

REPENSE DES SYSTEMES HYDROELASTIQUES A UNE EXCITATION PARAMETRIQUE

Mémoire de magister préparée par HADJ RAHMOUN Oum el kheir

Laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée

Introduction :

Dans ce travail nous intéressons au problème de vibration d'une surface libre d'un fluide contenu dans un réservoir rectangulaire, l'une des parois verticales et flexible, l'ensemble (fluide-réservoir) est soumis à une force dépendant du temps, qui est influencée par l'interaction entre le liquide et la structure qui le contient.

Nous proposons que l'ensemble soit sous effets des oscillations harmoniques verticales.

Ce problème qui représente une extension naturelle de Faraday est rencontré dans de nombreuses situations dans lesquelles se manifestent des phénomènes de mélange de liquide, ou de ballottements. Due à une agitation ou à un mouvement quelconque de l'enceinte.

Les études qui ont été consacrées ont été effectuées dans les limites de certaines hypothèses. Un grand nombre de ces travaux se sont focalisés sur les caractéristiques vibratoires intrinsèques du système couplé. Dans ce contexte, le problème a d'abord été considéré par Mille [1958] pour voir comment les fréquences propres d'un réservoir cylindrique sont affectées par la réponse d'un fluide non visqueux en son sein.

Les travaux consacrés à la géométrie rectangulaire restent très limités.

Bauer [1981] a considéré le cas d'un réservoir rectangulaire ayant un fond élastique et des parois rigides, il a considéré que les fréquences étant inférieures à celles non couplées de la structure et supérieures à celles de ballottement.

Une solution analytique du problème a été trouvée en utilisant la méthode de séparation des variables. Chai et al. [1996] ont réalisé une étude analytique et expérimentale de l'interaction fluide-structure dans un réservoir rectangulaire, ils ont calculé les fréquences et les modes couplés dans deux configurations de mouvement de type piston modélisé par un système masse-ressort. Les phénomènes de couplage ont été mis en évidence en utilisant la fonction de réponse en fréquence. Les effets du fluide sur la structure sont présentés par le terme de masse ajoutée qui se calcule et s'exprime en fonction du nombre de Froude et du ratio de la longueur du réservoir à la profondeur du fluide. Dans le deuxième cas d'interaction considéré une des parois latérales du réservoir élastique et modélisée comme une poutre encastrée,

Body.G.L[2004] à étudié le problème à deux dimensions irrotationnel non visqueux de mouvement d'eau couplée d'une plaque pivoter au milieu d'une petite angle θ d'un réservoir très longue supposé semi finie ,l'équation de mouvement vient de la conservation du moment angulaire de la plaque dans les coordonnées cylindrique ,il utilisant le mode avec énergie ajoutée . Les principaux résultats de ces travaux concernent mis en évidence de l'existence de deux types de modes propres :

Le mode de type ballotement :

Caractérise les oscillations de la surface libre due au mouvement des parois du réservoir.

Le mode de type structure :

est lié aux vibrations de la partie élastique en contact avec le fluide .

la flexibilité de la structure joue souvent un rôle majeur ,par exemple dans le cas où elle est faible

les modes de ballotement sont peu affectés et l'influence des oscillations de la structure est

également négligeable .dans ce cas ,une paroi plane peut remplacer cette interface

dans les applications dominées par les modes du type "structure" sans altérer la précision. La déformation de la surface libre est effective dans les modes de type ballotement. Ces caractéristiques vibratoires intrinsèques sont déterminantes pour comprendre comment apparaissent les perturbations et la relation entre leur développement et l'excitation qui en est à l'origine.

Depuis les observations de Faraday [1831], on sait que dans le cas d'une structure rigide les ondes à la surface du liquide qu'elle contient sont paramétriquement excitées si l'amplitude de vibration dépasse une valeur critique qui dépend de la fréquence. Ces ondes entrent en résonance sous-harmonique avec une fréquence moitié de celle du forcing sauf dans certains intervalles très petits dans lesquels on relève une réponse synchrone. Pour expliquer les observations de Faraday, Benjamin & Ursell [1954], considérant le cas d'un fluide non visqueux , ont effectué, dans la cadre de la théorie linéaire, une analyse basée sur une décomposition en modes normaux qui a abouti à un système découplé d'équations de Mathieu gouvernant l'évolution de chaque mode du mouvement de la surface libre. S'appuyant sur les propriétés des équations de Mathieu, ils mirent en évidence dans le plan (amplitude, fréquence) des régions où les solutions sont oscillatoires et périodiques ou apériodiques, et des zones dans lesquelles l'amplitude de l'interface croît de façon exponentielle pour donner lieu à des mouvements instables. La transition des régions stables vers celles instables apparaît à travers des bifurcations harmoniques ou sous-harmoniques .

I.2 POSITION DU PROBLEME

On considère le mouvement forcé d'un liquide incompressible et non visqueux, de densité ρ_f et de profondeur h , remplissant partiellement un réservoir rectangulaire de longueur L et de hauteur $h+H$ (voir figure 1). L'ensemble est soumis à un mouvement harmonique vertical d'accélération g_1 et de fréquence ω . Le réservoir, dont une des parois verticales est flexible, a des dimensions transversales suffisamment grandes pour que tout mouvement puisse être considéré bidimensionnel dans le plan (o,x,y) . L'axe (oy) qui est vertical ascendant est dans le plan contenant la paroi élastique dans son état non déformé et (ox) est perpendiculaire à ce dernier. L'origine (o) est placée au niveau de la surface libre dans son état de repos. La paroi flexible est modélisée par une poutre qui est soit soudée par sa base au fond du réservoir soit simplement guidée alors que son extrémité supérieure est traitée comme une frontière libre.

