

N° d'ordre : 10/2013-D/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE (ALGER)
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

par

Mourad RAHMANI

Thème :

Étude Combinatoire et Analytique des Suites et des Polynômes

Soutenue publiquement, le 08 Décembre 2013, devant le jury composé de :

M. BENZAGHOU Benali, Professeur à l'USTHB	Président
M. BELBACHIR Hacène, Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
M. BERRACHEDI Abdelhafid, Professeur à l'USTHB	Examineur
M. BOUYACOUB Abdelkader, Professeur à l'U. Oran	Examineur
M. MIHOUBI Miloud, Maître de Conférences classe A à l'USTHB	Examineur
M. POUZET Maurice, Professeur émérite à l'U. Lyon 1, France	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le professeur Hacène BELBACHIR pour tout le temps qu'il m'a accordé, pour m'avoir guidé, conseillé et fait confiance tout au long de cette thèse. Je lui dois ma formation de chercheur.

Je remercie aussi respectueusement le professeur Benali BENZAGHOU d'avoir bien voulu présider ce jury de thèse et de s'être intéressé à ce travail. Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honoré par la présence dans mon jury des Professeurs Abdelhafid BERRACHEDI, Abdelkader BOUYACOUB, Miloud MIHOUBI et Maurice POUZET.

Je suis reconnaissant a M. Mihoubi de m'avoir a plusieurs reprises fait bénéficier de ses critiques et suggestions, et m'avoir encouragé à continuer à travailler sur ce sujet, étudié dans la fin de la première partie de ce travail.

Durant ces années, j'ai également profité d'un environnement de travail très agréable. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues, pour les bons moments passés. Je pense en particulier à Khaled Boutarène, Fayçal Hamdi, Mohamed Amine Boutiche, Miloud Mihoubi et Djamel Berkane.

Parce qu'une thèse ne se fait pas seulement par le travail qui suit, Je tiens ici à remercier très chaleureusement toutes les personnes que j'ai rencontrées au cours des dernières années et qui m'ont soutenu.

Enfin, c'est avec une grande émotion que j'exprime ma profonde gratitude à ma famille, Particulièrement mes chers parents, mes sœurs et mes frères, ma femme Sara et mon fils Mohamed Anis.

À la mémoire de mon maître : Hachaichi Mohamed-Salah

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Introduction	1
Publications	5
I Sommes des inverses des coefficients binomiaux	6
1 Préliminaires	7
1 Combinatoire élémentaire	7
1.1 La factorielle montante	7
1.2 La factorielle descendante	8
1.3 Permutations, groupe symétrique	8
1.4 Le coefficient binomial	9
1.5 Séries génératrices	9
2 Les suites classiques	10
2.1 Les nombres de Stirling de première espèce	10
Propriétés	10
2.2 Les nombres de Stirling de seconde espèce	11
Premières propriétés	11
2.3 Les nombres r -Stirling de seconde espèce	13
2.4 Les nombres Eulériens	14
Propriétés	14
2.5 Les nombres et les polynômes de Bernoulli	16
Propriétés élémentaires	16
3 La matrice d'Akiyama-Tanigawa	17
4 L'algorithme WZ	18
4.1 Méthode de Soeur Céline Fasenmyer	18

4.2	L'algorithme de Gosper	19
4.3	L'algorithme de Zeilberger	20
2	Moments des inverses des coefficients binomiaux	22
1	Introduction	22
2	Quelques résultats sur $S_n^{(2)}$	24
3	Généralisation	25
4	Fonction génératrice ordinaire	27
5	Développement asymptotique	31
3	Les sommes alternées des inverses des coefficients binomiaux	35
1	Introduction	35
2	Formule explicite de $T_n^{(m)}$	36
3	Relation de récurrence de $T_n^{(m)}$	37
4	Fonction génératrice ordinaire de $T_n^{(m)}$	38
5	Développement asymptotique	41
6	Expression de $T_n^{(m,p)}$ à l'aide de la matrice d'Akiyama-Tanigawa	42
7	Relation de récurrence pour $T_n^{(m,p)}$	44
4	Matrices d'Akiyama-Tanigawa	46
1	Introduction	46
2	(x, y) –matrice d'Akiyama-Tanigawa	47
3	Les identités combinatoires	47
4	Fonctions génératrices	50
5	Applications	51
5.1	Les nombres r -Bell	51
5.2	Somme des inverses des coefficients binomiaux	53
II	Une inégalité intégrale pour les fonctions n-convexes	55
5	Préliminaires	56
1	Différences divisées	56
2	Polynômes de Legendre	58
6	Une inégalité intégrale pour les fonctions n-convexes	61
1	Introduction	61
2	Lemmes	63
3	Cas général	68

7	Sur les bornes de Lupaş généralisée	70
1	Introduction	70
2	Bornes explicites	71
III	Une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli	76
8	Sur une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli	77
1	Introduction	77
2	Théorème principal	78
3	Appendix	82
	Conclusion	86
	A Identités de base	87
	Bibliographie	88

Introduction

La combinatoire énumérative, une discipline à mi-chemin entre les mathématiques et l'informatique, est l'étude de structures discrètes, elle s'intéresse aux méthodes d'énumérations (récurives, séries génératrices, ...).

Citons par exemple un problème classique de combinatoire énumérative. Une partition d'un ensemble E est par définition un ensemble de parties non vides et disjointes deux à deux, dont la réunion est égale à l'ensemble E . Le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments sont les nombres de Bell. Ces nombres forment une suite d'entiers qui commence ainsi :

$$\mathcal{B}_0 = 1, \mathcal{B}_1 = 1, \mathcal{B}_2 = 2, \mathcal{B}_3 = 5, \mathcal{B}_4 = 15, \mathcal{B}_5 = 52, \mathcal{B}_6 = 203, \mathcal{B}_7 = 877, \dots$$

On souhaite décrire une méthode pour calculer le nombre de partitions d'un ensemble de taille n , pour tout entier n , sans avoir à les construire exhaustivement. La méthode la plus simple (!!) pour déterminer les nombres \mathcal{B}_n est de donner une formule exacte, chose qui n'est pas facile

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}, \text{ formule de Dobinski}$$

Pour résoudre ce type de problèmes, on dispose d'un outils très commode, qui s'appelle *séries génératrices*, pour cela on peut faire apparaître ces nombres comme coefficients d'une série. Les séries génératrices

$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1),$$
$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(1-x) \cdots (1-nx)},$$

sont une autre représentation des nombres de Bell.

Les nombres de Bell peuvent se calculer de proche en proche par la relation de récurrence suivante

$$\mathcal{B}_0 = 1, \mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_k,$$

c'est une autre méthode, souvent appelée méthode récursive.

Une question naturelle consiste à trouver un équivalent simple du nombre \mathcal{B}_n quand n tend vers l'infini. C'est le domaine de la combinatoire analytique. Dans notre exemple des nombres de Bell

$$\mathcal{B}_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{W(n)} \right)^{n+1/2} \exp \left(\frac{n}{W(n)} - n - 1 \right),$$

où W est la fonction W de Lambert¹.

Ce mémoire de thèse intitulé "Étude combinatoire et analytique des suites et des polynômes" rassemble différents travaux [5, 6, 7, 8, 9, 54] réalisés dans le domaine de la combinatoire énumérative. Il est constitué de trois parties relativement indépendantes. La première se compose de quatre chapitres, elle concerne l'étude des sommes des inverses des coefficients binomiaux et la transformation d'Akiyama-Tanigawa. La seconde partie est à son tour constituée de trois chapitres et consacrée à l'étude d'une inégalité intégrale pour les fonctions n -convexes. La troisième partie est constituée d'un chapitre sur une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli.

Partie 1 - Sommes des inverses des coefficients binomiaux

Après avoir rappelé, au chapitre 1, les préliminaires combinatoires et analytiques, nous commençons au chapitre 2, l'étude des moments d'ordre m des inverses des coefficients binomiaux

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n k^m \binom{n}{k}^{-1}.$$

Un intérêt considérable a été accordé aux propriétés de $S_n^{(m)}$ pour $m = 0$ et $m = 1$.

Le premier résultat a été obtenu en 1947 par Staver [50]

$$S_n^{(0)} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}. \quad (1)$$

Pour les applications de (1), voir Nedemeyer et Smorodinsky [38], Mansour et West [33], et pour une interprétation probabiliste, voir Letac [30, p. 14]. Enfin, pour le développement asymptotique, voir Comtet [17, p. 294] et Yang et Zhao [58].

1. La fonction W de Lambert est la réciproque de la fonction f définie par $f(w) = w \exp(w)$.

Nous obtenons la relation de récurrence, la formule explicite et la fonction génératrice ordinaire de $S_n^{(m)}$. Nous terminons ce chapitre par une étude asymptotique des moments d'ordre m des inverses des coefficients binomiaux et nous montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-m} k^m \binom{n}{k}^{-1} = m!$, pour $m > 1$.

Dans le chapitre 3, nous présentons le cas alternée des moments d'ordre m des inverses des coefficients binomiaux. Nous traitons ensuite l'étude de la généralisation

$$T_n^{(m,p)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \binom{n+p}{k+p}^{-1}.$$

Nous établissons également le lien entre $T_n^{(m,p)}$ et la matrice d'Akiyama-Tanigawa.

Le quatrième chapitre est dédié à l'extension de la transformation d'Akiyama-Tanigawa pour les suites. Soit $(a_m)_{m \geq 0}$ une suite de nombres, on appelle matrice (x, y) -d'Akiyama-Tanigawa associé à (a_m) la suite double $(a_{n,m})_{n,m \geq 0}$ donnée par

$$a_{0,m} = a_m, a_{n+1,m} = (m+1)(xa_{n,m} - ya_{n,m+1}).$$

La suite initiale est la suite $a_{0,m} = a_m$. La suite finale est la suite $(a_{n,0})_{n \geq 0}$. Nous donnons les formules impliquées par la (x, y) -matrice d'Akiyama-Tanigawa. Comme application nous montrons que la somme des inverses des coefficients binomiaux est la somme du produit des nombres de Stirling de première espèce $s(n, k)$ et des nombres de Genocchi G_n

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n s(n+1, k+1) G_{k+1}.$$

Partie 2 - Une inégalité intégrale pour les fonctions n -convexe

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Considérons la fonctionnelle de Čebyšev T définie par

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx. \quad (2)$$

Le problème de l'estimation de la fonctionnelle T vis-à-vis de la convexité a été étudié par plusieurs auteurs, en particulier, Lupaş [31] a montré que si les fonctions f et g sont convexes alors

$$T(f, g) \geq \frac{12}{(b-a)^4} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) g(x) dx, \quad (3)$$

l'égalité étant vérifiée si et seulement si au moins l'une des fonctions f ou g est une fonction affine sur $[a, b]$. Nous rappelons, au chapitre 5, quelques définitions dont on aura besoin dans le reste de cette

partie. On se propose de généraliser le résultat de Lupaş au cas des fonctions n -convexes dans le chapitre 6. La méthode de condensation de Dodgson est employée. Le chapitre 7 est dédié à l'évaluation de bornes pour la fonctionnelle de Lupaş généralisée.

Partie 3 - Une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli

Le chapitre 8, contient une généralisation d'une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli.

Théorème 1. Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Pour tout entier impair r , on a

$$\frac{r!}{n+r} \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} P_r^{(m,k)}(n) k^n (k-m)^{n-1},$$

avec $P_r^{(m,k)}(n)$, est une suite de polynômes de degré $2r$ en n, m et k , homogène par rapport à m et k de degré r , satisfaisant à la relation de récurrence suivante

$$P_1^{(m,k)}(n) = (2n+1)k - (n+1)m,$$

$$P_{r+2}^{(m,k)}(n) = (n+r+1)(n+r)m^2 P_r^{(m,k)}(n) + 2k(k-m)(n+r+1)(2n+2r+3)P_r^{(m,k)}(n+1).$$

(ii) les polynômes $P_r^{(m,k)}(n)$, $r = 1, 3, \dots$, peuvent être exprimé en

$$P_r^{(m,k)}(n) = \sum_{i=0}^r (-1)^i Q_{i,r}(n) m^i k^{r-i},$$

avec $Q_{i,r}(n)$ satisfont à la relation de récurrence

$$Q_{i,r+2}(n) = (n+r+1)(n+r)Q_{i-2,r}(n) + (2n+2r+3)(2n+2r+2)(Q_{i-1,r}(n+1) + Q_{i,r}(n+1)).$$

(iii) Dans la forme explicite, les polynômes $Q_{i,r}(n)$, sont donnés par

$$Q_{i,r}(n) = (2n+2r-1) \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left[2^{\theta_j} \left(\binom{\theta_j}{i-2j} + \frac{n+\theta_j+1}{2n+2\theta_j+1} \binom{\theta_j}{i-(2j+1)} \right) \Delta_{j,r}(n) \prod_{s=\theta_j}^{r-2} (n+s+1)(2n+2s+1) \right],$$

avec $\theta_j = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - j$, $\Delta_{0,r}(n) = 1$ et pour $j \in \mathbb{Z}^+$, $\Delta_{j,r}(n) = \frac{\binom{\lfloor r/2 \rfloor}{j}}{\prod_{s=0}^{j-1} (2n-2j+2s+r+2)(2n-2j+2s+2r+1)}$.

La technique employée est basée sur l'algorithme de Zeilberger. L'appendice rédigé par Ira M. Gessel propose une formule très proche via le calcul ombra.

Publications

Ce travail a donné lieu aux publications suivantes :

Partie I

1. **Sums involving moments of reciprocals of binomial coefficients.** H. Belbachir, M. Rahmani, and B. Sury. *J. Integer Seq.*, 14(6) : Article 11.6.6, 16, 2011.
2. **Alternating sums of the reciprocals of binomial coefficients.** H. Belbachir, M. Rahmani, and B. Sury. *J. Integer Seq.*, 15(2) : Article 12.2.8, 16, 2012.
3. **The Akiyama -Tanigawa matrix and related combinatorial identities.** M. Rahmani. *Linear Algebra Appl.*, 438(1) : 219-230, 2013.

Partie II

1. **An integral inequality for n-convex functions.** H. Belbachir and M. Rahmani. *Math. Inequal. Appl.*, 15(1) : 117-126, 2012.
2. **Bounds for the generalized Lupas functional.** H. Belbachir and M. Rahmani. *Creat. Math. Inform.*, 20(1) : 24-31, 2011.

Partie III

1. **On Gessel-Kaneko's identity for Bernoulli numbers.** H. Belbachir and M. Rahmani. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 7(1) : 1-10, 2013.

Première partie

**Sommes des inverses des coefficients
binomiaux**

La combinatoire énumérative, c'est le royaume du signe $=$, c'est l'art d'écrire des égalités exactes, par opposition à la combinatoire analytique (née avec Jacques Bernoulli, Moivre et — surtout — Laplace), où règne le signe \approx , et qui consiste à chercher des approximations : des encadrements, des équivalents asymptotiques (comme $d_n \sim n!/e$ pour le nombre de dérangements, au lieu de l'égalité exacte). Quant au problème des quatre couleurs, par exemple, c'est ce que j'appelle la combinatoire existentielle, c'est le royaume du signe \exists .

Xavier Viennot

1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux définitions des objets combinatoires dont nous fixons les notations et la terminologie. Pour des notions plus précises et détaillées, le lecteur pourra consulter [17] ou [23].

1 Combinatoire élémentaire

1.1 La factorielle montante

Soient a un nombre réel ou complexe et n un entier positif. La factorielle montante $\langle a \rangle_n$ est définie par :

$$\langle a \rangle_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ a(a+1) \cdots (a+n-1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On peut prolonger la définition de $\langle a \rangle_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ en posant :

$$\langle a \rangle_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

où $\Gamma(x)$, est la fonction gamma d'Euler donné par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Notons les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\langle 1 \rangle_n &= n!, \\ \langle a \rangle_{i+j} &= \langle a \rangle_i \langle a+i \rangle_j, \\ \langle a \rangle_n &= (-1)^n \langle 1-n-a \rangle_n.\end{aligned}$$

1.2 La factorielle descendante

La factorielle descendante $(a)_n$ est définie par

$$(a)_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ a(a-1) \cdots (a-n+1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}(n)_n &= n!, \\ (a)_n &= \langle a-n+1 \rangle_n, \\ \langle a \rangle_n &= (a+n-1)_n.\end{aligned}$$

1.3 Permutations, groupe symétrique

On appelle permutation toute bijection de l'ensemble d'entiers $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ sur lui-même. On note par $\sigma\mu$ la composée des deux permutations σ et μ . Ceci munit l'ensemble \mathfrak{S}_n des permutations d'une structure de groupe appelé groupe symétrique. L'unité de ce groupe est la permutation identité, notée ε . On représente une permutation par la suite des images des entiers de 1 à n .

Le nombre des permutations de l'ensemble $[n]$ vaut $n!$. On appelle

- l'ordre de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\sigma^k = \varepsilon$,
- un point fixe de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, un point x tel que $\sigma(x) = x$,
- un élément mobile, un élément non fixe,
- un cycle de longueur $k \geq 2$ une permutation dont les éléments mobiles, ou supports, sont de la forme

$$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x), \sigma^k(x) = x\},$$

- orbite de x par σ , l'ensemble fini $\{\sigma^p(x), p \in \mathbb{N}\}$,
- montée de σ en position i si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, dans le cas contraire, on dit que σ admet une descente.

1.4 Le coefficient binomial

Le coefficient binomial est défini pour tout nombre complexe a et tout entier $n \geq 0$ par

$$\binom{a}{n} = \frac{(a)_n}{n!}.$$

Notons que si a , est un entier positif, alors $(a)_n$, est le nombre de permutations de n éléments parmi a et $\binom{a}{n}$ est le nombre de façons de prendre n éléments dans un ensemble de a éléments. On trouvera en annexe A des identités sur les *coefficients binomiaux* qui nous seront utiles dans la suite du document.

1.5 Séries génératrices

Soit \mathcal{A} un anneau commutatif, ayant un élément unité. On appelle série formelle, à coefficients dans \mathcal{A} , et en l'indéterminée z , toute expression formelle du type

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

où les a_n , sont appelés coefficients de f . On note $\mathcal{A}[[z]]$ l'ensemble des séries formelles à valeurs dans \mathcal{A} .

Soient $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries formelles. On appelle produit de Hadamard de $f(z)$ par $g(z)$, la série formelle donnée par

$$f(z) \circ g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n. \quad (1.1)$$

L'ensemble $\mathcal{A}[[z]]$ muni de l'addition des séries formelles et du produit d'Hadamard est un anneau.

