'Adomian sont déterminés par les formules :

$$A_{i,0} = N_i(U_0)$$

$$A_{i,n} = \sum_{K_{11}+\dots+nK_{11}+K_{21}+\dots+K_{p1}+\dots+nK_{pn}} \frac{U_1^{K_1} U_n^{K_n} \partial^{K_{11}+K_{12}+\dots+K_{pn}}}{K_1! K_n! \partial U_1^{K_1} \dots \partial U_n^{K_n}} N_i(U_0)$$

avec,

$$U_1^{K_1} = u_{11}^{K_{11}} \cdot u_{12}^{K_{12}} \dots u_{1n}^{K_{1n}}$$

$$K_1! = K_{11}! K_{12}! \dots K_{1n}!$$

Preuve : (cf [1], [10], [11]).

Pour le cas des polynômes d'Adomian en dimension deux, considérons l'exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, v) \text{ dans } H \text{ tel que :} \\ u - N_1(u, v) = f \\ v - N_2(u, v) = g \end{array} \right.$$

Théorème 1-6-2 :

On donne les polynômes d'Adomian associés à $N_1(u, v)$, ceux associés à l'opérateur N_2 , sont donnés par une formule analogue :

Les polynômes d'Adomian, notés $(A_{1,n}^2)$ associés à $N_1(u, v)$ sont donnés par la formule:

$$A_{1,0}^2 = N_1(u_0, v_0),$$

$$A_{1,n}^2 = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\lambda^j} A_{1,n-j}^v \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i, v_0, \dots, v_{n-j} \right) \right] / \lambda = 0$$

avec, $U_k = (u_k, v_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

et où $A_{n-j}^v \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i, v_0, \dots, v_{n-j} \right)$ désignent les polynômes associés à l'opérateur :

$$L(v) = N_1 \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u, v \right)$$

où $\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u \right)$ est fixé.

Démonstration :

(cf B.Konfé [29])

De ce résultat, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1-6-1 :

Les polynômes d'Adomian $(A_{1,n}^2)_{n \geq 0}$ associés à $N_1(u, v)$ sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned} A_{1,0}^2 &= N_1(u_0, v_0) \\ A_{1,n}^2(U_0, \dots, U_n) &= \sum_{j=0}^n B_j(u_0, \dots, u_J, v_0, \dots, v_{n-j}) \end{aligned}$$

où

$$U_k = (u_k, v_k), k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

et

$$B_j(u_0, \dots, u_J, v_0, \dots, v_{n-j})$$

sont les polynômes associés à :

$$K(u) = A_{n-j}^v(u, v_0, \dots, v_{n-j})$$

(v_0, \dots, v_{n-j} étant fixés).

Démonstration :

(cf B.Konfé [29])

puis le résultat suivant :

Corollaire 1-6-2 :

Les polynômes d'Adomian $(A_{1,n}^2)_{n \geq 0}$ associés à $N_1(u, v)$ sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned} A_{1,0}^2 &= N_1(u_0, v_0) \\ A_{1,1}^2 &= A_1^u(u_0, u_1) + A_1^v(v_0, v_1) \\ &\dots \\ A_{1,n}^2 &= A_n^u(u_0, \dots, u_n) + A_n^v(v_0, \dots, v_n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} B_j(u_0, \dots, u_J, v_0, \dots, v_j), \end{aligned}$$

pour $n \geq 2$.

où $A_n^u(u_0, \dots, u_n)$ (respect. $A_n^v(v_0, \dots, v_n)$) sont les polynômes associés à $N_1(u, v_0)$, v_0 fixé (respect. $N(u_0, v)$, u_0 fixé).

Démonstration :

(cf B.Konfé [29]).

Pour les polynômes d'Adomian en dimension p nous avons le résultat suivant:

Théorème 1-6-3 :

Les polynômes d'Adomian $(A_n^p)_{n \geq 0}$ associés à l'opérateur $N(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de dimension p sont donnés par :

$$A_{1,0}^p = N(U_0),$$

$$A_n^p = \sum_{l_1=0}^n \sum_{l_2=0}^{n-l_1} \sum_{l=0}^{n-l_1-l_2} \cdots \sum_{l_{p-1}=0}^{n-l_1-\cdots-l_{p-2}} B_{l_1, \dots, l_{p-1}}(u_{1,0}, \dots, u_{1,l_1}, u_{2,0}, \dots, u_{2,l_2}, \dots, u_{p,0}, \dots, u_{p,n-L-l_{p-1}})$$

où

$$L = \sum_{i=1}^{p-2} l_i,$$

$$U_0 = (u_{1,0}, \dots, u_{p,0})$$

et

$$B_{l_1, \dots, l_{p-1}}(u_{1,0}, \dots, u_{1,l_1}, u_{2,0}, \dots, u_{2,l_2}, \dots, u_{p,0}, \dots, u_{p,n-L})$$

sont les polynômes d'Adomian associés aux termes :

$$K(u) = A_{n-L}^{p-1}(u, u_{2,0}, \dots, u_{2,l_2}, \dots, u_{p,0}, \dots, u_{p,n-L})$$

Démonstration :

(cf B.Konfé [29]).

APPLICATION DE LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN POUR LA RESOLUTION D'UNE CLASSE DE PROBLEMES AUX LIMITES

2.1 Introduction:

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la résolution numérique d'une classe de problèmes aux limites en utilisant la méthode décompositionnelle d'Adomian. Nous considérons le problème aux limites (P1) défini par l'équation différentielle :

$$(P1) \quad \begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) = f(u(x), x), x \in]a, b[, (a, b) \in \mathbb{R}^2 & (E) \\ u(a) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} & (1) \\ u(b) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} & (2) \end{cases} \quad (2-1-1)$$

Nous supposons que les fonctions p et f sont suffisamment régulières pour que le problème (P1) admette une unique solution (cf Breziz [21]).

Dans la première étape de ce travail, nous écrivons le problème (P1) sous une forme équivalente à l'aide d'une forme canonique, comme dans (Benabidallah [9]), mais cette forme ne permet pas de donner une approximation globale de la solution du problème (P1), ce qui nous amène dans la deuxième étape, à élaborer un nouveau processus, (cf Benabidallah [26]) en modifiant la forme canonique par l'introduction d'un nouvel opérateur et pouvoir ainsi appliquer la méthode décompositionnelle sur tout l'intervalle $[a, b]$ et de cette manière nous proposons alors une solution globale du problème (P1).

A la fin de ce chapitre, quelques tests numériques sont réalisés sur des problèmes aux limites linéaires et non linéaires. Dans ces exemples, nous comparons la solution proposée par notre technique à la solution exacte. A l'aide du logiciel de calcul Maple nous superposons ces deux solutions et nous évaluons l'erreur commise.

2.2 Application de la méthode décompositionnelle au problème (P1)

2.2.1 Construction d'une forme canonique adéquate

Proposition 2.2.1 :

Le problème :

trouver $u \in C^2]a.b[$ telle que :

$$(P1) \quad \begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) = f(u(x), x) & (E) \\ u(a) = \alpha & (1) \\ u(b) = \beta & (2) \end{cases} \quad (2-2-1)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $p \in C^1]a.b[$.

est équivalent au problème (P2) défini par l'équation intégrale :

Trouver $u \in C^2]a.b[$ telle que :

$$(P2) \quad \begin{cases} u - M(u) = g \\ \text{où} \quad M(u(x)) = \int_a^x \left[\int_b^s (f(u(t), t) dt \right] ds + \int_a^x \left[\int_b^s p'(t)u(t)dt \right] ds - \int_a^x p(t)u(t)dt \\ \text{et} \quad g(x) = \alpha + (x - a) [u'(b) + \beta p(b)] \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Démonstration :

Pour construire une forme canonique qui nous permet d'écrire le problème (P1) sous une forme équivalente et de manière à pouvoir appliquer la méthode décompositionnelle, on procède de la manière suivante :

On intègre une première fois par rapport à x , l'équation différentielle (E) du problème (P1), on obtient alors :

$$\int_x^b u''(t)dt + \int_x^b p(t)u'(t)dt = \int_x^b f(u(t), t)dt$$

$$u'(b) - u'(x) + p(b)u(b) - p(x)u(x) - \int_x^b p'(t)u(t)dt = \int_x^b f(u(t), t)dt \quad (2-2-2)$$

Une deuxième intégration de l'équation (2-2-2) donne :

$$\begin{aligned}
& -\int_a^x u'(t)dt + (x-a)u'(b) + (x-a)p(b)u(b) - \int_a^x p(t)u(t)dt \\
& -\int_a^x \left[\int_s^b p'(t)u(t)dt \right] ds = \int_a^x \left[\int_s^b f(t, u(t))dt \right] ds \quad (2-2-3)
\end{aligned}$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\begin{aligned}
& -u(x) + u(a) + (x-a)[u'(b) + \beta p(b)] - \int_a^x p(t)u(t)dt \\
& -\int_a^x \left[\int_s^b p'(t)u(t)dt \right] ds = \int_a^x \left[\int_s^b f(t, u(t))dt \right] ds
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
& -u(x) + u(a) + (x-a)[u'(b) + \beta p(b)] - \\
& \left(\int_a^x \left[\int_s^b f(t, u(t))dt \right] ds + \int_a^x \int_s^b p'(t)u(t)dt ds + \int_a^x p(t)u(t)dt \right) \\
& = 0
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
& u(x) - \left(-\int_a^x \int_b^s f(t, u(t))dt ds + \int_a^x \int_b^s p'(t)u(t)dt ds - \int_a^x p(t)u(t)dt \right) \quad (2-2-4) \\
& = \alpha + (x-a)[u'(b) + \beta p(b)].
\end{aligned}$$

En posant

$$M(u(x)) = -\int_a^x \int_b^s (f(t, u(t)) dt ds - \int_a^x \int_b^s p'(t)u(t)dt ds - \int_a^x p(t)u(t)dt$$

et

$$g(x) = \alpha + (x-a)[u'(b) + \beta p(b)]$$

on achève la preuve de la proposition.

Pour déterminer la solution tronquée notée :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

on calcule u_n à l'aide du processus itératif défini par :

$$\begin{cases} u_0(x) = g(x) \\ u_{n+1}(x) = M(u_n(x)), \quad n \geq 1, \quad x \in]a.b[\end{cases}$$

Remarque 2-2-1 :

Avec ce choix, l'opérateur M est bien défini mais la somme S_n ne peut être calculée que si $u_0(x) = g(x)$ est déterminée, ce qui n'est pas le cas car g contient le terme inconnu $u'(b)$.

2.2.2 Convergence du processus

Concernant la convergence du processus

$$\begin{cases} u_0(x) = g(x) \\ u_{n+1}(x) = M(u_n(x)), \quad n \geq 1, \quad x \in]a.b[\end{cases} \quad (2-2-5)$$

nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.2 :

S'il existe $L > 0$ telle que :

$$\|f(u, x) - f(v, x)\| \leq L \|u - v\|, \quad \forall x \in [a.b]$$

alors il existe $C > 0$ définie par :

$$\begin{cases} C = \frac{(b-a)^2}{2} (L + \|p'\| + \|p\|) & \text{si } b - a \geq 2 \\ C = (b-a) (L + \|p'\| + \|p\|) & \text{si } b - a \leq 2 \end{cases}$$

telle que:

$$\|M(u) - M(v)\| \leq C \|u - v\|, \quad \forall x \in [a.b]$$

où $\|\cdot\| = \sup_{t \in [a,b]} |\cdot(t)|$

et si de plus $C < 1$, alors l'opérateur M est contractant et le processus défini dans (2-2-5) est convergent vers la solution u du problème (P1).

Démonstration:

En effet,

$$\begin{aligned}
M(u(x)) - M(v(x)) &= \int_a^x \left[\int_b^s (f(u(t), t) - f(v(t), t)) dt \right] ds - \\
&\quad \int_a^x \left[\int_b^s p'(t)(u(t) - v(t)) dt \right] ds + \int_a^x p(t)(u(t) - v(t)) dt \\
\|M(u(x)) - M(v(x))\| &\leq \int_a^x \int_b^s \|f(t, u) - f(t, v)\| dt ds + \\
&\quad \int_a^x \left[\int_b^s \|p'\| \|u - v\| dt \right] ds + \int_a^x \|p\| \|u - v\| dt \\
&\leq \left[(L + \|p'\|) \int_a^x \int_b^s dt ds + \|p\| \int_a^x dt \right] \|u - v\| \\
&\leq \left[\frac{(b-a)^2}{2} (L + \|p'\|) + (b-a) \|p\| \right] \|u - v\|
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\frac{(b-a)^2}{2} &\leq b-a \quad \text{si } b-a \leq 2 \\
\text{et } \frac{(b-a)^2}{2} &\geq b-a \quad \text{si } b-a \geq 2
\end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\|M(u(x)) - M(v(x))\| \leq \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(b-a)^2}{2} (L + \|p'\| + \|p\|) \|u - v\| \\ \text{si } b-a \geq 2 \end{array} \right. & (cqfd) \\ \left\{ \begin{array}{l} (b-a) (L + \|p'\| + \|p\|) \|u - v\| \\ \text{si } b-a \leq 2 \end{array} \right. \end{cases} \\
\forall x \in [a, b]$$

Par ailleurs, pour que la condition $C < 1$ soit vérifiée, il suffit de choisir a et b tels que

:

$$\begin{cases} b-a \leq \sqrt{\frac{2}{L + \|p'\| + \|p\|}} & \text{si } b-a \geq 2 \\ b-a \leq \frac{1}{L + \|p'\| + \|p\|} & \text{si } b-a \leq 2 \end{cases}$$

Remarque 2-2-1:

Dans l'écriture (2-2-4), bien que équivalente au problème (P1), $u'(b)$ est inconnue et la forme canonique utilisée ne prend pas en compte la deuxième condition aux limites, $u(b) = \beta$ et par conséquent on ne pas appliquer la décomposition d'Adomian pour calculer la solution numérique S_n car son premier terme, en l'occurrence $u_0(x)$, n'a pas encore été choisi.

La nouvelle idée utilisée pour contourner cette difficulté est d'écrire $u'(b)$ sous la forme d'une série numérique:

$$u'(b) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k, \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2-2-6)$$

Proposition 2.2.3:

le problème (P2) est alors équivalent à la nouvelle équation intégrale :

$$(P3) \quad \begin{cases} u - N(u) = h \\ \text{où } N(u) = M(u) + (x - a) \sum_{k \geq 1} C_k \\ \text{et } h(x) = \alpha + (x - a) [C_0 + \beta p(b)] \end{cases} \quad (2-2-7)$$

Démonstration:

En injectant (2-2-6) dans (2-2-3), on obtient :

$$u(x) - M(u(x)) = \alpha + (x - a) [C_0 + \beta p(b)] + (x - a) \sum_{k \geq 1} C_k$$

puis

$$u(x) - M(u(x)) - (x - a) \sum_{k \geq 1} C_k = \alpha + (x - a) [C_0 + \beta p(b)] \quad (2-2-8)$$

d'où le résultat.

La méthode décompositionnelle consiste alors à décomposer, respectivement, u et $f(u, x)$ sous la forme de séries :

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n \quad (2-2-9)$$

et

$$f(u(x), x) = \sum_{n \geq 0} A_n(u_0(x), \dots, u_n(x)) \quad (2-2-10)$$

où A_k sont les polynômes d'Adomian associés à f .

La substitution des expressions (2-2-9) et (2-2-10) dans (2-2-8) donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} u_n + \int_a^x \left[\int_b^s \left(\sum_{n \geq 0} A_n \right) dt \right] ds - \int_a^x \left[\int_b^s \left(p'(t) \sum_{n \geq 0} u_n(t) \right) dt \right] ds \\ & + \int_a^x \left(p(t) \sum_{n \geq 0} u_n(t) \right) dt - (x-a) \sum_{k \geq 1} C_k = \alpha + (x-a) [C_0 + \beta p(b)] \end{aligned}$$

En procédant ensuite par identification, nous obtenons les relations :

$$u_0(x) = \alpha + (x-a) [C_0 + \beta p(b)]$$

$$\begin{aligned} u_1(x) = C_1(x-a) + \int_a^x \left[\int_b^s A_0 dt \right] ds - \int_a^x \left[\int_b^s p'(t) u_0(t) dt \right] ds \\ + \int_a^x (p(t) u_0(t)) dt \end{aligned}$$

et pour $n > 1$, on a:

$$\begin{aligned} u_n(x) = C_n(x-a) + \int_a^x \left[\int_b^s A_{n-1} dt \right] ds - \int_a^x \left[\int_b^s p'(t) u_{n-1}(t) dt \right] ds \\ + \int_a^x (p(t) u_{n-1}(t)) dt \end{aligned} \quad (2-2-11)$$

A partir de maintenant, nous posons :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k(x)$$

la série tronquée à $(n+1)$ termes, solution du problème (P1).

Proposition 2-2-4 :

La somme S_n vérifie la condition aux limites (1) du problème (P1).

Démonstration:

En effet, il suffit de remarquer que :

$$\begin{cases} u_0(a) = \alpha \Rightarrow S_0(a) = \alpha \\ \text{et } u_i(a) = 0, \forall i \geq 1 \Rightarrow S_n(a) = \alpha \end{cases}$$

On détermine ensuite les constantes C_k , de la formule (2-2-6), encore inconnues à cette étape du calcul, en imposant à la solution tronquée S_n de vérifier la condition aux limites (2) du problème (P1), à savoir :

$$S_n(b) = \beta$$

cette condition est vérifiée si:

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} u_0(b) = \beta \\ u_k(b) = 0, \forall k \geq 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2-2-12)$$

Proposition 2-2-5 :

Si le problème (P1) admet une solution unique u , alors le système algébrique (2-2-12) admet une solution unique $(C_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \beta.p(b) \text{ et pour } 1 \leq k \leq n, \text{ on a :} \\ C_k = \frac{-1}{b - a} \left(\int_a^b \left[\int_b^s A_{k-1} dt \right] ds - \int_a^b \left[\int_b^s p'(t) u_{k-1}(t) dt \right] ds + \int_a^b p(t) u_{k-1}(t) dt \right), \end{cases}$$

Démonstration :

Pour l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations (2-2-12), il est aisé de voir que:

$$\det(\Gamma) = (b - a)^{n+1} \neq 0.$$

Les constantes C_k , $0 \leq k \leq n$, sont obtenues par la résolution des équations du système (Γ).