On peut décrire le mouvement par un potentiel des vitesses adimensionnel $\phi(x,y,t)$ qui satisfait l'équation de Laplace :

$$(1) \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1; -h \leq y \leq 0$$

qui sera résolue, dans le cadre de la théorie linéaire, on doit l'associer des conditions aux limites adimensionnelles :

$$(2) \quad \phi_x = w_t \quad \text{en } x = 0$$

$$(3) \quad \phi_x = 0 \quad \text{en } x = 1$$

$$(4) \quad \phi_y = 0 \quad \text{en } y = -h$$

$$(5) \quad \phi_y = \eta_t \quad \text{en } y = 0$$

$$(6) \quad \phi_t - \kappa' \Delta \eta + g(t) \eta = 0 \quad \text{en } y = 0$$

nous avons choisi d'adimensionnaliser ces équations en utilisant comme longueur de référence celle du réservoir, L , et comme temps de référence $\sqrt{L/g_0}$. Ici, η et w désignent respectivement

l'élévation de la surface libre et la déformation de la paroi élastique et g_0 l'accélération de la pesanteur. $\kappa' = \tau / \rho_f g_0 L^2$ est un nombre adimensionnel qui

caractérise la capillarité et $g(t) = 1 + \beta \sin \omega t$ avec $\beta = g_1 / g_0$. Les équations (1)-(6) sont complétées par l'équation des vibrations transverses de la poutre:

$$(7) \quad \left(\partial_t^2 + \frac{1}{\delta} \partial_y^4 \right) w = \gamma \partial_t \phi(x, 0, t)$$

où $\delta = (EI) / (\rho_s g_0 A L^3)$, $\gamma = \rho_f L / (\rho_s A)$ sont des paramètres adimensionnels; ρ_s , A et (EI) étant respectivement la densité de masse surfacique de la poutre, l'aire de sa section et son module de flexion.

Les conditions limites associées à (7) sont

$$(8) \quad w = \partial_y w = 0 \quad \text{en } y = -h$$

$$(9) \quad \partial_y^2 w = \partial_y^3 w = 0 \quad \text{en } y = H$$

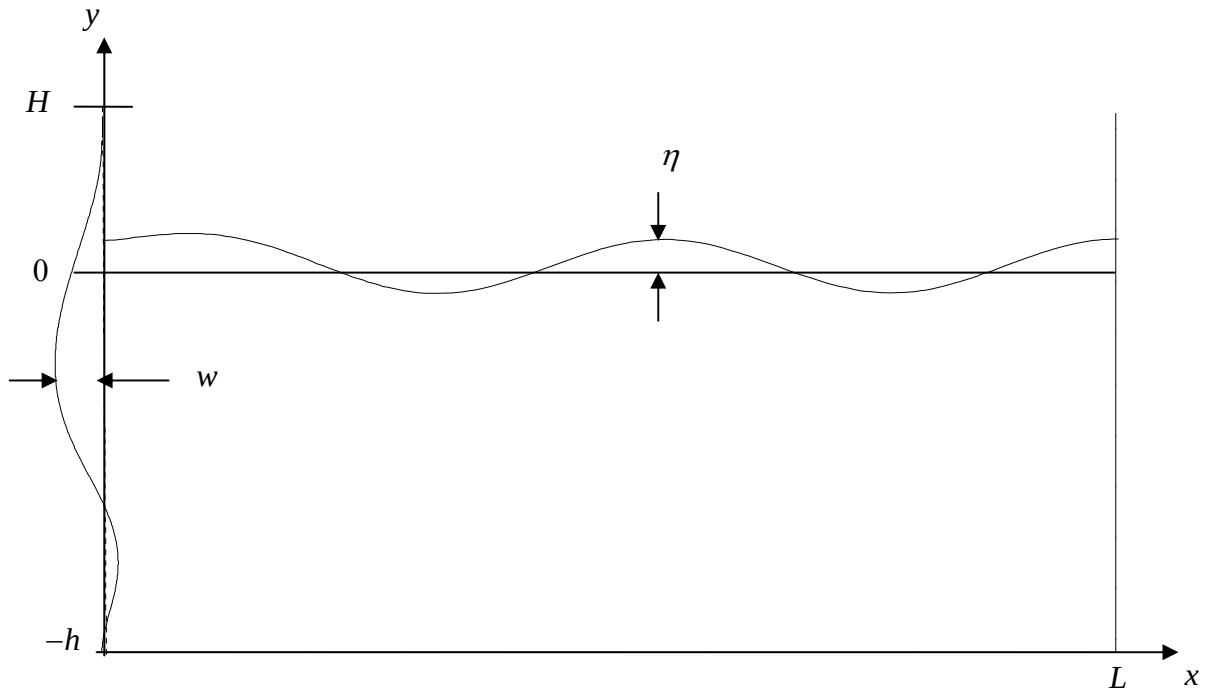


Figure 1 : schéma du réservoir

3. METHODE DE RESOLUTION

La résolution du problème sera effectuée en exploitant ses propriétés de linéarité et en tirant avantage de l'interprétation physique du mouvement. le déplacement de la poutre est influencé par l'excitation externe par l'intermédiaire du mouvement du fluide. Ce dernier est à son tour le résultat des effets simultanés du déplacement de la paroi et de l'excitation paramétrique. Pour ces raisons, l'écoulement du fluide sera décrit en décomposant le potentiel des vitesses en deux parties, ϕ_1 et ϕ_2 , chacune d'elles obéissant à l'équation de Laplace:

$$(10) \quad \Delta \phi_{1,2} = 0$$

qui doit être complétée par les conditions limites sur les parois solides:

$$(11) \quad \partial_x \phi_{1,2} = 0 \quad \text{en } x = 1$$

$$(12) \quad \partial_y \phi_{1,2} = 0 \quad \text{en } y = -h$$

$$(13) \quad \partial_x \phi_1 = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$(14) \quad \partial_x \phi_2 = \partial_t w \quad \text{en } x = 0$$

et les conditions sur la surface libre:

$$(15) \quad \partial_t \eta = \partial_y \phi_1 + \partial_y \phi_2$$

$$(16) \quad \partial_t \phi_1 - \kappa' \Delta \eta + g(t) \eta = -\partial_t \phi_2$$