On appelle fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, par rapport à la suite $(b_n)_{n \geq 0}$, la série formelle définie en (1.1).

Lorsque $g(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$, la série $f(z) \circ g(z) = f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est appelée fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$.

Lorsque $g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$, la série $f(z) \circ g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$ est appelée fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$.

La transformation de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1} que l'on définit sur l'algèbre des séries formelles a pour effet d'envoyer toute fonction génératrice ordinaire sur la fonction génératrice exponentielle correspondante

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!},$$

où la transformation de Laplace d'une fonction h est définie par

$$\mathcal{L}(h) = \int_0^{+\infty} e^{-st} h(t) dt.$$

2 Les suites classiques

2.1 Les nombres de Stirling de première espèce

Les nombres de Stirling de première espèce $s(n, k)$, répertoriée A008275 dans l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers OEIS [45], sont les coefficients des polynômes factoriels descendants relativement à la base canonique x^n , c'est-à-dire

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k.$$

Le nombre $(-1)^{n-k} s(n, k)$ est égal au nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ ayant k cycles.

Propriétés

1. **La relation de récurrence** : les nombres $s(n, k)$ satisfont

$$s(n, 0) = s(0, k) = 0, \text{ sauf } s(0, 0) = 1 \tag{1.2}$$

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1) s(n-1, k) \text{ pour } n, k \geq 1. \tag{1.3}$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table suivante :

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	-1	1							
3	2	-3	1						
4	-6	11	-6	1					
5	24	-50	35	-10	1				
6	-120	274	-225	85	-15	1			
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

2. **Les fonctions génératrices** : les $s(n, k)$ ont pour fonction génératrice double

$$\sum_{n, k \geq 0} s(n, k) \frac{x^n}{n!} u^k = (1 + x)^u,$$

et pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\ln(1 + x))^k. \quad (1.4)$$

2.2 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k blocs (A008277 dans [45]), c'est à dire en k sous ensembles non vides de $[n]$, disjoints deux à deux, de réunion $[n]$.

On peut aussi définir algébriquement ces nombres comme étant, les coordonnées du monôme x^n dans la base $(x)_n$, plus précisément, les nombres de Stirling de première et seconde espèce peuvent être considérés comme deux systèmes inverses l'un de l'autre, en ce sens que, pour tout nombre naturel n , la matrice formée par les éléments des n premières lignes et des n premières colonnes de la table des nombres de Stirling de première espèce est l'inverse de la matrice correspondante extraite de la table des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} (x)_k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \langle x \rangle_k \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ou encore comme la différence d'ordre k en $x = 0$ du monôme x^n à un facteur $k!$ près. En d'autres termes

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \Delta^k (x^n) |_{x=0},$$

où Δ se réfère à l'opérateur de différence.

Premières propriétés

1. **Formule explicite** : elle s'écrit

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^n (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n,$$

avec la convention $0^0 = 1$.

2. **Réurrence triangulaire** : la formule explicite donne

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\} = 1.$$

La formule de récurrence triangulaire

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\},$$

permet de calculer les premières valeurs des nombres $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

On a aussi une récurrence verticale donnée par

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{j=0}^{n-k+1} k^j \left\{ \begin{matrix} n-j \\ k-j \end{matrix} \right\}.$$

3. **Les fonctions génératrices** : les $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ont pour fonction génératrice double

$$\sum_{n,k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} u^k = \exp(u(e^x - 1)),$$

pour fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{n-k} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{(1-jx)}$$

et pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

4. **Les nombres de Bell** : les nombres

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\},$$

s'appellent les nombres de Bell (A000110 dans [45]), \mathcal{B}_n est le nombre total de partition de l'ensemble $[n]$. Les premières valeurs sont données dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
\mathcal{B}_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597	27644437

Voici les trois principaux résultats sur les nombres de Bell

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_j, \text{ la relation de récurrence,}$$

$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1), \text{ la fonction génératrice,}$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}, \text{ la formule explicite (Dobinski).}$$

5. **Les nombres de Worpitzky** : les nombres

$$W_{n,k} = k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}, \tag{1.6}$$

s'appellent les nombres de Worpitzky (A028246 dans [45]). On a la formule de récurrence

$$W_{n,k} = (k+1) W_{n-1,k} + kW_{n-1,k-1}, \tag{1.7}$$

et la formule explicite

$$W_{n,k} = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} \binom{k}{i} (i+1)^n.$$

2.3 Les nombres r -Stirling de seconde espèce

Pour $0 \leq k \leq n$ et $r \geq 0$, on note $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$ le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k sous ensembles non vides telle que les r premiers éléments sont dans des sous ensembles distincts.

Remarque 1.1. Pour $r = 0$ ou 1 , on retrouve les nombres de Stirling de seconde espèce classiques.

Propriétés

Les propriétés des nombres r -Stirling sont cités dans [11].

1. **La relation de récurrence** : les nombres r -Stirling de seconde espèce vérifient la relation de

réurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = 0, & n < r, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \delta_{k,r}, & n = r, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r, & n > r, \end{cases} \quad (1.8)$$

2. **La fonction génératrice** : la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r -Stirling de second espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{rx} (e^x - 1)^k. \quad (1.9)$$

3. **Identités** : voici quelques identités relatives aux nombres r -Stirling de seconde espèce

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_r = r^{n-r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n+r-1 \\ k+r \end{matrix} \right\}_{r-1} \quad (1.10)$$

2.4 Les nombres Eulériens

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ le nombre de permutation sur l'ensemble $[n]$ possédant exactement $k-1$ montées (A008292 dans [45]). Ce nombre est appelé nombre eulérien d'ordre (n, k) .

Les nombres eulériens apparaissent aussi dans la fonction génératrice de la suite des puissances n -èmes

$$\sum_{i \geq 0} i^n x^i = \frac{\sum_{k=1}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle x^k}{(1-x)^{n+1}}.$$

Propriétés

1. **Relation de récurrence** : la suite double $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ satisfait à la récurrence

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (n-k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle + k \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle,$$

avec $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = 0$ si $k > n$, $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle = 1$.

Les valeurs pour $0 \leq n \leq 8$ sont :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

2. **La formule explicite** : la formule explicite des nombres eulériens est donnée par :

$$\langle n \rangle_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

3. **Identités** : voici quelques identités relatives aux nombres eulériens

$$\sum_{k=0}^n \langle n \rangle_k x^k = \sum_{k=0}^n (x-1)^{n-k} kW_{n-1,k-1}, \quad (1.11)$$

$$\sum_{k=0}^n \langle n \rangle_k \binom{k+1}{t} = W_{n,n-t}. \quad (1.12)$$

4. **La fonction génératrice** : la fonction génératrice double de la suite des nombres eulériens est donnée par :

$$\sum_{n,k \geq 0} \langle n \rangle_k \frac{x^n}{n!} z^k = \frac{1-z}{1-z \exp(x(1-z))}.$$

2.5 Les nombres et les polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli peuvent être définis de différentes façons, on peut, par exemple les définir comme étant l'unique suite de polynômes $(B_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B'_n(x) &= nB_{n-1}(x), \quad (n \geq 1), \\ \int_0^1 B_n(x) dx &= 0, \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Voici les premières valeurs des polynômes de Bernoulli

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

On peut aussi définir ces polynômes par la série génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

On note $B_n = B_n(0)$ le n -ième nombre de Bernoulli. Les premières valeurs de B_n sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	-1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	1/30	0	5/66	0	-691/2730

Propriétés élémentaires

Les polynômes de Bernoulli vérifient les identités suivantes :

1. $\forall n > 1 : B_n(0) = B_n(1)$.
2. $\forall n \geq 1 : B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} : B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$.

$$4. \forall n \geq 1 : B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

$$5. \forall n \geq 1 : B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^k.$$

3 La matrice d'Akiyama-Tanigawa

Soit $(a_m)_{m \geq 0}$ une suite de nombres. On appelle matrice d'Akiyama-Tanigawa associée à la suite (a_m) , la suite double $(a_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 0}$ donnée par

$$\begin{aligned} a_{0,m} &= a_m, \\ a_{n+1,m} &= (m+1)(a_{n,m} - a_{n,m+1}), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La suite $(a_{0,m})$, première ligne de la matrice, est la suite initiale. La suite $(a_{n,0})$, première colonne de la matrice, est la suite finale.

Inversement, étant donnée une suite finale $(a_n)_{n \geq 0}$, la matrice d'Akiyama-Tanigawa associée à (a_n) , la suite $(a_{n,m})$ donnée par

$$\begin{aligned} a_{n,0} &= a_n \\ a_{n,m+1} &= a_{n,m} - \frac{1}{m+1} a_{n+1,m}, \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Théorème 1.2 (Kaneko [26]).

1. Etant donnée une suite initiale $(a_m)_{m \geq 0}$, définissant la suite $(a_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 0}$ par (1.13), alors

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m}.$$

2. Soit $A(z) = \sum_{m \geq 0} a_{0,m} z^m$ la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite finale est donnée par

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n,0} \frac{z^n}{n!} = e^z A(1 - e^z).$$

Théorème 1.3 (Merlini, Sprugnoli et Verri [34]).

1. Etant donnée une suite finale $(a_n)_{n \geq 0}$, définissons la suite $(a_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 0}$ par (1.14), alors

$$a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n=0}^m s(m+1, n+1) a_{n,0}.$$

2. Soit $\mathcal{A}(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n,0} \frac{z^n}{n!}$ la fonction génératrice exponentielle de la suite finale. Alors la fonction

génératrice ordinaire de la suite initiale est donnée par

$$A(z) = \sum_{m \geq 0} a_{0,m} z^m = \frac{1}{1-z} \mathcal{A}(\ln(1-z)).$$

Le premier exemple dans la littérature mathématique est celui d'Akiyama et Tanigawa dans [2]. Soit la suite initiale

$$a_{0,m} = \frac{1}{m+1},$$

par (1.13) on construit la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \dots \\ 1/6 & 1/6 & 3/20 & 2/15 & 5/42 & \dots \\ 0 & 1/30 & 1/20 & 2/35 & 5/84 & \dots \\ -1/30 & -1/30 & -3/140 & -1/105 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

alors, on obtient comme suite finale, la suite des nombres de Bernoulli $a_{n,0} = B_n(1)$.

Théorème 1.4 (Inaba [25]).

$$a_{n,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{i=0}^m s(m+1, i+1) B_{n+i}(1) \quad (1.16)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{m+i+1}{m+1}^{-1} W_{n,i}. \quad (1.17)$$

4 L'algorithme WZ

Dans cette section, nous décrivons quelques algorithmes tirés du livre $A = B$ (cf. [41]). La notion de preuve automatique est apparue pour la première fois avec la thèse de Fasenmyer en 1945 (voir [18]). Elle a développé une méthode pour déterminer des relations de récurrence satisfaites par des termes hypergéométriques. On rappelle que une suite f_n , est dite hypergéométrique si et seulement si le rapport $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, est rationnel.

4.1 Méthode de Soeur Céline Fasenmyer

Soit la série

$$a(n) = \sum_k F(n, k),$$

où F est hypergéométrique en n et en k . L'algorithme de soeur Céline permet de déterminer une formule de récurrence sur le sommant $F(n, k)$, de la forme

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{i,j}(n) F(n-j, k-i) = 0,$$

où $c_{i,j}$ sont indépendants de k .

En sommant cette dernière égalité sur k , on obtient une récurrence sur la série

$$\sum_{l=0}^L s_l(n) a(n+l) = 0.$$

La technique est généralement assez lente. Le problème majeur est comment choisir I et J ?

4.2 L'algorithme de Gosper

En 1978, Gosper [22] a mis au point un algorithme permettant de décider si une fonction hypergéométrique admet ou non une somme hypergéométrique.

Algorithme de Gosper

Input : une suite hypergéométrique f_n

Output : une suite hypergéométrique g_n telle que $g_n = \sum_n f_n$ ou bien fail

1. Cherchons tout d'abord la décomposition suivante

$$\begin{aligned} r(n) &= \frac{f_{n+1}}{f_n} \\ &= \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)}, \end{aligned}$$

où $a(n)$, $b(n)$ et $c(n)$ sont des polynômes en n telles que $a(n)$ et $b(n)$ vérifient

$$\text{pgcd}(a(n), b(n+h)) = 1, \text{ pour tout entier } h \geq 0. \quad (1.18)$$

Théorème 1.5. Soit K un corps de caractéristique zéro, et $r \in K[n]$ une fonction rationnelle non nulle. Alors il existe un unique triplet a, b, c de polynômes de $K[n]$ vérifiant (1.18) tels que b, c sont unitaires, $r(n) = \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)}$, $\text{pgcd}(a(n), c(n)) = 1$ et $\text{pgcd}(a(n), c(n+1)) = 1$.

2. Cherchons un polynôme $x(n)$ solution de l'équation

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n). \quad (1.19)$$

Théorème 1.6. Soient $a(n), b(n), c(n)$ des polynômes en n vérifiant (1.18). Alors toute fonction rationnelle $x(n)$ solution de (1.19) est nécessairement un polynôme.

Pour déterminer le degré d d'une éventuelle solution $x(n)$ de (1.19) on distingue deux cas suivant les degrés et coefficients dominants de $a(n)$ et $b(n)$.

a. Si $\deg a(n) \neq \deg b(n)$ ou $\text{lc } a(n) \neq \text{lc } b(n)$, alors

$$d = \deg c(n) - \max(\deg a(n), \deg b(n)).$$

b. Si $\deg a(n) = \deg b(n)$ et $\text{lc } a(n) = \text{lc } b(n) = \lambda$, alors

b1. Si les termes de second ordre du membre gauche de (1.19) ne s'annulent pas, alors

$$d = \deg c(n) - \deg a(n) + 1.$$

b2. Si les termes de second ordre du membre gauche de (1.19) s'annulent, soient $a(n) = \lambda n^k + An^{k-1} + \dots$, $b(n-1) = \lambda n^k + Bn^{k-1} + \dots$, alors

$$d = \frac{B - A}{\lambda}.$$

Ensuite, la méthode de coefficients indéterminés permet d'explicitier une solution polynomiale.

3. Si un tel $x(n)$ existe, renvoyer

$$g_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} f_n,$$

sinon renvoyer fail.

4.3 L'algorithme de Zeilberger

L'algorithme de Zeilberger [59] permet de calculer des sommes définies $f(n) = \sum_{k=0}^n F(n, k)$ même lorsque l'algorithme de Gosper échoue. L'idée est d'essayer de trouver une formule de récurrence pour $f(n)$ en fonction de n , que l'on peut ensuite résoudre pour trouver une forme close. L'astuce est d'utiliser une version étendue de l'algorithme de Gosper, en ajoutant des paramètres qui seront déterminés au cours de l'algorithme. Outre la récurrence, l'algorithme de Zeilberger fournit un certificat $R(n, k)$ et qui permet de vérifier que cette récurrence est correcte. Rappelons qu'une fonction $F(n, k)$ est dite proprement hypergéométrique si elle peut se mettre sous la forme

$$F(n, k) = P(n, k) \frac{\prod_{i=1}^u (a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_{i=1}^v (a'_i n + b'_i k + c'_i)!} x^k,$$

où P est un polynôme, les a_i, b_i, a'_i, b'_i sont des entiers, et u, v sont des entiers positifs ou nuls.

Théorème 1.7 (Wilf-Zeilberger). *Soit $F(n, k)$ une fonction proprement hypergéométrique. Alors F*

satisfait une récurrence de la forme

$$\sum_{j=0}^J a_j(n) F(n+j, k) = G(n, k+1) - G(n, k),$$

avec $R(n, k) = G(n, k) / F(n, k)$ est une fonction rationnelle en n et k . De plus $J \leq |b_1| + \dots + |b_u| + |b'_1| + \dots + |b'_v|$.

Algorithme de Zeilberger

Input : une expression $F(n, k)$ hypergéométrique en n et k et un entier J .

Output : une récurrence linéaire d'ordre au plus J pour $f(n)$ ou bien `fail`.

1. Calculer

$$r_{n,k} = \frac{F(n, k)}{F(n-1, k)}.$$

2. Calculer les fractions rationnelles

$$R_0 = 1,$$

$$R_j = R_{j-1} r_{n+j, k} \text{ pour } 1 \leq j \leq J.$$

3. Appliquer l'algorithme de Gosper étendu par rapport à k à $(R_0 + C_1 R_1 + \dots + C_J R_J) F(n, k)$ où les C_j sont des indéterminées ne dépendant pas de k .

4. Si l'algorithme de Gosper retourne `fail`, faire de même. Sinon, soit $G(n, k)$ la somme indéfinie retournée, et les C_j sont des fractions rationnelles en n .

5. Retourner la récurrence

$$f(n) + C_1 f(n+1) + \dots + C_J f(n+J) = G(n, n+1) - G(n, 0).$$

Version étendue de l'algorithme de Gosper

Les paramètres C_j ajoutés par Zeilberger interviennent de façon linéaire dans le polynôme $a(k)$, et donc aussi dans l'équation

$$a(k) x(k+1) - b(k-1) x(k) = c(k).$$

On applique donc le raisonnement usuel de l'algorithme de Gosper sauf qu'en plus des coefficients de $x(k)$, on a aussi les coefficients $C_j(n)$

Remarque 1.8. Pour les calculs, nous utilisons le logiciel Maple, ainsi que le module EKHAD pour Maple, disponible sur le site web de Zeilberger.

2

Moments des inverses des coefficients binomiaux

1 Introduction

Pour tous entiers n et $m \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux sommes de la forme

$$S_n^{(m)} := \sum_{k=0}^n k^m \binom{n}{k}^{-1}. \quad (2.1)$$

Il y a plusieurs articles dans la littérature traitant des sommes des inverses des coefficients binomiaux [42, 43, 46, 47, 52, 55, 57, 61]. Les cas $m = 0$ et $m = 1$ ont été intensivement étudiés.

Le premier résultat important a été obtenu en 1947 par Staver [50]. À partir de la relation

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^{-1} = \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k}^{-1},$$

Staver a obtenu une relation entre $S_n^{(1)}$ et $S_n^{(0)}$

$$S_n^{(1)} = \frac{n}{2} S_n^{(0)}, \quad (2.2)$$

et a établi une relation de récurrence pour la suite $S_n^{(0)}$

$$S_{n+1}^{(0)} = \frac{n+2}{2(n+1)} S_n^{(0)} + 1. \quad (2.3)$$

Staver a aussi prouvé pour la première fois la formule bien connue

$$S_n^{(0)} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}. \quad (2.4)$$

Les premières valeurs de $S_n^{(0)}$ sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_n^{(0)}$	1	2	5/2	8/3	8/3	13/5	151/60	256/105	83/35

Pour les applications de (2.4), voir Nedemeyer et Smorodinsky [38], Mansour et West [33], et pour une interprétation probabiliste, voir Letac [30, p. 14]. Enfin, pour le développement asymptotique, voir Comtet [17, p. 294] et Yang & Zhao [58].

