

N° d'ordre : 14/2007.M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENNE »
FACULTE DES MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : Mathématiques

Spécialité : Probabilités et Statistiques

Par : Melle BOUKERTOUTA Hanane

Sujet

**Comparaison stochastique basée sur la fonction
d'expansion**

Soutenu le : 28/06/2007, devant le jury composé de :

Mr : K. BOUKHETALA, Professeur, USTHB

Mr : A. AISSANI, Professeur, USTHB

Mr : M. BENTARZI, Professeur, USTHB

Mr : A. AKNOUCHE, Docteur, USTHB

Président

Directeur de thèse

Examineur

Examineur

Résumé

Ce mémoire a pour objectif l'étude de certains types d'ordres stochastiques de variabilité basés sur les quantiles. On s'intéresse en particulier à un ordre exploitant la fonction d'expansion (la fonction RS) mesurant l'écart entre la variable et son quantile.

Nous employons la fonction RS pour caractériser les différents types d'ordres de lois non paramétriques. Nous nous proposons de montrer le lien avec certains ordres de lois non paramétriques de fiabilité (IFR, NBUE et DMRL) et en particulier des caractérisations en terme de cet ordre de variabilité.

Nous présentons aussi le test de Kolmogorov-Smirnov de l'ordre RS et son application à des lois non paramétriques. (Détection de la propriété NBUE).

Nous terminons ce travail par une petite application, qui concerne le modèle classique du risque, nous définissons la probabilité de ruine à long terme d'une société d'assurance et établissons les bornes de cette probabilité.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, le morale et la santé pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr : A. Aissani, pour ses conseils, ses orientations et ses corrections.

Mes sincères remerciements vont aux Messieurs les membres de jury.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin surtout Hassina et Nora.

Dédicace

En cette occasion, je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon père que Dieu l'accueille en son paradis.

A ma chère mère.

A mes frères et sœurs.

A tous mes amis et collègues.

Sommaire

Sommaire

Introduction	01
---------------------------	----

Chapitre I : Généralités

1- Fonction quantile	03
1.1- Introduction	03
1.2- Définition	03
1.3- Fonction quantile d'une variable aléatoire discrète	03
1.4- Fonction quantile d'une variable aléatoire continue	04
1.5- Propriétés de la fonction quantile	04
1.6- L'application de la fonction quantile	06
2- Loi Géométrique	09
2.1- Définition	09
2.2- Propriété caractéristique de la loi Géométrique	09
3- Loi de Poisson	10
4- Processus de comptage	10
5- Processus de Poisson	10
6- Processus de Poisson composé	11
7- Les lois non paramétriques	12
7.1- Introduction	12
7.2- Loi à risque instantané monotone	12
7.3- Loi à risque moyen monotone	13
7.4- Loi du « Neuf meilleur que l'usagé »	14
7.5- Loi du « Neuf meilleur que l'usagé en moyenne »	14
7.6- Loi à « temps résiduel moyen monotone »	15

Chapitre II : Les ordres stochastique usuels

1- Introduction	16
2- Ordre stochastique ou en distribution	16
3- Ordre convexe	17

4- Ordre concave	19
5- Ordre en transformée convexe	20
6- Ordre croissant convexe (concave)	20
7- Ordre en moyenne de vie résiduelle	22
8- Ordre en taux de défaillance	23
9- Ordre dispersif	24
9.1- Définition	24
9.2- Propriétés	26
9.3- Lien entre l'ordre dispersif et les lois non paramétriques de taux de défaillance monotone	26
9.4- Lien entre l'ordre dispersif et l'ordre super additif.....	27

Chapitre III : Ordres stochastiques basés sur la fonction RS.

III.1- La fonction d'expansion (La fonction RS)

1- Définition	29
2- Estimation de la fonction RS	30
3- Propriétés de la fonction RS	31
4- Ecart à droite observé	32

III.2- Caractérisation des ordres de lois non paramétriques à l'aide de la fonction RS

1- Définition	34
2- Lien entre les ordres de lois non paramétriques et la fonction RS	35

III.3- L'ordre RS

1- Introduction	39
2- Définition	39
3- Propriétés de l'ordre RS	39
4- Lien entre l'ordre RS et les ordres stochastiques	44
4.1- Lien avec l'ordre disp	44

4.2- Lien avec l'ordre mrl	44
4.3- Lien avec l'ordre NBUE	45
4.4- Lien avec l'ordre icx	46
5- Caractérisation des classes IMRL et DMRL à l'aide de l'ordre RS	50
6- Propriétés de conservation de l'ordre RS	51

Chapitre IV : Test statistique pour l'ordre RS

Test de Kolmogorov-Smirnov pour l'ordre RS	55
--	----

Chapitre V : Application pour le calcul de la probabilité de ruine en assurance

1- Introduction	63
2- Définitions	63
3- Extensions de la modélisation	64
4- Modèle classique du risque	65
4.1- Approche mono-période	65
4.2- Approche multi-périodes	68
5- Probabilité de ruine à long terme d'une société d'assurance	69
5.1- Définition	69
5.2- Développement en somme géométrique de la probabilité de ruine	71
6- Bornes de la probabilité de ruine	72
6.1- Majoration de la probabilité de ruine	72
6.2- Le modèle de Sparre Andersen	73
6.3- Bornes IFR, DMRL et NBUE de la probabilité de ruine	73
6.4- Calcul de la borne DMRL de la probabilité de ruine	75

Conclusion	76
-------------------------	----

Bibliographie	77
----------------------------	----

Annexe	79
---------------------	----

Introduction

Introduction :

La comparaison stochastique des distributions est un domaine de recherche très important dans divers secteurs de probabilités et statistiques. Des différents types d'ordres stochastiques ont été étudiés dans la littérature.

Ces ordres sont utilisés actuellement dans divers domaines de modélisation stochastique : Analyse de survie, Files d'attente, Ordonnancement, Théorie de la décision, Economie, Gestion de stock et la théorie du risque.

Par exemple l'ordre stochastique le plus naturel pour comparer deux variables aléatoires réelles est l'ordre en distribution, cet ordre consiste à comparer point à point leurs distributions.

Une autre notion d'ordre qui est souvent utilisée pour comparer la variabilité de deux distributions est l'ordre dispersif qui est basé sur la fonction quantile.

Le quantile est une mesure de risque qui correspond à la perte maximale pour un certain pourcentage de probabilité.

Récemment, Fernandez-ponce et al (1998), et Belzunce (1999) ont proposé un nouvel ordre de variabilité basé sur la fonction d'expansion qui mesure l'écart entre la variable et son quantile. Cet ordre est appelé right spread order (l'ordre RS), l'ordre RS est également appelé excess wealth order ([08], [18]) ou Shortfall order [09].

Notre étude comporte cinq chapitres.

Le premier chapitre décrit la définition de la fonction quantile et ses propriétés, quelques lois de probabilités et les processus stochastiques, ainsi les différents types de lois non paramétriques qui sont utilisées actuellement dans divers domaine de modélisation stochastique.

Le deuxième chapitre présente la définition des ordres stochastiques usuels, l'ordre dispersif et ses propriétés.

Nous développons dans le troisième chapitre les ordres stochastiques basés sur la fonction RS, dans la première partie nous étudions la fonction RS et ses propriétés. Dans la deuxième partie nous employons la fonction RS pour caractériser les différents types d'ordres de lois non paramétriques.

Dans la troisième partie, nous présentons un nouvel ordre partiel pour comparer deux distributions de probabilités en terme de leurs dispersions et étudier ses propriétés. On se propose de montrer le lien avec certains ordres de lois non paramétriques de fiabilité (IFR, NBUE et DMRL) et en particulier des caractérisations en terme de cet ordre de variabilité.

Dans la dernière partie, nous étudions la conservation de l'ordre RS.

Nous présentons dans le quatrième chapitre le test de Kolmogorov-Smirnov pour la détection de l'ordre RS et son application à des lois non paramétriques.

Le chapitre final est consacré à une application qui concerne le modèle classique du risque, nous définissons la probabilité de ruine à long terme d'une société d'assurance, nous établissons des bornes pour cette probabilité et nous calculons la borne DMRL.

Nous terminons ce travail par une petite conclusion.

Chapitre I :

Généralités

1- Fonction quantile :

1.1- Introduction :

La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition. Quand cette fonction de répartition est strictement croissante, son inverse est défini sans ambiguïté. Mais une fonction de répartition reste constante sur tout intervalle dans lequel la variable aléatoire ne peut pas prendre de valeurs. C'est pourquoi on introduit la définition suivante.

1.2- Définition :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, et F_X sa fonction de répartition. On appelle fonction quantile de X la fonction, notée Q_X , de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, qui à $p \in]0,1[$ associe :

$$\begin{aligned} Q_X(p) &= F_X^{-1}(p) = \inf\{x : F_X(x) \geq p\} \\ &= \sup\{x : F_X(x) < p\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Par convention, on peut décider que $Q_X(0)$ est la plus petite des valeurs possibles pour X et $Q_X(1)$ est la plus grande (elles sont éventuellement infinies).

De même manière on définit :

$$\begin{aligned} Q_X^+(p) &= F_X^{-1+}(p) = \inf\{x : F_X(x) > p\} \\ &= \sup\{x : F_X(x) \leq p\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

En général nous adoptons les mêmes définitions pour les inverses t^{-1} et t^{-1+} de toute fonction t continue à droite et croissante.

1.3- Fonction quantile d'une variable aléatoire discrète :

La fonction quantile d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier, comme la fonction de répartition. Si X prend les valeurs x_k , $k = 1, 2, \dots$, rangées par ordre croissant, la fonction de répartition est égale à :

$$F_k = P[X = x_1] + \dots + P[X = x_k],$$

sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}[$. La fonction quantile vaut :

$$Q_X(p) = \begin{cases} x_1 & \text{pour } p \in]0, F_1] \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k & \text{pour } p \in]F_k, F_{k+1}] \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} \quad (1.3)$$

Par exemple, pour la loi géométrique $G(p)$, la fonction quantile est la fonction qui, pour tout $k = 1, 2, \dots$, vaut k sur l'intervalle $]1 - (1-p)^{k-1}, 1 - (1-p)^k]$.

1.4- Fonction quantile d'une variable aléatoire continue :

Plaçons nous dans le cas le plus fréquent, où la densité f_X est strictement positive sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (son support) et nulle ailleurs. Si l'intervalle est $[a, b]$, la fonction de répartition est nulle avant a , si a est fini ; elle est strictement croissante de 0 à 1 entre a et b , elle vaut 1 après b si b est fini.

Toute valeur p strictement comprise entre 0 et 1 est prise une fois et une seule par F_X .

La valeur de $Q_X(p)$ est le point x unique, compris entre a et b , tel que $F_X(x) = p$.

Calculons par exemple la fonction quantile de la loi exponentielle $\exp(\lambda)$, de fonction de répartition $(1 - e^{-\lambda x})I_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Pour tout $p \in]0, 1[$, $(1 - e^{-\lambda x}) = p \Leftrightarrow x = Q_X(p) = -\frac{1}{\lambda} \text{Log}(1 - p)$.

1.5- Propriétés de la fonction quantile :

Propriété 1 :

- 1- F_X^{-1} et F_X^{-1+} sont croissantes ;
- 2- F_X^{-1} est continue à gauche ;
- 3- F_X^{-1+} est continue à droite.

Lemme :

Pour tout réel x et un niveau de probabilité p on a :

$$1- F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x) ; \quad (1.4)$$

$$2- x \leq F_X^{-1+}(p) \Leftrightarrow \Pr[X < x] = F_X(-x) \leq p . \quad (1.5)$$

Démonstration :

La démonstration de (1) et (2) se fait de la même manière.

1)- la partie $\Rightarrow$:

Il faut montrer que : $p > F_X(x) \Rightarrow x < F_X^{-1}(p)$.

On suppose que : $p > F_X(x)$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que : $p > F_X(x + \varepsilon)$.

D'après la définition sup de $F_X^{-1}(p)$, on trouve que :

$x + \varepsilon \leq F_X^{-1}(p)$, qui implique que $x < F_X^{-1}(p)$.

Maintenant on montre la partie $\Leftarrow$ de (1). Si $p \leq F_X(x)$ alors on trouve que :

$p \leq F_X(x + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

D'après la définition inf de $F_X^{-1}(p)$, on peut conclure que $F_X^{-1}(p) \leq x + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $F_X^{-1}(p) \leq x$. Ainsi le résultat.

Propriété 2 :

Soit X une variable aléatoire, pour tout $0 < p < 1$ on a :

1- Si t est une fonction croissante et continue alors :

$$F_{t(X)}^{-1}(p) = t(F_X^{-1}(p)) ; \quad (1.6)$$

2- Si t est une fonction croissante et continue alors :

$$F_{t(X)}^{-1+}(p) = t(F_X^{-1+}(p)) . \quad (1.7)$$

Démonstration :

On montre (1) et (2) de la même manière.

1)- D'après (1.4) on a :

$$\begin{aligned}
 F_{t(x)}^{-1}(p) \leq x &\Leftrightarrow p \leq F_{t(x)}(x) \\
 &\Leftrightarrow p \leq F_X(t^{-1+}(x)) \\
 &\Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq t^{-1+}(x) \\
 &\Leftrightarrow t(F_X^{-1}(p)) \leq x.
 \end{aligned}$$

Remarque :

Les fonctions inverses de F_X et $\overline{F}_X$ sont liées par :

$$F_X^{-1}(p) = \overline{F}_X^{-1}(1-p) \text{ et } F_X^{-1+}(p) = \overline{F}_X^{-1+}(1-p) \text{ pour tout niveau de probabilité } p.$$

1.6- L'application de la fonction quantile :**1- Introduction :**

La fonction quantile est un moyen de décrire la dispersion d'une loi.

Si on réalise un grand nombre de tirages indépendants de la même loi (un échantillon), on doit s'attendre à ce qu'une proportion p des valeurs soient inférieures à $Q_X(p)$.

Une valeur importante est la médiane, $Q_X(0.5)$. Les fonctions quantiles sont souvent utilisées en statistiques. On calcule en particulier fréquemment des intervalles de dispersion, compris comme devant contenir une forte proportion des données.

2- Définition :

Soit X une variable aléatoire et α un réel compris entre 0 et 1. On appelle intervalle de dispersion de niveau $1 - \alpha$ tout intervalle de la forme:

$$[Q_X(\beta), Q_X(1 - \alpha + \beta)], \text{ avec } 0 \leq \beta \leq \alpha. \quad (1.8)$$

Selon les valeurs de β , on dit qu'un intervalle de dispersion de niveau $1-\alpha$ est :

- Unilatéral inférieur si $\beta = 0$;
- Unilatéral supérieur si $\beta = \alpha$;
- Symétrique si $\beta = \alpha/2$;
- Optimal si son amplitude est la plus courte parmi tous les intervalles de dispersion de niveau $1-\alpha$.

Une autre application importante de la fonction quantile est la méthode d'inverse qui est une méthode générale, consistant à simuler une variable aléatoire de loi quelconque.

Proposition :

Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$, Q la fonction quantile correspondante, et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. La variable aléatoire $X = Q(U)$ a pour fonction de répartition F .

Démonstration :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P[X \leq x] &= P[Q(U) \leq x] \\ &= P[\inf\{y; F(y) \geq U\} \leq x] \\ &= P[U \leq F(x)] \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Propriété :

Si la variable aléatoire X a la fonction de répartition F_X continue, alors :

$$F_X(x) \approx \text{unif}(0,1).$$

Démonstration :

Pour tout $0 < u < 1$, on a :

$$P[F_X(x) \geq u] = \Pr[X \geq F_X^{-1}(u)] = \overline{F}_X(F_X^{-1}(u)) = 1 - u.$$

On en conclut que $F_X(x) \approx \text{unif}[0,1]$.

2- Loi Géométrique : (loi du temps du premier succès)

2.1- Définition :

On introduit un temps aléatoire T , défini comme temps du premier succès dans une suite infinie d'expériences de Bernoulli, c'est-à-dire $T = \min (k : X_k = 1) = \min (k : S_k = 1)$, où $S_k = X_1 + \dots + X_k$. On calcule alors la loi de probabilité de T .

$$P(T = 1) = p$$

$$P(T = 2) = (1 - p)p$$

$$P(T = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

d'où l'on peut déduire, par exemple que :

$$P(T > k) = \sum_{j > k} P(T = j) = \sum_{j > k} (1 - p)^{j-1} p = (1 - p)^k.$$

En particulier, $P(T = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(T > k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - p)^k = 0$ si $p > 0$.

Donc $P(T < \infty) = 1$, c'est-à-dire, avec probabilité 1, le temps T est fini.

Alors on dit que T suit une loi géométrique de paramètre p où p est la probabilité de succès dans un essai. On écrit : $T \approx \text{Geom}(p)$.

T est appelé variable aléatoire géométrique.

2.2- Propriété caractéristique de la loi géométrique : « perte de mémoire »

La loi géométrique est caractérisée par une propriété très importante, la propriété « perte de mémoire », c'est-à-dire par :

$$P\left(T > j + k \middle| T > j\right) = P(T > k) \text{ pour tous les entiers } j \text{ et } k \text{ non négatifs.}$$

Ainsi sachant qu'il n'y a pas eu de succès jusqu'au temps j (inclus), la probabilité qu'il y ait un succès dans les k essais suivants est indépendante de j . En particulier, cette probabilité est identique à celle de n'avoir aucun succès dans les k premiers essais.

Pour vérifier cette propriété, on utilise l'identité $P(T > k) = (1 - p)^k$.

3- Loi de poisson :

La fonction de probabilité de la loi de Poisson est de la forme :

$$P_n = P(N = n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!, \quad n = 0, 1, \dots, \text{ où } \lambda > 0 \text{ est l'espérance de } N.$$

Si N suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $E(N) = \text{Var}(N) = \lambda$.