Ces dernières assurent le couplage entre les deux potentiels des vitesses. En appliquant la méthode de séparation des variables, on peut alors choisir pour les équations (10), (11),(12),(13),(15),(16) des solutions ayant les formes:

$$(17) \quad \phi_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt} \cdot \frac{\cos n\pi x \cdot \cosh n\pi(y+h)}{n\pi \sinh(n\pi h)}$$

$$(18) \quad \phi_2(x, y, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \cosh q_n(x-1)}{q_n \sin(q_n h)}$$

$$(19) \quad \eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n(t) \cosh q_n(x-1) + a_n(t) \cos n\pi x\}$$

où les coefficients a_n et b_n qui dépendent du temps (souvent appelés coordonnées généralisées) seront déterminés ultérieurement et la suite q_n est choisie de telle sorte que les fonctions $\cos q_n(y+h)$ soient orthogonales au sens de $L^2[-h,0]$. La suite satisfait la condition suivante qui permet de déterminer ses éléments:

$$(20) \quad q_n h \cdot \operatorname{tg}(q_n h) = \text{const.}$$

Compte tenu de la condition limite (16), la solution (17)- (18)- (19) doit maintenant satisfaire l'équation:

$$(21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi h(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n \right] \frac{\cos n\pi x}{n\pi h(n\pi h)} - \left[h \frac{d^2 b_n}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_n^2) b_n \right] \cosh q_n(x-1) \right\} = 0$$

qui, compte tenu de l'orthogonalité de $\cos n\pi$ au sens de $L^2[0,1]$, donne lieu à:

$$(22) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi h(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \left[h \frac{d^2 b_k}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) b_k \right]$$

n=1,2,.....

avec

$$(23) \quad A_{nk} = 2n\pi q_k \frac{\sinh q_k \tanh n\pi h}{q_k^2 + n^2 \pi^2}$$

L'équation (22) montre que les coefficients a_n sont influencés par l'excitation paramétrique, mais aussi par le mouvement de la poutre à travers les coefficients b_k . qui sont directement reliés au mouvement de la paroi élastique à travers la condition cinématique (14) qui se traduit par:

$$(24) \quad w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \frac{\sinh q_n}{\sin q_n h} \cos q_n (y + h)$$

Cette expression est obtenue en supposant que le système hydroélastique est au repos à $t=0$. La propriété d'orthogonalité des fonctions $\cos q_n (y + h)$ nous permet d'exprimer $b_n(t)$ en fonction de la déformation de la poutre:

$$(25) \quad b_n(t) = \frac{\sin q_n h}{\sinh q_n \|\cos q_n (y + h)\|^2} \int_{-h}^0 w(y, t) \cos q_n (y + h) dy$$

En adoptant pour l'équation de la poutre une solution de la forme:

$$(26) \quad w(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) E_k(y)$$

où $E_k(y)$ est le k ème mode normal de l'oscillation de la poutre et ψ_k une troisième suite de coordonnées généralisées. L'équation (25) devient:

$$(27) \quad b_n(t) = \frac{\sin q_n h}{\sinh q_n \|\cos q_n (y + h)\|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \int_{-h}^0 E_k(y) \cos q_n (y + h) dy$$

Dans le cas d'une poutre simplement encastrée, les modes normaux $E_k(y)$ sont:

$$(28) \quad E_k(y) = (\sin p_k (y + h) - \sinh p_k (y + h)) + C_k (\cos p_k (y + h) - \cosh p_k (y + h))$$

avec

$$(29) \quad C_k = \frac{\cos p_k (h + H) + \cosh p_k (h + H)}{\sin p_k (h + H) - \sinh p_k (h + H)}$$

Les valeurs propres p_k sont les racines de l'équation:

$$(30) \quad \cosh p_k(h+H) \cdot \cosh p_k(h+H) + 1 = 0$$

La relation (27) signifie que le potentiel ϕ_2 est régi par le mouvement de la poutre. Par conséquent, on peut éliminer la suite b_n au profit des $\psi_n(t)$ dans l'équation (22) qui devient alors:

$$(31) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi h(n\pi h)(g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} X_{km}) \left[h \frac{d^2 \psi_m}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \psi_m \right]$$

où les éléments X_{km} de la matrice X sont introduits pour exprimer (25) sous une forme compacte.

Dans le cas où la poutre n'est pas chargée, les coordonnées généralisées $\psi_n(t)$ sont données par: $\psi_n(t) = \sin \Omega_n t$ où Ω_n est la fréquence naturelle du n ème mode de vibration et elle est définie par $\Omega_n = p_n^2 / \sqrt{\delta}$.

Dans le cas général d'une paroi élastique chargée, les coordonnées généralisées $\psi_n(t)$ doivent être déterminées en substituant la forme choisie pour la solution (26) dans l'équation (7) qui devient après simplification:

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} + \frac{p_k^4}{\delta} \psi_k \right) E_k(y) = \gamma \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t}$$

L'orthogonalité des modes normaux $E_k(y)$ au sens de $L^2[-h, H]$ permet d'écrire:

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + \frac{p_n^4}{\delta} \psi_n = \frac{\gamma}{\|E_n\|^2} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t} E_n(y) dy$$

En remplaçant ϕ par la somme $\phi_1 + \phi_2$ et en utilisant les relations (17), (18) puis l'égalité (25) pour éliminer $b_n(t)$ au profit de $\psi_n(t)$, l'équation (33) prend la forme:

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + \frac{p_n^4}{\delta} \psi_n + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} X_{mk} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} - C_{nk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial t^2} \right] = 0$$

avec

$$(35) \quad C_{nk} = \frac{\gamma}{\|E_n\|^2 k \pi \sinh k \pi h} \int_{-h}^0 \cosh k \pi (y + h) E_n(y) dy$$

$$(36) \quad B_{nm} = \frac{\gamma \cosh q_m}{\|E_n\|^2 q_m \sin q_m h} \int_{-h}^0 \cos q_m (y + h) E_n(y) dy$$

En supposant que les développements représentant ϕ et w puissent être tronqués au N ème mode les équations (34) et (31) forment un système d'équations de Mathieu couplées qui se met sous la forme:

$$(37) \quad G \frac{dZ}{dt} = F(t)Z$$

où G est une matrice $4N \times 4N$ constante, $Z = \left(a, \frac{da}{dt}, \psi, \frac{d\psi}{dt} \right)^t$ est un vecteur de dimension $4N$, et

$F(t)$ est une matrice $4N \times 4N$ périodique et de fréquence ϖ . La réponse du système hydroélastique s'exprime à travers les nombres caractéristiques de Floquet du système (37). D'après la théorie de Floquet le vecteur solution $Z(t)$ d'un tel système peut s'écrire sous la forme:

$$(38) \quad Z(t) = e^{\sigma t} \cdot P(t)$$

où σ est une constante complexe appelée constante de Floquet et $P(t)$ est une fonction vectorielle périodique de période T égale à celle du forcing. Les valeurs propres $e^{\sigma T}$ de la matrice de monodromie contrôlent le taux d'amplification de la solution. Cette matrice peut être obtenue en intégrant (37) N fois sur la période T avec des conditions initiales données par la matrice identité. Pour un forcing harmonique la matrice de monodromie est réelle et inversible. En conséquence, si λ_n est valeur propre, il en est de même pour λ_n^{-1} , $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\lambda}_n^{-1}$, la barre signifiant qu'il s'agit du nombre complexe conjugué. Compte tenu de cette propriété, le système hydroélastique est stable si toutes les valeurs propres λ_n sont distinctes et se trouvent sur le cercle unité, dans le plan complexe. La transition vers l'instabilité a lieu lorsque deux valeurs propres quittent le cercle unité après avoir fusionné.

3. CAS PARTICULIERS

Dans certains cas pratiques des simplifications importantes peuvent être effectuées sur le système (37). Nous considérons ici deux exemples.

3-1 cas où la poutre se déplace comme un piston :

M Debiante dans le dernier chapitre dans sa thèse doctorat a modélisée la poutre par un système masse-ressort, de masse m_s et une paroi rigide et mobile, animée d'un mouvement de translation horizontale.

$$\begin{cases} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \sum_{k=1}^N A_{nk} a_k - B_n w = 0 \\ M_s \frac{d^2 w}{dt^2} + K_s w + \sum_{n=1}^N A_n^* a_n = 0 \end{cases} \quad (39)$$

1-4-2 le cas où la poutre articule :

On s'intéresse, ici au cas où la poutre est modélisée par une paroi articulée à sa base et animée d'un mouvement oscillatoire d'angle θ petit .

le fluide est sous l'effet de la gravité et la tension superficielle.

Le système mécanique est modélisé par un point géométrique M auquel est associé .

D'après la théorie du moment cinétique .

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (40)$$

Où $\vec{L}$ est le moment cinétique d'un corps et $\vec{\tau}$ le moment résultant des forces qui lui sont appliquées.

La condition dynamique traduit la continuité de la pression normale, soit :

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi)^2 + gy \right) \quad (41)$$

Cette formule contient un terme de pression hydrostatique invariant dans le temps pour une côte y donnée. Si l'on définit $\vec{w}$ comme étant le déplacement de la structure par rapport à la position d'équilibre sous le chargement hydrostatique la relation (41) se simplifie [Chai] en :

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi)^2 + \vec{g} \cdot \vec{w} \right) \quad (42)$$

Ainsi le moment de la pression du fluide, par rapport à l'origine O, est

$$M_f = \rho_f \int_{-h}^0 r \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x=0} dy \quad (43)$$

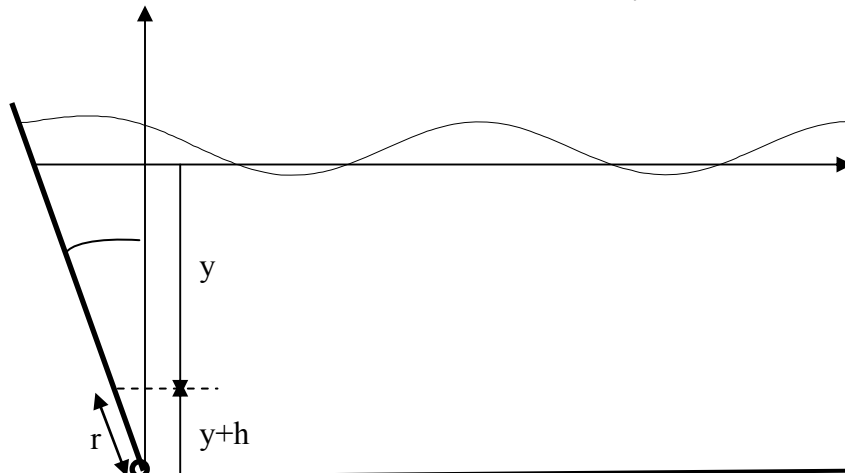


Figure 2: modélisation de la paroi mobile par une paroi articulée a sa base.