En 1981, en employant le raisonnement par récurrence et la relation

$$\binom{n}{k}^{-1} = \binom{n-1}{k-1}^{-1} - \frac{n-k}{n-k+1} \binom{n}{k-1}^{-1},$$

Rockett [43] a redémontré (2.3) et (2.4).

En 1993, Sury [51] a relié l'inverse du coefficient binomial à la fonction bêta comme suit

$$\binom{n}{k}^{-1} = (n+1) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx,$$

et a prouvé la relation (2.4) (voir aussi [55]). Quelques années plus tard, Mansour [32], a généralisé l'idée de Sury [51], et a donné une approche basée sur l'analyse pour obtenir les fonctions génératrices de certaines suites combinatoires.

Théorème 2.1 (Mansour [32]). Soient r, k et n des entiers ≥ 0 tels que $n \geq k$ et soit $f_r(n, k)$ donné par

$$f_r(n, k) = \frac{(n+r)!}{n!} \int_{u_1}^{u_2} p^k(t) q^{n-k}(t) dt,$$

avec $p(t)$ et $q(t)$ sont deux fonctions définies sur l'intervalle $[u_1, u_2]$. Soient $\{a_n\}_{n \geq 0}$ et $\{b_n\}_{n \geq 0}$ deux suites quelconques, et $A(x), B(x)$ les fonctions génératrices ordinaires correspondantes. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n f_r(n, k) a_k b_{n-k} \right] x^n = \frac{d^r}{dx^r} \left[x^r \int_{u_1}^{u_2} A(xp(t)) B(xq(t)) dt \right]. \quad (2.5)$$

En particulier,

$$\sum_{n \geq 0} S_n^{(0)} x^n = \frac{2}{(x-1)(x-2)} - \frac{2 \ln(1-x)}{(x-2)^2}, \quad (2.6)$$

et

$$\sum_{n \geq 0} S_n^{(1)} x^n = -\frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2} + \frac{2x \ln(1-x)}{(x-2)^3}.$$

2 Quelques résultats sur $S_n^{(2)}$

Dans cette section, nous donnons quelques résultats pour le cas $m = 2$. On utilise le théorème 2.1, pour $a_n = n^2$ et $b_n = 1$, on obtient,

$$A(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3},$$

et

$$B(x) = \frac{1}{1-x},$$

d'autre par (2.5) donne la fonction génératrice ordinaire de $S_n^{(2)}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} S_n^{(2)} x^n &= \frac{d}{dx} \left[x \int_0^1 \frac{xt(xt+1)}{(1-xt)^3(1-x+xt)} dt \right] \\ &= \frac{2x(2x^3 - 3x^2 - 3x + 5)}{(x-2)^3(x-1)^3} - 2(x^2 + 2x - 2) \frac{\ln(1-x)}{(x-2)^4}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De plus, on a une relation entre $S_n^{(2)}$ et $S_n^{(0)}$ donné par le théorème suivant

Théorème 2.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$S_{n+1}^{(2)} = \frac{(n-1)(n+2)^2}{2(n-2)(n+1)^2} S_n^{(2)} + \frac{(n+2)(n^2-2n-2)}{2(n-2)}, \quad (2.8)$$

et

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{4}(n+1)(n-2)S_n^{(0)} + \frac{1}{2}(n+1)^2. \quad (2.9)$$

Démonstration. Nous employons la méthode WZ [41]. Posons $L(n, k) := k^2 \binom{n}{k}^{-1}$, par le package Maple "EKHAD" de Zeilberger nous construisons la fonction

$$G(n, k) = \left(n^2 k^2 + n + 3nk - nk^2 + 2 + 2k - 2k^2 \right) (n+1-k) \binom{n}{k}^{-1},$$

telle que

$$(n-1)(n+2)^2 L(n, k) - 2(n-2)(n+1)^2 L(n+1, k) = G(n, k+1) - G(n, k).$$

En sommant l'équation télescopique ci-dessus pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient la relation de récurrence suivante

$$(n-1)(n+2)^2 \sum_{k=0}^{n-1} L(n,k) - 2(n-2)(n+1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} L(n+1,k) = G(n,n) - G(n,0),$$

et par conséquent

$$(n-1)(n+2)^2 S_n^{(2)} - (n-1)(n+2)^2 n^2 - 2(n-2)(n+1)^2 S_{n+1}^{(2)} + 2(n-2)(n+1)^2 \left(\frac{n^2}{n+1} + (n+1)^2 \right) = n^3(n-1),$$

Pour montrer la relation (2.9), nous faisons un raisonnement par récurrence sur n , le résultat est vraie pour $n=0$, nous prouvons maintenant que la formule est vraie pour $n+1$ à l'aide de la relation (2.8) et l'hypothèse de récurrence.

$$S_{n+1}^{(2)} = \frac{(n-1)(n+2)^2}{2(n-2)(n+1)^2} \left(\frac{1}{4}(n+1)(n-2)S_n^{(0)} + \frac{1}{2}(n+1)^2 \right) + \frac{(n+2)(n^2-2n-2)}{2(n-2)}.$$

En appliquant (4.3), on obtient

$$S_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(n+2)(n-1)S_{n+1}^{(0)} + \frac{1}{2}(n+2)^2,$$

et le théorème est complètement démontré. □

En utilisant $\sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k}^{-1} = \sum_{k=0}^n (n-k)^3 \binom{n}{k}^{-1}$ et les relations (2.2) et (2.9), nous obtenons une relation entre $S_n^{(3)}$ et $S_n^{(0)}$.

Corollaire 2.3. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{8}n(n^2 - 3n - 6)S_n^{(0)} + \frac{3}{4}n(n+1)^2.$$

3 Généralisation

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 2.4.

$$S_{n+j}^{(0)} = (n+j+1) \left(\frac{1}{2^j(n+1)} S_n^{(0)} + \sum_{r=0}^{j-1} \frac{1}{2^r(n+j-r+1)} \right), \quad (2.10)$$

avec la convention que la somme vide est égale à zéro.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur j . Pour $j = 0$ l'identité (2.10) est vraie. Supposons que pour un entier $j \geq 1$, (2.10) soit vraie, en remplaçant n par $n + 1$ dans la relation (2.10), puis en utilisant (2.3), on démontre l'assertion. \square

Théorème 2.5. *Pour tout entiers m et n , on a*

$$S_n^{(m)} = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{n+j}{n} W_{m,j} \left(S_{n+j}^{(0)} - \frac{1}{(n+j)!} \sum_{r=0}^{j-1} r! (n+j-r)! \right). \quad (2.11)$$

Démonstration. En écrivant $S_n^{(m)}$ comme suit

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^n ((k+1) - 1)^m \binom{n}{k}^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} (k+1)^i, \end{aligned}$$

compte tenu de (1.5)

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} (k+1) \cdots (k+j) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \frac{1}{n!} (-1)^{m+j} \binom{m}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} k! (k+1) \cdots (k+j) (n-k)!. \end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i (-1)^{m+j} \binom{m}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} (n+1) \cdots (n+j) \binom{n+j}{k+j}^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i (-1)^{m+j} \binom{m}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} j! \frac{(n+j)!}{n!j!} \sum_{r=j}^{n+j} \binom{n+j}{r}^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite, compte tenu des relations (1.6) et (A.6), on établit le résultat. \square

En posant $m = 4$ dans (2.11), on obtient le résultat suivant

Corollaire 2.6. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$S_n^{(4)} = \frac{1}{16} (n+1) (n^3 - 7n^2 - 2n + 16) S_n^{(0)} + \frac{1}{8} (7n - 8) (n+1)^3.$$

Théorème 2.7. *Pour tous entiers $m \geq 0$ et $n \geq 0$, on a*

$$S_{n+1}^{(m)} = \delta_{0,m} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} S_n^{(j)}, \quad (2.12)$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Démonstration. Rappelons que $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k^m}{\binom{n+1}{k}} &= \delta_{0,m} + \sum_{k=1}^{n+1} k^m \binom{n+1}{k}^{-1} \\ &= \delta_{0,m} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k^{m+1} \binom{n}{k-1}^{-1} \\ &= \delta_{0,m} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)^{m+1} \binom{n}{k}^{-1} \\ &= \delta_{0,m} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \sum_{k=0}^n k^j \binom{n}{k}^{-1}. \end{aligned}$$

□

En posant $m = 1$ dans (2.12) et en tenant compte de la relation (2.9), il vient

Corollaire 2.8. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$S_{n+1}^{(1)} = \frac{n+2}{2n} S_n^{(1)} + \frac{1}{2} (n+1).$$

4 Fonction génératrice ordinaire

Appliquons le théorème 2.1, pour $a_n = n^m$ ($m \geq 1$) et $b_n = 1$, on a

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m+k}}{(1-x)^{k+1}} W_{m,k} \\ B(x) &= \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

La relation (2.5) permet d'écrire

$$\sum_{n \geq 0} S_n^{(m)} x^n = \frac{d}{dx} \left[x \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (xt)^{k+1}}{(1-xt)^{m+1} (1-x+xt)} dt \right]. \quad (2.13)$$

Par le changement de variable $xt = y$, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} S_n^{(m)} x^n = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k y^{k+1}}{(1-y)^{m+1} (1-x+y)} dy \right].$$

On décompose en éléments simples dans \mathbb{R} sous la forme

$$\frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k y^{k+1}}{(1-y)^{m+1} (1-x+y)} = \frac{\alpha^{(m)}(x)}{1-x+y} + \sum_{s=0}^m \frac{\alpha_s^{(m)}(x)}{(1-y)^{m-s+1}}. \quad (2.14)$$

Notons au passage que (2.14) est équivalent à

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k y^{k+1} &= (1-y)^{m+1} \alpha^{(m)}(x) + (1-x+y) \sum_{s=0}^m (1-y)^s \alpha_s^{(m)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} y (1-y)^{m-k} W_{m-1,k-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En posant $y = 1$ et compte tenu du fait que $W_{p,p} = p!$ pour $p \geq 0$, on obtient l'identité

$$\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k = m!.$$

De plus, si $y = 0$, on obtient la relation entre $\alpha^{(m)}(x)$ et $\alpha_s^{(m)}(x)$

$$\sum_{s=0}^m \alpha_s^{(m)}(x) = \frac{\alpha^{(m)}(x)}{x-1}. \quad (2.16)$$

Proposition 2.9. Pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s}}{(2-x)^{i+1}} \langle m \rangle_k \binom{k+1}{s-i} \\ &= \sum_{j=m-s}^m \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{s-m+1+j}} W_{m,j}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)}(x) &= \frac{1}{(2-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (x-1)^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{j+1}} W_{m,j} \\ &= \alpha_m^{(m)}(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Démonstration. On vérifie que (2.17) et (2.18) satisfont (2.15). Désignons la partie droite de (2.15) par $R^{(m)}(y)$

$$R^{(m)}(y) = (1-y)^{m+1} \alpha^{(m)}(x) + (1-x+y) \sum_{s=0}^m (1-y)^s \alpha_s^{(m)}(x).$$

à l'aide d'un simple décalage d'indice, on obtient

$$\begin{aligned} R^{(m)}(y) &= \frac{(1-y)^{m+1}}{(2-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{m}{k} (x-1)^{k+1} + (1-x+y) \sum_{s=0}^m (1-y)^s \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s}}{(2-x)^{i+1}} \langle m \rangle \binom{m}{k} \binom{k+1}{s-i} \\ &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left[\frac{(1-y)^{m+1}}{(2-x)^{m+1}} (x-1)^{k+1} + \frac{1-x+y}{2-x} \sum_{s=0}^m \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j \right], \end{aligned}$$

on utilise la formule du binôme de Newton, on peut écrire

$$\begin{aligned} R^{(m)}(y) &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left[\frac{(1-y)^{m+1}}{(2-x)^{m+1}} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (2-x)^j (-1)^j + \right. \\ &\quad \left. \sum_{s=0}^m \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j - \sum_{s=0}^m \frac{(1-y)^{s+1}}{(2-x)^{s+1}} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $k \leq m$

$$\begin{aligned} R^{(m)}(y) &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left[\sum_{s=m+1}^{m+1} \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{k+1}{j} (2-x)^j (-1)^j + \right. \\ &\quad \left. \sum_{s=0}^m \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j - \sum_{s=0}^m \frac{(1-y)^{s+1}}{(2-x)^{s+1}} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left[\sum_{s=0}^{m+1} \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j - \sum_{s=1}^{m+1} \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \sum_{j=0}^{s-1} \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left[1 + \sum_{s=1}^{m+1} \frac{(1-y)^s}{(2-x)^s} \left(\sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j - \sum_{j=0}^{s-1} \binom{k+1}{j} (-1)^j (2-x)^j \right) \right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$R^{(m)}(y) = \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{m}{k} \left(1 + \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k+1}{s} (y-1)^s \right) = \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{m}{k} y^{k+1}.$$

En appliquant les relations (1.12) et (1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha_s^{(m)}(x) &= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s}}{(2-x)^{i+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{k+1}{s-i} \\
&= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s} (m-s+i)!}{(2-x)^{i+1}} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-s+i+1 \end{matrix} \right\} \\
&= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s}}{(2-x)^{i+1}} W_{m,m-s+i} \\
&= \sum_{j=m-s}^m \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{s-m+1+j}} W_{m,j},
\end{aligned}$$

d'autre part, il s'ensuit de (1.11) que

$$\begin{aligned}
\alpha^{(m)}(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m+j+1} \frac{(j+1)(x-1)}{(2-x)^{j+2}} W_{m-1,j} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{j+1}} (j+1) W_{m-1,j} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{j+2}} (j+1) W_{m-1,j} \\
&= \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{j+1}} (j+1) W_{m-1,j} + \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{(2-x)^{j+1}} j W_{m-1,j-1}.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (1.7), on obtient $\alpha^{(m)}(x)$, ce qui achève la démonstration. \square

Maintenant, on intègre la partie droite de (2.14) par rapport à y , on obtient

$$\int_0^x \frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle y^{k+1}}{(1-y)^{m+1} (1-x+y)} dy = -2\alpha^{(m)}(x) \ln(1-x) + \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\alpha_s^{(m)}(x)}{s-m} (1-(1-x)^{s-m}). \quad (2.19)$$

On dérive (2.19) on obtient la fonction génératrice ordinaire de $S_n^{(m)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} S_n^{(m)} x^n &= -2 \frac{d}{dx} \alpha^{(m)}(x) \ln(1-x) + \frac{\alpha^{(m)}(x)}{1-x} + \\
&\quad \sum_{s=0}^{m-1} \frac{d}{dx} \alpha_s^{(m)}(x) (1-(1-x)^{s-m}) + \sum_{s=0}^m \alpha_s^{(m)}(x) (1-x)^{s-m-1} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{d}{dx} \alpha_s^{(m)}(x) = \sum_{j=m-s}^m \frac{(s-m+j+1)(-1)^{m+j}}{(2-x)^{s-m+j+2}} W_{m,j}.$$

Avec la proposition 2.9, on peut réécrire (2.20) comme suit

Théorème 2.10. *Pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$\sum_{n \geq 0} S_n^{(m)} x^n = \left(\sum_{j=0}^m \frac{2(j+1)(-1)^{m+j+1}}{(2-x)^{j+2}} W_{m,j} \right) \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \sum_{j=0}^m \frac{2(-1)^{j+m}}{(2-x)^{j+1}} W_{m,j} \\ + \sum_{0 \leq j \leq s \leq m-1} \frac{(-1)^j W_{m,m-j}}{(2-x)^{s-j+1}} \left(\frac{(s-j+1)(1-(1-x)^{s-m})}{(s-m)(2-x)} + (1-x)^{s-m-1} \right).$$

5 Développement asymptotique

Dans cette dernière section, nous nous sommes intéressés à l'étude asymptotique de $S_n^{(m)}$ et au calcul exact de la limite $n \rightarrow \infty$ de $\sum_{k=0}^{n-m} k^m \binom{n}{k}^{-1}$. Dans [58], Yang et Zhao ont étudié le comportement asymptotique de $S_n^{(0)}$ et $S_n^{(1)}$, ils ont montré que :

$$S_n^{(0)} \sim 2 + \frac{2}{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}, n \rightarrow \infty, \quad (2.21)$$

et

$$S_n^{(1)} \sim \frac{n}{2} \left(2 + \frac{2}{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}} \right), n \rightarrow \infty.$$

Nous généralisons ces résultats et nous montrons que

$$S_n^{(m)} \sim n^m, n \rightarrow \infty.$$

et

$$\mathcal{T}_n^{(m)} := \sum_{k=0}^{n-m} k^m \binom{n}{k}^{-1}$$

convergent vers $m!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Théorème 2.11. *Pour tout entier $m > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n^{(m)} = m!,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(m)}}{n^m} = 1.$$

Démonstration. Notons $S_n^{(0)}$ par S_n . En utilisant la relation de récurrence $S_n = \frac{n+1}{2n} S_{n-1} + 1$, on peut montrer facilement que

$$S_n \rightarrow 2,$$

$$n(S_n - 2) \rightarrow 2,$$

$$n(n(S_n - 2) - 2) = n^2 S_n - 2n^2 - 2n \rightarrow 4,$$

Plus généralement, il existe des constantes a_0, a_1, a_2, \dots telles que

$$u_n^{(k)} = n u_n^{(k-1)} - a_{k-1},$$

$$u_n^{(k)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

avec $u_n^{(0)} = S_n - 2$.