La loi de Poisson est souvent utilisée en assurances pour modéliser la distribution du nombre de sinistres.

Le théorème suivant donne une propriété importante de cette distribution.

Théorème :

Soient $N_1, N_2, \dots, N_m$ sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Alors $N = N_1 + N_2 + \dots + N_m$ a une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$.

En d'autres mots, la loi de Poisson est fermée par convolution.

4- Processus de comptage :

Définition :

On appelle processus de comptage (counting process) un processus stochastique N_t dont les trajectoires sont des fonctions en escalier avec des sauts de hauteur 1. On suppose que $N_0 = 0$. Si ce processus compte par exemple le nombre de sinistres dans $[0, t]$, les durées inter-sinistres $T_i = t_i - t_{i-1}$ forment alors une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, alors ce processus appelé Processus de renouvellements.

5- Processus de Poisson :

Lorsque les variables aléatoires T_i sont exponentielles, on parle de processus de Poisson. C'est-à-dire le processus qui compte le nombre de sinistres avant t est un processus de Poisson.

Définition équivalente :

Un processus de comptage est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si il possède des accroissements indépendants et stationnaires tels que :

$$P(N_{N+h} - N_t = k) = \frac{(\lambda h)^k}{k!} \exp(-\lambda h).$$

6- Processus de Poisson composé :

Définition :

Soient N_t un processus de Poisson de paramètre λ et une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, \dots$ indépendante du processus de Poisson.

Le processus : $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ est appelé processus de Poisson composé.

On va maintenant montrer comment déterminer la forme explicite de la distribution de S à partir de celles de N et de X_i .

Si F_X désigne la distribution des variables X , alors F_X^{*n} désigne la loi de la somme

$X_1 + \dots + X_n$, N variable de Poisson de paramètre λ et $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

Par définition on a :

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P(S \leq s) = P(X_1 + \dots + X_N \leq s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_n \leq s / N = n) P(N = n) \\ &\quad \text{(par la loi des probabilités totales)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_n \leq s) P(N = n) \\ &\quad \text{(car les } X_i \text{ et } N \text{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

Comme les variables $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes et identiquement distribuées, on en conclut que :

$$F_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(s) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(s) \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda).$$

Où F_X^{*n} représente la n-ième convolution de la fonction de répartition F_X de X , à savoir $F_X^{*n} = F_{X_1} * \dots * F_{X_n} = F_{X_1 + \dots + X_n}$.

Lorsque $n = 0$, on a :

$$F_X^{*0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0; \\ 1 & \text{si } s \geq 0. \end{cases}$$

7- Les lois non paramétriques :

7.1- Introduction :

Les variables aléatoires considérées jusqu'à présent suivaient des lois que l'on peut qualifier de paramétriques au sens où l'allure de la distribution est connue, mais qu'elle dépend de certains paramètres. Par exemple, la loi exponentielle dépend d'un paramètre λ , la loi normale dépend de deux paramètres m et σ^2 . Les distributions considérées ici n'ont pas une distribution ayant une certaine allure, mais regroupent des familles de distributions ayant en commun une certaine propriété plutôt qualitative. Ces lois ont été introduites plutôt en théorie de fiabilité et c'est pourquoi nous reviendrons souvent sur ce type d'interprétation. Pour des raisons de commodité, nous utiliserons également la variable t plutôt que x , pour souligner le fait que cette variable est temporelle ; de plus nous travaillerons plutôt avec la fiabilité $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ au lieu de $F(t)$.

7.2- Loi à risque instantané monotone :

1- Définition :

Une variable aléatoire non négative de fonction de répartition $F(x)$ suit une loi de type IFR (Increasing failure Rate = taux de défaillance croissant) si le risque instantané

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \text{ est monotone croissant.}$$

Tel que : $r(t)$ représente le risque de panne ou taux de défaillance de l'élément (ou du système).

Une variable aléatoire positive suit une loi de type DFR (Decreasing failure Rate = taux de défaillance décroissant) si le risque instantané est décroissant.

Notons que le risque instantané $r(t)$ n'existe pas toujours : cela dépend de l'existence de la densité de probabilité $f(t)$. Dans ce cas, et pour de telles distributions, la loi IFR (DFR) est définie autrement. Une distribution $F(\cdot)$ est dite IFR (DFR) si et seulement si

$$\text{la probabilité conditionnelle } \bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \text{ est monotone décroissante (croissante)}$$

en t , pour tout $x \geq 0$.

2- Critères d'appartenance à la classe IFR :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1- F est IFR .
- 2- Le risque est monotone croissant lorsque la densité existe.
- 3- La fonction $\text{Log } \bar{F}(t)$ est concave sur $\{t : \bar{F}(t) > 0\}$.
- 4- Le risque cumulé $\Lambda(t) = -\text{Log } \bar{F}(t)$ est convexe sur $\{t : \bar{F}(t) > 0\}$.
- 5- $\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$ est monotone décroissante en $t \geq 0$.

7.3- Loi à risque moyen monotone :

Notons : $\Lambda(t) = \int_0^t r(x)dx$ qui est le risque cumulé entre les instants $t = 0$ et t .

1- Définition :

Une variable aléatoire X ou sa distribution F est dite IFRA (DFRA) si et seulement si pour tout $t > 0$ le risque moyen sur l'intervalle $[0, t]$, $\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{-\text{Log } \bar{F}(t)}{t}$ est croissant (décroissant) en $t \geq 0$.

2- Critères d'appartenance à la classe IFRA :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1- F est IFRA.
- 2- $\bar{F}(at) \geq [\bar{F}(t)]^a \quad \forall a \in [0,1] \text{ et } t \geq 0$.
- 3- $\frac{1}{t} \int_0^t r(u)du = \frac{\Lambda(t)}{t}$ est croissante en t .
- 4- $[\bar{F}(t)]^{\frac{1}{t}}$ est décroissante.

7.4- Loi du « Neuf meilleur que l'usagé » :

1- Définition :

La variable aléatoire positive X est NBU si $F(x+y) \leq F(x)F(y)$, pour $x, y \geq 0$.

La condition ci-dessus s'écrit aussi $\bar{F}_x(y) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \leq \bar{F}(y)$. En termes de fiabilité la propriété NBU signifie que la fiabilité d'un élément usagé d'âge x est plus petite que celle d'un élément neuf c'est-à-dire d'âge $x = 0$.

La variable aléatoire positive X est NWU si $F(x+y) \geq F(x)F(y)$, pour $x, y \geq 0$.

2- Critères d'appartenance à la classe NBU :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1- F est NBU.
- 2- $\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \leq \bar{F}(x)$ pour t, x positifs.
- 3- $F(x+y) \leq F(x)F(y)$, $\forall x, y \geq 0$.
- 4- La fonction $\Lambda(t) = -\log \bar{F}(t)$ est super-additive, c'est-à-dire :
 $\Lambda(t+x) \geq \Lambda(t) + \Lambda(x)$ pour tout t, x positifs.

7.5- Loi du « Neuf meilleur que l'Usagé » en moyenne : (NBUE)

1- Définition :

Une variable X de loi F est dite NBUE si : $E(X_t) \leq E(X)$.

En d'autres termes, la durée de vie moyenne résiduelle d'un élément d'âge t est plus petite que celle d'un élément neuf (d'âge $t = 0$).

Une variable X de loi F est dite NWUE si : $E(X_t) \geq E(X)$.

2- Critères d'appartenance à la classe NBUE :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1- F est NBUE.
- 2- $E(X_t) \leq E(X)$, $\forall t, 0 < t < \infty$.
- 3- La pseudo-fiabilité est inférieure à la fiabilité, c'est à dire $G(t) \leq \bar{F}(t)$ pour tout t positif, où G est définie par : $G(t) = \frac{1}{m} \int_t^{\infty} \bar{F}(u) du$ et $m = E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx$.
- 4- La fiabilité $\bar{F}$ vérifie l'inégalité : $\int_0^{\infty} \bar{F}(t+u) du \leq m \bar{F}(t)$.

7.6- Loi à « Temps résiduel moyen monotone » :

1- Définition :

Une variable aléatoire suit une loi DMRL (Decreasing Mean Residual Life = Temps résiduel moyen décroissant) (IMRL (Increasing Mean Residual Life = Temps résiduel moyen croissant)) si et seulement si : $u(t)$ est décroissante (croissante) en t , tel que : $u(t)$ est la fonction de vie moyenne résiduelle de la variable aléatoire.

2- Propriété :

Si X est DMRL et Y IFR alors : $X+Y$ est DMRL.

Propriétés :

1- $IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU \Rightarrow NBUE$

2- $DFR \Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU \Rightarrow NWUE$

Cette chaîne d'implications doit être comprise au sens suivant. Par exemple, $IFR \Rightarrow IFRA$ signifie que la classe des distributions de type IFR est contenue dans la classe des distributions de type IFRA. Dans la littérature et du point de vue de l'interprétation, l'implication est comprise au sens où si F possède la propriété (de vieillissement) IFR, alors elle possède également la propriété IFRA.

Chapitre II :

Les ordres stochastiques

usuels

1- Introduction :

D'une manière générale, on appelle ordre stochastique un ordre partiel défini sur un espace des mesures de probabilité.

Relation d'ordre : Soit $D = \{a, b, c, \dots\}$ un ensemble d'éléments ; Une relation binaire $<$ sur D . Nous dirons que c'est un ordre partiel (certains parlent de pré ordre), si elle est réflexive, transitive et anti-symétrique.

2- Ordre Stochastique ou en distribution :

1- Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de fonctions de répartition F et G respectivement, alors $X \leq_d Y \Leftrightarrow F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (2.1)

En termes de valeurs extrêmes, $X \leq_d Y \Leftrightarrow \bar{F}(x) \leq \bar{G}(x) \quad \forall x$ (en d'autres termes X a moins de chances que Y de prendre une grande valeur x , et ce pour tout x).

On dira indifféremment $X \leq_d Y$ (X inférieur à Y en distribution) et on note parfois $F \leq_d G$. Cet ordre est parfois appelé ordre stochastique (dominance stochastique d'ordre 1 et noté $\leq_{st}$ ou $\leq_{FSD}$).

2- Caractérisation bivariée de l'ordre stochastique :

Soit la classe de fonctions bivariées :

$$\Xi_{st} = \{ \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \phi(x, y) \text{ est croissante en } x \text{ et décroissante en } y \}.$$

Théorème II.1 : [Réf 23]

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors : $X \leq_{st} Y$ si et seulement si :

$$\phi(X, Y) \leq \phi(Y, X) \quad \forall \phi \in \Xi_{st}.$$

3- Propriétés :

a- Si $X \leq_{st} Y$ et g est une fonction croissante (décroissante) alors $g(X) \leq_{st} (\geq_{st}) g(Y)$;

b- Soient X et Y deux v.a. ≥ 0 , alors $X \leq_{st} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ (avec égalité si et seulement si : $F =_{st} G$);

De plus, lorsque l'espérance existe $X \leq_{st} Y \Rightarrow E(X^k) \leq E(Y^k)$, ($k \geq 0$) et

$$X \leq_{st} Y \Rightarrow E(X^k) \geq E(Y^k), \quad (k < 0) ;$$

c- Soient $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$ des suites (indépendantes) de variables aléatoires

indépendantes, et soit $\Psi : IR^m \rightarrow IR$ une fonction croissante, alors :

$$X_i \leq_{st} Y_i, \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow \Psi(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq_{st} \Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_m). \quad \text{En particulier, } \leq_{st}$$

est stable par convolution, c'est-à-dire : $X_i \leq_{st} Y_i \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow \sum_{i=1}^m X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^m Y_i$. Et

pour les statistiques d'ordre $X_i \leq_{st} Y_i \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow X_{(i)} \leq_{st} Y_{(i)} \quad \forall i = \overline{1, m}$.

d- Cas de sommes aléatoires de termes. Si M et N sont des variables entières telles que

$$M \leq_{st} N, \quad X_i \leq_{st} Y_i, \quad \forall i, \text{ alors } \sum_{i=1}^M X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Cette propriété est particulièrement utilisée pour des sommes géométriques qui se rencontrent dans de nombreux problèmes.

e- Si $X \leq_{st} Y$ et $EX = EY$ alors : $X =_{st} Y$;

f- Si $X \leq_{st} Y$ et si $E[f(X)] = E[f(Y)]$ pour toute fonction f strictement croissante, alors :

$$X =_{st} Y.$$

3- Ordre convexe :

L'ordre convexe est encore appelé parfois ordre de variabilité. Il y a lieu d'être prudent en manipulant ce type d'ordre car il est interprété de différentes manières dans la littérature. C'est dû entre autres à la diversité d'interprétation de la notion de variabilité.

1- Définition :

Nous dirons que la variable X est inférieure à la variable Y en ordre convexe, noté $X \leq_{cx} Y$, si et seulement si $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ pour toute fonction $f: IR \rightarrow IR$ convexe.

(2.2)

Grossièrement parlant, les fonctions convexes sont des fonctions qui prennent leur (relativement) grandes valeurs dans les domaines de la forme $[-\infty, a] \cup [b, +\infty]$ pour $a < b$. Par conséquent, si l'inégalité ci-dessus a lieu, alors Y a plus de chances de prendre des valeurs « extrêmes » que X. On peut dire aussi que Y est « plus variable » que X. L'ordre convexe est donc un ordre de variabilité, bien que ce terme soit réservé à un autre ordre plus particulier. On note également parfois, que dans l'inégalité $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ il est suffisant de considérer des fonctions f convexes uniquement sur l'union des supports de X et Y.

2- Caractérisation bivariée de l'ordre convexe :

Soit la classe de fonctions bivariées :

$$\Xi_{cx} = \{ \phi: IR^2 \rightarrow IR : \phi(x, y) - \phi(y, x) \text{ est convexe en } x \text{ pour tout } y \}.$$

Théorème II.2 : [Réf 23]

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors : $X \leq_{cx} Y$ si et seulement si :

$$E[\phi(X, Y)] \leq E[\phi(Y, X)] \quad \forall \phi \in \Xi_{cx}.$$

3- Propriétés :

1- Si $X \leq_{cx} Y$, alors

a- $E(X) \leq E(Y)$;

b- $Var(X) \leq Var(Y)$;

c- $E[(X-a)^+] \leq E[(Y-a)^+], \quad \forall a$;

d- $E[(a-X)^+] \leq E[(a-Y)^+], \quad \forall a$;

e- $\int_x^\infty \bar{F}(u) du \leq \int_x^\infty \bar{G}(u) du \quad \forall x$;

f- $\int_{-\infty}^x F(u) du \leq \int_{-\infty}^x G(u) du \quad \forall x$.

On suppose partout que les espérances existent.

g- De plus, si $E(X)=E(Y)$ et $X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \int_x^\infty \bar{F}(u) du \leq \int_x^\infty \bar{G}(u) du \quad \forall x$;

h- Si $E(X)=E(Y)$, alors $X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow E|X-a| = E|Y-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

2- l'ordre convexe satisfait les propriétés suivantes :

a- $X \leq_{cx} Y \Rightarrow -X \leq_{cx} -Y$;

b- L'ordre $\leq_{cx}$ est stable par convolution i.e. si $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$ sont des suites

indépendantes de v.a, alors $X_i \leq_{cx} Y_i \quad \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \sum_{i=1}^m X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^m Y_i$;

c- Il est stable par sommation aléatoire, c'est-à-dire : si M et N sont des variables entières telles que $M \leq_{cx} N$, $X_i \leq_{cx} Y_i$, $\forall i$, alors $\sum_{i=1}^M X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^N Y_i$;

d- Si X est une variable aléatoire de moyenne finie, alors $X + E(X) \leq_{cx} 2X$;

e- Si X et Y deux variables aléatoires indépendantes de moyennes finies avec : $E(Y)=a$ alors : $aX \leq_{cx} YX$;

f- Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de moyennes finies avec $E(Y)=0$, alors $X \leq_{cx} X+Y$.

4- Ordre concave :

De la même manière, on peut définir l'ordre concave.

1- Définition :

Nous dirons que la variable X est inférieure à la variable Y en ordre concave, noté

$X \leq_{cv} Y$, si et seulement si $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concave. (2.3)

2- Propriétés :

1- $X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow Y \leq_{cv} X$.

2- Par conséquent, toutes les propriétés sur l'ordre convexe peuvent être transposées à l'ordre concave par changement du sens de l'inégalité. Il n'est pas très utile d'avoir une discussion séparée sur l'ordre concave à l'exception peut être des cas où cela peut présenter un intérêt particulier.

5- Ordre en transformée convexe :

Définition :

On dit que X est inférieure à Y en ordre transformée convexe (noté $\leq_c$), si et seulement si : $G^{-1}F(x)$ est convexe en x sur le support de F . (2.4)

6- Ordre croissant convexe (concave):

1- Définition :

Nous dirons que la variable X est inférieure à la variable Y en ordre croissant convexe, noté $X \leq_{icx} Y$ (respectivement $X \leq_{icv} Y$), si et seulement si $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante convexe (respectivement concave) (si les espérances existent). (2.5)

Pour faire le lien avec les ordres introduits précédemment, on peut dire, grossièrement parlant que X est à la fois « plus petite » et « moins variable » que Y dans un certain sens stochastique. De la même manière on peut donner un sens stochastique à l'ordre concave : si $X \leq_{icv} Y$ alors X est à la fois « plus petite » et « plus variable » que Y .

2- Caractérisation bivariée de l'ordre croissant convexe (concave) :

Soit la classe de fonctions bivariées $\Xi_{icx}(\Xi_{icv}) = \{ \phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \phi(x, y) - \phi(y, x) \text{ est croissante convexe (concave) en } x \text{ pour tout } Y \}$.

Théorème II.3 : [Réf 23]

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors : $X \leq_{icx} Y$ ($X \leq_{icv} Y$) si et seulement si : $E[\phi(X, Y)] \leq E[\phi(Y, X)] \quad \forall \phi \in \Xi_{icx}(\Xi_{icv})$.