En effet :

$$\begin{aligned} u_0(b) = \beta &\Leftrightarrow \alpha + (b - a) [C_0 + \beta p(b)] = \beta \\ &\Leftrightarrow C_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \beta.p(b). \end{aligned}$$

et

$$u_k(b) = 0, \forall k, 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_k(b-a) + \int_a^b \left[\int_b^s A_{k-1} dt \right] ds - \int_a^b \left[\int_b^s p'(t) u_{k-1}(t) dt \right] ds \\ \quad + \int_a^b p(t) u_{k-1}(t) dt = 0 \Leftrightarrow \\ C_k = \frac{-1}{b-a} \left(\int_a^b \left[\int_b^s A_{k-1} dt \right] ds - \int_a^b \left[\int_b^s p'(t) u_{k-1}(t) dt \right] ds \right. \\ \quad \left. + \int_a^b p(t) u_{k-1}(t) dt \right), \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right.$$

Proposition 2-2-6 :

Si les séries décompositionnelles (2-2-9) et (2-2-10) sont convergentes alors la série décompositionnelle introduite dans (2-2-6)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k$$

et construite dans la proposition (2-2-5), est convergente et a pour somme $u'(b)$

Démonstration:

En effet, en écrivant $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k$ sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k$$

il vient:

$$\begin{aligned} C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k &= \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \beta \cdot p(b) \\ &- \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{b - a} \left(\int_a^b \left[\int_b^s A_{k-1} dt \right] ds - \int_a^b \left[\int_b^s p'(t) u_{k-1}(t) dt \right] ds + \int_a^b p(t) u_{k-1}(t) dt \right) \right) \\ &= \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \beta \cdot p(b) - \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b \left[\int_b^s \sum_{k=1}^{+\infty} A_{k-1} dt \right] ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \left[\int_b^s p'(t) \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k-1}(t) dt \right] ds \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b p(t) \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k-1}(t) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \beta \cdot p(b) - \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b \left[\int_b^s f(t, u) dt \right] ds - \int_a^b \left[\int_b^s p'(t)u(t) \right] ds + \int_a^b p(t)u(t) dt \right) \\
&= \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b \left(\int_b^s [f(t, u) + p(t)u'(t)] dt \right) ds \\
&= \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b \left(\int_b^s u''(t) dt \right) ds \\
&= \frac{\beta - \alpha}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b (u'(s) - u'(b)) ds \\
&= \frac{\beta - \alpha}{b - a} + (b - a) \frac{u'(b)}{b - a} - \frac{1}{b - a} (u(b) - u(a)) \\
&= \frac{\beta - \alpha}{b - a} + u'(b) - \frac{\beta - \alpha}{b - a} = u'(b).
\end{aligned}$$

(cqfd)

2.3 Tests numériques

Dans ce chapitre nous allons réaliser des tests numériques sur trois exemples: L'exemple (E1) est celui d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. L'exemple (E2) est celui d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène et à coefficients variables. Et enfin, en dernier, l'exemple (E3) est celui d'une équation différentielle d'ordre 2 non linéaire. Les calculs effectués sur ces 3 exemples montrent à chaque fois que l'erreur

$$|S_n - u|$$

est très petite au bout de 4 ou 5 itérations.

2.3.1 Exemple (E1):

a/ Résolution numérique

Résoudre, en utilisant la méthode décrite dans le chapitre précédent, le problème aux limites défini par :

$$(E1) \quad \begin{cases} u'' + 2u' + u = 0, & x \in]0, 1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

La double intégration de (E1) donne :

$$u(x) - \left(\int_0^x \left[\int_1^s f(u(t)) dt \right] ds - 2 \int_0^x u(t) dt \right) - x \sum_{k \geq 1} C_k = 2x + C_0 x$$

où $f(u) = -u$ et $u'(1) = \sum_{k \geq 0} C_k$

d'où l'en déduit par identification les égalités :

$$\begin{cases} u_0(x) = (2 + C_0)x \\ u_1(x) = C_1 x - \int_0^x \left[\int_1^s u_0(t) dt \right] ds - 2 \int_0^x u_0(t) dt \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(x) = C_n x - \int_0^x \left[\int_1^s u_{n-1}(t) dt \right] ds - 2 \int_0^x u_{n-1}(t) dt \\ \dots \end{cases}$$

En posant :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

la série tronquée à $(n + 1)$ éléments, nous avons alors :

$$S_0(1) = u_0(1) = 1 \Rightarrow C_0 = 1$$

et donc

$$S_0(x) = x$$

On détermine ensuite les autres constantes C_n , $n \geq 1$ telles que:

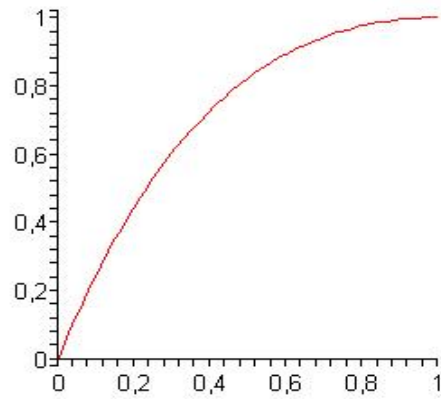
$$u_n(1) = 0.$$

$$\begin{aligned} u_n(1) &= C_n - \int_0^1 \left[\int_1^s u_{n-1}(x) dt \right] ds - 2 \int_0^1 u_{n-1}(t) dt = 0 \\ \Rightarrow C_n &= \int_0^1 \left[\int_1^s u_{n-1}(x) dt \right] ds + 2 \int_0^1 u_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

b/ Graphes de l'exemple (E1):

(1)

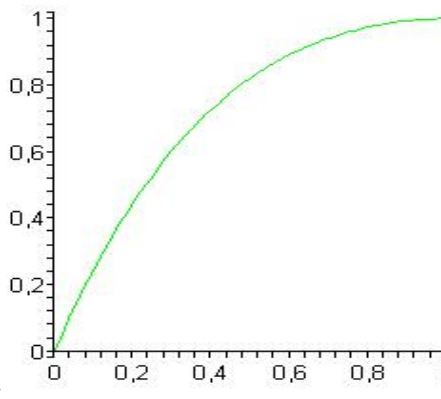
figure (1)



2.pdf
représente la solution exacte u

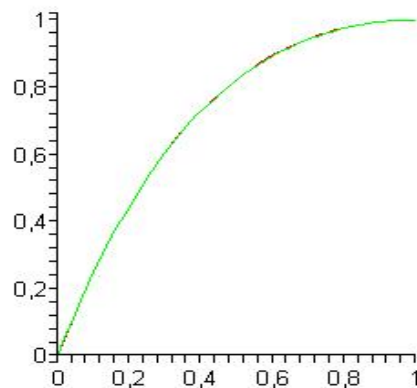
(2)

figure (2)



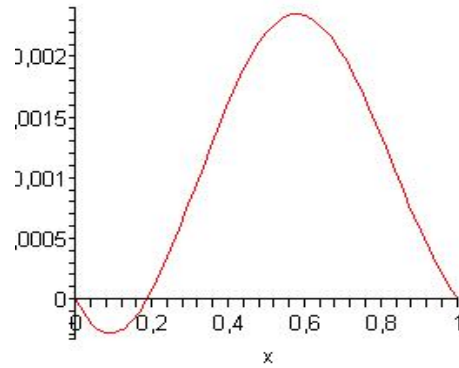
3.pdf
représente la solution tronquée S_4

figure (3)



représente la superposition de u et S_4

figure (4)



représente l'erreur $|u - S_4| < 0.002$

c/ Commentaires:

Les calculs ont été effectués sur PC en utilisant le logiciel Maple 11.0. Les courbes obtenues sont montrées dans les figures (1),(2),(3) et (4) Après 5 itérations l'erreur est:

$$|S_4 - u| < 0,0024.$$

2.3.2 Exemple (E2)

a/ Résolution numérique

Résoudre, en utilisant la méthode décrite dans le chapitre précédent, le problème aux limites défini par :

$$(E2) \quad \begin{cases} x^2 u''(x) - xu(x) + u(x) = 0, & x \in]1, 2[\\ u(1) = 1 \\ u(2) = 1 \end{cases}$$

La double intégration de l'équation (E2) par rapport à x donne :

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \left(-4 \int_1^x \left[\int_2^s u(t) dt \right] ds \right) + 5 \int_1^x \left[\int_2^s tu(t) dt \right] ds + \frac{4(x-1)}{x^2} u'(2) - \frac{6x-7}{x^2}$$

où

$$f(u) = -u \quad \text{et} \quad u'(2) = \sum_{k \geq 0} C_k$$

La méthode d'Adomian donne alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{4(x-1)}{x^2}C_0 - \frac{6x-7}{x^2} \\ u_1(x) = \frac{1}{x^2} \left(-4 \int_1^x \left[\int_2^s u_0(t) dt \right] ds + 5 \int_1^x \left[\int_2^s t u_0(t) dt \right] ds \right) + \frac{4(x-1)}{x^2}C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(x) = \frac{1}{x^2} \left(-4 \int_1^x \left[\int_2^s u_{n-1}(t) dt \right] ds + 5 \int_1^x \left[\int_2^s t u_{n-1}(t) dt \right] ds \right) + \frac{4(x-1)}{x^2}C_n \\ \dots \end{array} \right.$$

En posant toujours

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

la série tronquée à $(n+1)$ éléments, nous obtenons alors :

$$S_0(2) = u_0(2) = 1 \Rightarrow C_0 = \frac{9}{4}$$

et on prend alors :

$$S_0(x) = \frac{3x-2}{x^2},$$

puis on détermine les autres constantes C_n , $n \geq 1$ telles que:

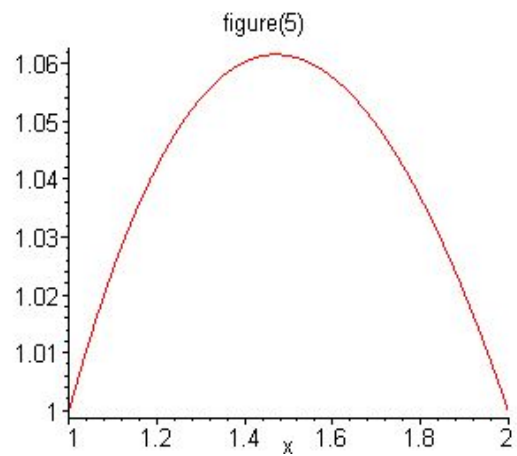
$$u_n(2) = 0.$$

ce qui donne pour $n \geq 1$,

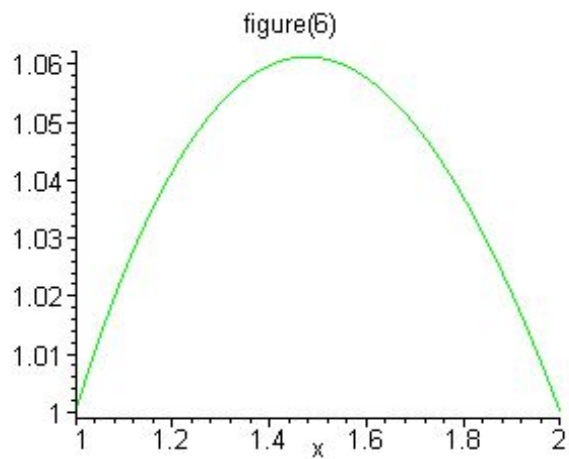
$$C_n = \frac{-1}{4(x-1)} \left(-4 \int_1^2 \left[\int_2^s u_{n-1}(t) dt \right] ds + 5 \int_1^2 \left[\int_2^s t u_{n-1}(t) dt \right] ds \right)$$

Les courbes obtenues sont montrées dans les figures (5),(6),(7) et (8)

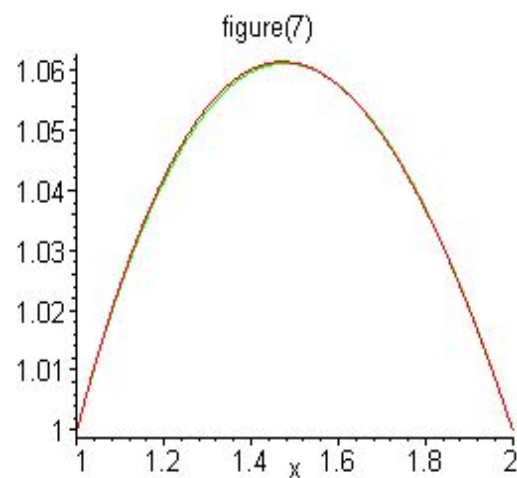
b/ Graphes relatifs à l'exemple (E2).



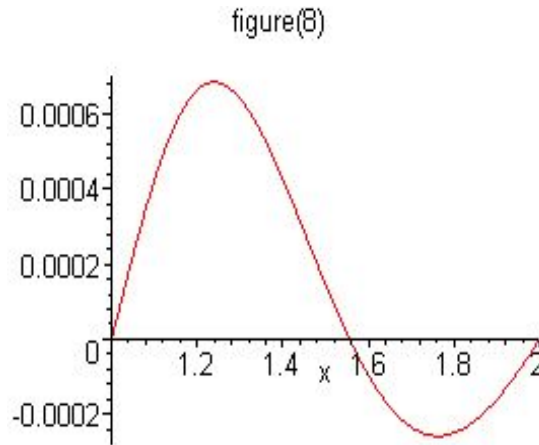
représente la solution exacte u



représente la solution tronquée S_6



représente la superposition de u et S_6



représente l'erreur $|u - S_6| < 0.0006$

c/ Commentaires:

Nous constatons dans la figure (8) que l'erreur est inférieure à 610^{-4} après 7 itérations.

2.3.3 Exemple (E3)

a/ Résolution numérique.

Nous allons résoudre dans ce dernier exemple, un problème aux limites non linéaire : trouver $u \in C^2(]1, 2[)$ telle que :

$$\begin{cases} u''(x) - 2u(x)^3 = 0, x \in]1, 2[\\ u(1) = 1 \\ u(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La solution de cet exemple est :

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

La forme canonique obtenue, après une double intégration de l'équation différentielle de (E3), nous permet d'écrire ce problème sous la forme équivalente suivante:

Trouver $u \in C^2(]1, 2[)$ telle que :

$$u(x) - 2 \int_1^x \left[\int_2^s u^3(t) dt \right] ds + (x - 1) \sum_{k \geq 1} C_k = 1 + (x - 1)C_0$$

où

$$f(u, x) = u^3$$

et

$$u'(2) = \sum_{k \geq 0} C_k$$

par identification on a :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + C_0(x - 1) \\ u_0(2) &= \frac{1}{2} \Rightarrow C_0 = \frac{-1}{2} \\ &\Rightarrow u_0(x) = \frac{3-x}{2} \\ &\Rightarrow S_0(x) = \frac{3-x}{2} \end{aligned}$$

Les $C_k, 1 \leq k$, étant déterminées de telle sorte que la solution

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

vérifie la deuxième condition aux limites :

$$u(2) = \frac{1}{2}$$

Dans cet exemple nous allons calculer explicitement les polynômes d'Adomian $A_i, 0 \leq i \leq 3$, associés à l'opérateur

$$f(x, u) = u^3$$

puis nous donnerons les fonctions $u_i, 0 \leq i \leq 3$ correspondantes. Pour terminer, nous calculerons les séries tronquées solutions $S_i, 0 \leq i \leq 3$.

$$A_0 = f(x, u_0) = u_0^3 \Rightarrow u_1(x) = C_1(x - 1) + 2 \int_1^x \left[\int_2^s u_0^3(t) dt \right] ds$$

$$u_1(2) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{31}{80} \Rightarrow u_1(x) = \frac{31}{80}x - \frac{63}{80} + \frac{1}{80}(3-x)^5$$

$$S_1(x) = u_0(x) + u_1(x) \Rightarrow$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{80}x^5 + \frac{3}{16}x^4 - \frac{9}{8}x^3 + \frac{27}{8}x^2 - \frac{207}{40}x + \frac{15}{4}$$

$$A_1 = u_1 f^{(1)}(x, u_0) = 3u_1 u_0^2 \Rightarrow u_2(x) = C_2(x - 1) + 2 \int_1^x \left[\int_2^s 3u_1(t) u_0^2(t) dt \right] ds$$

$$u_2(2) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1049}{9600} \Rightarrow$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{3840}x^9 + \frac{9}{1280}x^8 - \frac{27}{320}x^7 + \frac{189}{320}x^6 - \frac{2103}{800}x^5 \\ + \frac{2427}{320}x^4 - \frac{2223}{160}x^3 + \frac{243}{16}x^2 - \frac{83\,849}{9600}x + \frac{631}{320}$$

et S_2 est alors donnée par son expression polynômiale :

$$S_2(x) = -\frac{1}{3840}x^9 + \frac{9}{1280}x^8 - \frac{27}{320}x^7 + \frac{189}{320}x^6 - \frac{2103}{800}x^5 \\ + \frac{2427}{320}x^4 - \frac{2223}{160}x^3 + \frac{243}{16}x^2 - \frac{83\,849}{9600}x + \frac{631}{320}$$

De même on a :

$$A_2 = u_2 f^{(1)}(x, u_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(u_0) u_1^2 \\ = u_2(3u_0^2) + \frac{1}{2}(6u_0)u_1^2 \\ u_3(x) = C_3(x-1) + 2 \int_1^x \left[\int_2^s u_2(3u_0^2) + \frac{1}{2}(6u_0)u_1^2 dt \right] ds \\ u_3(2) = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{262933}{4992000} \\ u_3(x) = -\frac{21923089}{1664000}x + \frac{27121}{12800} - \frac{11}{1996800}x^{13} + \frac{11}{51200}x^{12} \\ + \frac{1089}{25600}x^{10} - \frac{99}{25600}x^{11} - \frac{21141}{3200}x^7 + \frac{120501}{6400}x^6 - \frac{4979537}{128000}x^5 \\ + \frac{364319}{6400}x^4 - \frac{725727}{12800}x^3 + \frac{46197}{1280}x^2 - \frac{977}{3072}x^9 + \frac{10863}{6400}x^8$$

$$u_3(x) = -\frac{11}{1996800}x^{13} + \frac{11}{51200}x^{12} - \frac{99}{25600}x^{11} + \frac{1089}{25600}x^{10} - \frac{977}{3072}x^9 \\ + \frac{10863}{6400}x^8 - \frac{21141}{3200}x^7 + \frac{120501}{6400}x^6 - \frac{4979537}{128000}x^5 + \\ \frac{364319}{6400}x^4 - \frac{725727}{12800}x^3 + \frac{46197}{1280}x^2 - \frac{21923089}{1664000}x + \frac{27121}{12800}$$

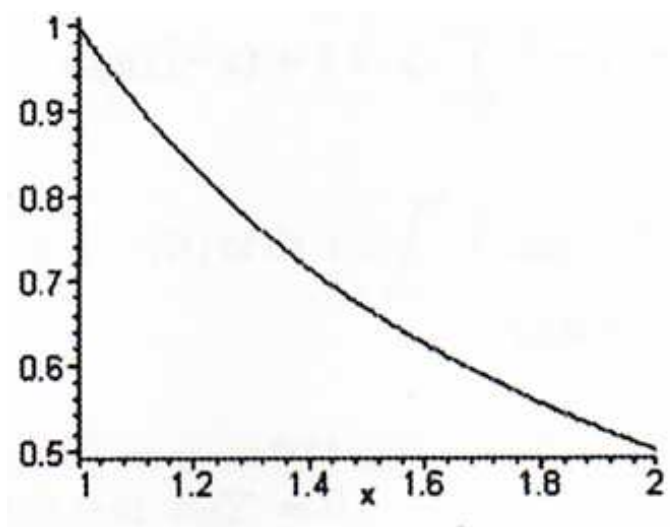
et on a donc

$$S_3(x) = -\frac{11}{1996800}x^{13} + \frac{11}{51200}x^{12} - \frac{99}{25600}x^{11} + \frac{1089}{25600}x^{10} - \frac{4889}{15360}x^9 \\ + \frac{2727}{1600}x^8 - \frac{21411}{3200}x^7 + \frac{124281}{6400}x^6 - \frac{5316017}{128000}x^5 + \frac{412859}{6400}x^4 \\ - \frac{903567}{12800}x^3 + \frac{65637}{1280}x^2 - \frac{109370747}{4992000}x + \frac{52361}{12800}$$

et dont le graphe apparaît dans la figure (10).