D'autre part, pour tout $k \geq 1$,

$$n^k S_n - (2n^k + a_0 n^{k-1} + \dots + a_{k-2} n) \rightarrow a_k,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, la suite a_0, a_1, \dots est 2, 4, 16, 88, 616, 5224, ... donnée par sa fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{2}{(2 - e^x)^2}.$$

On peut aussi donner explicitement les éléments de la suite a_k par

$$a_k = \sum_{r=0}^k (r+2) W_{k,r} - (r+1) W_{k-1,r},$$

où récursivement par

$$a_k = 4 + \sum_{r=1}^k \left(\binom{k+1}{r} + \binom{k}{r} \right) (-1)^r (2 - a_0 + a_1 - \dots + (-1)^r a_{r-1}) + (-1)^{k+1} (2 - a_0 + \dots + (-1)^r a_{k-1}).$$

puisque

$$\begin{aligned} 2n^{k+1} S_n &= n^k (2n S_n) \\ &= n^k ((n+1) S_{n-1} + 2n) \\ &= (n^{k+1} + n^k) S_{n-1} + 2n^{k+1} \\ &= \sum_{r=1}^k \left(\binom{k+1}{r} + \binom{k}{r} \right) (n-1)^r S_{n-1} + 2n^{k+1}. \end{aligned}$$

Écrivons

$$X^m = c_0 + c_1(X+1) + c_2(X+1)(X+2) + \dots + c_m(X+1)(X+2) \dots (X+m), \quad (2.22)$$

$$\text{avec } c_i = (-1)^{m-i} \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^{n-m} (c_0 + c_1(k+1) + c_2(k+1)(k+2) + \cdots + c_m(k+1)(k+2) \cdots (k+m)) \binom{n}{k}^{-1} \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{k}^{-1} + c_1(n+1) \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+1}{k+1}^{-1} + \cdots + c_m(n+1) \cdots (n+m) \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n+m}{k+m}^{-1} \\
&= c_0 \left(S_n - \sum_{k=n-m+1}^n \binom{n}{k}^{-1} \right) + c_1(n+1) \left(S_{n+1} - \sum_{k=n-m+2}^{n+1} \binom{n+1}{k}^{-1} - 1 \right) + \cdots \\
&\quad \cdots + c_m(n+1) \cdots (n+m) \left(S_{n+m} - \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k}^{-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m}{k}^{-1} \right).
\end{aligned}$$

Un simple calcul donne

$$n^k S_n - (2n^k + a_0 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k) \rightarrow 0,$$

Par induction sur m , on peut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n^{(m)} = 0!c_0 + 1!c_1 + 2!c_2 + \cdots + (m-1)!c_{m-1} + 2(m!)c_m.$$

Par l'observation que $c_m = 1$ et

$$0!c_0 + 1!c_1 + 2!c_2 + \cdots + m!c_m = 0,$$

en regardant le terme constant de (2.22). Ceci achève la preuve de la première assertion. Pour la seconde assertion, on procède de manière similaire à ce qui précède.

On a

$$\begin{aligned}
S_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^n (c_0 + c_1(k+1) + c_2(k+1)(k+2) + \cdots + (k+1)(k+2) \cdots (k+m)) \binom{n}{k}^{-1} \\
&= c_0 S_n + c_1(n+1) (S_{n+1} - 2) + c_2(n+1)(n+2) \left(S_{n+2} - 2 \sum_{k=0}^1 \binom{n+2}{k}^{-1} \right) + \cdots \\
&\quad \cdots + (n+1) \cdots (n+m) \left(S_{n+m} - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m}{k}^{-1} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en regardant le facteur le plus haut degré, on obtient

$$S_n^{(m)} \sim n^m.$$

□

Un corollaire de la preuve ci-dessus est que $S_n^{(0)}$ est donnée par

$$S_n^{(0)} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{16}{n^3} + \frac{88}{n^4} + \frac{616}{n^5} + \frac{5224}{n^6} + \dots,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3

Les sommes alternées des inverses des coefficients binomiaux

1 Introduction

Pour tous entiers naturels n, m et p , on considère les sommes

$$T_n^{(m,p)} := \sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \binom{p+n}{p+k}^{-1}. \quad (3.1)$$

Ces sommes ont été étudiées par de nombreux auteurs, notamment par Trif [55], qui a obtenu pour $m = 0$ le résultat suivant

$$T_n^{(0,p)} = \left((-1)^n + \binom{p+n+1}{p}^{-1} \right) \frac{p+n+1}{p+n+2}. \quad (3.2)$$

Sury, Wang and Zhao [52], pour les cas $m = 1$ et $m = 2$. Ils obtiennent

$$T_n^{(1,p)} = \frac{p+n+1}{p+n+3} \left(\frac{(-1)^n (n+1)(p+n+3)}{p+n+2} - \binom{p+n+2}{p+1}^{-1} - (-1)^n \right), \quad (3.3)$$

et

$$T_n^{(2,p)} = (p+n+1) \left(\frac{(-1)^n (n+1)^2}{p+n+2} - \frac{(-1)^n (2n+3)}{p+n+3} \right. \\ \left. + \frac{2}{p+n+4} \left(\left(\frac{p+n+3}{p+2} \right)^{-1} + (-1)^n \right) - \frac{1}{p+n+3} \left(\frac{p+n+2}{p+1} \right)^{-1} \right). \quad (3.4)$$

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les sommes alternées des inverses des coefficients binomiaux, plus précisément le cas particulier $T_n^{(m)} := T_n^{(m,0)}$, et $T_n^{(m,p)}$.

2 Formule explicite de $T_n^{(m)}$

Pour tout entier $m \geq 0$, on considère

$$T_n^{(m)} := \sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \binom{n}{k}^{-1}. \quad (3.5)$$

Théorème 3.1. *Pour tous entiers naturels n et m , on a*

$$T_n^{(m)} = (n+1) \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{n+j+2} \left(1 + (-1)^n \binom{n+j+1}{j} \right) W_{m,j}. \quad (3.6)$$

Démonstration. On peut écrire $T_n^{(m)}$ comme suit

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} ((k+1) - 1)^m \\ = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} (k+1)^i,$$

avec (1.5), on obtient

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} (k+1) \cdots (k+j) \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^k}{n!} (-1)^{m+j} \binom{m}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} k! (k+1) \cdots (k+j) (n-k)! \\ = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i (-1)^{m+j} \binom{m}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} (n+1) \cdots (n+j) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+j}{k+j}^{-1}.$$

Maintenant, en appliquant la relation (3.2), il vient

$$T_n^{(m)} = (n+1) \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{n+j+2} \left(1 + (-1)^n \binom{n+j+1}{j} \right) j! \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\}.$$

Compte tenu des relations (1.6) et (A.6), nous obtenons le résultat attendu. \square

3 Relation de récurrence de $T_n^{(m)}$

Théorème 3.2. *Pour tous entiers naturels n et m , on a*

$$T_{n+1}^{(m)} = T_n^{(m)} - \frac{1}{n+1} T_n^{(m+1)} - (-1)^n (n+1)^m. \quad (3.7)$$

Démonstration. La preuve est basée sur l'observation de Sprugnoli [48]

$$\binom{n+1}{k}^{-1} = \binom{n}{k}^{-1} - \frac{k}{n+1} \binom{n}{k}^{-1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} T_n^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \binom{n+1}{k}^{-1} + (-1)^{n+1} (n+1)^m \binom{n+1}{n+1}^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \left[\binom{n}{k}^{-1} - \frac{k}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} \right] - (-1)^n (n+1)^m \\ &= T_n^{(m)} - \frac{1}{n+1} T_n^{(m+1)} - (-1)^n (n+1)^m. \end{aligned}$$

\square

La relation de récurrence de $T_n^{(m)}$ est donnée dans le théorème suivant

Théorème 3.3. *Pour tous entiers naturels n et m , on a*

$$T_{n+1}^{(m)} = T_n^{(m)} - (-1)^n (n+1)^m + \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(-1)^{m+j}}{n+j+2} \left(1 + (-1)^n \binom{n+j+1}{j} \right) W_{m+1,j}, \quad (3.8)$$

avec la condition initiale $T_0^{(m)} = \delta_{0,m}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Démonstration. Cela résulte immédiatement des relations (3.6) et (3.7). \square

En remplaçant $m = 1$ dans (3.8), on obtient

Corollaire 3.4. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$T_{n+1}^{(1)} = T_n^{(1)} + \frac{n - (-1)^n (2n^4 + 17n^3 + 49n^2 + 57n + 24)}{(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

4 Fonction génératrice ordinaire de $T_n^{(m)}$

Appliquons le théorème 2.1, pour $a_n = (-1)^n n^m$ ($m \geq 1$) et $b_n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{(1+x)^{m+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (-x)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m+k}}{(1+x)^{k+1}} W_{m,k}, \\ B(x) &= \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Pour $r = 1$, la formule (2.5) donne

$$\sum_{n \geq 0} T_n^{(m)} x^n = \frac{d}{dx} \left[x \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (-xt)^{k+1}}{(1+xt)^{m+1} (1-x+xt)} dt \right]. \quad (3.9)$$

Par le changement de variable $xt = y$, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} T_n^{(m)} x^n = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (-y)^{k+1}}{(1+y)^{m+1} (1-x+y)} dy \right],$$

On décompose en éléments simples dans \mathbb{R} sous la forme

$$\frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (-y)^{k+1}}{(1+y)^{m+1} (1-x+y)} = \frac{\alpha^{(m)}(x)}{1-x+y} + \sum_{s=0}^m \frac{\alpha_s^{(m)}(x)}{(1+y)^{m-s+1}}. \quad (3.10)$$

Notons au passage que (3.10) est équivalent à

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k (-y)^{k+1} &= (1+y)^{m+1} \alpha^{(m)}(x) + (1-x+y) \sum_{s=0}^m (1+y)^s \alpha_s^{(m)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k+1} y (1+y)^{m-k} W_{m-1,k-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si on pose $y = -1$ et compte tenu du fait que $W_{p,p} = p!$ pour $p \geq 0$, on obtient l'identité

$$\sum_{k=0}^m \langle m \rangle_k = m!.$$

De plus, si on pose $y = 0$ dans (3.11) on obtient la relation entre $\alpha^{(m)}(x)$ et $\alpha_s^{(m)}(x)$

$$\sum_{s=0}^m \alpha_s^{(m)}(x) = \frac{\alpha^{(m)}(x)}{x-1}. \quad (3.12)$$

Proposition 3.5. Pour $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(m)}(x) &= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s+1}}{x^{i+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{k+1}{s-i} \\ &= \sum_{j=m-s}^m \frac{(-1)^{m+j+1}}{x^{s-m+1+j}} W_{m,j}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)}(x) &= \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle (1-x)^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{x^{j+1}} W_{m,j} \\ &= -\alpha_m^{(m)}(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Démonstration. On vérifie que (3.13) et (3.14) satisfont (3.11). Désignons la partie droite de (3.11) par $R^{(m)}(y)$, un calcul immédiat donne

$$R^{(m)}(y) = \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{k+1}{k} \left[\frac{(1+y)^{m+1}}{x^{m+1}} (1-x)^{k+1} + (1-x+y) \sum_{s=0}^m (1+y)^s \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^{j+1}}{x^{s-j+1}} \binom{k+1}{j} \right],$$

on utilise la formule de binôme de Newton, on peut écrire pour $k \leq m$

$$\begin{aligned} R^{(m)}(y) &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{k+1}{k} \left[\sum_{s=m+1}^{m+1} \frac{(1+y)^s}{x^s} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j x^j - \frac{(1-x+y)}{x} \sum_{s=0}^m \frac{(1+y)^s}{x^s} \sum_{j=0}^s (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{k+1}{k} \left[\sum_{s=m+1}^{m+1} \frac{(1+y)^s}{x^s} \sum_{j=0}^s \binom{k+1}{j} (-1)^j x^j + \sum_{s=0}^m \frac{(1+y)^s}{x^s} \sum_{j=0}^s (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=0}^m \frac{(1+y)^{s+1}}{x^{s+1}} \sum_{j=0}^s (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \binom{k+1}{k} \left[\sum_{s=0}^{m+1} \frac{(1+y)^s}{x^s} \sum_{j=0}^s (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} - \sum_{s=0}^m \frac{(1+y)^{s+1}}{x^{s+1}} \sum_{j=0}^s (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left\langle k \right\rangle \left[\sum_{s=0}^{m+1} \frac{(1+y)^s}{x^s} \left(\sum_{j=0}^s (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} - \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j x^j \binom{k+1}{j} \right) \right],$$

d'où

$$\begin{aligned} R^{(m)}(y) &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left\langle k \right\rangle \left[\sum_{s=0}^{k+1} (1+y)^s \left((-1)^s \binom{k+1}{s} \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left\langle k \right\rangle (-y)^{k+1}. \end{aligned}$$

Les relations (1.6) et (1.12), donnent

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(m)}(x) &= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s+1}}{x^{i+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left\langle k \right\rangle \binom{k+1}{s-i} \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s+1} (m-s+i)!}{x^{i+1}} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-s+i+1 \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{i+s+1}}{(x)^{i+1}} W_{m,m-s+i} \\ &= \sum_{j=m-s}^m \frac{(-1)^{m+j+1}}{x^{s-m+1+j}} W_{m,j}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit de (1.11) que

$$\begin{aligned} \alpha^{(m)}(x) &= \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left\langle k \right\rangle (1-x)^{k+1} \\ &= \frac{1-x}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^m (-1)^{m+k} x^{m-k} k W_{m-1,k-1} \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{k}{x^{k+1}} W_{m-1,k-1} \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{k}{x^{k+1}} W_{m-1,k-1} - \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{k}{x^k} W_{m-1,k-1} \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{k}{x^{k+1}} W_{m-1,k-1} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} \frac{k+1}{x^{k+1}} W_{m-1,k}. \end{aligned}$$

Compte tenue de (1.7), on obtient $\alpha^{(m)}(x)$. Ce qui achève la démonstration. \square

Maintenant, on intègre la partie droite de (3.10) par rapport à y , on obtient

$$\int_0^x \frac{\sum_{k=0}^m \langle m \rangle \left\langle k \right\rangle (-y)^{k+1}}{(1+y)^{m+1} (1-x+y)} dy = \alpha_m^{(m)}(x) \ln(1-x^2) + \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\alpha_s^{(m)}(x)}{m-s} [1 - (1+x)^{s-m}]. \quad (3.15)$$

On dérive (3.15) par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} T_n^{(m)} x^n &= \ln(1-x^2) \frac{d}{dx} \alpha_m^{(m)}(x) + \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\frac{d}{dx} \alpha_s^{(m)}(x)}{m-s} ([1 - (1+x)^{s-m}]) \\ &+ \sum_{s=0}^{m-1} \left((1+x)^{s-m-1} \alpha_s^{(m)}(x) - \frac{2x}{1-x^2} \alpha_m^{(m)}(x) \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec

$$\frac{d}{dx} \alpha_s^{(m)}(x) = \sum_{j=m-s}^m \frac{(s-m+1+j)(-1)^{m+j}}{x^{s-m+2+j}} W_{m,j}.$$

Avec la proposition 3.5, on peut réécrire (3.16) comme suit

Théorème 3.6. *Pour tout entier $m \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} T_n^{(m)} x^n &= \left(\sum_{j=0}^m \frac{(1+j)(-1)^{m+j}}{x^{2+j}} W_{m,j} \right) \ln(1-x^2) \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq s \leq m-1} \frac{(-1)^j}{x^{s-j+2}} W_{m,m-j} \left(\frac{s-j+1}{m-s} (1 - (1+x)^{s-m}) - x(1+x)^{s-m-1} \right) \\ &+ \frac{2}{1-x^2} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^{m+j}}{x^j} W_{m,j}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En particulier pour $m = 0$ et $m = 1$, nous obtenons

$$\sum_{n \geq 0} T_n^{(0)} x^n = \frac{2}{1-x^2} + \frac{\ln(1-x^2)}{x^2},$$

et

$$\sum_{n \geq 0} T_n^{(1)} x^n = \frac{2+3x}{x(1+x)^2} + \frac{2-x}{x^3} \ln(1-x^2).$$

5 Développement asymptotique

Dans les sections précédentes, $T_n^{(m)}$ devient plus complexe lorsque m augmente, il est donc important d'avoir un développement asymptotique de $T_n^{(m)}$.

Théorème 3.7. *Pour $m > 0$, on a*

$$T_{2n}^{(m)} \sim (2n)^m \text{ et } T_{2n+1}^{(m)} \sim -(2n+1)^m.$$

Démonstration. Ecrivons

$$k^m = c_0 + c_1 (k+1) + c_2 (k+1)(k+2) \cdots + c_m (k+1) \cdots (k+m),$$

avec les c_i dépendent de m ($c_m = 1$). On a

$$T_n^{(m)} = c_0 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} + c_1 \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1) \binom{n}{k}^{-1} + \cdots + \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1) \cdots (k+m) \binom{n}{k}^{-1}.$$

Après quelques réarrangements et en utilisant le fait que $(k+1) \binom{n}{k}^{-1} = (n+1) \binom{n+1}{k+1}^{-1}$, on obtient

$$T_n^{(m)} = c_0 T_n^{(0,0)} + c_1 (n+1) T_n^{(0,1)} + c_2 (n+1)(n+2) T_n^{(0,2)} + \cdots + (n+1) \cdots (n+m) T_n^{(0,m)}.$$

comme $T_{2n}^{(0,p)} \rightarrow 1$ et $T_{2n+1}^{(0,p)} \rightarrow -1$, on trouve le résultat voulu. \square

6 Expression de $T_n^{(m,p)}$ à l'aide de la matrice d'Akiyama-Tanigawa

Dans cette section, nous considérons $T_n^{(m,p)}$. Le lemme suivant sera utile dans la preuve du théorème principal de cette section.

Lemme 3.8. Pour $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^m z^k &= \sum_{k=0}^m W_{m,k} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{k+1} \\ &\quad - z^{n+1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} \sum_{k=0}^s (-1)^{s+k} W_{s,k} (1-z)^{-k-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $m \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m z^k = \sum_{k=0}^m W_{m,k} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{k+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} W_{m,k} (1-z)^{-k-1},$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k^m z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} k^m z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m z^k \\
&= \sum_{k=0}^m W_{m,k} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{k+1} - z^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} (i+n+1)^m z^i \\
&= \sum_{k=0}^m W_{m,k} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{k+1} - z^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} i^s z^i \\
&= \sum_{k=0}^m W_{m,k} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{k+1} - z^{n+1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} \sum_{i=0}^{\infty} i^s z^i,
\end{aligned}$$

comme désiré. □

Pour une autre preuve voir [10]. Le résultat principal de cette section est de prouver le théorème suivant qui exprime explicitement les sommes alternées des inverses des coefficients binomiaux, $T_n^{(m,p)}$, en termes de la matrice d'Akiyama-Tanigawa $A_{n,k}$.

Théorème 3.9. *Pour tous entiers n, m et p , on a*

$$\begin{aligned}
T_n^{(m,p)} &= \binom{n+p}{p}^{-1} \delta_{0m} + (n+p+1) \sum_{s=0}^m (-1)^{n+s} \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} A_{s,n+p+1} \\
&\quad - \frac{n+p+1}{n+1} \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{n+s+p+2}{p+s+1}^{-1} W_{m,s}, \quad (3.18)
\end{aligned}$$

où $A_{i,j}$ les composantes de la matrice d'Akiyama-Tanigawa.