3- Propriétés :

1- $X \leq_{icx} Y$ implique :

a- $E(X) \leq E(Y)$;

b- $E[(X - a)^+] \leq E[(Y - a)^+] \quad \forall a \in \mathbb{R}$;

$$c- \int_x^\infty \bar{F}(u)du \leq \int_x^\infty \bar{G}(u)du \quad \forall x \in IR$$

2- De la même manière pour l'ordre croissant concave, l'inégalité $X \leq_{icv} Y$ implique :

$$a- E(X) \leq E(Y) ;$$

$$b- E[(X-a)^-] \leq E[(Y-a)^-] \quad \forall a \in IR; \text{ où } a^- = a \text{ si } a \leq 0 \text{ et } a^- = 0 \text{ si } a > 0$$

$$c- \int_{-\infty}^x F(u)du \geq \int_{-\infty}^x G(u)du \quad \forall x \in IR.$$

d- Soient X et Y deux variables aléatoires, alors : $X \leq_{icx} Y \Leftrightarrow -X \geq_{icv} -Y$ et

$$X \leq_{icv} Y \Leftrightarrow -X \geq_{icx} -Y ;$$

e- Si $X \leq_{icx} Y$ ($X \leq_{icv} Y$) et g est une fonction croissante convexe, alors

$$g(X) \leq_{icx} (\leq_{icv}) g(Y) ;$$

f- Si M et N sont des variables entières telles que $M \leq_{icx} (\leq_{icv}) N, X_i \leq_{icx} (\leq_{icv}) Y_i, \forall i,$

$$\text{alors : } \sum_{i=1}^M X_i \leq_{icx} (\leq_{icv}) \sum_{i=1}^N Y_i .$$

Notons que l'ordre croissant convexe est connu dans la théorie de l'économie comme la seconde dominance stochastique d'ordre 2. $X \leq_{icx} Y \Leftrightarrow F \leq_{icx} G \Leftrightarrow G \text{ SSD } 2 \text{ } F$.

Si X (ou F) est plus petit que Y (ou G) au sens de l'ordre $\leq_{icx}$, alors G (ou Y) domine X et on note $G \text{ SSD } 2 \text{ } F$. La première dominance d'ordre 2 est réservée à l'ordre croissant concave $X \leq_{icv} Y \Leftrightarrow F \leq_{icv} G \Leftrightarrow G \text{ SSD } 1 \text{ } F$. Ainsi, plus l'ordre de dominance est élevé, plus la comparaison est faible car restreint à une classe plus petite de fonctions.

Nous avons vu que l'ordre croissant convexe peut-être caractérisé de la manière suivante : $X \leq_{icx} Y \Leftrightarrow E[(X-t)^+] \leq E[(Y-t)^+] \quad \forall t \in IR$.

Pour cette raison, notamment en théorie de fiabilité, on appelle $\leq_{icx}$ l'ordre en moyenne de durée vie résiduelle. Si $X \leq_{icx} Y$, on dit que X est plus petit que Y en moyenne, ou en moyenne de vie résiduelle. Par analogie, l'ordre $\leq_{icv}$ s'appelle ordre en durée de vie moyenne écoulée.

7- Ordre en moyenne de vie résiduelle :

Soit X une variable aléatoire de fonction de survie (la fiabilité) $\bar{F}$ et de moyenne finie μ , la fonction de vie moyenne résiduelle de X est définie par :

$$\mu(t) = \begin{cases} E\{X\} - E\{X-t / X > t\} & \text{Si } t < t^* \text{ (} t^* = \sup\{t : \bar{F}(t) > 0\} \text{)} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

En particulier si X une variable aléatoire positive alors : $\mu(0) = \mu = E\{X\}$, et si $t^* = \infty$,

$$\mu(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)}.$$

La fonction $\mu(0)$: est la fonction mrl d'un certain variable aléatoire $\geq$ de distribution absolument continue si et seulement si :

- 1- $0 \leq \mu(t) < \infty, \forall t \geq 0$;
- 2- $\mu(0) > 0$;
- 3- μ continue ;
- 4- $\mu(t) + t$ croissant sur $[0, +\infty]$;
- 5- Si $\exists t_0$ tel que : $\mu(t_0) = 0$ alors $\mu(t) = 0, \forall t \geq t_0$,

s'il n'existe pas t_0 avec $\mu(t_0) = 0$, alors : $\int_0^\infty \frac{1}{\mu(t)} dt = \infty$.

Plus la fonction mrl est petite plus X est petite dans un certain sens stochastique.

1- Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de vie moyennes résiduelles μ et l respectivement tel que : $\mu(t) \leq l(t)$. (2.6)

Alors X est inférieure à Y en ordre moyenne de vie résiduelle, et on note $X \leq_{mrl} Y$.

2- Propriétés :

1- On peut dire que : $X \leq_{mrl} Y$ si et seulement si :

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(u) du}{\int_t^\infty \bar{G}(u) du} \text{ décroissante en } t, \left\{ t : \int_t^\infty \bar{G}(u) du > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \bar{G}(t) \int_t^\infty \bar{F}(u) du \leq \bar{F}(t) \int_t^\infty \bar{G}(u) du \text{ pour tout } t.$$

$$\Leftrightarrow \frac{E[(X-t)^+]}{E[(Y-t)^+]} \text{ décroissante en } t, \left\{ t : E[(Y-t)^+] > 0 \right\}.$$

2- Si X est DMRL et a constante ≤ 1 alors : $aX \leq_{mrl} X$;

3- Si X est DMRL $\Leftrightarrow X_t \geq_{mrl} X_{t'}, \forall t \leq t'$

$$\Leftrightarrow X + t \leq_{mrl} X + t' ;$$

8- Ordre en taux de défaillance :

Soit X une variable aléatoire non négative de distribution absolument continue F, le taux de défaillance de X est défini par :

$$r(t) = \left(\frac{d}{dt} \right) (-\log(1 - F(t))) .$$

Le taux de défaillance peut être exprimé par :

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{t < X \leq t + \Delta t / X > t\}}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, t \geq 0$$

tel que : $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ la fonction de survie ;

et $f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right) F(t)$ la densité.

1- Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives, de fonctions de répartition absolument continues et de taux de défaillances r et q respectivement tel que :

$$r(t) \geq q(t), t \geq 0. \quad (2.7)$$

Alors X est inférieure à Y en ordre de taux de défaillance et on note : $X \leq_{hr} Y$.

2- Caractérisation bivariée de l'ordre en taux de défaillance :

Soit la classe de fonctions bivariées $\Xi_{hr} = \{ \phi : IR^2 \rightarrow IR : \phi(x, y) \text{ est croissante en } x, \text{ pour tout } Y \text{ sur } \{x \geq y\} \text{ et décroissante en } y \text{ pour tout } x, \text{ sur } \{y \geq x\} \}$.

Théorème II.4 : [Réf 23]

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors : $X \leq_{hr} Y$ si et seulement si :

$$\phi(X, Y) \leq_{st} \phi(Y, X) \quad \forall \phi \in \Xi_{hr}.$$

3- Propriétés :

a- Si $X \leq_{hr} Y$ et g est une fonction croissante (décroissante), alors :

$$g(X) \leq_{hr} (\geq_{hr}) g(Y) ;$$

b- Si X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement, et si $X \leq_{hr} Y$, alors : $\overline{F}(t) \leq \overline{G}(t)$ pour tout t.

9- Ordre dispersif :

9.1- Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement, et soient Q_X et Q_Y les fonctions quantiles associées à F et G respectivement : alors si :

$$Q_X(q) - Q_X(p) \leq Q_Y(q) - Q_Y(p) \text{ pour } 0 < p < q < 1. \quad (2.8)$$

On dit que X est inférieure à Y en ordre dispersif (X est moins dispersée que Y), et on note cet ordre par : $X \leq_{disp} Y$.

Ceci signifie que la différence entre deux quantiles quelconque de F est plus petite que la différence entre les quantiles correspondants de G.

Une définition équivalente de $X \leq_{disp} Y$ est que : $Q_Y(F(x)) - x$ est croissante en x.

L'ordre dispersif peut être exprimé en terme de taux de défaillance (le risque) s'il existe, soient $r_X(\cdot)$ et $r_Y(\cdot)$ les taux de défaillance de X et Y respectivement, alors :

$$X \leq_{disp} Y \text{ si et seulement si : } r_X(Q_X(p)) \leq r_Y(Q_Y(p)) \text{ pour } p \in [0,1].$$

Une condition de $X \leq_{disp} Y$ est que : $\text{var}(X) \leq \text{var}(Y)$ et $E[|X_1 - X_2|] \leq E[|Y_1 - Y_2|]$ où $X_1, X_2 (Y_1, Y_2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes de $X (Y)$.

Proposition : [21]

$X \geq_{disp} Y$ si et seulement si la variable aléatoire $(X - x_p)^+$ est stochastiquement plus grande que la variable aléatoire $(Y - y_p)^+$ pour tout $0 < p < 1$, où :

$$x_p = Q_X(p) \text{ et } (X - x_p)^+ = \max \{X - x_p, 0\}$$

Démonstration :

On suppose que $Y \leq_{disp} X$, et on fixe un $t > 0$.

Soit $F_X(x_p + t) = q$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x_p + t) &= F_X(x_q) \\ &= F_Y(y_q) \\ &= F_Y(y_p + (y_q - y_p)) \\ &\leq F_Y(y_p + (x_q - x_p)) \quad (\text{d'après (2.8)}) \\ &\leq F_Y(y_p + t). \end{aligned}$$

Car : $x_q \leq x_p + t$ d'après la définition de x_q .

On sait que : $P[(X - x_p)^+ \leq t] = F_X(x_p + t)$. Ainsi le résultat.

Réciproquement, on suppose :

$$F_X(x_p + t) \leq F_Y(y_p + t), \quad 0 < p < 1.$$

Pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x_p + (y_q - y_p)) &\leq F_Y(y_p + (y_q - y_p)) \\ &= F_Y(y_q) = F_X(x_q). \end{aligned}$$

Car $x_p + y_q - y_p \leq x_q$, pour tout $0 < p < q < 1$.

9.2- Propriétés :

1- Soit X une variable aléatoire alors :

$$X \leq_{disp} aY \text{ quand } a \geq 1.$$

2- Soient X et Y deux variables aléatoires, alors :

$$X \leq_{disp} Y \Leftrightarrow -X \leq_{disp} -Y.$$

3- La variable aléatoire X satisfait $X \leq_{disp} X + Y$ pour chaque variable aléatoire Y indépendante de X si et seulement si : X a la densité log concave.

4- La variable aléatoire X est dispersif si et seulement si : X a la densité log concave.

9.3- Lien entre l'ordre dispersif et les lois non paramétriques de taux de défaillance monotone :

Dans cette partie, on présente le lien entre l'ordre dispersif et les lois non paramétriques IFR et DFR. On suppose que les fonctions de répartition F et G sont continues et strictement croissantes sur leurs supports $[0, \infty]$, et $F(0) = G(0) = 0$.

On note par : $\bar{F}(x/t) = \frac{1 - F(t+x)}{1 - F(t)}$, $x \geq 0, t \geq 0$: la fiabilité conditionnelle d'un

élément d'âge t, si F sa loi non paramétrique.

Et $\bar{G}(x/t) = \frac{1 - G(t+x)}{1 - G(t)}$. F est IFR (DFR) si $\bar{F}(x/t)$ est décroissante (croissante) en $t \geq 0$

pour tout $x \geq 0$.

Théorème II.5 : [Réf 02]

Si $\bar{F}(x/t) \leq \bar{G}(x/t)$ pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, et F ou G est DFR, alors : $F <_{disp} G$.

Démonstration :

On suppose que G est DFR,

$\bar{F}(x/t) \leq \bar{G}(x/t)$ pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$ implique : $F(x) \geq G(x)$ pour $x \geq 0$.

$$\text{Ainsi } F^{-1}G(x) \leq x \leq G^{-1}F(x), \quad x \geq 0. \quad (2.9)$$

Comme G est DFR, (2.9) implique :

$$\bar{F}(x/t) \leq \bar{G}(x/t) \leq \bar{G}\left(x/G^{-1}F(t)\right), \quad x \geq 0, t \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F(x+t) \geq \overline{G}(G^{-1}F(t)+x), \quad x \geq 0, t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow G^{-1}F(x+t) - (x+t) \geq G^{-1}F(t) - t, \quad x \geq 0, t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow G^{-1}F(x) - x \text{ est croissante en } x \geq 0 \Leftrightarrow F <_{\text{disp}} G.
\end{aligned}$$

La preuve est semblable si on suppose que F est DFR.

Théorème II.6 : [Réf 02]

Si $F <_{\text{disp}} G$ et F ou G est IFR, alors : $\overline{F}\left(\frac{x}{t}\right) \leq \overline{G}\left(\frac{x}{t}\right)$ pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$.

Démonstration :

On suppose que G est IFR.

$F <_{\text{disp}} G \Leftrightarrow G^{-1}F(x) - x$ est croissante en x

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow G^{-1}F(x+t) \geq G^{-1}F(t) + x, \quad x \geq 0, t \geq 0 \\
&\Leftrightarrow F(x+t) \geq G(G^{-1}F(t) + x), \quad x \geq 0, t \geq 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Comme $F <_{\text{disp}} G$ implique (2.9), et G est IFR, alors d'après (2.10) on a :

$$\frac{1 - G(t+x)}{1 - G(t)} \geq \frac{1 - G(G^{-1}F(t) + x)}{1 - G(G^{-1}F(t))} \geq \frac{1 - F(t+x)}{1 - F(t)}, \quad x \geq 0, t \geq 0.$$

C'est à dire $\overline{F}\left(\frac{x}{t}\right) \leq \overline{G}\left(\frac{x}{t}\right)$ pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Ainsi le résultat.

La preuve est semblable si on suppose que F est IFR.

9.4- Lien entre l'ordre dispersif et l'ordre super additif :

Définition :

F est dite inférieure à G en ordre super additif (on note : $F <_{su} G$) si et seulement si :

$$G^{-1}F(x+y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y) \text{ pour tout } x, y \in S_F. \tag{2.11}$$

(Tel que S_F : le support de F)

Théorème II.7 : [Réf 01]

Si $F <_{su} G$ et $F <_{st} G$ alors : $F <_{disp} G$.

Démonstration :

On suppose que $F <_{su} G$, alors, $G^{-1}F(x+y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y)$ pour tout $x, y \in S_F$
comme $F <_{st} G$ implique $G^{-1}F(x) \geq x$, alors :

$$\begin{aligned} G^{-1}F(x+y) &\geq G^{-1}F(y) + x, & x, y \in S_F \\ \Leftrightarrow G^{-1}F(x+y) - (x+y) &\geq G^{-1}F(y) - y, & x, y \in S_F \\ \Leftrightarrow G^{-1}F(x) - x &\text{ est croissante en } x \geq 0 \Leftrightarrow F <_{disp} G. \end{aligned}$$

Corollaire : [Réf 01]

Si $\overline{F}\left(\frac{x}{t}\right) \leq \overline{G}\left(\frac{x}{t}\right)$ pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$ et $F <_{su} G$, alors : $F <_{disp} G$

Lemme : [Réf 01]

Si $F <_{su} G$, alors $\left(\frac{d}{dx}\right)G^{-1}F(x) \geq \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{G^{-1}F(y)}{y}\right)$ pour tout $x \in S_F$.

Démonstration :

On sait que : $F <_{su} G \Leftrightarrow G^{-1}F(x+y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y)$ pour tout $x, y \in S_F$

$$\text{alors : } \frac{G^{-1}F(x+y) - G^{-1}F(x)}{y} \geq \frac{G^{-1}F(y)}{y} \quad (2.12)$$

Prenant la limite des deux côtés de (2.12) quand y tend vers 0, alors on trouve le résultat.

Chapitre III :
Les ordres stochastiques
basés sur la fonction
d'expansion

III.1- La fonction d'expansion (La fonction RS) : (Right spread function or the excess wealth transform)

1- Définition :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et de moyenne finie μ_F .

La fonction RS de X est définie par :

$$\begin{aligned} S_X^+(p) &= E[(X - Q_X(p))^+] \\ &= E[\max\{X - Q_X(p), 0\}] \\ &= \int_{Q_X(p)}^{\infty} \bar{F}_X(t) dt. \end{aligned}$$

(3.1)

Où : $\bar{F}_X = 1 - F$: fonction de survie de X (La fiabilité);

et $Q_X(p)$: fonction quantile de X.

On dit que S_X^+ la fonction RS de la variable aléatoire X. la fonction RS est croissante et si

$\mu_F < \infty$, et X une variable aléatoire positive alors sa limite est μ_F quand $p \rightarrow 0$.

La fonction RS d'une variable aléatoire est liée à sa fonction moyenne de vie résiduelle, qui est définie par :

$$u_F(x) = E[X - x / X > x] = \frac{\int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(x)}.$$

Remarques :

1- En théorie de fiabilité et analyse de survie on utilise la fonction :

$$T_X(p) = 1 - S_X^+(p) = \int_0^{Q_X(p)} \bar{F}(x) dx, \text{ pour } p \in [0,1], \text{ qu'on appelle fonction de temps total}$$

du test (the total time on test transform : TTT). Elle représente la durée totale de bon fonctionnement des éléments soumis aux essais.

2- Les fonctions RS et TTT ont des interprétations importantes en science actuarielle. Supposons qu'un assureur accepte un risque aléatoire X. Supposons de plus, que l'assureur conçoit une réassurance pour ce risque déterminé par un niveau de conservation l.

C'est-à-dire que le réassureur payera n'importe quel excès d'une réclamation au-dessus du niveau l . (En d'autres termes, l peut être considéré en tant que déductible).