La conservation du moment angulaire donne :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \int_{-h}^0 r \left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{x=0} dy \quad (45)$$

Ici I est le moment d'inertie de la paroi mobile et K la constante de torsion du ressort. L'adimensionalisation est effectuée avec les grandeurs de références suivantes :

$$I_0 = \rho_f L^4; K_0 = \rho_f g L^3; t_0 = \sqrt{L/g}$$

Pour les petites valeurs de θ on peut écrire : $r \approx y + h$ et sachant que

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \frac{\cosh n\pi(y+h)}{n\pi \sinh(n\pi h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \cosh q_n}{q_n \sin(q_n h)} \quad (46)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 (y+h) \left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{x=0} dy &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \frac{1 + \sinh(n\pi h) * n\pi h - \cosh(n\pi h)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi h)} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \frac{-1 + \sin(q_n h) * q_n h + \cos(q_n h)}{q_n^3 \sin(q_n h)} \cosh(q_n) \end{aligned} \quad (47)$$

Ainsi, l'équation (45) devient :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \frac{n\pi h \sinh(n\pi h) - \cosh(n\pi h) + 1}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi h)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \frac{q_n h \sin(q_n h) + \cos(q_n h) - 1}{q_n^3 \sin(q_n h)} \cosh(q_n) \quad (48)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{d^2 b_n}{dt^2} \quad (49)$$

Avec

$$A_n = \frac{n\pi h \sinh(n\pi h) - \cosh(n\pi h) + 1}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi h)}, \quad B_n = \frac{q_n h \sin(q_n h) + \cos(q_n h) - 1}{q_n^3 \sin(q_n h)} \cosh(q_n)$$

En l'absence de la viscosité, la condition cinématique sur les interfaces fluide-solide traduit l'imperméabilité de la surface. Elle stipule que la vitesse normale du liquide à la paroi est la même que celle du point solide lui correspondant. Ainsi, sur la paroi mobile on aura :

$$\phi_x(0, y, t) = r \frac{d\theta}{dt} \approx (y+h) \frac{d\theta}{dt}$$

Soit:

$$\phi_x(0, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)} = (y+h) \frac{d\theta}{dt} \quad (50)$$

Ce qui donne après intégration par rapport au temps :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cdot \frac{\cos q_n(y+h) \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)} = (y+h)\theta(t)$$

Cette expression est obtenue en supposant que le système hydroélastique est au repos à $t=0$. La propriété d'orthogonalité des fonctions $\cos q_n(y+h)$ nous permet d'exprimer $b_n(t)$ en fonction de l'angle $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} b_n(t) \cdot \frac{\|\cos q_n(y+h)\|^2 \cdot \sinh q_n}{\sin(q_n h)} &= \theta(t) \int_{-h}^0 (y+h) \cos q_n(y+h) dy \\ &= \theta(t) \frac{\cos(q_n h) + q_n h \sin(q_n h) - 1}{q_n^2} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{\sin(q_n h) \cos(q_n h) + q_n h \sin^2(q_n h) - \sin(q_n h)}{q_n^2 \sinh q_n \|\cos q_n(y+h)\|^2} \theta(t) \\ &= T_n \theta(t) \end{aligned} \quad (51)$$

où

$$T_n = \frac{\sin(q_n h) \cos(q_n h) + q_n h \sin^2(q_n h) - \sin(q_n h)}{q_n^2 \sinh q_n \|\cos q_n(y+h)\|^2} \quad (52)$$

En introduisant (51) dans (52), on obtient

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (53)$$

soit

$$\left[I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} \quad (54)$$

En remplaçant b_n par son expression (51) dans l'équation (22) :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + n\pi th(n\pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \left[h \frac{d^2 \theta}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \theta \right] \quad (55)$$

En multipliant les deux membres par A_n et en sommant sur n , on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{d^2 a_n}{dt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n \left[h \frac{d^2 \theta}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \theta \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n n\pi th(n\pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n \quad (56)$$

Compte tenu de ce résultat l'équation (42) s'écrit

$$\left[I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n \left[h \frac{d^2 \theta}{dt^2} - (g(t) - \kappa' q_k^2) \theta \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \pi h (n \pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n$$

(57)

soit

$$I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + K_0 \theta = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n [n \pi h (n \pi h) (g(t) + n^2 \pi^2 \kappa') a_n]$$

Avec

$$I_0 = I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot T_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n h ; \quad K_0 = K + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k A_n [g(t) - \kappa' q_k^2] \theta$$

Ce qui se met sous la forme

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{K_0}{I_0} \theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{I_0} n \pi h (n \pi h) [g(t) + n^2 \pi^2 \kappa'] a_n \quad (58)$$

Cette relation ne fait intervenir qu'une seule dérivée seconde, celle de θ . Nous allons transformer la relation (55) pour ne conserver que celle de a_n . Pour ce faire, on combine (55) et (58) pour obtenir :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \left[\frac{K_0 h}{I_0} + g(t) - \kappa' q_k^2 \right] \theta - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\delta_{mn} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \frac{A_m h}{I_0} \right] m \pi h (m \pi h) [g(t) + m^2 \pi^2 \kappa'] a_m$$

Cette équation peut se mettre sous la forme condensée

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = C_n \theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} a_m \quad (59)$$

Où

$$C_n = - \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \left[\frac{K_0 h}{I_0} + [g(t) - \kappa' q_k^2] \right] ;$$

$$D_{nm} = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\delta_{mn} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} T_k \frac{A_m h}{I_0} \right] m \pi h (m \pi h) [g(t) + m^2 \pi^2 \kappa']$$

Où δ_{mn} est le symbole de kronecker.

APPLICATION :

Dans notre étude ,on s'intéresse par le cas où la poutre est articulée ,les calculs effectués concernent le cas d'un système dont les caractéristiques sont : Les calculs effectués concernent le cas d'un système dont les caractéristiques sont :

$$L=1.2192m, H=1.524m, \rho_f=1041kg/m^3 \quad \rho_s=2689 kg/m^3$$

$$I_A = 0.344 \quad , \quad K_A = 0.3255 .$$

Les développements représentant ϕ_1 et ϕ_2 sont tronqués au septième mode et les équations (42) forment un système d'équations de Mathieu couplées qui se met sous la forme (37):

$$G \frac{dZ}{dt} = F(t)Z \quad (60)$$

où G est une matrice 16×16 constante, $Z = \left(a, \frac{da}{dt}, w, \frac{dw}{dt} \right)^t$ est un vecteur de dimension 16, et $F(t)$ est une matrice 6×16 périodique, de période T et de fréquence ω .