Démonstration. Par la fonction Bêta, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
T_n^{(m,p)} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k^m (p+n+1) \int_0^1 x^{p+k} (1-x)^{n-k} dx \\
&= (p+n+1) \int_0^1 x^p (1-x)^n \sum_{k=0}^n k^m \left(\frac{-x}{1-x} \right)^k dx.
\end{aligned}$$

d'après le lemme, on obtient

$$\begin{aligned}
T_n^{(m,p)} &= (p+n+1) \int_0^1 x^p (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^m W_{m,k} (-x)^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} \sum_{k=0}^s (-1)^{s+k} W_{s,k} (-x)^{n+1} (1-x)^{k-n} \right) dx \\
&= \frac{(p+n+1)}{n+1} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+1} \binom{n+k+p+2}{p+k+1}^{-1} W_{m,k} \\
&\quad - (p+n+1) \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^s \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} \frac{(-1)^{n+s+k+1}}{k+1} \binom{n+k+2+p}{k+1+p}^{-1} W_{s,k}.
\end{aligned}$$

il s'ensuit de (1.17) que

$$\begin{aligned}
T_n^{(m,p)} &= \frac{(p+n+1)}{n+1} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+1} \binom{n+k+p+2}{p+k+1}^{-1} W_{m,k} \\
&\quad + (n+p+1) \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (n+1)^{m-s} \frac{(-1)^{n+s}}{(n+p+1)!} \sum_{k=0}^{n+p+1} (-1)^k s(n+p+2, k+1) B_{s+k}(1).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

En remplaçant $p = 0$ dans (3.18) on peut réécrire (3.6) comme suit

Corollaire 3.10.

$$T_n^{(m)} = \delta_{0m} - A_{m+1,n} + \sum_{s=0}^m (-1)^{n+s} \binom{m}{s} (n+1)^{m-s+1} A_{s,n+1}.$$

7 Relation de récurrence pour $T_n^{(m,p)}$

Théorème 3.11. *Pour tous entiers naturels n, m et p , on a*

$$T_{n+1}^{(m,p)} = \frac{n+1}{n+p+1} T_n^{(m,p)} - \frac{1}{n+p+1} T_n^{(m+1,p)} - (-1)^n (n+1)^m. \quad (3.19)$$

Démonstration. En utilisant l'identité suivante

$$\binom{n+p+1}{k+p}^{-1} = \frac{n+1}{n+p+1} \binom{n+p}{k+p}^{-1} - \frac{k}{n+p+1} \binom{n+p}{k+p}^{-1},$$

on obtient la relation (3.19). □

Maintenant, les relations (3.18) et (3.19), donnent la relation de récurrence pour $T_n^{(m,p)}$

Théorème 3.12. *Pour tous entiers naturels n, m et p , on a*

$$T_{n+1}^{(m,p)} = \frac{n+1}{n+p+1} T_n^{(m,p)} - (-1)^n (n+1)^{m+1} \sum_{s=0}^{m+1} \frac{(-1)^s}{(n+1)^s} \binom{m+1}{s} A_{s,n+p+1} \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^{m+1} (-1)^s \binom{n+s+p+2}{p+s+1}^{-1} W_{m+1,s} - (-1)^n (n+1)^m,$$

avec la condition initiale $T_0^{(m,p)} = \binom{n+p}{p}^{-1} \delta_{0,m}$.

4

Matrices d'Akiyama-Tanigawa

1 Introduction

On définit la matrice d'Akiyama-Tanigawa [2] par la suite double $(a_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 0}$ donnée par la récurrence

$$\begin{aligned} a_{0,m} &= \frac{1}{m+1}, \\ a_{n+1,m} &= (m+1)(a_{n,m} - a_{n,m+1}), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

d'où la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & \dots \\ 1/6 & 1/6 & 3/20 & 2/15 & 5/42 & \dots \\ 0 & 1/30 & 1/20 & 2/35 & 5/84 & \dots \\ -1/30 & -1/30 & -3/140 & -1/105 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la matrice d'Akiyama-Tanigawa [12, 26, 34, 9, 25, 60]. En 2005, Merlini et *al.* [34] ont donné une généralisation pour n'importe quelles suite initiale ou finale, ils ont données les formules impliquées par la première ligne et la première colonne.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la généralisation de [34] pour n'importe quelle ligne ou colonne. Nous donnons également quelques exemples d'application qui justifient une telle étude.

2 (x, y) –matrice d'Akiyama-Tanigawa

Soit $(a_m)_{m \geq 0}$ une suite de nombres, on appelle (x, y) –matrice d'Akiyama-Tanigawa associée à (a_m) la suite double $(a_{n,m})_{n,m \geq 0}$ donnée par

$$a_{0,m} = a_m, a_{n+1,m} = (m+1)(xa_{n,m} - ya_{n,m+1}). \quad (4.3)$$

La suite initiale est la suite $a_{0,m} = a_m$. La suite finale est la suite $(a_{n,0})_{n \geq 0}$. Si $x = y = 1$, on retrouve la matrice d'Akiyama-Tanigawa classique.

Inversement, étant donnée une suite finale $(a_n)_{n \geq 0}$, la (x, y) –matrice d'Akiyama-Tanigawa associée à (a_n) , la suite $(a_{n,m})$ donnée par

$$a_{n,0} = a_n, a_{n,m+1} = \frac{x}{y}a_{n,m} - \frac{1}{y(m+1)}a_{n+1,m}, m \geq 0, \quad (4.4)$$

3 Les identités combinatoires

Dans cette section, nous exprimons n'importe quelle entrée $a_{n,m}$ en termes des éléments de la première ligne pour (4.3), et des éléments de la première colonne pour (4.4).

Théorème 4.1. *Etant donnée une suite initiale $(a_m)_{m \geq 0}$, définissons la suite $(a_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 0}$ par*

$$a_{n+1,m} = (m+1)(xa_{n,m} - ya_{n,m+1}),$$

alors

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^n (-1)^k k! \binom{k+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n-k} y^k a_{0,k+m}. \quad (4.5)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Le résultat est banal pour $n = 0$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et (4.3), on trouve

$$\begin{aligned} a_{n+1,m} &= (m+1) \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n+1} a_{0,m} \\ &+ (m+1) \sum_{k=1}^n (-1)^k k! \binom{k+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n+1-k} y^k a_{0,k+m} \\ &- (m+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} (k-1)! \binom{k+m}{m+1} \left\{ \begin{matrix} n+m+2 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+2} x^{n-k+1} y^k a_{0,k+m}. \end{aligned}$$

Après quelques réarrangements, nous obtenons

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m} &= (m+1) \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n+1} a_{0,m} \\
&+ (m+1) \sum_{k=1}^n (-1)^k k! \binom{k+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n+1-k} y^k a_{0,k+m} \\
&+ \sum_{k=1}^n (-1)^k k! \binom{k+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+2 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+2} x^{n-k+1} y^k a_{0,k+m} \\
&+ (-1)^{n+1} (n+1)! \binom{n+1+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+2 \\ n+m+2 \end{matrix} \right\}_{m+2} y^{n+1} a_{0,n+1+m}.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (1.8) et (1.10), on obtient

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m} &= (m+1)^{n+1} x^{n+1} a_{0,m} + (-1)^{n+1} (n+1)! \binom{n+1+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+2 \\ n+m+2 \end{matrix} \right\}_{m+1} y^{n+1} a_{0,n+1+m} \\
&+ \sum_{k=1}^n (-1)^k k! \binom{k+m}{m} \left((m+1) \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} + \left\{ \begin{matrix} n+m+2 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+2} \right) x^{n+1-k} y^k a_{0,k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k! \binom{k+m}{m} \left\{ \begin{matrix} n+m+2 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n+1-k} y^k a_{0,k+m},
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Donnons quelques cas simples pour la matrice (1,1)-d'Akiyama-Tanigawa

Identité 1. Lorsqu'on pose $a_{0,m} = 1$ dans (4.3), alors pour tout $r \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (k+r-1)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = (r-1)! \delta_{0n}.$$

Identité 2. Lorsqu'on pose $a_{0,m} = m+1$ dans (4.3), alors pour tout $r \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} (k+r)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = r!.$$

Identité 3. Lorsqu'on pose $a_{0,m} = \frac{1}{m}$, ($m > 0$) dans (4.3), alors, pour tout $r > 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (k+r-2)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = (r-2)!.$$

Identité 4. Lorsqu'on pose $a_{0,m} = H_m$ dans (4.3), alors, pour tout $r \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (k+r-1)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r H_{k+r-1} = (r-1)! (\delta_{0n} H_{r-1} - \delta_{1n}),$$

avec H_n , la suite des nombres harmonique.

Théorème 4.2. *Etant donnée une suite finale $(a_n)_{n \geq 0}$, définissons la suite $(a_{n,m})_{n \geq 0, m \geq 0}$ par*

$$a_{n,m+1} = \frac{x}{y} a_{n,m} - \frac{1}{y(m+1)} a_{n+1,m}, \quad (4.6)$$

alors

$$a_{n,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^m s(m+1, k+1) x^{m-k} y^{-m} a_{n+k,0}. \quad (4.7)$$

Démonstration. Par récurrence sur m . C'est trivial pour $m = 0$. Pour $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} a_{n,m+1} &= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^m s(m+1, k+1) x^{m-k+1} y^{-m-1} a_{n+k,0} \\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m s(m+1, k+1) x^{m-k} y^{-m-1} a_{n+k+1,0} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} s(m+1, 1) x^{m+1} y^{-m-1} a_{n,0} + \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=1}^m s(m+1, k+1) x^{m-k+1} y^{-m-1} a_{n+k,0} \\ &+ \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=1}^{m+1} -\frac{1}{m+1} s(m+1, k) x^{m-k+1} y^{-m-1} a_{n+k,0} \\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} s(m+1, m+1) y^{-m-1} a_{n+m+1,0}. \end{aligned}$$

Après quelques réarrangements, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_{n,m+1} &= \frac{(-1)^m}{m!} s(m+1, 1) x^{m+1} y^{-m-1} a_{n,0} \\ &+ \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=1}^m \left(s(m+1, k+1) - \frac{1}{m+1} s(m+1, k) \right) x^{m-k+1} y^{-m-1} a_{n+k,0} \\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} s(m+1, m+1) y^{-m-1} a_{n+m+1,0}. \end{aligned}$$

En utilisant (1.3), on trouve

$$\begin{aligned} a_{n,m+1} &= x^{m+1} y^{-m-1} a_{n,0} + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=1}^m s(m+2, k+1) x^{m-k+1} y^{-m-1} a_{n+k,0} \\ &+ \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} y^{-m-1} a_{n+m+1,0} \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} s(m+2, k+1) x^{m-k+1} y^{-m-1} a_{n+k,0}, \end{aligned}$$

□

Exemple 4.3. Si on pose $a_{n,0} = 1$ dans (4.7), on obtient pour $m \geq 1$

$$\frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^m s(m+1, k+1) x^{m-k} = \prod_{k=1}^m \left(x - \frac{1}{k}\right).$$

En resumé

Corollaire 4.4. Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{m+k} (m+k)! \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n-k} y^k a_{0,k+m} = \sum_{k=0}^m s(m+1, k+1) x^{m-k} y^{-m} a_{n+k,0}.$$

4 Fonctions génératrices

Théorème 4.5. Soit

$$A_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k+r} z^k.$$

la fonction génératrice ordinaire de la suite $a_{0,m+r}$. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{n,r}$ de (4.3)

$$\mathcal{A}_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r}(x, y) \frac{z^n}{n!}$$

est donnée par

$$\mathcal{A}_r(z) = \frac{(-1)^r}{r!} e^{(r+1)xz} \left(e^{-xz} \frac{d}{dz} \right)^r \left[\left(\frac{1-e^{xz}}{x} \right) A_r \left(\frac{y(1-e^{xz})}{x} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k k! \binom{k+r}{r} \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ k+r+1 \end{matrix} \right\}_{r+1} x^{-k} y^k a_{0,k+r} \frac{(xz)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! \binom{k+r}{r} x^{-k} y^k a_{0,k+r} \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ k+r+1 \end{matrix} \right\}_{r+1} \frac{(xz)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit de (1.9), que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r(z) &= e^{(r+1)xz} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+r}{r} \left(\frac{y(e^{xz}-1)}{x} \right)^k a_{0,k+r} \\ &= \frac{(-1)^r}{r!} e^{(r+1)xz} \left(e^{-xz} \frac{d}{dz} \right)^r \left(\left(\frac{1-e^{xz}}{x} \right)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k+r} \left(\frac{y(1-e^{xz})}{x} \right)^k \right), \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. □

Théorème 4.6. Soit

$$\bar{\mathcal{A}}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \frac{z^k}{k!}.$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{n+r,0}$. Alors la fonction génératrice ordinaire de la suite $a_{r,m}$ de (4.4)

$$\bar{A}_r(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} z^m,$$

est donnée par

$$\bar{A}_r(z) = \frac{1}{1 - \frac{xz}{y}} \bar{\mathcal{A}}_r \left(x^{-1} \ln \left(1 - \frac{xz}{y} \right) \right). \quad (4.9)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \bar{A}_r(z) &= \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^m}{m!} s(m+1, k+1) x^{-k} \left(\frac{xz}{y} \right)^m a_{r+k,0} \\ &= \sum_{k \geq 0} x^{-k} a_{r+k,0} \sum_{m \geq k} s(m+1, k+1) \frac{1}{m!} \left(-\frac{xz}{y} \right)^m. \end{aligned}$$

A l'aide de la dérivée de (1.4), on obtient

$$\bar{A}_r(z) = \frac{1}{1 - \frac{xz}{y}} \sum_{k \geq 0} a_{r+k,0} \frac{1}{k!} \left(x^{-1} \ln \left(1 - \frac{xz}{y} \right) \right)^k,$$

ce qui prouve le théorème. □

5 Applications

5.1 Les nombres r -Bell

Pour $0 \leq k \leq n$ et $r \geq 0$, le nombre r -Bell [35], noté $B_{n,r}$, est le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+r\}$ telles que, dans chaque partitions, les r premiers éléments sont dans des sous ensembles disjoints, alors

$$B_{n,r} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r.$$

Dans ce paragraphe, nous exprimons les nombres r -Bell à l'aide des nombres de Bell. On donne comme application de cette relation, quelques congruences pour les $B_{n,r}$. Pour cela, on construit la

matrice $(1, 1)$ -d'Akiyama-Tanigawa en prenant la suite $a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m!}$, comme suite initiale

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 & -1/6 & 1/24 & \cdots \\ 2 & -3 & 2 & -5/6 & 1/4 & \cdots \\ 5 & -10 & 17/2 & -13/3 & 37/24 & \cdots \\ 15 & -37 & 77/2 & -47/2 & 235/24 & \cdots \\ 52 & -151 & 186 & -799/6 & 385/6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

La suite finale de cette matrice est \mathcal{B}_{n+1} le $(n+1)$ -ième nombre de Bell

$$a_{n,0} = \mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}, \quad (4.11)$$

et $-a_{n,1}$, est le nombre de blocs dans l'ensemble des partitions d'un ensemble à $n+1$ éléments.

Théorème 4.7.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = \sum_{k=0}^r s(r,k) \mathcal{B}_{n+k}. \quad (4.12)$$

En particulier, nous avons une autre preuve du résultat qui se trouve dans [21].

Corollaire 4.8. On a

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+2 \\ k+2 \end{matrix} \right\}_2 = \mathcal{B}_{n+2} - \mathcal{B}_{n+1},$$

avec la fonction génératrice exponentielle de $-a_{n,1}$ est donnée par $\exp(e^z + 2z - 1)$.

Démonstration. On pose $x = y = r = 1$ et $A_1(z) = \frac{e^{-z}-1}{z}$ dans (4.8), on obtient le résultat désiré. \square

Comme application de (4.12), on peut montrer quelques congruences sur les $B_{n,r}$, par exemple, la congruence de Touchard pour les nombres r -Bell.

Corollaire 4.9. Soit p un nombre premier impair, on a

$$B_{n+p,r} \equiv B_{n,r} + B_{n+1,r} \pmod{p}.$$

En particulier, pour $n = 0$,

$$B_{p,r} \equiv r + 2 \pmod{p}$$

pour tout p premier impair.

Si, on prend la même suite initiale pour la matrice (x, y) - d'Akiyama-Tanigawa , c'est à dire $a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m!}$. Alors d'après (4.5) on a

$$B_{n+1}^{(m)}(x, y) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ k+m+1 \end{matrix} \right\}_{m+1} x^{n-k} y^k.$$

Les suites $B_{n+1}^{(0)}(2, 1), B_{n+1}^{(0)}(3, 1), B_{n+1}^{(0)}(4, 1), \dots$ apparaissent dans les travaux de Kerber [27] (voir aussi [19, 56]) dans le cadre des groupes de permutation.

La fonction génératrice exponentielle est donnée par

Théorème 4.10.

$$\sum_{n \geq 0} B_{n+1}^{(0)}(x, y) \frac{z^n}{n!} = \exp \left(xz + \frac{ye^{xz} - y}{x} \right).$$

5.2 Somme des inverses des coefficients binomiaux

L'objet de ce paragraphe est de prouver que la somme des inverses des coefficients binomiaux est la somme du produit des nombres de Stirling de première espèce $s(n, k)$ et les nombres de Genocchi G_n . Pour cela, on rappelle que les nombres de Genocchi sont définis par leur fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} G_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2z}{1 + e^z} = z + \sum_{n \geq 0} G_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Il sont reliés aux nombres de Bernoulli $B_n(0)$ par la formule

$$G_n = 2 \left(1 - 2^{2n} \right) B_{2n}(0), \quad n \geq 1. \quad (4.13)$$

Les premières valeurs des nombres de Genocchi apparaissent dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227	929569

On construit la matrice inverse $(1, 1)$ -d'Akiyama-Tanigawa, en prenant la suite finale

$$a_{n,0} = G_n \quad (n \geq 0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -17/6 & -7/2 & \dots \\ 1 & 2 & 5/2 & 8/3 & 8/3 & \dots \\ -1 & -1 & -1/2 & 0 & 1/3 & \dots \\ 0 & -1 & -3/2 & -4/3 & -5/6 & \dots \\ 1 & 1 & -1/2 & -2 & -8/3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Alors, on obtient $a_{1,m}$ la suite de la somme des inverses des coefficients binomiaux. d'où le théorème suivant :

Théorème 4.11.