Si l est déterminé comme un percentile particulier de la distribution de réclamation, alors la fonction TTT est la réclamation moyenne espérée au dessous du niveau de conservation. C'est une quantité importante pour l'assureur. De la même manière la fonction RS est la réclamation espérée au dessus du niveau de conservation, c'est une quantité importante pour le réassureur.

3- En Economie, la fonction RS représente l'excès de richesse des $(1-p)$ 100 % des individus les plus riche d'une communauté.

2- Estimation de la fonction RS : [Réf 04]

On note que pour une variable aléatoire positive X ,

$$S_X^+(p) = E\left[\left(X - F^{-1}(p)\right)^+\right] = E[X] - \int_0^{Q_X(p)} \overline{F}_X(x) dx, \text{ l'estimateur non paramétrique de la}$$

fonction RS pour un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de X ($F(0) = 0$), est donné par :

$$RS_n(p) \equiv \overline{X} - H_n^{-1}(p).$$

Où :

$\overline{X}$: la moyenne de l'échantillon ;

$$H_n^{-1}(p) \equiv \begin{cases} n X_{(1)} p & \text{si } 0 \leq p < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i (n-j+1)(X_{(j)} - X_{(j-1)}) + \left(p - \frac{i}{n}\right)(n-i)(X_{(i+1)} - X_{(i)}) & \text{si } \frac{i}{n} \leq p < \frac{i+1}{n} \end{cases}$$

où :

$X_{(i)}$: la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X et

$X_{(0)} \equiv 0$;

$H_n^{-1}(p)$: le temps total du test statistique.

3- Propriétés de la fonction RS :

Le théorème suivant donne les propriétés importantes de la fonction RS.

Théorème III.1 : [Réf 13]

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F qui est strictement croissante sur son support. Alors :

$$a- \mu_F(Q_X(\mu)) = S_X^+(\mu) / (1-\mu) \quad .$$

(3.2)

b

-

$$\int_0^1 \left[S_X^+(\mu) / (1-\mu) \right]^2 du = \text{var}(X) \quad .$$

(3.3)

Avec $Q_X(0) = 0$;

c- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de X , alors :

$$\int_0^1 S_X^+(\mu) du = \frac{1}{2} E[|X_1 - X_2|] \quad .$$

(3.4)

$$d- r_F(Q_X(u)) = - \left[\frac{d}{du} S_X^+(u) \right]^{-1} \forall u \in [0,1] \quad .$$

(3.5)

Démonstration :

a- On a :

$$\begin{aligned} \mu_F(Q_X(\mu)) &= E[X - Q_X(\mu) / X > Q_X(\mu)] \\ &= \int_{Q_X(\mu)}^{\infty} \overline{F}(t) dt / \overline{F}(Q_X(\mu)) = \frac{S_X^+(\mu)}{1 - F(Q_X(\mu))} \end{aligned}$$

$$d'où : \mu_F(Q_X(\mu)) = S_X^+(\mu) / (1-\mu) \quad .$$

b- D'après (3.2) on a :

$$\int_0^1 \left[\frac{S_X^+(\mu)}{1-\mu} \right]^2 du = \int_0^1 \mu_F^2(Q_X(\mu)) d\mu \quad (\text{on pose: } Q_X(\mu) = t)$$

$$= \int_0^\infty u_F^2(t) dF(t) = \text{var}(X).$$

$$\text{c- } E[|X_1 - X_2|] = 2 \iint_{x_1 \leq x_2} (x_2 - x_1) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} (x_2 - x_1) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(x_1) \left[\int_{x_1}^{\infty} (x_2 - x_1) \frac{f(x_2)}{\overline{F}(x_1)} dx_2 \right] f(x_1) dx_1$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(x_1) u_F(x_1) f(x_1) dx_1 \quad (\text{on pose: } x_1 = Q_X(v))$$

$$= 2 \int_0^1 (1-v) \mu_F(Q_X(v)) dv$$

$$= 2 \int_0^1 S_X^+(v) dv$$

d'où :

$$\int_0^1 S_X^+(\mu) d\mu = \frac{1}{2} E[|X_1 - X_2|]$$

4- Ecart à droite observé :

Soit : X_{RS} l'écart à droite observé quand X est observé, c'est à dire:

$X_{RS} = S_X^+(F(X)) =_{st} S_X^+(U)$ où : U est une variable aléatoire uniforme sur [0, 1].

On note : $X_{RS} = \int_X^{\infty} \overline{F}(x) dx$.

Proposition : [Réf 20]

La fonction de survie de X_{RS} est l'inverse de la fonction RS.

Démonstration :

Calculons la fonction de survie de X_{RS} .

$$\begin{aligned} P\{X_{RS} > y\} &= P\{S_X^+(U) > y\} = P\{U \leq S_X^{+-1}(y)\} \\ &= S_X^{+-1}(y), \quad y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

III.2 - Caractérisation des ordres de lois non paramétriques à l'aide de la fonction RS :

Dans cette partie, on suppose que toutes les distributions à étudier sont des distributions non paramétriques, avec $F(0) = 0$. Dans la fiabilité et l'analyse de survie, plusieurs classes de lois non paramétriques comme IFR, IFRA, NBU, NBUE,... ont été étudiés. On suppose que toutes ces lois ont des moyennes finies et sont strictement croissantes sur leurs supports.

1- Définition :

1- X est dit plus IFR que Y ($X \leq_{IFR} Y$) si :

$$\frac{r_X(Q_X(p))}{r_Y(Q_Y(p))} \text{ est croissante en } p \text{ pour } p \in [0,1].$$

(3.6)

Ou d'une manière équivalente, si la fonction $Q_Y F_X(x)$ est convexe.

2- X est dit plus DMRL que Y ($X \leq_{DMRL} Y$) si :

$$\frac{u_X(Q_X(p))}{u_Y(Q_Y(p))} \text{ est croissante en } p \in [0,1].$$

(3.7)

3- X est dit plus NBUE que Y ($X \leq_{NBUE} Y$) si :

$$\frac{u_X(Q_X(p))}{u_Y(Q_Y(p))} \leq \frac{E[X]}{E[Y]} \quad \forall p \in [0,1].$$

(3.8)

Remrques :

1- Dans la définition précédente, si Y a la distribution exponentielle négative alors:

$X \leq_P Y$ si et seulement si X a la propriété de vieillissement (non paramétrique) P pour $P \in \{IFR, DMRL, NBUE\}$;

2- L'ordre IFR donné dans la définition précédente s'appelle également ordre en transformée convexe.

2- Lien entre les ordres de lois non paramétriques et la fonction RS :

Le théorème suivant montre que certains ordres partiels en lois non paramétriques peuvent être convenablement exprimés en terme de la fonction RS.

Théorème III.2 : [Réf 13]

Soient X et Y deux variables aléatoires positives, de fonctions RS, S_X^+ et S_Y^+ respectivement, alors:

$$\text{a- } X \leq_{IFR} Y \Leftrightarrow \frac{d/dp S_X^+(p)}{d/dp S_Y^+(p)} \text{ est décroissant en } p \text{ pour } p \in [0,1] \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow S_X^+ S_Y^{+1}(t) \text{ est convexe en } t, \text{ pour } t \in [0, \infty].$$

$$\text{b- } X \leq_{DMRL} Y \Leftrightarrow \frac{S_X^+(p)}{S_Y^+(p)} \text{ est croissant en } p \text{ pour } p \in [0,1]$$

(3.10)

$$\Leftrightarrow S_X^+ S_Y^{+1}(t) \text{ est étoilée en } t.$$

$$\text{c- } X \leq_{NBUE} Y \Leftrightarrow \frac{S_X^+(p)}{S_Y^+(p)} \leq \frac{E[X]}{E[Y]}.$$

(3.11)

Démonstration :

a- D'après (3.6) on a :

$$X \leq_{IFR} Y \text{ si : } \frac{r_X(Q_X(p))}{r_Y(Q_Y(p))} \text{ est croissant en } p.$$

$$\begin{aligned} \frac{r_X(Q_X(p))}{r_Y(Q_Y(p))} &= \frac{-\left[d/dp S_X^+(p)\right]^{-1}}{-\left[d/dp S_Y^+(p)\right]^{-1}} \\ &= \frac{\left[d/dp S_Y^+(p)\right]}{\left[d/dp S_X^+(p)\right]} \text{ est croissant en } p. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{d/dp S_X^+(p)}{d/dp S_Y^+(p)} \text{ est décroissant en } p$$

b- D'après (3.7) on a :

$$X \leq_{DMRL} Y \Leftrightarrow \frac{u_X(Q_X(p))}{u_Y(Q_Y(p))} \text{ est croissant en } p, \text{ pour } p \in [0,1].$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_X^+(p)/1-p}{S_Y^+(p)/1-p} \text{ est croissant en } p,$$

d'où : $\frac{S_X^+(p)}{S_Y^+(p)}$ est croissant en p.

c- d'après (3.8) on a :

$$X \leq_{NBUE} Y \Leftrightarrow \frac{\mu_X(Q_X(p))}{\mu_Y(Q_Y(p))} \leq \frac{E[X]}{E[Y]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_X^+(p)/1-p}{S_Y^+(p)/1-p} \leq \frac{E[X]}{E[Y]}.$$

D'où : $X \leq_{NBUE} Y \Leftrightarrow \frac{S_X^+(p)}{S_Y^+(p)} \leq \frac{E[X]}{E[Y]}.$

Remarques :

- 1- La fonction RS d'une distribution exponentielle négative de moyenne μ est $\mu(1-\mu)$.
- 2- En prenant Y une variable aléatoire exponentielle dans le théorème précédant, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire : [réf 13]

- a- F est IFR si et seulement si : $S_X^+(p)$ est une fonction convexe en p;
- b- F est DMRL si et seulement si : $S_X^+(p)$ est une fonction convexe en 1;
- c- F est NBUE si et seulement si : $S_X^+(p) \leq (1-p)E(X)$.

Démonstration :

a- On a: $r_F(Q_X(\mu)) = -\left\{\frac{d}{d\mu}S_X^+(\mu)\right\}^{-1} \forall \mu \in [0,1]$

F est IFR si et seulement si: $r_F(Q_X(\mu))$ est une fonction croissante; ainsi $\frac{d}{du}S_X^+(u)$ est croissante en μ , alors $S_X^+(u)$ est une fonction convexe.

b- On sait que : F est DMRL si et seulement si : $\frac{S_X^+(u)}{(1-u)}$ est décroissant en μ .

Une fonction ϕ a valeur réelle définie sur $[0,1]$ est dite convexe en 1 si et seulement si:

$$\phi(\lambda\mu + (1-\lambda)1) \leq \lambda\phi(\mu) + (1-\lambda)\phi(1) \quad \forall \mu \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Donc $S_X^+(u)$ est une fonction convexe en 1 si :

$$\lambda S_X^+(u) \geq S_X^+(\lambda u + (1-\lambda)) \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (\text{Tel que } S_X^+(0) = 0).$$

Si on prend : $\mu = \mu_1$ et $\lambda = \left[\frac{(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)}\right]$ avec $\mu_1 \leq \mu_2$ on obtient :

$$\frac{(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)} S_X^+(\mu_1) \geq S_X^+\left(\left(\frac{1-\mu_2}{1-\mu_1}\right)\mu_1 + \left(1 - \frac{1-\mu_2}{1-\mu_1}\right)\right)$$

$$S_X^+(\mu_2) \leq \left[\frac{(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)}\right] S_X^+(\mu_1)$$

de sorte que $\frac{S_X^+(\mu)}{1-\mu}$ est décroissant en μ . Dans ce cas :

$$S_X^+(\mu_2) \leq \left[\frac{(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)}\right] S_X^+(\mu_1) \quad \text{pour } \mu_1 \leq \mu_2.$$

Lorsque μ_2 varie entre 1 et μ_1 , λ varie entre 0 et 1. Pour μ fixé, on prend :

$\mu_1 = \mu$ et $\mu_2 = \lambda\mu + (1-\lambda)$ on obtient :

$$S_X^+(\lambda\mu + (1-\lambda)) \leq \frac{1 - [(\lambda\mu + (1-\lambda))]}{(1-\mu)} S_X^+(\mu)$$

$$\Leftrightarrow S_X^+(\lambda\mu + (1-\lambda)) \leq \lambda S_X^+(\mu).$$

D'où: $S_X^+(\mu)$ est une fonction convexe.

c- On sait que pour une distribution exponentielle de moyenne μ_G , la fonction RS est donnée par : $s_Y^+(p) = \mu_G(1-p)$ et d'après (3.11) on a :

$$\begin{aligned} X \leq_{NBUE} Y &\Leftrightarrow \frac{s_X^+(p)}{s_Y^+(p)} \leq \frac{E[X]}{E[Y]} \\ &\Leftrightarrow \frac{s_X^+(p)}{\mu_G(1-p)} \leq \frac{E[X]}{E[Y]} \\ &\Leftrightarrow s_X^+(p) \leq \frac{E[X](1-p)E[Y]}{E[Y]} \quad (\text{tel que } \mu_G = E[Y]), \end{aligned}$$

d'où : X est NBUE si et seulement si : $s_X^+(p) \leq (1-p)E[X]$.

III.3- L'ordre RS :

1- Introduction :

On a vu dans le chapitre précédent que : $Y \leq_{disp} X$ si et seulement si : La variable aléatoire $(X - Q_X(p))^+$ est stochastiquement plus grande que la variable aléatoire $(Y - Q_Y(p))^+$ pour tout $0 < p < 1$, où $(Z)^+ = \max\{Z, 0\}$.

Si au lieu de l'ordre stochastique, on compare la moyenne de $(X - Q_X(p))^+$ et $(Y - Q_Y(p))^+$, alors on a une nouvelle notion de l'ordre dispersif.

2- Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires, on dit que Y est moins RS que X (on note $Y \leq_{RS} X$ ou $Y \leq_{ew} X$) si et seulement si :

$$S_Y^+(p) \leq S_X^+(p) \quad \forall p \in [0,1].$$

(3.12)

Où : $S_Y^+(p)$ (respectivement $S_X^+(p)$) est la fonction RS de Y (respectivement de X).

Et on résulte que $Y \leq_{disp} X$ implique $Y \leq_{RS} X$. Ainsi, l'ordre RS est plus faible que l'ordre dispersif.

3- Propriétés de l'ordre RS :

1- L'ordre RS peut être exprimé en terme de la fonction de vie moyenne résiduelle,

$$Y \leq_{RS} X \Leftrightarrow \mu_Y(Q_Y(p)) \leq \mu_X(Q_X(p)) \quad \forall p \in [0,1]$$

2- $X \leq_{RS} aX$ pour $a \geq 1$.

3- $Y \leq_{RS} X \Leftrightarrow Y + c \leq_{RS} X$ pour tout réel c.

4- Si X et Y deux variables aléatoires positives de moments d'ordre 2 finis, alors:

$$Y \leq_{RS} X \text{ implique } \text{var}(X) \leq \text{var}(Y).$$

Et $E[|Y_1 - Y_2|] \leq E[|X_1 - X_2|]$, où X_1, X_2 (Y_1, Y_2) sont deux variables aléatoires indépendantes de X (Y).

Proposition : [Réf 20]

Soient X et Y deux variables aléatoires positives, de moyennes finies, alors :

$$X_{RS} \leq_{st} Y_{RS} \Leftrightarrow X \leq_{RS} Y.$$

Démonstration :

$$X_{RS} \leq_{st} Y_{RS} \Leftrightarrow P(X_{RS} < x) \leq P(Y_{RS} \leq x) \Leftrightarrow S_X^{+-1}(p) \geq S_Y^{+-1}(p) \quad \text{pour tout } p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{S_X^+(p)} \geq \frac{1}{S_Y^+(p)}$$

$$\Leftrightarrow S_X^+(p) \leq S_Y^+(p) \quad \text{pour tout } p$$

$$\Leftrightarrow X \leq_{RS} Y. \text{ Ainsi le résultat.}$$

Théorème III.3 : [Réf 11]

Soient X et Y deux variables aléatoires continues d'extrémités gauches égales à 0 de leurs supports, si $Y \leq_{RS} X$, alors :

$$\text{cov}[h_1(Y), h_2(Y)] \leq \text{cov}[h_1(X), h_2(X)],$$

pour toutes fonctions croissantes convexes $h_1, h_2 : R \rightarrow [0, \infty[$, si les covariances existent.

En particulier :

$$\text{var}[h(Y)] \leq \text{var}[h(X)],$$

pour toutes fonctions croissantes convexes $h_1, h_2 : R \rightarrow [0, \infty[$, si les variances existent.

Théorème III.4 : [Réf 18]

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, et soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, alors :

$$Y_1 \leq_{RS} X_1 \Rightarrow \max\{Y_1, \dots, Y_n\} \leq_{RS} \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Théorème III.5 : [Réf 18]

Soient X et Y deux variables aléatoires continues de moyennes finies, alors pour toute fonction ϕ croissante convexe,

$$X \leq_{RS} Y \Rightarrow \phi(X) \leq_{RS} \phi(Y).$$

Démonstration :

Pour montrer ce théorème on utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 1 : [Réf 18]

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement, alors $X \leq_{RS} Y$ si et seulement si :

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x + F^{-1}(p)) dx \leq \int_t^{\infty} \overline{G}(x + G^{-1}(p)) dx, \quad t \geq 0, p \in [0,1].$$

Lemme 2 : [Réf 18]

Soit W une mesure sur l'intervalle $[a, b]$, pas forcément positive. Soit h une fonction positive définie sur $[a, b]$.

a- Si $\int_a^t dW \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et si h est croissante, alors $\int_a^b h(x) dW(x) \geq 0$.

b- Si $\int_a^t dW \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et si h est décroissante, alors $\int_a^b h(x) dW(x) \geq 0$.

Soient F et G les fonctions de répartition de X et Y respectivement, on suppose que $X \leq_{RS} Y$.