Comme nous l'avons vu, la stabilité d'un tel système est examinée à partir du calcul des valeurs propres de la matrice de monodromie. Si G_T représente cette matrice,

$$Z(t+T) = G_T Z(t) \quad (61)$$

Elle permet de représenter la solution à l'instant t en fonction de la solution à l'instant $t-T$. En faisant $t = 0$ dans (47) on obtient :

$$Z(T) = G_T Z(0)$$

La matrice de monodromie apparaît ainsi comme la matrice des composantes des vecteurs $Z(T)$ pour un choix d'un vecteur de conditions initiales. Cette matrice peut être calculée en intégrant le système (46) sur une période T , avec $Z(0) = I$, I étant la matrice identité. Dans notre cas cette opération a été effectuée numériquement, en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Nous avons vu que les propriétés des valeurs propres de la matrice de monodromie impliquent qu'il n'y a stabilité que si tous leurs modules sont égaux à un. Le passage à l'état instable se fait lorsque une (des) paire (s) de valeurs propres quitte(nt) le cercle unité après avoir fusionné, avec un déplacement radial qui conduit l'une d'elles vers l'intérieur et l'autre vers l'extérieur. Cette sortie peut se faire sur l'axe des réels aux points de coordonnées (-1) et $(+1)$ et dans ce cas la transition sera dite de type I (figure 3). Lorsque cette fusion se fait en dehors de l'axe des réels la transition est désignée par le type II (figure 4).

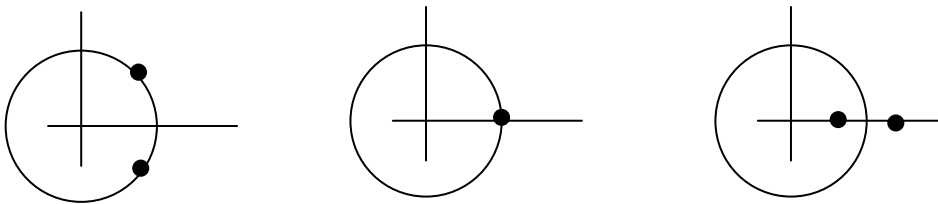


Figure 3: fusion des valeurs propres lors d'une transition de type I

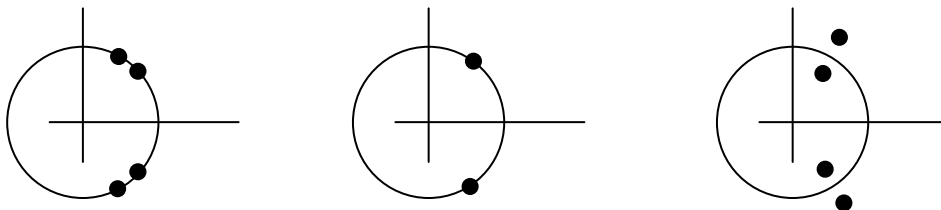


Figure 4: fusion des valeurs propres lors d'une transition de type II

Rappelons par ailleurs que si λ_n est valeur propre, il en est de même pour λ_n^{-1} , $\bar{\lambda}_n$ et $\bar{\lambda}_n^{-1}$. Toutefois, sur le cercle unitaire le module étant égal à un (01) pour toutes les valeurs propres, ce nombre est ramené à deux (02). Le tableau 1 qui contient un ensemble de valeurs propres obtenues au cours d'une itération montre bien que ces dernières vont par paires conjuguées.

Le cas de fusion $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ correspond à l'existence d'une solution périodique de période T alors que le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ se rapporte à celle d'une solution de période 2T. Outre la transition résultant de la perte de stabilité, les diverses possibilités de fusion ont sur le comportement ultérieur du système des conséquences variées. Les solutions non bornées (celles correspondant à des valeurs propres de modules supérieurs à 1) peuvent être divisées qualitativement en deux types différents. Les deux croissent exponentiellement avec le temps mais l'un est oscillatoire alors que l'autre ne l'est pas. Les solutions bornées sont apériodiques et possèdent deux fréquences : la partie imaginaire de λ et la fréquence de l'excitation extérieure. Les profils correspondant à ces solutions sont variés et dépendent du rapport de ces fréquences. Lorsque ce ratio est petit la solution est presque périodique, avec une amplitude et une phase ayant une modulation haute fréquence. Dans le cas contraire, les profils ont des formes complexes.

Cette application a été proposée uniquement pour illustrer la méthode. Nous n'avons pas pu effectuer une étude plus étoffée en raison de la proximité de la date prévue pour la soutenance de cette thèse. Nous prévoyons d'étudier les effets des différents paramètres du problème et d'examiner la manière avec laquelle l'instabilité se produit, à l'aide d'un développement asymptotique de la solution du problème pour de faibles valeurs de β .

Partie imaginaire	Partie réelle
0.401272051983650	0.915958868201002
-0.401272051983650	0.915958868201002
0.829101339072534	0.559098354082844
-0.829101339072534	0.559098354082844
0.777225550464557	0.629220802449883
-0.777225550464557	0.629220802449883
0.983311627692371	0.181929204192771
-0.983311627692371	0.181929204192771
0.126622088518416	-0.991951029205876
-0.126622088518416	-0.991951029205876
0.327381966982711	-0.944892082370205
-0.327381966982711	-0.944892082370205
0.569291072903301	-0.822135987965250
-0.569291072903301	-0.822135987965250
0.464132791385764	-0.885765611328066
-0.464132791385764	-0.885765611328066

Le tableau 1 : contient un ensemble de valeurs propres obtenus au cours d'une itération .