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^{-1} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^m s(m+1, k+1) G_{k+1}.$$

Démonstration. Posons $x = y = r = 1$ et $\overline{\mathcal{A}}_1(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{2z}{1+e^z} \right)$ dans (4.9), on obtient (2.6). \square

Corollaire 4.12.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^{-1} &= 1 + \frac{2(-1)^m}{m!} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} (1-2^{2k}) s(m+1, 2k) B_{2k} \\ &= 1 + \frac{4}{m!} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} (-1)^{m+k-1} \frac{(2k)! (1-2^{2k})}{(2\pi)^{2k}} s(m+1, 2k) \zeta(2k), \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, $s > 0$, la fonction zêta de Riemann.

Démonstration. Compte tenu de $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$ et (4.13), on obtient (4.14) à l'aide de $\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$. \square

Deuxième partie

Une inégalité intégrale pour les fonctions *n*-convexes

5

Préliminaires

On donne dans ce qui suit certaines notations et définitions utiles pour cette partie.

1 Différences divisées

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} et x_0, x_1, \dots, x_n une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On appelle différence divisée d'ordre n de f et on note $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ le coefficient de x^n dans l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant $P(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$.

Les propriétés des différences divisées sont les suivantes :

1. Formule de Newton. Le polynôme d'interpolation, appelé dans ce cas polynôme d'interpolation de Newton, s'écrit

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_n; f] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k).$$

2. Formule de Leibniz. Soit f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ et telles que $f = gh$, alors

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \sum_{j=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_j; g][x_j, \dots, x_n; h].$$

3. Les différences divisées s'expriment comme une différence

$$[x_0; f] = f(x_0),$$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}.$$

4. Les différences divisées s'expriment comme une somme

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{u'(x_n)},$$

où $u(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j).$

5. Les différences divisées s'expriment comme un déterminant

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

6. Les différences divisées s'expriment comme une intégrale. Si $f(x)$ est analytique sur un ouvert simplement connexe Ω du plan complexe \mathbb{C} , et continue sur son bord, alors

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(x)}{\prod_{j=0}^n (x - x_j)} dx.$$

Définition 5.1. Une fonction f d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} est dite n -convexe (resp : n -concave) lorsque, pour tous x_0, x_1, \dots, x_n de $[a, b]$ on a

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] \geq 0, \quad (\text{resp} : \leq 0).$$

Remarque 5.2. De cette définition, les fonctions 0-convexe sont les fonctions positives, 1-convexe sont les fonctions croissantes et les fonctions 2-convexe sont les fonctions convexe au sens classique.

On dispose des caractérisations suivantes (voir [40]) :

Théorème 5.3. *Si f est n fois dérivable sur $]a, b[$, alors f est n -convexe si et seulement si $f^{(k)}(x) \geq 0$.*

Théorème 5.4. *Si f est n -convexe sur $[a, b]$ pour $n \geq 2$, alors $f^{(k)}$ existe pour $k \in \{1, \dots, n-2\}$, de plus, elle est $(n-k)$ -convexe sur $[a, b]$.*

2 Polynômes de Legendre

Considérons $L^2([-1, 1])$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur l'intervalle $[-1, 1]$ relativement à la mesure de Lebesgue. Le produit scalaire sur $L^2([-1, 1])$ est définie par

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt.$$

On note $(p_k)_{0 \leq k < n}$ la famille de polynômes obtenue à partir de $(t^k)_{0 \leq k < n}$ par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt [44], on a

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 1, \\ p_1(t) &= t, \\ p_2(t) &= t^2 - \frac{1}{3}, \\ p_3(t) &= t^3 - \frac{3}{5}t. \end{aligned}$$

La formule de Rodrigues, donne l'expression de p_n pour tout entier $n \geq 0$

$$p_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} \left((t^2 - 1)^n \right),$$

on a pour tout $n \geq 0$

$$p_n(1) = 2^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Le polynôme de Legendre P_n sont proportionnels aux polynômes p_n et normalisés de façon que $P_n(1)$ soit égal à 1, d'où

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n (n!)^2} \frac{d^n}{dt^n} \left((t^2 - 1)^n \right).$$

Les premiers polynômes de Legendre sont

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), \\ P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t). \end{aligned}$$

Propriétés des polynômes de Legendre

1. **Degré** : le polynôme P_n est de degré n .
2. **Parité** : pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t). \quad (5.1)$$

3. **Relation de récurrence** :

$$(n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t) = (2n+1)tP_n(t),$$

avec $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t$.

4. **Fonction génératrice** :

$$\sum_{n \geq 0} P_n(t) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + z^2}}.$$

5. **Formule explicite** :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (t-1)^{n-k} (t+1)^k.$$

6. **Norme** :

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

7. **Autres** :

$$P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t) = (2n+1)P_n(t), \quad (5.2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{d^n f(t)}{dt^n} dt, \quad (5.3)$$

où f et ses n premières dérivées sont continues dans $[-1, 1]$.

8. Les polynôme de Legendre $P_n(t)$ s'expriment comme un déterminant

$$P_n(t) = (D_{n-1}D_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

avec $\mu_i := \int_{-1}^1 t^i dt$ et $D_n := \det(\mu_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n}$.

The condensation method. It allows (sometimes) to establish an elegant, effortless inductive proof of a determinant evaluation, in which the only task is to guess the result correctly.

C. Krattenthaler

6

Une inégalité intégrale pour les fonctions n -convexes

1 Introduction

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, ($a < b$). On considère la fonctionnelle T_p définie par :

$$T_p(f, g) := \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx, \quad (6.1)$$

où, p est une fonction strictement positive et intégrable sur $[a, b]$. Un résultat classique dû à Čebyšev (1882) dit que si les fonctions f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes sur $[a, b]$, alors

$$T_p(f, g) \geq 0$$

De plus, si une des fonctions est croissante et l'autre décroissante, l'inégalité est alors inversée.

Le problème de l'estimation de la fonctionnelle $T := T_1$ relativement à la convexité a été étudié par plusieurs auteurs. En 1971, Atkinson [4] a montré que si les fonctions f et g sont deux fois dérivables dans $[a, b]$ et que

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) g(x) dx = 0,$$

alors $T(f, g) \geq 0$.

En 1972, Lupaş [31] a montré que si les fonctions f et g sont convexes alors

$$T(f, g) \geq \frac{12}{(b-a)^4} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) g(x) dx, \quad (6.2)$$

l'égalité est vérifiée si et seulement si, au moins l'une des fonctions f ou g est une fonction affine dans $[a, b]$.

En 2008, Ciobotariu-Boer [15] a généralisée (6.2) pour les fonctions 3-convexe comme suit

$$\begin{aligned} T(f, g) \geq & \frac{12}{(b-a)^4} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) g(x) dx \\ & + \frac{180}{(b-a)^6} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12} \right) f(x) dx \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12} \right) g(x) dx, \end{aligned}$$

L'égalité est vraie lorsque au moins une des fonctions f ou g est un polynôme de degré au plus 2 dans $[a, b]$.

Dans ce chapitre, on se propose de généraliser le résultat de Ciobotariu-Boer [15] pour les fonctions n -convexes ($n \geq 4$). Pour cela on a besoins d'un résultat dû à Andréief (1883)

Théorème 6.1 ([40]). *Si $f_1, \dots, f_n; g_1, \dots, g_n$ et $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors*

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} \int_a^b p(x) f_1(x) g_1(x) dx & \cdots & \int_a^b p(x) f_1(x) g_n(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b p(x) f_n(x) g_1(x) dx & \cdots & \int_a^b p(x) f_n(x) g_n(x) dx \end{array} \right| = \\ & \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \left| \begin{array}{ccc} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} g_1(x_1) & \cdots & g_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x_1) & \cdots & g_n(x_n) \end{array} \right| p(x_1) \cdots p(x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

En particulier, si

$$\left| \begin{array}{ccc} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} g_1(x_1) & \cdots & g_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x_1) & \cdots & g_n(x_n) \end{array} \right| \geq 0,$$

pour tout x_1, \dots, x_n dans $[a, b]$, alors

$$\begin{vmatrix} \int_a^b p(x) f_1(x) g_1(x) dx & \cdots & \int_a^b p(x) f_1(x) g_n(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b p(x) f_n(x) g_1(x) dx & \cdots & \int_a^b p(x) f_n(x) g_n(x) dx \end{vmatrix} \geq 0$$

Corollaire 6.2. Si f et g sont deux fonctions n -convexes (n -concaves) sur $[a, b]$, alors, on a

$$A_n(f, g) := \begin{vmatrix} 1 & F(e) & \cdots & F(e^{n-1}) & F(g) \\ F(e) & F(e^2) & \cdots & F(e^n) & F(eg) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F(e^{n-1}) & F(e^n) & \cdots & F(e^{2n-2}) & F(e^{n-1}g) \\ F(f) & F(ef) & \cdots & F(e^{n-1}f) & F(fg) \end{vmatrix} \geq 0, \quad (6.3)$$

avec $e^i(x) = x^i$, $x \in [a, b]$ et F est l'une des expressions suivantes :

$$F(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad F(f) := \frac{\int_a^b p(x) f(x) dx}{\int_a^b p(x) dx},$$

$$F(f) := \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \quad \left(x_i \in [a, b]; i = 0, 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right),$$

où $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction strictement positive et intégrable sur $[a, b]$.

2 Lemmes

Sans perte de généralité, on peut travailler dans l'intervalle $[-1, 1]$, en effectuant le changement de variable suivant

$$x = \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2} \right) t,$$

et (6.3) devient

$$A_n(r, s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s(t) dt \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ts(t) dt \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{n-1} s(t) dt \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) dt & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 tr(t) dt & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{n-1} r(t) dt & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) s(t) dt \end{vmatrix} \geq 0, \quad (6.4)$$

où les fonctions r et s sont définies par :

$$r(t) := f\left(\frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)t\right), \quad s(t) := g\left(\frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)t\right). \quad (6.5)$$

Il est facile de voir que les fonctions f et g sont n -convexes dans $[a, b]$ si et seulement si r et s , sont n -convexes dans $[-1, 1]$.

Examinons $A_n(r, s)$ pour $n = 2, 3$ et 4 . Un calcul simple montre que

$$A_2(r, s) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) s(t) dt - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 r(t) dt \int_{-1}^1 s(t) dt - \frac{3}{4} \int_{-1}^1 tr(t) dt \int_{-1}^1 ts(t) dt \right],$$

i.e

$$A_2(r, s) = \frac{1}{3} A_1(r, s) - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 tr(t) dt \int_{-1}^1 ts(t) dt.$$

$$\begin{aligned} A_3(r, s) &= \frac{2}{135} \int_{-1}^1 r(t) s(t) dt - \frac{1}{12} \int_{-1}^1 t^2 r(t) dt \int_{-1}^1 t^2 s(t) dt - \frac{1}{45} \int_{-1}^1 tr(t) dt \int_{-1}^1 tr(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{36} \int_{-1}^1 s(t) dt \int_{-1}^1 t^2 r(t) dt + \frac{1}{36} \int_{-1}^1 r(t) dt \int_{-1}^1 t^2 s(t) dt - \frac{1}{60} \int_{-1}^1 s(t) dt \int_{-1}^1 r(t) dt, \end{aligned}$$

$$A_3(r, s) = \frac{4}{135} \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) s(t) dt - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 r(t) dt \int_{-1}^1 s(t) dt \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \int_{-1}^1 t r(t) dt \int_{-1}^1 t s(t) dt - \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) r(t) dt \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) s(t) dt \right],$$

$$A_3(r, s) = \frac{4}{45} A_2(r, s) - \frac{1}{27} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) r(t) dt \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) s(t) dt.$$

De même,

$$A_4(r, s) = \frac{4}{175} A_3(r, s) - \frac{4}{3375} \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \right) r(t) dt \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \right) s(t) dt.$$

Nous sommes maintenant en mesure de deviner la relation entre A_{n+1} et A_n . La preuve de cette affirmation est dans le lemme 6.5

$$A_{n+1}(r, s) = \frac{H_{n+1}}{H_n} A_n(r, s) - \frac{2n+1}{4} H_{n+1} \int_{-1}^1 P_n(t) r(t) dt \int_{-1}^1 P_n(t) s(t) dt, \quad (6.6)$$

où $H_n := \det((c_{i+j-2}))_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $c_i := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^i dt$, est le déterminant de Hankel et $P_n(t)$ est le polynôme de Legendre de degré n

Le lemme suivant énonce certaines propriétés du déterminant de Hankel H_n .

Lemme 6.3. Pour $n \geq 1$, on a

$$H_n = \frac{2^{n(n-1)}}{n^n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(i!)^2}{(n^2 - i^2)^{n-i}}, \quad (6.7)$$

$$H_{n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}^2} H_n, \quad (6.8)$$

$$\frac{2n+1}{4} \left(\int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt \right)^2 = \frac{H_{n+1}}{H_n}. \quad (6.9)$$

Démonstration. Il vient immédiatement que $H_n = 2^{n(n-1)} \det \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, en utilisant la formule pour le déterminant de Cauchy, on obtient (6.7). Nous obtenons (6.8) comme conséquence de (6.7).

Pour (6.9), notons par

$$I_n := \int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt,$$

et appliquons (5.2), on trouve

$$I_n = \frac{1}{2n+1} \left[\int_{-1}^1 t^n P'_{n+1}(t) dt - \int_{-1}^1 t^n P'_{n-1}(t) dt \right],$$

après une intégration par parties est compte tenu de (5.1), on obtient

$$I_n = \frac{n}{2n+1} I_{n-1},$$

i.e.

$$I_n = \frac{2^{n+1}}{(2n+1) \binom{2n}{n}},$$

il est évident que cela implique (6.9). □

La notation

$$\phi_i := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^i r(t) dt,$$

$$\tau_i := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^i s(t) dt,$$

est utilisée pour simplifier les lemmes suivants.

Lemme 6.4. On a

$$\frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n}} H_n \int_{-1}^1 P_n(t) r(t) dt = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \\ \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Il s'ensuit de (5.4) que

$$\frac{H_n 2^{2n}}{\binom{2n}{n}} P_n(t) = 2^{n+1} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{2}t^n \end{vmatrix}.$$

Après une intégration, on trouve

$$\frac{H_n 2^{n-1}}{\binom{2n}{n}} \int_{-1}^1 P_n(t) r(t) dt = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) dt & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t r(t) dt & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 r(t) dt & \cdots & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^n r(t) dt \end{vmatrix}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 6.5. Pour $n \geq 1$, le déterminant A_n satisfait à la relation de récurrence suivante

$$A_{n+1}(r, s) = \frac{H_{n+1}}{H_n} A_n(r, s) - \frac{2n+1}{4} H_{n+1} \int_{-1}^1 P_n(t) r(t) dt \int_{-1}^1 P_n(t) s(t) dt,$$

et est donnée explicitement par

$$A_n(r, s) = H_n \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) s(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{4} \int_{-1}^1 P_k(t) r(t) dt \int_{-1}^1 P_k(t) s(t) dt \right). \quad (6.10)$$

Démonstration. Écrivons A_{n+1} comme suit

$$A_{n+1}(r, s) = \begin{vmatrix} c_{2n} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} & \tau_n \\ c_n & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & \tau_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ c_{2n-1} & c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & \tau_{n-1} \\ \phi_n & \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_{n-1} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r(t) s(t) dt \end{vmatrix},$$

est en appliquant l'identité Desnanot-Jacobi (voir [28], pp. 11), on obtient

$$H_n A_{n+1}(r, s) = H_{n+1} A_n(r, s) - \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \\ \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & \tau_0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} & \tau_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} & \tau_{n-1} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} & \tau_n \end{vmatrix}.$$

Avec le Lemme 6.4 et (6.8), nous obtenons le résultat attendu. □

3 Cas général

Nous sommes à présent en mesure d'établir une borne inférieure pour la fonctionnelle de Čebyšev (6.1) avec f et g deux fonctions n -convexes.

Théorème 6.6. *Si f et g sont deux fonctions n -convexes (n -concaves) sur $[a, b]$, alors, on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \\ \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) f(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) g(x) dx, \end{aligned} \quad (6.11)$$

où $P_k(x)$ sont les polynômes de Legendre. L'égalité dans (6.11) est vraie lorsque au moins une des fonctions f ou g est une fonction polynômiale de degré au plus $n-1$ sur $[a, b]$. L'inégalité inverse est vraie, si f est une fonction n -convexe (n -concave) et g une fonction n -concave (n -convexe).

Démonstration. Par une transformation de (6.10) à l'intervalle $[a, b]$, et en utilisant (6.5), on obtient (6.11). □

Théorème 6.7. *Si f et g sont deux fonctions n -convexes (n -concaves) sur $[a, b]$, respectivement l'une d'elles est n -convexe et l'autre est n -concave. Alors, on obtient (6.11), respectivement l'inverse de (6.11). L'égalité dans (6.11) est vraie lorsque au moins une des fonctions f ou g est un polynôme de degré au plus $n-1$ dans $[a, b]$ et l'inégalité inverse est vraie, si f est une fonction n -convexe (n -concave) et g une fonction n -concave (n -convexe). De plus, si f et g sont $(n-1)$ fois dérivables, alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \\ \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{2k} (2k+1)}{(k!)^2 (b-a)^{4k+2}} \int_a^b (x-a)^k (x-b)^k f^{(k)}(x) dx \int_a^b (x-a)^k (x-b)^k g^{(k)}(x) dx. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Démonstration. En appliquant (5.3), on obtient (6.12). □

Corollaire 6.8. Si f et g sont des fonctions n -convexes (n -concaves) sur $[a, b]$, pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{(l)}(x) g^{(l)}(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f^{(l)}(x) dx \int_a^b g^{(l)}(x) dx \\ & \geq \sum_{k=1}^{n-l-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) f^{(l)}(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) g^{(l)}(x) dx. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Démonstration. Nous utilisons le fait que, si f et g sont des fonctions n -convexes sur $[a, b]$ pour $n \geq 2$, alors les fonctions $f^{(l)}, g^{(l)}$ existent, et ils sont $(n-l)$ -convexes, pour $1 \leq l \leq n-2$. \square

Remarque 6.9. Une fonction f est dite convexe d'ordre (n, n) , si pour tous $x_i, y_j, i, j = 1, \dots, n$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{f(x_i, y_j)}{u'(x_i) v'(y_j)} \geq 0,$$

où $u(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, $v(y) = \prod_{j=1}^n (y - y_j)$. Notons que l'inégalité (6.11) peut être généralisée pour les fonctions convexes d'ordre (n, n) . On obtient un résultat similaire à celui de Pečarić [39], à partir duquel l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(x, y) dx dy \\ & \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) P_k \left(\frac{2y-a-b}{b-a} \right) f(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

est valable pour tous $n \geq 2$.