Soit ϕ une fonction croissante convexe. Pour la simplification, on suppose que ϕ est strictement croissante et différentiable.

Soient F_ϕ et G_ϕ les fonctions de répartition de $\phi(X)$ et $\phi(Y)$ respectivement. Alors :

$$\begin{aligned} F_\phi(x) &= F(\phi^{-1}(x)), & G_\phi(x) &= G(\phi^{-1}(x)), & x \in R, \\ F_\phi^{-1}(p) &= \phi(F^{-1}(p)), & G_\phi^{-1}(p) &= \phi(G^{-1}(p)), & p \in [0,1]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{F_\phi^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_\phi(x) dx = \int_{\phi(F^{-1}(p))}^{\infty} \overline{F}(\phi^{-1}(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(y) \phi'(y) dy \\
&= \int_0^{\infty} \overline{F}(y + F^{-1}(p)) \phi'(y + F^{-1}(p)) dy, \quad p \in [0,1].
\end{aligned}$$

De même

$$\int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(x) dx = \int_0^{\infty} \overline{G}(y + G^{-1}(p)) \phi'(y + G^{-1}(p)) dy, \quad p \in [0,1].$$

Alors, il suffit de montrer que :

$$\int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(x) \phi'(x) dx \geq \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(x) \phi'(x) dx, \quad p \in [0,1],$$

(3.13)

ou d'une manière équivalente, que :

$$\int_0^{\infty} \overline{G}(x + G^{-1}(p)) \phi'(x + G^{-1}(p)) dx \geq \int_0^{\infty} \overline{F}(x + F^{-1}(p)) \phi'(x + F^{-1}(p)) dx, \quad p \in [0,1].$$

(3.14)

Premièrement, on montre que (3.14) est satisfaite pour tout $p \in [0,1]$ tel que $G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)$.

Pour un tel p , en utilisant le fait que ϕ' est croissante, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} [\overline{G}(x + G^{-1}(p)) \phi'(x + G^{-1}(p)) - \overline{F}(x + F^{-1}(p)) \phi'(x + F^{-1}(p))] dx \\
&\geq \int_0^{\infty} [\overline{G}(x + G^{-1}(p)) - \overline{F}(x + F^{-1}(p))] \phi'(x + F^{-1}(p)) dx, \quad p \in [0,1]
\end{aligned}$$

(3.15)

D'après le lemme 1, on a :

$$\int_t^{\infty} [\overline{G}(x + G^{-1}(p)) - \overline{F}(x + F^{-1}(p))] dx \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Comme $\phi'(x + F^{-1}(p))$ est positive et croissante en x , alors d'après le lemme 2 on a :

$$\int_0^{\infty} [\overline{G}(x + G^{-1}(p)) - \overline{F}(x + F^{-1}(p))] \phi'(x + F^{-1}(p)) dx \geq 0$$

$$\text{Alors : } \int_0^{\infty} [\overline{G}(x + G^{-1}(p)) \phi'(x + G^{-1}(p)) - \overline{F}(x + F^{-1}(p)) \phi'(x + F^{-1}(p))] dx \geq 0.$$

On considère maintenant que $p \in [0,1]$ tel que $G^{-1}(p) < F^{-1}(p)$. Dans ce cas, F et G sont différentes et elles doivent se croiser. Soit $p_2 \in [p,1]$ le dernier point de croisement qui est défini par $p_2 = \inf \{u > p : G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)\}$. On définit aussi

$$p_1 = \sup \{u < p : G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)\}, \text{ et } p_1 \equiv 0 \text{ si } \{u < p : G^{-1}(p) \geq F^{-1}(p)\} = \Phi.$$

On note que : $t_i = F^{-1}(p_i)$ et $t_i = G^{-1}(p_i)$, $i = 1, 2$.

Pour $p \in [0,1]$ tel que $G^{-1}(p) < F^{-1}(p)$ on a $\bar{G}(x) \leq \bar{F}(x)$ pour tout $x \in [G^{-1}(p_1), G^{-1}(p)]$, et $G^{-1}(p_1) = F^{-1}(p_1)$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x) \phi'(x) dx &= \int_{G^{-1}(p_1)}^{\infty} \bar{G}(x) \phi'(x) dx - \int_{G^{-1}(p_1)}^{G^{-1}(p)} \bar{G}(x) \phi'(x) dx \\ &\geq \int_{G^{-1}(p_1)}^{\infty} \bar{G}(x) \phi'(x) dx - \int_{F^{-1}(p_1)}^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x) \phi'(x) dx \\ &\geq \int_{F^{-1}(p_1)}^{\infty} \bar{F}(x) \phi'(x) dx - \int_{F^{-1}(p_1)}^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x) \phi'(x) dx \\ &= \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) \phi'(x) dx. \end{aligned}$$

L'exemple suivant montre que la convexité est une condition importante dans le théorème précédent.

Exemple :

On montre que : $X \leq_{RS} Y \Rightarrow \phi(X) \leq_{RS} \phi(Y)$ pour toute fonction croissante ϕ .

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F uniforme sur $[0,1]$, et Y une variable aléatoire de fonction de répartition G exponentielle de paramètre 2.

Pour $p \in [0,1]$, on calcule :

$$\int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) dx = \frac{(1-p)^2}{2}, \quad \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x) dx = \frac{1-p}{2} \text{ alors : } X \leq_{RS} Y.$$

Soit $\phi(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$, alors pour $p \in [0,1]$,

$$\int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) \phi'(x) dx = e^{-1} - p e^{-p}, \quad \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x) \phi'(x) dx = \frac{(1-p)^{3/2}}{3}.$$

La première fonction est inférieure à la deuxième pour p au voisinage à droite de 0.

Donc $\phi(X) \leq_{RS} \phi(Y)$.

4- Lien entre l'ordre RS et les ordres stochastiques usuels :

4.1- Lien avec l'ordre disp :

Le théorème suivant énonce que chaque ordre dispersif peut être convenablement exprimé en terme de la fonction RS.

Théorème III.6 : [Réf 13]

$Y \leq_{disp} X \Leftrightarrow S_X^+(p) - S_Y^+(p)$ décroissante en $p \in [0,1]$.

Démonstration:

D'après (3.5) on a : $\frac{d}{dp} S_X^+(p) = -[r_F Q_X(p)]^{-1}$ pour $p \in [0,1]$

$Y \leq_{disp} X \Leftrightarrow r_Y(Q_Y(p)) \leq r_X(Q_X(p))$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\frac{d}{dp} S_Y^+(p)} \leq -\frac{1}{\frac{d}{dp} S_X^+(p)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{d}{dp} S_Y^+(p)} \geq \frac{1}{\frac{d}{dp} S_X^+(p)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dp} S_Y^+(p) \leq \frac{d}{dp} S_X^+(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dp} S_Y^+(p) - \frac{d}{dp} S_X^+(p) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow S_Y^+(p) - S_X^+(p) \leq 0.$$

D'où : $S_X^+(p) - S_Y^+(p)$ est décroissante en p .

4.2- Lien avec l'ordre mrl :

Le théorème suivant montre que dans certaines conditions l'ordre RS implique l'ordre mrl, et l'ordre mrl implique l'ordre RS.

Théorème III.7 : [Réf 13]

Soient X et Y deux variables aleatoires tel que : $Y \leq_{st} X$, alors:

- a- Si $Y \leq_{mrl} X$ et X ou Y est IMRL alors : $Y \leq_{RS} X$;
- b- Si $Y \leq_{RS} X$ et X ou Y est DMRL alors : $Y \leq_{mrl} X$.

Démonstration:

a- On suppose que X est IMRL. On sait que : $Y \leq_{st} X$ si $Q_Y(p) \leq Q_X(p)$. $\forall p \in [0,1]$.

Donc:

$$\begin{aligned} Y \leq_{mrl} X &\Leftrightarrow \mu_Y(Q_Y(p)) \leq \mu_X(Q_X(p)) \quad \forall p \in [0,1] \\ &\Rightarrow \mu_Y(Q_Y(p)) \leq \mu_X(Q_X(p)) \quad \forall p \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow Y \leq_{RS} X . \end{aligned}$$

b- On suppose que X est DMRL,

$$\begin{aligned} Y \leq_{RS} X &\Leftrightarrow S_Y^+(p) \leq S_X^+(p) \\ &\Leftrightarrow (1-\mu)\mu_Y(Q_Y(p)) \leq (1-\mu)\mu_X(Q_X(p)) \\ &\Leftrightarrow \mu_Y(Q_Y(p)) \leq \mu_X(Q_X(p)) \\ &\Leftrightarrow Y \leq_{mrl} X . \end{aligned}$$

4.3- Lien avec l'ordre NBUE :

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour lesquelles l'ordre NBUE implique l'ordre RS.

Théorème III.8 : [Réf 13]

Soit $X \leq_{NBUE} Y$ et $E[X] \leq E[Y]$, alors : $X \leq_{RS} Y$.

Démonstration

D'après (3.11) on a : $X \leq_{NBUE} Y$ si et seulement si : $\frac{S_X^+(p)}{S_Y^+(p)} \leq \frac{E[X]}{E[Y]}$ pour tout $p \in [0,1]$,

et comme $E(X) \leq E(Y)$, alors $S_X^+(p) \leq S_Y^+(p)$ ainsi le résultat.

4.4- Lien avec l'ordre icx :

Théorème III.9 : [Réf 03]

Soient X et Y deux variables aléatoires continues, alors :

$$X \leq_{RS} Y \Leftrightarrow \left\{ X - F^{-1}(p) \right\}^+ \leq_{icx} \left\{ Y - G^{-1}(p) \right\}^+, \text{ pour tout } p \in [0,1].$$

Démonstration :

La fonction de répartition de $\left(X - F^{-1}(p) \right)^+$ est donnée par :

$$F\left(X - F^{-1}(p) \right)^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ F(x + F^{-1}(p)) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La condition $\left\{ X - F^{-1}(p) \right\}^+ \leq_{icx} \left\{ Y - G^{-1}(p) \right\}^+$, pour $p \in [0,1]$, est équivalente à :

$$\int_{t+F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(x) dx \leq \int_{t+G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(x) dx, \text{ pour tout } t \geq 0$$

(3.16)

$$\text{et } E\left[\left(X - F^{-1}(p) \right)^+\right] \leq E\left[\left(Y - G^{-1}(p) \right)^+\right].$$

(3.17)

La démonstration se fait pour les deux sens :

1) Le sens ($\Leftarrow$) :

On sait que : $X \leq_{icx} Y \Rightarrow EX \leq EY$ alors :

$$\begin{aligned} \left\{ X - F^{-1}(p) \right\}^+ \leq_{icx} \left\{ Y - G^{-1}(p) \right\}^+ &\Rightarrow E\left\{ X - F^{-1}(p) \right\}^+ \leq E\left\{ Y - G^{-1}(p) \right\}^+ \\ &\Rightarrow S_X^+(p) \leq S_Y^+(p) \Rightarrow X \leq_{RS} Y. \end{aligned}$$

2) Le sens ($\Rightarrow$) :

On suppose que : $X \leq_{RS} Y$, et on considère la fonction :

$$H(t, p) \equiv \int_{t+G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(x) dx - \int_{t+F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(x) dx \text{ pour tout } (t, p) \in R_+ \times [0,1].$$

D'après les équations (3.16) et (3.17) on doit montrer que $H(t, p) \geq 0$, pour tout

$(t, p) \in R_+ \times [0,1]$. On voit que pour un p fixé $\in [0,1]$, la fonction $H(t, p)$ satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t, p) = 0. \quad (3.18)$$

D'après les équations (3.17) et (3.18) il suffit de montrer que, pour un p fixé $\in [0,1]$, si la fonction H atteint son minimum au point t^* , alors elle vérifie que $H(t^*, p) \geq 0$.

Si H atteint son minimum au point t^* , alors $H(t, p)$ est continue et différentiable, t^*

satisfait : $\left. \frac{\delta H(t, p)}{\delta t} \right|_{t=t^*} = 0$, et l'égalité soit satisfaite si et seulement si :

$$F(t^* + F^{-1}(p)) = G(t^* + G^{-1}(p)) = q.$$

a- Si F et G sont strictement croissantes en $t^* + F^{-1}(p)$ et $t^* + G^{-1}(p)$ respectivement, alors :

$$F^{-1}(q) = t^* + F^{-1}(p) \text{ et } G^{-1}(q) = t^* + G^{-1}(p). \text{ Donc :}$$

$$\begin{aligned} H(t^*, p) &= \int_{t^* + G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(x) dx - \int_{t^* + F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(x) dx \\ &= \int_{G^{-1}(q)}^{\infty} \overline{G}(x) dx - \int_{F^{-1}(q)}^{\infty} \overline{F}(x) dx \geq 0, \text{ ainsi le résultat.} \end{aligned}$$

b- Si F ou G n'est pas strictement croissante en $t^* + F^{-1}(p)$ ou $t^* + G^{-1}(p)$ respectivement, et $F^{-1}(p) \geq G^{-1}(p)$. Soit $t' = G^{-1}(q)$ et $t'' = F^{-1}(q)$.

On va distinguer deux cas :

1- Si $t'' - t' > F^{-1}(p) - G^{-1}(p)$ on voit que H n'atteint pas son minimum au point t^* .

On doit donc montrer que $H(t, p)$ est croissante sur l'intervalle $[t' - G^{-1}(p), t^*]$, il suffit

de montrer que $\frac{\delta H(t, p)}{\delta t} = G(t + G^{-1}(p)) - F(t + F^{-1}(p)) \geq 0$ pour tout

$$t \in [t' - G^{-1}(p), t^*].$$

Pour tout $t \in [t'' - F^{-1}(p), t^*]$, on obtient que $t \in [t' - G^{-1}(p), t^*]$. Donc :

$$G(t + G^{-1}(p)) = F(t + F^{-1}(p)) = q, \text{ alors } H(t, p) \text{ est constante. Si}$$

$t \in [t' - G^{-1}(p), t'' - F^{-1}(p)]$, alors $G(t + G^{-1}(p)) = q = F(t'') > F(t + F^{-1}(p))$, donc H est croissante en t .

2- Si $t'' - t' \leq F^{-1}(p) - G^{-1}(p)$, soit $t = t' - G^{-1}(p) \leq t^*$ alors $t'' \leq t + F^{-1}(p) \leq t^* + F^{-1}(p)$, donc

$$F(t + F^{-1}(p)) = q = G(t + G^{-1}(p)), \text{ alors on obtient :}$$

$$\begin{aligned}
H(t^*, P) &= \int_{t^* + G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x) dx - \int_{t^* + F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) dx \\
&= \int_{t + G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x) dx - \int_{t + F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) dx - \int_{t + G^{-1}(p)}^{t^* + G^{-1}(p)} \bar{G}(x) dx + \int_{t + F^{-1}(p)}^{t^* + F^{-1}(p)} \bar{F}(x) dx.
\end{aligned}$$

Soit pour tout $x \in [t + F^{-1}(p), t^* + F^{-1}(p)]$, $F(x) = q$ et pour tout $x \in [t + G^{-1}(p), t^* + G^{-1}(p)]$, $G(x) = q$, alors :

$$\begin{aligned}
H(t^*, p) &= \int_{t + G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x) dx - \int_{t + F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x) dx \\
&\geq \int_t^{\infty} \bar{G}(x) dx - \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \\
&= \int_{G^{-1}(q)}^{\infty} \bar{G}(x) dx - \int_{F^{-1}(q)}^{\infty} \bar{F}(x) dx \geq 0. \text{ Ainsi le résultat.}
\end{aligned}$$

Si $F^{-1}(p) \leq G^{-1}(p)$ la démonstration est la même.

Proposition : [03]

Soient X et Y deux variables aléatoires continues, d'extrémités gauches finies l_X et l_Y respectivement de leurs supports et $F(l_X) = G(l_Y) = 0$.

Si $X \leq_{RS} Y$ et $l_X \leq l_Y$ alors $X \leq_{icx} Y$.

Démonstration :

D'après l'équation (3.17) on remarque que $E(X) \leq E(Y)$, donc il suffit de montrer que

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \bar{G}(x) dx. \text{ On va distinguer plusieurs cas :}$$

Cas (i) : $t \leq l_X \leq l_Y$

Dans ce cas, on obtient :

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx = EX - t \leq EY - t = \int_t^{\infty} \bar{G}(x) dx.$$

Cas (ii) : $l_X \leq t \leq l_Y$

On obtient :

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x) dx \leq \int_{l_X}^{\infty} \overline{F}(x) dx \leq \int_{l_Y}^{\infty} \overline{G}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \overline{G}(x) dx.$$

Cas (iii) : $l_X \leq l_Y \leq t$

Soit $t' = t - l_Y \geq 0$, alors d'après le théorème 1, on obtient :

$$\int_t^{\infty} \overline{G}(x) dx = \int_{t'}^{\infty} \overline{G}_{(Y-l_Y)}(x) dx \geq \int_{t'}^{\infty} \overline{F}_{(X-l_X)}(x) dx \geq \int_t^{\infty} \overline{F}(x) dx.$$

Donc :

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \overline{G}(x) dx, \quad \text{pour tout } t.$$

Théorème III.10 : [Réf 19]

$$Y \leq_{RS} X \Rightarrow |Y_1 - Y_2| \leq_{icx} |X_1 - X_2|$$

où : $Y_1, Y_2 (X_1, X_2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes de $Y (X)$.