Résultat obtenue :

Nous avons représenté dans les figures suivants les courbes de stabilité obtenues dans le plan (β , ω), en utilisant une forme de méthode de bisection pour le passage à l'instabilité.

1- la comparaison entre les deux types de transition.

TYPE I

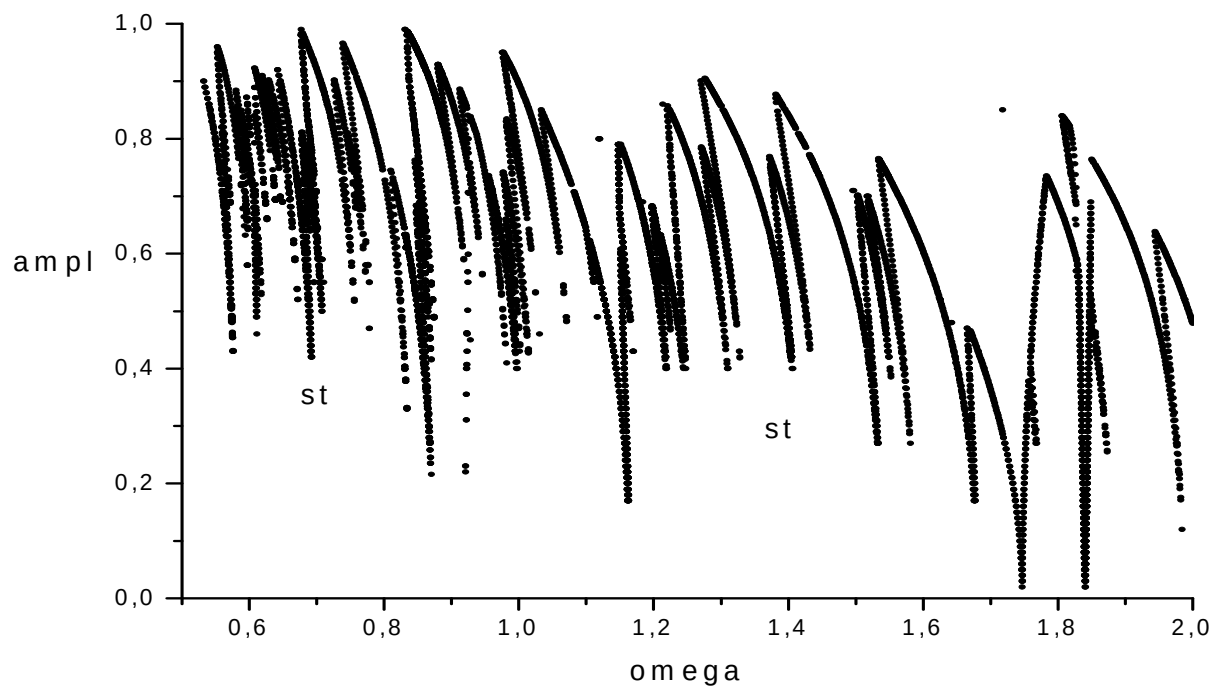


Figure 5 : courbe de stabilité d'une poutre articulée avec $H=0.5$ type 1 .

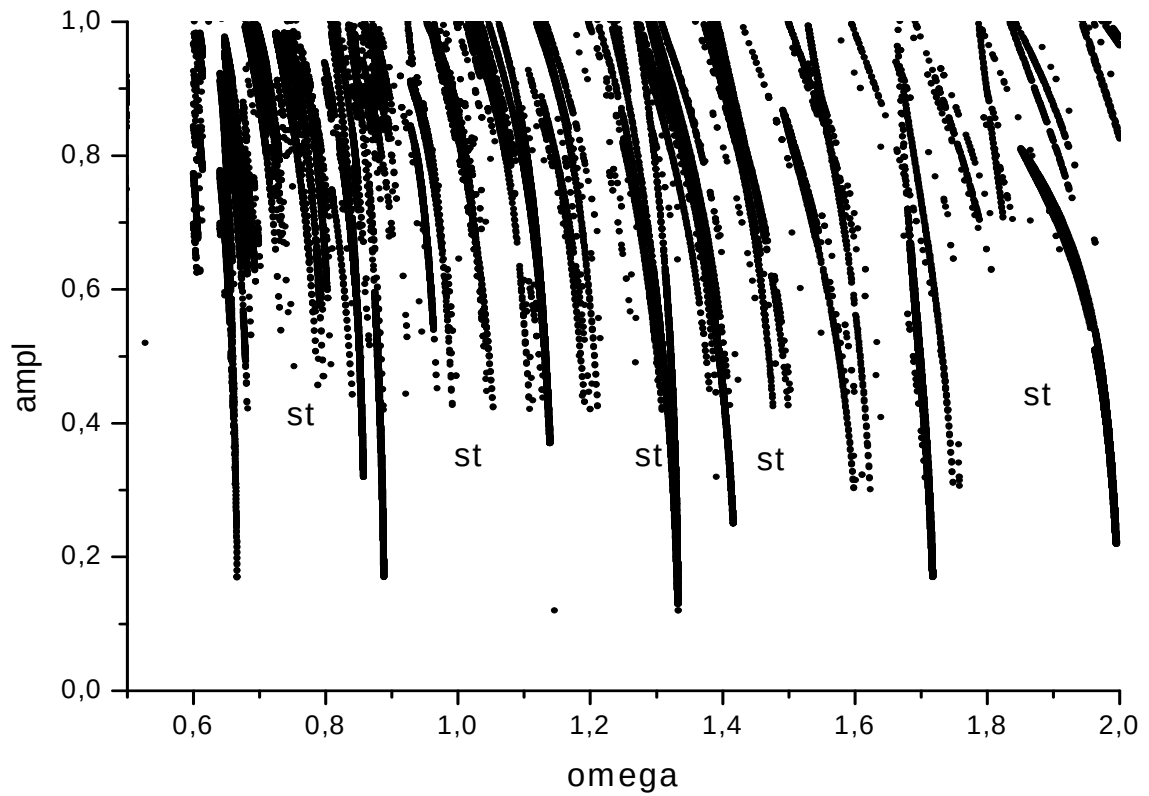


Figure 6 : courbe de stabilité d'une poutre articulée avec $H=0,5$ type II .