7

Sur les bornes de Lupaş généralisée

1 Introduction

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'évaluation de bornes pour Lupaş généralisée. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables, notons par

$$\begin{aligned} m_1 &:= \inf_{x \in [a, b]} f^{(n)}(x), & m_2 &:= \inf_{x \in [a, b]} g^{(n)}(x), \\ M_1 &:= \sup_{x \in [a, b]} f^{(n)}(x), & M_2 &:= \sup_{x \in [a, b]} g^{(n)}(x), \\ h_n(x) &:= \frac{m_1 + M_1}{2} g(x) + \frac{m_2 + M_2}{2} f(x). \end{aligned} \quad (7.1)$$

En utilisant le théorème 5.3, Ciobotariu-Boer [16], a obtenu le résultat suivant pour les fonctions deux fois dérivables

$$\left| \mathcal{A}_2(f, g) - \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b Q_2(x) h_2(x) dx + \frac{(m_1 + M_1)(m_2 + M_2)}{2880} (b-a)^4 \right| \leq \frac{(M_1 - m_1)(M_2 - m_2)}{2880} (b-a)^4, \quad (7.2)$$

où $\mathcal{A}_2(f, g)$ est la fonctionnelle de Lupaş pour les fonctions convexe, définie par

$$\mathcal{A}_2(f, g) = T(f, g) - \frac{12}{(b-a)^4} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) g(x) dx,$$

et

$$Q_2(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Il a aussi prouvé le résultat suivant [15] :

$$\left| \mathcal{A}_3(f, g) - \frac{1}{6(b-a)} \int_a^b Q_3(x) h_3(x) dx + \frac{(m_1 + M_1)(m_2 + M_2)}{403200} (b-a)^6 \right| \leq \frac{(M_1 - m_1)(M_2 - m_2)}{403200} (b-a)^6, \quad (7.3)$$

où

$$\mathcal{A}_3(f, g) = \mathcal{A}_2(f, g) - \frac{180}{(b-a)^6} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12} \right) f(x) dx \int_a^b \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12} \right] g(x) dx,$$

et

$$Q_3(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{3(b-a)^2}{20} \right).$$

2 Bornes explicites

Le théorème suivant a pour objet de généraliser les résultats obtenus par Ciobotariu-Boer (7.2) et l'inégalité (7.3) sur la fonctionnelle de Lupaş

Théorème 7.1. Soient f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\Gamma(f, g) - \frac{m_1 m_2 + M_1 M_2}{2 \binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n} \leq \mathcal{A}_n(f, g) \leq \Gamma(f, g) + \frac{m_1 M_2 + M_1 m_2}{2 \binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n}, \quad (7.4)$$

avec

$$\mathcal{A}_n(f, g) := T(f, g) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) f(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) g(x) dx,$$

$$\Gamma(f, g) := \frac{(b-a)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n!} \int_a^b P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) h_n(x) dx.$$

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 7.2. Pour $n \geq 0$, on a

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n (2k+1) \left(\int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right) P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) = x^n, \quad (7.5)$$

et

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n (2k+1) \left(\int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right)^2 = \int_a^b x^{2n} dx. \quad (7.6)$$

Démonstration. En multipliant les deux côtés par $P_s \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)$ et en intégrant par rapport à x , nous utilisons

$$\int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) P_s \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx = \frac{b-a}{2k+1} \delta_{ks},$$

avec δ_{kl} , le symbole de Kronecker, pour obtenir (7.5). (7.6) découle de (7.5). \square

Démonstration. (du théorème) Nous considérons les fonctions $F_1, F_2, G_1, G_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, définies par

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{m_1}{n!} x^n - f(x), & F_2(x) &= \frac{M_1}{n!} x^n - f(x), \\ G_1(x) &= \frac{m_2}{n!} x^n - g(x), & G_2(x) &= \frac{M_2}{n!} x^n - g(x). \end{aligned}$$

Il est clair que $F_1^{(n)}(x) \leq 0, G_1^{(n)}(x) \leq 0, F_2^{(n)}(x) \geq 0$ et $G_2^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Par le théorème 1, F_1 et G_1 sont des fonctions n -concaves sur $[a, b]$ et F_2, G_2 sont des fonctions n -convexes sur $[a, b]$.

Partant de (6.11), on a

$$T(F_1, G_1) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) F_1(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) G_1(x) dx, \quad (7.7)$$

$$T(F_2, G_2) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) F_2(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) G_2(x) dx, \quad (7.8)$$

$$T(F_1, G_2) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) F_1(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) G_2(x) dx, \quad (7.9)$$

$$T(F_2, G_1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) F_2(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) G_1(x) dx. \quad (7.10)$$

Par calcul direct, on trouve respectivement

$$\begin{aligned} T(F_1, G_1) &= T(f, g) + \frac{m_1 m_2 (b^{2n+1} - a^{2n+1})}{(2n+1)(n!)^2 (b-a)} - \frac{1}{n! (b-a)} \int_a^b x^n (m_1 g(x) + m_2 f(x)) dx \\ &\quad - \frac{m_1 m_2 (b^{n+1} - a^{n+1})^2}{(b-a)^2 ((n+1)!)^2} + \frac{(b^{n+1} - a^{n+1})}{(b-a)^2 (n+1)!} \int_a^b (m_1 g(x) + m_2 f(x)) dx, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) F_1(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) G_1(x) dx = \\ &\quad \frac{m_1 m_2}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right)^2 \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{n!} \int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right) \left(\int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) (m_1 g(x) + m_2 f(x)) dx \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) f(x) dx \int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) g(x) dx. \end{aligned} \quad (7.12)$$

En remplaçant (7.11) et (7.12) dans (7.7), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(f, g) &+ \frac{m_1 m_2 (b^{2n+1} - a^{2n+1})}{(b-a)(n!)^2 (2n+1)} - \frac{m_1 m_2 (b^{n+1} - a^{n+1})^2}{(b-a)^2 ((n+1)!)^2} \\ &\quad - \frac{m_1 m_2}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right)^2 \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(f, g) + \frac{m_1 m_2 (b^{2n+1} - a^{2n+1})}{(b-a) (n!)^2 (2n+1)} - \frac{m_1 m_2 (b^{n+1} - a^{n+1})^2}{(b-a)^2 ((n+1)!)^2} \\
- \frac{m_1 m_2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right)^2}{(n!)^2} \geq \\
\frac{1}{(b-a) n!} \int_a^b x^n (m_1 g(x) + m_2 f(x)) dx - \frac{(b^{n+1} - a^{n+1})}{(b-a)^2 (n+1)!} \int_a^b (m_1 g(x) + m_2 f(x)) dx \\
- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{n!} \int_a^b x^n P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) dx \right) \left(\int_a^b P_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) [m_1 g(x) + m_2 f(x)] dx \right).
\end{aligned}$$

Compte tenu du Lemme, on obtient

$$\mathcal{A}_n(f, g) + \frac{m_1 m_2}{\binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n} \geq \frac{1}{(b-a) n!} \int_a^b \frac{(b-a)^n}{\binom{2n}{n}} P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) (m_1 g(x) + m_2 f(x)) dx. \quad (7.13)$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(f, g) + \frac{M_1 M_2}{\binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n} \geq \\
\frac{1}{(b-a) n!} \int_a^b \frac{(b-a)^n}{\binom{2n}{n}} P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) (M_1 g(x) + M_2 f(x)) dx, \quad (7.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(f, g) + \frac{m_1 M_2}{\binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n} \leq \\
\frac{1}{(b-a) n!} \int_a^b \frac{(b-a)^n}{\binom{2n}{n}} P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) (m_1 g(x) + M_2 f(x)) dx, \quad (7.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(f, g) + \frac{M_1 m_2}{\binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n} \leq \\
\frac{1}{(b-a) n!} \int_a^b \frac{(b-a)^n}{\binom{2n}{n}} P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) (M_1 g(x) + m_2 f(x)) dx. \quad (7.16)
\end{aligned}$$

On additionne (7.13), (7.14) et (7.15), (7.16), on trouve respectivement

$$\mathcal{A}_n(f, g) - \frac{(b-a)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n!} \int_a^b P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) h_n(x) dx \geq -\frac{m_1 m_2 + M_1 M_2}{2 \binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n},$$

et

$$\mathcal{A}_n(f, g) - \frac{(b-a)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n!} \int_a^b P_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) h_n(x) dx \leq -\frac{m_1 M_2 + M_1 m_2}{2 \binom{2n}{n} (2n+1)!} (b-a)^{2n}.$$

On obtient ainsi l'expression considérée dans le théorème. □

Troisième partie

Une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli

Combinatorialists use recurrence, generating functions, and such transformations as the Vandermonde convolution; others, to my horror, use contour integrals, differential equations, and other resources of mathematical analysis.

Handbook of Combinatorics (1995)

J. Riordan

8

Sur une identité de type Gessel-Kaneko pour les nombres de Bernoulli

1 Introduction

En 1995, Kaneko [26] a établi et a donné deux preuves de l'identité suivante sur les nombres de Bernoulli

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \tilde{B}_{n+k} = 0, \quad (8.1)$$

avec $\tilde{B}_n = (n+1)B_n$. Srivastava et Miller [49] ont présenté une preuve élémentaire utilisant les identités de base connus sur les nombres de Bernoulli. En 2003, via le calcul ombral, Gessel [20] donne la généralisation suivante

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} m^{n+1-k} \binom{n+1}{k} \tilde{B}_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} ((2n+1)k - (n+1)m) k^n (k-m)^{n-1}. \quad (8.2)$$

En 2007, Chen [13] (Voir aussi [24]), a étendu (8.1), pour tout entier impair $r \in \mathbb{Z}^+$, comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} = 0. \quad (8.3)$$

En 2009, Chen et Sun [14], ont obtenu deux identités sur les nombres de Bernoulli via l'algorithme de Zeilberger

$$\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} (n+k+3) (n+k+2) \tilde{B}_{n+k} = 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{1}{n+3} \sum_{k=0}^{n+3} m^{n+3-k} \binom{n+3}{k} (n+k+3) (n+k+2) \tilde{B}_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} P(n, m, k) k^n (k-m)^{n-1}, \quad (8.5)$$

où

$$P(n, m, k) = 2(n+2)(2n+3)(2n+5)k^3 - 2m(n+2)(2n+5)(3n+5)k^2 + 3m^2(n+2)(2n^2+7n+7)k - m^3(n+1)^2(n+2). \quad (8.6)$$

avec la convention que la somme vide est égale à zéro. On retrouve la relation (8.4) en donnant à r la valeur 3 et à m la valeur 1 dans (8.3) et (8.5) respectivement. Motivés par les résultats (8.3) et (8.5), nous allons généraliser à la fois (8.3) et (8.5).

2 Théorème principal

Théorème 8.1. *Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Pour tout entier impair r , on a*

$$\frac{r!}{n+r} \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} P_r^{(m,k)}(n) k^n (k-m)^{n-1}, \quad (8.7)$$

avec $P_r^{(m,k)}(n)$, est une suite de polynômes de degré $2r$ en n, m et k , homogène par rapport à m et k de degré r , satisfaisant à la relation de récurrence suivante

$$P_1^{(m,k)}(n) = (2n+1)k - (n+1)m,$$

$$P_{r+2}^{(m,k)}(n) = (n+r+1)(n+r)m^2 P_r^{(m,k)}(n) + 2k(k-m)(n+r+1)(2n+2r+3)P_r^{(m,k)}(n+1). \quad (8.8)$$

(ii) *les polynômes $P_r^{(m,k)}(n)$, $r = 1, 3, \dots$, peuvent être exprimé en*

$$P_r^{(m,k)}(n) = \sum_{i=0}^r (-1)^i Q_{i,r}(n) m^i k^{r-i}, \quad (8.9)$$

avec $Q_{i,r}(n)$ satisfait à la relation de récurrence

$$Q_{i,r+2}(n) = (n+r+1)(n+r)Q_{i-2,r}(n) + (2n+2r+3)(2n+2r+2)(Q_{i-1,r}(n+1) + Q_{i,r}(n+1)). \quad (8.10)$$

(iii) Dans la forme explicite, les polynômes $Q_{i,r}(n)$, sont donnés par

$$Q_{i,r}(n) = (2n+2r-1) \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left[2^{\theta_j} \left(\binom{\theta_j}{i-2j} + \frac{n+\theta_j+1}{2n+2\theta_j+1} \binom{\theta_j}{i-(2j+1)} \right) \Delta_{j,r}(n) \prod_{s=\theta_j}^{r-2} (n+s+1)(2n+2s+1) \right], \quad (8.11)$$

avec $\theta_j = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - j$, $\Delta_{0,r}(n) = 1$ et pour $j \in \mathbb{Z}^+$

$$\Delta_{j,r}(n) = \frac{\binom{\lfloor r/2 \rfloor}{j}}{\prod_{s=0}^{j-1} (2n-2j+2s+r+2)(2n-2j+2s+2r+1)}.$$

Démonstration. (i) La démonstration de la formule (8.7) se fait par récurrence sur tout entier impair r . La propriété est bien vérifiée pour $r = 1$ (Voir [20]). Supposons que (8.7) est vraie pour r ; nous prouvons que la formule est vraie pour $r+2$. Notons par $L_r^{(m)}(n)$ la partie gauche de (8.7) et par $R_r^{(m)}(n)$ la partie droite. Par la formule intégrale de Cauchy pour les nombres de Bernoulli

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad (8.12)$$

on a

$$L_r^{(m)}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{e^z - 1} \sum_{k=0}^{n+r} C_r^{(m,k)}(n) dz, \quad (8.13)$$

avec

$$C_r^{(m,k)}(n) = m^{n+r-k} \frac{r! \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (n+k)!}{(n+r) z^{n+k}}. \quad (8.14)$$

Posons

$$S_r^{(m)}(n) = \sum_{k=0}^{n+r} C_r^{(m,k)}(n), \quad (8.15)$$

par le package Maple "EKHAD" de Zeilberger nous construisons la fonction

$$G(n,k) = -\frac{2m^2 k (n+r)(n+r+1)(2n+2r+3)}{(n+r+1-k)(n+r+2-k)} C_r^{(m,k)}(n),$$

tel que

$$G(n, k+1) - G(n, k) = z^2 C_r^{(m,k)}(n+2) - 2(r+n+1)(2r+2n+3) C_r^{(m,k)}(n+1) - (r+n+1)(r+n) m^2 C_r^{(m,k)}(n). \quad (8.16)$$

En sommant l'équation télescopique (8.16) sur k , on obtient la relation de récurrence suivante

$$z^2 S_r^{(m)}(n+2) = (r+n+1) \left(2(2r+2n+3) S_r^{(m)}(n+1) + (r+n) m^2 S_r^{(m)}(n) \right). \quad (8.17)$$

On intègre la partie droite de (8.17) par rapport à z , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^2}{e^z - 1} S_r^{(m)}(n+2) dz \\ = \frac{(r+2)!}{n+r+2} \sum_{k=0}^{n+r+2} m^{n+r-k+2} \binom{n+r+2}{k} \binom{n+k+r+2}{r+2} B_{n+k} = L_{r+2}^{(m)}(n). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Maintenant, l'intégration de la partie gauche de (8.17), donne

$$\begin{aligned} \frac{r+n+1}{2\pi i} \oint \frac{1}{e^z - 1} \left(2(2r+2n+3) S_r^{(m)}(n+1) + (r+n) m^2 S_r^{(m)}(n) \right) dz \\ = 2(2r+2n+3)(r+n+1) L_r^{(m)}(n+1) + (r+n+1)(r+n) m^2 L_r^{(m)}(n) \\ = 2(2r+2n+3)(r+n+1) R_r^{(m)}(n+1) + (r+n+1)(r+n) m^2 R_r^{(m)}(n) \\ = \sum_{k=1}^{m-1} (r+n+1)(r+n) m^2 P_r^{(m,k)}(n) k^n (k-m)^{n-1} \\ + \sum_{k=1}^{m-1} 2k(k-m)(r+n+1)(2r+2n+3) P_r^{(m,k)}(n+1) k^n (k-m)^{n-1} \\ = \sum_{k=1}^{m-1} P_{r+2}^{(m,k)}(n) k^n (k-m)^{n-1} \\ = R_{r+2}^{(m)}(n). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de (8.7). Depuis les trois dernières lignes nous obtenons la relation de récurrence (8.8).

(ii) Il s'ensuit de (8.8) et (8.9) que $Q_{i,r}(n)$ satisfait à la relation (8.10).

(iii) On vérifie que (8.11) est vraie pour tout entier impair r . En remplaçant j par $j-1$ et en utilisant l'identité suivante

$$\Delta_{j-1,r}(n) = j \frac{(2n+r+2)(2n+2r+1)(2n+2r+3)}{(\lfloor r/2 \rfloor + 1)(2n+2r-2j+3)} \Delta_{j,r+2}(n),$$

on obtient

$$(n+r+1)(n+r)Q_{i-2,r}(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left[2^{\theta_j+1} \left(\binom{\theta_j+1}{i-2j} + \frac{(n+1)+\theta_j+1}{2(n+1)+2\theta_j+1} \binom{\theta_j+1}{i-(2j+1)} \right) \right. \\ \left. j \frac{(2n+r+2)(2n+2r+3)}{(\lfloor r/2 \rfloor + 1)(2n+2r-2j+3)} \Delta_{j,r+2}(n) \prod_{s=\theta_j+1}^r (n+s+1)(2n+2s+1) \right]. \quad (8.19)$$

Il s'ensuit de

$$\Delta_{j,r}(n+1) = \frac{(\theta_j+1)(2n+2r+3)}{(\lfloor r/2 \rfloor + 1)(2n+2r-2j+3)} \Delta_{j,r+2}(n),$$

que

$$(2n+2r+3)(2n+2r+2)Q_{i,r}(n+1) \\ = (2n+2r+3) \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left[2^{\theta_j+1} \left(\binom{\theta_j}{i-2j} + \frac{(n+1)+\theta_j+1}{2(n+1)+2\theta_j+1} \binom{\theta_j}{i-(2j+1)} \right) \right. \\ \left. \frac{(\theta_j+1)(2n+2r+3)}{(\lfloor r/2 \rfloor + 1)(2n+2r-2j+3)} \Delta_{j,r+2}(n) \prod_{s=\theta_j+1}^r (n+s+1)(2n+2s+1) \right]. \quad (8.20)$$

De la même manière, on trouve

$$(2n+2r+3)(2n+2r+2)Q_{i-1,r}(n+1) = (2n+2r+3) \\ \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left[2^{\theta_j+1} \left(\binom{\theta_j}{i-2j-1} + \frac{(n+1)+\theta_j+1}{2(n+1)+2\theta_j+1} \binom{\theta_j}{i-(2j+1)-1} \right) \right. \\ \left. \frac{(\theta_j+1)(2n+2r+3)}{(\lfloor r/2 \rfloor + 1)(2n+2r-2j+3)} \Delta_{j,r+2}(n) \prod_{s=\theta_j+1}^r (n+s+1)(2n+2s+1) \right]. \quad (8.21)$$

On additionne (8.19), (8.20) et (8.21) et en utilisant

$$\binom{\theta_j+1}{i-2j} = \binom{\theta_j}{i-2j} + \binom{\theta_j}{i-(2j+1)},$$

et

$$\binom{\theta_j+1}{i-(2j+1)} = \binom{\theta_j}{i-(2j+1)} + \binom{\theta_j}{i-(2j+2)},$$

on obtient $Q_{i,r+2}(n)$. Ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 8.2. Pour $n \geq 2$, posons $\tilde{B}_n^r = (n+r) \cdots (n+1) B_n$. L'identité (8.7) est équivalente à

$$\sum_{k=0}^{n+r} m^k \binom{n+r}{k} \tilde{B}_{2n+r-k}^r = (n+r) \sum_{u+v=m} (-1)^{n-1} \hat{P}_r^{(u,v)}(n) u^n v^{n-1}, \quad (8.22)$$

avec $\widehat{P}_r^{(u,v)}(n) = P_r^{(u+v,v)}(n)$. Notons l'aspect symétrique de la partie droite de (8.22), ce qui nous permet de calculer la moitié des termes qui apparaissent dans le terme de la somme, comme il a été mentionné par Gessel dans [20].