Démonstration :

La fonction de fiabilité de $X_1 - X_2$ est donnée par :

$$\overline{H_F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(x+y) dF(y)$$

On doit montrer que :

$$\int_t^{\infty} \overline{H_F}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \overline{H_G}(x) dx. \text{ Pour tout } t.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_t^{\infty} \overline{H_F}(x) dx &= \int_t^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(x+y) dF(y) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_t^{\infty} \overline{F}(x+y) dx \right] dF(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t+y}^{\infty} \overline{F}(z) dz \right] dF(y) \\ &= \int_0^1 \left[\int_{t+F^{-1-}(p)}^{\infty} \overline{F}(z) dz \right] dp \end{aligned}$$

$$\geq \int_0^1 \left[\int_{t+G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(z) dz \right] dp$$

$$= \int_t^{\infty} \overline{H_G}(x) dx.$$

Alors : $\int_{t+G^{-1}(p)}^{\infty} \overline{G}(z) dz \leq \int_{t+F^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}(z) dz$. D'où $Y \leq_{RS} X$.

Définition :

On dit que Y est plus petite que X en ordre dilation (noté $\leq_{dil}$) si et seulement si :

$$Y - E[Y] \leq_{icx} X - E[X].$$

Théorème III.11 : [Réf 11]

Soient X et Y deux variables aléatoires de moyennes finies, alors :

$$Y \leq_{RS} X \Rightarrow Y \leq_{dil} X,$$

5- Caractérisation des classes DMRL et IMRL à l'aide de l'ordre RS :

Le théorème suivant donne une caractérisation importante des classes DMRL et IMRL.

Théorème III.12 : [Réf 03]

Soit X une variable aléatoire continue, d'extrémité gauche finie l_X de leur support et

$$F_X(l_X) = 0. \text{ Alors les conditions suivantes sont équivalentes :}$$

a- $X \in \text{DMRL (IMRL)}$.

b- $X_t \geq_{RS} [\leq_{RS}] X_{t'}$ pour tout $t < t'$, quand $t, t' \in S$.

Où : S : support de F.

$$X_t \equiv \left[X - t / X > t \right] : \text{vie résiduelle.}$$

c- $X \geq_{RS} [\leq_{RS}] X_t$, pour tout $t \in S$.

6- Propriétés de conservation de l'ordre RS :

Pour montrer la conservation de l'ordre RS, il suffit de montrer la conservation des ordres qui ont un lien avec cet ordre, par exemple l'ordre disp, mrl, icx...

6.1- Conservation de l'ordre icx :

Théorème III.13 : [Réf 05]

Soient $X_1, X_2, \dots$ et $Y_1, Y_2, \dots$ deux suites de variables aléatoires indépendantes, telles que : $X_i \leq_{icx} Y_i$, $i = 1, 2, \dots$. Soient M et N deux variables aléatoires discrètes indépendantes de $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$ respectivement, telle que $M \leq_{icx} N$, alors :

$$\sum_{j=1}^M X_j \leq_{icx} \sum_{j=1}^N Y_j.$$

Démonstration :

La démonstration se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on montre l'inégalité :

$E[\phi(X_1 + X_2 + \dots + X_N)] \leq E[\phi(X_1 + X_2 + \dots + X_M)]$ pour toute fonction ϕ croissante convexe.

Après conditionnement de chaque côté, cette inégalité peut s'écrire :

$$E[E(\phi(X_1 + X_2 + \dots + X_N / N))] \leq E[E(\phi(X_1 + X_2 + \dots + X_M / M))].$$

Donc il suffit de montrer que la fonction g définie par : $g(n) = E[\phi(X_1 + X_2 + \dots + X_n)]$, est croissante convexe. Elle est croissante car les variables X_i sont positives et que ϕ est elle-même croissante. Il reste à montrer qu'elle est convexe. Pour cela, on note S_n la variable : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$; et h la fonction définie par :

$h(t) = E[\phi(t + X_{n+1}) - \phi(t)]$, on va montrer que la fonction $g(n+1) - g(n)$ est croissante par rapport à n .

$$\begin{aligned} g(n+1) - g(n) &= E[\phi(S_n + X_{n+1}) - \phi(S_n)] \\ &= E[E(\phi(S_n + X_{n+1}) - \phi(S_n) / S_n)] \\ &= E[h(S_n)]. \end{aligned}$$

Puisque ϕ est convexe, alors : $E[\phi(t + X_{n+1})] \geq \phi[t + E(X_{n+1})]$.

Mais X_{n+1} est positive, donc son espérance également : $\phi[t + E(X_{n+1})] \geq \phi(t)$ donc la fonction h est croissante. La suite S_n est croissante donc $g(n+1) - g(n)$ est croissante.

Ce qui suffit à montrer que g est convexe. Alors $E\left[\phi\left(\sum_{i=1}^M X_i\right)\right] \leq E\left[\phi\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)\right]$, donc :

$$\sum_{i=1}^M X_i \leq_{icx} \sum_{i=1}^N Y_i.$$

La deuxième étape consiste à comparer $X_1 + X_2 + \dots + X_M$ et $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_M$.

En conditionnant par l'événement $\{M = m\}$, on est conduit à montrer :

$X_1 + X_2 + \dots + X_m \leq_{icx} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$ or cette inégalité provient de la stabilité de

l'ordre croissant convexe par convolution.

6.2- Conservation de l'ordre mrl :

Lemme 1: [Réf 23]

Si X et Y deux variables aléatoires tel que : $X \leq_{mrl} Y$ et si Z est une variable aléatoire

IFR et indépendante de X et Y , alors : $X + Z \leq_{mrl} Y + Z$.

Lemme 2 : [Réf 23]

Si X et Y deux variables aléatoires tel que $X \leq_{hr} Y$ et si Z est une variable aléatoire DMRL et indépendante de X et Y , alors : $X + Z \leq_{mrl} Y + Z$.

Théorème III.14 : [Réf 23]

Soient (X_i, Y_i) deux suites de variables aléatoires indépendantes tel que :

$$X_i \leq_{mrl} Y_i, i = 1, 2, \dots, m, \text{ si } X_i, Y_i, i = 1, \dots, m \text{ sont IFR alors : } \sum_{i=1}^m X_i \leq_{mrl} \sum_{i=1}^m Y_i.$$

Théorème III.15 : [Réf 23]

Soit $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ une suite positive de variables aléatoires qui sont toutes DMRL et indépendantes. Soient M et N deux variables aléatoires discrètes tel que $M \leq_{hr} N$ alors :

$$\sum_{i=1}^M X_i \leq_{mrl} \sum_{i=1}^N X_i.$$

6.3- Conservation de l'ordre disp :**Lemme : [Réf 23]**

Si X et Y deux variables aléatoires tel que : $X \geq_{disp} Y$ et si Z est une variable aléatoire IFR et indépendante de X et Y , alors : $X + Z \geq_{disp} Y + Z$.

Théorème III.16 : [Réf 17]

Soient $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}$ des variables aléatoires indépendantes telle que X_{λ_i} a la distribution Gamma de paramètres $a \geq 0$ et λ_i , pour $i = 1, \dots, n$. Alors, $\lambda \geq_P \lambda^*$ implique :

$$S(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq_{disp} S(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*), \text{ où : } S(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n X_{\lambda_i}, \text{ et } \lambda \geq_P \lambda^* \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_{\lambda_i} \geq_{disp} \sum_{i=1}^n X_{\lambda_i^*}.$$

Chapitre IV :

Test statistique pour

l'ordre RS

Test de Kolmogorov Smirnov pour l'ordre RS :

1- Introduction :

Belzunce et al (2001) montrent que les classes NBUE et NWUE peuvent être caractérisées à l'aide de l'ordre RS.

Soit X une variable aléatoire positive de moyenne finie,

$$X \text{ NBUE} \Leftrightarrow X \leq_{RS} \exp(E[X])$$

où : $\exp(E[X])$ représente une variable aléatoire de fonction de survie $t \rightarrow \exp(-t / E[X])$.

De même :

$$X \text{ NWUE} \Leftrightarrow \exp(E[X]) \leq_{RS} X.$$

Alors X est exponentielle de moyenne μ .

Le test de KS peut être appliqué au contrôle pour tester la validité de la classe NBUE, plus précisément avec l'exponentialité comme hypothèse nulle contre une alternative NBUE. Il suffit pour cela d'adapter un test de KS développé pour tester l'ordre $\leq_{RS}$.

2- Procédure du test :

On a vu dans le chapitre III que la fonction RS de X est définie par :

$$\begin{aligned} S_X^+(p) &= E[(X - Q_X(p))^+] = \int_{Q_X(p)}^{+\infty} \bar{F}(x) dx \\ &= \int_{Q_X(p)}^{+\infty} (x - Q_X(p)) dF(1-p). \\ &= \int_{Q_X(p)}^{+\infty} x dF(1-p) - (1-p)Q_X(p). \end{aligned}$$

Si on dispose d'un échantillon $X_1, X_2, \dots, X_n$ issu de X , alors cette fonction peut être estimée par :

$$\hat{S}_X^+(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i I\{x_i > \hat{Q}_X(p)\} - (1-p)\hat{Q}_X(p).$$

Où : $\hat{Q}_X(p) = \hat{F}^{-1}(p)$: quantile empirique et $\hat{F}(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I\{x_i \leq z\}$ la distribution empirique.

On cherche à tester la comparabilité au sens $\leq_{RS}$ entre deux modèles $X \sim F$ inconnue par rapport à un autre modèle $X_\theta \sim F_\theta$.

Le test est basé sur le critère :

$$J(p, \hat{F}) = \frac{\hat{S}_X^+(p)}{\hat{m}}, \text{ où : } \hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ la moyenne empirique.}$$

L'hypothèse à tester est :

$$H_0 : J(p, F) \leq J(p, F_\theta) \text{ pour } p \in [0,1] \text{ contre } H_1 : J(p, F) > J(p, F_\theta) \text{ pour } p \in [0,1].$$

On considère la statistique du test :

$$\hat{S} = \sqrt{N} \sup_p \left[J(p, \hat{F}) - J(p, \hat{F}_\theta) \right] \text{ qui mesure l'écart entre les deux modèles.}$$

Le test est basé sur la règle de décision suivante :

« On rejette H_0 si $\hat{S} > c$ »

c : une valeur critique. Qui signifie qu'on doit rejeter le test pour les grandes valeurs critiques.

Si on connaît la loi de probabilité de la statistique de test, on peut alors calculer un seuil critique ou une P-value et accepter ou non l'hypothèse posée. Malheureusement, la distribution d'une statistique de test est la plupart du temps inconnue, à moins de faire des hypothèses fortes et difficilement vérifiables sur le modèle. La théorie asymptotique joue alors un rôle déterminant puisqu'elle permet de relâcher ces hypothèses : les développements asymptotiques au premier ordre déterminent la distribution de probabilité de la statistique lorsque la taille de l'échantillon est infiniment grande, appelée loi asymptotique. En pratique, le nombre de données est fini et on utilise en général la loi asymptotique comme approximation de la vraie loi inconnue. Toute fois, pour que la loi asymptotique soit une bonne image de la vraie loi de la statistique il faut que le nombre de données soit suffisamment important, sinon les tests peuvent être faussés.

Une des caractéristiques majeure des méthodes du bootstrap est qu'elles permettent très souvent d'obtenir une meilleure approximation de la vraie loi de la statistique que celle donnée par la loi asymptotique. La fiabilité des tests en est accrue, notamment pour des échantillons dont le nombre d'observations n'est pas très grand. Ces progrès ont des conséquences profondes en sciences car le gain de précision apporté par le bootstrap peut avoir d'importants effets sur les conclusions scientifiques, qui s'appuient sur des évaluations statistiques de la vérité.

Une P-value obtenue avec la loi bootstrap devrait alors être très proche de celle qui aurait été calculée avec la vraie loi de la statistique, de telle sorte que l'inférence est fiable. On aimerait calculer la loi bootstrap à partir de développements analytiques pour en obtenir une expression exacte. Malheureusement, c'est la plupart du temps impossible. On a alors recours à des simulations pour en obtenir une approximation.

3- Simulation de la P-value : [Réf 09]

Soient : $\{x_i^*\}_{i=1}^N$ un échantillon de bootstrap, $\hat{F}^*$ la fonction empirique associée à cet échantillon de bootstrap et $F_{\hat{\theta}^*}$ la fonction d'estimateur paramétrique associée à l'échantillon de bootstrap.

Soit :

$$\hat{S}^* = \sqrt{N} \sup_p \left[\left(J(p, \hat{F}^*) - J(p, \hat{F}) \right) - \left(J(p, F_{\hat{\theta}^*}) - J(p, F_{\hat{\theta}}) \right) \right].$$

La P-value est donnée par :

$$P^* = P \left[\hat{S}^* > \hat{S} \right].$$

Proposition : [Réf 09]

On suppose que $\alpha < 1/2$, le test de KS pour l'ordre $\leq_{RS}$ est basé sur la règle de décision suivante :

« On rejette H_0 si $p^* < \alpha$ » satisfait les équations :

$\lim P[\text{rejeter } H_0] \leq \alpha$ si H_0 est vraie ;

$\lim P[\text{rejeter } H_0] = 1$ si H_0 est fausse.

Dans la pratique, on a besoin d'utiliser la méthode de Monté Carlo pour approximer la P-value.

Soit $\hat{S}$ la statistique d'intérêt dont la distribution de probabilité F est inconnue.

La P-value peut être approximée par simulation à partir de l'algorithme suivant :

1- On calcule des estimateurs $\hat{\theta}$ des paramètres inconnus, et on calcule une réalisation de la statistique de test $\hat{S}$.

2- On construit des données x^* . Sur la base des données simulées, appelées échantillon bootstrap, on calcule une réalisation de la statistique bootstrap $\hat{S}^*$.

3- On répète l'étape précédente R-1 fois afin d'obtenir R réalisations de la statistique bootstrap $\left(\hat{S}_1^*, \hat{S}_2^*, \dots, \hat{S}_R^* \right)$.

La P-value est simplement approximée par :

$$P^* \approx \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R I \left\{ \hat{S}_r^* > \hat{S} \right\}.$$

Où : R est le nombre de bootstrap (nombre de réalisations).

4- Résultats de Monté Carlo :

Dans cette partie, on examine l'exécution de test dans le cas où la taille de l'échantillon est petite. Pour simuler la P-value, on prend R = 500 le nombre de bootstrap et $\alpha = 0.01$, 0.05 et 0.1.

1- La taille :

Nous évaluons d'abord l'erreur de première espèce (la probabilité de rejeter H_0 sachant qu'elle est vraie). Le tableau (01) présente les résultats quand la distribution paramétrique est exponentielle de paramètre 1.

Dans ce cas, la distribution vraie coïncide la distribution paramétrique, alors le test doit rejeter l'hypothèse nulle avec une fréquence près de niveau de signification choisi. Les valeurs montrées dans le tableau (01) indiquent que le taux de rejet converge vers le niveau de signification si la taille de l'échantillon N augmente.

Tableau (01) : Proportions des échantillons de la distribution exponentielle quand H_0 est rejetée pour différentes tailles de l'échantillon.

Niveau de signification	La taille de l'échantillon			
	N = 25	N = 50	N = 100	N = 200
$\alpha = 0.01$	0.000	0.004	0.006	0.012
$\alpha = 0.05$	0.012	0.028	0.024	0.052
$\alpha = 0.1$	0.044	0.040	0.036	0.088

2- La puissance :

2.1- Alternative de Weibull :

La fonction de densité de la distribution de Weibull est donnée par :

$$f(x) = \theta x^{\theta-1} \exp(-x^\theta), x > 0 \text{ et } \theta \text{ un paramètre positif.}$$

Si $\theta = 1$, la distribution de Weibull est équivalente à la loi exponentielle. Cette distribution est DFR si $\theta < 1$, et IFR si $\theta > 1$. Alors la distribution de Weibull n'est pas NBUE pour $\theta < 1$, la procédure de test doit rejeter H_0 .

D'après le tableau (02), pour les petites valeurs de θ (0.25 et 0.5) le test rejette l'hypothèse nulle pour la majorité des échantillons, même pour les échantillons de petite taille.

La puissance du test est croissante pour les grandes valeurs de θ . Par exemple si $\theta = 0.75$ pour un échantillon de taille 100, les puissances pour les niveaux 0.05 et 0.1 sont respectivement 72.8% et 85.2%.

Tableau (02) : Proportions des échantillons quand H_0 est rejetée pour différents paramètres de la distribution de weibull.

Weibull de Paramètre θ	Niveau de signification	La taille de l'échantillon		
		N = 25	N = 50	N = 100
0.25	$\alpha = 0.01$	0.760	0.972	1
	$\alpha = 0.05$	0.952	1	1
	$\alpha = 0.1$	0.984	1	1
0.5	$\alpha = 0.01$	0.476	0.940	1
	$\alpha = 0.05$	0.776	0.980	1
	$\alpha = 0.1$	0.872	0.984	1
0.75	$\alpha = 0.01$	0.052	0.152	0.424
	$\alpha = 0.05$	0.200	0.116	0.728
	$\alpha = 0.1$	0.372	0.620	0.852

2.2- Alternative de Gamma :

La densité de la distribution Gamma est donnée par :

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\theta)} (\lambda x)^{\theta-1} \exp(-\lambda x), x > 0, \text{ où } \theta > 0 \text{ et } \lambda > 0.$$

La distribution Gamma est IFR si $\theta \geq 0$, et DFR si $\theta \leq 1$. Pour $\theta = 1$ la distribution Gamma est identique à la loi exponentielle.

On simule un échantillon pour $\theta < 1$ et $\lambda = 1$, cet échantillon n'est pas NBUE donc le test doit rejeter l'hypothèse nulle. La puissance du test dans ce cas, est plus faible que la puissance dans le cas de la distribution de Weibull. (Voir tableau (03))

Tableau (03) : Proportions des échantillons quand H_0 est rejetée pour différents paramètres de la distribution Gamma.