Ces courbes séparent les régions marquées « st » où les solutions sont stables de celles où elles sont instables. Les zones instables sont naturellement plus importantes aux plus grandes accélérations de l'excitation externe et forment des pics de plus en plus étroits avec la diminution de β . En théorie ces courbes atteignent l'axe horizontal mais dans notre cas nous n'avons pas considéré les cas où les épaisseurs des pics sont inférieures à 10^{-6} .

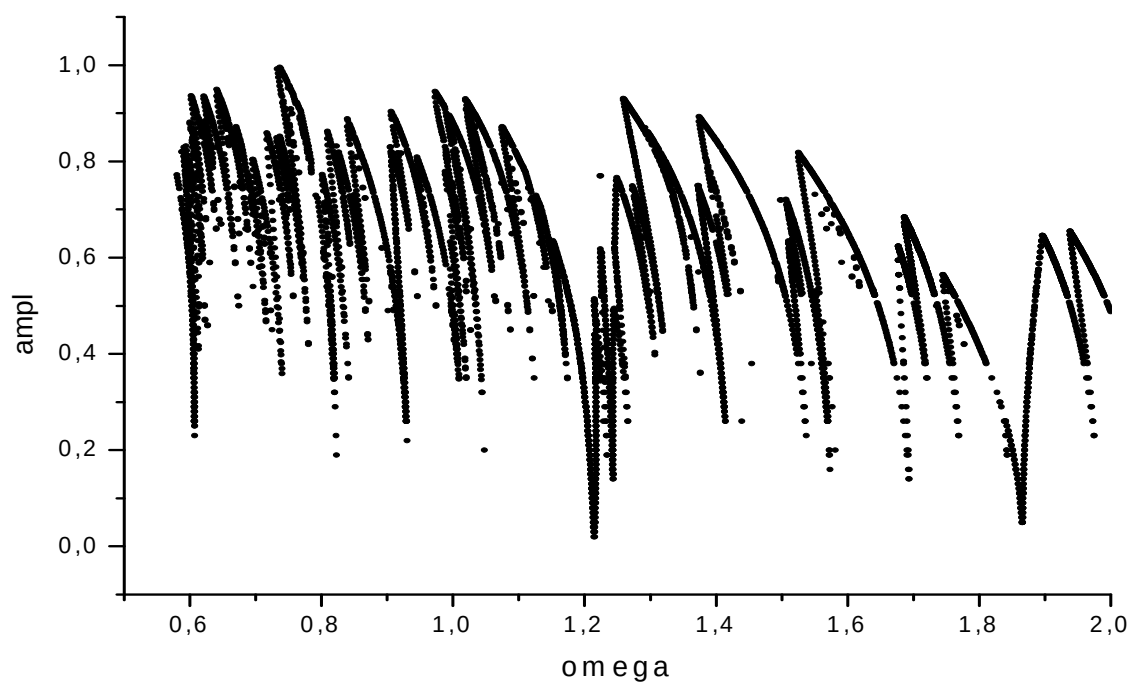


Figure 7 : courbe de stabilité d'une poutre articulée avec $H=0,5$ type 1&2 ω .
Effet de remplissage de reservoir

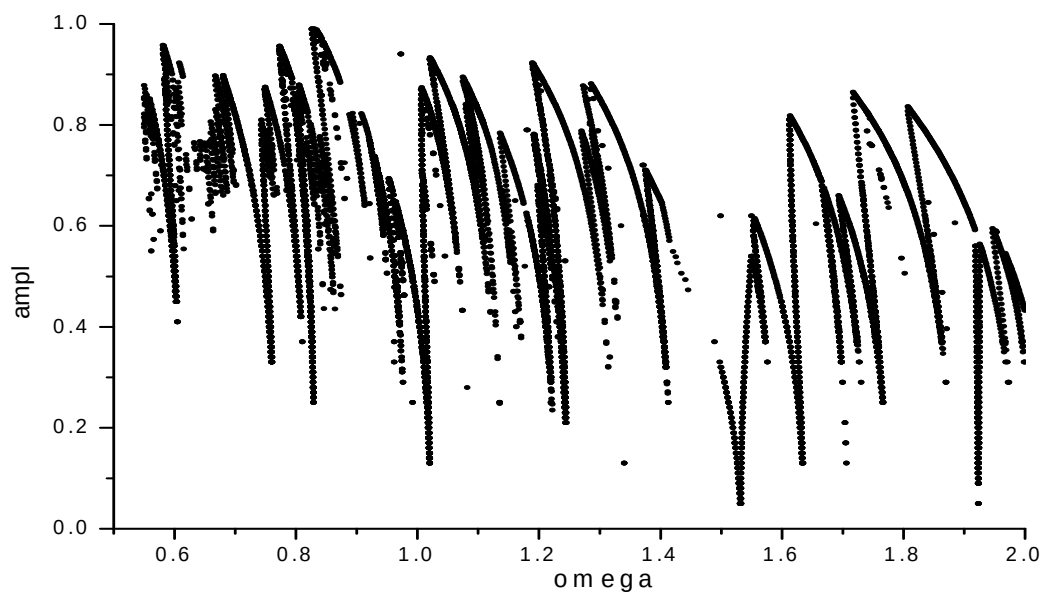


Figure 8 : courbe de stabilité d'une poutre articulée avec $H=0,3$ type 1&2 ω
on peut observer que les courbe de $h=0.5$ sont plus instable que cel de $h=0.3$