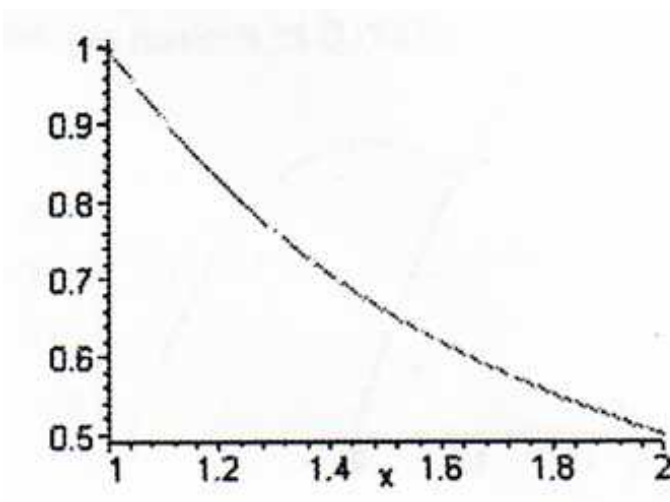
b/ Graphes relatifs à l'exemple (E3)

figure(9)



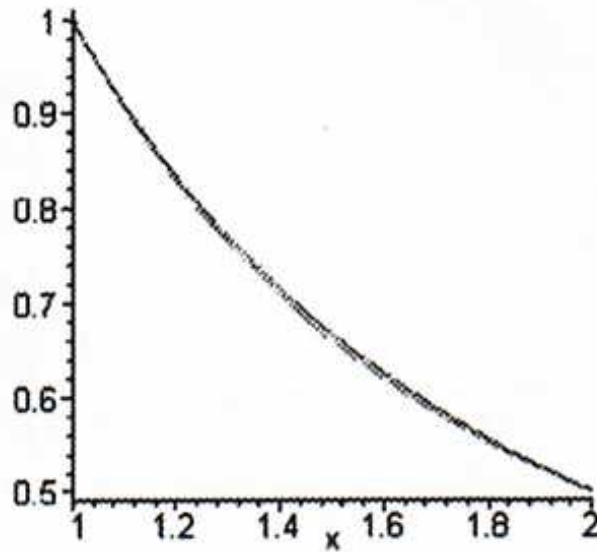
représente la solution exacte u

figure(10)



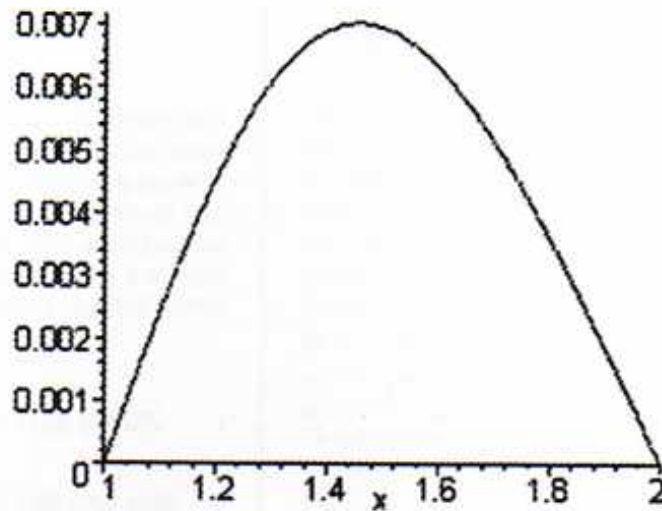
représente la solution tronquée S_3

figure(11)



représente la superposition de u et S_3

figure(12)



représente l'erreur $|u - S_3|$.

c/ Commentaires:

Dans cet exemple l'erreur est assez petite rapidement puisqu' elle est inférieure à $7 \cdot 10^{-3}$ après 5 itérations.

APPLICATION DE LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE POUR LA RESOLUTION D'UNE CLASSE DE SYSTEMES DIFFERENTIELS AVEC CONDITIONS AUX LIMITES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la généralisation de la méthode développée dans le chapitre précédent sur une classe d'équations différentielles, à une classe de systèmes différentiels avec conditions aux limites (cf Benabidallah [27]). On s'intéresse plus précisément à la résolution numérique des problèmes du type suivant:

Trouver $u \in (C^2(]a, b[))^n$, $]a, b[\subset \mathbb{R}$ telle que :

$$(Q1) \quad \begin{cases} u''(x) + A(x)u'(x) = f(u(x), x), & x \in]a, b[\quad (E) \\ u(a) = \alpha & (1) \\ u(b) = \beta & (2) \end{cases} \quad (3-1-1)$$

où

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}(x) & & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad \text{notée } (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

et

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^2(]a, b[), \forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ u &= (u_1, u_2, \dots, u_n)^t, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t \\ \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t \\ \alpha_i &\in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Nous supposons que les fonctions a_{ij} et f sont suffisamment régulières pour que le problème (Q1) admette une unique solution. Dans la première étape de ce travail, nous écrirons le problème (Q1) sous une forme équivalente à l'aide d'une forme canonique, comme dans (Cf Benabidallah [9]), mais comme dans le chapitre précédent, cette forme ne permet pas de donner une approximation de la solution du problème (Q1). Ceci nous amène dans la deuxième étape, à élaborer un nouveau processus, en modifiant la forme canonique par l'introduction d'un nouvel opérateur et pouvoir ainsi appliquer la méthode décompositionnelle.

A la fin de ce chapitre, quelques tests numériques sont réalisés sur des problèmes aux limites linéaires et non linéaires.

3.2 Application de la méthode décompositionnelle au problème (Q1)

Nous aurons besoin dans la suite de ce chapitre des notations suivantes :

On rappelle que :

$$E = C^1([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } F = (C^1([a, b], \mathbb{R}))^n$$

munis respectivement des normes

$$\|u_i\|_E = \sup_{t \in [a, b]} |u_i(t)| \text{ et } \|u\|_F = \sum_{j=1}^{j=n} \|u_j\|_E$$

3.2.1 Construction d'une forme canonique adéquate

Le problème (Q1), défini par :

Trouver $u \in (C^2]a, b[)^n$, $]a, b[\subset \mathbb{R}$ telle que :

$$(Q1) \quad \begin{cases} u''(x) + A(x)u'(x) = f(u(x), x) ; & x \in]a, b[& (E) \\ u(a) = \alpha & (1) \\ u(b) = \beta & (2) \end{cases} \quad (3-2-1)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et $a_{i,j} \in C^2]a, b[)^n$

est équivalent au problème (Q_m) défini par :

Trouver, pour tout m , $1 \leq m \leq n$, $u_m \in C^2]a, b[$, $]a, b[\subset \mathbb{R}$ telle que :

$$(Q_m) \quad \begin{cases} u''_m(x) + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(x)u'_j(x) = f_m(x, u_1, \dots, u_n) ; & x \in]a, b[& (E) \\ u_m(a) = \alpha_m & (1) \\ u_m(b) = \beta_m & (2) \end{cases} ; 1 \leq m \leq n \quad (3-2-2)$$

Proposition 3-2-1:

Le problème (Q_m) est équivalent à l'équation intégrale :

Trouver $u_m \in C^2([a, b])$, pour tout m , $1 \leq m \leq n$, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m - M_m(u) = g_m \\ \text{où } M_m(u(x)) = \int_a^x \int_b^t (f_m(u(s), s) ds dt + \\ \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x \int_b^t a'_{mj}(s) u_j(s) ds dt - \int_a^x a_{mj}(s) u_j(s) ds \right) \\ g_m(x) = \alpha_m + (x - a) \left[u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{mj}(b) \right] \\ \text{et } u_j(b) = \beta_j, \quad 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (3-2-3)$$

Démonstration:

En effet, une première intégration par rapport à x de l'équation différentielle (E) du problème (3-2-2) donne pour tout m , $1 \leq m \leq n$

$$\int_b^x u''_m(t) dt + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_b^x a_{mj}(t) u'_j(t) dt \right) = \int_b^x f_m(u(t), t) dt$$

$$u'_m(x) - u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_b^x a_{mj}(t) u'_j(t) dt \right) = \int_b^x f_m(u(t), t) dt$$

à l'aide d'une intégration par parties, nous obtenons:

$$u'_m(x) - u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} \left(a_{mj}(x) u_j(x) - a_{mj}(b) u_j(b) - \int_b^x a'_{mj}(t) u_j(t) dt \right)$$

$$= \int_b^x f_m(u(t), t) dt$$

$u_j(b) = \beta_j, 1 \leq j \leq n$, donne :

$$u'_m(x) - u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} \left(a_{mj}(x) u_j(x) - a_{mj}(b) \beta_j - \int_b^x a'_{mj}(t) u_j(t) dt \right) \quad (3-2-4)$$

$$= \int_b^x f_m(u(t), t) dt.$$

Une seconde intégration de l'équation (3-2-4) donne :

$$\begin{aligned}
& \int_a^x u'_m(t) dt - (x-a)u'_m(b) \\
& + \sum_{j=1}^{j=n} \int_a^x \left(a_{mj}(s)u_j(s) - a_{mj}(b)\beta_j - \int_b^s a'_{mj}(t)u_j(t) dt \right) ds \\
= & \int_a^x \int_b^s f_m(t, u(t)) dt ds
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
& u_m(x) - u_m(a) - (x-a) \left[u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b)\beta_j \right] \\
& + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{mj}(s)u_j(s) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{mj}(t)u_j(t) dt ds \right) \\
= & \int_a^x \int_b^s f_m(u(t), t) dt ds
\end{aligned}$$

en remplaçant $u_m(a)$ par sa valeur α_m , on a finalement le résultat escompté :

$$\begin{aligned}
& u_m(x) - \alpha_m - (x-a) \left[u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b)\beta_j \right] \\
& + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{mj}(s)u_j(s) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{mj}(t)u_j(t) dt ds \right) \\
= & \int_a^x \int_b^s f_m(u(t), t) dt ds
\end{aligned}$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned}
& u_m(x) - \int_a^x \int_b^s f_m(u(t), t) dt ds + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{mj}(s)u_j(s) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{mj}(t)u_j(t) dt ds \right) \\
= & \alpha_m + (x-a) \left[u'_m(b) + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b)\beta_j \right]
\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$u_m - M_n(u) = g_m \quad (3-2-6)$$

Ce qui achève la démonstration.

Pour construire la solution tronquée

$$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{k=n} u_{m,k}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

on calcule les $u_{m,k}$ à l'aide du processus itératif :

$$\begin{cases} u_{m,0}(x) = g_m(x) \\ u_{m,n+1}(x) = M(u_{m,n}(x)), \quad n \geq 1, \quad x \in]a,b[\end{cases}$$

Remarque 3-2-1 :

Avec ce choix, l'opérateur M_n est bien défini mais la somme $S_{m,n}$ ne peut être calculée que si $u_{m,0}(x) = g_m(x)$ est déterminée, ce qui n'est pas le cas car g_m contient le terme inconnu $u'_m(b)$.

3.2.2 Convergence du processus

Proposition 3.2.2 :

S'il existe une constante L_m , $L_m > 0$ telle que :

$$\|f_m(x, u) - f_m(x, v)\|_F \leq L_m \|u - v\|_F, \quad \forall m, \quad 1 \leq m \leq n, \quad \forall x \in [a, b]$$

alors il existe une constante C_m , $C_m > 0$, définie par :

$$\begin{cases} C_m = \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \left(L_m + \text{Max}_{1 \leq j \leq n} \|a'_{mj}\|_E + \text{Max}_{1 \leq j \leq n} \|a_{mj}\|_E \right) \|u - v\|_F \\ \text{si } b - a \leq 2 \end{cases} \\ C_m = \begin{cases} (b-a) \left(L_m + \text{Max}_{1 \leq j \leq n} \|a'_{mj}\|_E + \text{Max}_{1 \leq j \leq n} \|a_{mj}\|_E \right) \|u - v\|_F \\ \text{si } b - a \geq 2 \end{cases} \end{cases}$$

et telle que :

$$\|M_m(u) - M_m(v)\|_F \leq C_m \|u - v\|_F, \quad \forall x \in [a, b]$$

L'opérateur M_m est contractant si :

$$\left\{ \begin{array}{l} b - a \leq \sqrt{\frac{2}{L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E}} \quad \text{si } b - a \leq 2 \\ b - a \leq \frac{1}{L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E} \quad \text{si } b - a \geq 2 \end{array} \right.$$

Démonstration:

En effet,

$$\begin{aligned} M_m(u(x)) - M_m(v(x)) &= \int_a^x \int_b^t (f_m(u, s) - f_m(v, s)) ds dt + \\ &\quad \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x \int_b^t a'_{mj} (u_j - v_j) ds dt - \int_a^x a_{mj} (u_j - v_j) ds \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|M_m(u(x)) - M_m(v(x))\|_F &\leq \int_a^x \int_b^s \|f_m(t, u) - f_m(t, v)\|_F dt ds + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x \int_b^t \|a'_{mj}\|_E \|u_j - v_j\|_E ds dt + \int_a^x \|a_{mj}\|_E \|u_j - v_j\|_E ds \right) \\ &\leq L_m \left(\int_a^x \int_b^s dt ds \right) \|u - v\|_E + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\|a'_{mj}\|_E \int_a^x \int_b^t ds dt + \|a_{mj}\|_E \int_a^x ds \right) \|u_j - v_j\|_E \\ &\leq \left(\frac{(b-a)^2}{2} \left(L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E \right) + (b-a) \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E \right) \|u - v\|_F \\ &\leq \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{(b-a)^2}{2} \left(L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E \right) \|u - v\|_F \quad ; \\ \quad \quad \quad \text{si } b - a \leq 2 \\ \left\{ (b-a) \left(L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E \right) \|u - v\|_F \quad ; \\ \quad \quad \quad \text{si } b - a \geq 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

L'opérateur M_m est contractant si $C_m < 1$.

Cette condition est vérifiée si on choisit a et b tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b - a \leq \sqrt{\frac{2}{L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E}} \quad \text{si } b - a \leq 2 \\ b - a \leq \frac{1}{L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E} \quad \text{si } b - a \leq 2 \end{array} \right.$$

Remarque 3-2-1 :

Bien évidemment, ce résultat est particulièrement intéressant si :

$$L_m + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a'_{mj}\|_E + \underset{1 \leq j \leq n}{\text{Max}} \|a_{mj}\|_E \text{ est assez petit.}$$

Remarque 3-2-2 :

Dans l'écriture (3-2-5), bien que équivalente au problème (Q1), $u'_m(b)$, $1 \leq m \leq n$, est inconnue et la forme canonique utilisée ne prend pas en compte la deuxième condition aux limites, $u_m(b) = \beta_m$, $1 \leq m \leq n$ et par conséquent on ne pas, comme dans le chapitre précédent, appliquer la décomposition d'Adomian pour calculer la solution numérique. Pour pallier cette contrainte, nous écrirons $u'_m(b)$, comme dans le chapitre précédent, sous la forme d'une série numérique :

$$u'_m(b) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{m,k}, \quad C_{m,k} \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n. \quad (3-2-7)$$

Nous obtenons alors, une nouvelle écriture de (Q_m) :

Proposition 3.2.3 :

Le problème (Q_m) devient alors équivalent à la nouvelle équation intégrale :

trouver $u_m \in C^2]a, b[$ vérifiant pour tout m , $1 \leq m \leq n$,

$$(Q3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_m - N_m(u) = F_m, \quad x \in]a, b[\\ \text{où } N_m(u(x)) = M_m(u(x)) + (x - a) \sum_{k \geq 1} C_{m,k} \\ \text{et } F_m(x) = \alpha_m + (x - a) \left[C_{m,0} + \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) \right] \end{array} \right. \quad (3-2-8)$$

Démonstration:

En injectant la nouvelle écriture de $u'_m(b)$ de (3-2-6) dans (3-2-5) on obtient :

$$\begin{aligned} & u_m(x) - \int_a^x \int_b^s f_m(u(t), t) dt ds + \quad (3-2-9) \\ & \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{mj}(s) u_j(s) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds \right) \quad (1) \\ & = \alpha_m + (x - a) \left[\sum_{k \geq 0} C_{m,k} + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b) \beta_j \right] \end{aligned}$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned}
& u_m(x) - \int_a^x \int_b^s f_m(t, u(t)) dt ds + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{mj}(s) u_j(s) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds \right) \\
& = \alpha_m + (x - a) C_{m,0} + (x - a) \left[\sum_{k \geq 1} C_{m,k} + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b) \beta_j \right]
\end{aligned} \tag{3-2-10}$$

et qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
& u_m(x) - \int_a^x \int_b^s f_m(t, u(t)) dt ds \\
& + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{mj}(s) u_j(s) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds \right) + (x - a) \sum_{k \geq 1} C_{m,k} \\
& = \alpha_m + (x - a) \left[C_{m,0} + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b) \beta_j \right]
\end{aligned} \tag{3-2-11}$$

$$\tag{2}$$

La méthode décompositionnelle consiste ensuite, à décomposer respectivement, u_m et $f_m(u, x)$ sous forme de séries :

$$u_m = \sum_{k \geq 0} u_{m,k} \quad ; \quad 1 \leq m \leq n \tag{3-2-12}$$

et

$$f_m(u, x) = \sum_{k \geq 0} A_{m,k} \quad ; \quad 1 \leq m \leq n \tag{3-2-13}$$

où $A_{m,k}$ sont les polynômes d'Adomian associés à f_m ,

Remarque 3-2-3:

$$A_{m,k} = A_{m,k}(u_{1,0}, \dots, u_{1,k}, u_{2,0}, \dots, u_{2,k}, \dots, u_{n,0}, \dots, u_{n,k})$$

Ceux sont des polynômes d'Adomian à n -dimension (cf B.Konfe [29])

La substitution des expressions (3-2-12) et (3-2-13) dans (3-2-11), donne pour tout m , $1 \leq m \leq n$:

$$\sum_{k \geq 0} u_{m,k}(x) - \int_a^x \int_b^s \left(\sum_{k \geq 0} A_{m,k} \right) dt ds + \quad (3-2-14)$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x a_{m,j}(s) \left(\sum_{k \geq 0} u_{j,k}(s) \right) ds - \int_a^x \int_b^s a'_{m,j}(t) \left(\sum_{k \geq 0} u_{j,k}(t) \right) dt ds \right) \quad (3)$$

$$+ (x-a) \sum_{k \geq 1} C_{m,k} \quad (4)$$

$$= \alpha_m + (x-a) \left[C_{m,0} + \sum_{j=1}^{j=n} a_{m,j}(b) \beta_j \right]$$

En procédant ensuite par identification, nous obtenons les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{m,0}(x) = \alpha_m + (x-a) \left[C_{m,0} + \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) \right] \\ u_{m,1}(x) = C_{m,1}(x-a) + \int_a^x \int_b^s A_{m,0} dt ds + \\ \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x \int_b^s a'_{m,j}(t) u_{j,0}(t) dt ds - \int_a^x a_{m,j}(s) u_{j,0}(s) ds \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{m,k}(x) = C_{m,k}(x-a) + \int_a^x \int_b^s A_{m,k-1} dt ds + \\ \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^x \int_b^s a'_{m,j}(t) u_{j,k-1}(t) dt ds - \int_a^x a_{m,j}(s) u_{j,k-1}(s) ds \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \quad (3-2-15)$$

A présent, nous posons :

$$S_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} u_{m,k}(x) \quad (3-2-16)$$

la série tronquée à $(n+1)$ termes associée à u_m , solution du problème (Q_m) .