Dans le papier d'origine relatif à ce travail [7], le professeur Gessel a souhaité inclure une appendice qui donne une variante un peu plus élaborée de notre résultat principal. La preuve est basée sur le calcul ombra. Ce que nous reproduisons ci-dessous [7].

3 Appendix

by Ira M. Gessel¹

Here we give an umbral proof, following the method of [3], of a different but closely related formula for the Bernoulli number sum in Theorem 1.

Théorème 8.3. *Let l, n, m , and r be nonnegative integers. Then*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{l+k+r}{r} B_{l+k} \\ & + (-1)^{l+n+r+1} \sum_{k=0}^{l+r} m^{l+r-k} \binom{l+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} \\ & = (r+1) \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{l+j-1} \binom{n+r}{j} \binom{l+r}{r+1-j} k^{l+j-1} (m-k)^{n+r-j}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

If r is odd then

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} \\ & = \frac{1}{2} (r+1) \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} \binom{n+r}{j} \binom{n+r}{r+1-j} k^{j+n-1} (m-k)^{n+r-j}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Démonstration. We begin by proving some binomial coefficient identities. We start with the identity

$$\sum_{k=0}^a (-1)^k \binom{a}{k} \binom{b+k}{c} = (-1)^a \binom{b}{c-a}. \quad (8.25)$$

Equation (8.25) may be proved by expanding $(-x)^a(1+x)^b$ in powers of x in two ways : the

1. Department of Mathematics, Brandeis University, Waltham, MA, USA, gessel@brandeis.edu

coefficient of x^c in $(-x)^a(1+x)^b$ is clearly $(-1)^a \binom{b}{c-a}$, but we also have

$$\begin{aligned} (-x)^a(1+x)^b &= (1-(1+x))^a(1+x)^b = \sum_{k=0}^a (-1)^k \binom{a}{k} (1+x)^{b+k} \\ &= \sum_{k=0}^a \sum_{c=0}^{b+k} (-1)^k \binom{a}{k} \binom{b+k}{c} x^c, \end{aligned}$$

so (8.25) holds.

Now let us define polynomials $A_{l,n,r}(x)$ by

$$A_{l,n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \binom{l+k+r}{r} x^{l+k}.$$

We first note that an easy computation gives

$$A'_{l,n,r}(x) = (r+1)A_{l-1,n-1,r+1}(x). \quad (8.26)$$

Next we prove the formula

$$A_{l,n,r}(-1-x) = (-1)^{l+n+r} A_{n,l,r}(x). \quad (8.27)$$

The coefficient of x^i in $A_{l,n,r}(-1-x)$ is

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+r} (-1)^{l+k} \binom{n+r}{k} \binom{l+k+r}{r} \binom{l+k}{i} \\ &= (-1)^l \binom{r+i}{i} \sum_{k=0}^{n+r} (-1)^k \binom{n+r}{k} \binom{l+k+r}{r+i} \\ &= (-1)^{l+n+r} \binom{r+i}{i} \binom{l+r}{i-n}, \text{ by (8.25),} \end{aligned}$$

which is the coefficient of x^i in $(-1)^{l+n+r} A_{n,l,r}(x)$. This proves (8.27).

Next we show that

$$A_{l,n,r}(x) = \sum_{j=0}^r \binom{n+r}{j} \binom{l+r}{r-j} x^{l+j} (1+x)^{n+r-j}. \quad (8.28)$$

The coefficient of x^{l+k} on the right-hand side of (8.28) is

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^r \binom{n+r}{j} \binom{l+r}{r-j} \binom{n+r-j}{k-j} &= \binom{n+r}{k} \sum_{j=0}^r \binom{k}{j} \binom{l+r}{r-j} \\ &= \binom{n+r}{k} \binom{k+l+r}{r}, \end{aligned}$$

by Vandermonde's theorem, and this is the coefficient of x^{l+k} in $A_{l,n,r}(x)$. This proves (8.28).

One of the properties of the Bernoulli numbers (formula (7.8) of [3]) is that for any polynomial $f(x)$ and any positive integer m ,

$$f(B+m) - f(-B) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k), \quad (8.29)$$

where after the left-hand side is expanded in powers of B , each B^j is replaced with the Bernoulli number B_j . If we set $x = B/m$ in (8.27) we get

$$A_{l,n,r}(-1 - B/m) = (-1)^{l+n+r} A_{n,l,r}(B/m) \quad (8.30)$$

Now set $f(x) = A_{l,n,r}(-x/m)$ in (8.29), obtaining

$$A_{l,n,r}(-1 - B/m) - A_{l,n,r}(B/m) = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} A'_{l,n,r}(-k/m).$$

Applying (8.30) gives

$$\begin{aligned} (-1)^{l+n+r} A_{n,l,r}(B/m) - A_{l,n,r}(B/m) &= -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} A'_{l,n,r}(-k/m) \\ &= -\frac{r+1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} A_{l-1,n-1,r+1}(-k/m), \end{aligned}$$

by (8.26), which by (8.28) is equal to

$$\begin{aligned} -\frac{r+1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} \binom{n+r}{j} \binom{l+r}{r+1-j} (-k/m)^{l+j-1} (1-k/m)^{n+r-j} \\ = -\frac{r+1}{m^{l+n+r}} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{l+j-1} \binom{n+r}{j} \binom{l+r}{r+1-j} k^{l+j-1} (m-k)^{n+r-j}. \end{aligned}$$

Multiplying by $-m^{l+n+r}$ gives

$$\begin{aligned} m^{l+n+r} A_{l,n,r}(B/m) - (-1)^{l+n+r} m^{l+n+r} A_{n,l,r}(B/m) \\ = (r+1) \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{l+j-1} \binom{n+r}{j} \binom{l+r}{r+1-j} k^{l+j-1} (m-k)^{n+r-j}, \end{aligned}$$

which is equivalent to (8.23). If we set $l = n$ and take r to be odd in (8.23), then the two terms on the left become equal, and dividing by 2 gives (8.24). \square

We note that the case $m = 1, r = 1$ of (8.23) was given by Momiyama [37]. Momiyama also gives

a formula for the left-hand side of (8.23) for $r = 1$ and general m , but with a less explicit formula for the right-hand side.

Although (8.24) is simpler than Theorem 1, for each particular value of r , it seems to give a slightly more complicated formula. For example, for $r = 1$, Theorem 1 is the same as (4) but (8.24) gives

$$\sum_{k=0}^{n+1} m^{n+1-k} \binom{n+1}{k} \tilde{B}_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\binom{n+1}{2} k^{n-1} (k-m)^{n+1} + (n+1)^2 k^n (k-m)^n + \binom{n+1}{2} k^{n+1} (k-m)^{n-1} \right]. \quad (8.31)$$

In fact, (8.31) is a symmetrized version of (4) in the sense that if we set

$$S_1(n, m, k) = (n+1)((2n+1)k - (n+1)m)k^n (k-m)^{n-1}$$

and

$$S_2(n, m, k) = \binom{n+1}{2} k^{n-1} (k-m)^{n+1} + (n+1)^2 k^n (k-m)^n + \binom{n+1}{2} k^{n+1} (k-m)^{n-1}$$

then $S_2(n, m, k) = \frac{1}{2}(S_1(n, m, k) + S_1(n, m, m-k))$. This is easier to see if we write $S_1(n, m, k)$ as

$$(-1)^n (n+1)^2 k^n (m-k)^n + 2(-1)^{n-1} \binom{n+1}{2} k^{n+1} (m-k)^{n-1}.$$

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié différents problèmes de la combinatoire dite énumérative. Dans la première partie, nous avons contribué à l'étude des sommes des inverses des coefficients binomiaux qui nous a conduit à la transformation d'Akiyama-Tanigawa, dont nous connaissons bien peu de choses. Il reste de nombreux problèmes à résoudre et nous sommes convaincus que les outils présentés dans cette partie favoriseront la résolution de certains d'entre eux.

Dans la deuxième partie, nous avons résolu un problème ouvert mentionné dans les livres [36, 40], en se basant sur des vieux résultats d'Andréief (1883) et Dodgson (1866).

Des questions naturelles surviennent alors :

- donner un algorithme simple pour le calcul de transformé de Stirling.
- trouver le lien entre la transformation de Hankel et la transformation de Stirling.
- reprendre le même travail avec les coefficients multinomiaux.
- q -analogues

A

Identités de base

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{A.1})$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{A.2})$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{A.3})$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{A.4})$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x(x-kz)^{k-1} (y+kz)^{n-k} \quad (\text{A.5})$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ t+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ t \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.6})$$

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.
- [2] S. Akiyama and Y. Tanigawa. Multiple zeta values at non-positive integers. *Ramanujan J.*, 5(4) :(2002) 327–351, 2001.
- [3] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [4] F. V. Atkinson. An inequality. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, (357-380) :5–6, 1971.
- [5] H. Belbachir and **M. Rahmani**. Bounds for the generalized Lupaş functional. *Creat. Math. Inform.*, 20(1) :24–31, 2011.
- [6] H. Belbachir and **M. Rahmani**. An integral inequality for n -convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 15(1) :117–126, 2012.
- [7] H. Belbachir and **M. Rahmani**. On Gessel–Kaneko’s identity for Bernoulli numbers. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 7(1) :1–10, 2013.
- [8] H. Belbachir, **M. Rahmani**, and B. Sury. Sums involving moments of reciprocals of binomial coefficients. *J. Integer Seq.*, 14(6) :Article 11.6.6, 16, 2011.
- [9] H. Belbachir, **M. Rahmani**, and B. Sury. Alternating sums of the reciprocals of binomial coefficients. *J. Integer Seq.*, 15(2) :Article 12.2.8, 16, 2012.
- [10] K. N. Boyadzhiev. Power sum identities with generalized Stirling numbers. *Fibonacci Quart.*, 46/47(4) :326–330, 2008/09.
- [11] A. Z. Broder. The r -Stirling numbers. *Discrete Math.*, 49(3) :241–259, 1984.
- [12] K.-W. Chen. Algorithms for Bernoulli numbers and Euler numbers. *J. Integer Seq.*, 4(1) :Article 01.1.6, 7, 2001.

- [13] K.-W. Chen. Identities from the binomial transform. *J. Number Theory*, 124(1) :142–150, 2007.
- [14] W. Y. C. Chen and L. H. Sun. Extended Zeilberger’s algorithm for identities on Bernoulli and Euler polynomials. *J. Number Theory*, 129(9) :2111–2132, 2009.
- [15] V. Ciobotariu-Boer. An integral inequality for 3-convex functions. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(4) :Article 98, 10, 2008.
- [16] V. Ciobotariu-Boer. On the Lupuş functional for twice differentiable functions. *Creat. Math. Inform.*, 18(2) :147–152, 2009.
- [17] L. Comtet. *Advanced combinatorics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, enlarged edition, 1974. The art of finite and infinite expansions.
- [18] M. C. Fasenmyer. *Some Generalized Hypergeometric Polynomials*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1946. Thesis (Ph.D.)–University of Michigan.
- [19] H. O. Foulkes. Group transitivity and a multiplicative function of a partition. *J. Combinatorial Theory*, 9 :261–266, 1970.
- [20] I. M. Gessel. Applications of the classical umbral calculus. *Algebra Universalis*, 49(4) :397–434, 2003. Dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota.
- [21] S. Getu, L. W. Shapiro, W. J. Woan, and L. C. Woodson. How to guess a generating function. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(4) :497–499, 1992.
- [22] R. W. Gosper, Jr. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 75(1) :40–42, 1978.
- [23] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.
- [24] Y. He and W. Zhang. Some symmetric identities involving a sequence of polynomials. *Electron. J. Combin.*, 17(1) :Note 7, 7, 2010.
- [25] Y. Inaba. Hyper-sums of powers of integers and the Akiyama-Tanigawa matrix. *J. Integer Seq.*, 8(2) :Article 05.2.7, 6, 2005.
- [26] M. Kaneko. The Akiyama-Tanigawa algorithm for Bernoulli numbers. *J. Integer Seq.*, 3(2) :Article 00.2.9, 6, 2000.
- [27] A. Kerber. A matrix of combinatorial numbers related to the symmetric groups. *Discrete Math.*, 21(3) :319–321, 1978.

- [28] C. Krattenthaler. Advanced determinant calculus. *Sém. Lothar. Combin.*, 42 :Art. B42q, 67, 1999. The Andrews Festschrift (Maratea, 1998).
- [29] M. Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2009. Cauchy's equation and Jensen's inequality, Edited and with a preface by Attila Gilányi.
- [30] G. Letac. *Problèmes de probabilité*. Presses Universitaires de France, 1970.
- [31] A. Lupaş. An integral inequality for convex functions. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, (381-409) :17–19, 1972.
- [32] T. Mansour. Combinatorial identities and inverse binomial coefficients. *Adv. in Appl. Math.*, 28(2) :196–202, 2002.
- [33] T. Mansour and J. West. Avoiding 2-letter signed patterns. *Sém. Lothar. Combin.*, 49 :Art. B49a, 11, 2002/04.
- [34] D. Merlini, R. Sprugnoli, and M. C. Verri. The Akiyama-Tanigawa transformation. *Integers*, 5(1) :A5, 12, 2005.
- [35] I. Mező. The r -Bell numbers. *J. Integer Seq.*, 14(1) :Article 11.1.1, 14, 2011.
- [36] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, and A. M. Fink. *Classical and new inequalities in analysis*, volume 61 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [37] H. Momiyama. A new recurrence formula for Bernoulli numbers. *Fibonacci Quart.*, 39(3) :285–288, 2001.
- [38] F. Nedemeyer and Y. Smorodinsky. Resistances in the multidimensional cube. *Quantum*, 7 (1) 63 :12–15, Sept./Oct. 1996.
- [39] J. E. Pečarić. On an integral inequality of A. Lupaş. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 23(1) :101–102, 1994.
- [40] J. E. Pečarić, F. Proschan, and Y. L. Tong. *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*, volume 187 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.
- [41] M. Petkovšek, H. S. Wilf, and D. Zeilberger. *A = B*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1996. With a foreword by Donald E. Knuth, With a separately available computer disk.

- [42] J. Pla. The sum of inverses of binomial coefficients revisited. *Fibonacci Quart.*, 35(4) :342–345, 1997.
- [43] A. M. Rockett. Sums of the inverses of binomial coefficients. *Fibonacci Quart.*, 19(5) :433–437, 1981.
- [44] G. Roos. *Analyse et géométrie : méthodes hilbertiennes. Cours et exercices corrigés.* Sciences Sup. Dunod, 2002.
- [45] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. *Published electronically at <http://www.research.att.com/~njas/sequences>*, 2013.
- [46] A. Sofo. General properties involving reciprocals of binomial coefficients. *J. Integer Seq.*, 9(4) :Article 06.4.5, 13, 2006.
- [47] R. Sprugnoli. Sums of reciprocals of the central binomial coefficients. *Integers*, 6 :A27, 18, 2006.
- [48] R. Sprugnoli. Moments of reciprocals of binomial coefficients. *J. Integer Seq.*, 14(7) :Article 11.7.8, 14, 2011.
- [49] H. M. Srivastava and E. A. Miller. A recurrence relation for the Bernoulli numbers. *Int. J. Math. Sci.*, 1(1-2) :73–77, 2002.
- [50] T. B. Staver. On summation of powers of binomial coefficients. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 29 :97–103, 1947.
- [51] B. Sury. Sum of the reciprocals of the binomial coefficients. *European J. Combin.*, 14(4) :351–353, 1993.
- [52] B. Sury, T. Wang, and F.-Z. Zhao. Identities involving reciprocals of binomial coefficients. *J. Integer Seq.*, 7(2) :Article 04.2.8, 12, 2004.
- [53] G. Szegő. *Orthogonal polynomials.* American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.
- [54] **M. Rahmani.** The Akiyama–Tanigawa matrix and related combinatorial identities. *Linear Algebra Appl.*, 438(1) :219–230, 2013.
- [55] T. Trif. Combinatorial sums and series involving inverses of binomial coefficients. *Fibonacci Quart.*, 38(1) :79–84, 2000.
- [56] T. Tsuzuku. On multiple transitivity of permutation groups. *Nagoya Math. J.*, 18 :93–109, 1961.
- [57] J.-H. Yang and F.-Z. Zhao. Sums involving the inverses of binomial coefficients. *J. Integer Seq.*, 9(4) :Article 06.4.2, 11, 2006.

- [58] J.-H. Yang and F.-Z. Zhao. The asymptotic expansions of certain sums involving inverse of binomial coefficient. *Int. Math. Forum*, 5(13-16) :761–768, 2010.
- [59] D. Zeilberger. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 11(3) :195–204, 1991.
- [60] J. Zeng. The Akiyama-Tanigawa algorithm for Carlitz's q -Bernoulli numbers. *Integers*, 6 :A5, 10, 2006.
- [61] F.-Z. Zhao and T. Wang. Some results for sums of the inverses of binomial coefficients. *Integers*, 5(1) :A22, 5, 2005.