Gamma de Paramètre θ	Niveau de signification	La taille de l'échantillon		
		N = 25	N = 50	N = 100
0.25	$\alpha = 0.01$	0.476	0.900	1
	$\alpha = 0.05$	0.828	0.996	1
	$\alpha = 0.1$	0.940	1	1
0.5	$\alpha = 0.01$	0.096	0.300	0.756
	$\alpha = 0.05$	0.340	0.612	0.968
	$\alpha = 0.1$	0.480	0.784	0.996
0.75	$\alpha = 0.01$	0.016	0.018	0.056
	$\alpha = 0.05$	0.088	0.116	0.248
	$\alpha = 0.1$	0.156	0.228	0.460

2.3- Alternative de Pareto :

La fonction de survie de Pareto est donnée par :

$$\bar{F}(x) = (1+x)^{-\theta}, \quad x \geq 0 \text{ et } \theta > 0.$$

Cette distribution est DFR pour toutes les valeurs de paramètre θ . Alors le test doit rejeter l'hypothèse nulle.

D'après les résultats de l'étude de simulation montrés dans le tableau (04), nous remarquons que la puissance du test augmente si la taille de l'échantillon et les valeurs de θ sont augmentées.

Tableau (04) : Proportions des échantillons quand H_0 est rejetée pour différents paramètres de la distribution de Pareto.

Pareto de Paramètre θ	Niveau de signification	La taille de l'échantillon		
		N = 25	N = 50	N = 100
1.50	$\alpha = 0.01$	0.436	0.700	0.912
	$\alpha = 0.05$	0.632	0.860	0.980
	$\alpha = 0.1$	0.736	0.936	0.992
2.00	$\alpha = 0.01$	0.268	0.444	0.780
	$\alpha = 0.05$	0.480	0.676	0.932
	$\alpha = 0.1$	0.568	0.776	0.976
2.50	$\alpha = 0.01$	0.200	0.316	0.572
	$\alpha = 0.05$	0.364	0.524	0.752
	$\alpha = 0.1$	0.452	0.656	0.848

Chapitre V :
Application pour le calcul
de la probabilité de ruine
en assurance

1- Introduction :

La théorie de la ruine concerne la définition et l'étude de processus stochastiques introduits dans la modélisation et l'évaluation de la richesse d'une compagnie d'assurance. Le but premier de la théorie de ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

En effet, les actuaires et les organismes de contrôle et de régulation des assurances ont tendance à s'intéresser à des problèmes de ruine sur 5 ou 10 ans. Dans l'hypothèse où la compagnie, en cas de ruine, a l'opportunité de combler sa dette sous la forme d'un emprunt tant que sa richesse algébrique est négative.

2- Définitions : [Réf 15]

- **Opération d'assurance** : contrat entre deux parties :
 - un assureur (société d'assurances) ;
 - un assuré (souscripteur).

Le contrat est valable pour une période donnée (année).

- **Prime** : somme versée en début de période par l'assuré à l'assureur.
- **Sinistre** : événement redouté par l'assuré et contre lequel il veut se prémunir. Si un sinistre se produit durant la période de validité du contrat, l'assureur verse une indemnité à l'assuré.
- **Caractéristique d'un sinistre** :

C'est un événement :

 - futur ;
 - aléatoire ;
 - en dehors de la volonté des parties ;
 - préjudiciable à l'assuré.

Risque : tout élément du contrat pouvant donner lieu à un sinistre.

Exemples de risques :

- risque incendie d'un immeuble ;
- risque tempête ou grêle pour une exploitation agricole ;
- risque catastrophes naturelles ;
- risque responsabilité civile pour le conducteur d'un véhicule automobile (obligatoire) ;
- risque dommage au véhicule, vol, ... ;
- risque perte d'exploitation pour une entreprise ;
- risque de décès d'une personne ;
- risque maladie ou incapacité pour un employé ;
- risque vieillesse (retraite principale ou complémentaire) ;
- risque chômage...

3- Extensions de la modélisation :

On considère un groupe de K risques :

a- Modèle individuel :

Y_i : montant de sinistres relatif au risque i ($i=1, \dots, k$).

Montant total des dépenses sinistralles :

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_K .$$

b- Modèle collectif :

N : nombre de sinistres relatifs à l'ensemble des risques de groupe (cas statique).

$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$: suite des coûts de sinistres.

X : montant cumulé de sinistres du groupe sur la période considérée : $X = \sum_{i=1}^N C_i$.

C- Le modèle collectif dans l'approche dynamique :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i \quad \text{où :}$$

$X(t)$: montant cumulé des sinistres d'un groupe de risques sur la période $]0, t]$;

$N(t)$: nombre de sinistres du groupe de risques sur $]0, t]$;

$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$: suite des coût de sinistres par ordre de survenance.

Les C_n sont des variables aléatoires et $N(t)$ est un processus de saut (par exemple processus de poisson).

Prime pure sur $]0, t]$: $E X(t) = E N(t) E C$.

4- Modèle classique du risque :

4.1- Approche mono- période :

On considère un groupe de risque et on adopte le modèle collectif

N : nombre de sinistres relatifs à l'ensemble des risques du groupe

$C_1, \dots, C_n, \dots$: suite des coût de sinistres

X : montant cumulé des sinistres du groupe $X = \sum_{i=1}^N C_i$.

Hypothèses :

1- N et $(C_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants ;

2- Les coûts des sinistres $C_1, \dots, C_n, \dots$ sont indépendants et de même loi qu'une variable aléatoire générique C ;

3- $P(C = 0) = 0$ (pas de sinistres de coût nul).

Détermination de la loi de X :

Il existe plusieurs méthodes, on suppose connues (estimées) les lois de N et C .

a- Méthode de Monté Carlo :

La simulation des lois de N et C permet l'estimation de la loi de X .

b- Méthode « naturelle » ou directe :

Evaluation directe des produits de convolution

$$P(X = 0) = P(N = 0)$$

$$\text{et } P(X = x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P(S_n = x) \quad x \text{ entier } \geq 1.$$

$$\text{Où } S_n = C_1 + \dots + C_n.$$

c- Méthode récursive de Panjer :

L'objectif de cette méthode est de calculer de manière exacte (ou directe) la loi de X tout en limitant le nombre d'opérations nécessaires.

On considère à nouveau le modèle composé dans lequel le montant cumulé des sinistres

s'écrit, lorsque $N > 0$, $X = \sum_{i=1}^N C_i$.

On reprend les hypothèses (1), (2), et (3) du modèle classique de risque (l'approche mono période).

On fait également l'hypothèse suivante qui concerne l'ensemble des valeurs possibles du montant d'un sinistre.

4- On suppose que, dans une unité monétaire convenablement choisie, le coût d'un sinistre appartient à l'ensemble fini $\{1, 2, \dots, r\}$ où $r \geq 1$ est entier, et l'on pose, pour tout x allant de 1 à r , $q_x = P(C = x)$.

Condition de Panjer :

Il existe deux constantes réelles a et b telles que :

$$P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) P(N = n-1) \quad n \geq 1$$

avec $P(N = 0) = p_0$ donné.

Théorème V.1 : [Réf 15]

Si la loi de N vérifie la condition de Panjer, alors la loi de X peut être calculée par :

$$P(X = 0) = p_0 ;$$

$$P(X = x) = \sum_{y=1}^{\min(x,r)} \left(a + \frac{by}{x}\right) q_y P(X = x - y) \quad x \geq 1.$$

Où $r = \max \{y : q_y > 0\}$.

Domaine d'application de cette méthode est limité (condition sur la loi de N).

La formule de Panjer est applicable dans les trois cas suivants :

- loi de Poisson ($a > 0$, $b = 0$).
- loi binomiale négative (a , $b > 0$).
- loi binomiale ($a > 0$, $b < 0$).

d- Transformation de Fourier rapide : (« Fast Fourier Transform » : FFT)

Soit ψ_X : fonction caractéristique d'une variable aléatoire X

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Théorème V.2 : [Réf 15]

Si ψ_X est intégrable, alors la loi de X admet une densité f continue et bornée donnée

$$\text{par : } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \psi_X(t) dt$$

Théorème V.3 : (cas discret) [Réf 15]

Soit $d > 0$. Si la loi de X est portée sur l'ensemble $\{kd : k \in \mathbb{N}\}$ alors la loi de X peut être calculée par :

$$P_k = P(X = kd) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-itx) \psi_X\left(\frac{t}{d}\right) dt \quad k \in \mathbb{N}.$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier. En terme de variables aléatoires, si X et Y sont indépendantes :

$$\psi_{X+Y} = \psi_X \psi_Y.$$

FFT : cet algorithme implique la transformation de Fourier discrète (directe et inverse) associée à une méthode combinatoire permettant de réduire le nombre d'opérations de la transformation de Fourier discrète.

Noter que la FFT permet de déterminer la loi de $S_n = C_1 + \dots + C_n$ à n fixé. Il reste ensuite à calculer :

$$P(X \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P(S_n \leq x) \quad x \geq 0.$$

e- Méthodes approchées :

Soit X une variable aléatoire, par exemple montant total des sinistres, on pose :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

1- Approximation d'Edgeworth à l'ordre 6 :

$$F_Z(z) \approx \phi(z) - \frac{E(Z^3)}{6} \phi^{(3)}(z) + \frac{E(Z^4) - 3}{24} \phi^{(4)}(z) + \frac{(E(Z)^3)^2}{72} \phi^{(6)}(z)$$

ϕ : Fonction de répartition de la loi normale N (0,1).

2- Approximation « Normal Power » :

Se déduit de l'approximation d'Edgeworth, mais est plus précise.

Par exemple, en ne retenant que les deux premiers termes de l'approximation d'Edgeworth, on montre que :

$$F_X(x) \approx \phi \left(\frac{-3}{\gamma(X)} + \sqrt{\frac{9}{\gamma(X)^2} + 1 + \frac{6(x - E(X))}{\sigma(X)} \frac{1}{\gamma(X)}} \right)$$

où :

$$\gamma(X) = E(Z^3) = \frac{E(X - E(X))^3}{\sigma(X)^3} : \text{Coefficient d'asymétrie.}$$

4.2- Approche multi-périodes :

Le modèle de Lundberg- Cramer :

Nous allons présenter le modèle de Lundberg-Cramer sur la probabilité de ruine d'une société d'assurance.

$N(t)$ nombre de sinistre sur l'intervalle $]0, t]$

$C_1, \dots, C_n, \dots$: suite des coût de sinistres.

$X(t)$ = montant cumulé des sinistres sur $]0, t]$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$$

C'est un processus de Poisson composé.

Hypothèses :

- 1- $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de poisson stationnaire d'intensité λ ;
- 2- pour tout $t > 0$ et $n \geq 1$, la variable aléatoire $N(t)$ et le vecteur aléatoire $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ sont indépendants ;
- 3- Les variables aléatoires $\{C_n (n \geq 1)\}$ sont indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire générique $C \geq 0$.
- F : fonction de répartition, admettant une densité f , $m = E(C)$;
- 4- $P(C = 0) = 0$;
- 5- L'encaissement des primes est proportionnel au temps.

La prime encaissée sur l'intervalle $]0, t]$ est $\Pi(t) = pt$, où $p > 0$ est une constante.

Le bénéfice de l'assureur à l'époque t est :

$$Y(t) = pt - X(t) ; \quad E Y(t) = (p - \lambda m)t ; \quad m = E(C).$$

Le coefficient de chargement technique (ou de sécurité) relatif est donné par :

$$\rho = \frac{p - \lambda m}{\lambda m} = \frac{p}{\lambda m} - 1.$$

$R \geq 0$: montant initial des réserves de l'assureur.

5- Probabilité de ruine à long terme d'une société d'assurance :**5.1- Définitions : [Réf 14]**

- 1- La probabilité de ruine, à horizon infini, du processus $(Y(t))_{t \geq 0}$, pour un montant initial de réserve égal à R , est notée par $\psi(R)$.

$$\psi(R) = P\{\exists t > 0 : Y(t) + R < 0\} = P\{\exists t > 0 : U(t) < 0\}.$$

- 2- La probabilité de non ruine (probabilité de survie) est donnée par :

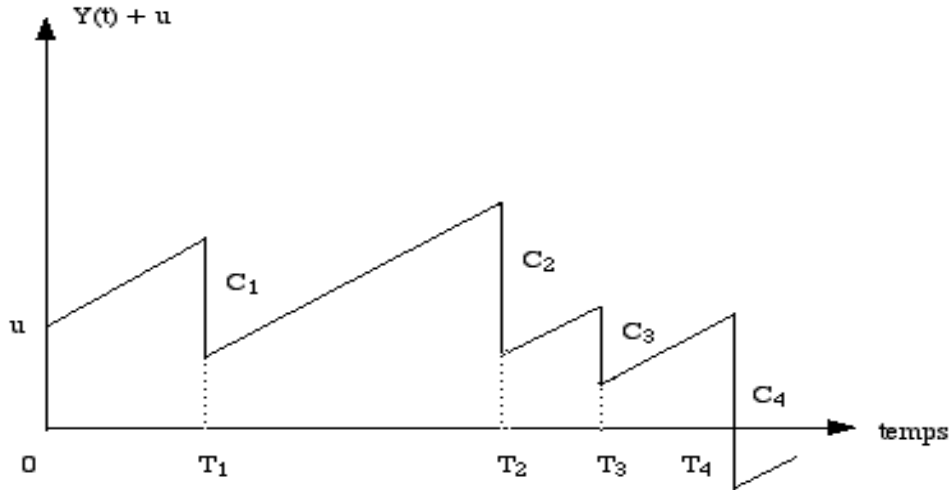
$$\phi(R) = 1 - \psi(R) = P\{Y(t) + R \geq 0, \forall t > 0\}.$$

Cette probabilité est la probabilité complémentaire de la probabilité de ruine.

- 3- L'époque (où l'instant) de ruine T est défini par :

$$T = \inf\{t \in R_+ : R + Y(t) < 0\}.$$

Une évolution possible (trajectoire) du processus $(Y(t)+R)_{t \geq 0}$ est représentée sur le graphique ci après. Sur cet exemple, on observe qu'il y a ruine à l'époque du quatrième sinistre, soit à l'époque $T = T_4$. Le montant de ce sinistre est C_4 .



Proposition 1 : [Réf 15]

La probabilité de non ruine $\phi(R) = 1 - \psi(R)$ est dérivable sur R_+ et vérifie l'équation integro- différentielle :

$$\phi'(R) = \frac{\lambda}{p} \phi(R) - \frac{\lambda}{p} \int_0^R \phi(R-z) f(z) dz. \quad R > 0. \quad (4.1)$$

Proposition 2 : [Réf 15]

La probabilité de non ruine vérifie aussi l'équation intégrale :

$$\phi(R) = \phi(0) + \frac{\lambda}{p} \int_0^R \phi(R-x) (1 - F(x)) dx. \quad (4.2)$$

Proposition 3 : [Réf 15]

La probabilité de non ruine vérifie les conditions aux limites :

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda m}{p} \quad \text{si } \lambda m < p, \quad \phi(0) = 0 \quad \text{si } \lambda m \geq p.$$

$$\phi(+\infty) = 1.$$

Remarques :

1- La probabilité de ruine en l'absence de réserves initiales s'écrit : $\psi(0) = \frac{1}{1+\rho}$.

2- Les équations précédentes n'admettent pas de solution explicites, excepté dans quelques cas particuliers (par exemple : loi exponentielle, mélange de lois exponentielles, loi gamma).

3- Dans le cas particulier où le coût de sinistre C suit la loi exponentielle $\exp(1/m)$, la probabilité de ruine admet l'expression explicite :

$$\psi(R) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{\rho R}{m(1+\rho)}\right\} \quad R \geq 0 \quad (4.3)$$

5.2- Développement en somme géométrique de la probabilité de ruine :

Ici, on suppose seulement que la loi de C admet un moment d'ordre 1. Les résultats sont donc valables pour des lois à queues épaisses (par exemple : loi log-normale, loi de Pareto avec $\alpha > 1$).

C'est le cas en particulier pour la famille des lois sous-exponentielles c'est à dire des lois F telles que, pour tout $n \geq 1$.

$$\overline{F}^{*(n)}(x) \approx n\overline{F}(x) \quad x \rightarrow +\infty$$

Où : $\overline{F} = 1 - F$: queue de distribution (ou la fiabilité).

Théorème V.4 : [Réf 15]

Etant donné F : fonction de répartition de C , on pose :

$$F_l(x) = \frac{1}{m} \int_0^x (1 - F(y)) dy \quad , x > 0. \quad (4.4)$$

Si on suppose que $\frac{\lambda m}{p} < 1$ (équivalent à $\rho > 0$) alors :

$$\psi(R) = \left(1 - \frac{\lambda m}{p}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda m}{p}\right)^n (1 - F_l^{*(n)}(R)). \quad (4.5)$$

Notons que :

$$\psi(0) = \left(1 - \frac{\lambda m}{p}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda m}{p}\right)^n \lim_{R \rightarrow 0} (1 - F_l^{*(n)}(R))$$

$$\psi(0) = \left(1 - \frac{\lambda m}{p}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda m}{p}\right)^n = \frac{\lambda m}{P}.$$

Corollaire :

Si F appartient à la famille des lois sous-exponentielles, alors la probabilité de ruine

$$\text{vérifie : } \psi(R) \approx \frac{1}{p} F_l(R) \quad R \rightarrow +\infty.$$

La formule (4.5) fournit un premier moyen d'obtenir numériquement la probabilité de ruine à temps infini.

6- Bornes de la probabilité de ruine :

Le calcul de la probabilité de ruine a toujours représenté un problème intéressant pour l'actuaire. Depuis de nombreuses années, on se contentait d'approximation asymptotique ou de bornes, car la probabilité de ruine est solution d'une équation intégral-différentielle.