Proposition 3-2-4 :

La somme $S_{m,n}$ vérifie la condition aux limites (1) du problème $(Q1)$.

Démonstration :

En effet, il suffit de remarquer que par construction de u_m , nous avons pour tout m , $1 \leq m \leq n$,

$$\begin{cases} u_{m,0}(a) = \alpha_m \Rightarrow S_{m,0}(a) = \alpha_m \\ \text{et } u_{m,k}(a) = 0, \forall k \geq 1 \Rightarrow S_{m,n}(a) = 0 \end{cases}$$

On détermine ensuite, les autres constantes $C_{m,k}$, pour tout m , $1 \leq m \leq n$, et $k \geq 1$, de la formule (3-2-6), encore indéterminées à cette étape du calcul, en imposant à la solution tronquée $S_{m,n}$ de vérifier la condition aux limites (2) du problème (Q1) à savoir :

$$S_{m,n}(b) = \beta, \quad 1 \leq m \leq n$$

Cette condition est vérifiée si :

$$(II) \quad \begin{cases} u_{m,0}(b) = \beta_m; & 1 \leq m \leq n \\ u_{m,k}(b) = 0, \forall k \geq 1, \text{ et } 1 \leq m \leq n \end{cases} \quad (3-2-17)$$

Proposition 3-2-5:

Si le problème (Q1) admet une solution unique, alors le système algébrique (II) dans (3-2-17) admet une solution unique $(C_{m,k})_{0 \leq k}$ définie par :

$$\begin{cases} C_{m,0} = \frac{\beta_m - \alpha_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j \cdot a_{m,j}(b) \text{ et pour } k \geq 1, \text{ et } 1 \leq m \leq n \text{ on a} \\ C_{m,k} = \frac{-1}{b - a} \int_a^b \int_b^s A_{m,k-1} dt ds \\ - \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^b \int_b^s a'_{m,j}(t) u_{j,0}(t) dt ds - \int_a^b a_{m,j}(s) u_{j,0}(s) ds \right) \quad 1 \leq k \end{cases} \quad (3-2-18)$$

Démonstration:

Pour l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations (2-2-11), on remarque encore que :

$$\det(II) = (b - a)^{n+1} \neq 0.$$

Les constantes $C_{m,k}$, $0 \leq k$, sont obtenues par la résolution des équations du système (II). En effet :

$$u_{m,0}(b) = \beta_m \Leftrightarrow \alpha_m + (b - a) \left[C_{m,0} + \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) \right] = \beta_m$$

$$\Leftrightarrow C_0 = \frac{\beta_m - \alpha_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b)$$

et

$$u_{m,k}(b) = 0, \forall k \geq 1, 1 \leq m \leq n \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & C_{m,k}(b - a) + \int_a^b \int_b^s A_{m,k-1} dt ds \\ & + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^b \int_b^s a'_{mj}(t) u_{j,k-1}(t) dt ds - \int_a^b a_{mj}(s) u_{j,k-1}(s) ds \right) \\ = & 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{m,k} = & \frac{-1}{b - a} \int_a^b \int_b^s A_{m,k-1} dt ds \\ & - \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^b \int_b^s a'_{mj}(t) u_{j,k-1}(t) dt ds - \int_a^b a_{mj}(s) u_{j,k-1}(s) ds \right) \end{aligned}$$

Proposition 3-2-6 :

Si les séries décompositionnelles (3-2-12) et (3-2-13) sont convergentes alors pour tout m , $1 \leq m \leq n$, la série décompositionnelle

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_{m,k}$$

construite dans (3-2-18) est convergente et a pour somme $u'_m(b)$.

Démonstration:

En effet, il suffit d'écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} C_{m,k}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} C_{m,k} = C_{m,0} + \sum_{k=1}^{+\infty} C_{m,k} \\ = & \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_b^s \left(\sum_{k \geq 1} A_{m,k-1} \right) dt ds \\ & - \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^b \int_b^s a'_{mj}(t) \left(\sum_{k \geq 1} u_{j,k-1}(t) \right) dt ds - \int_a^b a_{mj}(s) \left(\sum_{k \geq 1} u_{j,k-1}(s) \right) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_b^s f_m(u, t) dt ds \\
&\quad - \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_a^b \int_b^s a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds - \int_a^b a_{mj}(s) u_j(s) ds \right) \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_b^s f_m(t, u) dt ds \\
&\quad - \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\begin{array}{c} -(b - a) a_{mj}(b) u_j(b) + \int_a^b a_{m,j}(t) u_j(t) dt \\ - \int_b^s a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds - \int_a^b a_{mj}(s) u_j(s) ds \end{array} \right) \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_b^s f_m(t, u) dt ds \\
&\quad - \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^{j=n} \left(-(b - a) a_{mj}(b) u_j(b) - \int_b^s a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds \right) \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j a_{m,j}(b) - \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_b^s f_m(t, u) dt ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}(b) \beta_j + \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_b^s \sum_{j=1}^{j=n} a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b \int_b^s f_m(t, u) dt ds - \int_a^b \int_b^s \sum_{j=1}^{j=n} a'_{mj}(t) u_j(t) dt ds \right) \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b \int_b^s u''_m(t) dt ds \right) \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b (u'_m(s) - u'_m(b)) ds \right) \\
&= \frac{\alpha_m - \beta_m}{b - a} - \frac{u_m(b) - u_m(a)}{b - a} + u'_m(b) = u'_m(b)
\end{aligned}$$

(cqfd).

3.2.3 Exemple (E 4)

a/ Résolution numérique

Résoudre, en utilisant la méthode décrite dans le chapitre précédent, le problème aux limites défini par :

$$(E3) \quad \begin{cases} u''_1(x) = -(\sin x)u'_1(x) + (\cos x)u'_2(x) - u_1(x) - 1, & x \in]0, \frac{\pi}{2}[& (1) \\ u''_2(x) = -(\cos x)u'_1(x) + (\sin x)u'_2(x) - u_2(x) & & (2) \\ u_1(0) = 1, & u_1(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ u_2(0) = 0, & u_2(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \quad (3-2-19)$$

et dont la solution exacte est donnée par :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cos x \\ u_2(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Une double intégration de l'équation différentielle (1) de (3-2-19) donne :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_0^x (-\sin t.u_1(t) + \cos t.u_2(t))dt & (3-2-20) \\ &+ \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\cos s.u_1(s) + \sin s.u_2(s) - u_1(s)) dsdt \\ &+ x \sum_{k \geq 1} a_k + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x + 1 + a_0 \right) & (5) \end{aligned}$$

$$\text{où } u'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k \geq 0} a_k$$

En posant

$$u_1 = \sum_{n \geq 0} u_{1,n}$$

et en utilisant l'identification décrite précédemment on obtient :

$$u_{1,0}(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x + 1 + a_0x.$$

On détermine alors a_0 tel que :

$$u_{1,0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a_0 = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\right)$$

et finalement $u_{1,0}$ est donnée par :

$$u_{1,0}(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\right)x + 1$$

De la même façon, nous intégrons l'équation différentielle (2) de (3-2-19) et nous obtenons :

$$u_2(x) = \int_0^x (\cos t \cdot u_1(t) - \sin t \cdot u_2(t)) dt \quad (3-2-21)$$

$$+ \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_1(s) - \cos s \cdot u_2(s) - u_2(s)) ds dt$$

$$+ x \sum_{k \geq 1} b_k + (b_0 - 1)x$$

$$\text{où } u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k \geq 0} b_k. \quad (3-2-22)$$

En posant

$$u_2 = \sum_{n \geq 0} u_{2,n} \quad (3-2-23)$$

puis en injectant (3-2-22) et (3-2-23) dans (3-2-21) et en identifiant, on a :

$$u_{2,0}(x) = (b_0 - 1)x$$

b_0 étant déterminée par la condition :

$$u_{2,0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{-2}{\pi}$$

et finalement $u_{2,0}$ est donnée par :

$$u_{2,0}(x) = \frac{2}{\pi}x$$

A présent, on est en mesure de déterminer $u_{1,1}$ et $u_{2,1}$ de manière recursive.

En effet, grâce, toujours à l'identification d'Adomian, on peut écrire :

$$u_{1,1}(x) = \int_0^x (-\sin t.u_{1,0}(t) + \cos t.u_{2,0}(t))dt$$

$$+ \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\cos s.u_{1,0}(s) + \sin s.u_{2,0}(s) - u_{1,0}(s)) dsdt + xa_1$$

avec la condition

$$u_{1,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

et

$$u_{2,1}(x) = \int_0^x (\cos t.u_{1,0}(t) - \sin t.u_{2,0}(t))dt +$$

$$\int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s.u_{1,0}(s) - \cos s.u_{2,0}(s) - u_{2,0}(s)) dsdt + xb_1$$

avec la condition

$$u_{2,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

à l'étape p , nous obtenons :

$$u_{1,p}(x) = \int_0^x (-\sin t.u_{1,p-1}(t) + \cos t.u_{2,p-1}(t))dt +$$

$$\int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\cos s.u_{1,p-1}(s) + \sin s.u_{2,p-1}(s) - u_{1,p-1}(s)) dsdt + xa_1$$

avec la condition

$$u_{1,p}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

et

$$u_{2,p}(x) = \int_0^x (\cos t.u_{1,p-1}(t) - \sin t.u_{2,p-1}(t))dt +$$

$$\int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s.u_{1,p-1}(s) - \cos s.u_{2,p-1}(s) - u_{2,p-1}(s)) dsdt + xb_1$$

avec la condition

$$u_{2,p}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

On pose alors :

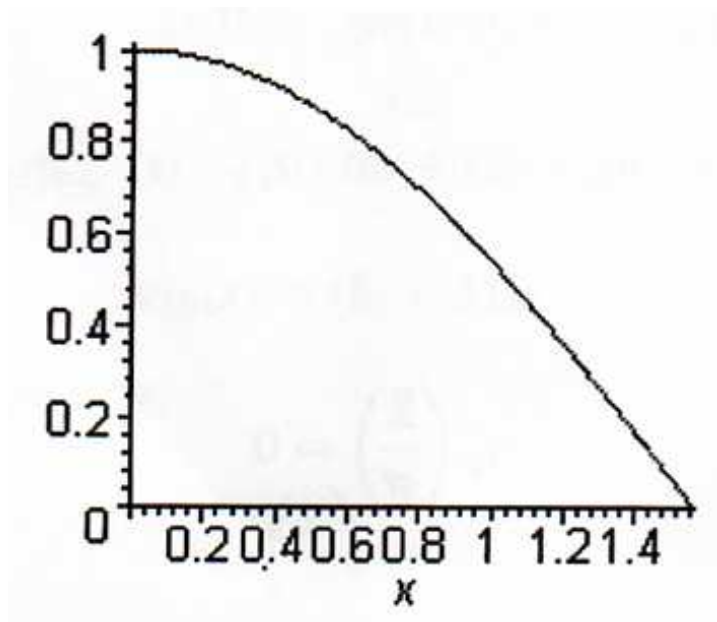
$$S_{1,n} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{1,k} \quad \text{et} \quad S_{2,n} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{2,k}$$

les séries tronquées solutions relatives respectivement à u_1 et u_2 .

Les calculs, pour déterminer la solution $(S_{1,3}, S_{2,3})$ ont été effectués sur PC à l'aide du logiciel Maple 11.0. On retrouve les graphes concernant cet exemple dans les figures (13) à (20).

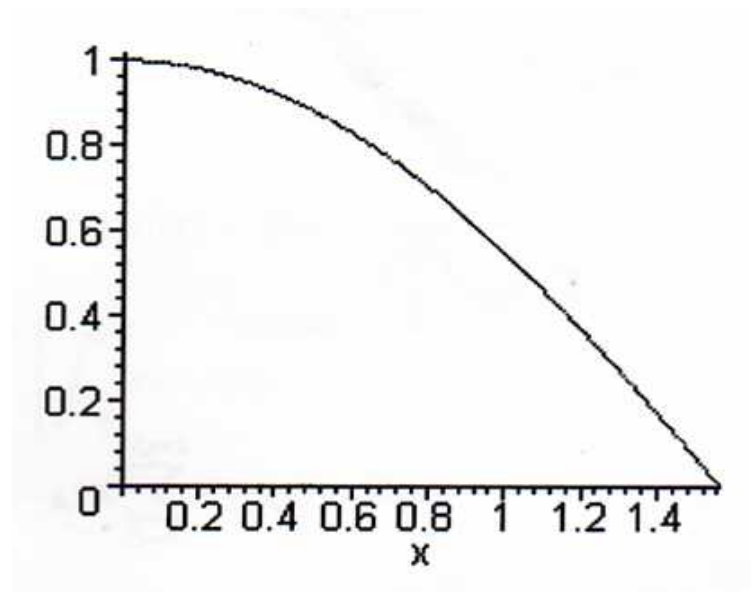
b/ Graphes

figure(13)



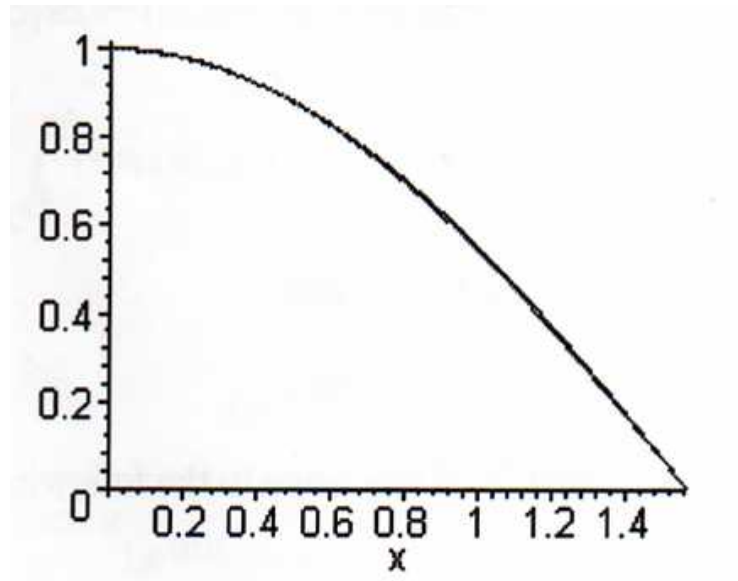
représente la solution $u(x) = \cos x$

figure(14)



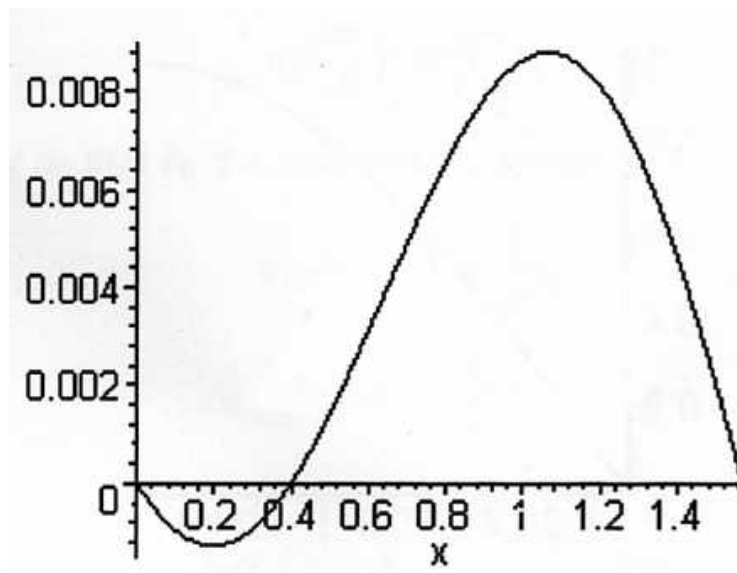
représente la solution tronquée $S_{1,3}$

figure(15)



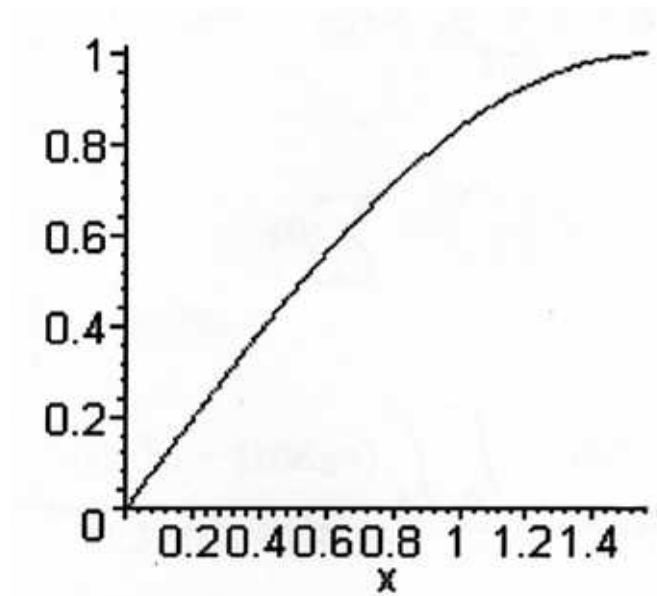
représente la superposition de u et $S_{1,3}$

figure(16)



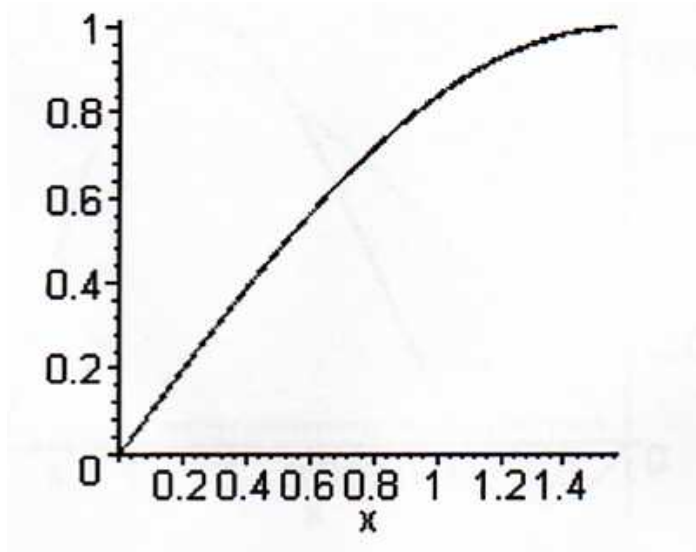
représente l'erreur $|\cos x - S_{1,3}|$

figure(17)