6.1- Majoration de la probabilité de ruine :

Théorème V.5 : [Réf 15]

Sous les hypothèses précédentes, pour tout $R \geq 0$ la fonction de ruine vérifie l'inégalité :

$$\psi(R) \leq \exp(-rR) \quad (4.6)$$

Où : r désigne l'indice de risque (alias coefficient d'ajustement ou coefficient de Lundberg) : solution de l'équation

$$1 + \frac{p}{\lambda} r = E(\exp(rC)).$$

6.2- Le modèle de Sparre Andersen :

La première génération possible du modèle classique est le modèle dit de Sparre Andersen, dans lequel $N(t)$ n'est plus un processus de Poisson, mais un processus de renouvellement stationnaire, donné par des temps inter sauts indépendants des C_i .

Théorème V.6 :

Pour tout $R \geq 0$, on a l'encadrement :

$$b_- e^{-rR} \leq \psi(R) \leq b_+ e^{-rR} \quad (4.7)$$

où $0 \leq b_- \leq b_+ \leq 1$ vérifient :

$$b_- = \inf_{0 \leq x \leq R} \frac{e^{rx} \overline{F}_l(x)}{\int_x^\infty e^{ry} dF_l(y)} \quad \text{et} \quad b_+ = \sup_{0 \leq x \leq R} \frac{e^{rx} \overline{F}_l(x)}{\int_x^\infty e^{ry} dF_l(y)}.$$

et r est le coefficient d'ajustement.

6.3- Bornes IFR, DMRL et NBUE :

Corollaire 1 : [Réf 06]

Si F est IFR, alors :

$$\psi(x) \leq \frac{1 - P_0}{\phi} \left[\int_x^\infty K_X(y-x) dF(y) \right]^{-1} \overline{F}(x), \quad x \geq 0. \quad (4.8)$$

Telles que :

1- K est une fonction croissante satisfait :

$$K_X(y) \leq \inf_{0 \leq h \leq x} [\overline{B}(x-h) \overline{B}(y+h)]^{-1} \quad \text{pour } y \geq 0; \quad (4.9)$$

2- B une distribution NWU satisfait l'équation :

$$\int_0^\infty [\overline{B}(y)]^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi}; \quad (4.10)$$

$$3- \text{ et } 0 \leq \phi \leq 1 \text{ une constante satisfait : } a_{n+1} \leq \phi a_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.11)$$

où : $a_n = \Pr\{N > n\} = \sum_{k=n+1}^\infty P_k$ et $P_k = P\{N = k\}$.

Corollaire 2 : [Réf 06]

Si F est DMRL, alors :

$$\psi(x) \leq \frac{1-P_0}{\phi} \left[\int_x^\infty K_X(y-x) dF(y) \right]^{-1} \bar{F}(x), \quad x \geq 0 \quad (4.12)$$

telles que :

- 1- K est une fonction croissante convexe satisfait (4.9) ;
- 2- B est NWU satisfait (4.10) ;
- 3- ϕ satisfait (4.11).

Corollaire 3 : [Réf 06]

Si F est NBU, alors :

$$\psi(x) \geq \frac{1-P_0}{\phi} \left[\int_x^\infty K_X(y-x) dF(y) \right]^{-1}, \quad x \geq 0 \quad (4.13)$$

telles que :

- 1- K est une fonction croissante satisfait $K_X(y) \geq \sup_{0 \leq h \leq x} [\bar{B}(x-h)\bar{B}(y+h)]^{-1}$ pour $y \geq 0$;
- 2- (4.10) est satisfaite si B est NBU ;
- 3- ϕ satisfait $a_{n+1} \geq \phi a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Comme $NBU \Rightarrow NBUE$ signifie que la classe des distributions de type NBU est contenue dans la classe des distributions de type NBUE, alors cette borne est applicable pour la classe NBUE.

Remarques :

- 1- Si B est NWU, alors :

$$[\bar{B}(x+y)]^{-1} \leq \inf_{0 \leq h \leq x} [\bar{B}(x-h)\bar{B}(y+h)]^{-1}.$$

- 2- Si B est NBU, alors :

$$[\bar{B}(x+y)]^{-1} \geq \sup_{0 \leq h \leq x} [\bar{B}(x-h)\bar{B}(y+h)]^{-1}.$$

6.4- Calcul de la borne DMRL de la probabilité de ruine :

Si on prend F une loi exponentielle de paramètre 1 ($F(x) = 1 - e^{-x}$), et B NWU par

exemple Pareto de paramètre 1 ($\bar{B}(x) = \frac{1}{1+x}$) alors :

$$\frac{1}{\phi} = \int_0^{\infty} (1+y) e^{-y} dy = \frac{1 + \text{Log}(e)}{\text{Log}(e)^2} ;$$

$$K_X(y) = [\bar{B}(x+y)]^1, \text{ alors : } K_X(y-x) = (1+y) ;$$

$$\int_x^{\infty} K_X(y-x) dF(y) = \frac{e^{-x}(1+(1+x)\text{Log}(e))}{\text{Log}(e)^2}.$$

$$\text{Alors : } \psi(x) \leq \frac{1 - P_0(1 + \text{Log}(e))}{1 + (1+x)\text{Log}(e)}. \text{ (Telle que } P_0 = P\{N = 0\}).$$

On simule un échantillon de loi exponentielle de paramètre 1 et on calcule la probabilité de ruine.

x	0.3811	2.3769	3.3428	0.4904	0.4967
$\psi(x) \leq$	$(1 - P_0) 0.8399$	$(1 - P_0) 0.4569$	$(1 - P_0) 0.3743$	$(1 - P_0) 0.8031$	$(1 - P_0) 0.8011$

Conclusion

Conclusion :

Dans cette étude, on a défini un nouvel ordre qui est basé sur la fonction d'expansion (la fonction RS), cette fonction mesure l'écart entre la variable et son quantile. On a défini aussi les ordres de lois non paramétriques $\leq_{IFR}$, $\leq_{DMRL}$ et $\leq_{NBUE}$ à l'aide de la fonction RS.

On a montré qu'il y'a un lien entre cet ordre et les ordres $\leq_{disp}$, $\leq_{mrl}$, $\leq_{NBUE}$ et $\leq_{icx}$.

On a étudié aussi la propriété de conservation de cet ordre.

On a présenté le test de Kolmogorov-Smirnov de l'ordre RS et son application à des lois non paramétriques.

Enfin, en ce qui concerne la théorie de ruine, on a vu que l'objectif de la théorie de ruine est de modéliser l'évolution de la richesse d'une société d'assurance par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine et d'estimer le niveau de réserve initial pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

On a vu que la probabilité de ruine est difficile à calculer, pour cela on a établi des bornes pour cette probabilité de ruine.

Ce travail nous a permis d'obtenir un outil de comparaison stochastique basée sur la fonction d'expansion, étudier le test de KS de l'ordre RS et établir des bornes pour la probabilité de ruine. Il pourrait être intéressant d'étudier d'autres tests de l'ordre RS et établir des méthodes pour le calcul exact ou approché de la probabilité de ruine telles que la formule de Picard-Lefèvre, formule de Takacs et de type seal... dans des travaux futurs.

Bibliographie

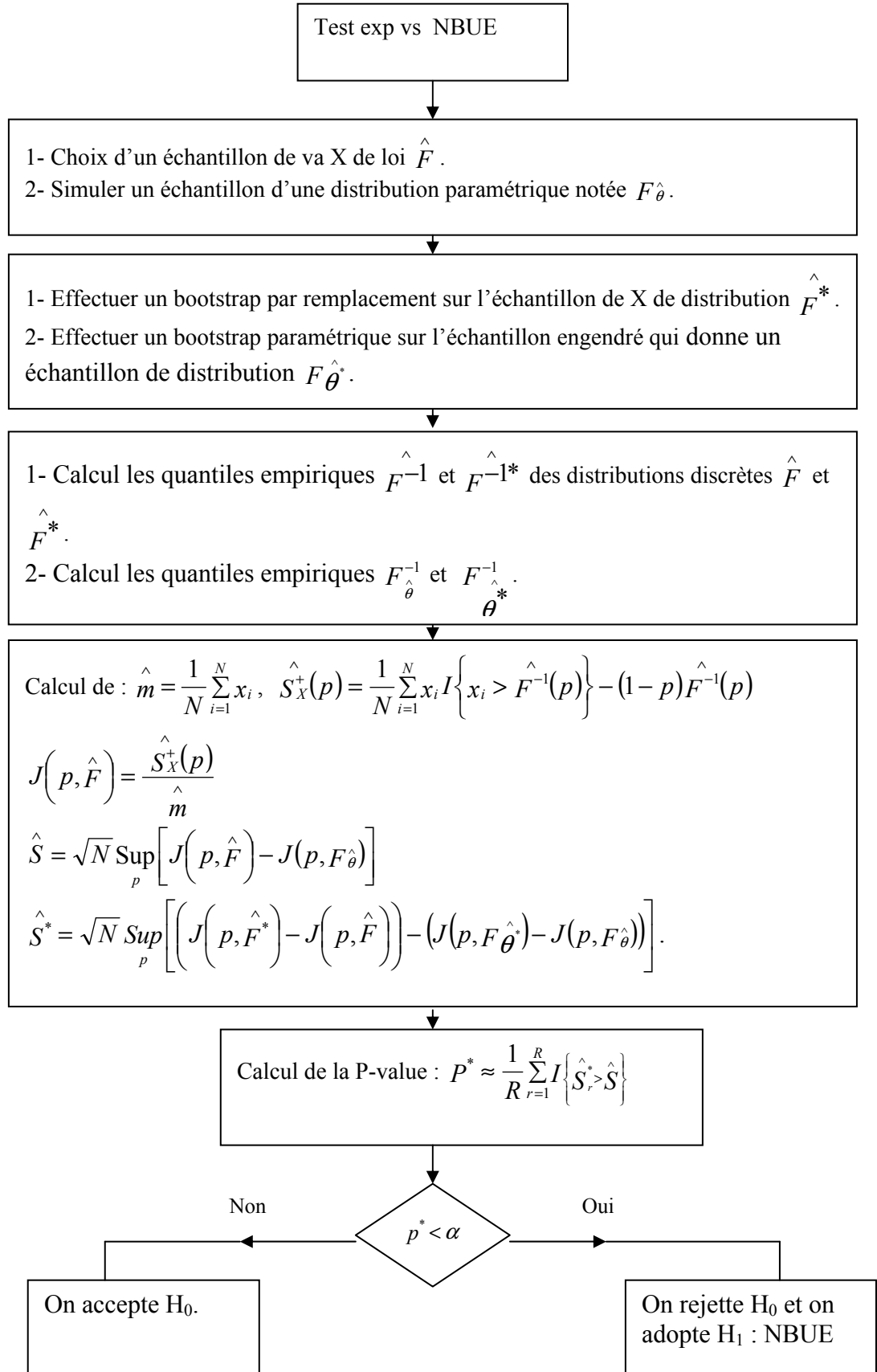
Bibliographie

- [01] Ahmed. A. N, Alzaid. A, Bartoszewicz. J and Kochar. S. C : Dispersive and superadditive ordering. *Adv. Appl. Prob.* 18, 1019 – 1022 (1986).
- [02] Bartoszewicz. J : Dispersive ordering and monotone failure rate distributions. *Adv. Appl. Prob.* 17, 472 – 474 (1985).
- [03] Belzunce. F : On a characterization of right spread order by the increasing convex order. *Statistics & Probability Letters.* 45, 103 – 110 (1999).
- [04] Belzunce. F : A family of tests for right spread order. *Statistics & Probability Letters.* 54, 72 – 92 (2001).
- [05] Bon. J : Fiabilité des systèmes - Méthodes mathématiques. Masson Paris (1995).
- [06] Cai. J, Garrido. J : A unified approach to the study of tail probabilities of compound distributions. *J. Appl. Prob.* 36, 1058 – 1073 (1999).
- [07] Charpentier. A, Denuit. M : Mathématique de l'assurance non-vie. Tome 1 : Principes fondamentaux et théorie du risque. Economica (2004).
- [08] Denuit. M, Vermandele. C : Lorenz and Excess wealth order, with applications in reinsurance theory. *Scand. Actuarial J.* 2, 170 – 185 (1999).
- [09] Denuit. M, Goderniaux. A. C, Scaillet. O : A Kolmogorov-Smirnov type test for shortfall dominance against parametric alternatives. *Research Paper N° 143* (2005).
- [10] Embrechts. P, Kluppelberg. C, and Mikousch. T : Modelling Extremal Events for insurance and finance. Springer, Berlin (1997).
- [11] Fagioli. E, Pellerey. F and Shaked. M : A characterization of the dilation order and its applications. *Statistical papers.* 40, 393- 406 (1999).
- [12] Fernandez- Ponce. J. M, Infante-Macias. R and Munoz-Pérez. J : Characterization of lifetime distributions based on a quantile dispersion measure. *Computational Statistics & Data Analysis.* 21, 547 - 561 (1996).
- [13] Fernandez- Ponce. J. M, Kochar. S. C and Munoz- Perez. J : Partial orderings of distributions based on right spread functions. *J. Appl. Prob.* 35, 221 – 228 (1998).

- [14] Grandell. J : Aspects of risk theory. Springer, New York (1997).
- [15] Hess. C : Quelques problèmes liés aux opérations d'assurance. *Economica* (2005).
- [16] Joag-dev. K, Kochar. S. C and Proschan. F : A general composition theorem and its applications to certain partial orderings of distributions. *Statistics & Probability Letters*. 22, 111 – 119 (1995).
- [17] Khaledi. B, Kochar. S.C : Ordering convolutions of Gamma random variables. *The Indian Journal of Statistics*. 66, 466- 473 (2004).
- [18] Kochar. S. C, Li. X and Shaked. M : The total time on test and the excess wealth stochastic orders of distributions. *Adv. Appl. Prob.* 34, 826 – 845 (2002).
- [19] Kochar. S. C : Excess wealth order. *Cours* (2005).
- [20] Li. X and Shaked. M : The observed total time on test and the observed excess wealth. *Statistics & Probability Letters*. 68, 247 - 258 (2004).
- [21] Munoz Pérez. J : Dispersive ordering by the spread function. *Statistics & Probability Letters*. 10, 407 – 410 (1990).
- [22] Shaked. M : Dispersive ordering of distributions. *J. Appl. Prob.* 19, 310 – 320 (1982).
- [23] Shaked. M, Shanthikumar, J.G : Stochastic order and their Applications. Academic press, New York (1994).

Annexe

L'organigramme du test de Kolmogorov-Smirnov pour l'ordre RS



Programme : exemple exponentielle

```
data1 = [0.132 0.213 0.341 0.349 0.41 0.45 0.49 0.50 0.51 0.52]
```

```
data2 = exprnd(1,25,1)
```

```
%data1 sont les données de F chapeau
```

```
%data2 sont les données de F téta chapeau
```

```
rand('state',sum(100*clock));
```

```
n = length(data1)
```

```
N = 500
```

```
stat = zeros(1,N);
```

```
samp1 = zeros(1,n);
```

```
samp2=zeros(1,n);
```

```
m1 = mean(data1)
```

```
m2 = mean(data2)
```

```
%calcul de ES1 et ES2 pour déduire  $S^{\text{chapeau}}$ 
```

```
%calcul de ES1
```

```
y = zeros(1,n);
```

```
z1 = zeros(1,n);
```

```
z2 = zeros(1,n);
```

```
u = [10 20 30 40 50]; %u est l'ordre du quantile empirique
```

```
%Q : est le quantile empirique d'ordre u
```

```
%calcul
```

```
k = length(u);
```

```
ES1 = zeros(1,k);
```

```
ES2 = zeros(1,k);
```

```
diff = zeros(1,k);
```

```
for j = 1:k
```

```
% Q1(j) est le quantile à partir de data1
```

```
Q1(j) = prctile(data1,u(j))
```

```
for i = 1:n
```

```
    if data1(i) > Q1(j)
```

```
        y(i) = 1;
```

```
    else y(i) = 0;
```

```
    end
```

```

z1(i) = data1(i)*y(i);
end
mean(z1);
ES1(j) = mean(z1) - (1-u(j))*Q1(j);
%calcul de ES2
% Q2(j) est le quantile à partir de data2
data2
Q2(j) = prctile(data2,u(j))
for i = 1:n
    if data2(i) > Q2(j)
        y(i) = 1;
    else y(i) = 0;
    end
    z2(i) = data2(i)*y(i);
end
mean(z2);
ES2(j) = mean(z2) - (1-u(j))*Q2(j);
diff(j) = (ES1(j)/m1) - (ES2(j)/m2);
end
%calcul de S^chapeau
Schap = sqrt(n)*max(diff)
%application du bootstrap
for i = 1:N
    choose = round(((n-1)*rand(1,n))+1);
    for j = 1:n
        samp1(j) = data1(choose(j)); %bootstrap non paramétrique
        samp2(j) = data2(choose(j)); %bootstrap paramétrique
    end
    for j = 1:k
        % Q3(j) est le quantile à partir de samp1
        Q3(j) = prctile(samp1,u(j))
        for r = 1:n
            if samp1(r) > Q3(j)

```

```

    y(r) = 1;
    else y(r) = 0;
    end
    z1(r) = samp1(r)*y(r);
    end
    mean(z1);
    ESsamp1(i,j) = mean(z1) - (1-u(j))*Q3(j);
    % Q4(j) est le quantile à partir de samp2
    Q4(j) = prctile(samp2,u(j))
    for r = 1:n
        if samp2(r) > Q4(j)
            y(r) = 1;
        else y(r) = 0;
        end
        z2(r) = samp2(r)*y(r);
    end
    mean(z2);
    ESsamp2(i,j) = mean(z2) - (1-u(j))*Q4(j);
    diff2(i,j) = (ESsamp1(i,j)/mean(samp1) - ES1(j)/m1) - (ESsamp2(i,j)/mean(samp2) -
    ES2(j)/m2);
    end
    stat(i) = sqrt(n)*max(diff2(i,:))
    if stat(i) > Schap
        w(i) = 1;
    else
        w(i) = 0;
    end
    w
    end
    P-value = mean(w)

```