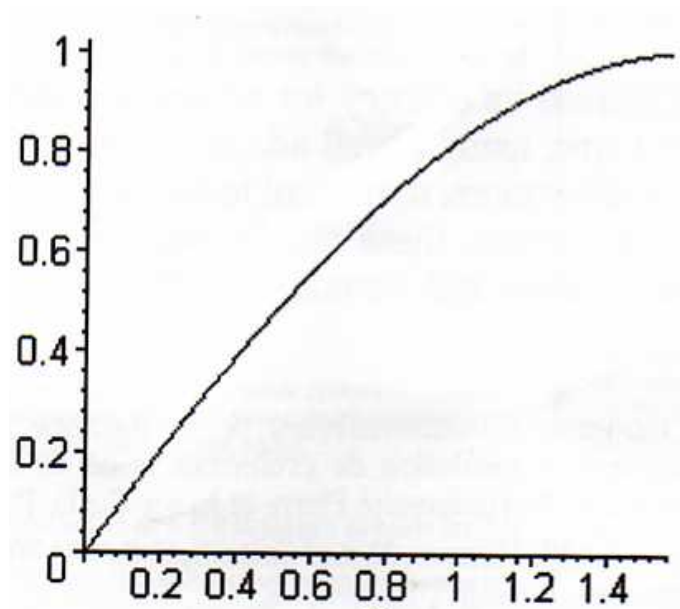
représente la solution $\sin x$

figure(18)



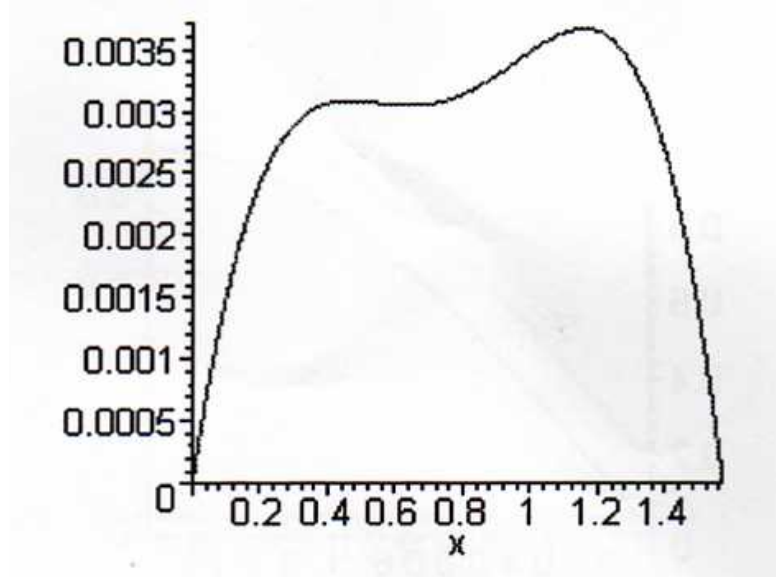
représente la solution $S_{2,3}$

figure(19)



représente la superposition de $\sin x$ et $S_{2,3}$

figure(20)



représente l'erreur $|\sin x - S_{2,3}| < 35 \cdot 10^{-4}$

3.2.4 Exemple (E 5)

a/ Résolution numérique

Résoudre, en utilisant la méthode décrite dans le chapitre précédent, le problème non linéaire aux limites défini par:

$$(E3) \begin{cases} u''_1(x) = (\cos x)u'_1(x) + u'_2(x) + u_1(x)u_2(x) - 2u_1(x), & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& (1) \\ u''_2(x) = u_1(x) + (\cos x)u'_2(x) + u_1^2(x) & & (2) \\ u_1(0) = 1, & u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ u_2(0) = 0, & u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad (3-2-24)$$

Dans ce problème, on note

$$G(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2 \\ \text{et } H(u_1, u_2) = u_1^2$$

les non-linéarités respectives dans (1) et (2) du problème (3-2-24).

Soit $A_n(u_{1,0}, \dots, u_{1,n}, u_{2,0}, \dots, u_{2,n})$, le polynôme d'Adomian associé à G

et $B_n(u_{1,0}, \dots, u_{1,n}, u_{2,0}, \dots, u_{2,n})$, le polynôme d'Adomian associé à H .

Un programme Maple donne les résultats suivants, pour ces deux polynômes :

$$\begin{aligned}
A_0(u_{1,0}, u_{2,0}) &= u_{1,0} \cdot u_{2,0} \\
A_1(u_{1,0}, u_{1,1}, u_{2,0}, u_{2,1}) &= u_{1,0} \cdot u_{2,1} + u_{1,1} \cdot u_{2,0}, \\
&\quad \text{etc...} \\
B_0(u_{1,0}, u_{2,0}) &= u_{1,0}^2 \\
B_1(u_{1,0}, u_{1,1}, u_{2,0}, u_{2,1}) &= 2u_{1,0} \cdot u_{1,1}. \\
&\quad \text{etc...}
\end{aligned}$$

La solution exacte de ce problème est donnée encore par :

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \cos x \\
u_2(x) &= \sin x
\end{aligned}$$

L'intégration de l'équation différentielle (1) de (3-2-24) donne:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \int_0^x (\cos t \cdot u_1(t) + u_2(t)) dt \\
&\quad + \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_1(s) + u_1(s)u_2(s) - 2u_1(x)) ds dt \\
&\quad + x \sum_{k \geq 1} a_k + 1 + (a_0 - 1)x \\
&\quad \text{où } u_1'(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k \geq 0} a_k
\end{aligned} \tag{3-2-25}$$

En posant

$$u_1 = \sum_{n \geq 0} u_{1,n}$$

et en utilisant l'identification décrite précédemment on obtient:

$$u_{1,0}(x) = (a_0 - 1)x - 1$$

puis on détermine alors a_0 tel que:

$$u_{1,0}(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} - 1$$

et finalement $u_{1,0}$ est donnée par:

$$u_{1,0}(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x$$

De la même façon, nous intégrons l'équation différentielle (2) de (3-2-24) et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &= \int_0^x (u_1(t) - \cos t \cdot u_2(t)) dt \\
 &\quad - \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_2(s) - u_1^2(s)) ds dt \\
 &\quad + x \sum_{k \geq 1} b_k + b_0 x
 \end{aligned} \tag{3-2-26}$$

$$\text{où } u_2'(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k \geq 0} b_k \tag{3-2-27}$$

En posant

$$u_2 = \sum_{n \geq 0} u_{2,n} \tag{3-2-28}$$

En injectant (3-2-27) et (3-2-28) dans (3-2-26) et en identifiant, on a:

$$u_{2,0}(x) = b_0 x$$

b_0 étant déterminé par la condition:

$$u_{2,0}(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{2}{\pi}$$

et finalement $u_{2,0}$ est donnée par:

$$u_{2,0}(x) = \frac{2}{\pi} x$$

A présent on est en mesure de déterminer $u_{1,1}$ et $u_{2,1}$ de manière recursive. En effet, grâce, toujours à l'identification d'Adomian, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 u_{1,1}(x) &= \int_0^x (\cos t \cdot u_{1,0}(t) + u_{2,0}(t)) dt + \\
 &\quad + \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_{1,0}(s) - u_{1,0}(s)u_{2,0}(s) - 2u_{1,0}(s)) ds dt + x(a_1 - 1)
 \end{aligned}$$

avec la condition

$$u_{1,1}(\frac{\pi}{2}) = 0$$

et

$$u_{2,1}(x) = \int_0^x (u_{1,0}(t) - \cos t \cdot u_{2,0}(t)) dt$$

$$- \int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_{2,0}(s) - u_{1,0}^2(s)) ds dt + b_0 x$$

avec la condition

$$u_{2,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

A l'étape p nous obtenons:

$$u_{1,p}(x) = \int_0^x \int_0^x (\cos t \cdot u_{1,p-1}(t) + u_{2,p-1}(t)) dt +$$

$$\int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_{1,p-1}(s) - A_{p-1}(u_{1,0}, \dots, u_{2,0}, \dots) - 2u_{1,p-1}(s)) ds dt$$

$$+ x(a_{p-1} - 1)$$

avec la condition $u_{1,p}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et

$$u_{2,p}(x) = \int_0^x (u_{1,p-1}(t) - \cos t \cdot u_{2,p-1}(t)) dt$$

$$\int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin s \cdot u_{2,p-1}(s) - B_{p-1}(u_{1,0}, \dots, u_{2,0}, \dots)) ds dt + b_{p-1} x$$

avec la condition $u_{2,p}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On pose alors;

$$S_{1,n} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{1,k} \quad \text{et} \quad S_{2,n} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{2,k}$$

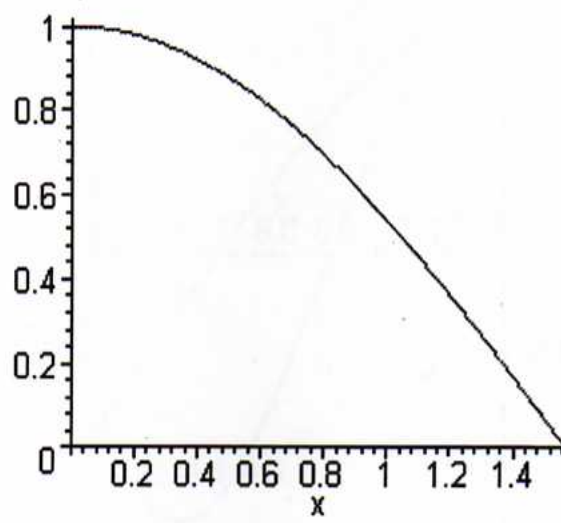
les séries tronquées solutions relatives respectivement à u_1 et u_2 .

Les calculs, pour déterminer la solution $(S_{1,1}, S_{2,1})$ ont été effectués sur PC à l'aide du logiciel Maple 11.0.

On retrouve les graphes concernant cet exemple dans les figures (21) à (28).

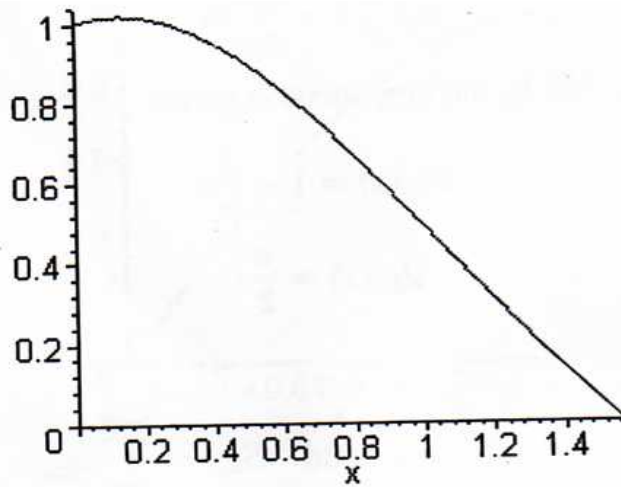
b/ Graphes

figure (21)



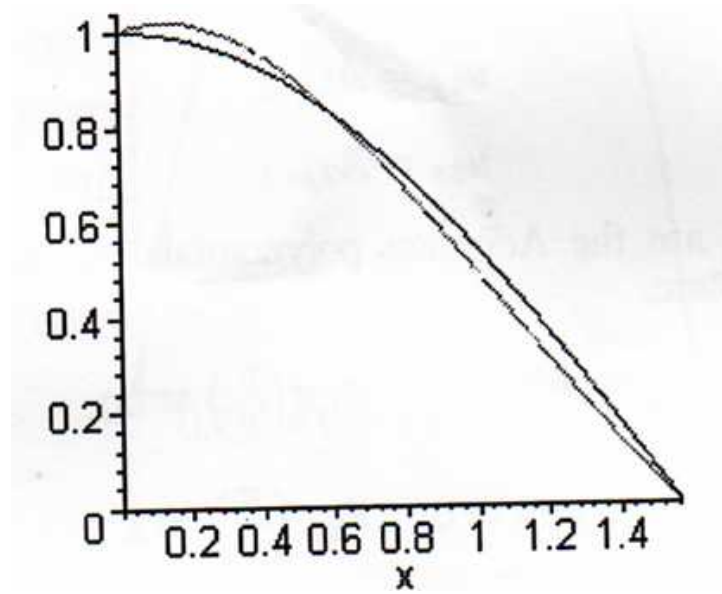
représente la solution exacte u_1

figure (22)



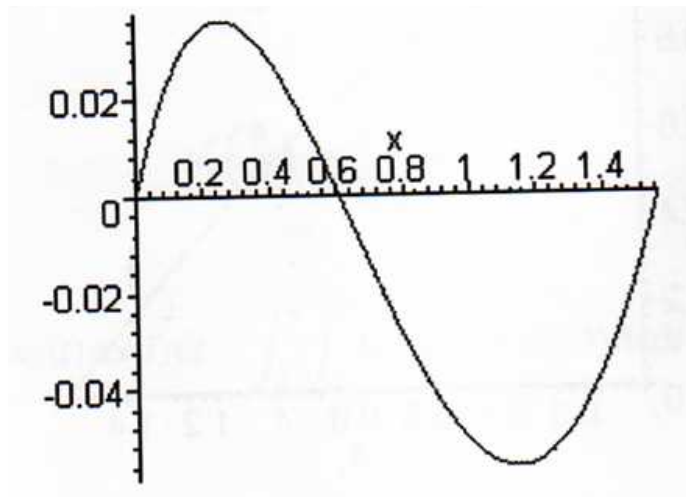
représente la solution tronquée $S_{1,1}$

figure(23)



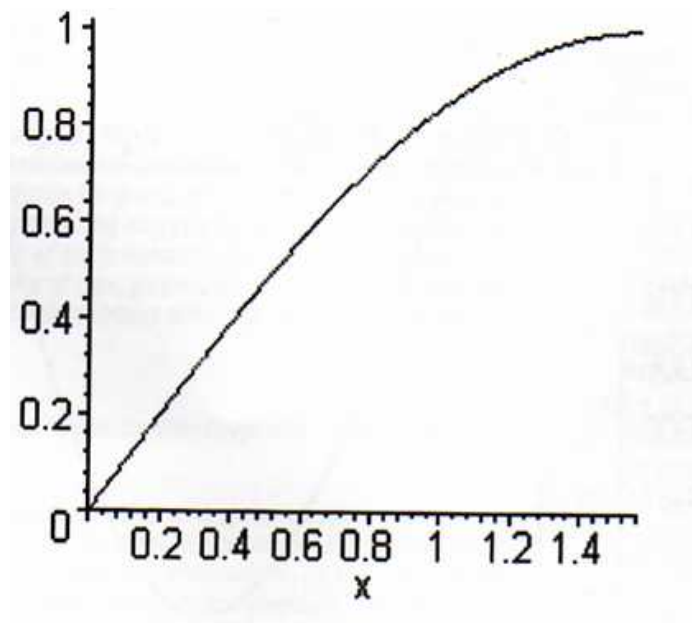
représente la superposition de u_1 et $S_{1,1}$

figure(24)



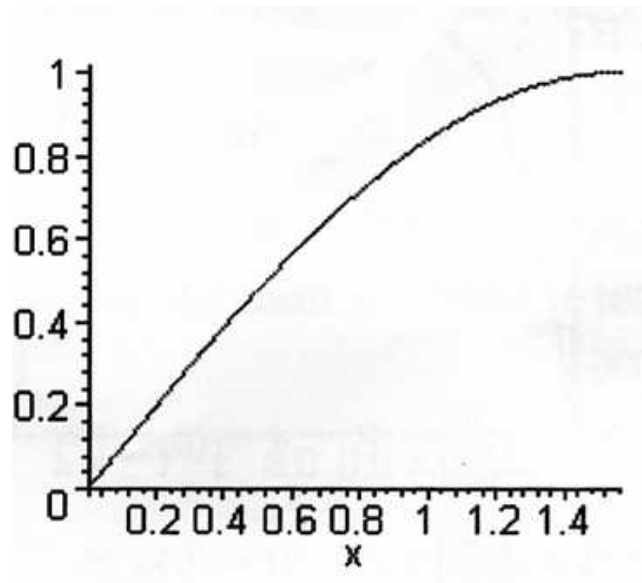
représente l'erreur $|u_1 - S_{1,1}| < 4 \cdot 10^{-2}$

figure(25)



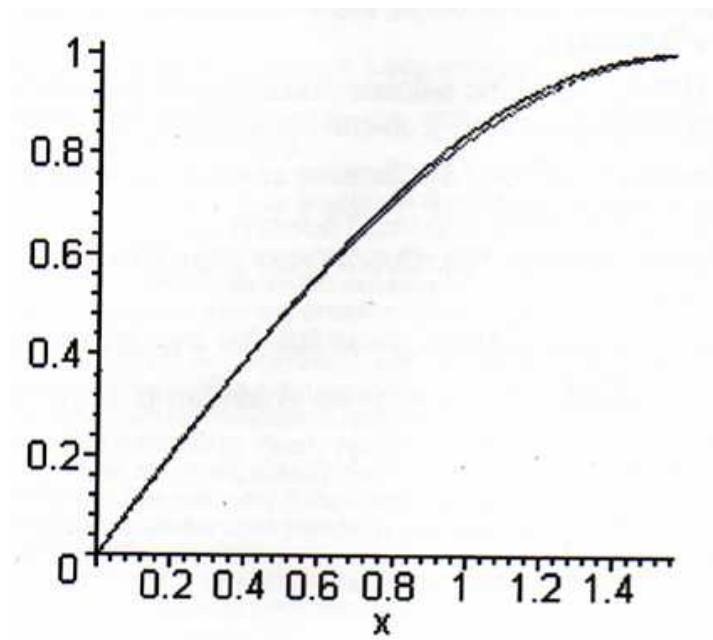
représente la solution exacte u_2

figure(26)

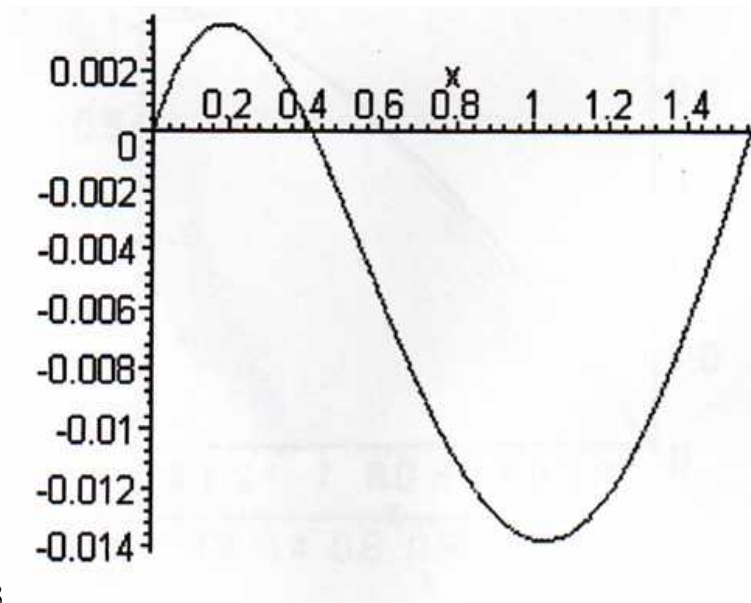


représente la solution tronquée $S_{2,1}$

figure(27)



représente la superposition de u_2 et $S_{2,1}$



28

représente l'erreur $|u_2 - S_{2,1}| < 14 \cdot 10^{-3}$

CHAPITRE IV

RESOLUTION D'UNE CLASSE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES AVEC LES CONDITIONS AUX LIMITES DE DIRICHLET

4.1 Position du problème:

L'application de la méthode décompositionnelle d'Adomian sur certaines classes d'équations différentielles et systèmes différentiels avec des conditions aux limites, comme vue dans les chapitres 2 et 3, ayant donné des résultats positifs, nous avons pensé très naturellement à l'appliquer, dans un premier temps, aux équations aux dérivées partielles linéaires avec les conditions aux limites de Dirichlet (cf Benabidallah [28]).

L'objet de travail, dans ce chapitre, est la résolution numérique par la méthode d'Adomian du problème linéaire:

trouver u solution du problème :

$$(R1) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[\times]a, b[\\ u(a, y) = u(b, y) = 0 \\ u(x, a) = u(x, b) = 0 \end{cases} \quad (4-1-1)$$

où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

et $f : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée suffisamment régulière pour que le problème (R1) admette une solution unique. Nous avons opté pour (x, y) évoluant dans le carré $]a, b[\times]a, b[$ par simple commodité et pour une bonne clarté de la rédaction et ne restreint aucunement la généralité. Cette équation est vérifiée par le potentiel de forces d'attraction ou de forces d'interaction des charges électriques en tous les points de l'espace se trouvant à l'extérieur des masses d'attraction ou à l'extérieur des charges composant le champ. Cette équation est également vérifiée par le potentiel de la vitesse d'un courant non tourbillonnaire d'un fluide incompressible. La température d'un corps homogène vérifie

également cette équation si le champ de températures est stationnaire, c'est à dire que la température u ne dépend que du lieu et non du temps.

La principale difficulté dans la résolution du problème (R1) est de trouver une forme canonique qui prend en charge les 4 conditions aux limites. Pour ce faire, nous allons procéder en deux étapes :

On applique d'abord la méthode décompositionnelle au problème (R2) qui consiste à :

trouver u solution de:

$$(R2) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[\times \mathbb{R} \\ u(a, y) = 0, & y \in \mathbb{R} & (1) \\ u(b, y) = 0, & y \in \mathbb{R} & (2) \end{cases} \quad (4-1-2)$$

puis nous montrerons dans la seconde étape comment revenir à un problème du type(R1).

4.2 Application de la méthode décompositionnelle au problème (R2).

4.2.1 Construction d'une forme canonique adéquate

Considérons le problème (R2), défini par :

$$(R2) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[\times \mathbb{R} \\ u(a, y) = 0, & y \in \mathbb{R} & (1) \\ u(b, y) = 0, & y \in \mathbb{R} & (2) \end{cases} \quad (4-2-1)$$

Proposition (4-2-1) :

Le problème (R2) est équivalent au problème:
Trouver u solution de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} u - M(u) = g(x, y), & (x, y) \in]a, b[\times \mathbb{R} \\ u(b, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \text{où } M(u) = (x - a) \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) - \int_a^x \int_b^t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, t) ds dt \\ \text{et } g(x, y) = \int_a^x \int_b^t f(s, y) ds dt \end{array} \right.$$

Démonstration :

En intégrant l'équation (4-2-1) par rapport à x , de b à x , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) + \int_b^x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, y) dt = \int_b^x f(t, y) dt$$

une deuxième intégration par rapport à la variable x , de a à x , donne:

$$u(x, y) - u(a, y) - (x - a) \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) + \int_a^x \int_b^t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, t) ds dt = \int_a^x \int_b^t f(s, y) ds dt$$

comme $u(a, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, on a finalement:

$$u(x, y) - (x - a) \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) + \int_a^x \int_b^t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, t) ds dt = \int_a^x \int_b^t f(s, y) ds dt \quad (4-2-2)$$

On achève la preuve en posant :

$$M(u) = (x - a) \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) - \int_a^x \int_b^t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, t) ds dt$$

$$\text{et } g(x, y) = \int_a^x \int_b^t f(s, y) ds dt$$

Remarque 4-2-1 :

La forme canonique ainsi déterminée ne prend pas en compte la deuxième condition aux limites

$$(u(b, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}).$$

Pour surmonter cette difficulté nous allons écrire $\frac{\partial u}{\partial x}(b, y)$ sous la forme d'une série de fonctions.

On pose:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(y) \quad (4-2-3)$$

Proposition (4-2-2) :

Le problème (R2) est alors équivalent à :

Trouver u solution de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u - N(u) = h(x, y), \quad (x, y) \in]a, b[\times \mathbb{R} \\ u(b, y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\ \text{où } N(u) = (x - a) \sum_{k=1}^{+\infty} C_k(y) - \int_a^x \int_b^t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, t) ds dt \\ \text{et } h(x, y) = (x - a)C_0(y) + \int_a^x \int_b^t f(s, y) ds dt \end{array} \right. \quad (4-2-4)$$

Démonstration :

Il suffit d'injecter l'écriture (4-2-3) dans (4-2-2).

La décomposition d'Adomian consiste à décomposer u et $N(u)$ sous la forme:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, y) \quad (4-2-5)$$

$$N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(u_0, \dots, u_k) \quad (4-2-6)$$

où les A_k sont les polynômes d'Adomian associés à l'opérateur N .

En substituant les expressions (4-2-5) et (4-2-6) dans (4-2-4) puis en identifiant selon le principe de la méthode décompositionnelle,

on obtient les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, y) = h(x, y) \\ u_1(x, y) = (x - a)C_1(y) - A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(x, y) = (x - a)C_n(y) - A_{n-1} \\ \dots \end{array} \right.$$

On pose à présent :

$$S_n(x, y) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k(x, y) \quad (4-2-7)$$

la série tronquée solution approximative du problème (R2).

Proposition (4-2-3):

La solution S_n vérifie la condition aux limites (1) du problème ((R2).

Démonstration :

En effet,

$$\begin{aligned} u_0(a, y) &= h(a, y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \text{et } u_k(a, y) &= A_{k-1}(u_0(a, y), \dots, u_{k-1}(a, y)) = 0, \quad \forall k \geq 1, \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc

$$S_n(a, y) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k(a, y) = 0.$$

Remarque 4-2-2 :

La solution S_n vérifie la condition aux limites (2) du problème (R2) si les fonctions $C_k(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$, sont solutions du système algébrique:

$$u_k(b, y) = 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (\Omega) \quad (4-2-8)$$

Proposition (4-2-4) :

Si le problème (R2) admet une solution unique, alors le système algébrique (Ω) dans (4-2-8) admet une solution unique donnée par:

$$\begin{aligned} C_0(y) &= -\frac{1}{b-a} \int_a^b \int_b^t f(s, y) ds dt \\ \text{et } C_{k-1}(y) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_b^t \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt, \quad 1 \leq k \leq n \end{aligned} \quad (4-2-9)$$

Démonstration:

En effet, pour l'unicité et l'existence de la solution du système (4-2-8), il suffit de remarquer que

$$\det(\Omega) = (b-a)^{n+1} \neq 0.$$

Par ailleurs:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(b, y) = (b-a)C_0(y) + \int_a^b \int_b^t f(s, y) ds dt = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ u_{k-1}(b, y) = (b-a)C_{k-1}(y) - \int_a^b \int_b^t \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

d'où le résultat:

$$C_0(y) = -\frac{1}{b-a} \iint_{a \ b}^{b \ t} f(s, y) ds dt$$

et $C_{k-1}(y) = \frac{1}{b-a} \iint_{a \ b}^{b \ t} \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt$, $1 \leq k \leq n$.

Proposition (4-2-5) :

Si les séries décompositionnelles (4-2-5) et (4-2-6) convergent respectivement vers u et $N(u)$ alors la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 0} C_k(y)$$

ainsi construite, est convergente pour tout $y \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\sum_{k \geq 0} C_k(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y)$$

Démonstration :

En effet, en écrivant $\sum_{k \geq 0} C_k(y)$ de la manière suivante :

$$\sum_{k \geq 0} C_k(y) = C_0(y) + \sum_{k \geq 1} C_k(y)$$

il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} C_k(y) &= C_0(y) + \sum_{k \geq 1} C_k(y) \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\iint_{a \ b}^{b \ t} \sum_{k \geq 1} \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt - \iint_{a \ b}^{b \ t} f(s, y) ds dt \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \iint_{a \ b}^{b \ t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, y) - f(s, y) \right) ds dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left((b-a) \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, y). \end{aligned}$$

4.3 Application de la méthode décompositionnelle au problème (R1):

Rappelons que le problème (R1) consiste à trouver u solution de :

$$(R1) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[\times]a, b[\\ u(a, y) = u(b, y) = 0 & (1) \\ u(x, a) = u(x, b) = 0 & (2) \end{cases} \quad (4-3-1)$$

où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

et $f : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée suffisamment régulière pour que le problème (R1) admette une solution unique.

Nous allons montrer comment ramener le problème (R1) à un problème du type (R2).

Soit $v : y \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction donnée telle que:

$$\begin{aligned} v(a) &= v(b) = 0 \\ \text{et } v(y) &\neq 0 \quad \forall y \in]a, b[\end{aligned}$$

On cherche alors u sous la forme:

$$u(x, y) = v(y)w(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in [a, b]^2$$

où $w : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Proposition (4-3-1):

Le problème (R1) est équivalent au problème (R3) qui consiste à : trouver w telle que:

$$(R3) \quad \begin{cases} v\Delta w + w\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v'\frac{\partial w}{\partial y} = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[^2 \quad (E) \\ w(a, y) = 0, & y \in]a, b[\quad (1) \\ w(b, y) = 0, & y \in]a, b[\quad (2) \end{cases} \quad (4-3-2)$$

Démonstration:

La condition aux limites (2) du problème (R1) est vérifiée de par le choix de la fonction v .

En effet,

$$\begin{aligned} u(x, a) &= v(a)w(x, a) = 0 \\ \text{et } u(x, b) &= v(b)w(x, b) = 0 \end{aligned}$$

par ailleurs,

$$u(x, y) = v(y).w(x, y)$$

est solution de (R1) si la fonction w satisfait encore les équations:

$$\begin{cases} \Delta(v.w) = f(x, y), & (x, y) \in]a, b[^2 \\ w(a, y) = 0, & y \in]a, b[\\ w(b, y) = 0, & y \in]a, b[\end{cases}$$

On achève la preuve en remarquant que:

$$\Delta(v.w) = v\Delta w + w \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v' \frac{\partial w}{\partial y}$$

4.3.1 Construction d'une forme canonique équivalente:

Proposition 4-3-2:

Le problème (R3) équivaut à trouver w solution de:

$$\begin{cases} w - M(w) = k(x, y), & (x, y) \in]a, b[^2 \\ w(a, y) = 0, & y \in]a, b[\end{cases} \quad (4-3-3)$$

où

$$M(w) = (x - b) \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) - \int_b^x \int_a^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y) ds dt$$

$$- 2 \frac{v'(y)}{v(y)} \int_b^x \int_a^t \frac{\partial w}{\partial y}(s, y) ds dt - 2 \frac{v''(y)}{v(y)} \int_b^x \int_a^t w(s, y) ds dt \quad (6)$$

et

$$k(x, y) = \frac{1}{v(y)} \int_b^x \int_a^t f(s, y) ds dt$$

Démonstration:

L'intégration par rapport à la variable x de a à x de l'équation (E) du problème (4-3-2) donne :

$$\begin{aligned} & v(y) \int_a^x \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s, y) ds + v(y) \int_a^x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y) ds + \\ & 2v'(y) \int_a^x \frac{\partial w}{\partial y}(s, y) ds + v''(y) \int_a^x w(s, y) ds \\ & = \int_a^x f(s, y) ds \end{aligned}$$

qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
 & v(y) \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) \right] + v(y) \int_a^x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y) ds \\
 & + 2v'(y) \int_a^x \frac{\partial w}{\partial y}(s, y) ds + v''(y) \int_a^x w(s, y) ds \\
 = & \int_a^x f(s, y) ds
 \end{aligned} \tag{4-3-4}$$

Nous intégrons une deuxième fois l'équation (4-3-4) par rapport à la variable x de b à x et on obtient :

$$\begin{aligned}
 & v(y) \int_b^x \left[\frac{\partial w}{\partial s}(s, y) - \frac{\partial w}{\partial s}(a, y) \right] ds + v(y) \int_b^x \int_a^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y) ds dt \\
 & + 2v'(y) \int_b^x \int_a^t \frac{\partial w}{\partial y}(s, y) ds dt + v''(y) \int_b^x \int_a^t w(s, y) ds dt \\
 = & \int_b^x \int_a^t f(s, y) ds dt
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 & v(y) [w(x, y) - w(a, y)] - (x - b)v(y) \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) \\
 & + v(y) \int_b^x \int_a^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y) ds dt + 2v'(y) \int_b^x \int_a^t \frac{\partial w}{\partial y}(s, y) ds dt \\
 & + v''(y) \int_b^x \int_a^t w(s, y) ds dt \\
 = & \int_b^x \int_a^t f(s, y) ds dt
 \end{aligned}$$

$$w(a, y) = 0, \forall y \in]a, b[\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& v(y)w(x, y) - (x - b)v(y)\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) + v(y)\int_b^x \int_a^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y)dsdt \\
& + 2v'(y)\int_b^x \int_a^t \frac{\partial w}{\partial y}(s, y)dsdt + v''(y)\int_b^x \int_a^t w(s, y)dsdt \\
= & \int_b^x \int_a^t f(s, y)dsdt
\end{aligned}$$

et finalement la forme canonique désirée:

$$\begin{aligned}
& w(x, y) - (x - b)\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) + \int_b^x \int_a^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y)dsdt \quad (4-3-5) \\
& + 2\frac{v'(y)}{v(y)}\int_b^x \int_a^t \frac{\partial w}{\partial y}(s, y)dsdt + \frac{v''(y)}{v(y)}\int_b^x \int_a^t w(s, y)dsdt \\
= & \frac{1}{v(y)}\int_b^x \int_a^t f(s, y)dsdt.
\end{aligned}$$

Remarque 4-3-1:

La condition initiale (1) du problème (4-3-2) n'apparaît pas dans la nouvelle écriture (4-3-5) du problème (R3).

Pour pouvoir utiliser cette condition nous écrivons $\frac{\partial w}{\partial x}(a, y)$ sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = \sum_{k \geq 0} C_k(y), \quad \forall y \in]a, b[\quad (4-3-5)$$

et nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 4-3-3:

Le problème (R3) équivaut alors à trouver w solution de :

$$w(x, y) - (x - b)\sum_{k \geq 1} C_k(y) - H(w) = l(x, y), \quad (x, y) \in]a, b[^2 \quad (4-3-6)$$

$$\text{où } H(w) = -\int_b^x \int_a^t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(s, y)dsdt - 2\frac{v'(y)}{v(y)}\int_b^x \int_a^t \frac{\partial w}{\partial y}(s, y)dsdt - \frac{v''(y)}{v(y)}\int_b^x \int_a^t w(s, y)dsdt$$

$$\text{et } l(x, y) = (x - b)C_0(y) + \frac{1}{v(y)} \int_b^x \int_a^t f(s, y) ds dt$$

Démonstration:

Il suffit d'injecter l'écriture (4-3-5) dans (4-3-6).

Pour appliquer la méthode décompositionnelle à notre équation, on écrit w et $H(w)$ sous la forme:

$$w = \sum_{k \geq 0} w_k \quad \text{et} \quad H(w) = \sum_{k \geq 0} A_k(w_0, \dots, w_k) \quad (4-3-7)$$

où A_k sont les polynômes d'Adomian associés à l'opérateur H .

La substitution des écritures (4-3-7) dans (4-3-6) donne :

$$\sum_{k \geq 0} w_k - (x - b) \sum_{k \geq 1} C_k(y) - \sum_{k \geq 0} A_k(w_0, \dots, w_k) = l(x, y)$$

et par identification on a les expressions des w_i , pour tout i .

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0(x, y) = l(x, y) \\ w_1(x, y) = (x - b)C_1(y) + A_0(w_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n(x, y) = (x - b)C_n(y) + A_{n-1}(w_0, \dots, w_{n-1}) \\ \dots \end{array} \right. \quad (4-3-8)$$

En posant

$$S_n(x, y) = \sum_{k=0}^{k=n} w_k(x, y)$$

on a le résultat :

Proposition (4-3-4) :

$$S_n(b, y) = 0, \quad \forall y \in [a, b]$$

Démonstration:

Il suffit de noter que :

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= l(x, y), \quad (x, y) \in]a, b]^2 \\ \text{et } w_i(x, y) &= (x - b)C_i(y) + A_{i-1}(w_0, \dots, w_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (x, y) \in]a, b]^2 \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} w_0(b, y) &= l(b, y) = 0 & y \in]a, b[\\ \text{et } w_i(b, y) &= 0, \quad 1 \leq i \leq n, & (x, y) \in]a, b[^2 \end{aligned}$$

Remarque 4-3-2 :

La condition aux limites (1) du problème (R3) n'est pas vérifiée par S_n et les fonctions $C_n(y)$ ne sont pas encore déterminées; nous allons justement les déterminer de telle sorte que:

$$S_n(a, y) = 0$$

Proposition (4-3-5) :

$$S_n(a, y) = 0 \Leftrightarrow \tag{4-3-9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_0(y) &= \frac{1}{b-a} \frac{1}{v(y)} \int_b^a \int_a^t f(s, y) ds dt \\ C_i(y) &= \frac{1}{b-a} \int_b^a \int_a^t \left[\frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial y^2} + 2 \frac{v'(y)}{v(y)} \frac{\partial w_{i-1}}{\partial y} + \frac{v''(y)}{v(y)} w_{i-1} \right] (s, y) ds dt, \quad i \geq 1 \end{aligned} \right.$$

Démonstration :

$$S_n(a, y) = 0 \tag{4-3-10}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} w_0(a, y) &= l(a, y) = 0 \\ w_i(b, y) &= 0, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \right. \quad (\Sigma)$$

On remarque que :

$$\det(\Sigma) = (b-a)^{n+1} \neq 0$$

Le système algébrique (Σ) admet donc une seule solution.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} w_0(a, y) = l(a, y) = 0 &\Leftrightarrow (a-b)C_0(y) + \frac{1}{v(y)} \int_b^a \int_a^t f(s, y) ds dt = 0 \\ &\Leftrightarrow C_0(y) = \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{v(y)} \int_b^a \int_a^t f(s, y) ds dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
w_i(a, y) &= 0 \Leftrightarrow (a - b)C_i(y) + A_{i-1}(w_0, \dots, u_{i-1}) = 0, \quad \text{pour tout } i \geq 1 \quad (4-3-11) \\
&\Leftrightarrow C_i(y) = \frac{1}{b - a} A_{i-1}(w_0, \dots, u_{i-1}) \\
&\Leftrightarrow C_i(y) = \frac{1}{b - a} \int_b^a \int_a^t \left(\frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial y^2}(s, y) + 2 \frac{v'(y)}{v(y)} \frac{\partial w_{i-1}}{\partial y}(s, y) + \frac{v''(y)}{v(y)} w_{i-1}(s, y) \right) ds dt
\end{aligned}$$

4.3.2 Convergence du processus

Concernant la convergence du processus :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} - (x - b) \sum_{k \geq 1} C_k(y) - H(w_n) = 0, \quad (x, y) \in]a, b]^2 \\ \text{avec } w_0 \text{ défini par :} \\ w_0(x, y) = \frac{1}{v(y)} \left(\frac{(x - b)}{(b - a)} \int_b^a \int_a^t f(s, y) ds dt + \int_b^x \int_a^t f(s, y) ds dt \right) \end{array} \right.$$

on montre que:

Proposition (4-3-6):

Si les séries décompositionnelles:

$$w = \sum_{k \geq 0} w_k \quad \text{et} \quad H(w) = \sum_{k \geq 0} A_k(w_0, \dots, w_k)$$

convergent respectivement vers w et $H(w)$ alors la série $\sum_{k \geq 0} C_k(y)$ construite

dans la proposition (4-3-5) est convergente vers $\frac{\partial w}{\partial x}(a, y), \forall y \in]a, b[$.

Démonstration:

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} C_k(y) &= C_0(y) + \sum_{k \geq 1} C_k(y) \\
&= \frac{1}{(b - a)} \frac{1}{v(y)} \int_b^a \int_a^t f(s, y) ds dt \\
&\quad + \frac{1}{b - a} \int_b^a \int_a^t \left(\sum_{i \geq 1} \left[\frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) + 2 \frac{v'(y)}{v(y)} \frac{\partial w_{k-1}}{\partial y}(s, y) + \frac{v''(y)}{v(y)} w_{k-1}(s, y) \right] \right) ds dt \\
&= \frac{1}{b - a} \int_b^a \int_a^t \left(\frac{1}{v(y)} f(s, y) + \sum_{i \geq 1} \left[\frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial y^2} + 2 \frac{v'(y)}{v(y)} \frac{\partial w_{k-1}}{\partial y} + \frac{v''(y)}{v(y)} w_{k-1} \right] (s, y) \right) ds dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a} \int_b^a \int_a^t \left(\frac{1}{v(y)} f(s, y) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{v'(y)}{v(y)} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v''(y)}{v(y)} w \right) (s, y) \right) ds dt \\
&= w(a, y) - \frac{a-b}{b-a} \frac{\partial w}{\partial x} (a, y) = \frac{\partial w}{\partial x} (a, y). \\
&\quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

Ce qui achève parfaitement la résolution du problème (R3) et donc celle de (R1).

4.4 Tests numériques

Nous allons traiter deux exemples, l'un pour illustrer le problème (R2), le deuxième pour illustrer le problème (R1)

4.4.1 Exemple (E6):

a/ Résolution Numérique.

Appliquer ce qui précède pour résoudre le problème défini par:
trouver u solution de :

$$(E6) \begin{cases} \Delta u = -(\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(y); & (x, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R} & (1) \\ u(0, y) = 0, & y \in \mathbb{R} & (2) \\ u(1, y) = 0, & y \in \mathbb{R} & (3) \end{cases} \quad (4-3-12)$$

Remarque 4-3-3 :

La solution exacte de (E6) est donnée par :

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \cos(y).$$

Après une double intégration par rapport à la variable x de l'équation (1) de (E6), nous obtenons la forme canonique :

$$u(x, y) - (x-1) \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(s, y) ds dt = \int_1^x \int_0^t f(s, y) ds dt \quad (4-3-13)$$

$$\text{où} \quad f(x, y) = -(\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(y)$$

puis en écrivant u , $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, et $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y)$ respectivement sous la forme :

$$u = \sum_{k \geq 0} u_k, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{k \geq 0} A_k, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sum_{k \geq 0} C_k(y)$$

où les A_k sont les polynômes d'Adomian et en substituant dans la forme canonique précédente nous obtenons une nouvelle écriture de l'exemple (E6) :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} u_k(x, y) - (x-1) \sum_{k \geq 1} C_k(y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{k \geq 0} u_k(s, y) ds dt \quad (4-3-14) \\ &= (x-1)C_0(y) + \int_1^x \int_0^t f(s, y) ds dt \end{aligned}$$

L'identification, comme décrite dans le problème (R2) donne les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, y) = (x-1)C_0(y) - \int_1^x \int_0^t (\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(y) ds dt \\ u_1(x, y) = (x-1)C_1(y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(s, y) ds dt \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(x, y) = (x-1)C_n(y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt \\ \dots \end{array} \right. \quad (4-3-15)$$

On pose maintenant

$$S_n(x, y) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k(x, y)$$

et il est facile de voir que:

$$S_n(1, y) = 0$$

On détermine ensuite les $C_k(y)$, $0 \leq k \leq n$, telles que:

$$S_n(0, y) = 0$$

La résolution de cette équation donne pour C_k et u_k les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0(y) = \int_0^1 \int_0^t (\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(y) ds dt \\ \Rightarrow u_0(x, y) = (x-1) \int_0^1 \int_0^t (\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(y) ds dt \\ - \int_1^x \int_0^t (\pi^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(y) ds dt \end{array} \right. \quad (4-3-16)$$

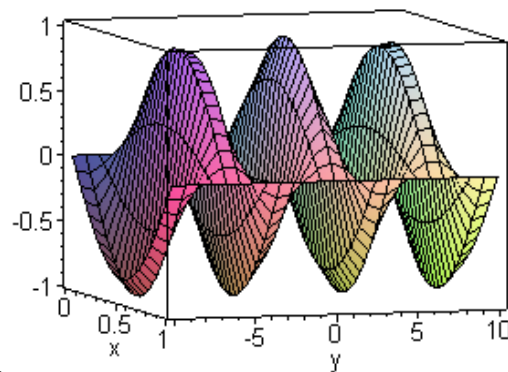
et à la $k^{\text{ème}}$ étape :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_k(y) = \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2} ds dt \\ \Rightarrow u_k(x, y) = (x-1) \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt \\ \quad - \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y^2}(s, y) ds dt \end{array} \right.$$

b / Graphes

figure (29)

(29)

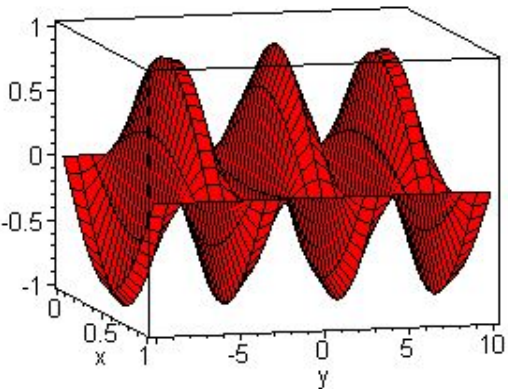


30.pdf

représente la solution exacte exacte u

figure(30)

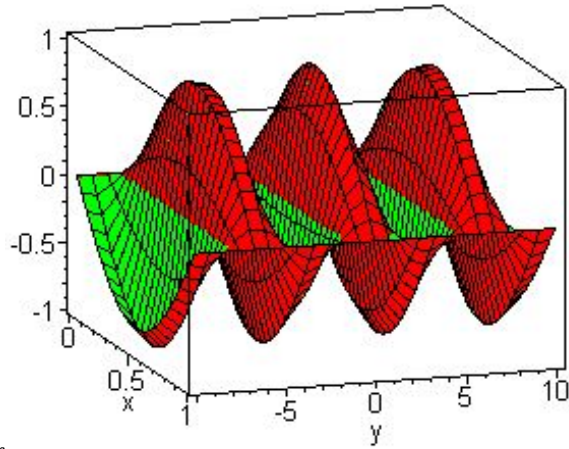
(30)



31.pdf

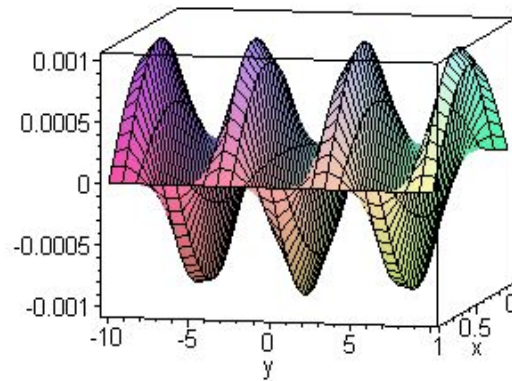
représente la solution tronquée S_2

figure(31)
(31)



32.pdf
représente la superposition de u et S_1

figure(32)
(32)



33.pdf
représente l'erreur $|u - S_2| < 10^{-3}$

Pour calculer S_2 , l'erreur $|S_2 - u|$ et leur courbe représentative nous avons utilisé le programme Maple figurant dans le paragraphe (4-5):

c/ Commentaires:

Nous donnons dans les figures (29) et (30) les courbes représentatives respectivement de la solution exacte u et de la solution tronquée S_2 construite par la méthode exposée dans ce chapitre.

Nous constatons dans la figure (31) une "bonne" superposition de ces deux solutions. L'erreur est calculée et représentée dans la figure (32) et devient inférieure à 10^{-3} au bout de deux itérations.

4.4.2 Exemple (E7):

a / Résolution Numérique

On considère dans cet exemple le problème défini par :

$$(E7) \quad \begin{cases} \Delta u = 40(x^2 + y^2 - x - y), & (x, y) \in]0, 1[\\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & x \in]0, 1[\\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4-3-17)$$

et dont la solution exacte est

$$u(x, y) = 20xy(xy - x - y + 1)$$

Nous allons chercher la solution de (E7) sous la forme :

$$u(x, y) = y(y - 1)w(x, y)$$

Le problème (E7) équivaut alors à chercher w solution de :

$$(E'7) \quad \begin{cases} \Delta w + \frac{2}{y(y-1)} \left(\frac{(2y-1)}{y(y-1)} \frac{\partial w}{\partial y} + 2w \right) = 40(x^2 + y^2 - x - y), & (x, y) \in]0, 1[\\ w(0, y) = 0, & y \in]0, 1[\\ w(1, y) = 0, & y \in]0, 1[\end{cases} \quad (4-3-18)$$

La double intégration par rapport à la variable x de l'équation (4-3-18), comme décrite précédemment nous donne la forme canonique :

$$\begin{aligned}
& w(x, y) - (x-1) \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(s, y) ds dt \quad (4-3-19) \\
& + \frac{2(2y-1)}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t \frac{\partial w}{\partial x}(s, y) ds dt + \frac{2}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t w(s, y) ds dt \\
& = \frac{1}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t f(s, y) ds dt
\end{aligned}$$

où

$$f(x, y) = 40(x^2 + y^2 - x - y)$$

que nous écrivons sous forme réduite :

$$w - (x-1) \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) + M(w) = g(x, y) \quad (4-3-20)$$

où

$$\begin{aligned}
M(w) &= \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(s, y) ds dt + \frac{2(2y-1)}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t \frac{\partial w}{\partial x}(s, y) ds dt \\
&+ \frac{2}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t w(s, y) ds dt \\
\text{et } g(x, y) &= \frac{1}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t f(s, y) ds dt
\end{aligned}$$

On pose maintenant :

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = \sum_{n \geq 0} C_n(y) \quad (4-3-21)$$

En substituant l'écriture (4-3-21) dans (4-3-20) nous obtenons:

$$\begin{aligned}
& w(x, y) - (x-1) \sum_{n \geq 1} C_n(y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(s, y) ds dt \\
& + \frac{2(2y-1)}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t \frac{\partial w}{\partial x}(s, y) ds dt + \frac{2}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t w(s, y) ds dt \\
& = (x-1)C_0(y) + \frac{1}{y(y-1)} \int_1^x \int_0^t f(s, y) ds dt
\end{aligned}$$

i.e:

$$w - (x - 1) \sum_{n \geq 1} C_n(y) + H(w) = l(x, y)$$

où

$$H(w) = M(w) \quad (4-3-22)$$

$$\text{et } l(x, y) = (x - 1)C_0(y) + \frac{1}{y(y - 1)} \int_1^x \int_0^t f(s, y) ds dt$$

La méthode d'Adomian consiste maintenant à décomposer w et $H(w)$ sous la forme :

$$w = \sum_{n \geq 0} w_n \text{ et } H(w) = \sum_{n \geq 0} A_n \quad (4-3-23)$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian associés à l'opérateur H .

En substituant les expressions (4-3-23) dans (4-3-22), on obtient les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0(x, y) = (x - 1)C_0(y) + \frac{1}{y(y - 1)} \int_1^x \int_0^t 40(s^2 - s + y^2 - y) ds dt \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n(x, y) = (x - 1)C_n(y) + \int_1^x \int_0^t \frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2}(s, y) ds dt \\ + \frac{2(2y - 1)}{y(y - 1)} \int_1^x \int_0^t \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}(s, y) ds dt + \frac{2}{y(y - 1)} \int_1^x \int_0^t w_{n-1}(s, y) ds dt \\ \dots \end{array} \right. \quad (4-3-24)$$

Si on pose à présent

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} w_k$$

alors on a par construction des w_k

$$S_n(1, y) = 0$$

La condition aux limites

$$S_n(0, y) = 0$$

est vérifiée si :

$$w_k(0, y) = 0, \quad \forall k, \quad 0 \leq k \leq n \quad (4-3-24)$$

La résolution du système d'équations (4-3-24) donne :

$$C_0(y) = \frac{10}{3} \frac{1 - 6y^2 + 6y}{y(y-1)}$$

u_0 est alors définie par :

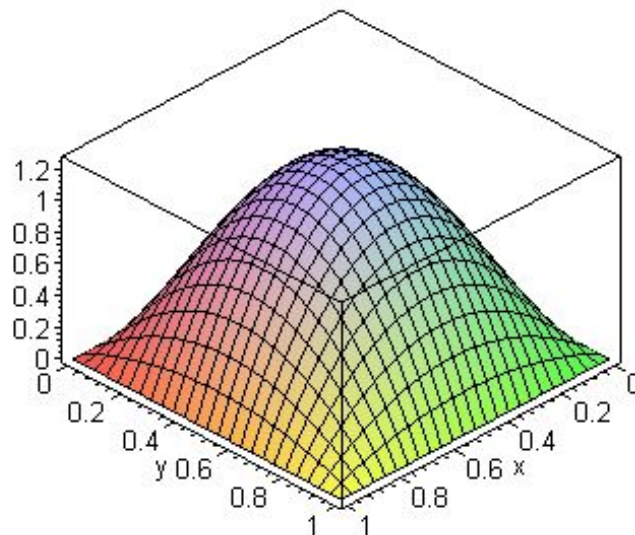
$$u_0(x, y) = \frac{10x}{3}(1 - 6y^2 + 6y + x^3 - 2x^2 + 6xy^2 - 6xy)$$

Les expressions de $C_k(y)$, pour $k \geq 1$, sont données par:

$$C_k(y) = \int_1^0 \int_0^t \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial x^2}(s, y) ds dt + \frac{2(2y-1)}{y(y-1)} \int_1^0 \int_0^t \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x}(s, y) ds dt + \frac{2}{y(y-1)} \int_1^0 \int_0^t w_{k-1}(s, y) ds dt$$

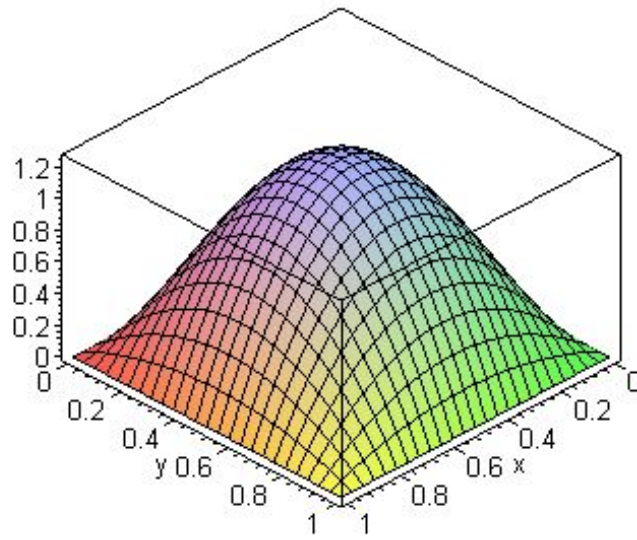
b / Graphes

figure(33)



représente la solution exacte u

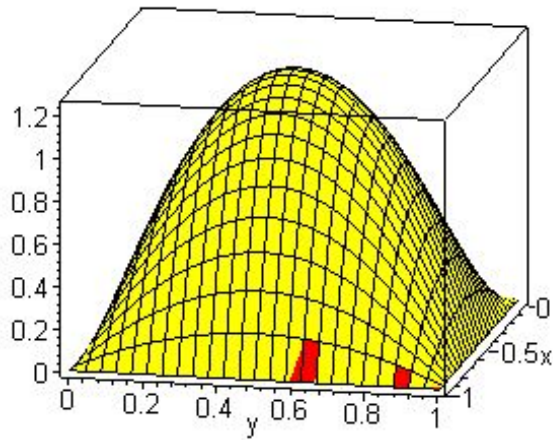
figure(34)



représente la solution tronquée S_1

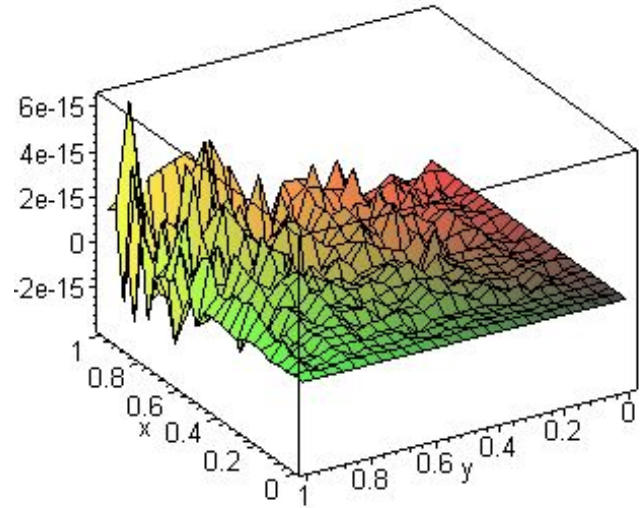
figure(35)

(35)



36.pdf
représente la superposition de u et S_1

figure(36)
(36)



représente l'erreur $|S_1 - u|$, $|S_1 - u| < 6.10^{-15}$ ^{37.pdf}

Nous avons calculé la solution tronquée S_1 , l'erreur $|S_1 - u|$ et leur graphe respectif à l'aide du programme Maple figurant dans le paragraphe 4-5.

c/ Commentaires:

Nous donnons les graphes relatifs à cet exemple dans les figures (33), (34) (35) et (36).

La figure (34) représente la graphe de la série tronquée $S_1 = u_0 + u_1$ et on observe dans la figure (36) l'erreur commise, elle est inférieure à 610^{-15} au bout de deux itérations.

4.5 Programmes Maple

a/ Programme Maple de l'exemple (E1)

```
> u:=x*exp(1-x):
> u0:=(2+c0)*x:
> subs(x=1,u0):
> solve(subs(x=1,u0)=1,c0):
> u00:=x:
> u1:=c1*x-int(int(u00,x=1..t),t=0..x)-2*int(u00,x=0..x):
> subs(x=1,u1):
> solve(subs(x=1,u1)=0,c1):
> u11:=subs(c1=2/3,u1):
> s1:=u00+u11:
> plot(s1,x=0..1):
> u2:=c2*x-int(int(u11,x=1..t),t=0..x)-2*int(u11,x=0..x):
> subs(x=1,u2):
> solve(subs(x=1,u2)=0,c2):
> u22:=subs(c2=14/45,u2):
> u3:=c3*x-int(int(u22,x=1..t),t=0..x)-2*int(u22,x=0..x):
> subs(x=1,u3):
> solve(subs(x=1,u3)=0,c3):
> u33:=subs(c3=8/189,u3):
> u4:=c4*x-int(int(u33,x=1..t),t=0..x)-2*int(u33,x=0..x):
> subs(x=1,u4):
> solve(subs(x=1,u4)=0,c4):
> u44:=subs(c4=-76/4725,u4):
> s4:=u00+u11+u22+u33+u44:
> plot(u,x=0..1,color=red):
> plot(s4,x=0..1,color=green):
> plot(u-s4,x=0..1):
```

b/ Programme Maple de L'exemple (E2)

```
> with(plots):
> u:=x*(1-ln(x)/(2*ln(2))):
> plot(u,x=1..2,title="figure(5)"):
> u0:=(c0*4*(x-1)-6*x+7)/x^2:
> eq0:=subs(x=2,u0):
> solve(eq0=1,c0):
> u00:=subs(c0=9/4,u0):
> u1:=(4*c1*(x-1)+int(int(-4*u00,x=2..t),t=1..x))/x^2+5*int(t*subs
(x=t,u00),t=1..x)/x^2:
> eq1:=subs(x=2,u1):
> solve(eq1=0,c1):
```

```

> u11:=subs(c1=-31/4+15*ln(2)/2,u1):
> s1:=u00+u11:
> plot(s1,x=1..2):
> u2:=(4*c2*(x-1)+int(int(-4*u11,x=2..t),t=1..x))/x^2+5*int(t*
    subs(x=t,u11),t=1..x)/x^2:
> eq2:=subs(x=2,u2):
> solve(eq2=0,c2):
> u22:=subs(c2=-36-105*ln(2)/2+603*ln(2)^2/4,u2):
> s2:=s1+u22:
> plot(s2,x=1..2):
> u3:=(4*c3*(x-1)+int(int(-4*u22,x=2..t),t=1..x))/x^2+5*int(t*subs
    (x=t,u22),t=1..x)/x^2:
> eq3:=subs(x=2,u3):
> solve(eq3=0,c3):
> u33:=subs(c3=-468+11351*ln(2)^3/4-855*ln(2)^2/4-540*ln(2),u3):
> s3:=s2+u33:
> plot(s3,x=1..2):
> u4:=(4*c4*(x-1)+int(int(-4*u33,x=2..t),t=1..x))/x^2+5*
    int(t*subs(x=t,u33),t=1..x)/x^2:
> eq4:=subs(x=2,u4):
> solve(eq4=0,c4):
> u44:=subs(c4=-7380-5832*ln(2)^2+851193*ln(2)^4/16
    +46729*ln(2)^3/4-8640*ln(2),u4):
> s4:=s3+u44:
> plot(s4,x=1..2):
> u5:=(4*c5*(x-1)+int(int(-4*u44,x=2..t),t=1..x))/x^2+5*
    int(t*subs(x=t,u44),t=1..x)/x^2:
> eq5:=subs(x=2,u5):
> solve(eq5=0,c5):
> u55:=subs(c5=-129636-138672*ln(2)^2-152820*ln(2)+15963307*
    ln(2)^5/16+8217579*ln(2)^4/16+
    72054*ln(2)^3,u5):
> s5:=s4+u55:
> plot(u-s5,x=1..2):
> u6:=(4*c6*(x-1)+int(int(-4*u55,x=2..t),t=1..x))/x^2+5
    *int(t*subs(x=t,u55),t=1..x)/x^2:
> eq6:=subs(x=2,u6):
> solve(eq6=0,c6):
> u66:=subs(c6=-2435652-3010608*ln(2)^2-2882520*ln(2)
    +242525069*ln(2)^5/16+12786579*ln(2)^4/2
    -288990*ln(2)^3+2993933987*ln(2)^6/160,u6):
> s6:=s5+u66:
> plot(u-s6,x=1..2):
> u7:=(4*c7*(x-1)+int(int(-4*u66,x=2..t),t=1..x))/x^2+5*
    int(t*subs(x=t,u66),t=1..x)/x^2:
> eq7:=subs(x=2,u7):
> solve(eq7=0,c7):

```

```

> u77:=subs(c7=-47904948-644445544*ln(2)^2-56836620*
  ln(2)+490164417*ln(2)^5/2+156441807*ln(2)^4/2-27046314*
  ln(2)^3+62067643777*ln(2)^6/160+1179178946951*ln(2)^7/3360,u7):
> s7:=s6+u77:
> plot(s7,x=1..2,color=green,title="figure(6)"):
> plot([u,s7],x=1..2,title="figure(7)"):
> plot(u-s7,x=1..2,title="figure(8)"):
> with(plots):
> u:=20*x*y*(x-1)*(y-1):
> f1:=plot3d(u,x=0..1,y=0..1,color=red):
> f:=40*(x^2+y^2-x-y):
> w0:=c0*(x-1)+1/(y*(y-1))*int(int(f,x=0..t),t=1..x):
> subs(x=0,w0):
> w00:=subs(c0=(10/3-20*y^2+20*y)/(y*(y-1)),w0):
> R4 := simplify(w00):
> w1 := c1*(x-1)-int(int(diff(R4,y,y),x = 0 .. t),t = 1 .. x)
  -(4*y-2)/(y*(y-1))*int(int(diff(R4,y),
  x = 0 .. t),t = 1 .. x)-2/(y*(y-1))*int(int(R4,x = 0 .. t),t = 1 .. x):
> eq1:=subs(x=0,w1):
> solve(eq1,c1):
> w11:=subs(c1=(-10/3)*1/(y*(y-1)),w1):
> u1:=y*(y-1)*simplify(w11):
> plot3d(u0+u1,x=0..1,y=0..1):
> s1:=u0+u1:
> f2:=plot3d(s1,x=0..1,y=0..1,color=yellow):
> display({f2,f1}):

```

c/ Programme Maple de l'exemple (E6)

```

> with(plots):
> u0:=((Pi^2+1)/Pi^2)*cos(y)*sin(Pi*x):
> plot3d(u0,x=0..1,y=-10..10):
> f0:=plot3d(u0,x=0..1,y=-5..5,color=yellow):
> u:=sin(Pi*x)*cos(y):
> plot3d(u,x=0..1,y=-10..10):
> g:=plot3d(u,x=0..1,y=-10..10,color=green):
> display({f0,g}):
> u1:=c1*(x-1)-int(int(diff(u0,y,y),x=0..t),t=1..x):
> eq1:=subs(x=0,u1)=0:
> solve(eq1,c1):
> u11:=subs(c1=-cos(y)*(Pi^2+1)/Pi^3,u1):
> s1:=u0+u11:
> f1:=plot3d(s1,x=0..1,y=-10..10,color=red):
> display({f1,g}):
> plot3d(s1-u,x=0..1,y=-10..10):
> u2:=c2*(x-1)-int(int(diff(u11,y,y),x=0..t),t=1..x):

```

```

> eq2:=subs(x=0,u2)=0:
> solve(eq2,c2):
> u22:=subs(c2=cos(y)*(Pi^2+1)/Pi^5,u2):
> s2:=u0+u11+u22:
> plot3d(s2,x=0..1,y=-10..10,color=red):
> f2:=plot3d(s2,x=0..1,y=-10..10,color=red):
> display({f2,g}):
> plot3d(u-s2,x=0..1,y=-10..10):

```

d/ Programme Maple de L'exemple (E7)

```

> with(plots):
> u:=20*x*y*(x-1)*(y-1):
> f1:=plot3d(u,x=0..1,y=0..1,color=red):
> f:=40*(x^2+y^2-x-y):
> w0:=c0*(x-1)+1/(y*(y-1))*int(int(f,x=0..t),t=1..x):
> subs(x=0,w0):
> w00:=subs(c0=(10/3-20*y^2+20*y)/(y*(y-1)),w0):
> R4 := simplify(w00):
> w1 := c1*(x-1)-int(int(diff(R4,y,y),x = 0 .. t),t = 1 .. x)
  -(4*y-2)/(y*(y-1))*int(int(diff(R4,y),
    x = 0 .. t),t = 1 .. x)-2/(y*(y-1))
  *int(int(R4,x = 0 .. t),t = 1 .. x):
> eq1:=subs(x=0,w1):
> solve(eq1,c1):
> w11:=subs(c1=(-10/3)*1/(y*(y-1)),w1):
> u1:=y*(y-1)*simplify(w11):
> plot3d(u0+u1,x=0..1,y=0..1):
> s1:=u0+u1:
> f2:=plot3d(s1,x=0..1,y=0..1,color=yellow):
> display({f2,f1}):

```

PERSPECTIVES

5.1 Introduction

Grâce à notre concept de série décompositionnelle d'Adomian combinée avec une décomposition en série numérique des inconnues apparaissant dans les écritures canoniques, à savoir, la dérivée $u'(b)$, pour le problème (P1), les dérivées $u'_i(b)$, $i = 1..n$, pour le problème (Q1) et la décomposition en série de fonctions de $\frac{\partial u}{\partial x}(b, y)$ pour le problème (R1), nous avons élaboré une théorie qui permet à la fois de fonder et de généraliser la méthode d'Adomian puisque nous obtenons, comme nous l'avons expliqué dans les chapitres précédents, une solution globale pour plusieurs classes de problèmes aux limites.

On peut obtenir une approximation, aussi précise que l'on veut, de la solution des équations de la forme $u - M(u) = f$ à condition que l'opérateur soit contractant, alors que jusque là, nous n'avions que des solutions locales.

Nous avons construit un schéma décompositionnel qui permet de traiter, aussi bien le cas linéaire pur que le cas non linéaire. Ce travail ouvre la voie à l'approximation analytique globale d'équations fonctionnelles comme les équations aux dérivées partielles non linéaires. Cette approche est rendue possible et efficace grâce au développement actuel du calcul formel. Des résultats récents illustrent l'étude théorique développée ici en montrant que l'on peut obtenir ainsi des approximations très précises de la solution.

Nous allons suggérer dans ce qui suit des idées pour résoudre encore certains problèmes aux limites en utilisant la technique décrite dans les chapitres précédents.

Certains de ces problèmes font actuellement l'objet de recherche dans le cadre de thèse de doctorat dans nos universités.

5.2 Cas du Laplacien dans une couronne avec les conditions aux limites de Dirichlet :

On considère le problème suivant :

trouver u solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in C_0(\varepsilon, R) \quad \varepsilon > 0, R > 0 & (1) \\ u_{/R} = u_{/\varepsilon} = 0 & .. & (2) \end{cases} \quad (5-2-1)$$

où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et $C_0(\varepsilon, R)$ est la couronne définie par:

$$\varepsilon < \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

La fonction

$$f : C_0(\varepsilon, R) \rightarrow \mathbb{R}$$

est supposée suffisamment régulière pour que le problème (5-2-1) admette une solution unique. La principale difficulté dans la résolution de ce problème, reste toujours la recherche de la forme canonique qui prend en charge les conditions aux limites (1) et (2). La nature de la géométrie de la couronne nous suggère le passage en coordonnées polaires. On s'intéresse, à la résolution du problème (5-2-1), écrit sous la forme suivante : *Proposition (5-2-1)*:

Le problème (5-2-1) est équivalent à:
trouver u^* solution du problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = g(r, \theta) & (1) \\ u^*_{/R} = u^*_{/\varepsilon} = 0 & (2) \end{cases} \quad (5-2-1)$$

où

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ g(r, \theta) &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ u^*(r, \theta) &= u(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ (r, \theta) &\in [\varepsilon, R] \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Nous appliquons la technique précédente avec rigueur et proposons dans un travail à paraître, une solution analytique définie dans la couronne $C_0(\varepsilon, R)$.

5.3 Cas du Laplacien dans un disque avec les conditions aux limites de Dirichlet:

La résolution numérique du problème (5-2-1) nous invite naturellement à poser le problème suivant :

trouver u solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in D(0, R) & (1) \\ u_{/R} = 0 & & (2) \end{cases} \quad (5-3-1)$$

où $D(0, R)$ est le disque unité centré en l'origine.

Ce problème équivaut encore, à chercher u^* solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = g(r, \theta) & (1) \\ u^*_{/R} = 0 & & (2) \end{cases} \quad (5-3-2)$$

Dans cette nouvelle écriture du problème, apparaît une nouvelle difficulté, les expressions $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ ne sont pas définies en $r = 0$ et cette nouvelle situation nous empêche de déterminer une forme canonique définie dans le disque $D(0, R)$. Pour contourner cette difficulté on se ramène au problème (5-2-1).

En effet, on se propose de déterminer, sur une couronne du type $C_0(\varepsilon, R)$, une solution $u_\varepsilon(r, \theta)$ qu'on approche par la solution tronquée $S_{n,\varepsilon}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{k=n} u_{\varepsilon,n}$ puis de montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ est solution de (5-3-1). Plusieurs questions restent posées pour achever la résolution de ce problème. :

5.4 Problème de Fisher :

Dans la première étape, on s'intéresse au problème défini avec les conditions aux limites homogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u(x, t)(1 - u(x, t)), & t > 0, 0 < x < l. \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l. \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (5-4-1)$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C([0, l])$.

Puis, dans la deuxième étape, au problème non homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u(x, t)(1 - u(x, t)), & t > 0, 0 < x < l. \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l. \\ u(0, t) = T_1, u(l, t) = T_2, & \text{où } (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Ce travail est l'objet d'un thème de recherche dans le cadre d'une thèse. On espère résoudre ces problèmes en combinant la méthode décrite dans cette thèse et la méthode de recollement (cf Benabidallah [9])

Bibliographie

- [1] **Abbaoui, K.** (1995) "Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine",
Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [2] **Abbaoui, K and Cherruault, Y.**(1995), "New ideas for proving convergence of decomposition methods", *Comput. Math.Appl*,
Vol. 29 No. 7, pp. 103-8.
- [3] **Abbaoui, K and Cherruault, Y. and Seng, V.** (1995), "Practical formulae for calculus of multivariable Adomian polynomials",
Math. Comput. Modelling, Vol. 22 no.1, pp.89-93.
- [4] **Abbaoui, K, Cherruault, Y.,Pujol.M.J. Himoun, N.and Grimalt, P.A.** (2001). "New formulation of Adomian method; convergence result"
Kybernetes, Vol. 30 Nos 9-10.
- [5] **Adomian, G.**(1984). "Convergent series solutions of nonlinear equations",
Comput and Appli.Math, Vol. 11 No.2.
- [6] **Adomian, G.**(1988), "Nonlinear Stochastic Systems Theory and Application to Physics", *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- [7] **Adomian, G.**(1984), "Solving Frontier Problems of Physics: the Decomposition Method", *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- [8] **Adomian, G. and Rach, R.** (1993), "Analytic solution of nonlinear boundary value problems in several dimensions by decomposition",
Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol.174.
- [9] **Benabidallah, M.**(2000), " Application de la Méthode Décompositionnelle à une Classe d'Equations Différentielles avec Conditions Initiales", *Magister thesis, usthb, Algiers*.
- [10] **Cherruault, Y.** (1998), "Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant", *Presses universitaires de France (P.U.F), Paris*.
- [11] **Cherruault, Y.**(1999), " Optimisation ' Méthodes locales et globales' "
Presses universitaires de France (P.U.F), Paris.
- [12] **Garcia Olivares, A.**(2003), " Analytical solution nonlinear partial differential equation of physics", *Kybernetes, Vol. 32 No.4, pp. 548-60*.
- [13] **Himoun, N., Abbaoui, K. and Cherruault, Y.**(1999), "New result of convergence of Adomian method", *Kybernetes, Vol. 28 No.4-5, pp. 423-9*.
- [14] **Khelifa, S. and Cherruault, Y.**(1999), " New results for Adomian method"
Kybernetes, Vol. 29 No.3, pp. 332-54.
- [15] **Ngarhasta, N., some, B., Abbaoui, K and Cherruault, Y.**(2002), "New numerical study of Adomian's method applied to a diffusion model",

Kybernetes, Vol. 31 No.1, pp. 61-75.

- [16] **Ouerdrago, R.Z., Cherruault, Y. and abbaoui, K.**(2000), "Convergence of Adomian's method applied to algebraic equations", *Kybernetes*, Vol. 29 Nos.9-10, pp. 1298-305.
- [17] **J.L.Lions.**"Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles", *Dunod. Paris (1968)*.
- [18] **E.R. Pinch.**" Optimal control and the calculus of variations", *Oxford Science Pub.(1991)*.
- [19] **J.Vignes.**"Etude et mise en oeuvre d'algorithmes de recherche d'un extremum d'une fonction de plusieurs variables"
Thèse d'Etat. Faculté des sciences de Paris.(1969)
- [20] **J.Vignes.**" Algorithmes numériques. Analyse et mise en Oeuvre"
Ed.Technip-1980.
- [21] **Breziz**, "Analyse fonctionnelle" Théorie et application.
- [22] **Cartan, H.**" Cours de calculs différentiels".
- [23] **L.Gabet**, (1996)" Modélisation mathématique et analyse numérique"
Revue Rairo,tome 30, no7.pp.796-814.
- [24] **Guellal,S.and Cherruault, Y.**" Application of decomposition method to identify the distributed parameters of an elliptical equation"
Mathematical and computer modeling, Vol 21,No4, pp 51-55 (1995).
- [25] **Bellman and Adomian,G.**" Partial Differential Equations- New Methods for their Treatment and Application", *Reidel, (1986)*.
- [26] **Benabidallah,M and Cherruault,Y.** (2004)." Application of the Adomian method for solving a class of boundary problems", *Kybernetes*, Vol 33 No.1, pp 118-132.
- [27] **Benabidallah,M and Cherruault,Y.** (2004). " Usingthe Adomian method for solving a class of boundary differential systems ", *Kybernetes*, Vol 33 No.7, pp 1185-1204.
- [28] **Benabidallah,M and Cherruault,Y.** (2004)" Solving a class of linear partial differential equations with Dirichlet-boundary conditions by the adomian method", *Kybernetes*, Vol 33 No.8,pp 1292-1311..
- [29] **Balira Ousmane KONFE** , (2005) "Nouvelles méthodes mathématiques Alienor et Adomian, pour la Biomédecine" Thèse de Doctorat, Université de Ouagadougou.